

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

Tratamiento de Lagrangianos Efectivos
en la Teoría Térmica de Campos
y Aplicaciones a Sistemas Nucleares

Tesis Doctoral

Lic. Ricardo M. Aguirre

Director : Dr. Osvaldo E. Civitarese

Codirector : Dr. Angel L. De Paoli

La Plata, Julio de 1995

Agradecimientos

Debo un especial agradecimiento.

- * A mi gente, que me brindó su apoyo en todos estos años.
- * A mis colegas y amigos Marta, Osvaldo, Angel, Martin, Mario y Eduardo.
- * A los investigadores y docentes del Departamento que me brindaron sus conocimientos.

Indice

INTRODUCCIÓN	3
1 Modelos Relativistas en Física Nuclear	7
1.1 Introducción	7
1.2 Acoplamiento a un campo escalar.	8
1.3 Acoplamientos con campos de carácter pseudoescalar y vectorial . .	16
1.3.1 Representación espectral del propagador del nucleón	17
1.3.2 Polos fantasmas en cálculos autoconsistentes	18
1.3.3 Resultados	20
1.4 Modelo QHD-I	20
1.4.1 Aproximación de Campo Medio	21
1.4.2 Aproximación Relativista de Hartree	24
1.4.3 Regularización de la Autoenergía.	27
1.4.4 Tensor de Energía-Impulso Renormalizado	30
1.4.5 Aproximación de Dirac-Hartree-Fock	32
1.5 Conclusiones	34
2 La Dinámica Térmica de Campos (DTC)	35
2.1 Introducción	35
2.2 Fundamentos de la DTC	37
2.3 Estructura de la DTC	39
2.4 La DTC del Equilibrio	41
2.4.1 Campos Libres	42
2.4.2 Campos en Interacción	44
2.4.3 La Condición de Estado Térmico	45
2.4.4 Desarrollo Perturbativo	47
2.4.5 El Propagador Exacto	51
2.4.6 Renormalización	54
3 Tratamientos Alternativos en la Dinámica Cuántica de Hadrones(DCH)	55
3.1 Introducción	55
3.2 La Expansión en Lazos	57
3.2.1 Formalismo	57
3.2.2 Resultados	65
3.3 La Aproximación de Fases al Azar Relativista	67
3.4 Método de la Transición Perturbativa	70

3.4.1	Introducción	70
3.4.2	El Estado Fundamental	71
3.4.3	Régimen Perturbativo	72
3.4.4	Resultados	78
3.5	Conclusiones	79
4	Modelos Alternativos en la DCH	83
4.1	Introducción	83
4.2	El Modelo Sigma-Omega no lineal (SONL)	84
4.2.1	Materia Nuclear Infinita	84
4.2.2	Materia Nuclear Semi-infinita	87
4.3	El Modelo de Zimanyi-Moszkowski (ZM)	89
4.3.1	El Modelo	89
4.3.2	Materia Semi-infinita	96
4.4	El modelo ZM mas allá de la ACM	96
4.4.1	La Interacción Residual	97
4.4.2	Cálculo Perturbativo	99
4.5	Conclusiones	102
	Apéndice A	107
	Apéndice B	109
	Apéndice C	111
	Apéndice D	113
	Apéndice E	117
	Apéndice F	121
	Apéndice G	123

INTRODUCCIÓN

La descripción teórica de sistemas nucleares (materia nuclear, núcleos finitos, nucleones) emplea diferentes grados de libertad, según el rango de energías implicado. En los procesos de dispersión entre nucleones es frecuente emplear modelos basados en el intercambio de bosones mediadores (mesones). En cambio para describir la estructura de los núcleos atómicos en equilibrio es más adecuado el uso de potenciales estáticos. En este caso se considera que cada nucleón en el medio nuclear se mueve como una partícula independiente en un potencial efectivo proveniente de su interacción con los restantes nucleones. Los parámetros del modelo se ajustan consistentemente con los datos de la dispersión NN y con las propiedades del deuterón y de los núcleos más livianos. También se estudia la hipotética materia nuclear, consistente en un sistema homogéneo con igual número de protones y neutrones en ausencia de la interacción electromagnética y en el límite de número infinito de partículas, a densidad finita. En dicho límite sólo la energía de ligadura por partícula y la densidad de saturación permanecen como cantidades significativas. La situación en el centro de núcleos pesados, tales como el ^{208}Pb , se aproximaría a la condición de la materia nuclear. En tales casos, la evidencia experimental obtenida por dispersión de electrones indica que la densidad de carga es aproximadamente constante e igual a $\rho_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$. Mediante el uso de potenciales de interacción de dos cuerpos se han obtenido puntos de saturación que se ubican en una banda, la llamada línea de Coester, que no incluye el valor empírico. Se ha demostrado que las discrepancias en los valores teóricos correspondientes a los puntos de saturación no provienen del tratamiento inadecuado de las interacciones, sino que se deben a efectos de naturaleza tensorial presentes en la interacción NN.

Ejemplos de potenciales utilizados en cálculos de estructura nuclear son los de Bonn, Reid y París [1].

Por otra parte, la Cromo Dinámica Cuántica (CDC) se ha impuesto como la teoría más firme para el análisis de la interacción fuerte. Debido al fenómeno del confinamiento no hay evidencia directa de sus grados de libertad fundamentales, de modo que los detalles de la interacción básica quark-gluón y gluón-gluón deben inferirse indirectamente. Debido al comportamiento en impulso de la constante de acoplamiento de la CDC, el tratamiento de la interacción entre hadrones es un problema de difícil resolución.

El nexo formal entre estos dos cuerpos teóricos puede establecerse por la introducción de modelos efectivos, inspirados en las propiedades de la CDC, que emplean grados de libertad efectivos como quarks constituyentes y mesones.

El presente trabajo pretende proporcionar una descripción de la física de hadrones en el caso en que puede tratárselos como campos locales. Esta descripción se enmarca en el formalismo que se ha dado en llamar Dinámica Cuántica de Hadrones (DCH). El área de aplicación es vasta, abarca desde la hipotética materia nuclear hasta los núcleos finitos y procesos de dispersión. Admite, por lo tanto, una comparación directa con la experiencia. Desde el área nuclear deben requerirse valores adecuados para la densidad de saturación de la fuerza nuclear, la energía de ligadura por nucleón, el espesor de la superficie nuclear y la compresibilidad entre otras propiedades.

Los métodos de solución para los modelos efectivos deben tener en cuenta la intensidad de los acoplamientos y el efecto de muchos cuerpos.

Consideraremos el problema de los modelos y métodos de resolución adecuados para la física nuclear con particular detenimiento, y posteriormente estudiaremos las características de los resultados numéricos. Hemos considerado necesario introducir los efectos térmicos del medio nuclear. Esto proporcionará información de interés acerca de la estabilidad de las soluciones y sobre el comportamiento macroscópico del sistema.

Un tratamiento teórico coherente del medio nuclear debe incluir los grados de libertad bariónicos (nucleones, deltas y otras resonancias) y de mesones ($\pi, \sigma, \omega, \rho$). En su versión más reciente la DCH ha incluido la formulación relativista. Distintas situaciones de la física nuclear requieren un tratamiento relativista, como ser aquellas en que los nucleones se hallan a alta densidad o a elevadas temperaturas. En estos casos, el flujo hidrodinámico de materia nuclear tiene velocidades comparables a la velocidad de la luz. Las colisiones entre iones pesados y la evolución de la materia en ciertas estrellas constituyen ejemplos típicos.

Debido a la extensión del tema, hemos dividido esta presentación en dos capítulos introductorios y otros dos de aplicaciones específicas. En el Capítulo 1 realizamos una introducción al uso de la teoría de campos en física nuclear. Allí se revisan algunos de los modelos mas sencillos capaces de describir las propiedades básicas de la materia nuclear a temperatura cero. Esto servirá a su vez para mostrar algunos de los métodos de solución empleados.

Dado el interés enunciado en analizar los efectos térmicos del medio nuclear, hemos seleccionado la Dinámica Térmica de Campos (DTC) como una formulación adecuada para tal fin. Dado que su empleo no está muy difundido hemos dedicado el Capítulo 2 para presentar sus fundamentos y realizar comparaciones con otras teorías mas conocidas como las de Matsubara o la de Keldysh. Anticipando los métodos que serán desarrollados posteriormente, en este capítulo nos detendremos especialmente en la discusión de los propagadores térmicos en la DTC.

Dado que las aproximaciones de orden mas bajo, las de campo medio, presentan ciertas falencias, ha sido necesario estudiar y desarrollar métodos alternativos para la introducción de correcciones sucesivas. En el Capítulo 3 presentamos algunas de ellas y usando la DTC evaluamos algunas de las propiedades de interés físico para la materia nuclear a densidad y temperatura finitas. Se presta particular atención a los esquemas no perturbativos conocidos como Aproximación de Fases al Azar Relativista y al desarrollo en lazos, que han surgido en la última década. Ya que éstos conducen a ciertas contradicciones insalvables, hemos propuesto un método mediante el cual se determina un régimen de validez perturbativa (Aproximación de la Transición Perturbativa). En todos los casos se emplea como modelo de prueba el modelo sigma-omega lineal, de uso habitual en la DCH.

No obstante la aceptación del modelo sigma-omega lineal, sus predicciones para la ecuación de estado de la materia nuclear y para la masa efectiva de los bariones han sido

objetadas. En el Capítulo 4 se describen algunos modelos alternativos que producen resultados mas aceptables, al costo de introducir mayor complejidad en los acoplamientos. De entre ellos hemos seleccionado el modelo de Zimanyi-Moszkowski para aplicar el método de la transición perturbativa. Para ello se toma un estado de referencia, obtenido no perturbativamente, y se deriva una interacción residual con acoplamientos efectivos que adquieren dinámicamente dependencia en la densidad y la temperatura. En este esquema se obtienen distintas cantidades de interés físico.

El presente trabajo no agota las posibilidades del formalismo desarrollado, que permanecen como tema de estudio y análisis para futuras investigaciones.

Modelos Relativistas en Física Nuclear

1.1 Introducción

En este Capítulo revisaremos algunos modelos sencillos empleados en la teoría de campos y que resultan de interés en física nuclear.

Comenzaremos con un lagrangiano para fermiones (ψ) y mesones escalares (σ) en interacción mediante un acoplamiento del tipo de Yukawa (ejemplo I):

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g_s \bar{\psi}(x)\sigma(x)\psi(x)$$

El campo escalar σ puede interpretarse, a lo sumo, como un intercambio efectivo de dos piones. Una característica de este modelo es que la energía por partícula tiene un comportamiento no monótono con la densidad bariónica y en consecuencia aparecen estados ligados [2],[3]. A densidades bariónicas relativamente elevadas desaparecen los estados ligados; a densidades intermedias puede ocurrir una transición de fase si el acoplamiento es lo bastante fuerte.

El siguiente ejemplo introduce el campo de piones, como grado de libertad explícito (ejemplo II), en un acoplamiento lineal de la forma :

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \bar{\Psi}(x)(ig_p \gamma_5 \tau \cdot \pi(x) - g_v \phi)\Psi(x)$$

Aquí Ψ indica un isoespín de dos componentes para protón (p) y neutrón (n) : $\Psi^1 = \psi_p$, $\Psi^2 = \psi_n$; $\tau : (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son las matrices de Pauli y $\pi : (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ la terna de campos de piones. Además se ha incluido un campo vectorial ω_μ necesario para balancear el efecto del acoplamiento escalar. Este modelo servirá para discutir la presencia de anomalías en las propiedades analíticas de las funciones de Green obtenidas mediante métodos autoconsistentes.

A continuación se presentará la primera versión del modelo propuesto por Walecka, conocido en la literatura como QHD-I (ejemplo III):

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g_s \bar{\psi}(x)\sigma(x)\psi(x) - g_v \bar{\psi}(x)\psi(x)\psi(x)$$

Para finalizar esta sección mencionaremos que el estudio de los núcleos finitos ha llevado a completar el modelo QHD-I con los mesones escalar-isovectorial π y el pseudovectorial-isoescalar ρ , conjuntamente con el campo electromagnético. Este lagrangiano, conocido como QHD-II [4],[5], [6], ha sido aplicado a la descripción de núcleos esféricos [7] y deformados [8] y a estados nucleares excitados [9]. Los parámetros del modelo son ajustados en el límite de materia infinita. De esta forma se obtiene un efecto de estructura de capas [4]. Sin embargo el desfasaje numérico de los resultados logrados para núcleos finitos (una separación entre niveles sobreestimada en un 30 %, una energía de superficie exagerada, una energía de ligadura reducida entre un 15 % y un 30 %) ha conducido a la incorporación de términos no lineales [10],[11] de la forma

$$V(\sigma) = \frac{a}{3!}\sigma^3 + \frac{b}{4!}\sigma^4$$

Si bien esta modificación mejora el ajuste de los niveles de energía, presenta el efecto indeseable de una constante de acoplamiento b negativa, comprometiendo la estabilidad del estado fundamental.

1.2 Acoplamiento a un campo escalar.

El lagrangiano del modelo es

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(i \not{\partial} - M)\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m_s^2 \sigma^2) + g \bar{\psi} \sigma \psi$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son :

$$\begin{aligned} (i \not{\partial} - M)\psi &= -g_s \sigma \psi \\ (\square + m_s^2)\sigma &= g_s \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

El lagrangiano es invariante ante una transformación de fase global sobre los espinores: $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$. Como consecuencia la corriente barionica $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ está conservada.

Las funciones de Green causales para fermiones y bosones libres vienen dadas por :

$$iG_{\alpha\beta}^0(x, x') = \langle T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') \rangle \quad (1.1)$$

$$i\Delta^0(x, x') = \langle T \sigma(x) \sigma(x') \rangle \quad (1.2)$$

respectivamente. Se ha empleado el simbolo $\langle \rangle$ para indicar valores esperados tomados en el vacío a temperatura cero. Tal estado consistirá en todos los estados de fermión ocupados hasta el nivel de Fermi y el resto desocupado, en tanto que no presenta mesones reales.

Suponiendo un sistema homogéneo y estático, la dependencia en coordenadas debe ser únicamente de la forma $x - x'$. La forma explícita de dichos propagadores a densidad y temperatura finitas se obtiene en el espacio de Minkowski como solución de una ecuación diferencial con las condiciones de contorno apropiadas (la condición de Kubo-Martin-Schwinger [12]).

Las correspondientes transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^0(z) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipz} G_{\alpha\beta}^0(p) \\ \Delta^0(z) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipz} \Delta^0(p) \end{aligned} \quad (1.3)$$

tienen el aspecto :

$$\begin{aligned} G^0 &= G_F^0 + G_D^0 \\ \Delta^0 &= \Delta_F^0 + \Delta_D^0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde

$$G_F^0 = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (1.5)$$

$$\Delta_F^0 = \frac{1}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} \quad (1.6)$$

$$G_D^0 = 2\pi i(\not{p} + M)\delta(p^2 - M^2)n_F(p_0) \quad (1.7)$$

$$\Delta_D^0 = -2\pi i\delta(p^2 - m_s^2)n_B(p_0) \quad (1.8)$$

En estas expresiones se ha realizado una separación entre las contribuciones de Feynman G_F^0 y Δ_F^0 y los términos que incluyen explícitamente la dependencia en la densidad G_D^0 y Δ_D^0 a través de los números de ocupación $n_F(p_0)$ y $n_B(p_0)$ para fermiones y bosones respectivamente

$$n_F(z) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\beta(z-\mu)}}, & z > 0 \\ \frac{1}{1+e^{\beta(z+\mu)}}, & z < 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$n_B(z) = \frac{1}{e^{\beta|z|} - 1} \quad (1.10)$$

aquí μ es el potencial químico, que tiene en cuenta la conservación del número bariónico. En el límite de temperatura cero dichos números de ocupación cumplen $n_F(p_0) \rightarrow \Theta(\mu - p_0)$ y $n_B(p_0) \rightarrow 0$, donde Θ indica la función de Heaviside. La energía de Fermi $E_F = \sqrt{p_F^2 + M^2} = \mu$ está relacionada con la densidad bariónica ρ_B mediante el impulso de Fermi p_F

$$\rho_B = \frac{\delta p_F^3}{3\pi^2} \quad (1.11)$$

donde δ indica la degeneración de isospin.

En dicho límite se tiene

$$G_{\alpha\beta}^0 = G_F^0 + 2\pi i\delta(p^2 - M^2)\Theta(\mu - p_0) \quad (1.12)$$

$$\Delta^0 = \Delta_F^0 \quad (1.13)$$

Si $G_{\alpha\beta}$ y Δ son los propagadores exactos, con interacción, éstos cumplirán con las ecuaciones de Dyson

$$G(p) = G^0(p) + G^0(p)\Sigma(p)G(p) \quad (1.14)$$

$$\Delta(p) = \Delta^0(p) + \Delta^0(p)\Pi(p)\Delta(p) \quad (1.15)$$

de 1.14 puede despejarse formalmente en términos del propagador libre y la autoenergía propia Σ

$$G^{-1}(p) = \gamma^\mu(p_\mu - \Sigma_\mu) - M + \Sigma_s(p) \quad (1.16)$$

En esta expresión se separaron las componentes escalar (Σ_s) y vectorial (Σ_μ) de la autoenergía. A partir de aquí pueden identificarse valores efectivos para la masa y el impulso

$$M^* = M - \Sigma_s \quad (1.17)$$

$$p_0 = \Sigma_0(p) \pm \sqrt{p^{*2} + M^{*2}} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \Sigma(p) \quad (1.19)$$

Usando este espectro puede construirse el propagador del nucleón sumando a todo orden una dada clase de diagramas, de esta manera resulta :

$$G(p) = G_F(p) + G_D(p) \quad (1.20)$$

$$G_F(p) = \frac{\gamma^\mu [p_\mu - \Sigma_\mu(p)] + M - \Sigma_s(p)}{[p_\mu - \Sigma_\mu(p)]^2 - [M - \Sigma_s(p)]^2 + i\epsilon}$$

$$G_D(p) = 2\pi i \{ \gamma^\mu [p_\mu - \Sigma_\mu(p)] + M - \Sigma_s(p) \} \\ \times \delta([p_\mu - \Sigma_\mu(p)]^2 - [M - \Sigma_s(p)]^2) \Theta(\mu - p_0 + \Sigma_0(p))$$

En teoría de perturbaciones, las correcciones a un lazo al propagador del nucleón vienen dadas por los diagramas indicados en la Figura (1.1).

A cada vértice corresponde un factor $-ig_s$ y un factor global de (-1) por cada lazo cerrado de fermión. Si sólo consideramos el término directo (corresponde al (a) de la figura (1.1)), la expresión analítica para la autoenergía es :

$$\Sigma_{\alpha\beta}(p) = ig^2 \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \Delta^0(0) \text{tr}[G^0(p')] \delta_{\alpha\beta} \quad (1.21)$$

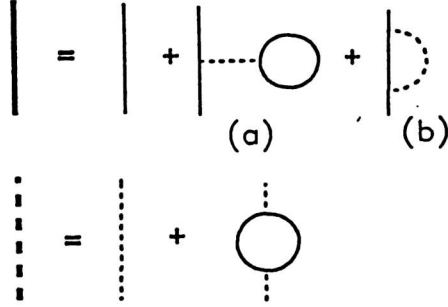


Figura 1.1 Diagramas de Feynman correspondientes al segundo orden perturbativo para el ejemplo I. Las líneas gruesas representan los propagadores exactos, en tanto que las delgadas los propagadores sin perturbar. La propagación de de fermiones y de bosones ha sido representada por líneas continuas y a trazos respectivamente.

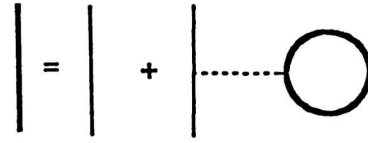


Figura 1.2 Aproximación al propagador de fermión en el esquema de Schwinger-Dyson. Líneas gruesas corresponden al propagador vestido por el medio, líneas delgadas al propagador de partícula libre.

Una manera de imponer la autoconsistencia del cálculo es construir la autoenergía utilizando el propagador exacto (1.20) en vez del propagador de fermión libre en (1.21). Esta aproximación puede interpretarse diagramáticamente de la forma indicada en la Fig. (1.2). De esta manera se obtienen dos términos. Uno de ellos contiene a $G_F(p)$ y es divergente. El otro contiene a G_D y es finito. La evaluación del primer término demuestra que este recoge las contribuciones del mar de Dirac de partículas con energías negativas. En teoría de campos es habitual omitir este tipo de aportes ordenando normalmente el lagrangiano de interacción. En el presente caso este procedimiento no es admisible ya que, como veremos en la sección 1.4.2, dicho término tiene contenido físico dependiente de la densidad bariónica. La omisión de la integral divergente junto con la imposición de autoconsistencia de los resultados es lo que se ha dado en llamar Aproximación de Campo Medio (ACM).

Debido a que la contribución vectorial del término directo es nula, en la ACM la autoenergía se reduce a :

$$\Sigma_s = \frac{8\pi g^2}{m_s^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (M - \Sigma_s) \delta(p^2 - (M - \Sigma_s)^2) \Theta(\mu - p_0) \quad (1.22)$$

La dependencia en la densidad entra a través del potencial químico, las funciones μ y ρ_B están relacionadas mediante :

$$\begin{aligned} \rho_B &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}[G(p)] e^{i\eta p_0} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 4M^* \delta(p^2 - M^{*2}) \Theta(\mu - p_0) \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde nuevamente se ha omitido la contribución del sustrato de estados de energía negativa. Este será, de aquí en más, el procedimiento adoptado para los cálculos de esta sección.

De (1.17) y (1.18) puede verse que el espectro de partícula independiente para fermiones guarda las características generales del espectro de partícula libre; un continuo de estados de energía positiva y negativa separados por un hueco de extensión $2M^*$, que varía con la

densidad, pero que nunca se anula. Este comportamiento permite asignar las condiciones de contorno en el propagador (1.20) siguiendo prescripciones similares a las del propagador causal de partícula libre. Por otro lado, siendo la masa efectiva independiente del impulso, es posible definir la energía y el impulso de Fermi de la manera habitual.

Con la finalidad de obtener una expresión analítica para la ecuación de estado se procederá a través de varias aproximaciones consistentes con la ACM empleada para el propagador. Para ello comenzaremos con la construcción del hamiltoniano canónico :

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$$

$$\mathcal{H}(x) = \dot{\bar{\psi}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\bar{\psi}}} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\sigma}} \dot{\sigma} - \mathcal{L}$$

Para el presente modelo, empleando las ecuaciones de movimiento y despreciando derivadas temporales totales se llega a :

$$H = \int d^3x \left[\bar{\psi} (i \gamma \cdot \nabla + M) \psi + \dot{\sigma}^2 - \frac{1}{2} g \bar{\psi} \sigma \psi \right]$$

Ya que el campo escalar tiene como fuente a la densidad bariónica escalar $\bar{\psi} \psi$, los campos ψ y σ no son independientes. Además, para materia uniforme y estática, el promedio $\langle \sigma \rangle$ no depende de las coordenadas. Haciendo esta suposición en la ecuación de movimiento se obtiene :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{g}{m_s^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \\ &= \frac{2M^* g}{m_s^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_q} \theta(\mu - q_0) = \Sigma/g \end{aligned} \quad (1.24)$$

con $\epsilon_q = \sqrt{q^2 + M^{*2}}$.

En la aproximación realizada puede reemplazarse el campo de bosón por su valor esperado $\langle \bar{\psi} \sigma \psi \rangle \simeq \langle \sigma \rangle \langle \bar{\psi} \psi \rangle$.

Se define la energía por partícula, ϵ , como el cociente entre el valor medio de H y el número bariónico, por lo tanto

$$\epsilon = \frac{1}{N} \int d^3x \langle \bar{\psi} [i \gamma \cdot \nabla + (M - \frac{1}{2} g \langle \sigma \rangle)] \psi \rangle \quad (1.25)$$

Los promedios de campos fermiónicos pueden evaluarse en términos de la función de Green (1.20)

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= -i \lim_{T \rightarrow 0^-} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_0 T} \text{tr}[G(p)] \\ &= 2M^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_p} \Theta(\mu - \epsilon_p) \\ \langle \bar{\psi} \gamma \cdot \nabla \psi \rangle &= \lim_{T \rightarrow 0^-} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_0 T} \mathbf{p} \cdot \text{tr}[\gamma G(p)] \\ &= -2i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_p} \mathbf{p}^2 \Theta(\mu - \epsilon_p) \end{aligned}$$

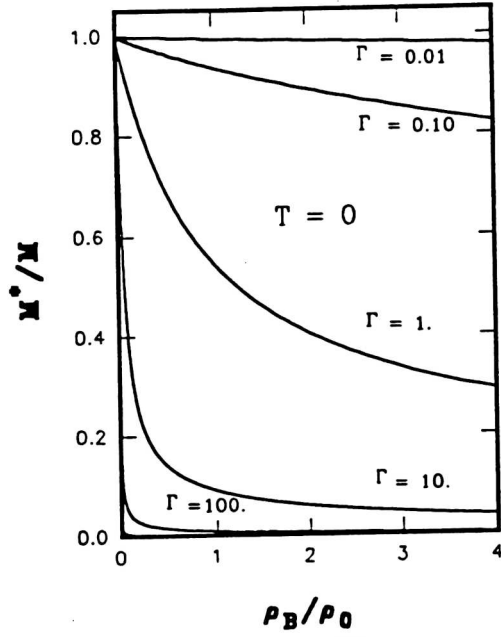


FIGURA 1.3 El cociente $x = M^*/M$ como función de la densidad en la ACM. Las curvas han sido parametrizadas con el acoplamiento Γ . Las cantidades ξ, Γ han sido definidas en el texto.

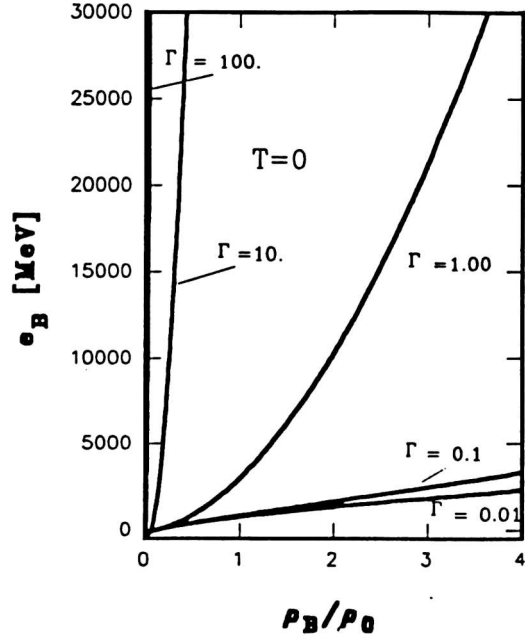


FIGURA 1.4 La energía de ligadura como función de la densidad a $T=0$. Las curvas han sido parametrizadas con el acoplamiento Γ .

Insertando estos resultados parciales en (1.25) se obtiene finalmente :

$$\epsilon = \frac{2V}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\epsilon_p^2 - \frac{1}{2} M^* \Sigma_s \right) \epsilon_p^{-1} \Theta(\mu - \epsilon_p) \quad (1.26)$$

Empleando las variables

$$\begin{aligned} \eta &= p_F / M^* \quad , \quad x = M^* / M \\ \xi &= p_F / M \quad , \quad \Gamma = (gM / \pi m_s)^2 \end{aligned}$$

la fórmula (1.17) puede escribirse como

$$1 - x = \frac{1}{2} \Gamma x^3 G(\eta)$$

haciendo uso de (1.22) y de

$$G(\eta) = \eta \sqrt{1 + \eta^2} - \ln \left(\eta + \sqrt{1 + \eta^2} \right)$$

La solución numérica de esta ecuación en términos de la densidad se presenta en la Fig. (1.3).

El potencial químico está relacionado con la energía de Fermi mediante $\frac{\mu}{M} = \sqrt{x^2 + \xi^2}$. La energía por partícula puede obtenerse a partir de (1.26)

$$\epsilon = \frac{3M}{8\eta^3} \left[2x\eta^3 \sqrt{1+\eta^2} + (2-x)G(\eta) \right]$$

A partir de esta expresión puede evaluarse la energía de ligadura e_B mediante $e_B = \epsilon - M$. El gráfico correspondiente se presenta en la Fig. (1.4). La presión a temperatura cero viene dada por :

$$P = \rho_B(\mu - \epsilon) \quad (1.27)$$

$$= \frac{M^4}{4\pi^2} \left[\xi^3 \sqrt{x^2 + \xi^2} - \frac{2}{3\Gamma} (1-x) \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \right] \quad (1.28)$$

De estos resultados pueden extraerse varias conclusiones :

i) No es posible ajustar todas las condiciones de saturación simultáneamente. Si se fija la densidad de saturación entonces resulta un sistema inestable. Por ejemplo, para $1.33 \leq p_F \leq 1.43$ se obtiene una energía de ligadura positiva $e_B \simeq 7.6$ MeV, $\Gamma \simeq 6.61$ y $x \simeq 0.96$. En cambio fijando la energía se obtiene una densidad muy baja ($p_F \simeq 0.45 fm^{-1}$) y un acoplamiento excesivo $\Gamma \simeq 40$ para $x \simeq 0.96$.

ii) La masa efectiva decrece rápidamente con la densidad si $\Gamma \geq 1$, aunque permanece no nula aún para densidades elevadas.

iii) El potencial químico entra en un régimen no monótono para cierto rango de la constante de acoplamiento. Lo mismo ocurre para la energía y la presión.

iv) En el límite de bajas densidades ($\xi \rightarrow 0$) se tiene:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{3}\Gamma\xi^3 \\ \mu &= M \left(1 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\Gamma\xi^3 \right) \\ E &= M \left(1 + \frac{3}{10}\xi^2 - \frac{1}{16}\xi^3 \right) \\ P &= \frac{M^4}{3\pi^2} \left(\frac{1}{5}\xi^5 - \frac{1}{6}\Gamma\xi^6 \right) \end{aligned}$$

Estos resultados coinciden con los de un tratamiento de Hartree no relativista; con la salvedad que aquí μ y ϵ contienen la energía en reposo.

v) En el límite de altas densidades (ultrarrelativista, $\xi \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\Gamma\xi^2} \\ \mu &= M \left(\xi + \frac{2}{\Gamma^2\xi^2} \right) \\ E &= M \left(\frac{3}{4}\xi + \frac{3}{2}\frac{1}{\Gamma\xi^3} \right) \\ P &= M \left(\frac{1}{4}\xi - \frac{3}{2}\frac{1}{\Gamma\xi^3} \right) \end{aligned}$$

El comportamiento dominante es el de un gas perfecto de fermiones, y éste se acentúa cuando crece la densidad. Es decir, los efectos de la interacción se diluyen a altas densidades, en coincidencia con el resultado obtenido para un sistema clásico en el límite de densidades elevadas [3].

La competencia de los efectos indicados en (iv) y (v) tienen como consecuencia una ecuación de estado del tipo de van der Waals. Al contrario del caso clásico el potencial químico y la energía de ligadura no son funciones monótonas de la densidad; originando la aparición de estados ligados de la materia.

Puede determinarse que el comportamiento físico del sistema depende fuertemente del rango de variación de la constante de acoplamiento Γ . Para cada densidad existen ciertos valores $\Gamma_{1c} < \Gamma_{2c} < \Gamma_{3c} < \Gamma_{4c}$ tales que

i) Para $\Gamma < \Gamma_{1c}$, tanto la presión como la energía son funciones monótonas crecientes con la densidad. El comportamiento es prácticamente el de un gas ideal de fermiones.

ii) Para $\Gamma_{2c} > \Gamma > \Gamma_{1c}$, las funciones ϵ y μ conservan su carácter monótono creciente, no así la presión. Este comportamiento es reminiscente al de una transición del tipo gas-líquido a una densidad crítica que depende de Γ .

iii) Si $\Gamma_{2c} < \Gamma < \Gamma_{3c}$, la energía deja de ser monótona y presenta un mínimo local.

iv) Cuando $\Gamma > \Gamma_{4c}$ la cantidad $\mu - M$, que puede ser interpretada como la energía necesaria para extraer una partícula del sistema, se torna negativa.

v) En el caso $\Gamma > \Gamma_{3c}$, la energía presenta un mínimo absoluto y desaparece la transición de fase.

Los valores críticos indicados dependen de la densidad del sistema y puede determinárselos mediante las condiciones indicadas a continuación :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi}(\Gamma = \Gamma_1) &= 0 \Rightarrow \\ \Gamma_1 &= - \left(1 + \frac{2}{3\eta} \right) \frac{2x-3}{x\xi\sqrt{x^2+\xi^2}} \\ p(\Gamma = \Gamma_2) &= 0 \Rightarrow \\ \Gamma_2 &= \frac{(1-x)(2-x)}{\xi^3\sqrt{x^2+\xi^2}} \\ \mu(\Gamma = \Gamma_3) &= M \Rightarrow \\ \Gamma_3 &= \frac{2(1-x)}{x(1-\xi^2)G(\eta)} \\ E(\Gamma = \Gamma_4) &= M \Rightarrow \\ \Gamma_4 &= \frac{x^3(2-x)}{x(1-\xi^2)G(\eta)} \end{aligned}$$

El gráfico de la Fig. (1.5) indica la variación de dichas cantidades con la densidad. Los máximos de las curvas mostradas corresponden a los valores críticos mencionados previamente.

A fin de obtener la ecuación de estado realista debe emplearse la construcción de Maxwell. Una vez hecho esto sólo permanecen los mínimos con $e_B < 0 < M$.

El diagrama de fase está indicado en la Fig. (1.6)

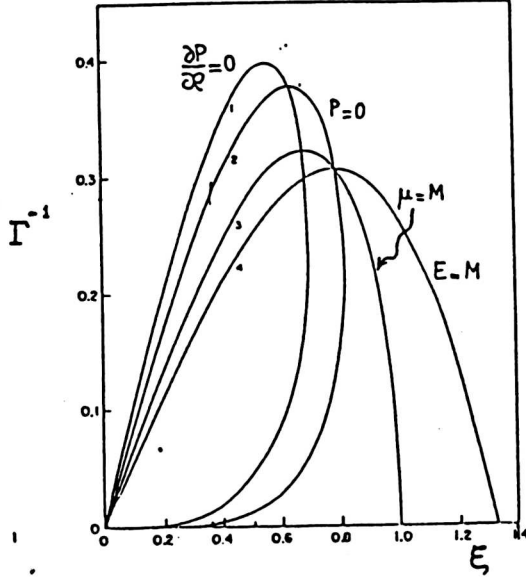


FIGURA 1.5 Curvas críticas en el espacio (Γ^{-1}, ξ) . Los máximos de dichas curvas definen las constantes críticas $\Gamma_{1c} - \Gamma_{4c}$.

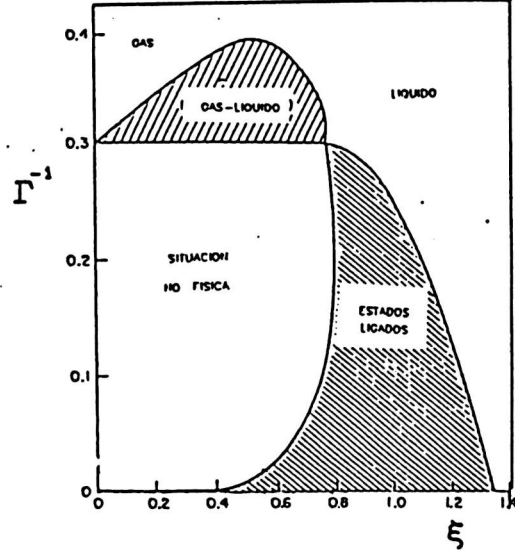


FIGURA 1.6 Diagrama de fases para la materia nuclear a $T=0$ en el espacio (Γ^{-1}, ξ) .

1.3 Acoplamientos con campos de carácter pseudoescalar y vectorial

A continuación se discutirán las propiedades de la materia nuclear a temperatura cero tal como es descrita por un modelo sencillo de intercambio de bosones que pueden ser asimilados a los piones π y al mesón ω . La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(i \not{\partial} - m_0 - ig_{\rho s} \gamma_5 \tau \cdot \pi - g_v \not{\psi})\Psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - m_\pi^2 \pi \cdot \pi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \quad (1.29)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$.

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} (i \not{\partial} - m_0)\psi^a &= [ig_{\rho s} \gamma_5 (\tau \cdot \pi)^{ab} + g_v \not{\psi} \delta^{ab}]\psi_b \\ (\square + m_\pi^2)\pi^a &= g_{\rho s} \bar{\Psi} \gamma_5 \tau^a \Psi \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu &= g_v \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \end{aligned}$$

El número bariónico N_B es la carga de la corriente bariónica que se halla conservada.

Una forma de introducir las correcciones a los parámetros de la teoría es a través de la formulación de Dyson-Schwinger que suma una dada clase de diagramas a todo orden y en forma autoconsistente. Sin embargo la aplicación de este método conduce a ciertas inconsistencias en la teoría, manifestadas por la aparición de polos complejos en la función de Green de una partícula, como se verá mas adelante. Este hecho está en completa contradicción con

ciertos supuestos básicos de la representación espectral de propagadores. En la literatura se conoce a estas anomalías con el nombre de polos fantasmas [13].

1.3.1 Representación espectral del propagador del nucleón

Dado el propagador del nucleón $G_{\alpha\beta}(x, y)$, su transformada de Fourier $G_{\alpha\beta}(p)$ admite la representación espectral [14]

$$G_{\alpha\beta}(p) = \int_0^\infty ds \frac{A(s)}{\not{p} - s + i\epsilon} \quad (1.30)$$

donde $A(s)$ es la función espectral y puede asimilarse a la probabilidad de que un estado de masa s sea creado por ψ o $\bar{\psi}$, y por lo tanto debe ser no negativa.

Introduciendo los proyectores $P_\pm(p) = \frac{1}{2}(1 \pm \not{p}/\omega_p)$, donde $\omega_p^2 = p_\mu p^\mu$; que cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} P_\pm^2 &= P_\pm & 1 &= P_+ + P_- \\ P_+ P_- &= 0 & \not{p} &= \omega_p (P_+ - P_-) \end{aligned}$$

puede escribirse

$$\frac{1}{\not{p} - s + i\epsilon} = P_+ \frac{1}{\omega_p + i\epsilon - s} + P_- \frac{1}{-\omega_p + i\epsilon - s}$$

Haciendo uso de esta propiedad, (1.30) puede reescribirse como

$$G(p) = P_+ \mathcal{G}(\omega_p + i\epsilon) + P_- \mathcal{G}(-\omega_p + i\epsilon) \quad (1.31)$$

donde

$$\mathcal{G}(z) = \int_0^\infty ds \frac{A(s)}{z - s}$$

y se han omitido índices de espin, a fin de facilitar la notación.

Dado que $A(s)$ es definida positiva puede demostrarse que no posee ceros ni polos fuera del eje real (propiedad de Herglotz [13]).

Para partícula libre se tiene que $G^0(p) = (\not{p} - m_0 + i\epsilon)^{-1}$ de donde resulta $A^0(s) = \delta(s - m_0)$, $\mathcal{G}_0(z) = \frac{1}{z - m_0}$.

La representación (1.31) permite una inversión directa, ya que $\mathcal{G}(z)$ es un escalar y todas las matrices se encuentran en los proyectores

$$G^{-1}(p) = P_+ \mathcal{G}^{-1}(\omega_p + i\epsilon) + P_- \mathcal{G}^{-1}(-\omega_p + i\epsilon)$$

A partir de la ecuación de Dyson 1.14 puede deducirse que $\mathcal{G}^{-1}(z) = \mathcal{G}_0^{-1}(z) - \Sigma(z)$ donde

$$\Sigma(z) = \int_0^\infty ds \frac{T(s)}{z - s}$$

Teniendo en cuenta que $T(s) = |\mathcal{G}^{-1}(s)|^2 A(s)$, se sigue que $\Sigma(z)$ también posee la propiedad de Herglotz.

El modelo (1.29) produce funciones de dos puntos con divergencias ultravioleta y logarítmica, por lo tanto son necesarias dos condiciones de renormalización a fin de definir el propagador $\mathcal{G}(z)$. Si se impone que posea un polo en la masa física M con residuo unidad, se obtiene

$$\mathcal{G}_R^{-1}(z) = Z_2 \mathcal{G}^{-1}(z) = (z - M) \left[1 - (z - M) \int_0^\infty ds \frac{T_R(s)}{(s - M)^2(z - s)} \right] \quad (1.32)$$

donde $T_R(s) = Z_2 T(s)$.
Además se tiene que

$$\mathcal{G}_R(z) = \int_0^\infty ds \frac{A_R(s)}{(z - s)}$$

con $A_R(z) = A(s)/Z_2$.

En función de las cantidades renormalizadas puede escribirse

$$Z_2 = 1 - \int_0^\infty ds \frac{T_R(s)}{(s - M)^2} \quad (1.33)$$

Usando $\int_0^\infty ds A(s) = 1$ se obtiene además

$$\frac{1}{Z_2} = \int_0^\infty ds A_R(s)$$

1.3.2 Polos fantasmas en cálculos autoconsistentes

Los propagadores de partícula libre para el bosón pseudoescalar y para el campo del fermión vienen dados por (1.6), (1.12) respectivamente; a los cuales debe agregarse el propagador del campo vectorial libre $D_{\mu\nu}^0$

$$D_{\mu\nu}^0(z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipz} D_{\mu\nu}^0(p) \quad (1.34)$$

$$D_{\mu\nu}^0(p) = \frac{p_\mu p_\nu / m_v^2 - g_{\mu\nu}}{p^2 - m_v^2 + i\epsilon} \quad (1.35)$$

En la formulación de Schwinger-Dyson las correcciones al propagador de fermión al orden mas bajo estan dadas por los diagramas de la Fig. (1.7). De ellos el diagrama directo de pión se anula por paridad; el término directo vectorial es aparentemente divergente, sin embargo usando regularización dimensional se encuentra que por integración simétrica da contribución nula. Por lo tanto en esta aproximación se obtiene

$$\begin{aligned} G^{-1}(p) = & G_0^{-1}(p) + 3ig_p^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \Delta(q) G(p - q) \Gamma_5(p, q) \\ & + ig_v^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D^{\mu\nu}(q) G(p - q) \Gamma_\nu(p, q) \end{aligned}$$

Donde G , Δ y D son los propagadores exactos de los campos $\psi(x)$, $\pi(x)$ y $\omega_\mu(x)$; Γ_5 , Γ_μ son los vértices exactos. La aproximación de Fock consiste en reemplazar los propagadores

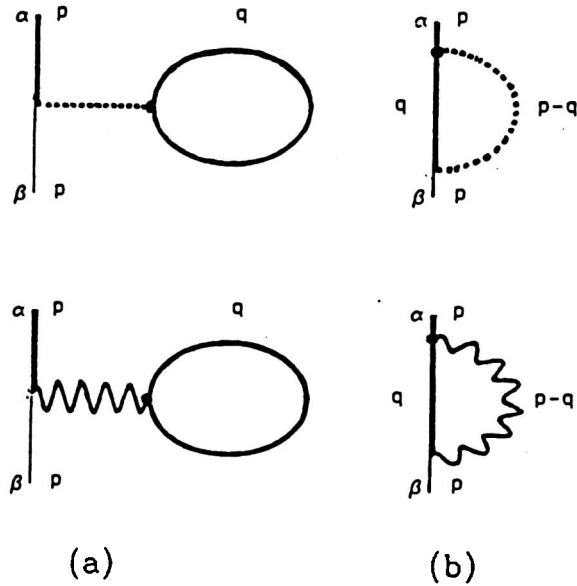


FIGURA 1.7 Correcciones de menor orden para el ejemplo II en el formalismo de Dyson-Schwinger. Las líneas y puntos gruesos corresponden a propagadores y vértices exactos respectivamente. Se ha distinguido la contribución directa (a) de la de intercambio (b).

de bosones exactos por sus formas de partícula libre $\Delta^0(p)$, $D_{\mu\nu}^0(p)$ y los vértices exactos por los vértices desnudos γ_5, γ_μ .

A fin de obtener la expresión para T_R se usa la descomposición (1.31) con p reemplazado por $p-q$. Usando propiedades de los proyectores y eligiendo un sistema de referencia donde $\mathbf{p} = 0$ de modo que $\omega_p = p_0, \omega_k = w = \sqrt{(p_0 - q_0)^2 - \mathbf{q}^2}$, se llega a una expresión integral cuya parte imaginaria es finita y de la cual puede despejarse

$$T_R(p_0) = -\frac{3Z_2 g_{ps}^2}{4\pi^4} \int_0^\infty ds A(s) \int dq_0 dq \frac{q^2(s - p_0 + q_0)}{(q_0^2 - q^2 - m_s^2)(s^2 - w^2)}$$

A partir de esta fórmula puede estudiarse el comportamiento a altas energías

$$T_R(s) \rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{g_{ps}^R}{4\pi} \right)^2 \frac{s}{Z_2} \quad (1.36)$$

$$\mathcal{G}_R^{-1}(z) \rightarrow 3 \left(\frac{g_{ps}^R}{4\pi} \right)^2 \frac{s}{Z_2} \ln(s) \quad (1.37)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $A_R(s) = |\mathcal{G}_R^{-1}(s)|^{-2} + \delta(s - M)$ se obtiene el siguiente comportamiento

$$A_R(s) \rightarrow \frac{Z_2}{6|s|} [g_{ps}^R \ln(s)/4\pi]^{-2} \quad (1.38)$$

Por lo tanto las integrales en el lado derecho de (1.34) son convergentes. Sin embargo, usando (1.33) y dado el comportamiento asintótico de $T_R(s)$ debe ser $Z_2 \rightarrow -\infty$

1.3.3 Resultados

Se han computado los polos de la función de Green de una partícula [15] empleando los valores físicos de las masas de nucleones y mesones. En primera instancia puede tomarse $g_v = 0, g_{ps}^2 = 57.6\pi$, en cuyo caso se obtiene además del polo en la masa física $z = M$, un par de polos adicionales para $z = (0.73 \pm i1.25)M$ con residuos $-0.75 \pm i0.32$. En cambio para $g_{ps} = 0, g_v^2 = 25.44\pi$ los polos complejos se hallan en $z = (5.67 \pm i11.76)M$ con residuos $-1.04 \pm i0.22$. Finalmente cuando ambos acoplamientos están activos, los polos ocurren en $z = (1.05 \pm i1.26)M$ y los residuos valen $-0.77 \mp i0.20$. De estos resultados puede verse que los polos fantasmas se hallan cercanos a la masa de los nucleones, que establece la escala de las aplicaciones del modelo.

Los polos fantasmas son la causa de la aparición de una notable contribución imaginaria a la energía fundamental, provocando la inestabilidad del sistema frente a fluctuaciones de la densidad con número de onda del orden de los valores de dichos polos.

Se han propuesto distintas interpretaciones sobre este fenómeno :

- i) El método de aproximaciones es inadecuado y produce resultados sin contenido físico.
- ii) La descripción en términos de grados de libertad hadrónicos pierde significado en la escala de energías determinada por los polos fantasmas.
- iii) La inestabilidad es real.

En este trabajo hemos adoptado el criterio (i) y en consecuencia abandonaremos cualquier solución que manifieste este efecto.

1.4 Modelo QHD-I

Manteniendo la continuidad en la discusión de modelos renormalizables con acoplamientos lineales, revisaremos en esta sección el modelo QHD-I propuesto por Walecka [16]. En este modelo se emplea un acoplamiento entre fermiones y bosones escalares y vectoriales neutros. La densidad lagrangiana correspondiente es :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{\psi}(i \not{\partial} - M)\psi + \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m_s^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} m_v^2 \omega^\mu \omega_\mu + g_s \bar{\psi} \sigma \psi - g_v \bar{\psi} \not{\omega} \psi \end{aligned} \quad (1.39)$$

Se ha demostrado [4] que en el límite estático, con bariones muy pesados, la interacción indicada se reduce a un potencial NN del tipo de Yukawa

$$V_{NN}(r) = \frac{g_v^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} - \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{r} \quad (1.40)$$

En dicha aproximación el potencial resulta repulsivo a cortas distancias si $g_s > g_v$. Además a grandes distancias tendrá un comportamiento atractivo siempre que $m_s < m_v$.

Existe una corriente conservada, la corriente bariónica $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.
Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son :

$$(i \not{\partial} - M)\psi = (g_v \not{\psi} - g_s \sigma) \psi \quad (1.41)$$

$$(\square + m_s^2)\sigma = g_s \bar{\psi}\psi \quad (1.42)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu = g_v j^\nu \quad (1.43)$$

El tensor de energía-impulso $T^{\mu\nu}$ se reduce, tras emplear (1.41) a:

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi + \partial^\mu\sigma\partial^\nu\sigma + \partial^\nu\omega^\lambda F_\lambda^\mu + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(-\partial^\lambda\sigma\partial_\lambda\sigma + m_s^2\sigma^2 + \frac{1}{2}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} - m_v^2\omega^\lambda\omega_\lambda \right) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (1.44)$$

Para materia uniforme y estática el tensor toma la forma [17]

$$T^{\mu\nu} = p\delta^{\mu\nu} + (\epsilon + p)u^\mu u^\nu$$

donde $u_\mu : (1, 0)$.

La densidad de energía ϵ y la presión P se obtienen tomando valores medios de las componentes de $T^{\mu\nu}$.

$$\epsilon = \frac{1}{N}T^{00} \quad (1.45)$$

$$P = \frac{1}{3} \sum_i T^{ii} \quad (1.46)$$

1.4.1 Aproximación de Campo Medio

El esquema de solución mas accesible para el problema de materia nuclear uniforme y estática consiste en reemplazar los campos de mesón por sus valores medios

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \bar{\sigma} \quad (1.47)$$

$$\omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle = \delta_{\mu 0}\bar{\omega} \quad (1.48)$$

Las expresiones dinámicas para $\bar{\sigma}, \bar{\omega}$ pueden obtenerse a partir de (1.42),(1.43)

$$\bar{\sigma} = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s$$

$$\bar{\omega} = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \psi^\dagger\psi \rangle = \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B$$

Como el número bariónico es una constante del movimiento, $\bar{\omega}$ está determinado por las condiciones iniciales. En cambio la fuente del campo escalar es dinámica y debe evaluarse una vez conocido el comportamiento del campo bariónico.

Haciendo el reemplazo (1.47),(1.48) en la ecuación de movimiento para ψ se obtiene :

$$[i \not{\partial} - g_v \gamma_0 \bar{\omega} - (M - g_s \bar{\sigma})] \psi = 0 \quad (1.49)$$

La ecuación (1.49) puede asimilarse a la ecuación de movimiento de un campo espinorial con espectro

$$\begin{aligned} M^* &= M - g_s \bar{\sigma} \\ p_0 &= g_v \bar{\omega} \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^{*2}} = E_{\pm}^*(p) \end{aligned}$$

El espectro presenta un hueco variable con la densidad de extensión $2M^*$, que separa los estados de energía positiva y negativa.

Cuando estas soluciones son insertadas en (1.44) se obtiene

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}(m_v^2\bar{\omega}^2 - m_s^2\bar{\sigma}^2)g^{\mu\nu} \quad (1.50)$$

Aplicando (1.45),(1.46) resulta

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle \bar{\psi}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + M^* + g_v\gamma_0\bar{\omega})\psi \rangle + \frac{1}{2}m_s^2\bar{\sigma}^2 - \frac{1}{2}m_v^2\bar{\omega}^2 \\ P &= \frac{1}{3}\langle \bar{\psi}i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\psi \rangle - \frac{1}{2}m_s^2\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2}m_v^2\bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

Donde debe usarse

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \sqrt{V}\delta\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[a_p e^{-iE_+^*t}e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_u}(E_+^*,\mathbf{p})\right. \\ &\quad \left.+ b_p^\dagger e^{iE_-^*t}e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_v}(E_-^*,\mathbf{p})\right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\langle a_p^\dagger a_p \rangle = \theta(p_F - p) \quad (1.52)$$

$$\langle b_p^\dagger b_p \rangle = 0 \quad (1.53)$$

Los operadores a_p y b_p , de partícula y antipartícula respectivamente, satisfacen las reglas de anticonmutación canónicas. Aquí δ indica la degeneración de spin y μ es el potencial químico de los nucleones.

La relación entre la densidad bariónica y el impulso de Fermi viene dada por (1.11).

La masa efectiva M^* satisface la siguiente ecuación

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2}\rho_s \quad (1.54)$$

donde la densidad escalar bariónica $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ viene dada por

$$\rho_s = \delta M^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \theta(p_F - p) / \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^{*2}}$$

La ecuación (1.54) proporciona una relación de autoconsistencia en términos de M^* la densidad y la temperatura. Es posible demostrar que esta misma relación puede obtenerse imponiendo la condición de extremo para la energía respecto de M^* .

Cuando $T \rightarrow 0$, se obtiene

$$M^* = M - \left(\frac{g_s}{2\pi m_s} \right)^2 \delta M^* \times \left[p_F \sqrt{p_F^2 + M^{*2}} - M^{*2} \ln \left(\frac{p_F + \sqrt{p_F^2 + M^{*2}}}{M^*} \right) \right] \quad (1.55)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{g_s} \right)^2 (M - M^*)^2 + \frac{\delta}{(2\pi)^2} \int_0^{p_F} dp p^2 \sqrt{p^2 + M^{*2}} \quad (1.56)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{g_s} \right)^2 (M - M^*)^2 + \frac{\delta}{3(2\pi)^2} \int_0^{p_F} \frac{dp p^4}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} \quad (1.57)$$

En las últimas expresiones se han omitido las contribuciones divergentes provenientes del mar de Dirac.

En el límite de altas densidades

$$\epsilon \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2 + \frac{9\pi^2 \rho_B^{4/3}}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_s M}{g_s} \right)$$

el término dominante proviene de la interacción vectorial y es repulsivo. El término siguiente es similar al de un gas de fermiones libres sin masa. Por su parte el acoplamiento escalar contribuye con un término constante.

Para bajas densidades

$$\begin{aligned} \epsilon &\rightarrow M \rho_B + A \rho_B^{5/3} - B \rho_B^{7/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) \rho_B^2 \\ A &= \frac{3}{5M} \left(\frac{3\pi^2}{\sqrt{2}\delta} \right)^{2/3} \\ B &= \frac{3}{7} \left(\frac{12\pi^2 \rho_B}{2\delta} \right)^{4/3} \end{aligned}$$

La contribución mas importante proviene de la masa en reposo, le sigue la energía cinética del fermión y por último la contribución no relativista de los mesones.

Se ha propuesto que esta solución es tanto mas exacta cuanto mayor es la densidad [4]. El argumento empleado es que al aumentar la densidad bariónica, mas intensa es la fuente para los campos de mesón en (1.42), (1.43) y por lo tanto es mas adecuado reemplazar operadores de campo por sus valores medios. Sin embargo, esto no sería cierto si las fluctuaciones cuánticas cobran importancia en un régimen de altas densidades. Justamente esta es la situación en la física de hadrones, donde los grados de libertad internos se tornarian relevantes a altas densidades y/o temperaturas.

	g_s	g_v	m_s (MeV)	a_s MeV	K (MeV)	M^*/M
ACM	9.57	11.67	550	22.1	540	0.556
AHR	7.93	8.93	550	17.9	471	0.718
AHF	9.11	10.39	550	36.5	585	0.529

TABLA 1.1 Parámetros y resultados típicos para el modelo QHD-I en distintas aproximaciones. Se incluyen la energía de superficie a_s , la compresibilidad K y la masa efectiva M^* evaluadas a $T=0$ y a la densidad de saturación.

Las constantes de acoplamiento pueden fijarse de modo que la densidad de saturación ρ_0 y la energía de ligadura e_B predichas coincidan con los valores aceptados para materia nuclear: $e_B = -15.75 \text{ MeV}$, $p_F = 1.42 \text{ fm}^{-1}$. De esta manera se obtiene

$$C_s = g_s M / m_s = \sqrt{267.1}$$

$$C_v = g_v M / m_v = \sqrt{195.9}$$

El cociente M^*/M como función de la densidad se presenta en la Fig. (1.8). Por otro lado el comportamiento de M^* con la temperatura se indica en la Fig. (1.9) para densidad bariónica cero.

La energía de ligadura por nucleón se grafica en Fig. (1.10) tanto para materia nuclear como neutrónica. Es notable el pequeño valor de la masa efectiva del nucleón $M^* = 0.54M$ a la densidad de saturación y la elevada compresibilidad $\kappa = 540 \text{ MeV}$. Esto indica que la aproximación empleada no es capaz de dar un tratamiento equilibrado a las dos componentes de la interacción, o bien que el modelo sobredimensiona la participación de una de ellas respecto de la restante. En cualquier caso se requiere un estudio específico para determinar la validez de alguna de estas suposiciones, lo cual se realizará en los próximos capítulos.

1.4.2 Aproximación Relativista de Hartree

De la discusión precedente quedó en claro que la validez de la ACM se reduce al rango de las densidades bariónicas medias. La solución hallada pierde validez en cuanto las fluctuaciones comienzan a ser significativas.

La densidad lagrangiana de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = g_s \bar{\psi} \sigma \psi - g_v \bar{\psi} \psi \psi \quad (1.58)$$

proporciona una expansión perturbativa en términos de los propagadores de partícula libre, a densidad finita y temperatura cero $G_{\alpha\beta}^0(x, x')$, $\Delta^0(x, x')$, $D_{\mu\nu}^0(x, x')$ dados por (1.12), (1.13) y (1.35), respectivamente. En este caso no se tiene en cuenta el efecto de la interacción entre las partículas del sustrato. Se introduce un mecanismo de autoconsistencia, como en la sección 1.2, reemplazando el propagador de partícula libre por el propagador con interacción evaluado al presente orden de aproximación.

La autoenergía evaluada de esta manera es

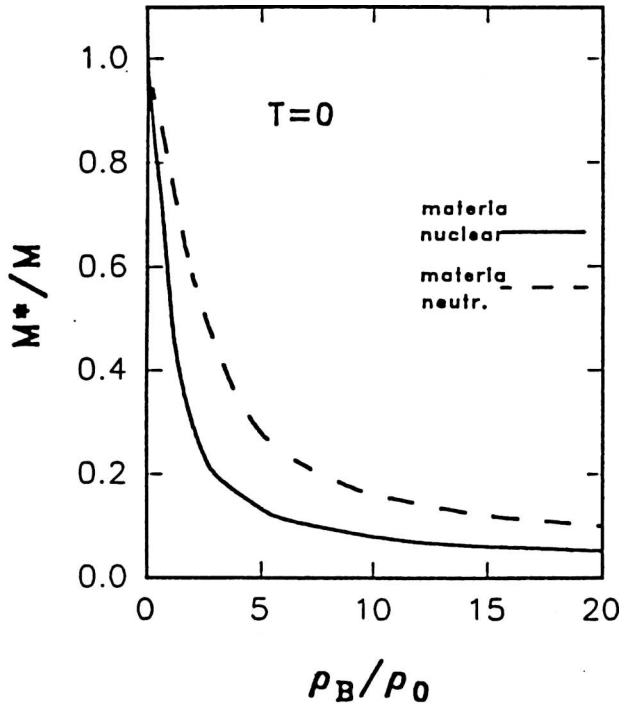


FIGURA 1.8 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad para el modelo QHD-I. Las curvas corresponden a materia nuclear y neutrónica a $T=0$ en la ACM.

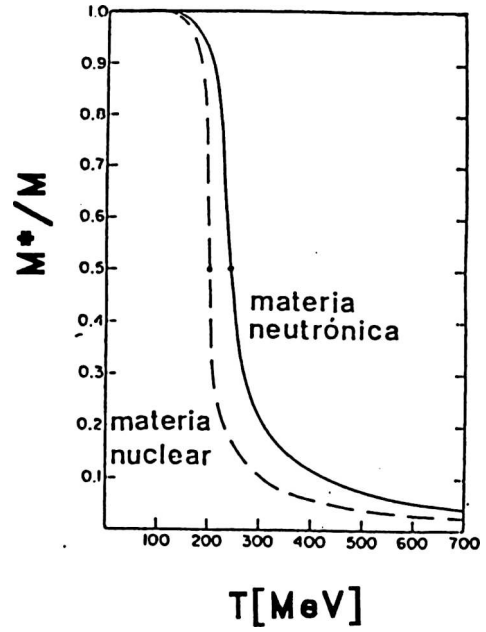


FIGURA 1.9 La masa efectiva del nucleón como función de la temperatura para el modelo QHD-I. Las curvas corresponden a materia nuclear y neutrónica a densidad bariónica cero en la ACM.

$$\begin{aligned} \Sigma_H = & -ig_s^2 \Delta^0(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_H(p)] e^{i\eta p_0} \\ & -ig_v^2 \gamma^\mu D_{\mu\nu}^0(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_H(p) \gamma^\nu] e^{i\eta p_0} \end{aligned} \quad (1.59)$$

La autoenergía incorpora correcciones cuánticas al espectro de partícula independiente según

$$\begin{aligned} M^* &= M - \Sigma_{Hs} \\ p_0 &= \Sigma_{H0} \pm \sqrt{p^2 + M^{*2}} \end{aligned}$$

Resulta interesante destacar que la contribución del acoplamiento vectorial satisface trivialmente la condición de autoconsistencia. En primer lugar debe notarse que el sector que no depende de la densidad de dicha contribución es sólo aparentemente divergente, pues se anula por integración simétrica. En consecuencia el aporte del acoplamiento vectorial a la autoenergía es

$$-ig_v^2 \gamma^\mu D_{\mu\nu}^0(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_{HD} \gamma^\nu] = - \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \frac{\gamma_0}{(2\pi)^2} \int_0^{p_F} dk k^2$$

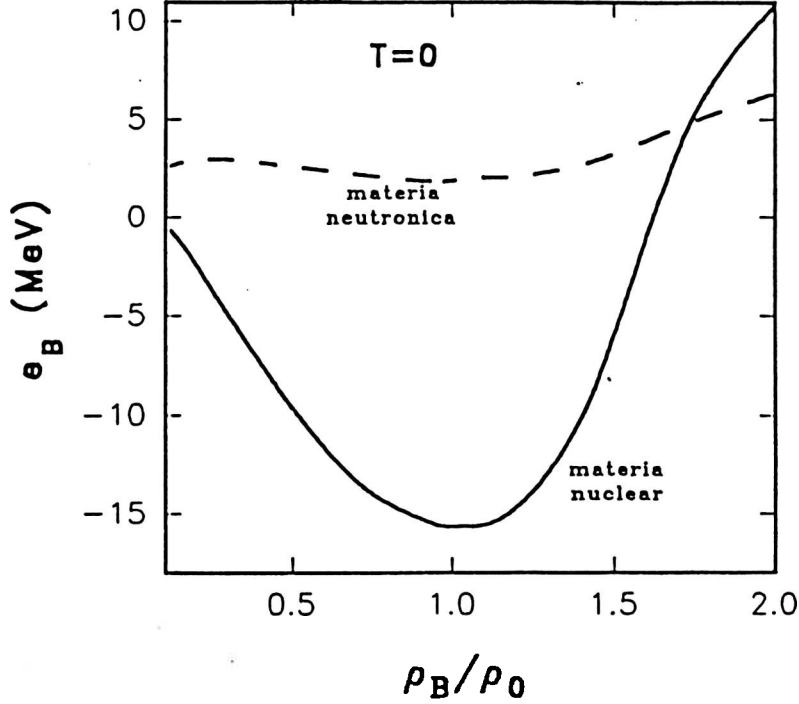


FIGURA 1.10 La energía de ligadura por nucleón en la ACM para el modelo QHD-I. Se incluyen los resultados para materia nuclear y neutronica a $T=0$.

donde sólo interviene la porción del propagador de nucleón dependiente del impulso de Fermi G_{HD} . En base a la distribución de polos indicada puede construirse el propagador de nucleón a densidad finita

$$G_H(p) = (\not{p} + M^*) \left[\frac{1}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} + 2\pi i \delta(q^2 - M^{*2}) \Theta(\mu - q_0) \right] \quad (1.60)$$

donde de aquí en más se empleará $q_0 = p_0 - \Sigma_{H0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}$.

Las integrales en (1.59) son divergentes debido a la presencia del propagador de Feynman. Al integrar, este término sólo incluye la contribución de cuasipartículas de energía negativa. Puede comprobarse que la exclusión de dicha corrección conduce a la ACM, en tanto que la solución que la considera explícitamente es denominada Aproximación de Hartree Relativista (AHR).

El tensor de energía-impulso canónico $T^{\mu\nu}$ puede descomponerse, previo empleo de las ecuaciones de movimiento, de la siguiente manera

$$T^{\mu\nu} = T_B^{\mu\nu} + T_s^{\mu\nu} + T_v^{\mu\nu} \quad (1.61)$$

$$T_B^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \quad (1.62)$$

$$T_s^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_\lambda\sigma\partial^\lambda\sigma - m_s^2\sigma^2) g^{\mu\nu} + \partial^\mu\sigma\partial^\nu\sigma \quad (1.63)$$

$$T_{\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} \omega_{\rho} \partial^{\lambda} \omega^{\rho} - m_{\nu}^2 \omega^{\lambda} \omega_{\lambda}) g^{\mu\nu} + \partial^{\mu} \omega^{\lambda} \partial^{\nu} \omega_{\lambda} \quad (1.64)$$

A fin de evaluar la ecuación de estado sólo es necesario conocer valores medios de (1.62)-(1.64), que pueden expresarse en términos de las funciones de Green con interacción

$$\langle T_B^{\mu\nu} \rangle = -i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^{\nu} G(p)] p^{\mu} e^{i\eta p_0} \quad (1.65)$$

$$\langle T_s^{\mu\nu} \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (p^2 - m_s^2) g^{\mu\nu} - p^{\mu} p^{\nu} \right] \Delta(p) \quad (1.66)$$

$$\langle T_{\nu}^{\mu\nu} \rangle = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} (p^2 - m_{\nu}^2) g^{\mu\nu} - p^{\mu} p^{\nu} \right] D_{\lambda}^{\lambda}(p) \quad (1.67)$$

Estas expresiones contienen divergencias. El criterio para eliminarlas había sido en los ejemplos anteriores, simplemente descartar la contribución infinita de estados con energía negativa.

Otro procedimiento para extraer el contenido físico [4] consta de los siguientes pasos :

i) Incluir los contratérminos \mathcal{L}_c necesarios para obtener una formulación finita al orden de trabajo y a densidad y temperatura nulas. Estos contratérminos aportarán al tensor de energía-impulso la cantidad

$$T_c^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (\partial_{\mu} \psi)} \partial^{\nu} \psi + \partial^{\mu} \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (\partial_{\nu} \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (\partial_{\mu} \sigma)} \partial^{\nu} \sigma \\ \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial (\partial_{\mu} \omega_{\lambda})} \partial^{\nu} \omega_{\lambda} - \mathcal{L}_c g^{\mu\nu}$$

ii) El contenido físico del tensor se obtendrá restando al valor medio de $T^{\mu\nu} + T_c^{\mu\nu}$ su valor esperado de vacío

$$T_{fis}^{\mu\nu} = \langle T^{\mu\nu} + T_c^{\mu\nu} \rangle - \lim_{\rho_F \rightarrow 0, T \rightarrow 0} \langle T^{\mu\nu} + T_c^{\mu\nu} \rangle \quad (1.68)$$

Para obtener el límite correcto en (1.68) debe evaluarse primero el límite para $T \rightarrow 0$ y luego el límite de densidad nula.

1.4.3 Regularización de la Autoenergía.

En (1.59) se ha construido la autoenergía propia en la aproximación de Hartree. El propagador de fermión viene dado por (1.60). Cuando éste es insertado en (1.59) produce dos términos; aquél que depende explícitamente de la densidad a través del número de ocupación es finito debido al corte en impulsos. El término restante, que contiene el propagador de Feynman bariónico, es divergente. Por lo tanto la contribución infinita proviene de

$$-ig_s^2 \Delta^0(0) 4M^* \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\eta q_0}}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} - 4ig_v^2 \gamma^{\mu} D_{\mu\nu}^0(0) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{q_{\nu} e^{i\eta q_0}}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \quad (1.69)$$

El segundo término se anula por integración simétrica [18], [4] y en consecuencia no requiere la introducción de contratérminos. El aporte escalar, en cambio, necesita ser

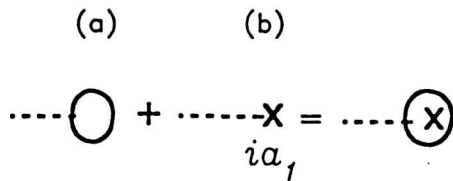


FIGURA 1.11 Representación gráfica del efecto del contratérmino $ia_1\sigma$ al segundo orden para la autoenergía del nucleón.

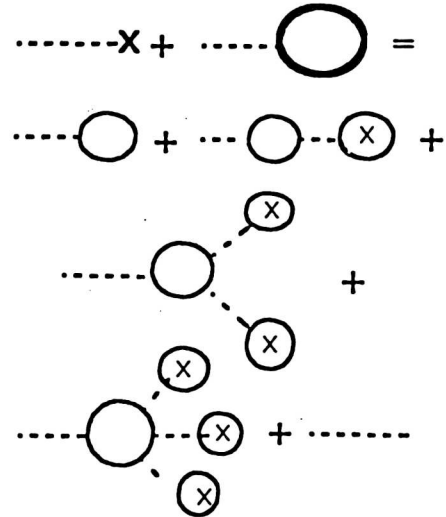


FIGURA 1.12 Representación gráfica del efecto del contratérmino $ia_1\sigma$ en la AHR.

tratado adecuadamente. Un método para hacerlo, respetando la autoconsistencia, es iterar la ecuación de Dyson para G_H , obteniéndose

$$G_H(p) = \sum_{m=0}^{\infty} [G^0(p)]^{m+1} [\Sigma_{H_s}]^m \quad (1.70)$$

donde, por simplicidad sólo consideramos la componente escalar. Llevando este resultado a (1.59) resulta

$$\Sigma_{H_s}^{finita} = i \left(\frac{g_s}{m_s} \right)^2 \int d^n p \sum_{m=0}^{\infty} (\Sigma_{H_s})^m \text{tr} (G_F^0)^{m+1} + \delta\Sigma_s + \text{terminos finitos} \quad (1.71)$$

$\delta\Sigma_s$ proviene de los contratérminos; los términos que contienen al menos un factor de $G_D(p)$ son finitos. Con el propósito de aplicar regularización dimensional, se ha pasado a un espacio de dimensión n .

Un conteo directo de potencias en la integral indicada, demuestra que sólo los términos $m=0, \dots, 3$ son divergentes.

Observando que la inclusión del contratérmino $\mathcal{L}_c = a_1 \sigma(x)$ aporta, en esta aproximación, el diagrama (b) de la Fig. (1.11) si el factor a_1 se elige de modo que cancele exactamente la parte divergente del término directo; es decir

$$a_1 = ig_s \int d^n p \text{tr} [G_F^0(p)]$$

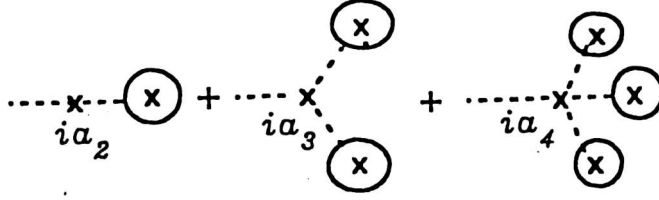


FIGURA 1.13 Representación gráfica del efecto del contratérmino $i\sigma^2(a_2 + a_3\sigma + a_4\sigma^2)$ al segundo orden.

Entonces el diagrama resultante, retiene en el lazo fermiónico sólo la parte $G_D(p)$ del propagador. Cuando se incluyen los efectos de \mathcal{L}_c en la expansión (1.70), se obtienen los diagramas indicados en la Fig. (1.12), donde sólo se han indicado explícitamente los terminos $m=0, \dots, 3$.

Restan por redefinir las contribuciones mostradas en la Fig. (1.13) para obtener un resultado totalmente finito.

Dicha definición puede implementarse a partir de contratérminos polinómicos en el campo escalar de orden cuatro. En resumen, la regularización es llevada a cabo por

$$\mathcal{L}_c(x) = ia_1\sigma + ia_2\sigma^2/2! + ia_3\sigma^3/3! + ia_4\sigma^4/4!$$

que aporta la siguiente cantidad a la autoenergía

$$\delta\Sigma_s = -\sum_{m=0}^3 \frac{g_s}{m!m_s^2} a_{m+1} \left(-\frac{\Sigma_{H_s}^{finita}}{g_s} \right) \quad (1.72)$$

Las constantes a_m han sido evaluadas, por ejemplo en [19]. Por otro lado la integral en (1.69) es

$$4i(g_s/m_s)^2 M^* \int d^n p \frac{e^{i\eta p_0}}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} = (g_s/2\pi m_s)^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) (M^3 + 3M^2\Sigma_s + 3M\Sigma_s^2 + \Sigma_s^3) \right]$$

Reuniendo todos los resultados parciales y tomando el límite $n \rightarrow 4$ resulta

$$\Sigma_{H_s}^{finita} = (g_s/\pi m_s)^2 \left[M^{*3} \ln(M^*/M) - M^2(M^* - M) - \frac{5}{2}M(M^* - M)^2 - \frac{11}{3}(M^* - M)^3 \right] + (g_s/m_s)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 8\pi i \delta(q^2 - M^{*2}) \theta(\mu - p_0)$$

donde se ha usado $M^* = \Sigma_{H_s}^{finita} + M$.

De esta forma se ha obtenido una autoenergía regularizada, que puede insertarse en (1.60) para obtener el propagador de barión en la AHR.

1.4.4 Tensor de Energía-Impulso Renormalizado

El aporte de los contratérminos al tensor de energía-impulso es $T_{\epsilon}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\epsilon}$.

Existe una porción independiente de la densidad que es eliminada por la sustracción del correspondiente valor esperado de vacío. De esta forma sólo permanecen los siguientes términos

$$\begin{aligned}\langle T_s^{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (m_s \Sigma_{H_s} / g_s)^2 \\ \langle T_v^{\mu\nu} \rangle &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (m_v \Sigma_{H_0} / g_s)^2\end{aligned}$$

La componente bariónica (1.65) contiene una parte divergente dada por :

$$-i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4q^\mu p^\nu}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} e^{i\eta p_0}$$

Empleando regularización dimensional dicha integral puede escribirse como el límite para $n \rightarrow 4$ de la siguiente fórmula

$$-4i \int d^n p \frac{q^\mu p^\nu}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} = 2g^{\mu\nu} \pi^{n/2} M^{*n} \Gamma(-n/2) / (2\pi)^4$$

De esta manera resulta

$$\begin{aligned}T_{jis}^{\mu\nu} &= -\frac{g^{\mu\nu} \delta}{8\pi^2} \left[M^{*4} \ln(M^*/m) + M^{*3} (M - M^*) - \frac{7}{2} M^2 (M - M^*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{3} M (M - M^*)^3 - \frac{25}{12} (M - M^*)^4 \right] \\ &\quad + \delta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(q^2 - M^{*2}) q^\mu p^\nu \theta(\mu - q_0)\end{aligned}$$

Reuniendo los distintos elementos calculados, puede evaluarse la densidad de energía $\mathcal{E} = \langle T_{jis}^{00} \rangle$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{2} (m_s / g_s)^2 (M - M^*)^2 - \frac{1}{2} (g_v \rho_B / m_v)^2 + \delta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(q^2 - M^{*2}) q^0 p^0 \theta(\mu - q_0) \\ &\quad - \frac{\delta}{8\pi^2} \left[M^{*4} \ln(M^*/m) + M^{*3} (M - M^*) - \frac{7}{2} M^2 (M - M^*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{3} M (M - M^*)^3 - \frac{25}{12} (M - M^*)^4 \right]\end{aligned}$$

y la presión :

$$P = -\frac{1}{2} (m_s / g_s)^2 (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} (g_v \rho_B / m_v)^2 + \frac{\delta}{12\pi^2} \int \frac{dpp^4}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}} \theta(p_F - p)$$

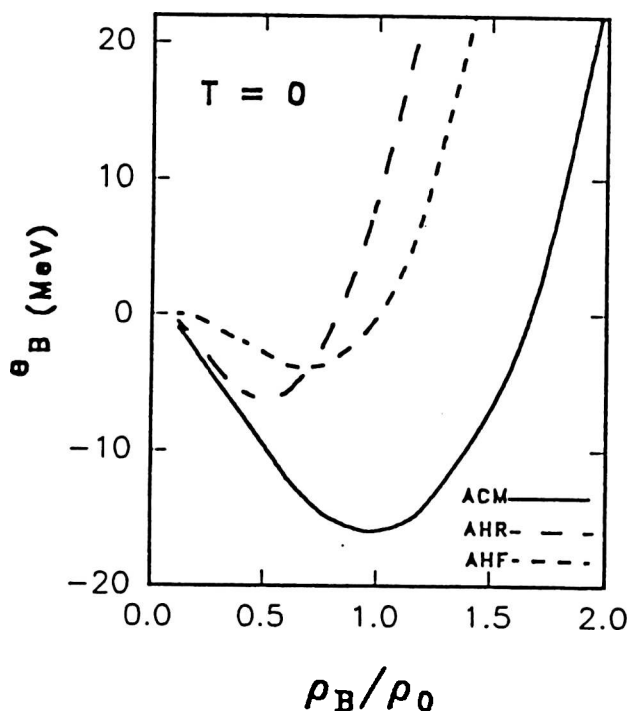


FIGURA 1.14 Comparación de la energía de ligadura por nucleón a $T=0$ en distintas aproximaciones.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\delta}{8\pi^2} \left[M^{*4} \ln(M^*/m) + M^{*3}(M - M^*) - \frac{7}{2} M^2 (M - M^*)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{13}{3} M (M - M^*)^3 - \frac{25}{12} (M - M^*)^4 \right]
 \end{aligned}$$

Para concluir esta sección consideraremos el efecto de las correcciones cuánticas en el esquema general de solución. Para ello se compararan los resultados obtenidos empleando constantes g_s, g_v determinadas por dos procedimientos diferentes. En primer lugar, pueden fijarse dichas constantes en la ACM y luego introducir las correcciones cuánticas. Esto ocasionará un desplazamiento en los valores de la densidad de saturación y la correspondiente energía de ligadura. La Fig. (1.14) muestra la energía por nucleón obtenida como función de la densidad. Resultados numéricos se especifican en la Tabla 1.1 bajo la denominación ACM.

Alternativamente, puede llevarse a cabo el cálculo autoconsistente completo, incluídas las correcciones cuánticas y recién fijar las constantes por la normalización de las condiciones de saturación. Como consecuencia los valores de los acoplamientos diferirán de los correspondientes a la ACM. La masa efectiva M^* evaluada con las nuevas constantes se muestra en la Fig. (1.15) como función de la densidad y a $T=0$, a modo de ilustración a la densidad normal se obtiene un valor mas grande en un 30 %.

En la Tabla 1.1 puede verse que los valores de las constantes obtenidos por el método enunciado difieren aproximadamente en un 25 % en una y otra aproximación. Por otro

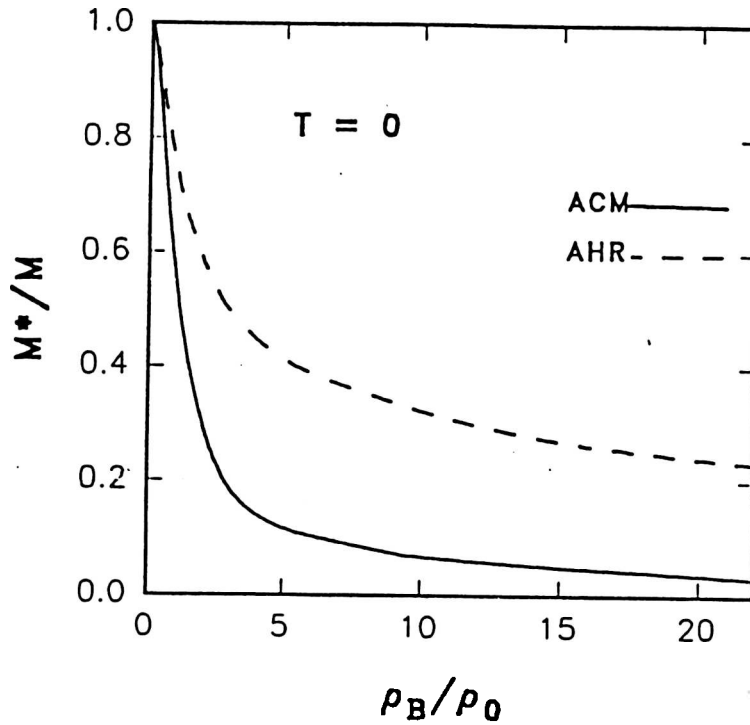


FIGURA 1.15 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad para el modelo QHD-I. Las curvas corresponden a la ACM y la AHR a temperatura cero.

lado el impulso de Fermi está corrido en 0.25 fm^{-1} y la energía de ligadura en 10 MeV, aproximadamente. Sin embargo, para altas densidades (energías) las descripciones logradas por ambos métodos son coincidentes.

1.4.5 Aproximación de Dirac-Hartree-Fock

El esquema de Aproximación de Hartree-Fock (AHF) introduce en el tratamiento al diagrama llamado de intercambio (Fig. 1.1b) conjuntamente con el diagrama directo considerado en la AHR. Es decir se incluirán simultáneamente y de manera autoconsistente los dos diagramas de la Fig.(1.7).

Es posible sumar a todo orden esta clase de diagramas empleando la ecuación de Dyson (1.16), donde se impondrá la autoconsistencia construyendo la autoenergía propia en términos del propagador bariónico exacto $G_{HF}(p)$.

El diagrama de intercambio produce una contribución $\Sigma_{ex}(p)$ a la autoenergía

$$\begin{aligned} \Sigma_{ex}(k) = & ig_s^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta^0(k-p) G_{HF}(p) \\ & + ig_v^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}^0(k-p) \gamma^\mu G_{HF}(p) \gamma^\nu \end{aligned} \quad (1.73)$$

que se suma al aporte directo Σ_D . La expresión para Σ_D coincide con la dada en (1.59), con la salvedad que allí G_H debe reemplazarse por G_{HF} . En consecuencia puede escribirse

$$\Sigma = \Sigma_{ex} + \Sigma_D = \Sigma_s + \gamma_0 \Sigma_0 - \gamma \cdot p \Sigma_v \quad (1.74)$$

Esta ecuación define los escalares de Lorentz Σ_s y Σ_v .

A partir de aquí el propagador del fermión viene dado por

$$G_{HF}(p) = [p(1 - \Sigma_v) + M + \Sigma_s(p)] \left[\frac{1}{p^2 [1 - \Sigma_v]^2 - [M - \Sigma_s(p)]^2 + i\epsilon} + 2\pi i \delta(p^2 [1 - \Sigma_v(p)]^2 - [M + \Sigma_s(p)]^2) \Theta(p_F - p | 1 - \Sigma_v(p) |) \right]$$

Debe destacarse que $M^*(p)$ es solución de una ecuación no lineal del mismo tipo que (1.17)

La expresión para la autoenergía posee, además de las divergencias ya encontradas en el término directo, las aportadas por el término de intercambio.

Un tratamiento coherente consiste en la introducción de contratérminos y la aplicación del método delineado en las secciones previas. Sin embargo una solución rápida puede obtenerse por la omisión del aporte de los estados ocupados de energía negativa. Este esquema de solución es conocido como Aproximación de Dirac-Hartree-Fock (ADHF). En lo que resta de esta sección aplicaremos el método más sencillo de la ADHF. Una vez que se han obtenido expresiones bien definidas para los propagadores, el tensor (1.61)-(1.64) puede ser evaluado y usando la prescripción (1.68) calcular la energía y la presión mediante (1.45),(1.46) :

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} (g_s \rho_s / m_s)^2 - \frac{1}{2} (g_v \rho_B / m_v)^2 + \delta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_0(p) \Theta(p_F - p) \\ & + \frac{\delta}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\Theta(p_F - p)}{E^*(p)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\Theta(\mu - k_0)}{E^*(k)} \left\{ g_s^2 \Delta_F^0(p - k) \left[\frac{1}{2} - (p_0 - k_0)^2 \Delta_F^0(p - k) \right] \right. \\ & \times \left[(p - \Sigma(p))^\mu (k - \Sigma(k))_\mu + M^*(p) M^*(k) \right] \\ & - g_v^2 D_{F\mu\nu}^0(p - k) \left[1 + (p_0 - k_0)^2 g^{\lambda\rho} D_{F\lambda\rho}^0(p - k) \right] \\ & \left. \times \left[(p - \Sigma(p))_\mu (k - \Sigma(k))_\nu + M^*(p) M^*(k) \right] \right\} \end{aligned}$$

En las Figs. (1.14) y (1.15) se presentan la energía de ligadura y la ecuación de estado en la presente aproximación, usando los mismos parámetros que en la ACM. Puede verse que la inclusión del término de intercambio es comparable a la corrección por las fluctuaciones cuánticas de la ACM.

Por otra parte, los acoplamientos pueden fijarse para reproducir las condiciones de saturación de la materia nuclear. Los valores obtenidos se muestran en la Tabla 1.1.

Para finalizar mencionaremos que se ha realizado una amplia discusión de la ADHF [20] y se han consignado las siguientes conclusiones :

i) Cuando se usan los acoplamientos ajustados a las condiciones de saturación la corrección de intercambio es sólo una pequeña fracción de la energía total. Por lo tanto la energía de ligadura en la AHF coincide prácticamente con el resultado obtenido en la ACM.

ii) La autoenergía varía muy lentamente con el impulso, en particular la contribución del acoplamiento vectorial resulta despreciable.

iii) Cuando se aplica la ADHF a la materia neutrónica, la corrección de intercambio elimina el mínimo local presente en el resultado correspondiente a la ACM.

iv) Como se indica en la Fig. (1.15) la masa efectiva decrece muy rápidamente con la densidad, confirmando la tendencia presentada en la ACM.

1.5 Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado los modelos más sencillos de la teoría de campos capaces de proporcionar una descripción conveniente de las propiedades básicas de la materia nuclear. En el ejemplo I esto se realizó mediante un único campo intermediario de la interacción entre nucleones; en los ejemplos II y III un grado de libertad adicional establece el equilibrio entre los efectos atractivos y repulsivos a fin de producir un estado fundamental consistente con los datos empíricos.

En primer término se deduce que un solo acoplamiento independiente no es suficiente para ajustar las condiciones de saturación de la materia nuclear. Este hecho obliga a introducir un grado de libertad adicional, tal como el bosón vectorial del modelo QHD-I. Por lo tanto éste contiene la complejidad dinámica mínima necesaria para reproducir las propiedades medias de la materia nuclear. No obstante, la resolución matemática es lo suficientemente engorrosa como para hacer necesarios distintos esquemas de aproximación. La ACM surge como el esquema de solución más sencillo y sus resultados parecen confiables a densidades medias.

Por otra parte otros esquemas más complicados como la AHR y ADHF no parecen introducir mejoras sustanciales al comportamiento global.

Debe destacarse la extraordinaria complicación que requiere la renormalización del modelo en cálculos autoconsistentes, tal es así que se torna inhibitoria en la AHF.

Se han objetado algunas particularidades de los resultados de la ACM. Su aplicación a materia nuclear produce una ecuación de estado excesivamente dura a densidades medias y altas en tanto que la masa efectiva decrece con demasiada rapidez como función de la densidad. Por otro lado, resulta insuficiente para describir los núcleos finitos.

Este Capítulo ha puesto en evidencia las peculiaridades del uso de la Teoría de Campos en física nuclear. Por ejemplo, resulta evidente que los métodos de aproximación de uso común no son aceptables y se requiere de tratamientos específicos autoconsistentes. Además los grados de libertad relevantes no son evidentes, y menos aún la forma de acoplarlos.

Estos aspectos serán discutidos en los próximos capítulos.

La Dinámica Térmica de Campos (DTC)

2.1 Introducción

La Teoría Estadística de Campos [21],[22] ha sido formulada básicamente según dos versiones. La más antigua se basa en el establecimiento de analogías entre el operador de evolución temporal y la función de partición, para lo cual debe identificarse la coordenada temporal con la temperatura inversa en unidades imaginarias $t/\hbar \rightarrow i/kT$. Es decir, se trabaja en el espacio euclídeo. Esta formulación es llamada de tiempo imaginario o de Matsubara, quien desarrolló la expansión perturbativa diagramática para la gran función de partición [22]. En términos del espacio de Fourier la teoría de Matsubara comprende una expansión en frecuencias discretas tanto para las variables internas como para las externas. Por lo tanto es necesario extender los resultados directos desde un conjunto discreto de puntos sobre el plano complejo hacia el eje real. La formulación de tiempo imaginario, que es la más frecuentemente empleada, elimina el grado de libertad temporal en favor de la introducción de la temperatura. Esto es un inconveniente para su aplicación a fenómenos fuera del equilibrio estadístico. La dependencia temporal de las funciones de Green puede ser recuperada por continuación analítica, respetando las condiciones de contorno adecuadas. Sin embargo el procedimiento resulta excesivamente complicado para funciones de Green de muchas variables.

Alternativamente, la formulación llamada de tiempo real, emplea un camino de integración sobre el plano temporal complejo [23],[24] que semeja una "C". De esta manera surge naturalmente el uso de funciones de Green ordenadas según el recorrido del camino, conduciendo a la duplicación efectiva de los grados de libertad. Este último hecho implica el uso de matrices de 2×2 para las funciones de Green, amplitudes de transición, etc. Por otro lado en la formulación de tiempo real es frecuente emplear funciones de Green retardadas y avanzadas. Las técnicas de expansión diagramática resultan impracticables en este caso.

En las etapas intermedias de cálculos perturbativos pueden surgir ciertas singularidades, que deben ser tratadas con cierto cuidado para demostrar su cancelación [25].

Más recientemente se ha enunciado una teoría de tiempo real, la Dinámica Térmica de Campos (DTC) [26],[27] que emplea operadores térmicos, en contraste con los casos anteriores donde los operadores habituales eran promediados estadísticamente.

Realizando una duplicación de los grados de libertad e introduciendo operadores y un estado fundamental térmico, la totalidad de los desarrollos de la Teoría de Campos pueden ser reproducidos en la DTC.

Con posterioridad se demostró que es posible dar una formulación de la DTC matemáticamente estricta en términos de la llamada formulación de Haag-Hugenholtz-Winnink de la Mecánica Estadística [28] y del álgebra C^* [29].

No obstante la aparente diversidad, existe una notable conexión entre las distintas formulaciones indicadas [30]. Esto debe ser así ya que en última instancia todas parten del postulado esencial de la Mecánica Estadística: Si A es un operador que actúa sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} , entonces el observable asociado \mathcal{A} , a la temperatura T viene dado por el valor esperado estadístico

$$A = \langle A \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \text{tr} \left[e^{-\beta(H-\lambda Q)} A \right] \quad (2.1)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema, $\beta = 1/kT$, Q es la carga conservada de cierta simetría del hamiltoniano y λ el multiplicador de Lagrange correspondiente. Además la función de partición \mathcal{Z} viene dada por

$$\mathcal{Z} = \text{tr} \left(e^{-\beta(H-\lambda Q)} \right) \quad (2.2)$$

en ambos casos la traza debe tomarse sobre una base de \mathcal{H} .

A partir de \mathcal{Z} pueden obtenerse los restantes potenciales termodinámicos

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial}{\partial T} (T \ln \mathcal{Z}) \\ \Omega &= -PV = T \frac{\partial}{\partial V} (\ln \mathcal{Z}) \\ E &= \Omega + TS + \mu N \end{aligned}$$

Un elemento fundamental en el estudio de las propiedades dinámicas y estadísticas es la función de Green térmica. Por ejemplo para un campo escalar neutro $\phi(x)$ la función de Green $\Delta(x, x')$ viene dada por $i\Delta(x, x') = \langle T_\tau \phi(x) \phi(x') \rangle$, donde los corchetes angulares indican el valor esperado estadístico (2.1), el campo $\phi(x)$ se halla en la representación de Heisenberg y el operador T_τ , indica el ordenamiento sobre cierto camino en el plano temporal complejo, que en el caso más sencillo se reduce al ordenamiento cronológico habitual en teoría de campos.

Debido a que en los próximos capítulos nos dedicaremos al estudio de efectos estadísticos en la materia hadrónica, hemos seleccionado la DTC como una formulación dúctil para la inclusión de tales efectos. Ya que el uso de la DTC ha cobrado interés sólo en años recientes, dedicaremos este capítulo a la introducción de los conceptos básicos de la DTC. En las próximas dos secciones presentaremos los fundamentos de la formulación más general que incluye fenómenos dentro y fuera del equilibrio estadístico.

Las aplicaciones del presente trabajo se realizarán exclusivamente a la materia hadrónica en régimen estacionario de equilibrio, por ello la sección 2.4 está dedicada a la exposición de la DTC del equilibrio. Allí se describen las técnicas perturbativas, procedimientos de renormalización, etc. Se incluyen a modo de ejemplo algunos casos sencillos del uso de la DTC.

2.2 Fundamentos de la DTC

La DTC es una formulación a tiempo real de la Teoría Estadística de Campos. Desde su enunciado original [26],[27] ha evolucionado hasta incluir aplicaciones a fenómenos dentro y fuera del equilibrio; ruptura de simetría, campos de gauge, técnicas de integral funcional, etc. [31]-[37].

Las dificultades halladas en otras formulaciones podrían evitarse si se realiza una interpretación de la Mecánica Estadística en términos del lenguaje operatorial de la teoría de campos. En particular el valor esperado de vacío (2.1) debería ser reemplazado por cierto valor esperado evaluado con un vacío convenientemente definido. Es decir, $\langle A \rangle \longleftrightarrow \langle 0 | A | 0 \rangle$, donde $| 0 \rangle$ representa un "estado de vacío" que dependerá de la densidad y la temperatura. Indicaremos la dependencia térmica del vacío mediante un parámetro θ : $| 0 \rangle \equiv | 0(\theta) \rangle$.

De aquí en más supondremos que el vacío está normalizado $\langle 0(\theta) | 0(\theta) \rangle = 1$.

Con este propósito se distinguen dos representaciones independientes para cada observable \mathcal{A} de la teoría. A la representación habitual A , asociamos el producto por derecha del operador densidad: $A\rho$. En cambio el producto por izquierda ρA , será expresado en términos de la representación dual \bar{A}

$$\rho A = \bar{A} \rho$$

De esta forma el número de grados de libertad es duplicado, asociando a cada operador su conjugado tilde.

Si M indica un conjunto completo de operadores, que subtiende una base $\{| m \rangle\}$ del espacio de Hilbert, entonces indicaremos por \bar{M} el conjunto completo de operadores conjugados y por $\{|\tilde{m}\rangle\}$ la correspondiente base del espacio dual $\tilde{\mathcal{H}}$. Los vectores $|\tilde{m}\tilde{n}\rangle \equiv | m \rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$, constituyen una base del espacio producto.

La traza de cualquier operador A de la teoría, podría expresarse en esta base según

$$\text{tr} A = \sum_m \langle m | A | m \rangle = \sum_{m, m'} \langle m\tilde{m}' | A | m\tilde{m}' \rangle$$

donde usamos

$$\langle m_1\tilde{m} | A | m_2\tilde{m}' \rangle = \langle m_1 | A | m_2 \rangle \delta_{\tilde{m}, \tilde{m}'} \quad (2.3)$$

Definiendo los vectores

$$| 0(\theta) \rangle = \rho^\alpha \sum_m | m\tilde{m} \rangle \quad (2.4)$$

$$\langle 0(\theta) | = \sum_m \langle m\tilde{m} | \rho^{1-\alpha} \quad (2.5)$$

para α arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | A | 0(\theta) \rangle &= \sum_{m, m'} \langle m\tilde{m} | \rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha | m'\tilde{m}' \rangle \\ &= \langle A \rangle \end{aligned}$$

donde se usó (2.3). Debe notarse que :

i) Sólo en el caso $\alpha = 1/2$ es $\langle 0(\theta) | = (| 0(\theta) \rangle)^\dagger$.

ii) La elección del conjunto completo de operadores M , depende de la fase física en que se halle el sistema en estudio.

A fin de precisar la estructura de DTC deben definirse las propiedades de la transformación tilde. Si A, B son operadores de la teoría y \tilde{A}, \tilde{B} sus conjugados tilde entonces

$$\begin{aligned}(AB)^- &= \tilde{A}\tilde{B} \\ (c_1A + c_2B)^- &= c_1^*\tilde{A} + c_2^*\tilde{B} \\ (A^\dagger)^- &= (\tilde{A})^\dagger \\ (\tilde{A})^- &= \sigma A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}| 0(\tilde{\theta}) \rangle &= | 0(\theta) \rangle \\ \langle 0(\tilde{\theta}) | &= \langle 0(\theta) |\end{aligned}$$

donde c_1, c_2 son números complejos y $\sigma = +1$ (-1) para operadores bosónicos (fermiónicos). Siendo independientes, los operadores físicos y tilde conmutan entre si.

En la representación de Heisenberg, el operador A satisface:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial A}{\partial t} &= [A, H] \\ -i\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} &= [\tilde{A}, \tilde{H}]\end{aligned}$$

Ambas expresiones pueden unificarse usando los operadores $\hat{H} = H - \tilde{H}$, $\hat{A} = A - \tilde{A}$

$$i\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = [\hat{A}, \hat{H}]$$

cualquiera sea el carácter de A .

Por lo tanto \hat{H} puede identificarse como el generador de traslaciones temporales en DTC.

Esta estructura de la DTC permite esclarecer una cuestión conceptual de la teoría estadística, referida a la reducibilidad de los efectos estadísticos a una descripción puramente dinámica. Como veremos, esto es posible en DTC, donde los grados de libertad tilde resultan equivalentes a la hipótesis estocástica de la Mecánica Estadística.

En la teoría estadística clásica la evolución de un sistema físico \mathcal{S} en equilibrio, se simula mediante la introducción de un reservorio térmico \mathcal{T} . De esta forma el conjunto $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ en contacto térmico constituye un sistema cerrado. Además, los estados físicos observables en \mathcal{S} , evolucionan cuasiestáticamente hacia el estado de equilibrio impuesto por \mathcal{T} . En esta situación los promedios estadísticos observables serán independientes del tiempo, no obstante las funciones de Green presentarán efectos disipativos debido a las contribuciones de los estados excitados.

Por otro lado, usando las propiedades de la conjugación tilde y que el hamiltoniano total en la DTC es $H - \tilde{H}$, puede interpretarse que los autoestados de \tilde{H} corresponden a cuantos de energía negativa no acotada inferiormente, no observables. En consecuencia, existirá todo un conjunto continuo de autoestados de \tilde{H} , consistentes con la conservación de autovalores

de \hat{H} . Dado que la creación de un cuanto tilde es equivalente a la aniquilación de una partícula excitada térmicamente, este proceso modificará la situación térmica del sistema.

Así cada vector del subespacio de Hilbert de autoestados degenerados de \hat{H} , vendrá caracterizado por el parámetro térmico θ .

Puede verse que los efectos disipativos de origen térmico son representados por dichos cuantos inmanifiestos, estableciendo cierto paralelismo con el modelo del reservorio térmico. En este sentido puede decirse que la DTC reemplaza efectos estadísticos por la dinámica de los grados de libertad tilde.

2.3 Estructura de la DTC

a) El estado fundamental.

Indicamos por \hat{E}_θ^0 los autovalores reales del operador \hat{H} . En particular para el estado fundamental

$$\hat{H} |0(\theta)\rangle = \hat{E}_\theta^0 |0(\theta)\rangle$$

tomando conjugación tilde y usando que $(\hat{H})^\sim = -\hat{H}$ resulta

$$-\hat{H} |0(\theta)\rangle = \hat{E}_\theta^0 |0(\theta)\rangle$$

De estas dos últimas ecuaciones resulta $\hat{E}_\theta^0 = 0$. En consecuencia el conjunto de vacíos $\{|0(\theta)\rangle\}$ forman un conjunto denso de autoestados degenerados.

Indicando por \hat{G} el operador de rotación en el subespacio

$$|0(\theta + d\theta)\rangle = e^{i\hat{G}(d\theta)} |0(\theta)\rangle \quad (2.6)$$

Como \hat{G} conecta estados degenerados del subespacio de autoestados de \hat{H} , puede escribirse

$$[\hat{H}, \hat{G}] = 0$$

sin embargo dado que $\hat{G} |0(\theta)\rangle \neq 0$, puede decirse que \hat{G} es el generador de una simetría realizada a la Nambu -Goldstone.

Es un resultado conocido [38] que en presencia de ruptura espontánea de simetría el estado $\hat{G} |0(\theta)\rangle$, no es normalizable, es decir no está definido en el espacio de Hilbert. Sin embargo es suficiente que el efecto de la aplicación de conmutadores de \hat{G} esté bien definido para que la teoría sea coherente.

De la invariancia del vacío por conjugación tilde se obtiene :

$$\tilde{\hat{G}} = -\hat{G} \quad (2.7)$$

Usando el generador \hat{G} , el vacío térmico puede expresarse en términos del vacío de la Teoría de Campos como $|0(\theta)\rangle = e^{i\hat{G}} |0\rangle$.

b) Espacio de Fock

En Teoría de Campos es habitual, a fin de realizar cálculos perturbativos, descomponer el hamiltoniano H en un término de partículas libres H_0 y otro de interacción.

Si $\phi_0(x)$ es una solución de campo libre, admitirá una descomposición en autoestados de impulso con operadores de aniquilación y creación $a(p), a^\dagger(p)$, respectivamente. Tales operadores verifican las reglas canónicas de conmutación $[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{pk}$, etc.

Además es posible realizar una descomposición de Haag para H_0 de la forma

$$H_0 = \int d^3k \omega_k a_k^\dagger a_k$$

Si $\phi(x)$ indica el operador de campo exacto, la hipótesis adiabática [39] establece cierta convergencia débil de $\phi(x)$ a $\phi_0(x)$. Esto se expresa mediante la igualdad de elementos matriciales entre dos estados cualesquiera del espacio de Fock \mathcal{F} subtendido por los operadores a y a^\dagger .

Los operadores $a(p)$ en general no aniquilarán al vacío térmico $|0(\theta)\rangle$. Pueden obtenerse los operadores de aniquilación de vacío aplicando la transformación (generador \hat{G} y parámetro θ).

$$|0(\theta)\rangle = e^{i\hat{G}} |0\rangle \quad (2.8)$$

$$a_k(\theta) = e^{i\hat{G}} a_k e^{-i\hat{G}} \quad (2.9)$$

$$a_k^\dagger(\theta) = e^{i\hat{G}} a_k^\dagger e^{-i\hat{G}} \quad (2.10)$$

$$\bar{a}_k(\theta) = e^{i\hat{G}} \bar{a}_k e^{-i\hat{G}} \quad (2.11)$$

$$\bar{a}_k^\dagger(\theta) = e^{i\hat{G}} \bar{a}_k^\dagger e^{-i\hat{G}} \quad (2.12)$$

con las propiedades

$$a_k(\theta)|0(\theta)\rangle = \bar{a}_k(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \quad (2.13)$$

$$\langle 0(\theta)|a_k^\dagger(\theta) = \langle 0(\theta)|\bar{a}_k^\dagger(\theta) = 0$$

$$[a_p(\theta), a_k^\dagger(\theta)]_\pm = \delta^3(p-k)$$

$$[\bar{a}_p(\theta), \bar{a}_k^\dagger(\theta)]_\pm = \delta^3(p-k)$$

A lo largo de este capítulo en los dobles signos \pm, \mp la componente superior corresponde a fermiones y la inferior a bosones. Debe notarse que $a(\theta), a^\dagger(\theta)$ no son conjugados hermíticos excepto para el caso $\alpha = 1/2$.

El hamiltoniano $\hat{H}_0(\theta)$ puede escribirse :

$$\hat{H}_0(\theta) = \int d^3k \omega_k(\theta) [a_k^\dagger(\theta)a_k(\theta) - \bar{a}_k^\dagger(\theta)\bar{a}_k(\theta)]$$

Es posible determinar la estructura del generador \hat{G} usando la condición (2.7) junto con el teorema de expansión de operadores [40]. Dicho teorema establece que cualquier operador expresable como la integral espacial de una densidad local e independiente del tiempo tiene una expansión en segunda cuantificación a lo sumo bilineal en operadores de creación y aniquilación. La forma explícita se presenta en el Apéndice A.

2.4 La DTC del Equilibrio

En lo que resta del capítulo trataremos la DTC del equilibrio estadístico, en cuyo caso es conveniente elegir $\alpha=1/2$ en (2.4). Este es el único caso en que los vacíos térmicos verifican $\langle 0(\theta) | = (| 0(\theta) \rangle)^\dagger$. La transformación (2.4) se reduce a:

$$| 0(\theta) \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \sum_m e^{-\beta E_m / 2} | m\bar{m} \rangle \quad (2.14)$$

donde E_m son autovalores de $H - \mu N$.

Con el propósito de verificar la acción combinada de los operadores físicos y sus duales podemos deducir la transformación (2.8) para el caso del equilibrio, desde principios básicos. Para ello tomaremos el ejemplo más simple posible : partícula libre con un solo nivel cuántico de energía.

El hamiltoniano del sistema es $H = \omega a^\dagger a$, y su dual $\bar{H} = \omega \bar{a}^\dagger \bar{a}$.

Además se supondrá $[a, \bar{a}]_\pm = [a, \bar{a}^\dagger]_\pm = 0$ y $a | 0 \rangle = \bar{a} | 0 \rangle = 0$.

Si las partículas son fermiones la base del espacio de Fock se reduce a $| 0(\theta) \rangle, a^\dagger | 0(\theta) \rangle, \bar{a}^\dagger | 0(\theta) \rangle, -ia^\dagger \bar{a}^\dagger | 0(\theta) \rangle$. En dicho caso la función de partición es $\mathcal{Z}(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega}$.

En cambio para bosones el espacio de Fock es subtendido por $| 0(\theta) \rangle, a^\dagger | 0(\theta) \rangle, \dots, \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0(\theta) \rangle$ y la función de partición correspondiente es $\mathcal{Z}(\beta) = (1 - e^{-\beta\omega})^{-1}$.

Usando una expresión análoga a (2.8) con

$$\hat{G} = \begin{cases} \theta (\bar{a}a + a^\dagger \bar{a}^\dagger), & \text{fermiones} \\ -i\theta (\bar{a}a - a^\dagger \bar{a}^\dagger), & \text{bosones} \end{cases}$$

se obtiene la siguiente expresión para el vacío (2.14)

$$| 0(\theta) \rangle = \begin{cases} \frac{1 - ie^{-\beta\omega/2} \bar{a}^\dagger a^\dagger}{\sqrt{1 + e^{-\beta\omega}}} | 0 \rangle, & \text{fermiones} \\ \sqrt{1 - e^{-\beta\omega}} \sum \frac{e^{-\beta n\omega/2}}{n!} (\bar{a}^\dagger a^\dagger)^n | 0 \rangle, & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.15)$$

si se impone que las cantidades $\langle 0(\theta) | a^\dagger a | 0(\theta) \rangle$ y $\langle 0(\theta) | \bar{a}^\dagger \bar{a} | 0(\theta) \rangle$ coincidan con el número de ocupación de fermiones o bosones según el caso.

Los operadores de creación y aniquilación térmicos $a^\dagger(\theta), a(\theta)$ estan relacionados con $a, \bar{a}, a^\dagger \bar{a}^\dagger$ mediante una transformación canónica del tipo (2.9)-(2.12)

$$a(\theta) = e^{-iG} a e^{iG} = u(\beta)a \pm v(\beta)\bar{a}^\dagger \quad (2.16)$$

$$\bar{a}(\theta) = e^{-iG} \bar{a} e^{iG} = u(\beta)\bar{a} - v(\beta)a^\dagger \quad (2.17)$$

que en última instancia pueden escribirse como la transformación de Bogoliubov del extremo derecho de las fórmulas si se definen :

$$u(\beta) = \begin{cases} (e^{-\beta\omega} + 1)^{-1/2}, & \text{fermiones} \\ (1 - e^{-\beta\omega})^{-1/2}, & \text{bosones} \end{cases}$$

$$v(\beta) = \begin{cases} ie^{-\beta\omega/2} (e^{-\beta\omega} + 1)^{-1/2}, & \text{fermiones} \\ e^{-\beta\omega/2} (1 - e^{-\beta\omega})^{-1/2}, & \text{bosones} \end{cases}$$

De otra forma puede escribirse :

$$u(\beta) = \begin{cases} \cos\theta, & \text{fermiones} \\ \cosh\theta, & \text{bosones} \end{cases}$$

$$v(\beta) = \begin{cases} i \operatorname{sen}\theta, & \text{fermiones} \\ \operatorname{senh}\theta, & \text{bosones} \end{cases} \quad (2.18)$$

Las expresiones 2.16,2.17 pueden invertirse para obtener

$$a = u(\beta)a(\theta) \mp v(\beta)\bar{a}^\dagger(\theta) \quad (2.19)$$

$$\bar{a} = u(\beta)\bar{a}(\theta) + v(\beta)a^\dagger(\theta) \quad (2.20)$$

Empleando (2.15)-(2.17) se demuestra que $a(\theta) |0(\theta)\rangle = \bar{a}(\theta) |0(\theta)\rangle = 0$.

Tambien es importante destacar que los estados térmicos $|0(\theta)\rangle$, $a^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle$, $\bar{a}^\dagger|0(\theta)\rangle$, $\bar{a}^\dagger a^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle$, no son autoestados de H sino de \hat{H}

$$\hat{H}|0(\theta)\rangle = 0$$

$$\hat{H}a^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle = \omega a^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle$$

$$\hat{H}\bar{a}^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle = -\omega \bar{a}^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle$$

$$\hat{H}\bar{a}^\dagger(\theta)a^\dagger(\theta)|0(\theta)\rangle = 0$$

El operador \hat{H} es invariante para la transformación térmica : $\hat{H}(\theta) = \hat{H}(\theta = 0)$.

De 2.20,2.19 puede extraerse la conclusión de que el estado de una cuasipartícula térmica es creado agregando una partícula física o equivalentemente eliminando una partícula dual. En consecuencia, el estado de una partícula dual puede asimilarse a un agujero de partícula y viceversa.

2.4.1 Campos Libres

La extensión al caso de infinitos grados de libertad puede obtenerse como paso al límite de los resultados logrados en el apartado precedente. Sin embargo debe tenerse cuidado pues en el límite de volumen infinito surge el problema de la inequivalencia unitaria de las representaciones. En lo que sigue las deducciones se realizarán para un volumen finito V .

Consideremos el lagrangiano de partícula libre \mathcal{L}_0 y su dual $\tilde{\mathcal{L}}_0$. Por ejemplo, en el caso de campos de fermiones el lagrangiano dual se obtendrá reemplazando ψ y ψ^\dagger por $\tilde{\psi}^*$ y $\tilde{\psi}^{*\dagger}$ en \mathcal{L}_0 y luego tomando su conjugado complejo $\tilde{\mathcal{L}}_0(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^\dagger) = \mathcal{L}_0^*(\tilde{\psi}^*, \tilde{\psi}^{*\dagger})$.

En lo que sigue, se hará un desarrollo explícito para un campo de bosón $\phi(x)$, y acotaremos los correspondientes resultados para fermiones. Si se realiza una expansión en autoestados del impulso

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \left(e^{-ikx} a_k + e^{ikx} a_k^\dagger \right)$$

y usando que cada una de las componentes en impulso se transforma de manera independiente de las restantes, pueden evaluarse las reglas de conmutación a tiempos iguales para $\phi(x)$ y $\tilde{\phi}(x)$

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{x}', t)]_\pm &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t), \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)]_\pm &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)]_\pm &= [\phi(\mathbf{x}, t), \tilde{\phi}(\mathbf{x}', t)]_\pm = [\phi(\mathbf{x}, t), \tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)]_\pm = 0 \end{aligned}$$

La transformada de Legendre

$$\hat{\mathcal{H}}_0(x) = \hat{\mathcal{L}}_0(x) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\phi}(x)} \dot{\phi}(x) - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \dot{\tilde{\phi}}(x)} \dot{\tilde{\phi}}(x)$$

puede usarse para obtener el hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_0(x) = \sum_k \left(a_k^\dagger a_k - \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k \right) \epsilon_k \quad (2.21)$$

Como ya se indicó la transformación térmica puede aplicarse independientemente para cada autoestado del impulso, es decir el generador de la transformación será la suma de los generadores por componente

$$\hat{G} = \sum_k \hat{G}_k \quad (2.22)$$

$$\hat{G}_k = -i\theta_k \left(\tilde{a}_k a_k - \tilde{a}_k^\dagger a_k^\dagger \right) \quad (2.23)$$

Cada componente de (2.21) es invariante por la transformación térmica, por lo tanto todo H_0 es invariante y el generador \hat{G} debería ser una carga conservada [41].

De aquí resulta

$$\begin{aligned} a_k(\theta) &= e^{-i\hat{G}} a_k e^{i\hat{G}} \\ \tilde{a}_k(\theta) &= e^{-i\hat{G}} \tilde{a}_k e^{i\hat{G}} \end{aligned}$$

El vacío térmico se obtiene consecuentemente

$$|0(\theta)\rangle = e^{-i\hat{G}} |0\rangle = \begin{cases} \prod_k \left(\cos\theta_k + \text{sen}\theta_k a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger \right) |0\rangle \\ \prod_k \text{sech}\theta_k \exp\left(\tanh\theta_k a_k^\dagger \tilde{a}_k^\dagger \right) |0\rangle \end{cases}$$

donde se usó (2.23) junto con $a_p | 0 \rangle = \tilde{a}_p | 0 \rangle = 0$. Los coeficientes térmicos $\text{sen}\theta_p, \text{senh}\theta_p$ son definidos por analogía con (2.18)

$$\text{sen}^2\theta_k = n_F(\epsilon_k) \quad \text{senh}^2\theta_k = n_B(\epsilon_k) \quad (2.24)$$

$$\text{cos}^2\theta_k = 1 - \text{sen}^2\theta_k \quad \text{cosh}^2\theta_k = 1 + \text{senh}^2\theta_k \quad (2.25)$$

donde $n_F(E), n_B(E)$ son los números de ocupación para el nivel de energía E, para fermiones y bosones respectivamente.

Es sencillo demostrar que $a_p(\theta) | 0(\theta) \rangle = \tilde{a}_p(\theta) | 0(\theta) \rangle = 0$.

En las secciones siguientes resultará de interés el efecto del operador $e^{\hat{K}/2}$ sobre un estado térmico cualquiera, con K definido mediante

$$-\hat{K} = \begin{cases} \sum_k \left[a_k^\dagger a_k \log(\text{sen}^2\theta_k + a_k a_k^\dagger \log(\text{cos}^2\theta_k)) \right] \\ \sum_k \left[a_k^\dagger a_k \log(\text{senh}^2\theta_k - a_k a_k^\dagger \log(\text{cosh}^2\theta_k)) \right] \end{cases}$$

Las siguientes propiedades pueden obtenerse por cálculo directo

$$i) e^{-\hat{K}/2} a_k^\dagger e^{\hat{K}/2} = \begin{cases} \tan \theta_k a_k^\dagger, & \text{fermiones} \\ \tanh \theta_k a_k^\dagger, & \text{bosones} \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} [\hat{K}, \hat{G}] = 0 \\ \hat{K} | 0(\theta) \rangle = 0 \end{cases}$$

Si consideramos el operador

$$F = \sum_{p,q,m,n} C(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_m}^\dagger a_{q_1} \dots a_{q_n}$$

con C un número complejo, entonces se cumple la relación

$$e^{\hat{K}/2} F | 0(\theta) \rangle = (-1)^{(N_F+1)N_F/2} e^{K/2} \tilde{F}^\dagger | 0(\theta) \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle 0(\theta) | F e^{\hat{K}/2} = (-1)^{(N_F-1)N_F/2} \langle 0(\theta) | \tilde{F}^\dagger e^{K/2} \quad (2.27)$$

donde

$$N_F = \begin{cases} m - n, & \text{fermiones} \\ 0, & \text{bosones} \end{cases}$$

Aquí se ha supuesto la conservación del número bariónico, de modo que la diferencia $m - n$ entre el número de partículas creadas y destruidas es constante en cada uno de los términos de F.

La demostración se presenta en el Apéndice B.

2.4.2 Campos en Interacción

La solución del problema de campos en interacción en la DTC sigue los lineamientos generales de la Teoría de Campos. Usando la hipótesis adiabática [39], puede decirse que los campos

interactuantes convergen, en el sentido de cierto límite débil, a campos asintóticos que no incluyen el efecto de la interacción. Los campos asintóticos incidentes y emergentes están relacionados por la aplicación del operador S

$$\begin{aligned}\phi_{em}(x) &= S^{-1}\phi_{inc}(x)S \\ \tilde{\phi}_{em}(x) &= \tilde{S}^{-1}\tilde{\phi}_{inc}(x)\tilde{S}\end{aligned}$$

En DTC el operador total es $\hat{S} = \tilde{S}S$.

Como la energía se conserva debe ser $[\hat{S}, H] = [\tilde{S}, \tilde{H}] = 0$

Como veremos en la sección siguiente, de la condición de estado térmico puede deducirse que $S|0(\theta)\rangle = e^{\beta\hat{H}/2}\tilde{S}^\dagger|0(\theta)\rangle$.

Multiplicando a izquierda por \tilde{S} se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{S}|0(\theta)\rangle &= \tilde{S}e^{\beta\hat{H}/2}\tilde{S}^\dagger|0(\theta)\rangle \\ &= e^{\beta\hat{H}/2}\tilde{S}\tilde{S}^\dagger|0(\theta)\rangle = |0(\theta)\rangle\end{aligned}$$

Tomando conjugado hermítico en esta última expresión se llega a

$$\langle 0(\theta)| = \langle 0(\theta)|S^{-1}\tilde{S}^\dagger \Rightarrow \langle 0(\theta)|\tilde{S} = \langle 0(\theta)|S^{-1} \quad (2.28)$$

El operador de evolución temporal entre t y t' en la DTC tiene la estructura $\hat{U}(t, t') = U(t, t') - \tilde{U}(t, t')$. Donde $U(t, t')$, $\tilde{U}(t, t')$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}i\frac{dU}{dt}(t, -\infty) &= H_{int}(t)U(t, -\infty) \\ i\frac{d\tilde{U}}{dt}(t, -\infty) &= -\tilde{H}_{int}(t)\tilde{U}(t, -\infty)\end{aligned}$$

Resulta útil, para aplicaciones posteriores, introducir los dobletes térmicos para campos. Cada campo y su dual serán reunidos en un doblete cuyas componentes se distinguirán por un supraíndice $a = 1, 2$. Si $\phi(x), \psi(x)$ indican campos de carácter escalar y espinorial respectivamente y $\tilde{\phi}(x), \tilde{\psi}(x)$ sus duales correspondientes, se definen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi \\ i\tilde{\psi}^* \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (2.29)$$

2.4.3 La Condición de Estado Térmico

En este apartado consideraremos la relación (2.26) con el fin de derivar una relación fundamental de la DTC. Dicha relación da lugar a un resultado análogo a la condición de Kubo-Martin-Schwinger de la Mecánica Estadística. Esta relación operacional, conocida como la condición de estado térmico, será empleada para deducir uno de los rasgos distintivos de la DTC respecto de otras formulaciones de tiempo real : en la DTC siempre es

posible expresar las funciones de Green como la suma de productos causales. Este resultado será empleado en una sección próxima para establecer la aplicabilidad del desarrollo perturbativo y de los diagramas de Feynman.

En [27] se demuestra que $e^{\hat{K}/2} = C e^{\beta \hat{H}/2}$, donde C es un número real. Por lo tanto (2.26) puede reescribirse

$$\begin{aligned} F | 0(\theta) \rangle &= \sigma_F (-1)^{(N_F+1)N_F/2} e^{\beta \hat{H}/2} \tilde{F}^\dagger | 0(\theta) \rangle \\ \langle 0(\theta) | F &= \sigma_F^* (-1)^{(N_F-1)N_F/2} \langle 0(\theta) | \tilde{F}^\dagger e^{\beta \hat{H}/2} \end{aligned}$$

donde hemos usado $[H, \tilde{H}] = 0$.

Pasando F a la representación de Heisenberg y usando que $\hat{H} | 0(\theta) \rangle = 0$, estas dos últimas relaciones pueden expresarse como

$$\begin{aligned} F(t) | 0(\theta) \rangle &= (-1)^{(N_F+1)N_F/2} \sigma_F e^{-\beta \mu N/2} \tilde{F}^\dagger \left(t - i \frac{\beta}{2} \right) | 0(\theta) \rangle \quad (2.30) \\ \langle 0(\theta) | F(t) &= (-1)^{(N_F-1)N_F/2} \sigma_F^* e^{-\beta \mu N/2} \langle 0(\theta) | \tilde{F}^\dagger \left(t + i \frac{\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden usarse para evaluar el valor esperado de vacío térmico del producto $A(t) B(t')$

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | A(t) B(t') | 0(\theta) \rangle &= (-1)^{(N_A-1)N_A/2} \sigma_F^* e^{-\beta \mu N_A/2} \\ &\quad \langle 0(\theta) | \tilde{A}^\dagger \left(t + i \frac{\beta}{2} \right) B(t') | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Llevando $B(t')$ a la izquierda de \tilde{A}^\dagger se genera el factor $(-1)^{N_A N_B}$ y luego aplicando (2.30)

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | A(t) B(t') | 0(\theta) \rangle &= (-1)^{(N_A-1)N_A/2} (-1)^{N_A N_B} (-1)^{(N_A+1)N_A/2} e^{-\beta \mu N_A/2} \\ &\quad \langle 0(\theta) | B(t') A(t + i\beta) | 0(\theta) \rangle \quad (2.31) \end{aligned}$$

Esta es la condición de KMS para $A(t), B(t')$. En el último paso se usó $\tilde{\tilde{A}} = A, [\tilde{A}(t + i\nu)]^\dagger = \tilde{A}^\dagger(t - i\nu)$.

Esta fórmula puede emplearse para establecer la siguiente conexión entre la función de Green causal y la función de correlación en la DTC

$$\begin{aligned} iG_R(A(t), B(t')) &= iG_c(A(t), B(t')) \pm \\ &\quad (-1)^{(N_B+1)N_B/2} iG_c \left(e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2}, A(t) \right) \quad (2.32) \end{aligned}$$

la deducción se realiza en el Apéndice C.

Esta expresión se simplifica cuando A, B son operadores del mismo carácter fermiónico o bosónico : $N_A = N_B = 0, 1$

$$G_R(A(t), B(t')) = G_c(A(t), B(t')) - G_c \left(e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2}, A(t) \right)$$

Esta relación es posible debido a la introducción de los grados de libertad duales.

2.4.4 Desarrollo Perturbativo

Supondremos que el hamiltoniano H en la representación de interacción admite una expansión en autoestados con energía ϵ_p . El promedio estadístico de cualquier operador $F(t)$ en la representación de Heisenberg $\langle F(t) \rangle = \langle 0(\beta) | F(t) | 0(\beta) \rangle$ satisface

$$\langle F(t) \rangle = \langle 0(\theta) | U^{-1}(t, -\infty) F_{inc}(t) U(t, -\infty) | 0(\theta) \rangle \quad (2.33)$$

donde hemos usado la representación de interacción F_{inc} en términos de campos asintóticos incidentes y la propiedad (2.28). De la propiedad de composición del operador de evolución temporal

$$S U^{-1}(t, -\infty) = U(+\infty, -\infty) U^{-1}(t, -\infty) = U(+\infty, t) \quad (2.34)$$

$$\tilde{S} = \tilde{U}(+\infty, t) \tilde{U}(t, -\infty) \quad (2.35)$$

usando este resultado la ec. (2.33) toma la forma

$$\langle F(t) \rangle = \langle 0(\beta) | \tilde{U}(+\infty, t) \tilde{U}(t, -\infty) U(+\infty, t) F_{inc}(t) U(t, -\infty) | 0(\theta) \rangle$$

Conmutando el operador $\tilde{U}(t, -\infty)$ con los operadores físicos a su derecha, hasta colocarlo a la izquierda de $U(t, -\infty)$ resulta por último

$$\begin{aligned} \langle F(t) \rangle &= \langle 0(\theta) | \hat{U}(+\infty, t) F_{inc}(t) \hat{U}(t, -\infty) | 0(\theta) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \\ &\quad \times \langle 0(\theta) | T \{ F_{inc}(t) \hat{H}_{int}(t_1) \dots \hat{H}_{int}(t_n) \} | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Siguiendo procedimientos similares a los empleados en la Teoría de Campos, esta expresión puede llevarse a la forma

$$\langle F(t) \rangle = \frac{\langle 0(\theta) | T \left\{ F(t) \exp \left[i \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{int}(x) \right] \right\} | 0(\theta) \rangle}{\langle 0(\theta) | T \exp \left[i \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{int}(x) \right] | 0(\theta) \rangle} \quad (2.36)$$

Esta expansión perturbativa admite una interpretación en términos de diagramas de Feynman, ya que es posible demostrar [27] que el teorema de Wick es aplicable dentro de la DTC. Las posibles contracciones de los campos vienen dadas por

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | T \left\{ \psi_{inc}(x) \psi_{inc}^\dagger(x') \right\} | 0(\theta) \rangle &= \frac{i}{V} \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} G^0(p) e^{-ip_0(x-x')} \\ \langle 0(\theta) | T \left\{ \tilde{\psi}_{inc}(x) \tilde{\psi}_{inc}^\dagger(x') \right\} | 0(\theta) \rangle &= \frac{i}{V} \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \tilde{G}^0(p) e^{-ip_0(x-x')} \\ \langle 0(\theta) | T \left\{ \psi_{inc}(x) \tilde{\psi}_{inc}(x') \right\} | 0(\theta) \rangle &= \pm \frac{1}{V} \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \tilde{I}^0(p) e^{-ip_0(x-x') - \beta p_0/2} \\ \langle 0(\theta) | T \left\{ \psi_{inc}(x) \tilde{\psi}_{inc}^\dagger(x') \right\} | 0(\theta) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 G^0(p) &= \frac{g(p) \pm g^*(p)}{1 \pm e^{-\beta p_0}} \\
 \tilde{G}^0(p) &= \frac{\tilde{g}(p) \pm \tilde{g}^*(p)}{1 \pm e^{-\beta p_0}} \\
 \bar{I}^0(p) &= 2\pi \frac{\delta(p_0^2 - \epsilon^2)}{1 \pm e^{-\beta p_0}} \\
 g(p) &= \frac{1}{p_0 - \epsilon(p) + i\eta} \\
 \tilde{g}(p) &= \frac{1}{p_0 + \epsilon(p) + i\eta}
 \end{aligned}$$

En la sección 2.4.2 se ha introducido la notación de doblete térmico. Siendo la función de Green el valor esperado de vacío del producto ordenado de dos campos debe, para ser consistentes, estar expresada en términos de una matriz de 2×2 . Es suficiente para ello reunir en notación matricial los resultados indicados mas arriba. Anticipándonos a necesidades posteriores, particularizaremos las conclusiones para tres clases de campos : un campo espinorial $\psi(x)$ con $s=1/2$, un campo escalar neutro $\sigma(x)$ y un campo vectorial masivo y neutro $\omega_\mu(x)$. Cuando no hay presente ninguna interacción, satisfacen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
 (i \not{\partial} - M) \psi &= 0 \\
 (\square + m_s^2) \sigma &= 0 \\
 \partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu &= 0
 \end{aligned}$$

donde hemos indicado con M, m_s, m_v las masas correspondientes a los campos de fermión, de bosón escalar y bosón vectorial respectivamente.

Estos campos satisfacen las siguientes expansiones en autoestados del impulso

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p,s} \left[b_{p,s} u(p,s) e^{-ipx} + d_{p,s}^\dagger v(p,s) e^{ipx} \right]_{p_0=E_p} \\
 \sigma(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega_{sp}}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right)_{p_0=\omega_{sp}} \\
 \omega_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \frac{e^\mu(p,\lambda)}{\sqrt{2\omega_{vp}}} \left(c_{p\lambda} e^{-ipx} + c_{p\lambda}^\dagger e^{ipx} \right)_{p_0=\omega_{vp}}
 \end{aligned}$$

La notación empleada es estándar [19], por ejemplo $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$, $\omega_{sp} = \sqrt{p^2 + m_s^2}$, $\omega_{vp} = \sqrt{p^2 + m_v^2}$, $\epsilon^\mu(p,\lambda)$ es la μ -ésima componente del vector polarización en la dirección λ .

En el límite de volumen infinito $\sum_p \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p$

Expresiones similares se tiene para sus duales

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p,s} \left[\bar{b}_{p,s} u^*(p,s) e^{ipx} + \bar{d}_{p,s}^\dagger v^*(p,s) e^{-ipx} \right]_{p_0=E_p}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega_{sp}}} \left(\tilde{a}_p e^{ipx} + \tilde{a}_p^\dagger e^{-ipx} \right)_{p_0=\omega_s} \\ \tilde{\omega}_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \frac{e^{\mu^*(p,\lambda)}}{\sqrt{2\omega_{vp}}} \left(\tilde{c}_{p\lambda} e^{ipx} + \tilde{c}_{p\lambda}^\dagger e^{-ipx} \right)_{p_0=\omega_v}\end{aligned}$$

Una propiedad aún no mencionada en las secciones previas es que en el campo $\psi(x)$ la transformación de Bogoliubov para partículas y agujeros requieren coeficientes distintos.

Para mayor comodidad reformularemos las expresiones para las transformaciones térmicas para los campos de interés actual.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_{p,s} \\ i\tilde{b}_{p,s}^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_+ & \text{sen}\theta_+ \\ -\text{sen}\theta_+ & \cos\theta_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{p,s}(\theta) \\ i\tilde{b}_{p,s}^\dagger(\theta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_{p,s} \\ i\tilde{d}_{p,s}^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_- & \text{sen}\theta_- \\ -\text{sen}\theta_- & \cos\theta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{p,s}(\theta) \\ i\tilde{d}_{p,s}^\dagger(\theta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_p \\ \tilde{a}_p^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\theta & \text{senh}\theta \\ \text{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p(\theta) \\ \tilde{a}_p^\dagger(\theta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_{p\lambda} \\ \tilde{c}_{p\lambda}^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh\theta & \text{senh}\theta \\ \text{senh}\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{p\lambda}(\theta) \\ \tilde{c}_{p\lambda}^\dagger(\theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Los parámetros térmicos son fijados por normalización al número de ocupación

$$\begin{aligned}\langle 0(\theta) | b_{p,s}^\dagger b_{p,s} | 0(\theta) \rangle &= n_F(E_p) \\ \langle 0(\theta) | d_{p,s}^\dagger d_{p,s} | 0(\theta) \rangle &= \bar{n}_F(E_p) \\ \langle 0(\theta) | a_p^\dagger a_p | 0(\theta) \rangle &= n_B(\omega_{sp}) \\ \langle 0(\theta) | c_{p\lambda}^\dagger c_{p\lambda} | 0(\theta) \rangle &= \delta_{\lambda\lambda'} n_B(\omega_{vp})\end{aligned}$$

La función de Green es definida a la manera habitual, al igual que su transformada de Fourier. A continuación presentamos los resultados correspondientes al campo de Dirac, de bosón escalar y de bosón vectorial, en ese orden [42],[43].

$$\begin{aligned}iG_{\alpha\beta}^{0(ab)}(x_1 - x_2) &= \langle 0(\theta) | T \psi_\alpha^{(a)}(x_1) \bar{\psi}_\beta^{(b)}(x_2) | 0(\theta) \rangle \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1-x_2)} G_{\alpha\beta}^{0(ab)}(p)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}^{0(ab)}(p) &= G_{F\alpha\beta}^{0(ab)}(p) + G_{D\alpha\beta}^{0(ab)}(p) \tag{2.37} \\ G_{F\alpha\beta}^{0(ab)}(p) &= (\not{p} + M)_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 & \\ \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^2 - M^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}^{(ab)} \\ G_{D\alpha\beta}^{0(ab)}(p) &= 2\pi i (\not{p} + M)_{\alpha\beta} \delta(p^2 - M^2) \begin{pmatrix} \text{sen}^2\theta_{p_0} & \frac{1}{2}\text{sen}2\theta_{p_0} \\ \frac{1}{2}\text{sen}2\theta_{p_0} & -\text{sen}^2\theta_{p_0} \end{pmatrix}^{(ab)}\end{aligned}$$

se ha usado

$$\cosh\theta_{p_0} = \frac{\Theta(p_0)}{\sqrt{1+e^{-x}}} + \frac{\Theta(-p_0)}{\sqrt{1+e^x}} \quad (2.38)$$

$$\sinh\theta_{p_0} = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{1+e^{-x}}}\Theta(p_0) - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{1+e^x}}\Theta(-p_0) \quad (2.39)$$

con $x = \beta(p_0 - \mu)$ y Θ es la función de Heaviside.

Análogamente

$$i\Delta^{0(ab)}(x_1 - x_2) = \langle 0(\theta) | T \sigma^{(a)}(x_1) \sigma^{(b)} | 0(\theta) \rangle \quad (2.40)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \Delta^{0(ab)}(p)$$

$$\Delta^{0(ab)}(p) = \Delta_F^{0(ab)}(p) + \Delta_D^{0(ab)}(p) \quad (2.41)$$

donde

$$\Delta_F^{0(ab)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p^2 - m_s^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}^{(ab)}$$

$$\Delta_D^{0(ab)}(p) = -2\pi i \delta(p^2 - m_s^2) \begin{pmatrix} \sinh^2 \phi_{p_0} & \frac{1}{2} \sinh 2\phi_{p_0} \\ \frac{1}{2} \sinh 2\phi_{p_0} & \sinh^2 \phi_{p_0} \end{pmatrix}^{(ab)}$$

y aquí se usó

$$\sinh\phi_{p_0} = \frac{e^{-|y|/2}}{\sqrt{1 - e^{-|y|}}}, \quad \cosh\phi_{p_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-|y|}}}$$

con $y = \beta p_0$. Finalmente

$$iD_{\mu\nu}^{0(ab)}(x_1 - x_2) = \langle 0(\theta) | T \omega_\mu^{(a)}(x_1) \omega_\nu^{(b)} | 0(\theta) \rangle \quad (2.42)$$

$$= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} D_{\mu\nu}^{0(ab)}(p)$$

$$D_{\mu\nu}^{0(ab)}(p) = D_{F\mu\nu}^{0(ab)}(p) + D_{D\mu\nu}^{0(ab)}(p) \quad (2.43)$$

donde

$$D_{F\mu\nu}^{0(ab)}(p) = \xi_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m_s^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p^2 - m_s^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}^{(ab)}$$

$$D_{D\mu\nu}^{0(ab)}(p) = \xi_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \sinh^2 \phi_{p_0} & \frac{1}{2} \sinh 2\phi_{p_0} \\ \frac{1}{2} \sinh 2\phi_{p_0} & \sinh^2 \phi_{p_0} \end{pmatrix}^{(ab)}$$

con $\xi_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu / m_s^2$ y la definición de $\sinh\phi_{p_0}$, $\cosh\phi_{p_0}$ es como en el caso anterior. Estos resultados pueden reexpresarse de manera mas compacta usando la matriz de transformación térmica para fermiones y bosones, $U_F(p_0)$, $U_B(p_0)$ respectivamente

$$U_F(p_0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{p_0} & \text{sen}\theta_{p_0} \\ -\text{sen}\theta_{p_0} & \cos\theta_{p_0} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$U_B(p_0) = \begin{pmatrix} \cosh\phi_{p_0} & \text{senh}\phi_{p_0} \\ \text{senh}\phi_{p_0} & \cosh\phi_{p_0} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

En términos de éstas se tiene

$$G_{\alpha\beta}^{0(ab)}(p) = \left(U_F(p_0) \begin{pmatrix} \bar{G}^0(p) & 0 \\ 0 & \bar{G}^{0*}(p) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} U_F^{-1}(p_0) \right)^{(ab)} \quad (2.46)$$

$$\Delta^{0(ab)}(p) = \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} \bar{\Delta}^0(p) & 0 \\ 0 & -\bar{\Delta}^{0*}(p) \end{pmatrix} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)} \quad (2.47)$$

$$D_{\mu\nu}^{0(ab)}(p) = \xi_{\mu\nu} \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} \bar{D}^0(p) & 0 \\ 0 & -\bar{D}^{0*}(p) \end{pmatrix} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)} \quad (2.48)$$

con

$$\bar{G}^0(p) = (\not{p} + M) / (p^2 - M^2 + i\epsilon)$$

$$\bar{\Delta}^0(p) = 1 / (p^2 - m_s^2 + i\epsilon)$$

$$\bar{D}^0(p) = 1 / (p^2 - m_v^2 + i\epsilon)$$

y la operación indicada por \star corresponde a tomar conjugación compleja con excepción de las matrices γ .

Puede identificarse por inspección directa, que las componentes de los propagadores en la representación de impulso satisfacen las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{0(12)} &= G_{\alpha\beta}^{0(21)} & G_{\alpha\beta}^{0(22)} &= G_{\alpha\beta}^{0(11)\star} \\ \Delta^{0(12)} &= \Delta^{0(21)} & \Delta^{0(22)} &= -\Delta^{0(11)\star} \\ D_{\mu\nu}^{0(12)} &= D_{\mu\nu}^{0(21)} & D_{\mu\nu}^{0(22)} &= -D_{\mu\nu}^{0(11)\star} \end{aligned}$$

2.4.5 El Propagador Exacto

En presencia de interacción, los propagadores para fermiones y bosones $G_{\alpha\beta}^{(ab)}(x_1, x_2)$, $\Delta^{(ab)}(x_1, x_2)$, $D_{(\mu\nu)}^{(ab)}(x_1, x_2)$ respectivamente, se definen mediante

$$\begin{aligned} iG_{\alpha\beta}^{(ab)}(x_1 - x_2) &= \langle 0(\theta) | T \psi_{\alpha}^{(a)}(x_1) \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(x_2) | 0(\theta) \rangle \\ i\Delta^{(ab)}(x_1 - x_2) &= \langle 0(\theta) | T \sigma^{(a)}(x_1) \sigma^{(b)}(x_2) | 0(\theta) \rangle \\ iD_{\mu\nu}^{(ab)}(x_1 - x_2) &= \langle 0(\theta) | T \omega_{\mu}^{(a)}(x_1) \omega_{\nu}^{(b)}(x_2) | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

donde se ha supuesto distribución estática y uniforme.

Los promedios pueden ser evaluados usando (2.36) con $F(t)$ reemplazado por el producto de campos.

Usando la descomposición espectral para el propagador exacto del campo de nucleón [42]-[47] y la condición de estado térmico puede demostrarse (ver Apéndice D) la siguiente relación

$$G_{\alpha\beta}^{(ab)}(p) = \left(U_F(p_0) \begin{pmatrix} \bar{G}(p) & 0 \\ 0 & \bar{G}^*(p) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} U_F^{-1}(p_0) \right)^{(ab)} \quad (2.49)$$

donde

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \rho_{\alpha\beta}(z, p) \left[\frac{\Theta(p_0)}{p_0 - z + i\epsilon} + \frac{\Theta(-p_0)}{p_0 - z - i\epsilon} \right]$$

y $\rho_{\alpha\beta}(p)$ es la función espectral.

Para llegar a (2.49) se ha usado que la función espectral es una combinación lineal a coeficientes reales de las matrices gamma. El resultado (2.49) conserva la estructura de la descomposición (2.46) realizada para el propagador de fermión libre.

En particular las siguientes relaciones para las componentes del propagador exacto se siguen de (2.49)

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{0(12)} &= G_{\alpha\beta}^{0(21)} = -i \operatorname{sen} 2\theta_{p_0} \operatorname{Im} \bar{G}_{\alpha\beta}(p) \\ G_{\alpha\beta}^{0(22)} &= G_{\alpha\beta}^{0(11)*} \\ \operatorname{Re} G_{\alpha\beta}^{(11)}(p) &= \operatorname{Re} \bar{G}_{\alpha\beta}(p) \\ \operatorname{Im} G_{\alpha\beta}^{(11)}(p) &= \operatorname{cos} 2\theta_{p_0} \operatorname{Im} \bar{G}_{\alpha\beta}(p) \end{aligned}$$

Usando un procedimiento análogo puede demostrarse que los propagadores exactos para bosones también conservan la forma de la descomposición realizada para el caso de partícula libre en términos de la matriz de la transformación $U_B(p_0)$

Un importante resultado de la DTC es que los propagadores exactos admiten ser expresados mediante una ecuación de Dyson en términos de una autoenergía (o inserción de polarización) propia [27],[42].

Para el propagador del fermión dicha ecuación de Dyson se escribe

$$G_{\alpha\beta}^{(ab)} = G_{\alpha\beta}^{0(ab)} + [G^0(p)\Sigma(p)G(p)]_{\alpha\beta}^{(ab)} \quad (2.50)$$

donde $\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)}$ es la autoenergía propia.

Despejando $\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)}$ de la Ec. (2.50) en términos de los propagadores sin perturbar y exacto

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)}(p) = [G^0(p)]_{\alpha\beta}^{-1(ab)} - [G(p)]_{\alpha\beta}^{-1(ab)}$$

Insertando los resultados (2.49),(2.46) esto es equivalente a

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)}(p) = \left(U_F(p_0) \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}(p) & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^*(p) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} U_F^{-1}(p_0) \right)^{(ab)}$$

entonces usando (2.44) pueden obtenerse las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha\beta}^{(12)}(p) &= \Sigma_{\alpha\beta}^{(21)}(p) = -i \operatorname{sen} 2\theta_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Sigma}_{\alpha\beta}(p) \\
\Sigma_{\alpha\beta}^{(22)}(p) &= \Sigma_{\alpha\beta}^{(11)*}(p) \\
\operatorname{Re} \Sigma_{\alpha\beta}^{(11)}(p) &= \operatorname{Re} \bar{\Sigma}_{\alpha\beta}(p) \\
\operatorname{Im} \Sigma_{\alpha\beta}^{(11)}(p) &= \operatorname{cos} 2\theta_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Sigma}_{\alpha\beta}(p)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Por otro lado, la ecuación de Dyson puede resolverse para $G(p)$

$$\begin{aligned}
[G(p)]_{\alpha\beta}^{-1(ab)} &= [G^0(p)]_{\alpha\beta}^{-1(ab)} - \Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)} \\
&= \left(U_F(p_0) \begin{pmatrix} \not{p} - M - \bar{\Sigma}(p) & 0 \\ 0 & \not{p} - M - \bar{\Sigma}^*(p) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} U_F^{-1}(p_0) \right)^{(ab)}
\end{aligned}$$

Resultados similares pueden obtenerse para los propagadores de bosones, las respectivas ecuaciones de Dyson son

$$\begin{aligned}
\Delta^{(ab)}(p) &= \Delta^0{}^{(ab)}(p) + [\Delta^0(p) \Pi_s(p) \Delta(p)]^{(ab)} \\
D_{\mu\nu}^{(ab)}(p) &= D_{\mu\nu}^0{}^{(ab)}(p) + [D^0(p) \Pi_\nu(p) D(p)]_{\mu\nu}^{(ab)}
\end{aligned}$$

donde Π_s, Π_ν son las inserciones de polarización para el campo escalar y vectorial respectivamente. Ellas pueden escribirse usando la matriz de transformación para bosones $U_B(p_0)$ como

$$\begin{aligned}
\Pi_s^{(ab)}(p) &= \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} \bar{\Pi}_s(p) & 0 \\ 0 & -\bar{\Pi}_s^*(p) \end{pmatrix} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)} \\
\Pi_{\nu\mu\nu}^{(ab)}(p) &= \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} \bar{\Pi}_\nu(p) & 0 \\ 0 & -\bar{\Pi}_\nu^*(p) \end{pmatrix}_{\mu\nu} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)}
\end{aligned}$$

a partir de estas expresiones pueden lograrse las siguientes relaciones entre componentes

$$\begin{aligned}
\Pi_s^{(12)}(p) &= \Pi_s^{(21)}(p) = -i \operatorname{sen} h 2\phi_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Pi}_s(p) \\
\Pi_s^{(22)}(p) &= -\Pi_s^{(11)*}(p) \\
\operatorname{Re} \Pi_s^{(11)}(p) &= \operatorname{Re} \bar{\Pi}_s(p) \\
\operatorname{Im} \Pi_s^{(11)}(p) &= \operatorname{cosh} 2\phi_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Pi}_s(p)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Pi_{\nu\mu\nu}^{(12)}(p) &= \Pi_{\nu\mu\nu}^{(21)}(p) = -i \operatorname{sen} h 2\phi_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Pi}_{\nu\mu\nu}(p) \\
\Pi_{\nu\mu\nu}^{(22)}(p) &= -\Pi_{\nu\mu\nu}^{(11)*}(p) \\
\operatorname{Re} \Pi_{\nu\mu\nu}^{(11)}(p) &= \operatorname{Re} \bar{\Pi}_{\nu\mu\nu}(p) \\
\operatorname{Im} \Pi_{\nu\mu\nu}^{(11)}(p) &= \operatorname{cosh} 2\phi_{p_0} \operatorname{Im} \bar{\Pi}_{\nu\mu\nu}(p)
\end{aligned}$$

Las inversas de los propagadores respectivos resultan

$$[\Delta(p)]^{-1(ab)} = \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} p^2 - m_s^2 - \bar{\Pi}_s(p) & 0 \\ 0 & -p^2 + m_s^2 + \bar{\Pi}_s^*(p) \end{pmatrix} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)}$$

$$[D(p)]_{\mu\nu}^{-1(ab)} = \left(U_B(p_0) \begin{pmatrix} \zeta(p) - \bar{\Pi}_v(p) & 0 \\ 0 & -\zeta(p) + \bar{\Pi}_v^*(p) \end{pmatrix}_{\mu\nu} U_B^{-1}(p_0) \right)^{(ab)}$$

en la última fórmula se usó $\zeta_{\mu\nu}(p) = -(p^2 - m_v^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$.

2.4.6 Renormalización

En la primera parte de este capítulo se ha considerado el efecto térmico en la representación de cuasipartícula. La densidad y la temperatura son responsables de la aparición de una parte imaginaria en la inversa del propagador. En la DTC sólo la parte real de dichos propagadores esta implicada en las condiciones de renormalización y, eventualmente, la parte imaginaria renormalizada puede hallarse a través de las relaciones entre las componentes de la matriz térmica. En (2.37)-(2.43) se ha hecho explícita la separación de los propagadores en una componente de Feynman y otra componente que depende de la densidad y la temperatura. Esta última introduce un corte exponencial a la variación en energía para toda temperatura finita; por lo tanto el propagador del estado sin perturbar tiene el mismo comportamiento asintótico que el correspondiente a densidad y temperatura nulas. En consecuencia la renormalizabilidad puede determinarse empleando el método de conteo de potencias para divergencias ultravioletas, es decir, si la teoría es renormalizable a temperatura y densidad nulas continuará siéndolo en cualquier otra situación. Se ha demostrado [45] que las eventuales divergencias resultan independientes de la temperatura. Esta propiedad permite vincular los parámetros del modelo determinados en distintas condiciones de densidad y temperatura mediante una renormalización finita.

La aplicación de la la teoría del grupo de renormalización en el contexto de la DTC es un tema que estamos desarrollando actualmente [44]

Tratamientos Alternativos en la Dinámica Cuántica de Hadrones(DCH)

3.1 Introducción

En el Capítulo 1 se han presentado algunas formas sencillas de modelizar la dinámica del medio nuclear. No obstante su sencillez, estos modelos han sido resueltos sólo de manera aproximada. La aproximación de campo medio (ACM) o bien los esquemas autoconsistentes en la aproximación a un lazo han sido usados ampliamente. La fundamentación de tales estudios radica en la presunción de que la ACM es tanto más adecuada cuanto mayor es la densidad. De esta manera la ACM y la AHR constituirían puntos iniciales, no perturbativos, apropiados para la introducción de correcciones posteriores. Dichas correcciones permitirán el refinamiento sistemático de las predicciones teóricas a fin de ser comparadas con la experiencia.

Recordemos que la ACM fue construida a partir de la solución de partícula libre por la inclusión de la corrección del diagrama directo a todo orden y de manera autoconsistente, pero omitiendo las fluctuaciones cuánticas. La inclusión de los efectos de polarización del mar de Dirac conduce a la AHR [19].

Por otra parte la inclusión del término de intercambio, omitiendo el diagrama directo, es la llamada aproximación de Fock autoconsistente (AFA). Este es el tratamiento empleado para modelos de interacción pión-nucleón [13],[48] y ejemplificado en la sección 1.3.

El uso de los diagramas directo y de intercambio, pero eliminando las fluctuaciones de vacío es la llamada aproximación de Dirac-Hartree-Fock (ADHF) de [20],[49]. Dicha aproximación fue empleada para el lagrangiano QHD-I en el Capítulo 1 para el tratamiento de materia nuclear, y fue aplicada a núcleos finitos en [50]. Finalmente el tratamiento de las correcciones de vacío en la ADHF ha sido denominada Aproximación Relativista de Hartree-Fock (ARHF) en [51].

Todos estos casos incluyen de manera total o parcial el primer orden en una expansión en lazos. En principio este tratamiento puede ser extendido a todo orden, sin embargo las dificultades de cálculo han restringido su empleo a la primera corrección.

Debe destacarse que la teoría de renormalización convencional propone un tratamiento de las divergencias orden por orden. En contraste, como se ha visto en la AHR de la sección 1.2, en los tratamientos no perturbativos las divergencias deben eliminarse a todo orden en la constante de acoplamiento.

En el caso de la AHR las divergencias aparecen a todo orden en g_s y g_v . El contratérmino necesario para eliminarlas es un polinomio de cuarto orden en el campo escalar y es suficiente incluirlo sólo a un lazo fermiónico. El problema se complica en la AFA, donde las amplitudes divergentes aparecen a todo orden perturbativo y a un número arbitrario de lazos. En [48] el uso de técnicas de representación espectral permite eliminar divergencias si se omite el término directo. No obstante, cuando estos son incluidos se produce la superposición de divergencias que requieren un tratamiento más complicado [51].

Siguiendo el análisis de [52] distinguiremos tres clases de expansiones :

i) Expansión perturbativa (EP) es aquella, que para un dado punto de partida, la inclusión de correcciones resulta en un desarrollo en potencias de la constante de acoplamiento. Los términos sucesivos se evalúan usando los parámetros y valores medios determinados en el orden precedente.

ii) La expansión no perturbativa de convergencia fuerte es un esquema no perturbativo que emplea los parámetros fijados en un orden anterior, pero los valores medios se determinan al orden presente. La expansión en lazos es un ejemplo de este caso. La contribución a cada orden, evaluada en estas condiciones debe ser relativamente menor que el orden anterior.

iii) En la expansión no perturbativa de convergencia débil los parámetros son ajustados a cada orden. Debe incluirse un criterio de bondad específico, por ejemplo que los resultados evaluados no difieran cualitativamente al pasar de un orden al siguiente. En particular no debe haber un cambio drástico en los valores de los acoplamientos.

En este capítulo se empleará el modelo de QHD-I para estudiar métodos alternativos de solución aplicados a la materia nuclear uniforme.

En primer lugar se examinará la expansión en lazos como método no perturbativo para incluir correcciones de manera sistemática. Para ello se emplea el formalismo de integrales de camino y se evalúan correcciones a uno y dos lazos, siguiendo el análisis realizado por [52]. Con el propósito de definir el carácter de la expansión se procederá a computar las correcciones usando los parámetros fijados en la AHR. De esta manera es posible discernir si se trata del caso (i) o del (ii). Luego se emplean nuevos parámetros, obtenidos por un cálculo variacional sobre los resultados a dos lazos y normalizando las condiciones de saturación. Este resultado pondrá a prueba si corresponde al caso (iii).

Como una opción alternativa se estudiará la aproximación de fases al azar relativista (AFAR). Este procedimiento fue introducido por [53] en modelos de la teoría de campos con ruptura espontánea de simetría y luego aplicado a la DCH por [54]. En esta aproximación los lazos de mesones se construyen orden a orden y cada uno de ellos suma los lazos fermiónicos a todo orden. Esto es posible si se define un parámetro de expansión independiente para los lazos de fermión.

Por analogía con la aproximación de fases al azar convencional, que proporciona el límite de alta densidad correcto para la energía de un gas de electrones, se espera que la AFAR proporcione el comportamiento asintótico adecuado para el modelo de QHD-I.

Para concluir se presenta el método descrito en [55], [56]. El mismo toma como punto de partida la AHR no perturbativa. Debido a que esta aproximación incluye los efectos dominantes de la interacción nuclear, se presume la transición hacia un régimen perturbativo. Esta transición está marcada por una discontinuidad en las constantes de acoplamiento

de la AHR (g_s, g_v) , tomando nuevos valores efectivos (g'_s, g'_v) , aptos para un desarrollo perturbativo. Si bien el procedimiento no determina los acoplamientos efectivos es posible fijarlos de modo de reproducir propiedades secundarias de la materia nuclear, tales como la compresibilidad, la anarmonicidad [57], etc.

3.2 La Expansión en Lazos

3.2.1 Formalismo

Para desarrollar el formalismo se tomará el lagrangiano QHD-I ampliado por la inclusión de una autointeracción $V(\sigma)$ del campo de escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \hbar\bar{\psi}[(i\not{\partial} - g_v\not{\psi}) - (M - g_s\sigma)]\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) \\ & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega_\nu\omega^\nu - V(\sigma) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $V(\sigma)$ es un polinomio a lo sumo de orden cuatro.
La funcional generatriz \mathcal{Z} para dicho modelo es

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j, J_\mu] &= \exp\{iW[j, J_\mu]\} \\ &= \mathcal{N} \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\omega \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}(x) + j(x)\sigma(x) + J^\mu(x)\omega_\mu(x)]\right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde se ha definido la funcional generatriz de diagramas conexos $W[j, J_\mu]$, con $j(x)$ y $J_\mu(x)$ fuentes clásicas para los campos de mesón escalar y vectorial respectivamente. La constante de normalización \mathcal{N} viene dada por

$$\mathcal{N}^{-1} = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\omega \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(x)\right\} \quad (3.3)$$

El factor principal es evaluado en presencia de las fuentes clásicas y a densidad bariónica finita. Este hecho será tenido en cuenta explícitamente a través del propagador de fermión. En cambio la constante \mathcal{N} se calcula a densidad bariónica cero.

Por otro lado los cuadrados de las masas de los mesones deberán complementarse con una parte imaginaria negativa infinitesimal, a fin de tener bien definidas las condiciones de contorno.

La accion efectiva $\Gamma[\sigma, \omega^\mu]$ puede obtenerse a partir de $W[j, J_\mu]$ mediante una transformación de Legendre

$$\Gamma[\sigma, \omega] = W[j, J_\mu] - \int d^4x [j(x)\sigma(x) + J^\mu(x)\omega_\mu(x)] \quad (3.4)$$

donde σ, ω^μ indican amplitudes en presencia de fuentes externas

$$\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial j(x)} W [j, J_\mu] \quad (3.5)$$

Usando (3.5) es posible expresar a $j(x)$ en términos de σ para luego reemplazar en (3.4). Relaciones similares son válidas para ω^μ . Para campos uniformes, la funcional Γ viene dada en términos de la densidad de energía \mathcal{E} mediante

$$\Gamma[\sigma, \omega] = - \int d^4x \mathcal{E}(\sigma, \omega) \quad (3.6)$$

Se realizará una expansión del exponente en (3.2) alrededor de los valores clásicos $\bar{\sigma}, \bar{\omega}^\mu$ de los campos de mesones, que hacen extrema la acción en presencia del acoplamiento con las fuentes clásicas.

$$S = \int d^4x [\mathcal{L} + j(x)\sigma(x) + J^\mu(x)\omega_\mu(x)]$$

$$0 = \left. \frac{\partial S}{\partial \sigma(x)} \right|_{\sigma=\bar{\sigma}} \Rightarrow (\square + m_s^2) \bar{\sigma} + V'(\bar{\sigma}) = j(x) \quad (3.7)$$

$$0 = \left. \frac{\partial S}{\partial \omega_\nu(x)} \right|_{\omega=\bar{\omega}} \Rightarrow \partial_\mu \bar{F}_0^{\mu\nu} + m_v^2 \bar{\omega}^\nu = -J^\nu \quad (3.8)$$

Los campos $\sigma(x), \omega_\mu(x)$ pueden expresarse en términos de estos valores clásicos como

$$\sigma(x) = \bar{\sigma}(x) + \sqrt{\hbar} s(x) \quad (3.9)$$

$$\omega^\mu(x) = \bar{\omega}^\mu(x) + \sqrt{\hbar} w^\mu(x) \quad (3.10)$$

De aquí en mas consideraremos únicamente configuraciones $\bar{\sigma}, \bar{\omega}$ uniformes y estáticas. Reemplazando en (3.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j, J_\mu] = & \mathcal{N} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] + \frac{i}{\hbar} \int d^4x [j(x)\bar{\sigma}(x) + J^\mu(x)\bar{\omega}_\mu(x)] \right\} \\ & \times \int D\bar{\psi} D\psi Ds Dw \exp \left\{ i \int d^4x (\bar{\psi} [i \not{\partial} - M + g_s \bar{\sigma} - g_v \not{\omega}] \psi \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\partial^\mu s \partial_\mu s - m_s^2 s^2 - V''(\bar{\sigma}) s^2] - \frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 w^\mu w_\mu \right. \\ & \left. + \sqrt{\hbar} \bar{\psi} [g_s s - g_v \not{\omega}] \psi - \sum_{n=0}^2 V^{(n)}(\bar{\sigma}) \frac{s^n}{n!} \hbar^{\frac{n}{2}-1} \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

La constante de normalizacion (3.3) puede expresarse ahora como

$$\mathcal{N}^{-1} = \mathcal{N}_0^{-1} \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}(x) \right\} \quad (3.12)$$

donde

$$\mathcal{N}_0^{-1} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] \right\} \quad (3.13)$$

$S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}^\mu]$ es la acción correspondiente a campos de mesones libres. Debe notarse que debido a que el sector fermiónico en (3.1) contiene un factor extra en \hbar , no existe contribución bariónica al nivel clásico de $S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}^\mu]$. Por otra parte han desaparecido las fuentes en la integral de camino remanente, ya que han sido canceladas por la contribución lineal en s, w_μ empleando las condiciones de extremo (3.7) y (3.8).

Todos los términos $O(\hbar)$ en la integral de camino pueden reducirse a integrales funcionales gaussianas, de resolución conocida.

Esta integral dará lugar a la corrección a un lazo de la funcional generatriz W ; los términos restantes generan correcciones de orden superior. Con el propósito de evaluar las integrales indicadas deben introducirse fuentes auxiliares $\eta, \bar{\eta}, \zeta, \xi_\mu$ acopladas a los campos $\bar{\psi}, \psi, s, w^\mu$ respectivamente. Al finalizar el cálculo deben tomarse como nulas.

Entonces la integral de camino puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} \left[(i \not{\partial} - g_v \not{\psi}) - (M - g_s \bar{\sigma}) - i\sqrt{\hbar} g_s \frac{\partial}{\partial \zeta} + i\sqrt{\hbar} g_v \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \right] \psi \right\} \\ & \quad \times \int Dw \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \xi^\mu w_\mu + \frac{1}{2} m_v^2 w^\mu w_\mu \right] \right\} \\ & \exp \left\{ -i \int d^4x \sum_{n=3}^4 \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} V^{(n)}(\bar{\sigma}) \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} (-i)^n \right\} \int Ds \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x [-s(\square + m_s^2 + V''(\bar{\sigma}))s + 2\zeta s] \right\} \end{aligned}$$

Suponiendo que los campos clásicos son uniformes, la solución para las integrales de camino sobre los campos de bosones pueden evaluarse (ver Apéndice E) :

$$\begin{aligned} I_s &= \int Ds \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x [-s(\square + m_s^2 + V''(\bar{\sigma}))s + 2\zeta s] \right\} \\ &= I_{s0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{V''(\bar{\sigma})}{k^2 - m_s^2 - V''(\bar{\sigma}) + i\epsilon} \right) \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \zeta(x) \Delta(x-y) \zeta(y) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{s0} &= \int Ds \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x [-s(\square + m_s^2)s + 2\zeta s] \right\} \\ \Delta(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_s^2 - V''(\bar{\sigma}) + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

$$\begin{aligned}
I_v &= \int dw \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 w^\mu w_\mu + \xi^\mu w_\mu \right) \right\} \\
&= I_{v0} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \xi^\mu(x) D_{\mu\nu}^0(x-y) \xi^\nu(y) \right\}
\end{aligned} \quad (3.16)$$

En la última expresión I_{v0} es independiente de la interacción, pero no de la fuente externa ξ .

$D_{\mu\nu}^0$ es el propagador de mesón vectorial libre (1.35).
El sector bariónico admite ser expresado como

$$\exp \left\{ -\sqrt{\hbar} \int d^4x \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-g_s \frac{\partial}{\partial \zeta} + g_v \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right\} I_B[\eta, \bar{\eta}]$$

donde

$$\begin{aligned}
I_B[\eta, \bar{\eta}] &= \int D\bar{\psi} D\psi \\
&\exp \left\{ i \int d^4x \bar{\psi} [(i \not{\partial} - g_v \not{\psi}) - (M - g_s \bar{\sigma})] \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right\} \\
&= I_{B0} \exp \left\{ \text{Tr} \ln \int d^4z G^0(x-z) G_H^{-1}(z-y) \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_H(x-y) \eta(y) \right\}
\end{aligned} \quad (3.17)$$

En esta expresión el símbolo Tr indica trazas sobre índices de spin, isospin y coordenadas de espacio-tiempo.

El propagador bariónico $G_H(x-y)$ coincide con el propagador en la AHR, ya discutido en el Capítulo 1

$$\begin{aligned}
G_H(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - g_v \not{\psi} - M + g_s \bar{\sigma}} \\
&= e^{-ig_v \bar{\omega}(x-y)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{\not{q} - (M - g_s \bar{\sigma})}
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Aquí se han omitido las condiciones de contorno con el fin de facilitar la discusión, sin embargo debe tenerse en cuenta que debe coincidir con la descomposición (1.60).

En la segunda igualdad de (3.18), el campo clásico $\bar{\omega}^\mu$ entra sólo como un factor de fase. Por lo tanto en cualquier vértice al que concurren dos líneas de fermión, una entrando y otra saliendo, dicho factor de fase desaparece. Esto es lo que ocurre en la evaluación de diagramas con lazos fermiónicos cerrados, como los que intervienen en la construcción de la energía. La única excepción ocurre en la corrección de un lazo, donde interviene G_H^{-1} .

En consecuencia el valor medio $\bar{\omega}^\mu$ vendrá dado exclusivamente por la condición de extremo evaluada a un lazo y no hay correcciones de orden superior.

Haciendo uso de (3.18), la integral funcional I_B puede escribirse como (ver Apéndice E)

$$I_B = I_{B0} \exp \left\{ \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{g_s \bar{\sigma} - g_v \bar{\omega}}{p - M} \right) \right\} \\ \times \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_H(x-y) \eta(y) \right\} \quad (3.19)$$

donde ahora el simbolo tr sólo abarca índices de spin e isospin.

Las constantes I_{s0} , I_{v0} y I_{B0} pueden absorberse en la definición de una nueva constante de normalización $\mathcal{N}' = \mathcal{N} I_{s0} I_{v0} I_{B0}$.

De la discusión del modelo QHD-I en capítulos previos sabemos que es necesaria la inclusión de contratérminos a fin de obtener resultados bien definidos. Al menor orden de aproximación dichos contratérminos consisten en un polinomio de cuarto orden en el campo escalar $\sigma(x)$, por lo tanto anticipando resultados incluiremos un término

$$\mathcal{L}_c = \hbar \left[a_1 \sigma + \frac{a_2}{2!} \sigma^2 + \frac{a_3}{3!} \sigma^3 + \frac{a_4}{4!} \sigma^4 \right] \quad (3.20)$$

al lagrangiano original.

Usando la descomposición (3.9),(3.10) e imitando el proceso de derivación de (3.14)-(3.19) se llega finalmente a

$$\mathcal{Z}[j, J^\mu] = \mathcal{N}' \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] + \frac{i}{\hbar} \int d^4x (j \bar{\sigma} + J^\mu \bar{\omega}_\mu) \right\} \\ \times \exp \left\{ \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{g_s \bar{\sigma} - g_v \bar{\psi}}{p - M} \right) + i \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n!} \bar{\sigma}^n \right\} \\ \times \exp \left\{ i \int d^4z \left[\sum_{n=1}^4 \hbar^{n/2} a_n \left(-i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n + \sqrt{\hbar} g_s \left(i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\hbar} g_v \left(i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \gamma_\mu \left(-i \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right) \left(-i \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right) \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y [\zeta(x) \Delta^0(x-y) \zeta(y) + \xi^\mu(x) D_{\mu\nu}^0(x-y) \xi^\nu(y) \right. \\ \left. + 2\bar{\eta}(x) G_H(x-y) \eta(y)] \right\} \quad (3.21)$$

donde

$$a_1 = \sum_1^4 \frac{a_n}{(n-1)!} \bar{\sigma}^{n-1} \\ a_2 = \frac{1}{2} \left(a_2 a_3 \bar{\sigma} + \frac{a_4}{2} \bar{\sigma}^2 \right) \\ a_3 = \sum_0^1 \frac{a_{n+3}}{3!} \bar{\sigma}^n \\ a_4 = \frac{a_4}{4!}$$

y deben tomarse como nulas las fuentes auxiliares al finalizar el cálculo.

Comparando con la definición (3.2) puede identificarse la contribución a un lazo $W^{(1)}[j, J]$ a la funcional generatriz

$$W^{(1)}[j, J^\mu] = \int d^4x \left[\mathcal{L}_0(\bar{\sigma}, \bar{\omega}) + j\bar{\sigma} + J^\mu \bar{\omega}_\mu - i\hbar \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{g_s \bar{\sigma} - g_v \not{p}}{p - M} \right) + \hbar \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n!} \bar{\sigma}^n \right] \quad (3.22)$$

y para campos uniformes \mathcal{L}_0 se reduce a

$$\mathcal{L}_0(\bar{\sigma}, \bar{\omega}) = -\frac{1}{2} m_s^2 \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \bar{\omega}^\mu \bar{\omega}_\mu$$

La acción efectiva $\Gamma^{(1)}$ a un lazo se obtiene de forma inmediata. La transformación de Legendre (3.4) es trivial ya que $\sigma - \bar{\sigma}$ es de orden \hbar y la acción clásica en presencia de fuentes es estacionaria en un entorno de $\bar{\sigma}$. En consecuencia $\Gamma^{(1)}$ puede obtenerse a partir de (3.22) reemplazando $\bar{\sigma}$ por σ y eliminando los términos que contienen las fuentes j y J_μ .

La integral sobre impulsos es divergente y debe ser regularizada convenientemente empleando los métodos usuales de la teoría de campos. La acción efectiva regularizada a un lazo es

$$\Gamma^{(1)}[\sigma, \omega] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} m_s^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega^\mu \omega_\mu - \hbar g_v \omega^\mu Q_\mu - \frac{\delta \hbar}{(2\pi)^3} \int d^3p E^* \Theta(p_F - p) - \Delta \right]$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= -i\hbar (M^* - M)^5 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^0 G_F^0(p)^5 G_F^*(p) p_0] \\ &\quad - \frac{\delta \hbar}{16\pi^2} \left[M^{*4} \ln(M^*/M) + M^3 (M - M^*) - \frac{7}{2} M^2 (M - M^*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{3} M (M - M^*)^3 - \frac{25}{12} (M - M^*)^4 \right] \\ Q_\mu &= \int d^3x j_\mu(x) \\ G_F^*(p) &= \frac{\not{p} + M^*}{p^2 - M^{*2} + i\epsilon} \end{aligned}$$

La configuración física para los campos de mesón se obtiene minimizando $\Gamma^{(1)}$ respecto de σ, ω^μ . De aquí resulta

$$0 = m_v^2 \bar{\omega}^\mu - \hbar g_v Q^\mu$$

$$\begin{aligned}
0 = & -m_s^2 \bar{\sigma} + \frac{\delta g_s \hbar}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{M^*}{E^*} \Theta(p_F - p) \\
& - \frac{\delta g_s \hbar}{14\pi^2} \left[M^{*3} \ln(M^*/M) - M^2 (M - M^*) - \frac{5}{2} M (M - M^*)^2 \right. \\
& \left. - \frac{11}{6} (M - M^*)^3 \right]
\end{aligned}$$

Para el sistema de referencia de materia en reposo es $Q = 0$, por lo tanto

$$\bar{\omega}^\mu = \frac{g_v \hbar \rho_B}{m_v^2} \delta^{\mu 0} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
M^* = & M - \frac{\delta g_s^2 \hbar M^*}{(2\pi)^3 m_s^2} \int \frac{d^3 p}{E^*} \Theta(p_F - p) \\
& + \frac{\delta g_s^2 \hbar}{4\pi^2 m_s^2} \left[M^{*3} \ln(M^*/M) - M^2 (M - M^*) - \frac{5}{2} M (M - M^*)^2 \right. \\
& \left. - \frac{11}{6} (M - M^*)^3 \right]
\end{aligned} \quad (3.24)$$

En el presente caso la densidad de energía $\mathcal{E}^{(1)}$ calculada a un lazo es

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(1)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{g_v \rho_B \hbar}{m_v} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{g_s} \right) (M^* - M)^2 \\
& + \frac{\delta \hbar}{(2\pi)^3} \int d^3 p E^* \Theta(p_F - p) + \Delta
\end{aligned} \quad (3.25)$$

La acción efectiva a dos lazos $\Gamma^{(2)}$ viene dada por (ver Apéndice F)

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}[\sigma, \omega] = & S_0 + \int d^4 x [j(x) \bar{\sigma}(x) + J^\mu \bar{\omega}_\mu] + W^{(1)}[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] \\
& W^{(2)}[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] - \int d^4 x [j(x) \sigma(x) + J^\mu \omega_\mu]
\end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $W^{(2)}$ indica la contribución a dos lazos a la funcional generatriz conexas y $W^{(1)}$ es la parte $O(\hbar)$ de (3.22).

Al orden $O(\hbar^2)$ la acción efectiva es

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}[\sigma, \omega] = & \Gamma^{(1)}[\sigma, \omega] + W^{(2)}[\sigma, \omega] + \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\sigma}(x)} \Delta^0(x-y) \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\sigma}(y)} \\
& + \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\omega}^\mu(x)} D^{0\mu\nu}(x-y) \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\omega}^\nu(y)} + O(\hbar^3)
\end{aligned} \quad (3.27)$$

Como se discutió con anterioridad, el campo $\bar{\omega}^\mu$ entra en el propagador G_H sólo como un factor de fase y no contribuye en lazos cerrados fermiónicos. Por lo tanto $W^{(2)}$ no dependerá explícitamente de $\bar{\omega}^\mu$.

Las derivadas funcionales en (3.27) pueden evaluarse usando (3.22) y la identidad $\partial G_H(p)/\partial M^* = G_H(p)^2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\sigma}} \right]_{\bar{\sigma}=\sigma} &= -ig_s \hbar \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} G_H(p) + \hbar a_1(\sigma) \\ \left. \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \bar{\omega}^\mu} \right]_{\bar{\omega}=\omega} &= ig_v \hbar \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [\gamma^\mu G_H(p)] \end{aligned}$$

Para campos uniformes las integrales indicadas en (3.27) producen contribuciones reducibles de una partícula que cancelan aquellas presentes en $W^{(2)}$, de modo que $\Gamma^{(2)}$ sólo contiene términos irreducibles.

A fin de obtener resultados bien definidos al $O(\hbar^2)$ es necesario introducir contratérminos. En primer lugar (3.21) contiene contratérminos $O(\hbar)$ en los coeficientes a_n que afectan a los lazos cerrados escalares. A estos debe sumarse un polinomio similar a (3.20) con coeficientes de $O(\hbar^2)$.

Luego se introducen contratérminos de normalización de los campos de mesón

$$i\hbar^2 \beta_s s \square s - \frac{1}{4} \hbar^2 \beta_6 F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}.$$

Por último es necesario normalizar la masa y el campo de barión, al igual que el vértice escalar; para ello se introducen $\hbar^2 [-\Lambda_1 \bar{\psi} (i \not{\partial} - M M_c) \psi + \Lambda_2 g_s \bar{\psi} \sigma \psi]$

Una vez incluidos estos contratérminos en (3.21) es posible evaluar $W^{(2)}[\bar{\sigma}]$. Como ya se indicó es suficiente reemplazar $\bar{\sigma}$ por σ en $W^{(2)}$ para construir la transformada de Legendre (3.26).

No desarrollaremos explícitamente el procedimiento de renormalización que sigue los lineamientos descritos en [52].

La densidad de energía \mathcal{E} puede identificarse usando (3.6) y sustrayendo su valor esperado de vacío. De esta manera se obtiene

$$\mathcal{E}^{(2)}(M^*, \rho_B) = \mathcal{E}^{(1)}(M^*, \rho_B) + \mathcal{E}_A^{(2)} + \mathcal{E}_B^{(2)} + \mathcal{E}_C^{(2)} \quad (3.28)$$

donde $\mathcal{E}^{(1)}$ viene dado por (3.25) y los términos restantes son como se indica a continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A^{(2)} &= \frac{\delta g_s^2}{4} \mathcal{A}(m_s) + \frac{\delta g_v^2}{2} \mathcal{A}(m_v) \\ \mathcal{A}(m) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \frac{d^3 q}{(2\pi)^4} \frac{\Theta(p_F - p)}{E_p^*} \frac{\Theta(p_F - q)}{E_q^*} \frac{E_p^* E_q^* - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 - (E_p^* - E_q^*)^2 + m^2} \\ \mathcal{E}_B^{(2)} &= \rho_s \left\{ \left(\frac{g_s}{4\pi} \right)^2 \mathcal{B}(m_s) - 2 \left(\frac{g_v}{2\pi} \right)^2 \mathcal{B}(m_v) \right\} \\ \mathcal{B}(m) &= M^* \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{M^{*2}(1-x)^2 + m^2 x}{M^2(1-x)^2 + m^2 x} \right) \\ &\quad + 2M^2 (M - M^*) \int_0^1 dx \frac{(1-x)(1-x^2)}{M^2(1-x)^2 + m^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_C^{(2)} = & (M^* - M)^5 \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{g_i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_F^0(p^3) \lambda_i^\mu G_F^* \lambda_i^\nu G_F^0(q)^3 \mathcal{D}_{i\mu\nu}(p-q)] \right. \\
& + \frac{g_i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{tr} [G_F^0(p)^3 \lambda_i^\mu G_F^* \lambda_i^\nu G_F^0(q)^2 \mathcal{D}_{i\mu\nu}(p-q)] \\
& \left. - i \int d^4 p \text{tr} [G_F^0(p)^4 G_F^* \Lambda_i(p)] - i \int d^4 p \text{tr} [G_F^0(p)^5 G_F^* \Sigma_{iF}(p)] \right\}
\end{aligned}$$

En estas expresiones se ha usado el símbolo δ para indicar la degeneración de isospin, ρ_s es la densidad bariónica escalar definida en el Capítulo 1

$$\rho_s = \delta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M^*}{E^*} \Theta(p_F - p)$$

En $\mathcal{E}^{(2)}$ se empleó la siguiente convención $g_1 = g_s^2$, $g_2 = -g_v^2$, $m_1 = m_s$, $m_2 = m_v$, $\lambda_1^\mu = (1, 0)$, $\lambda_2^\mu = \gamma^\mu$, $\mathcal{D}_1^{\mu\nu}(q) = \Delta^0(q) g^{\mu\nu}$, $\mathcal{D}_2^{\mu\nu}(q) = D^{0\mu\nu}(q)$, $\epsilon_j = (-1)^{1+j}$ y $\Lambda_i(q) = \partial \Sigma_{iF} / \partial M^*$ con

$$\begin{aligned}
\Sigma_{jF}(p) = & \frac{j g_j}{16\pi^2} \left[\int_0^1 dx (jM + \epsilon_j x p) \ln \left(\frac{M^2(1-x) + m_j^2 x - p^2 x(1-x)}{M^2(1-x)^2 + m_j^2 x} \right) \right. \\
& \left. + 2M^2(p-M) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)(j + \epsilon_j x)}{M^2(1-x) + m_j^2 x} \right]
\end{aligned}$$

El valor de M^* se obtiene, como en el cálculo a un lazo, de la condición de extremo para la energía $\partial \mathcal{E}^{(2)} / \partial M^* = 0$. Como $W^{(2)}$ es independiente de $\bar{\omega}^\mu$ la minimización de $\Gamma^{(2)}$ respecto de esta variable es equivalente a la misma operación realizada sobre $\Gamma^{(1)}$. Por lo tanto nuevamente se obtiene (3.23).

3.2.2 Resultados

En este apartado intentaremos clasificar el carácter de la expansión en lazos, usando el criterio presentado en la introducción de este capítulo. Para ello emplearemos las expresiones para la densidad de energía \mathcal{E} , obtenidas en el análisis precedente a uno y dos lazos y serán comparadas con la correspondiente a la ACM del Capítulo 1.

En primer término consideraremos una expansión perturbativa en la cual se usarán los valores de g_s , g_v , m_s y M^* obtenidos a un lazo, tomando como condiciones de normalización la energía de ligadura $\epsilon_B = 15.75$ MeV y la densidad de saturación correspondiente al impulso de Fermi $k_F = 1.30 fm^{-1}$.

En la Fig. (3.1) se comparan las curvas para la energía de ligadura en función de la densidad para la ACM y para uno y dos lazos. Puede verse que a dos lazos la energía de saturación ocurre para $k_F = 2 fm^{-1}$ y toma un valor de 400 MeV. Una discriminación de las contribuciones de los acoplamientos vectorial y escalar demuestra que el primero domina ampliamente sobre el segundo en la aproximación a dos lazos.

En segundo término puede examinarse la expansión no perturbativa fuerte. Para ello es necesario determinar el valor de M^* al orden $O(\hbar^2)$. Sin embargo se encuentra que para

	g_s	g_v	$m_s(\text{MeV})$	$m_v(\text{MeV})$	$\kappa(\text{MeV})$	M^*/M
ACM	10.469	13.798	520	783	545	0.55
AHR	7.368	10.139	458	783	471	0.72
Acoplamiento A	13.527	7.416	893	783	348	0.78
Acoplamiento B	17.029	0.000	1300	783	206	0.88

Tabla 3.1 Parámetros del modelo QHD-I en distintas aproximaciones. Los acoplamientos A y B corresponden a la expansión en lazos.

densidades con $k_F > 0.9fm^{-1}$ la energía $\mathcal{E}^{(2)}$ no posee mínimo para M^* positivo. Esto contrasta con el comportamiento a un lazo, donde siempre existe un mínimo de $\mathcal{E}^{(1)}(M^*)$ que, en general difiere del valor obtenido en la ACM.

De esto se concluye que el modelo tampoco admite un tratamiento no perturbativo fuerte.

La única posibilidad que resta es el tratamiento no perturbativo débil. En este caso tanto las constantes como M^* se determinan al orden de trabajo. Como se disponen de tres parámetros libres g_s, g_v, m_s y sólo dos condiciones de vínculo (densidad de saturación y energía de ligadura) se encuentra que existe una multiplicidad de soluciones. En la tabla 3.1 se indican dos casos posibles, indicados como A y B; aquéllos que corresponden a valores extremos de g_v compatibles con las condiciones de normalización.

En la Fig. (3.2) se muestra el comportamiento de la energía de ligadura evaluada a dos lazos en términos de la densidad para los dos conjuntos de acoplamiento seleccionados. Puede verse que, estimativamente, la compresibilidad ha disminuido en la aproximación a dos lazos comparada con el resultado de la ACM. Valores numéricos para la compresibilidad y la masa efectiva se reproducen en la Tabla 3.1.

No obstante, la descripción física subyacente en la aproximación a dos lazos es esencialmente distinta a la proporcionada por la ACM o aún por la aproximación a un lazo. Esto es evidente en la Fig. (3.3) donde se muestra el comportamiento de los potenciales efectivos para la interacción NN obtenidos en la aproximación de intercambio de un bosón para bariones muy pesados [52]. Dichos potenciales efectivos coinciden con la expresión genérica del potencial de Yukawa (1.40) En los casos A y B se ha perdido el comportamiento característico de la interacción nuclear a medias y pequeñas distancias.

En la Fig. (3.4) se grafica la masa efectiva evaluada a dos lazos como función de la densidad. Si bien en el rango mostrado la curva del acoplamiento A es similar a la curva de la aproximación a un lazo, se encuentra que a $k_F = 7fm^{-1}$ atraviesa por $M^* = 0$. En cambio la curva para el acoplamiento B termina para $k_F = 4.5fm^{-1}$ donde la energía $\mathcal{E}^{(2)}$ deja de presentar un mínimo como función de M^* .

De estos resultados debe concluirse que la expansión en lazos para el modelo QHD-I no coincide con ninguna de las categorías propuestas. En [58] se conjetura que en el caso en que las correcciones introducidas por la aproximación en lazos son significativas respecto de la ACM, es razonable esperar que correcciones de orden superior no resulten despreciables.

Hemos visto que los resultados correctos al $O(\hbar)$ no difieren cualitativamente de la ACM y mas aún, a altas densidades ambas predicciones tienden a coincidir. Sin embargo la inclusión de correcciones $O(\hbar^2)$ cambia drásticamente la descripción física.

No es improbable que existan correcciones a la AHR que no son tomadas en cuenta en forma adecuada por la expansión en lazos. Sin embargo el fracaso de dicha expansión

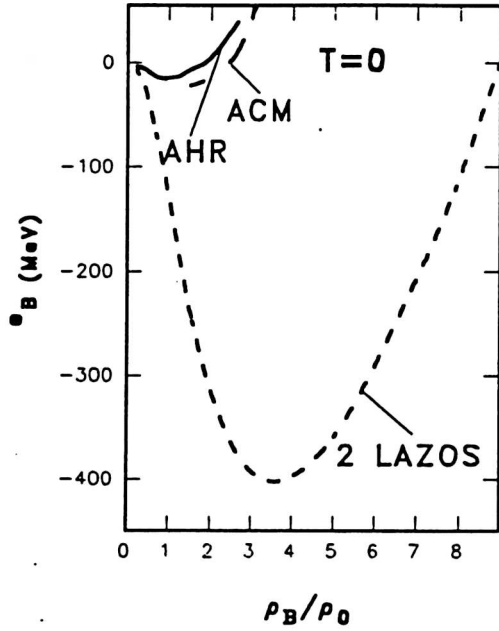


FIGURA 3.1 La energía de ligadura por nucleón para el modelo QHD-I. Los parámetros del modelo se han fijado en la AHR, mientras que M^* se determina al orden de trabajo. Se presentan el resultado correcto a dos lazos, junto con las contribuciones de la ACM y la AHR.

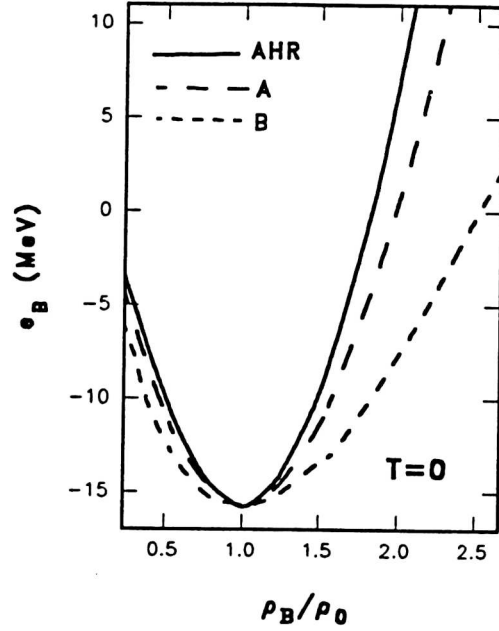


FIGURA 3.2 La energía de ligadura por nucleón para el modelo QHD-I. Los parámetros del modelo y M^* se determinan al orden de trabajo. La aproximación a dos lazos ha sido evaluada usando dos conjuntos distintos de acoplamientos (ver Tabla 3.1). Además se presenta el resultado de la AHR.

no implica que la ACM o la AHR proporcionen una descripción incorrecta. Al contrario, dichas soluciones pueden resultar un punto de referencia apropiado para la introducción de correcciones. En [52] se argumenta que el manejo pertinente de tales correcciones debería conducir a la reducción de los acoplamientos efectivos de la interacción nuclear, en especial en los lazos de vacío. Este efecto sería particularmente útil en los cálculos a baja densidad, ya que no existe una solución de partida razonable en este régimen.

3.3 La Aproximación de Fases al Azar Relativista

En la sección precedente se ha construido la funcional generatriz $Z[j, J]$ correspondiente al modelo QHD-I. Debido a la magnitud de los acoplamientos la ACM se ha mostrado inestable frente a tales correcciones.

Siguiendo el análisis realizado en [54] consideraremos el análogo relativista de la aproximación de fases al azar. En esta aproximación las líneas de mesón evaluadas a un dado orden incluyen la suma de lazos fermiónicos a todo orden. Con esta finalidad se construye la funcional $Z[j, J]$ de la misma manera que en la sección anterior, de modo que se llega a las expresiones (3.11), (3.14)-(3.16). En cambio al evaluar (3.17) se procederá de manera ligeramente diferente. En la expresión consecuente a (3.17) debe tomarse traza respecto de los

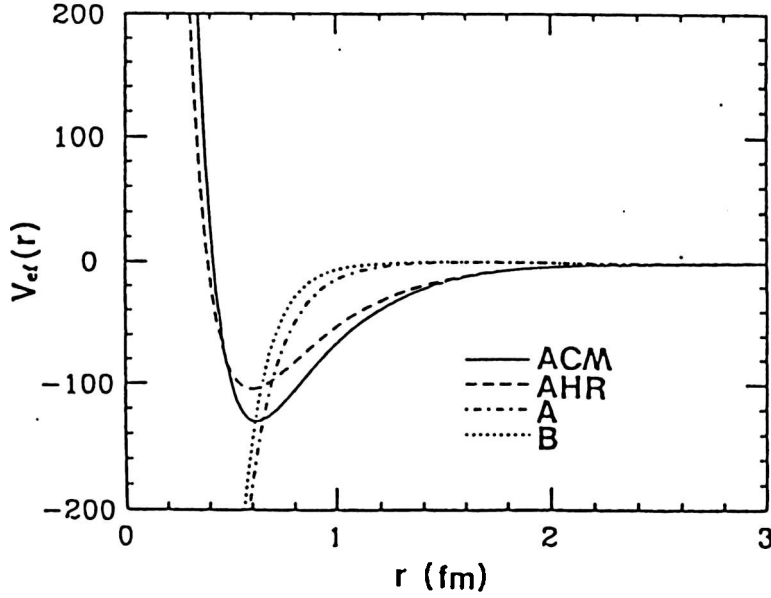


FIGURA 3.3 Comportamiento del potencial efectivo en términos de la distancia entre nucleones. Las distintas curvas representan los resultados obtenidos en la ACM, la AHR y en la aproximación a dos lazos usando los acoplamientos A y B.

grados de spin e isospin; la degeneración de isospin se tendrá en cuenta explícitamente mediante un factor δ . Este artificio permitirá discriminar a cada orden en lazos la contribución de fermiones de la de bosones.

En la expansión convencional, la aproximación de orden cero proviene de considerar solamente la primer exponencial en el lado derecho de (3.11). Las soluciones obtenidas minimizando la acción efectiva a dicho orden coinciden con las soluciones clásicas. En contraste, en la aproximación de fases al azar relativista (AFAR) se incluirá la contribución de la primera exponencial en (3.19) en el orden cero de aproximación. Por lo tanto definiremos

$$S'_0[\sigma, \omega] = S_0[\sigma, \omega] - i\delta\hbar \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{g_s \sigma - g_v \psi}{\not{p} - M} \right) \quad (3.29)$$

La solución de orden cero para campos de bosones en la AFAR, σ', ω' se obtiene minimizando $S'_0[\sigma, \omega]$. De esta manera la aproximación en lazos de bosones contiene los lazos fermiónicos, cuyo parámetro indicativo es $\delta\hbar$, sumados a todo orden. En particular cuando se incluyen los contratérminos la densidad de energía al orden cero en la AFAR, $\mathcal{E}'_0(M^*)$, coincide formalmente con la solución $O(\hbar)$ en la expansión (3.25).

A continuación se realiza una descomposición similar a (3.9), (3.10), pero usando las soluciones σ', ω' en vez de $\bar{\sigma}, \bar{\omega}$. El procedimiento posterior es similar al empleado en la sección anterior. En particular la densidad de energía $\mathcal{E}_{AFAR}^{(1)}$ correcta al $O(\hbar)$ resulta [59]

$$\mathcal{E}_{AFAR}^{(1)}(M^*) = \mathcal{E}^{(1)} - \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{1 - \Delta^0(p)\Pi(p)}{1 - \Delta^0(p)\Pi_v(p)} \right) \quad (3.30)$$

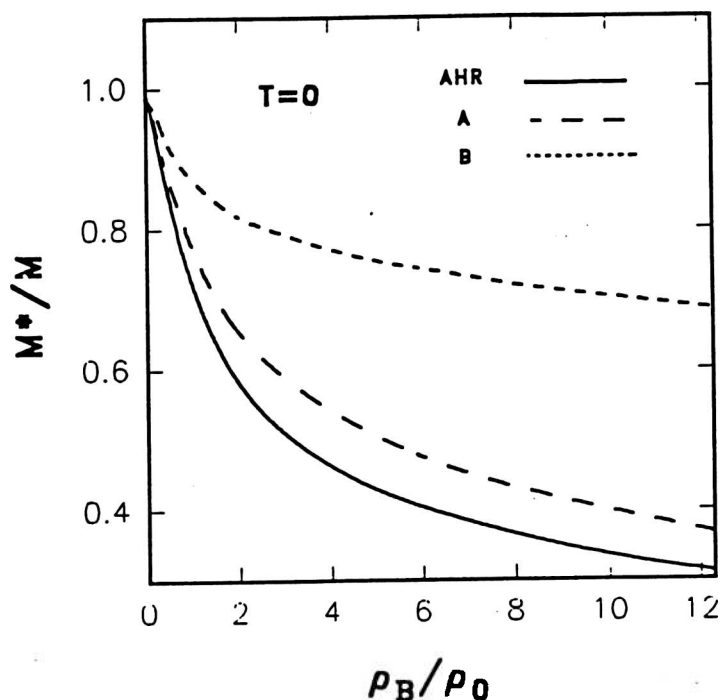


FIGURA 3.4 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad a $T=0$. Se indican los resultados de la AHR y de la aproximación a dos lazos usando dos conjuntos de acoplamientos diferentes.

donde sólo se ha incluido el acoplamiento escalar y $\Pi(p)$ representa la polarización escalar renormalizada y con sustracción de vacío

$$\Pi(p) = -ig_s^2 \hbar \xi \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{tr} [G^*(q)G^*(p+q)] + \text{contraterminos} \quad (3.31)$$

y Π_v indica la parte de dicha polarización debida exclusivamente al término de Feynman $G_F^0(p')G_F^0(p+p')$ en la definición (3.31).

La polarización $\Pi(p)$ depende del campo escalar sólo a través de M^* que, a su vez, viene determinado por la minimización de $\mathcal{E}_{AFAR}^{(1)}(M^*)$.

Expandiendo el logaritmo en (3.30) pueden distinguirse distintas contribuciones a la densidad de energía en la AFAR. El orden más bajo corresponde a la energía de la AHR, $\mathcal{E}^{(1)}(M^*)$. Además hay tres términos, similares a $\mathcal{E}_A^{(2)}$, $\mathcal{E}_B^{(2)}$ y $\mathcal{E}_C^{(2)}$ de (3.28), con la diferencia de que estos vienen dados en términos del propagador $\Delta'(p) = \frac{1}{p^2 - m_s^2 - \Pi_F(p)}$, que contiene los diagramas de vacío fermiónicos sumados a todo orden en g_s . En esta fórmula $\Pi_F(p)$ indica el aporte finito debido exclusivamente a los términos de Feynman en (3.31).

En adición se encuentra un término similar a la energía en la aproximación de fases al azar convencional [60]. En su construcción interviene el propagador $\Delta'(p)$ y, por lo tanto, contiene todos los órdenes generados por cierto tipo de diagramas fermiónicos.

La renormalización del primer orden en la AFAR ha sido realizada sólo para el acoplamiento escalar [59]. La inclusión del acoplamiento vectorial conduce a dificultades aún no resueltas.

La contribución finita de las fluctuaciones de vacío a la energía $\mathcal{E}_{AFAR}^{(1)}$, proviene de la reestructuración del vacío por la introducción de fuertes correlaciones bariónicas en el medio nuclear. Por lo tanto resulta justificable la sospecha de que tales correlaciones modifiquen significativamente el carácter de la energía de la materia nuclear.

Como hemos visto en el ejemplo II del Capítulo 1 los tratamientos no perturbativos suelen generar serias anomalías en la estructura de los propagadores. Este problema se manifiesta por la aparición de polos imaginarios, lo cual está en directa contradicción con los principios de la descomposición espectral. En el presente caso se encuentran polos a frecuencia cero ($p_0 = 0$) e impulso no nulo. Evaluaciones específicas para el modelo QHD-I han sido realizadas [61],[62], demostrando que tales polos tienen componente real del orden de la masa en reposo del nucleón. Este hecho hace injustificable la simple omisión de sus efectos, tal como ocurre en la electrodinámica cuántica. En dicho caso los polos fantasmas aparecen en la corrección a un lazo del propagador del fotón en una escala de impulsos inaccesible a la medición experimental [39].

Siguiendo el criterio establecido en la sección 1.3.3, no consideraremos las posibles soluciones de este problema.

3.4 Método de la Transición Perturbativa

3.4.1 Introducción

Hasta este momento se han presentado algunas de las búsquedas realizadas con la intención de sistematizar los cálculos en la DCH. La finalidad es lograr un método de correcciones sucesivas de aplicación práctica y de desarrollo preciso como para que sus conclusiones admitan ser cotejadas directamente con la experiencia.

En los dos casos examinados se ha tomado como motivo de aplicación el modelo QHD-I, ya que presenta entre otras, dos propiedades destacables. En primer lugar la simplicidad de los acoplamientos que permite construir una aproximación de orden cero sencilla y dúctil. En segundo lugar la renormalizabilidad que asegura la posibilidad de aislar los efectos espúreos de la información física de manera clara y sin ambigüedades. En el Capítulo 4 se analizarán modelos alternativos en la DCH, con acoplamientos mas complicados.

El carácter autoconsistente del cálculo entorpece particularmente el procedimiento de renormalización. Esto es así a tal punto que la renormalización se torna impracticable aún al primer orden de la AFAR, a menos que se elimine el campo vectorial [54].

Otro cuestionamiento aún mas fundamental es la desnaturalización de la descripción física; como se ha comprobado en la sección 3.2 los resultados obtenidos al segundo orden de la expansión en lazos difiere esencialmente de los correspondientes al orden precedente.

Por último la generación de efectos espúreos de difícil interpretación, como es la aparición de polos fantasmas, es un problema intrínseco de los tratamientos no perturbativos. La inexistencia de un criterio coherente para manejar los polos fantasmas pone en duda la verosimilitud de las conclusiones emergentes de estos métodos de resolución. No obstante, de esta discusión surge como un punto de referencia confiable la solución proporcionada por la ACM, especialmente a densidades medias. Dicha solución se ofrece como la etapa inicial adecuada para un eventual esquema de aproximaciones sucesivas.

En [55] se ha propuesto como una respuesta posible a esta situación la transición hacia un régimen perturbativo de la interacción nuclear. A fin de llevar a la práctica esta suposición de forma coherente, el estado fundamental debe incluir las fuertes correlaciones del

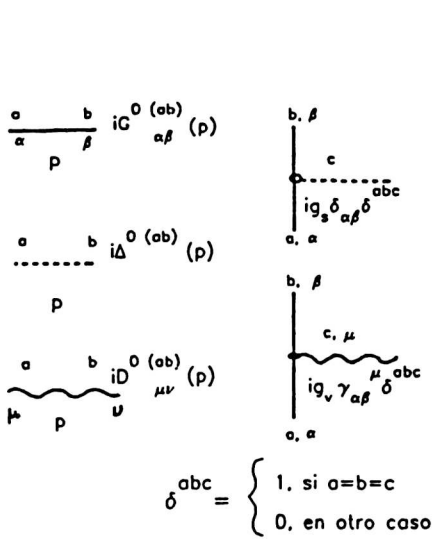


FIGURA 3.5 Reglas de Feynman para el modelo QHD-I en la DTC. Subíndices griegos indican componentes de espín, en tanto que los supraíndices latinos corresponden a las componentes térmicas.

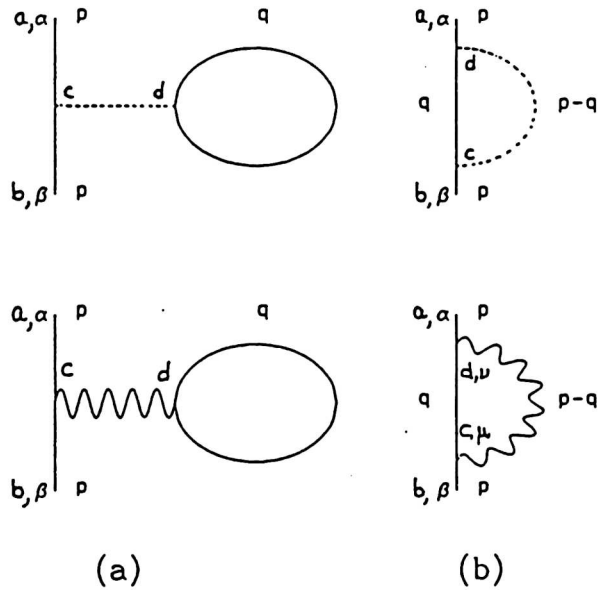


FIGURA 3.6 Diagramas de Feynman al segundo orden perturbativo en la DTC.

medio nuclear. Luego la transición perturbativa es simulada por un reajuste considerable de las constantes de acoplamiento; que servirán para una expansión perturbativa normal. La validez de esta hipótesis será determinada por comparación de los resultados logrados a cada orden con los correspondientes al orden precedente. Si no se introducen efectos desestabilizadores y las correcciones realizadas son relativamente pequeñas, se considera que la expansión es aceptable. Dicha evaluación será aplicada en primera instancia a la materia hadrónica para ajustar los acoplamientos efectivos y luego a núcleos finitos para verificar la idoneidad del método. Este esquema de solución ha sido llamado Aproximación de la Transición Perturbativa (ATP).

Ya que los efectos térmicos son fundamentales en el análisis de la estabilidad de los fenómenos nucleares, es necesario incluir la temperatura como grado de libertad tan relevante como la densidad.

3.4.2 El Estado Fundamental

Como hemos mencionado, a fin de que la expansión perturbativa tenga sentido es necesario que el estado fundamental contenga una parte considerable de las correlaciones generadas por la interacción nuclear. La solución obtenida para el campo de nucleón $\psi(x)$ en la AHR contiene las propiedades más importantes de la propagación de los nucleones en el medio nuclear y es tanto más ajustada cuanto mayor es la densidad. Por lo tanto puede tomársela como punto de partida para el desarrollo propuesto.

Con el objeto de tomar en cuenta los efectos térmicos se empleará la formulación de la DTC, ya presentada en el Capítulo 2. Ya que en los desarrollos previos para el modelo QHD-I sólo se ha trabajado a temperatura nula, en este apartado indicaremos como se modifican tales resultados a temperatura finita.

En la DTC los propagadores han sido definidos en términos del vacío térmico (2.14) y

de los dobletes térmicos para campos (2.29). De esta manera se obtienen las expresiones (2.37),(2.41),(2.43) para los propagadores de partícula libre a temperatura finita. En particular la componente (11) de dichos propagadores coincide, en el límite $T \rightarrow 0$ con las expresiones (1.4), (1.5),(1.7),(1.6) y (1.35).

Las reglas de Feynman para el modelo QHD-I en la DTC son una generalización de las ya presentadas en el Capítulo 1, ahora deben incluirse índices térmicos por cada línea de propagador. Las reglas de Feynman, así como los diagramas correspondientes a la primera corrección perturbativa del propagador de fermión se indican en la Fig. (3.5).

La AHR se obtiene tomando únicamente el diagrama directo de manera autoconsistente. La autoenergía propia del nucleón en esta aproximación viene dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_{H\alpha\beta}^{(ab)} &= -ig_s^2 \delta^{ab} \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta^{0(ca)}(0) G_{H\alpha\alpha}^{cc}(q) \\ &\quad - ig_v^2 \delta^{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{\lambda\rho}^{0(ca)}(0) (\gamma_\rho)_{\alpha\beta} (\gamma_\lambda)^{\nu\mu} G_{H\mu\nu}^{(cc)}(q) \end{aligned} \quad (3.32)$$

De aquí puede verse que Σ_H es diagonal en el espacio térmico. Esta es una aproximación no perturbativa ya que el propio G_H es una función complicada de los acoplamientos g_s, g_v .

Resolviendo la ecuación de Dyson para G_H se llega a una igualdad entre matrices de 2×2 .

La masa y la energía efectivos de nucleón vienen dados por las fórmulas (1.60), donde debe tomarse sólo la componente (11) de la autoenergía. En consecuencia el propagador de fermión en la AHR es

$$G_{H\alpha\beta}^{(ab)} = \left[U_F(p_0) \begin{pmatrix} \bar{G}_H(p) & 0 \\ 0 & \bar{G}_H^*(p) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} U_F^{-1}(p_0) \right]^{ab} \quad (3.33)$$

donde

$$\bar{G}_{H\alpha\beta}(p) = \frac{\not{p} + M^*}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \quad (3.34)$$

y $q_0 = p_0 - \Sigma_{H0}^{(11)}$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ y $U_F(p_0)$ es la matriz térmica (2.44).

3.4.3 Régimen Perturbativo

En el apartado anterior se han obtenido nucleones efectivos que incluyen las correlaciones básicas debidas al intercambio de mesones.

Como hipótesis de trabajo se supondrá que a partir del estado fundamental que contiene a dichos nucleones, la interacción remanente puede ser incluida perturbativamente. Este hecho estará reflejado por una disminución notable de las constantes de acoplamiento; es decir si g'_s, g'_v indican los acoplamientos efectivos, entonces debe ser $g'_s/g_s \ll 1, g'_v/g_v \ll 1$.

Dichos acoplamientos efectivos serán empleados para incluir correcciones debidas al término de interacción $\mathcal{L}_{int} = g'_s \bar{\psi} \sigma \psi - g'_v \bar{\psi} \psi \psi$.

Ya que el término directo ha sido incluido en el estado sin perturbar, la corrección siguiente corresponde al término de intercambio. La autoenergía correspondiente es

$$\begin{aligned}\Sigma_{\epsilon x \alpha \beta}^{(ab)} &= ig_s'^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta^{0(ab)}(p-k) G_{H\alpha\beta}^{(ab)}(k) \\ &+ ig_v'^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\gamma^\nu G_H^{(ab)}(k) \gamma^\mu \right]_{\alpha\beta} D_{\mu\nu}^{0(ab)}(p-k)\end{aligned}\quad (3.35)$$

Puesto que cada uno de los propagadores admite una descomposición como suma de una parte de Feynman mas otra explícitamente dependiente de la temperatura, cada integral en (3.35) comprende cuatro términos. Uno de ellos (Σ_{Fex}) no depende explícitamente de la temperatura y es divergente, los tres restantes son finitos debido al corte exponencial que imponen los números de ocupación sobre el espacio de impulsos.

Respecto de la regularización de (3.35) debe destacarse que la TTC ofrece información adicional a través de las relaciones de consistencia (2.51). De particular interés resulta la fórmula

$$\tan 2\theta_{p_0} \text{Im}\Sigma_{\alpha\beta}^{(11)}(p) = i\Sigma_{\alpha\beta}^{(12)}(p) \quad (3.36)$$

Es posible demostrar que la componente $\Sigma^{(12)}(p)$ es finita por construcción y $\tan 2\theta_{p_0}$ permanece acotada para toda temperatura física. Usando esta propiedad pueden extraerse expresiones convergentes para $\text{Im}\Sigma^{(11)}$ (con la posible excepción del caso $T=0$, donde $\tan 2\theta_{p_0} = 0$). A partir de aqui puede evaluarse $\text{Re}\Sigma^{(11)}(p)$ usando las relaciones de dispersión para la autoenergía.

Debido a que los grados de libertad de los distintos mesones son independientes entre si, (3.36) puede aplicarse separadamente para los acoplamientos escalar y vectorial.

Como se demuestra en el Apéndice G la contribución finita de la parte imaginaria del término de intercambio Σ_{Fex} es

$$\begin{aligned}\text{Im}\Sigma_{Fex}(p) &= -g_s'^2 2\pi^2 \theta \left[q^2 - (M^* + m_s)^2 \right] \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' + M^*) \delta(q'^2 - M^{*2}) \\ &- g_v'^2 2\pi^2 \theta \left[q^2 - (M^* + m_v)^2 \right] \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' + M^*) \delta(q'^2 - M^{*2})\end{aligned}\quad (3.37)$$

Usando la relación de dispersión

$$\text{Re}\Sigma(p) = (q^2 - M^{*2}) \frac{VP}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\text{Im}\Sigma(z, \mathbf{p})}{(z^2 - E^{*2})(z - q_0)}$$

puede construirse la parte real correspondiente.

Finalmente se obtiene la siguiente expresión regularizada para la autoenergía

$$\text{Im}\Sigma^{(11)}_{\epsilon x}(p) = i \cotan 2\theta_{q_0} \sum_{j=1,2} g_j I_j \quad (3.38)$$

con:

$$I_j = \frac{1}{2} \frac{M^*}{(2\pi)^4} \int d\Omega_{p'} \Theta (M^* A^2 - 4q_0^2 + 4p^2 \nu^2) F_j (x_1, x_2)$$

donde $F_j(x_1, x_2) = \Theta(x_1)F_j(x_1) + \Theta(x_2)F_j(x_2)$, $F_j(x_n) = f_j(x_n) + f_j(-x_n)$, y $f_j(x) = (h_j + \gamma_0 x - \sqrt{x^2 - 1}(\gamma \cdot \mathbf{p}')/p') \text{sen} 2\theta_{M^* x} \text{sen} h 2\phi_{q_0 - M^* x}$. Otros elementos usados en la integral I_j son: $p' = M^* \sqrt{x^2 - 1}$, $A = (q^2 - m_j^2 + M^{*2})/M^{*2}$; ν es el coseno del angulo entre \mathbf{p} y \mathbf{p}' y x_n ($n = 1, 2$) son energias de fermion determinadas por la conservacion de la energia y el impulso y $m_1 = m_s$, $m_2 = m_v$; $g_1 = g_s^2$, $g_2 = 2g_v^2$; $h_1 = 1$, $h_2 = -2$.

Además $\text{Re}\Sigma_{ex}^{(11)}$ puede escribirse como

$$\text{Re}\Sigma_{ex}^{(11)}(p_0, \mathbf{p}) = \Sigma_{ex}^{\text{escalar}}(q_0, \mathbf{p}) + \gamma_0 \Sigma_{ex}^0(q_0, \mathbf{p}) + \gamma \cdot \mathbf{p} \Sigma_{ex}^V(q_0, \mathbf{p}) \quad (3.39)$$

con $p = |\mathbf{p}|$ y $q_0 = p_0 - (\frac{q^2}{m_v^2})\rho_B$.

Las componentes indicadas arriba tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Sigma_{ex}^{\text{escalar}}(q_0, \mathbf{p}) &= \frac{M^*}{8\pi^2} \sum_{j=1,2} g_j h_j \left\{ \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2 - 1} \int_{-1}^1 \frac{dt}{z_j} n_B(M^* z_j) R_1\left(\frac{q_0}{M^*}, x, z_j\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{M^*}{2p} \int_1^\infty dx [n_F(M^* x + \alpha) \theta_j(q_0, p, x, k) + \bar{n}_F(M^* x - \alpha) \theta_j(q_0, p, -x, k)] \right\} \\ \Sigma_{ex}^0(q_0, \mathbf{p}) &= \frac{M^*}{8\pi^2} \sum_{j=1,2} g_j \left\{ \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2 - 1} \int_{-1}^1 \frac{dt}{z_j} n_B(M^* z_j) R_2\left(\frac{q_0}{M^*}, x, z_j\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{M^*}{2p} \int_1^\infty dx x [n_F(M^* x + \alpha) \theta_j(q_0, p, x, k) - \bar{n}_F(M^* x - \alpha) \theta_j(q_0, p, -x, k)] \right\} \\ \Sigma_{ex}^V(q_0, \mathbf{p}) &= \frac{M^*}{8p\pi^2} \sum_{j=1,2} g_j \left\{ - \int_1^\infty dx x (x^2 - 1) \int_{-1}^1 \frac{dt}{z_j} n_B(M^* z_j) R_1\left(\frac{q_0}{M^*}, x, z_j\right) \right. \\ &\quad + \frac{M^*}{p} \int_1^\infty dx \sqrt{x^2 - 1} [n_F(M^* x + \alpha) + \bar{n}_F(M^* x - \alpha)] \\ &\quad \left. - \left(\frac{M^*}{2p}\right)^2 \int_1^\infty dx [n_F(M^* x + \alpha) A_j(q_0, p, x M^*, k) \theta_j(q_0, p, x M^*, k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{n}_F(M^* x - \alpha) A_j(q_0, p, -x M^*, k) \theta_j(q_0, p, -x M^*, k)] \right\} \end{aligned}$$

donde: $k = M^* \sqrt{x^2 - 1}$, $\alpha = (g_v/m_v)^2 \rho_B$.

Las restantes funciones intervinientes son

$$A_j(p_0, p, k_0, k) = \frac{(p_0 - k_0)^2 - p^2 - k^2 - m_j^2}{M^{*2}}$$

$$\theta_j(p_0, p, k_0, k) = \ln \left(\frac{A_j + 2pk/M^{*2}}{A_j - 2pk/M^{*2}} \right)$$

$$z_j(p, k, t) = \frac{\sqrt{p^2 + k^2 - 2pkt + m_j^2}}{M^*}$$

$$R_1(x, y, z) = \frac{1}{(x-z)^2 - y^2} + \frac{1}{(x+z)^2 - y^2}$$

$$R_2(x, y, z) = \frac{x-z}{(x-z)^2 - y^2} + \frac{x+z}{(x+z)^2 - y^2}$$

Si interpretamos la cantidad $Im\Sigma_{ex}(q^2 = M^{*2})$ como una medida de la vida media de las cuasipartículas térmicas, se encuentra que la corrección perturbativa no introduce inestabilidad, al menos en el rango de densidad bariónica comprendido entre 0 y $0.44 fm^{-3}$ y temperaturas entre $0 < T < 200 MeV$. Esto puede comprobarse por inspección de la función de Heaviside estudiada en el Apéndice G, que afecta a $Im\Sigma_{ex}$. Cuando dicha función se evalúa en la capa de masa $q^2 = M^{*2}$, se anula idénticamente supuesto que $M^*(\rho_B, T) > m_v/2$.

Hasta aquí el valor de las nuevas constantes de acoplamiento no ha sido especificado. A fin de determinarlo se procede a evaluar la ecuación de estado y la compresibilidad con correcciones perturbativas, tomando a g'_s, g'_v como variables de ajuste. Practicando la hipótesis expuesta al comienzo de esta sección, sólo se consideran valores inferiores a la décima parte de las constantes originales. Tomando la compresibilidad, la densidad y la energía de saturación como cantidades indicativas se adoptará el criterio de que sus valores difieran solamente en un dado porcentaje de los correspondientes resultados en la AHR. De esta manera se obtiene un posible dominio de variación para (g'_s, g'_v) .

Si se desea mas precisión en la definición de los acoplamientos perturbativos deben imponerse condiciones adicionales. El estudio de los núcleos pesados mediante la ATP es una importante fuente de información, que será analizada oportunamente [44].

Usando el propagador obtenido en la ecuación de Dyson es posible definir la masa efectiva \mathcal{M}^* . De esta manera el valor M^* obtenido en la AHR es corregido mediante

$$\mathcal{M}^*(T, \rho_B, M^*, g'_s, g'_v) = M^* + \Sigma_{ex}^{escalar}(q_0 = M^*) \quad (3.40)$$

Donde sólo debe incluirse la componente escalar de Lorentz de la autoenergía. La cantidad $\mathcal{M}^* - M^*$ proporciona una medida de la modificación sufrida por el espectro de partícula independiente, debida a las correcciones perturbativas.

El potencial termodinámico $\Omega(T, \mu)$ puede construirse a partir de su expresión $\Omega_0(T, \mu)$ en la AHR

$$\Omega(T, \mu) = \Omega_0(T, \mu) + \Delta\Omega(T, \mu) \quad (3.41)$$

donde $\Delta\Omega$ es la corrección perturbativa.

Ω_0 puede ser escrito como suma de las contribuciones de fermión (F) y de mesones escalar (s) y vectorial (v) :

$$\Omega_0(T, \mu) = \Omega_{0F} + \Omega_{0s} + \Omega_{0v}$$

cuyas expresiones son

$$\begin{aligned}\Omega_{0F}(T, \mu) &= -\frac{2M^{*3}}{\pi^2\beta} \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2-1} \ln \left(\frac{1+e^{-\beta(M^*x+\alpha-\mu)}}{1+e^{-\beta(M^*x-\alpha+\mu)}} \right) \\ &\quad -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2} M^{*4} \ln \left(\frac{M^*}{M} \right) + \frac{1}{2} M^3 (M-M^*) - \frac{7}{4} M^2 (M-M^*)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{6} M (M-M^*)^3 - \frac{25}{24} (M-M^*)^4 \right] \\ \Omega_{0s}(T) &= -\frac{m_s^3}{\pi^2\beta} \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2-1} \ln (1-e^{-\beta m_s x}) \\ \Omega_{0v}(T) &= -\frac{4m_v^3}{\pi^2\beta} \int_1^\infty dx x \sqrt{x^2-1} \ln (1-e^{-\beta m_v x})\end{aligned}$$

La corrección $\Delta\Omega$ puede evaluarse como una integral sobre el parámetro de acoplamiento λ

$$\Delta\Omega = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle 0(\beta) | \lambda H_{int}(\lambda) | 0(\beta) \rangle \quad (3.42)$$

Para escribir (3.42) se ha extendido a la TTC el resultado de la teoría estadística [60]. Debido a que el lagrangiano QHD-I carece de acoplamientos derivativos es

$$H_{int} = - \int d^3x \mathcal{L}_{int}(x)$$

Debe notarse que sólo se ha tomado la componente física de \hat{H}_{int} .

Para aplicar (3.42) debe reemplazarse $g' \rightarrow \lambda g'$ y emplear las ecuaciones de movimiento (1.41) para obtener

$$\mathcal{L}_{int} = \lim_{x' \rightarrow x} (i \not{\partial}_x - M)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x') \quad (3.43)$$

Con el propósito de introducir la función de Green exacta para nucleones $G(x, x')$, debe asignarse un ordenamiento temporal a las coordenadas temporales en el lado derecho de (3.43), por ejemplo $x_0 > x'_0$. Con esta elección y tomando el valor esperado de vacío térmico, resulta

$$\begin{aligned}\langle 0(\theta) | \mathcal{L}_{int}(x) | 0(\theta) \rangle &= \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x'_0 \rightarrow x_0-}} (i \not{\partial}_x - M)_{\alpha\beta} \langle 0(\theta) | \psi_\beta^{(1)}(x) \bar{\psi}_\alpha^{(1)}(x') | 0(\theta) \rangle \\ &= \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x'_0 \rightarrow x_0-}} i \text{tr} \left[(i \not{\partial}_x - M) G^{(11)}(x, x') \right]\end{aligned}$$

Expresando el propagador en el espacio de impulso y usando la ecuación de Dyson para el propagador completo (1.16) resulta

$$\begin{aligned}
\langle 0(\theta) | \mathcal{L}_{int}(x) | 0(\theta) \rangle &= i \lim_{\substack{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} \\ x'_0 \rightarrow x_0 -}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[(\not{p} - M) G^{(11)}(p) \right] e^{-i p(x-x')} \\
&= i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\Sigma^{(1a)}(p) G^{(a1)}(p) \right] e^{-i \eta p_0}
\end{aligned}$$

donde se ha usado $(\gamma_\mu p^\mu - M)G^0(p) = 1$ y $\delta^4(x - x') = 0$. Además debe realizarse una suma sobre el índice térmico $a = 1, 2$.

La contribución principal en las constantes perturbativas puede obtenerse reemplazando $\Sigma(p)$ por su aproximación (3.35) convenientemente regularizada y el propagador exacto por su expresión en la AHR (3.34). De este modo sólo la componente $a = 1$ contribuye, pues $\Sigma^{(12)}(p)$ es nula en la capa de masa $q^2 = M^2$.

Reuniendo todos estos resultados puede escribirse (3.42) como

$$\Delta\Omega(T, \mu) = -\frac{i}{2} V \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\Sigma_{ex}^{(11)}(p) G_H^{11}(p) \right] e^{-i \eta p_0} \quad (3.44)$$

donde V indica el volumen del sistema.

La integral en (3.44) presenta un término divergente provisto por la parte de Feynman del propagador $G_H^{(11)}(p)$. Si se adopta el criterio de omitir completamente tal aporte se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega(T, \mu) &= 2(M^*)^4 \left\{ g_s'^2 \left[S(T, \mu)^2 - \frac{1}{4}(4 - m_1)(B_{11} + B_{21}) + C_{21} + \frac{1}{2}(4 - m_1)C_{11} + \frac{1}{2}C_{31} \right] \right. \\
&\quad \left. + g_v'^2 \left[2S(T, \mu)^2 + \frac{1}{2}(2 + m_2)(B_{12} + B_{22}) + 2C_{22} - (2 + m_2)C_{12} + C_{32} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(T, \mu) &= \int_1^\infty dx \sqrt{x^2 - 1} [n_F(M^*x + \alpha) + \bar{n}_F(M^*x - \alpha)] \\
B_{1j}(T, \mu) &= \int_1^\infty dx \int_1^\infty dy \{ n_F(M^*x + \alpha) n_F(M^*y + \alpha) \ln \left(\frac{(x-y)^2 - D_{1j}}{(x-y)^2 - D_{2j}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \bar{n}_F(M^*x - \alpha) \bar{n}_F(M^*y - \alpha) \ln \left(\frac{(x-y)^2 - D_{1j}}{(x-y)^2 - D_{2j}} \right) \right\} \\
B_{2j}(T, \mu) &= 2 \int_1^\infty dx \int_1^\infty dy n_F(M^*x + \alpha) \bar{n}_F(M^*y - \alpha) \\
&\quad \times \ln \left(\frac{(x+y)^2 - D_{1j}}{(x+y)^2 - D_{2j}} \right) \\
C_{1j}(T, \mu) &= \int_1^\infty dx x^j \sqrt{x^2 - 1} [n_F(M^*x + \alpha) + \bar{n}_F(M^*x - \alpha)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_1^\infty dy y \sqrt{y^2 - 1} \int_{-1}^1 \frac{dt}{z_j} n_B(M^* z_j) R_l(x, y, z_j) \\
D_{1j} &= (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{y^2 - 1})^2 + m_j \\
D_{2j} &= (\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1})^2 + m_j \\
z_j &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}t + m_j}
\end{aligned}$$

donde $j = (1, 2)$, $f_l = 0$ para $l = 1, 3$ y $f_l = 1$ para $l = 2$ y

$$\begin{aligned}
R_1(x, y, z) &= \frac{1}{(x-z)^2 - y^2} + \frac{1}{(x+z)^2 - y^2} \\
R_2(x, y, z) &= \frac{x-z}{(x-z)^2 - y^2} + \frac{x+z}{(x+z)^2 - y^2} \\
R_3(x, y, z) &= (z^2 - x^2 - y^2)R_1(x, y, z) \\
m_1 &= \left(\frac{m_s}{M^*}\right)^2 \\
m_2 &= \left(\frac{m_v}{M^*}\right)^2
\end{aligned}$$

Una vez logrado este resultado, la presión P , la densidad bariónica ρ_B y la compresibilidad κ , perturbativamente corregidas pueden evaluarse usando las relaciones habituales en la teoría estadística

$$P(T, \mu) = -\Omega(T, \mu) \quad (3.45)$$

$$\rho_B = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)_{TM^*} \quad (3.46)$$

$$\kappa = 9\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_B}\right)_T = 9\rho_B\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho_B}\right)_T \quad (3.47)$$

De la segunda puede extraerse el potencial químico como función de la densidad. Insertando en las restantes se obtienen la presión y la compresibilidad como funciones de la densidad.

3.4.4 Resultados

Los cálculos en la AHR se realizaron tomando los acoplamientos y masas consignados en [4], esto es $g_s = 7.37$, $g_v = 10.1$, $m_s = 2.32 fm^{-1}$, $m_v = 3.96 fm^{-1}$, $M = 4.75 fm^{-1}$. Estos valores producen una densidad de saturación $\rho_0 = 0.148 fm^{-3}$ y una energía de ligadura por nucleón $\epsilon_B = -15.75 MeV$ en la AHR.

Como explicamos en el apartado precedente, es necesario fijar las constantes g'_s, g'_v . Con este fin se han evaluado las cantidades p, κ y ϵ_B a $T=0$ y a la densidad ρ_0 . Distintos valores para los acoplamientos han sido empleados, variando entre cero y un décimo del valor original. Se encuentra que para valores con $g'_s > g'_v$ no existe solución para la relación funcional entre la densidad y el potencial químico. Sobre la frontera $g'_s \simeq g'_v$ la compresibilidad toma valores exageradamente grandes; finalmente para $g'_s < g'_v$, κ varía ampliamente alrededor del valor $\kappa = 450 MeV$ obtenido en la AHR.

	g'_s	g'_v	$\rho_s(fm^{-3})$	$\kappa(MeV)$
AHR	0.00	0.00	0.148	469
A	0.10	0.10	0.124	301
B	0.07	0.50	0.182	675
C	0.07	0.91	0.191	718
D	0.37	0.91	0.187	701

Tabla 3.2 Parámetros y resultados característicos para el modelo QHD-I. Los valores A-D indican distintas posibilidades para los acoplamientos efectivos. Se incluye la densidad de saturación ρ_s y la compresibilidad κ obtenidos.

En la Tabla 3.2 se indica un conjunto de valores para los acoplamientos efectivos que optimizan la densidad de saturación, la energía de ligadura y la compresibilidad.

La densidad bariónica (3.46) es una función no monótona del potencial químico como consecuencia de las correcciones introducidas. De esta manera existen al menos dos distintos valores de μ que corresponden a la misma ρ_B ; de éstos sólo el menor produce resultados físicos.

En la Tabla 3.2 se muestra la compresibilidad (3.47) a la densidad de saturación. De allí puede verse que la compresibilidad es afectada notablemente por las correcciones, alcanzando valores sensiblemente menores ($\kappa = 300 MeV$) que el correspondiente a la AHR.

La masa efectiva \mathcal{M}^* se muestra en la Fig. (3.7) como función de la temperatura y en la Fig. (3.8) como función de la densidad. En ambos casos la desviación $\mathcal{M}^* - M^*$ es insignificante, aún para temperaturas elevadas. Este comportamiento asegura que el método de solución propuesto no crea inestabilidad en el esquema de cuasipartícula térmica introducido en la AHR, al menos al orden de aproximación empleado.

En las Figs. (3.9) y (3.10) se presentan la variación en densidad de la presión y de la compresibilidad respectivamente. Puede observarse que en el caso $g'_v > g'_s$ la densidad de saturación supera al resultado de la AHR, además la compresibilidad es inferior punto a punto a los valores logrados en dicha aproximación. En particular a la densidad ρ_0 la compresibilidad corregida varía entre los 100 y 200 MeV. Completamente opuesto es el caso $g'_s = g'_v$ con una densidad de saturación inferior a la normal y en este punto se tiene $\kappa = 700 MeV$.

En la Fig. (3.9) puede detectarse una zona físicamente inestable para densidades bariónicas $0 < \rho_B/\rho_0 < 0.8$, correspondiente a la transición de fase del tipo gas-líquido ya presente en la AHR. La construcción de Maxwell para el presente caso arroja los resultados presentados en la Tabla 3.3. Las correcciones perturbativas pueden aumentar notablemente la temperatura crítica inferida en la AHR.

3.5 Conclusiones

A lo largo de este capítulo se han analizado distintos esquemas de solución al problema planteado por la interacción de acoplamiento fuerte, característica del medio nuclear. Se han presentado tres métodos diferentes: la expansión en lazos, la aproximación de fases al azar relativista y la aproximación de la transición perturbativa. Dichos casos han sido construídos como un camino alternativo a las aproximaciones más habituales, ya revisadas en el Capítulo

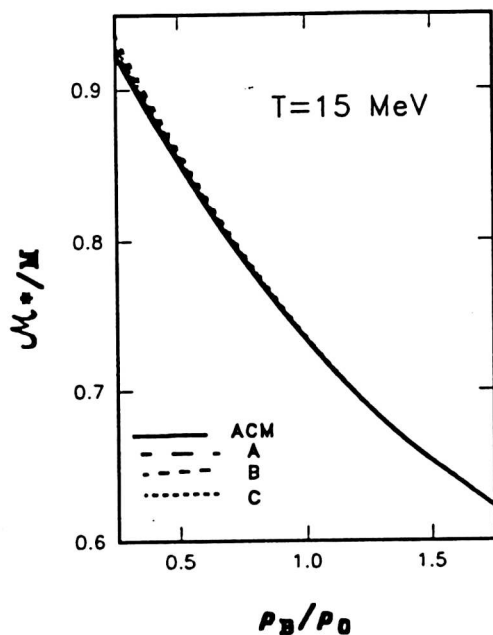


FIGURA 3.7 La masa efectiva \mathcal{M}^* corregida perturbativamente como función de la densidad a $T=15$ MeV. Se emplearon varios conjuntos de constantes efectivas A-C (ver Tabla 3.2); también se incluye el resultado de la ACM.

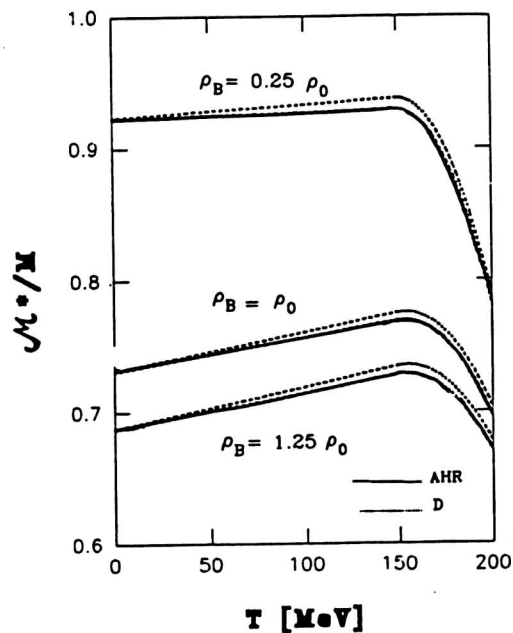


FIGURA 3.8 Comparación de la masa efectiva como función de la temperatura para varias densidades. Se muestra la ACM junto con el resultado corregido perturbativamente con las constantes efectivas D de la Tabla 3.2.

1. El propósito, en todos los casos es permitir la evaluación de correcciones sistemáticas mediante un método de aplicación práctica, que evite en lo posible la ambigüedad y la complejidad de cálculo que, por ejemplo, desacreditan a la AHF.

Se ha tomado como elemento de aplicación un modelo de acoplamiento lineal, renormalizable, ampliamente conocido por su uso tanto en materia nuclear como en núcleos finitos. Se ha prestado especial atención a las propiedades de la materia nuclear tales como energía de ligadura, presión y compresibilidad.

En los tres casos la AHR aparece naturalmente como la aproximación básica, alrededor de la cual se construye todo el cálculo. Tanto en la expansión en lazos como en la AFAR se conserva el carácter no perturbativo de la interacción. En cambio en la ATP se propone un régimen de validez perturbativa que, no obstante, incluye los efectos no lineales en su estado de partida.

Justamente la fuerte no linealidad de los cálculos autoconsistentes, junto con el elevado valor de los acoplamientos ha conducido a la expansión en lazos a un régimen de inestabilidad. Los parámetros del modelo requieren un ajuste tan pronunciado que el sistema entra en un régimen físico diferente. Aunque sólo se ha estudiado hasta la segunda corrección, todo parece indicar que los resultados teóricos no admiten comparación con la experiencia debido a su fuerte dependencia con el orden de aproximación.

Por otro lado, la AFAR debe enfrentar otro de los problemas de los cálculos no perturba-

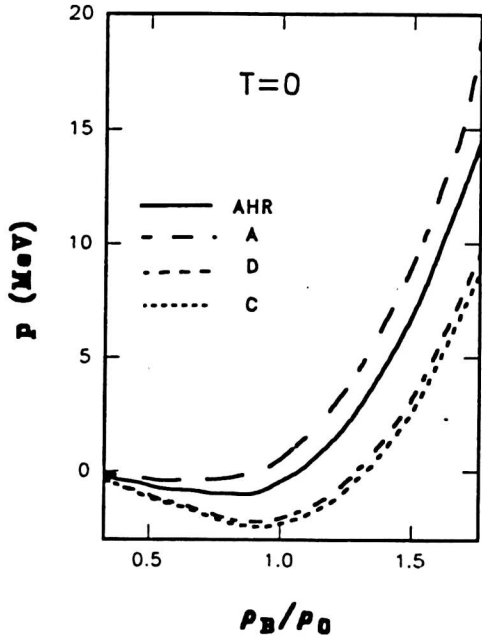


FIGURA 3.9 La presión como función de la densidad a $T=0$ en el modelo QHD-I. El resultado de la AHR es comparado con los de la ATP empleando distintos conjuntos de acoplamientos efectivos A-D.

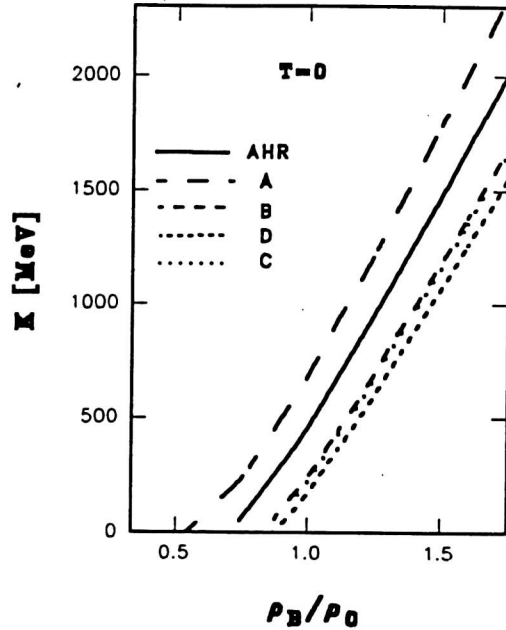


FIGURA 3.10 La compresibilidad como función de la densidad a $T=0$ para el modelo QHD-I. El resultado de la AHR es comparado con el de la ATP empleando distintos conjuntos de acoplamientos efectivos A-D.

tivos : la aparición de los polos fantasmas. Este efecto es conocido desde largo tiempo, sin embargo aún no ha sido resuelto satisfactoriamente. Si bien el esquema de aproximación resulta conceptualmente convincente, nuevamente la magnitud de los acoplamientos conspira contra el éxito de la solución. Al contrario de lo que ocurre con los polos de Landau de la electrodinámica, los polos fantasmas de la interacción nuclear tiene efecto en una escala de energías relevante para el problema estudiado. Por lo tanto la presencia de efectos espúreos es esperable a energías medias y altas, justamente en la zona de interés para la DCH.

Una forma de salvar estos inconvenientes es la propuesta de la ATP: los efectos no perturbativos fundamentales son incluidos en el punto de partida, carente de polos fantasmas. Luego se realizan las correcciones mediante un esquema de perturbaciones normal que usa acoplamientos efectivos notablemente disminuídos.

Puesto que los polos fantasmas no aparecen a ningún orden finito de perturbaciones, la ATP se halla libre de la objeción principal a la AFAR. Por otro lado la magnitud de los acoplamientos asegura la pequeñez relativa de las correcciones entre órdenes sucesivos. Sin embargo el método no está aún bien definido, sólo cuando los acoplamientos perturbativos puedan ser determinados con precisión, podrá decirse que su aplicación es recomendable. Esta etapa podrá ser alcanzada luego de examinar la aplicación de la ATP a otras situaciones físicas, por ejemplo a la estructura de núcleos pesados o a la dispersión de nucleones. Este será tema para una futura investigación.

	g_s	g_v	$T_c(\text{MeV})$	$\rho_c(\text{fm}^{-3})$	$p_c(\text{MeVfm}^{-3})$
AHR	0.00	0.00	16.0	0.078	0.105
A	0.10	0.10	21.2	0.027	0.689
D	0.91	0.91	30.4	0.065	0.462

Tabla 3.3 Valores críticos para el modelo QHD-I en la ATP. Se incluyen los resultados para la temperatura T_c , la densidad ρ_c y la presión p_c críticos.

Por otra parte ya que las constantes perturbativas representan valores efectivos debe esperarse que dependan de las condiciones macroscópicas del sistema, o aún tener carácter local para fenómenos fuera del equilibrio.

En un capítulo próximo se aplicará la ATP a modelos de mayor complejidad.

Modelos Alternativos en la DCH

4.1 Introducción

Existen ciertas propiedades del medio nuclear, determinadas experimentalmente, con las cuales deben cotejarse las predicciones de los modelos teóricos. Por ejemplo, el análisis de las vibraciones monopolares nucleares parecen indicar que la compresibilidad a la densidad de saturación toma el valor $\kappa = 210 \pm 30$ MeV [63]. Otras evaluaciones le asignan valores que van desde los 100 MeV [64] hasta los 344 MeV [65]. Por lo tanto sólo es posible asignar límites para la posible variación de la compresibilidad entre los 100 y los 350 MeV. Igual grado de incerteza se halla en la determinación de la masa efectiva del nucleón : valores entre 0.6 y 0.9 de la masa en vacío han sido obtenidos a partir de la dependencia en energía del potencial óptico para la interacción protón-núcleo.

Es frecuente encontrar comparaciones entre los cálculos relativistas realizados en la ACM y los resultados obtenidos con una interacción no relativista del tipo Skyrme, habitualmente empleado en las investigaciones de estructura nuclear [66],[67]. Dicha comparación tiene sentido a densidades y/o temperaturas relativamente bajas, pero no es aplicable cuando las condiciones externas hacen presumir un régimen esencialmente relativista.

La interacción Skm^* ha sido aplicada para describir las propiedades del núcleo en su estado fundamental [68], tales como la energía de ligadura, radios nucleares, etc. De esta manera se han obtenido valores de 0.78 para el cociente M^*/M y de 217 MeV para la compresibilidad.

En la ACM para el modelo QHD-I se obtuvieron $M^*/M=0.556$ MeV y $\kappa=540$ MeV, en tanto que en la AHR los resultados son levemente diferentes: $M^*/M=0.718$ y $\kappa= 471$ MeV. Por último, en la AHF se tiene $M^*/M=0.52$ y $\kappa=585$ MeV [4]. En todos los casos el módulo de compresibilidad κ es excesivamente alto, superando ampliamente la cota de confiabilidad indicada mas arriba. Además el cociente de masa decae muy rápidamente con la densidad. Si bien los valores a la densidad de saturación podrían ser compatibles con la amplia incerteza experimental, un hecho inaceptable es que la masa efectiva tome valores negativos a densidades suficientemente altas, cuando se incluyen grados de libertad adicionales para la resonancia Δ [68].

Atendiendo a estas dificultades se han propuesto distintos modelos alternativos al QHD-

I. Algunos de ellos [69]-[78] son una extensión de aquél, otros [67],[72], [73] representan una dinámica esencialmente distinta aunque conservando los grados de libertad más básicos.

El llamado modelo $\sigma - \omega$ no lineal (SONL) es un lagrangiano renormalizable que incluye términos cúbicos y cuárticos de autointeracción del campo escalar $\sigma(x)$.

Otro enfoque para el mismo problema lo proporciona el modelo no renormalizable propuesto en [70]. Dicho modelo (ZM), emplea los mismos grados de libertad e igual número de acoplamientos independientes que en el QHD-I. En cambio se incluye un acoplamiento no renormalizable, con derivadas en el campo bariónico. Usando una ACM a temperatura cero, los acoplamientos se ajustan para normalizar las condiciones de saturación.

Este Capítulo estará dedicado al estudio de los modelos SONL y ZM aplicados a la descripción de materia nuclear simétrica. En la próxima sección revisaremos el modelo SONL a densidad y temperatura finitas. A continuación se presentará la ACM para el modelo ZM a $T=0$. Con el propósito de trascender la ACM en la sección siguiente se separará el término de interacción en una contribución de campo medio y una porción residual [56]. Esta interacción remanente será tomada para aplicar la ATP, ya presentada en el Capítulo 3.

4.2 El Modelo Sigma-Omega no lineal (SONL)

El lagrangiano de este modelo es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(\not{\partial} - M)\psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu - g_s\bar{\psi}\sigma\psi + g_v\bar{\psi}\not{\omega}\psi - \frac{1}{3}b\sigma^3 - \frac{1}{4}c\sigma^4 \end{aligned}$$

donde g_s, g_v, b, c son constantes de acoplamiento. Dichas constantes pueden fijarse empleando las propiedades de la materia nuclear exclusivamente. Las condiciones de saturación proporcionan dos vínculos, los restantes pueden obtenerse fijando los valores para la masa efectiva $m^* = M^*/M$ y de la compresibilidad κ , a la densidad de saturación en la ACM. Una segunda opción consiste en retener solamente las condiciones de saturación e introducir información adicional por consideración de los efectos de superficie del medio nuclear.

Existen dos cantidades que caracterizan la superficie :

i) La energía de superficie, que puede obtenerse a través del término $a_s A^{2/3}$ de la fórmula semiempírica de masas, $a_s = 19 \pm 1$ MeV [79].

ii) El espesor de superficie t , es la distancia radial entre los puntos en que la densidad disminuye de $0.9\rho_0$ a $0.1\rho_0$. A partir de la distribución de densidad en núcleos pesados se obtiene $t=2.2 \pm 0.1$ fm [80].

4.2.1 Materia Nuclear Infinita

Las ecuaciones de movimiento en la ACM se reducen a

$$\begin{aligned} (i\not{\partial} - M^*)\psi &= g_v\gamma^0\bar{\omega}\psi \\ m_s\bar{\sigma}^2 + b\bar{\sigma}^2 + c\bar{\sigma}^3 &= -g_s\rho_s \\ m_v^2\bar{\omega} &= g_v\rho_B \end{aligned}$$

$\kappa(\rho_0)(MeV)$	C_s^2	C_v^2	$B \times 10^{-2}$	$C \times 10^{-1}$	$m^*(\rho_0)$
400	367.1	264.6	-0.096	-0.013	0.55
	289.8	199.3	-0.054	0.011	0.65
	209.8	132.4	0.245	0.192	0.75
	102.4	64.5	6.855	4.234	0.85
300	380.7	264.6	-0.161	-0.022	0.55
	306.7	199.3	-0.217	-0.019	0.65
	233.2	132.4	-0.328	0.039	0.75
	138.9	64.5	1.723	1.953	0.85
210	393.1	264.6	-0.216	-0.031	0.55
	322.2	199.3	-0.352	-0.045	0.65
	255.9	132.4	-0.784	-0.081	0.75
	183.6	64.5	-1.778	0.396	0.85
100	408.4	264.6	-0.280	-0.040	0.55
	341.7	199.3	-0.504	-0.074	0.65
	285.9	132.4	-1.277	-0.212	0.75
	264.4	64.5	-5.104	-1.081	0.85

Tabla 4.1 Los parámetros del modelo SONL como funciones de la compresibilidad κ y la masa efectiva M^* a la densidad de saturación.

La densidad de energía viene dada a $T=0$ por

$$\epsilon = \left(\frac{g_v}{m_v}\right)^2 \rho_B + \frac{1}{2}m_s^2\bar{\sigma}^2 + \frac{1}{3}b\bar{\sigma}^3 + \frac{1}{4}c\bar{\sigma}^4 + \delta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + M^{*2}}\Theta(p_F - p) \quad (4.1)$$

La presión y la compresibilidad se evalúan usando (1.27) y (3.47) respectivamente. Como es costumbre se ha usado $M^* = M - g_s \bar{\sigma}$, δ es la degeneración de spin e isospin, el impulso de Fermi p_F viene dado mediante (1.11).

Como primer paso para fijar las constantes de acoplamiento se usará el teorema de Hugenholtz-van Hove [81] que establece que la energía de Fermi E_F debe ser igual a la energía por nucleón en la saturación. De esta manera se obtiene

$$E_F(\rho_0) = \frac{\epsilon}{\rho_B}(\rho_0) = e_B + M$$

donde debe usarse $E_F = g_v \bar{\omega} + \sqrt{p_F^2 + M^{*2}}$.

De estas dos fórmulas puede despejarse a g_v como función de $M^*(\rho_0)$ si la energía de ligadura por nucleón e_B y la densidad de saturación son conocidos. Puede verse que g_v es

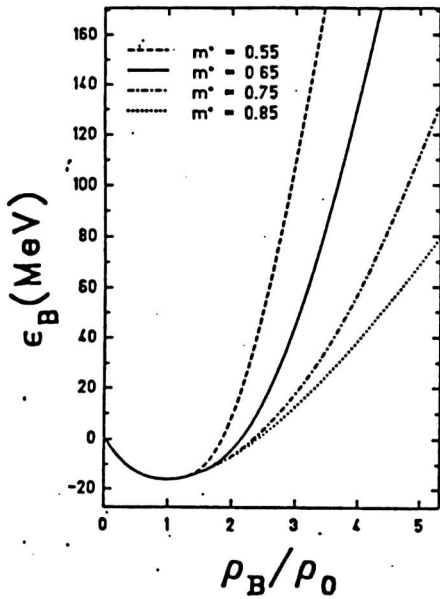


FIGURA 4.1 La ecuación de estado para materia nuclear a $T=0$. Las constantes de acoplamiento han sido fijadas para reproducir las condiciones de saturación y el valor de la compresibilidad a la saturación, $\kappa = 210 \text{ MeV}$. Se ha tomado como parámetro la masa efectiva del nucleón.

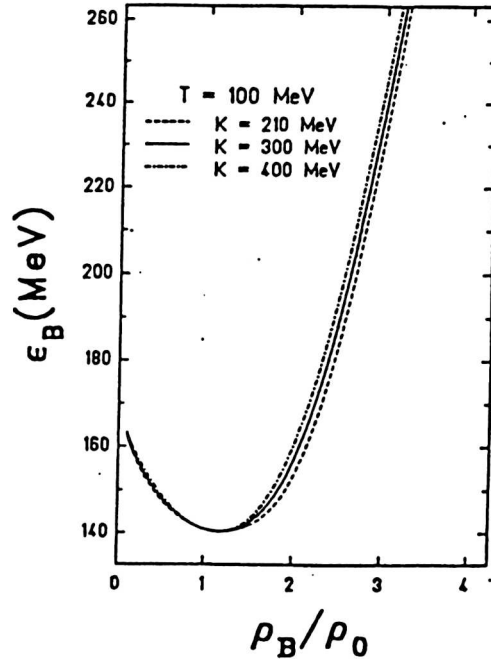


FIGURA 4.2 La ecuación de estado para materia nuclear a $T = 100 \text{ MeV}$. Las constantes se han fijado para obtener las condiciones de saturación y el valor de la masa efectiva a la saturación $m^* = 0.55$. Se ha tomado como parámetro la compresibilidad a la densidad de saturación.

función decreciente de M^* , por lo tanto la influencia del campo vectorial aumenta cuanto menor es la masa efectiva, en cuyo caso la ecuación de estado es cada vez mas dura.

Los restantes acoplamientos son elegidos para normalizar las condiciones de saturación y la compresibilidad a valores entre 100 y 400 MeV.

En la Tabla 4.1 se muestran los acoplamientos así obtenidos. Allí se usan las siguientes definiciones: $C_s = M g_s / m_s$, $C_v = M g_v / m_v$, $B = b / M g_s^3$, $C = c / g_s^4$. La constante c debe ser positiva a fin de asegurar la existencia de un estado fundamental, sin embargo esto no se cumple cuando $m^*(\rho_0) < 0.55$ ó $\kappa(\rho_0) < 180 \text{ MeV}$.

En la Fig. (4.1) se demuestra la fuerte dependencia de la ecuación de estado con el cociente $m^*(\rho_0)$; este efecto se acentúa para densidades extremas. Tal comportamiento puede ser explicado si se tiene en cuenta que a altas densidades la contribución dominante en (4.1) proviene del acoplamiento vectorial y a su vez, éste varía exclusivamente con $m^*(\rho_0)$. El carácter de la ecuación de estado es prácticamente insensible al valor de la normalización de κ . Esto puede verificarse en la Fig. (4.2) donde se muestra una familia de ecuaciones de estado duras a $T=100 \text{ MeV}$ (a $T=0$ la diferencia entre curvas es despreciable).

Se ha demostrado [71] que aquellas soluciones con $c < 0$ presentan serias dificultades, como la de producir una velocidad del sonido mayor que la velocidad de la luz, masas efectivas multivaluadas, etc. El umbral de este fenómeno ocurre para una compresibilidad de 200 MeV, indeseablemente próxima a los valores físicos. Aún para $\kappa > 200 \text{ MeV}$ existen parametrizaciones con $c < 0$.

4.2.2 Materia Nuclear Semi-infinita

Las ecuaciones de movimiento para el régimen de equilibrio estacionario son

$$(\nabla^2 - m_s^2) \sigma = b\sigma^2 + c\sigma^3 + g_s \rho_s \quad (4.2)$$

$$(\nabla^2 - m_v^2) \bar{\omega} = -g_v \rho_B \quad (4.3)$$

$$(-i\gamma \cdot \nabla + M^*) \psi = (E - g_v \bar{\omega}) \gamma_0 \psi \quad (4.4)$$

En la aproximación de Hartree los campos de mesón pueden ser reemplazados por sus valores esperados de vacío. En el caso actual no puede suponerse uniformidad espacial, sólo puede haber invariancia traslacional en planos paralelos a la interfase. La dependencia espacial se reduce a la coordenada z , perpendicular a la superficie ($z = 0$). Para $z \rightarrow -\infty$ son válidas las condiciones de saturación para materia nuclear infinita y el impulso de Fermi viene dado por (1.11). Para $z \rightarrow +\infty$ se tiene espacio libre con campos nulos.

Usando la función de Green que satisface las condiciones de contorno enunciadas, puede escribirse

$$\sigma(z) = -\frac{1}{2m_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-m_s |z - z'|) [g_s \rho_s(z') + b\sigma^2(z') + c\sigma^3(z')] dz' \quad (4.5)$$

$$\bar{\omega}(z) = \frac{1}{2m_v} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-m_v |z - z'|) g_v \rho_B(z') dz' \quad (4.6)$$

En la ATF puede evitarse el cálculo de las funciones de onda de los nucleones (4.4), empleando la hipótesis de la densidad local. Se supondrá que las mismas relaciones obtenidas para materia infinita son válidas localmente, entonces

$$\begin{aligned} \rho_B(z) &= \delta p_F^3(z) / 3\pi^2 \\ \rho_s(z) &= 4\pi \delta \int_0^{p_F(z)} dz \frac{M^*(z)}{\sqrt{p^2 + M^{*2}(z)}} \end{aligned}$$

y el impulso de Fermi local $p_F(z)$ debe evaluarse usando

$$E_F = g_v \bar{\omega}(z) + \sqrt{p_F^2(z) + M^{*2}(z)} = \frac{\epsilon(z)}{\rho_B(z)} + M$$

con $M^*(z) = M - g_s \sigma(z)$.

La densidad de energía $\epsilon(z)$ es una generalización de (1.56)

$$\begin{aligned} \epsilon(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_v}{m_v} \right)^2 \rho_B(z) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{g_s} \right)^2 (M - M^*)^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{(2\pi)^2} \int_0^{p_F(z)} dp p^2 \sqrt{p^2 + M^{*2}(z)} \end{aligned}$$

Debido a que tanto ρ_s como ρ_B son funciones de M^* y de $p_F(z)$, que a su vez vienen definidos en términos de $\sigma(z)$, (4.5) es una ecuación integral no lineal para esta función.

La energía de superficie puede evaluarse mediante

$$a_s = 4\pi r_0^2 \int_{-L}^{+\infty} \left[\epsilon(z) - N \frac{\epsilon(\rho_0)}{\rho(z)} \right] dz \quad (4.7)$$

donde $N = \int_{-L}^{+\infty} dz \rho_B(z)$. La constante L toma valores suficientemente grandes (del orden de los 10 fm) de modo que la situación en $z = -L$ es con buena aproximación la correspondiente a materia infinita. N es la densidad superficial media de nucleones y $N\epsilon(\rho_0)/\rho_0$ es la energía que tendrían los nucleones comprendidos entre $-L < z < +\infty$ si estuvieran distribuidos uniformemente a la densidad ρ_0 .

La solución numérica de (4.5),(4.6) implica un proceso iterativo que comienza con una función de prueba adecuada.

Para materia nuclear infinita, de los seis parámetros g_s, g_v, b, c, m_s, m_v sólo las combinaciones C_s, C_v, B, C aparecen. Usando la normalización de las condiciones de saturación las constantes B, C pueden expresarse en términos de C_s, C_v . Todas las cantidades evaluadas posteriormente aparecen como función de ambos acoplamientos. En particular de la condición de la densidad de saturación se obtiene

$$m^* = \sqrt{\left[\epsilon(\rho_0) - (C_v/M)^2 \right]^2 - p_F^2}$$

Las líneas de igual compresibilidad en el plano $C_s - C_v$ se muestran en la Fig. (4.3)

De estos dos últimos resultados puede verse que el efecto de aumentar la constante de la interacción vectorial consiste en disminuir la masa efectiva y aumentar la compresibilidad, justamente los dos problemas más marcados del modelo QHD-I. Por lo tanto puede decirse que la autointeracción cuártica repulsiva del modelo no lineal asume parte del efecto propio del mesón vectorial, permitiendo un menor valor para su constante de acoplamiento. Esto es tan así que las condiciones de saturación y ciertas propiedades de la superficie pueden ajustarse adecuadamente aún en ausencia total del acoplamiento vectorial.

Cuando se considera la presencia de la superficie, se rompe la invariancia traslacional, introduciendo una longitud característica, como es el espesor t . Ahora las constantes m_s, m_v aparecen como parámetros independientes. La masa m_v puede fijarse al valor experimental de 780 MeV. Por lo tanto sólo restan C_s, C_v, m_s , para ser fijados mediante las condiciones en la superficie.

En la Tabla 4.2 se muestran distintos valores obtenidos para a_s y t como funciones de C_s, C_v, m_s . Puede concluirse de aquí que la energía de superficie y el espesor dependen de manera aproximadamente lineal con m_s .

Los acoplamientos que mejor ajustan los valores $a_s = 19 \pm 1$ MeV, $t = 2.2 \pm 0.1$ fm se hallan entre $C_s = 8 \pm 1, C_v = 1 \pm 1, m_s = 250$ MeV; para los cuales se obtiene $\kappa = 150 \pm 50$ MeV y $m^* = 0.85 \pm 0.05$. La compresibilidad ha bajado considerablemente respecto del cálculo para QHD-I en la ACM. Valores similares se han obtenido con interacciones no relativistas en la ATF [82].

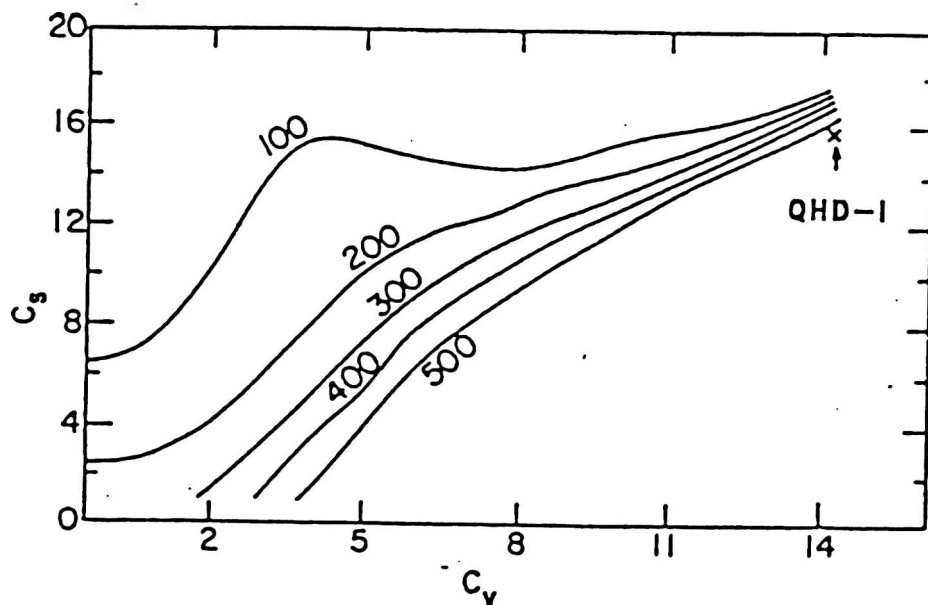


FIGURA 4.3 Líneas de igual compresibilidad en el plano de las constantes de acoplamiento $C_s = Mg_s/m_s$, $C_v = Mg_v/m_v$. Los valores numéricos indican la compresibilidad. Se ha empleado el modelo SONL a $T=0$ y la densidad de saturación. También se ha representado el punto correspondiente a la ACM del modelo QHD-I.

4.3 El Modelo de Zimanyi-Moszkowski (ZM)

El modelo SONL ha demostrado suficiente ductilidad como para ajustar adecuadamente las condiciones de saturación de la materia nuclear infinita junto con las propiedades de superficie para materia semi-infinita. Pero esto fue realizado al costo de aumentar el número de parámetros libres. Además cuando las constantes de acoplamiento se eligen para reproducir las propiedades del estado fundamental de varios núcleos finitos se encuentra que la masa efectiva a la densidad de saturación cae nuevamente hasta valores no realistas [83].

Atendiendo a este problema en [72] se propone un modelo no convencional, con los mismos grados de libertad que el QHD-I y preservando la cantidad de parámetros libres. Debido al carácter no renormalizable del modelo, los cálculos realizados hasta el momento sólo aplican la ACM. A este orden de aproximación los valores obtenidos para m^* y κ en la saturación son físicamente aceptables. Sin embargo, su empleo en el estudio de núcleos finitos [76] ha demostrado serias limitaciones haciendo necesaria la extensión del modelo en el mismo sentido del pasaje del QHD-I al QHD-II.

4.3.1 El Modelo

El modelo ZM agrega al lagrangiano QHD-I un término de interacción entre el mesón escalar y el gradiente del campo de nucleón además de un vértice de acoplamiento para nucleón y ambas clases de mesones conjuntamente. La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}M\psi + \left(1 + \frac{g_s\sigma}{M}\right) \bar{\psi}(i\partial - g_v\phi)\psi$$

C_s	C_v	B	C	m_s (MeV)	a_s (MeV)	t(fm)
8.0	2.0	0.361	6.896	150	32.3	3.3
				200	24.6	2.5
				300	16.6	1.6
				400	12.4	1.1
				500	10.1	0.8
8.0	1.0	0.445	9.465	150	28.0	3.2
				200	21.2	2.4
				300	14.2	1.6
				400	10.6	1.2
				500	8.5	0.8
8.0	0.0	0.482	10.164	150	26.6	3.2
				200	19.1	2.4
				300	13.0	1.6
				400	10.2	1.2
				500	7.5	0.9

Tabla 4.2 Los parámetros del modelo SONL como funciones de la masa del bosón escalar m_s . Se incluyen algunos resultados característicos como la energía de superficie a_s y el espesor de superficie t , evaluados en la ATF.

$$+\frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu \quad (4.8)$$

Usando el procedimiento de escaleamiento de campos [84], se propone la transformación

$$\psi \longrightarrow \frac{\psi}{\sqrt{1 + \frac{g_s\sigma}{M}}}$$

bajo la cual el lagrangiano (4.8) pasa a la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM} = & -\frac{\bar{\psi}M\psi}{1 + \frac{g_s\sigma}{M}} + \bar{\psi}(i\partial - g_v\psi)\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) \\ & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu \end{aligned} \quad (4.9)$$

que elimina los términos de interacción adicionales, indicados en el párrafo inicial, en favor de un acoplamiento altamente no lineal entre el nucleón y el mesón escalar.

Las ecuaciones debidas a (4.9) son

$$\begin{aligned} (i\partial - m^*M - g_v\psi)\psi &= 0 \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} + m_v^2\omega_\nu &= g_v\bar{\psi}\gamma_\nu\psi \\ (\square + m_s^2)\sigma &= g_s m^*{}^2\bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (4.10)$$

El tensor de energía impulso es

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\partial^\mu\gamma^\nu\psi + \partial^\mu\sigma\partial^\nu\sigma - \partial^\nu\omega^\lambda F_\lambda^\mu - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{ZM}$$

de aqui puede extraerse la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}(x)$, que a menos de derivadas temporales totales puede escribirse

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x) = & \bar{\psi}(i\gamma\cdot\nabla + m^*M)\psi + \frac{1}{2}(\nabla\sigma)^2 + \frac{1}{2}m_s^2\sigma^2 \\ & + \frac{1}{2}(\nabla\omega_0)^2 + \omega_i\ddot{\omega}_i - \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu + g_v\bar{\psi}\psi\psi\end{aligned}$$

Para materia uniforme, en régimen estacionario la ACM puede implementarse efectuando los reemplazos (1.47); tras lo cual la densidad $\mathcal{H}(x)$ se reduce a

$$\mathcal{H}(x) = \bar{\psi}(i\gamma\cdot\nabla + m^*M)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{Mm_s}{g_s}\frac{1-m^*}{m^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_v\rho_B}{m_v}\right)^2$$

tras usar las correspondientes ecuaciones de movimiento.
La densidad media de energía es

$$\begin{aligned}\epsilon = -i \lim_{\eta\rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[(p + m^*M)G(p)] e^{i\eta p_0} \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{Mm_s}{g_s}\frac{1-m^*}{m^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_v\rho_B}{m_v}\right)^2\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde $G(p)$ es la función de Green exacta para nucleones y m^* viene determinada por la ecuación integral

$$M\frac{1-m^*}{m^*} = -\left(\frac{g_s m^*}{m_s}\right)^2 \rho_s \quad (4.12)$$

con

$$\rho_s = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[G(p)]$$

obtenida a partir de la ecuación (4.10).

Dentro de la ACM se reemplaza el propagador exacto por su aproximación G_H (1.60) y se eliminan contribuciones divergentes del mar de Dirac. En este caso debe interpretarse la masa efectiva como $M^* = m^*M$.

Las constantes de acoplamiento se fijan normalizando las condiciones de saturación. Solamente las combinaciones C_s, C_v son necesarias. En la Tabla 4.3 se comparan los valores obtenidos con los correspondientes al modelo QHD-I.

Una vez fijados los acoplamientos, el cociente m^* y la energía de ligadura son evaluados como funciones de la densidad y a $T=0$. Los resultados se muestran en las Figs. (4.4) y

	C_s^2	C_v^2	m^*	$\kappa(MeV)$
QHD-I	266.7	195.5	0.54	545.6
ZM	143.0	46.0	0.85	224.8

Tabla 4.3 Comparación entre los parámetros y resultados de la ACM para los modelos QHD-I y ZM. Se incluyen la masa efectiva del nucleón m^* y la compresibilidad κ .

(4.5) respectivamente. También se incluyen allí los resultados provenientes de la ACM para QHD-I y aquellos obtenidos de un cálculo no relativista con la interacción Skm^* .

A la densidad de saturación se obtiene $m^*=0.85$ y $\kappa = 225$ MeV. Puede observarse que a densidades medias y altas la masa efectiva decrece mucho más lentamente para ZM que para QHD-I, en tanto que Skm^* se aproxima al resultado ZM para densidades inferiores a la de saturación pero sigue la tendencia del QHD-I a densidades elevadas.

Las correspondientes ecuaciones de estado presentan poca diferencia a bajas densidades, en cambio para densidades extremas la curva QHD-I tiene un crecimiento mucho más pronunciado que la ZM y Skm^* resulta un caso intermedio. La densidad de saturación para Skm^* es levemente menor respecto de los restantes casos.

Estos resultados han sido extendidos a temperatura finita usando el formalismo de funciones de Green a tiempo real [77], [56]. Cálculos similares usando la DTC se reportan en [78].

Las fórmulas (4.11), (4.12) siguen siendo válidas, donde ahora $G(p)$ es la componente (11) de la función de Green térmica (3.34) con $M^* = m^* M$. Una vez desarrolladas se obtiene

$$\epsilon = \delta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E^* [n_F(E^*) + \bar{n}_F(E^*)] + \frac{1}{2} \left(\frac{M m_s}{g_s} \frac{1 - m^*}{m^*} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2$$

$$1 - m^* = \left(\frac{g_s}{m_s} \right)^2 \delta m^{*4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E^*} [n_F(E^*) + \bar{n}_F(E^*)]$$

con

$$\rho_B = \delta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [n_F(E^*) - \bar{n}_F(E^*)]$$

$$E^* = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$$

el índice de degeneración δ vale 2 (4) para materia neutrónica (nuclear) y $n(E)$, $\bar{n}(E)$ son los números de ocupación para fermiones y antifermiones.

La presión viene dada por (1.46)

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{M m_s}{g_s} \frac{1 - m^*}{m^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2$$

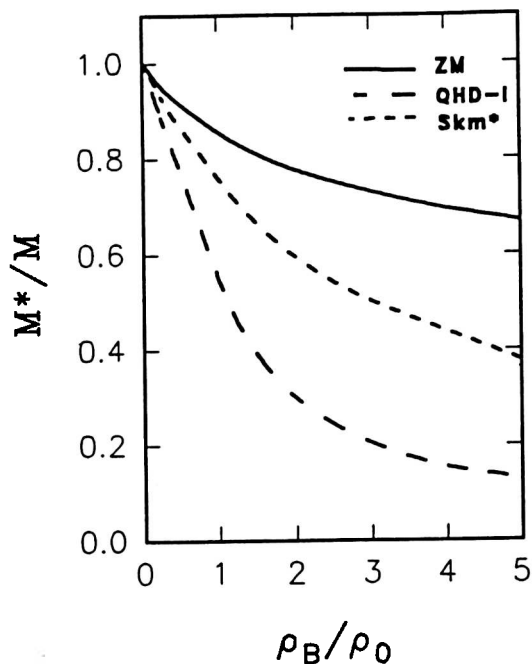


FIGURA 4.4 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad bariónica a $T=0$. Se comparan los resultados de la ACM para los modelos ZM y QHD-I y para el potencial no relativista Skm^* .

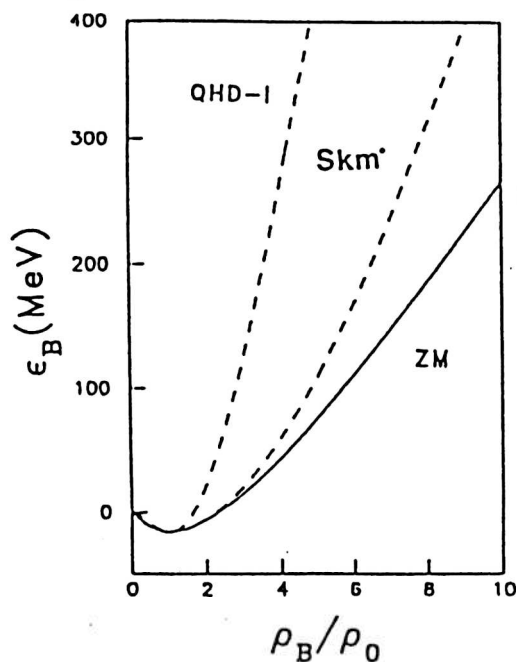


FIGURA 4.5 La ecuación de estado para materia nuclear según los distintos modelos QHD-I, ZM y Skm^* . En todos los casos se han ajustado los parámetros para normalizar las condiciones de saturación.

$$+\frac{\delta}{3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E^*} [n_F(E^*) + \bar{n}_F(E^*)]$$

En la Fig. (4.6) se muestra el cociente m^* en función de la densidad para temperaturas de 0, 100 y 200 MeV. Se incluyen los resultados del modelo QHD-I. Por debajo de los 100 MeV ambas curvas coinciden para bajas densidades, pero difieren notablemente a densidades elevadas; en cambio a $T=200$ MeV una considerable diferencia se mantiene para todas las densidades. En la Fig. (4.7) el mismo cociente versus la temperatura demuestra que a muy baja densidad y $T < 120$ MeV ambos resultados difieren sólo muy levemente, en tanto que para $T > 200$ MeV la diferencia es marcada.

	$T_c(\text{MeV})$	$\rho_c(\text{fm}^{-3})$	$p_c(\text{MeV fm}^{-3})$	m^*
QHD-I	20.56	0.087	0.643	0.781
ZM	16.51	0.067	0.287	0.923
Skm^*	14.60	0.052	0.210	0.920

Tabla 4.4 Comparación de los valores críticos para los modelos QHD-I, ZM y Skm^* . Se incluyen los resultados para la temperatura T_c , la densidad ρ_c y la presión p_c críticos además de la masa efectiva M^* evaluada en tales condiciones.

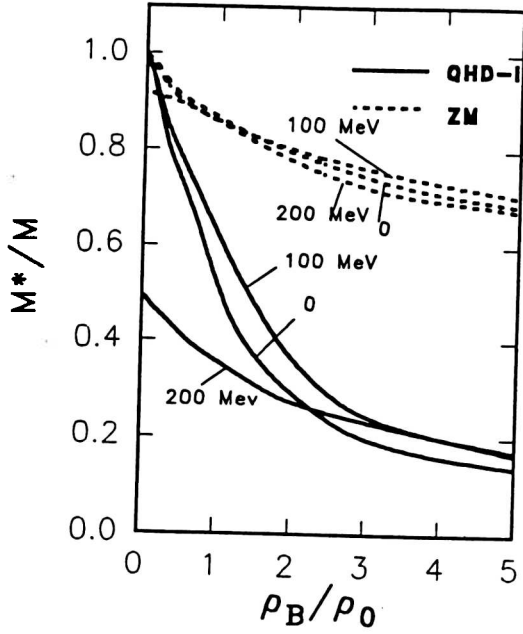


FIGURA 4.6 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad para varias temperaturas. Líneas continuas identifican al modelo QHD-I, mientras que aquellas punteadas corresponden al ZM.

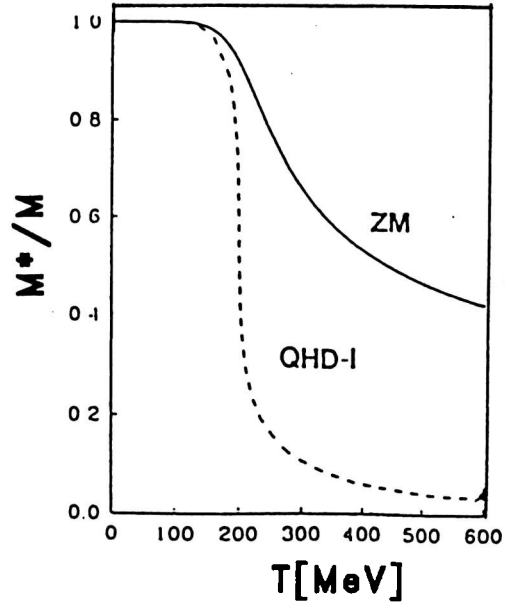


FIGURA 4.7 La masa efectiva del nucleón como función de la temperatura a densidad bariónica cero. Las dos curvas corresponden a los modelos ZM y QHD-I en la ACM.

La comparación entre ambos casos se continua en la Fig. (4.8) para la energía de ligadura por nucleón. Allí se incluyen las curvas correspondientes a $T=0, 10$ y 18 MeV.

La presión en términos de la densidad para $T=5, 10$ y 18 MeV se exhibe en la Fig. (4.9). Tanto los resultados del ZM como los del QHD-I presentan una curva del tipo de van der Waals, con una transición de fase tipo gas-líquido. La construcción de Maxwell permite deducir los valores críticos registrados en la Tabla 4.4, junto con los correspondientes al Skm^* [78]. En cualquier caso la presión crece de manera más pronunciada en el caso QHD-I que del ZM, para densidades mayores a ρ_0 .

Para terminar esta sección haremos un comentario acerca de la arbitrariedad en la elección del lagrangiano (4.8). Dicho modelo simula un acoplamiento mínimo, con derivada covariante $\partial_\mu + ig_v\omega_\mu$, de esta manera se generan vértices nucleón-mesón escalar y nucleón-mesón escalar-mesón vectorial. Una versión mas sencilla consiste en

$$\mathcal{L}' = -\bar{\psi}M\psi + \left(1 + \frac{g_s\sigma}{M}\right) \bar{\psi}i \not{\partial}\psi - g_v\bar{\psi} \not{\omega}\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu$$

sin embargo se encuentra que descontando la contribución cinética, la energía ϵ_B es definida positiva [72], es decir no existen estados ligados.

Otra forma posible es

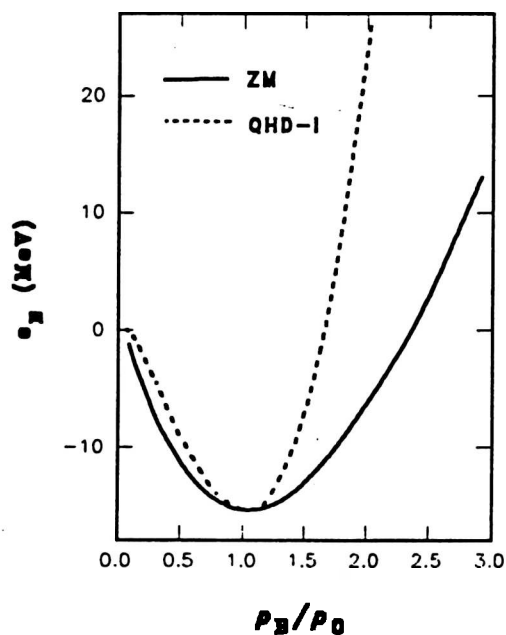


FIGURA 4.8 La energía de ligadura por partícula como función de la densidad bariónica a $T=0$. Se presentan los resultados de la ACM para los modelos ZM y QHD-I.

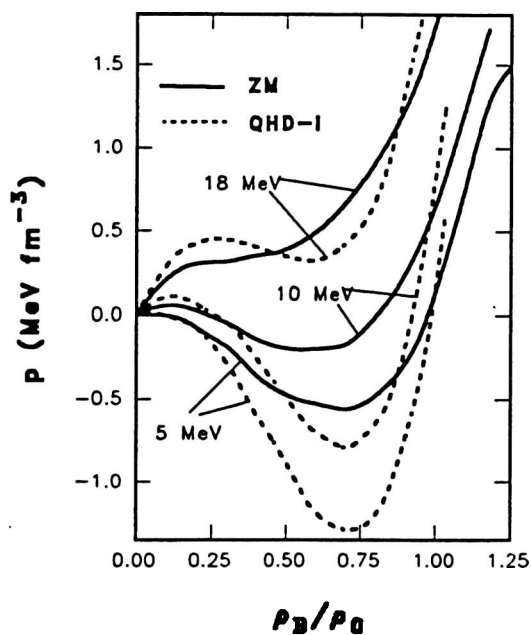


FIGURA 4.9 La presión en términos de la densidad para varias temperaturas. Líneas continuas corresponden al modelo ZM, en tanto que aquellas punteadas indican al QHD-I.

$$\mathcal{L}'' = -\bar{\psi}M\psi + \left(1 + \frac{g_s\sigma}{M}\right) [i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - g_v\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2)$$

que bajo la transformación

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \sqrt{m^*}\psi \\ \omega_\mu &\rightarrow m^*\omega_\mu\end{aligned}$$

se convierte en

$$\mathcal{L}'' = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m^* \left(\bar{\psi}M\psi + g_v\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2\omega^\mu\omega_\mu \right) + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - m_s^2\sigma^2)$$

a partir de aquí se obtiene la siguiente energía de ligadura por nucleón

$$\epsilon''_B = -i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} [(p + m^* M) G(p)] e^{i\eta p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{M m_s}{g_s} \frac{1 - m^*}{m^*} \right)^2 + \frac{1}{2} m^* \left(\frac{g_v \rho_B}{m_v} \right)^2$$

donde m^* se obtiene a partir de (4.10).

Comparada con (4.11), ϵ''_B introduce un factor m^* en la contribución del acoplamiento vectorial. Esto produce una ecuación de estado bastante mas blanda que en el caso (4.9) para densidades próximas a la de saturación, allí se tiene $m^*=0.82$ y $\kappa=205$ MeV. Dicho comportamiento se acentúa aún mas a densidades elevadas.

4.3.2 Materia Semi-infinita

Con la finalidad de evaluar efectos de superficie se empleará la ATF. Como se indicó en el caso del modelo SONL el único parámetro libre es m_s , una vez adoptado el valor $m_s=780$ MeV.

La energía de superficie a_s viene dada por (4.7) y la densidad de energía por (4.11).

En las Figs. (4.10) y (4.11) se muestran los resultados de evaluar la energía de superficie a_s y el espesor t respectivamente, como función de la masa m_s para los modelos ZM y QHD-I. Para ambas magnitudes el caso QHD-I es siempre mayor, esto es coincidente con la elevada compresibilidad obtenida. Un alto valor para κ implica una superficie extensa y, en consecuencia, una gran energía de superficie.

La cantidad a_s al igual que t , es una función linealmente decreciente de la masa m_s . Esto se explica porque al aumentar a_s , decrece el rango de la atracción escalar y la separación media entre partículas. El efecto resultante es la disminución de la superficie del medio nuclear.

4.4 El modelo ZM mas allá de la ACM

En los dos ejemplos revisados, el SONL y el ZM, se acentúan los efectos asociados al mesón escalar. En el SONL esto es realizado mediante una autointeracción renormalizable que introduce dos nuevos acoplamientos. La totalidad de las investigaciones consultadas emplean la AHR o la más sencilla ATF, cuando hay presentes efectos de finitud.

La ductilidad del modelo permite ajustar no sólo las condiciones de saturación de la materia nuclear sino también las propiedades de la superficie. Se han obtenido valores razonables para la masa efectiva ($m^* = 0.85 \pm 0.05$) y para el módulo de compresibilidad ($\kappa = 150 \pm 50$ MeV) a la densidad de saturación, usando una masa liviana ($m_s \simeq 250$ MeV).

El modelo ZM es no renormalizable y dispone de igual número de parámetros libres que el mas conocido QHD-I. Una vez normalizadas las condiciones de saturación se obtienen los valores $m^*=0.85$, $\kappa=225$ MeV, $a_s = 18.75$ MeV y $t=2.09$ fm para $m_s=400$ MeV. Estos resultados han sido conseguidos a pesar del reducido número de variables disponibles para el ajuste fenomenológico.

Debido a la estructura del lagrangiano la única solución incontrovertible proviene de la ACM. No existe ningún método evidente para introducir correcciones a dicha solución de orden mínimo. En esta sección estudiaremos la estabilidad de la ACM empleando la ATF introducida en el Capítulo 3. Se consideraran los efectos debidos a la densidad y temperatura finitas.

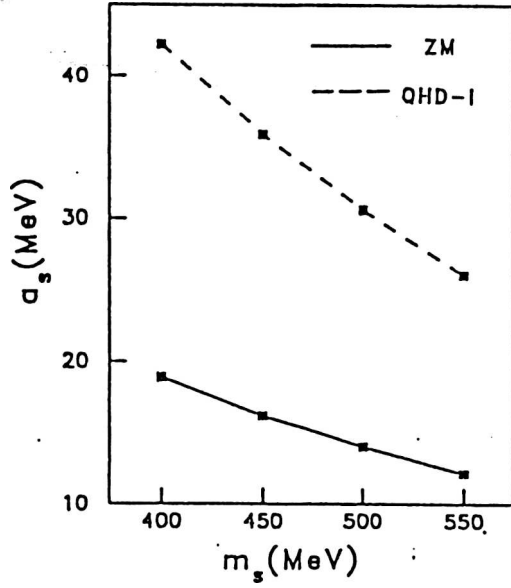


FIGURA 4.10 La energía de superficie a_s , en términos de la masa del bosón escalar. Las curvas corresponden a los modelos ZM y QHD-I en la ATF.

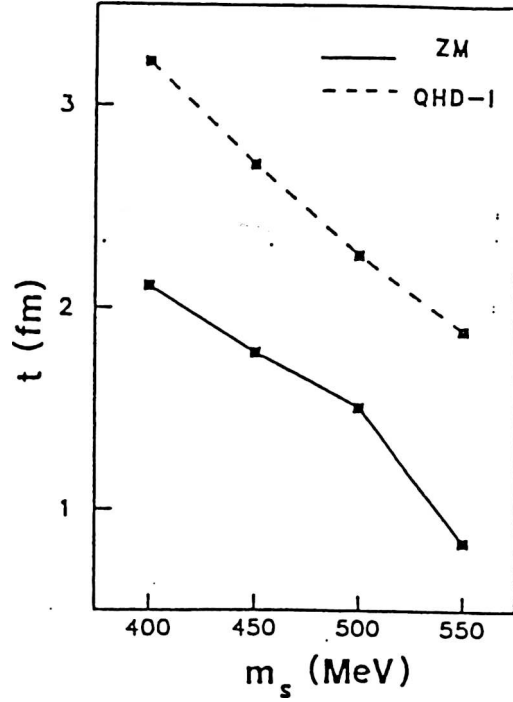


FIGURA 4.11 El espesor de superficie t como función de la masa del bosón escalar a $T=0$. Las curvas corresponden a la ATF para los modelos ZM y QHD-I.

4.4.1 La Interacción Residual

A fin de incluir las correcciones cuánticas a la solución de la ACM, puede realizarse una expansión de los campos de mesón alrededor de sus valores medios $\bar{\sigma}, \bar{\omega}$:

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{\sigma} + \sigma' \\ \omega_\mu &= \bar{\omega}\delta_{0\mu} + \omega'_\mu\end{aligned}$$

donde $\sigma'(x), \omega'_\mu(x)$ indican fluctuaciones cuánticas. Realizando este reemplazo en (4.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ZM} &= \bar{\psi}(\not{\partial} - g_v\gamma_0\bar{\omega})\psi + \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma'\partial_\mu\sigma' - m_s^2\sigma'^2) - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{2}m_v^2\omega'^\mu\omega'_\mu - g_v\bar{\psi}\psi - \frac{\bar{\psi}\sigma\psi}{1 + \frac{g_s}{M^*}m^*\sigma'} + m_v^2\bar{\omega}\omega'_0 - m_s^2\bar{\sigma}\sigma'\end{aligned}\quad (4.13)$$

donde $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega'_\nu - \partial_\nu\omega'_\mu$ y $m^* = (1 + \frac{g_s\bar{\sigma}}{M^*})^{-1}$.

Teniendo en cuenta que $\sigma'(x)$ representa correcciones cuánticas al valor clásico, es razonable esperar que en cierto régimen dinámico se cumpla $\langle \sigma'^2 \rangle \ll \bar{\sigma}^2$ y por lo tanto se

cumplirá $(g_s m^*/M)^2 \langle \sigma'(\mathbf{x})^2 \rangle \ll 1$. Bajo esta suposición es válido retener solamente los términos de menor orden en el acoplamiento entre nucleones y mesones escalares en (4.13)

$$\frac{\bar{\psi} M^* \psi}{1 + \frac{g_s^2}{M^2} m^* \sigma'} \simeq \bar{\psi} M^* \psi - g_s m^{*2} \bar{\psi} \sigma' \psi$$

En esta aproximación (4.13) se reduce a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi} (\not{\partial} - g_v \gamma_0 \bar{\omega} - M^*) \psi + \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma' \partial_\mu \sigma' - m_s^2 \sigma'^2) \\ &\quad - \frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 \omega'^\mu \omega'_\mu \\ \mathcal{L}_{int} &= g'_s \bar{\psi} \sigma' \psi - g_v \bar{\psi} \psi \bar{\omega} + m_v^2 \bar{\omega} \omega' - m_s^2 \bar{\sigma} \sigma' \end{aligned}$$

El término \mathcal{L}_0 describe la dinámica de campos de bosones libres $\sigma'(\mathbf{x})$, $\omega'_\mu(\mathbf{x})$ y nucleones efectivos $\psi(\mathbf{x})$ obtenidos en la ACM; el término $\mathcal{L}_{int}(\mathbf{x})$ proporciona el acoplamiento lineal entre dichos campos. La interacción así obtenida aparenta el acoplamiento del modelo QHD-I más términos adicionales lineales en los campos de mesón.

El acoplamiento escalar efectivo g'_s definido mediante

$$g'_s = m^*(\rho_B, T) g_s$$

varía con la densidad bariónica y la temperatura. Así, en esta aproximación ha surgido dinámicamente un acoplamiento efectivo que tiene en cuenta las propiedades globales del medio nuclear y coloca a los campos en interacción, trascendiendo la ACM. Ya que la interacción residual $\mathcal{L}_{int}(\mathbf{x})$ es renormalizable, puede aplicarse cualquiera de los métodos de correcciones sistemáticas expuestos en los capítulos precedentes. A continuación emplearemos la ATP para estudiar la estabilidad de la ACM frente a correcciones de orden superior, a densidad y temperatura finitas.

Recordemos que en este esquema de solución se supone una marcada diferencia en el valor de los acoplamientos. Se empleará la hipótesis de que los valores perturbativos pueden obtenerse mediante un simple reescalamiento, es decir, si se conocen los valores g'_{s0} , g'_{v0} de los acoplamientos para un determinado estado de referencia con densidad bariónica ρ_0 y temperatura T_0 , entonces los valores g'_s , g'_v para cualquier otro estado con densidad ρ_B y temperatura T vienen dados por

$$\begin{aligned} \frac{g'_s}{m^{*2}(\rho_B, T)} &= \frac{g'_{s0}}{m^{*2}(\rho_0, T_0)} \\ g'_v &= g'_{v0} \end{aligned}$$

Usando estos acoplamientos puede realizarse una expansión perturbativa que incluya los efectos de \mathcal{L}_{int} .

Para fijar los acoplamientos se elige como estado de referencia el de la materia nuclear a la densidad de saturación y temperatura nula.

A continuación se realiza una exploración del plano $g'_{s0} - g'_{v0}$ tomando la energía de ligadura, la presión y la compresibilidad perturbativamente corregidas como magnitudes

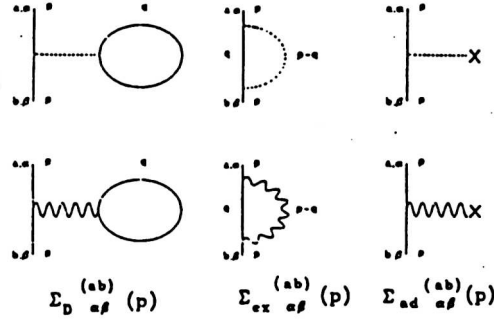


FIGURA 4.12 Diagramas de Feynman al segundo orden perturbativo para la interacción residual linealizada.

relevantes para seleccionar los valores de dichos acoplamientos. El análisis de los resultados obtenidos para un amplio rango de densidades y temperaturas brindará el criterio para justificar las hipótesis realizadas.

4.4.2 Cálculo Perturbativo

A fin de introducir correcciones perturbativas al segundo orden en las constantes de acoplamiento efectivas, se tomará la solución proporcionada por la ACM como orden cero. Por lo tanto el propagador de nucleones en el estado sin perturbar viene dado por (3.34), donde debe tomarse $M^* = m^*M$. Además los propagadores no perturbados de los campos de mesones coinciden con los correspondientes a la solución de partícula libre debido a que la ACM no introduce modificaciones en las propiedades de dichos campos.

El segundo orden perturbativo incluye los diagramas de Feynman indicados en la Fig. (4.12), que presenta un par de diagramas extra (indicados con el subíndice ad) respecto del mismo orden para el modelo QHD-I.

La autoenergía propia de nucleón $\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)}$ consta de los siguientes términos

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(ab)} = \Sigma_{D\alpha\beta}^{(ab)} + \Sigma_{ex\alpha\beta}^{(ab)} + \Sigma_{ad\alpha\beta}^{(ab)}$$

donde los términos directo (D) y de intercambio (ex) coinciden formalmente con las expresiones (3.32) y (3.35) respectivamente, donde las constantes de acoplamiento usadas deben interpretarse como los acoplamientos dependientes de la densidad generados en la sección precedente. El término restante viene dado por

$$\Sigma_{ad\alpha\beta}^{(ab)} = - \left(g'_s m_s^2 \bar{\sigma} \Delta^0(0) \delta_{\alpha\beta} + g'_v m_v^2 \bar{\omega} D_{\mu 0}^0(0) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \right) \epsilon_a \delta^{ab}$$

y $\epsilon_a = (-1)^{a+1}$ para $a=1,2$.

Los términos Σ_D, Σ_{ex} presentan divergencias que pueden eliminarse mediante los contraterminos adecuados. Un método más sencillo consiste en omitir los aportes divergentes del mar de Dirac. En este caso el resultado regularizado coincide con las expresiones presentadas en (3.39), (3.38) con las obvias modificaciones de interpretación de los acoplamientos.

	g'_{s0}	g'_{v0}	$\rho(fm^{-3})$	$\epsilon(MeV)$	$\kappa(MeV)$
ACM	0.000	0.000	0.193	15.73	226.19
Acopl. A	0.100	0.175	0.199	15.80	243.52
Acopl. B	0.200	0.360	0.208	16.00	270.76
Acopl. C	0.250	0.340	0.203	15.30	251.83
Acopl. D	0.160	0.380	0.205	15.80	261.11

Tabla 4.5 Los parámetros y resultados de la ATP para la interacción residual del modelo ZM. Los valores de los acoplamientos efectivos A-D han sido seleccionados para aproximar las condiciones de saturación de la ACM. Se incluyen la densidad ρ_s y la compresibilidad κ en la saturación, así como la energía de ligadura por nucleón ϵ .

La masa efectiva corregida \mathcal{M}^* se define mediante

$$\mathcal{M}^*(T, \rho_B) = M^* + \Sigma^{(11)}(q_0 = M^*, p = 0)$$

donde sólo interviene la componente escalar de Lorentz de la autoenergía. Se encuentra que así definida, la expresión analítica para la masa efectiva contiene una parte imaginaria, que se anula idénticamente siempre que $M^*(T, \rho_B) < 2m_v$. Esta última condición se verifica para el dominio $0 \leq T \leq 200$ MeV, $0 \leq \rho_B \leq 3\rho_0$, con ρ_0 la densidad de saturación normal.

El potencial termodinámico correcto al segundo orden perturbativo puede construirse empleando (3.41)-(3.44).

El procedimiento para evaluar la presión, la densidad bariónica y la compresibilidad es el mismo que se indicó en (3.45)- (3.47).

La ACM es evaluada usando las masas y acoplamientos consignados en [72].

La búsqueda de los acoplamientos g'_{s0}, g'_{v0} a la densidad de saturación de la ACM y temperatura cero, se realizó tomando valores comprendidos entre cero y los valores usados en la ACM. Parte de los resultados se consignan en la Figs. (4.13) y (4.14); la última es una ampliación de un sector de la primera. El reticulado del plano (g'_{s0}, g'_{v0}) se extiende entre 0 y 5 para cada eje. Se han determinado las curvas de igual valor para la energía de ligadura por partícula relativa $x = \epsilon_B/15.75$ y la presión p [MeV fm^{-3}]. Se encuentra que el plano se halla dividido en sectores según el signo de x y de p . De aquí se desprende que las condiciones simultáneas $x=1, p=0$ no pueden obtenerse estrictamente.

Un conjunto de pares de acoplamientos ha sido seleccionado (indicados A, B, C y D en la Fig. (4.14)) con el criterio de que los valores obtenidos para las condiciones de saturación difieran a lo sumo en un 20 % respecto de los valores fijados en la ACM. Estos acoplamientos junto con las respectivas condiciones de saturación se indican en la Tabla 4.5.

En la Fig.(4.15) se grafica el cociente g'_s/g'_{s0} como función de la densidad para temperaturas de 0, 20, 40, 60 y 80 MeV. El comportamiento es monótono decreciente y puede apreciarse que los efectos térmicos no son importantes, aún a densidades elevadas. El mismo cociente en términos de la temperatura se indica en la Fig. (4.16) para densidades entre un décimo y tres veces la densidad de saturación. Para una dada densidad la variación con la temperatura es muy reducida hasta cierta temperatura umbral T_0 ($T_0 \simeq 150$ MeV para $\rho_B = 0.1\rho_0$; $T \simeq 250$ MeV para $\rho_B = 3\rho_0$). A partir de allí g'_s/g'_{s0} decae rápidamente. Todas las curvas parecen coincidir asintóticamente por encima de $T=300$ MeV.

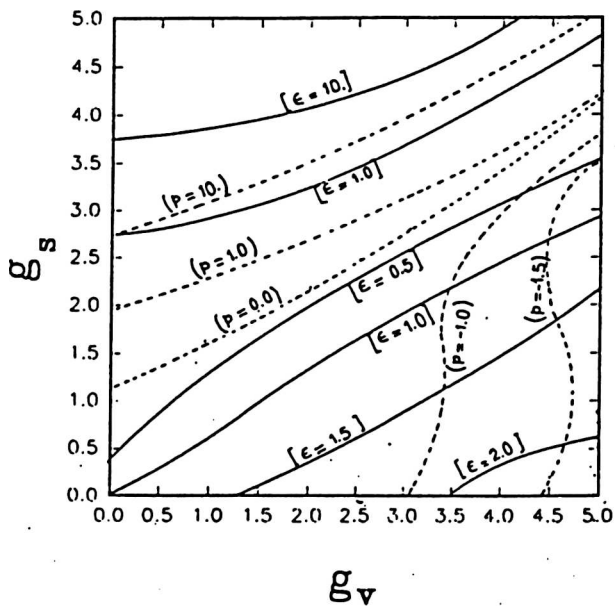


Figura 4.13 Distribución de la energía de ligadura relativa x y la presión p en el plano de las constantes efectivas perturbativas a la densidad de saturación y temperatura cero. Líneas continuas corresponden a curvas de igual x y las punteadas indican curvas isobáricas.

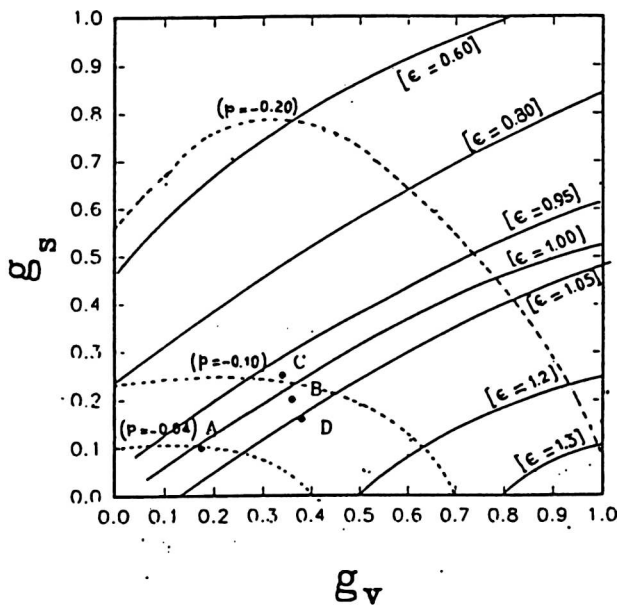


Figura 4.14 Ampliación de un sector de la Fig. 4.13, de donde se han extraído las constantes A-D empleadas en los cálculos. Al igual que en la figura anterior se indican los valores de x y de p (en $\text{MeV } f\text{m}^{-3}$) junto a cada curva.

El comportamiento de la masa efectiva \mathcal{M}^* versus la densidad para $T=0$, mostrado en la Fig. (4.17), indica que la corrección perturbativa $\mathcal{M}^* - M^*$ es insignificante para densidades de hasta tres veces la densidad normal. De aquí debe interpretarse que las perturbaciones no modifican esencialmente el régimen físico de la ACM, al menos al orden considerado. En particular no introduce inestabilidad al esquema de cuasipartícula térmica construido en la ACM.

La energía de ligadura por nucleón a $T=0$ se compara en la Fig. (4.18) para los distintos casos perturbativos y el resultado de la ACM. La densidad de saturación con correcciones es mayor que la ACM, en tanto que la energía de ligadura varía por encima o por debajo del valor de normalización, según los distintos casos. El rango de densidades para materia nuclear estable es aumentado por las correcciones perturbativas.

Las correcciones a la presión como función de la densidad son prácticamente despreciables a $T=0$. En tanto que a $T=20$ MeV sólo cobran importancia relativa por encima de $\rho_B = 0.3 f\text{m}^{-3}$ (Fig.(4.19)).

Puede verificarse en la Fig. (4.20), que las correcciones al módulo de compresibilidad se anulan a $T=0$ mientras que a $T=20$ MeV se detectan solamente leves diferencias (Fig.(4.21))

En coincidencia con el resultado registrado en el Capítulo 3 para el modelo QHD-I, la ATP parece proporcionar un método confiable para la introducción de correcciones sistemáticas.

Como indicamos oportunamente es necesaria la confirmación proveniente del estudio de otros sistemas físicos. En particular resulta de interés la aplicación de la ATP a núcleos finitos con el propósito de esclarecer si las discrepancias obtenidas en el análisis del acoplamiento

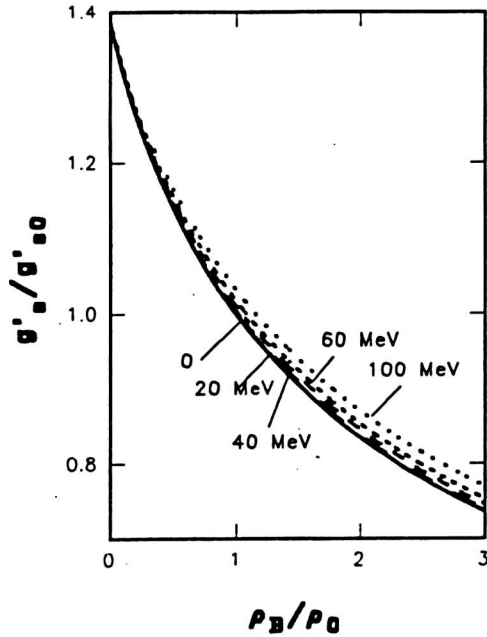


FIGURA 4.15 El acoplamiento escalar efectivo relativo a su valor en la saturación como función de la densidad a varias temperaturas.

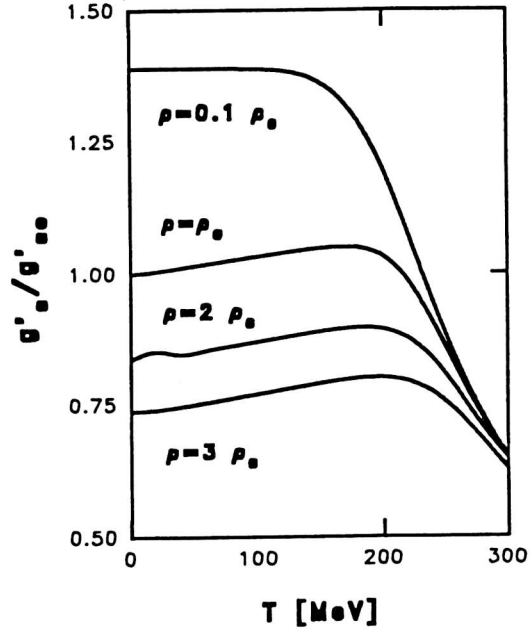


FIGURA 4.16 El acoplamiento escalar efectivo relativo a su valor en la saturación como función de la temperatura para distintas densidades.

spin-órbita para núcleos esféricos [76] es un problema intrínseco del modelo ZM o bien una característica de la ACM.

4.5 Conclusiones

Se ha reseñado la aplicación de dos modelos para la interacción entre nucleones. Estas dos versiones pretenden retener el enfoque global del modelo QHD-I para la dinámica de hadrones :

- i) sencillez en la selección de los grados de libertad efectivos, aunque altamente significativos para la descripción del medio nuclear.
- ii) economía en la disposición de parámetros libres, que son fijados para normalizar las propiedades empíricas.
- iii) empleo de técnicas de resolución directas, apropiadas para dar cuenta de las características más importantes del medio nuclear.

Tanto el SONL como el ZM parecen capaces de dar solución a algunos de los resultados más controvertidos del QHD-I: el pronunciado decrecimiento de la masa efectiva a medida que aumenta la densidad del medio nuclear y la elevada compresibilidad que delata una ecuación de estado excesivamente escarpada. Estas dos magnitudes tienen relevancia suficiente como para cambiar el régimen físico en procesos tales como la producción de nuevas partículas en la colisión de iones pesados o la generación de ondas de choque en la explosión

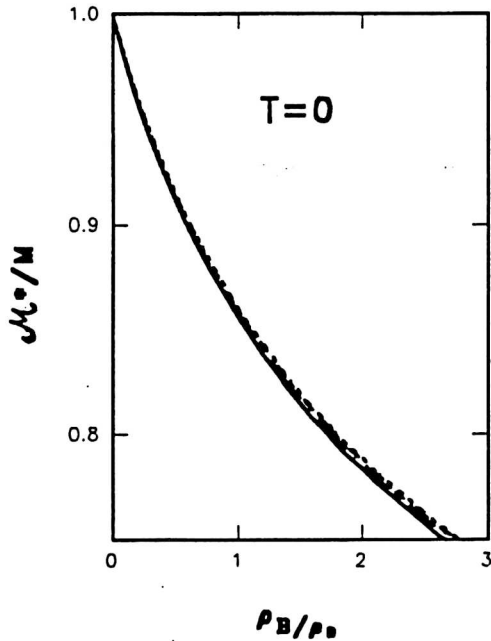


FIGURA 4.17 La masa efectiva del nucleón como función de la densidad a $T=0$. Las curvas correspondientes a los distintos acoplamientos efectivos se confunden en una única.

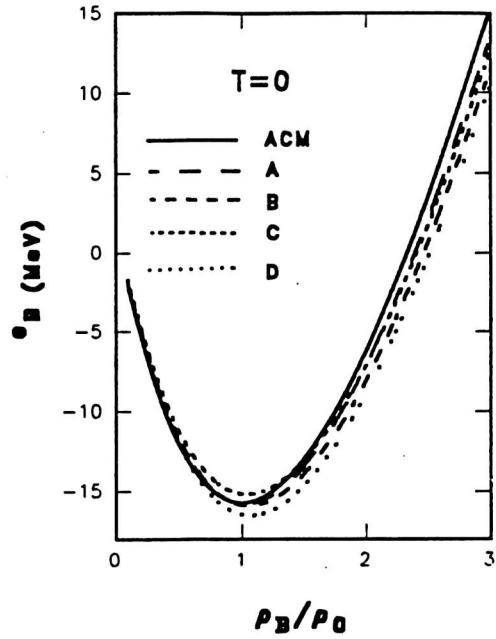


FIGURA 4.18 La energía de ligadura por partícula a $T=0$ como función de la densidad. Las distintas curvas corresponden a los acoplamientos A-D.

de las supernovas.

Además son capaces de ajustar adecuadamente las propiedades de la superficie nuclear.

En ambos casos la modificación de la dinámica consiste en dar mayor énfasis a la participación del "mesón escalar", en detrimento del aporte del grado de libertad más realista representado por el mesón vectorial ω . Esto es tan marcado que en el SONL se puede prescindir completamente del acoplamiento vectorial para ajustar las condiciones de saturación de la materia nuclear.

La modificación de la dinámica del sistema queda reflejada en una sensible disminución de los acoplamientos directos nucleón- mesón comparados con los correspondientes al QHD-I. Así por ejemplo las combinaciones C_s, C_v propias de la ACM varían como se indica en la Tabla 4.6.

Esta característica tendría importantes implicaciones para la introducción de correcciones más allá de la ACM. En particular la interpretación desde el enfoque de la ATP resulta interesante: cuanto mayor es la complejidad física de la solución de partida, menores son los acoplamientos de la fase no perturbativa y en consecuencia disminuye la discontinuidad en la transición a la fase perturbativa.

El modo de implementar estos cambios es esencialmente distinto en los dos casos. En el SONL se recurre a una autointeracción del campo escalar, esto afecta a los restantes campos sólo al nivel de las ecuaciones de movimiento. Un consiguiente aumento en el número de parámetros libres es necesario. En cambio en el ZM (nos referimos a la versión escaleada

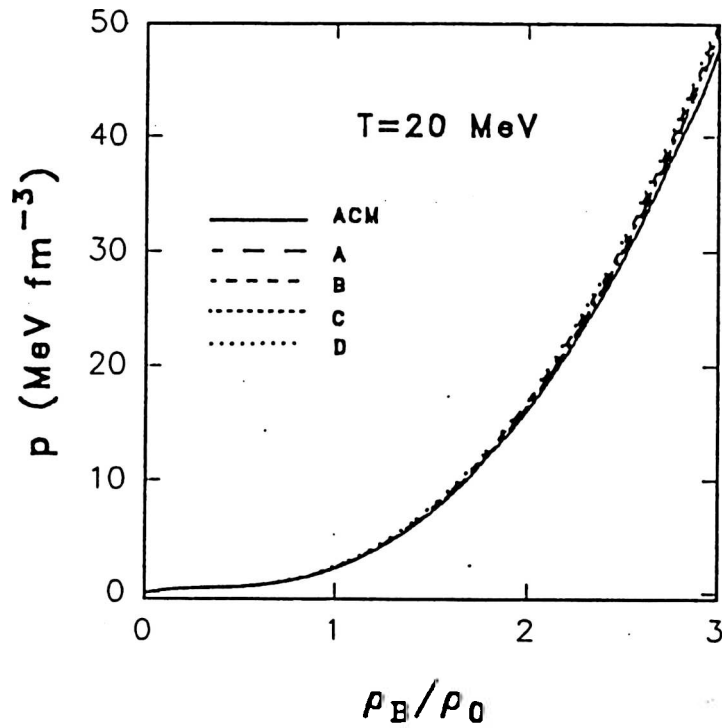


FIGURA 4.19 La presión como función de la densidad para el modelo QHD-I a $T=20$ MeV. Se comparan el resultado de la ACM con los de la ATP. Este último caso se ha evaluado usando distintos conjuntos de acoplamientos A-D.

\mathcal{L}_{ZM}) se propone un vértice directo nucleón-mesón escalar, pero en una forma altamente no lineal. Es sorprendente que a pesar del reducido número de parámetros ajustables, este modelo resulte capaz de reproducir adecuadamente gran parte de la fenomenología de la materia y de la superficie nucleares.

Inmediatamente surge el cuestionamiento de si ésta es una propiedad intrínseca de la física del modelo o bien un resultado de la aproximación empleada. Esto es analizado empleando la ATP en la sección final del presente Capítulo. Allí se concluye que la solución proporcionada por la ACM es esencialmente estable frente a los efectos de densidad y temperatura elevadas. Ambos se refuerzan mutuamente sobre la interacción residual, produciendo la disminución de los acoplamientos efectivos.

El posible campo de variación de las constantes perturbativas g'_{s0} , g'_{v0} resulta mucho más

	C_s	C_v	m_s (MeV)	m_v (MeV)	ρ_0 (fm^{-3})
QHD-I	16.34	13.99	550	783	0.1934
SONL	8.00	1.00	250	783	0.1920
ZM	11.95	6.82	550	783	0.1934

Tabla 4.6 Comparación de los parámetros de los modelos QHD-I, SONL y ZM ajustados para reproducir las condiciones de saturación.

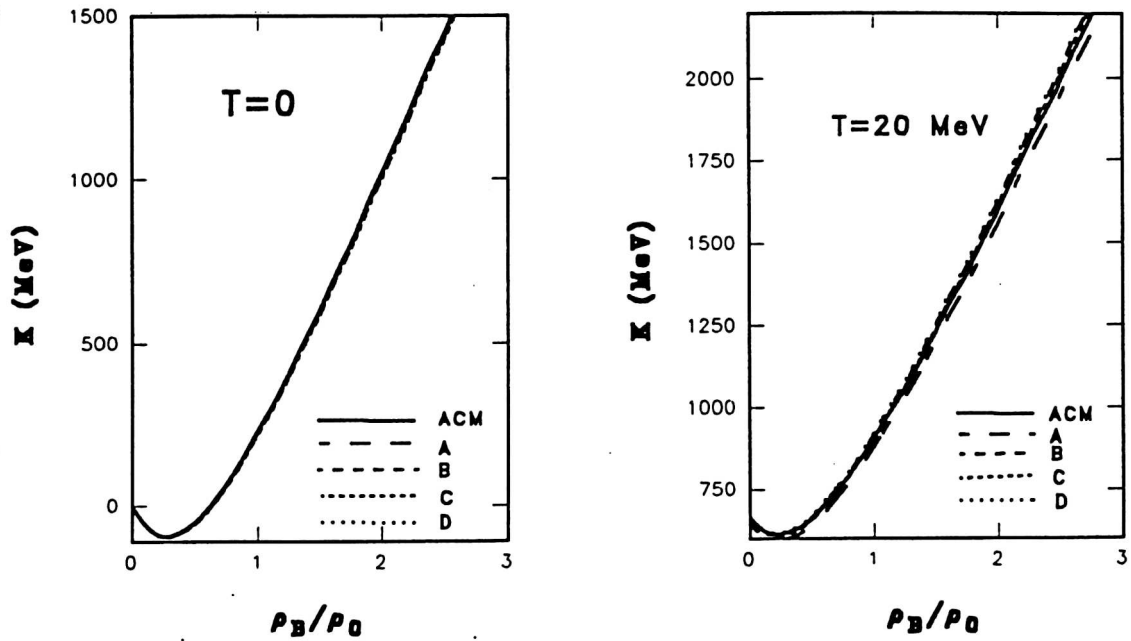


FIGURA 4.20 La compresibilidad κ como función de la densidad para los distintos casos perturbativos. La figura de la izquierda corresponde al caso $T=0$, en tanto que la de la derecha a la temperatura $T=20$ MeV.

reducido que en el caso del QHD-I tratado en la ATP. Esto puede interpretarse en el sentido de que la descripción de la ACM es más satisfactoria y consistente en el ZM que en el QHD-I, debido al mayor contenido físico de la primera respecto de la segunda.

Resta por responder si la aplicación del ZM a núcleos finitos es inadecuada o bien los desajustes observados pueden ser subsanados por correcciones más allá de la ACM. El estudio de esta posibilidad, bajo el enfoque de la ATP será objeto de un futuro análisis.

Apéndice A

Dado que el generador \hat{G} satisface las hipótesis del teorema de descomposición, puede expresarse de manera bilineal en los operadores de creación y aniquilación. Sin embargo términos lineales no son admisibles en \hat{G} [37]. En consecuencia la forma mas general es

$$\hat{G} = \int d^3k \sum_1^4 \theta_i(k) \hat{G}_i(k) \quad (\text{A.1})$$

con

$$\hat{G}_1(k) = i \left(a(k)\bar{a}(k) - a^\dagger(k)\bar{a}^\dagger(k) \right)$$

$$\hat{G}_2(k) = i \left(a(k)\bar{a}(k) + a^\dagger(k)\bar{a}^\dagger(k) \right)$$

$$\hat{G}_3(k) = i \left(a^\dagger(k)a(k) + \bar{a}^\dagger(k)\bar{a}(k) \right)$$

$$\hat{G}_4(k) = a^\dagger(k)a(k) - \bar{a}^\dagger(k)\bar{a}(k)$$

El operador \hat{G}_4 es proporcional a \hat{H}_0 , conmuta con los restantes y no tiene efecto sobre el vacío, por lo tanto puede omitírsele de la forma general (A.1).

Apéndice B

La demostración para fermiones es como sigue :

$$A = a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_m}^\dagger a_{q_1} \dots a_{q_n} | 0(\theta) \rangle$$

Usando la transformación dual puede reemplazarse a_{q_n} por $\tan\theta_q \tilde{a}_{q_n}^\dagger$ y anticonmutar reiteradamente hasta llevarlo a la izquierda de $a_{p_1}^\dagger$, esto genera un factor de $(-1)^{m+n-1}$. Se repite el procedimiento con cada uno de los a_q , así se obtiene el factor

$$z = (-1)^{(m+n-1)+(m+n-2)+\dots+m}$$

$$A = z \tan\theta_{q_n} \tilde{a}_{q_n}^\dagger \dots \tan\theta_{q_1} \tilde{a}_{q_1}^\dagger a_{p_1}^\dagger \dots a_{p_m}^\dagger | 0(\theta) \rangle \quad (\text{B.1})$$

Cada uno de los a_p^\dagger puede reemplazarse por un \tilde{a}_p mediante la transformación dual y a su tiempo llevarlo a la izquierda de los restantes a_p^\dagger generando un factor $z' = (-1)^{m+(m-1)+\dots+1}$. Llamando $b = z z'$, resulta

$$A = b \tan\theta_{q_n} \tilde{a}_{q_n}^\dagger \dots \tan\theta_{q_1} \tilde{a}_{q_1}^\dagger (-\cotan\theta_{p_m}) \tilde{a}_{p_m} \dots (-\cotan\theta_{p_1}) a_{p_1}^\dagger | 0(\theta) \rangle$$

insertando (2.26) se obtiene

$$A = b e^{\tilde{K}/2} \tilde{a}_{q_n}^\dagger \dots \tilde{a}_{q_1}^\dagger \tilde{a}_{p_m} \dots \tilde{a}_{p_1} e^{-\tilde{K}/2} | 0(\theta) \rangle$$

Multiplicando miembro a miembro por $e^{-\tilde{K}/2}$ resulta

$$e^{-\tilde{K}/2} A = b \tilde{a}_{q_n}^\dagger \dots \tilde{a}_{p_1} | 0(\theta) \rangle$$

Multiplicando por $C(p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n)$ y sumando sobre todos los índices se llega al resultado esperado.

Una deducción similar puede seguirse para bosones.

Apéndice C

Para demostrar 2.32 consideraremos los productos retardado $R\{A(t), B(t')\}$ y causal $T\{A(t), B(t')\}$ de los operadores A y B en la representación de Heisenberg

$$\begin{aligned} R\{A(t)B(t')\} &= \Theta(t-t')[A(t), B(t')]_{\pm} \\ T\{A(t)B(t')\} &= \Theta(t-t')A(t)B(t') \mp \Theta(t'-t)B(t')A(t) \end{aligned}$$

A partir de esta definición resulta

$$R\{A(t)B(t')\} = T\{A(t)B(t')\} \pm B(t')A(t)$$

Por lo tanto las correspondientes funciones de Green retardada y causal están relacionadas mediante

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | R\{A(t)B(t')\} | 0(\theta) \rangle &= \langle 0(\theta) | T\{A(t)B(t')\} | 0(\theta) \rangle \\ &\pm \langle 0(\theta) | B(t')A(t) | 0(\theta) \rangle \end{aligned} \quad (C.1)$$

es decir

$$iG_R(A, B) = iG_c(A, B) \pm \langle 0(\theta) | B(t')A(t) | 0(\theta) \rangle$$

donde se han empleado las definiciones de las funciones de Green térmicas

$$\begin{aligned} iG_R(A(t), B(t')) &= \langle 0(\theta) | R\{A(t)B(t')\} | 0(\theta) \rangle \\ iG_c(A(t), B(t')) &= \langle 0(\theta) | T\{A(t)B(t')\} | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Aplicando el resultado (2.30) para $B(t')$ en el último término de (C.1)

$$\begin{aligned} iG_R(A(t), B(t')) &= iG_c(A(t), B(t')) \pm \\ &(-1)^{(N_B-1)N_B/2} \langle 0(\theta) | \tilde{B}^\dagger(t') e^{\hat{K}/2} A(t) | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Usando que $\hat{K} |0(\theta)\rangle = 0$ y que los operadores físicos y tilde conmutan o anticonmutan entre sí pueden obtenerse la siguiente serie de igualdades

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta) | \tilde{B}^\dagger e^{\hat{K}/2} &= \langle 0(\theta) | e^{-\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{\hat{K}/2} \\ &= \langle 0(\theta) | e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2} (\pm 1)^{N_B} \end{aligned}$$

De aquí resulta

$$\begin{aligned} iG_R(A(t), B(t')) &= iG_c(A(t), B(t')) \\ &\pm (-1)^{(N_B+1)N_B/2} \langle 0(\theta) | e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger(t') e^{-\hat{K}/2} A(t) | 0(\theta) \rangle \end{aligned}$$

Ya que en última instancia $A(t)$ conmuta o anticonmuta con el resto de los operadores tilde se obtiene

$$\begin{aligned} e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2} A &= e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2} [\Theta(t-t') + \Theta(t'-t)] A \\ &= T \{ e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2}, A \} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} iG_R(A(t), B(t')) &= iG_c(A(t), B(t')) \pm \\ &(-1)^{(N_B+1)N_B/2} iG_c(e^{\hat{K}/2} \tilde{B}^\dagger e^{-\hat{K}/2}, A(t)) \end{aligned}$$

Apéndice D

Por definición el propagador exacto para nucleones viene dado por

$$\begin{aligned}
 iG_{\alpha\beta}^{(ab)}(x-y) &= \langle 0(\theta) | T \psi_{\alpha}^{(a)}(x) \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(y) | 0(\theta) \rangle \\
 &= \Theta(x_0 - y_0) \langle 0(\theta) | e^{i\hat{P}x} \psi_{\alpha}^{(a)}(0) e^{-i\hat{P}(x-y)} \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(0) e^{-i\hat{P}y} | 0(\theta) \rangle \\
 &\quad - \Theta(y_0 - x_0) \langle 0(\theta) | e^{i\hat{P}y} \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(0) e^{-i\hat{P}(y-x)} \psi_{\alpha}^{(a)}(0) e^{-i\hat{P}x} | 0(\theta) \rangle \quad (D.1)
 \end{aligned}$$

donde \hat{P} es el generador de las traslaciones espacio-temporales, que satisface $\hat{P} | 0(\theta) \rangle = 0$.

Insertando la identidad $\sum_{nn'mm'} | nn'mm' \rangle \langle nn'mm' | = 1$, donde los vectores de estado son creados por $(c_{ps}^{\dagger}(\theta))^n$, $(d_{ps}^{\dagger}(\theta))^{n'}$, $(\bar{c}_{ps}^{\dagger}(\theta))^m$, $(\bar{d}_{ps}^{\dagger}(\theta))^{m'}$ actuando sobre el vacío térmico.

Por lo tanto (D.1) puede escribirse

$$\begin{aligned}
 i G_{\alpha\beta}^{(ab)}(x-y) &= \\
 \theta(x_0 - y_0) &\sum_{MN} e^{-i(p_N - p_M)(x-y)} \langle 0(\theta) | \psi_{\alpha}^{(a)}(0) | N\tilde{M} \rangle \langle N\tilde{M} | \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(0) | 0(\theta) \rangle \\
 -\theta(y_0 - x_0) &\sum_{MN} e^{-i(p_N - p_M)(y-x)} \langle 0(\theta) | \bar{\psi}_{\beta}^{(b)}(0) | N\tilde{M} \rangle \langle N\tilde{M} | \psi_{\alpha}^{(a)}(0) | 0(\theta) \rangle \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

donde hemos simplificado la notación reemplazando $(n, n') \rightarrow N$; $(m, m') \rightarrow M$.

Usando la representación integral de la función de Heaviside (D.3) puede escribirse en el espacio de impulsos como

$$G_{\alpha\beta}^{(ab)}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dw \left[\frac{\sigma_{1\alpha\beta}^{(ab)}(w, \mathbf{p})}{p_0 - w + i\epsilon} + \frac{\sigma_{2\alpha\beta}^{(ab)}(w, \mathbf{p})}{p_0 - w - i\epsilon} \right]$$

donde se ha usado

$$\begin{aligned}\sigma_{1\alpha\beta}^{(ab)}(p) &= (2\pi)^3 \sum_{MN} \langle 0(\theta) | \psi_\alpha^{(a)}(0) | N, \tilde{M} \rangle \langle N, \tilde{M} | \bar{\psi}_\beta^{(b)}(0) | 0(\theta) \rangle \\ &\quad \times \delta^4(p - p_N + p_M) \\ \sigma_{2\alpha\beta}^{(ab)}(p) &= (2\pi)^3 \sum_{MN} \langle 0(\theta) | \bar{\psi}_\beta^{(b)}(0) | N, \tilde{M} \rangle \langle N, \tilde{M} | \psi_\alpha^{(a)}(0) | 0(\theta) \rangle \\ &\quad \times \delta^4(-p - p_N + p_M)\end{aligned}$$

junto con $P | N, \tilde{M} \rangle = p_N | N, \tilde{M} \rangle$, $\bar{P} | N, \tilde{M} \rangle = -p_M | N, \tilde{M} \rangle$.

Empleando la condición de estado térmico (2.30) y su dual, evaluadas para los campos $\psi, \bar{\psi}$, se obtienen las relaciones

$$\begin{aligned}\langle 0(\theta) | \psi^{(2)}(0) | N, \tilde{M} \rangle &= -e^{-\beta(E_N - E_M - \mu)/2} \langle 0(\theta) | \psi^{(1)}(0) | N, \tilde{M} \rangle \\ \langle 0(\theta) | \bar{\psi}^{(1)}(0) | N, \tilde{M} \rangle &= -ie^{\beta(E_N - E_M + \mu)/2} \langle M, \tilde{N} | \bar{\psi}^{(1)}(0) | 0(\theta) \rangle \\ \langle 0(\theta) | \bar{\psi}^{(2)}(0) | N, \tilde{M} \rangle &= -i \langle M, \tilde{N} | \bar{\psi}^{(1)}(0) | 0(\theta) \rangle \\ \langle N, \tilde{M} | \bar{\psi}^{(2)}(0) | 0(\theta) \rangle &= -e^{-\beta(E_N - E_M - \mu)/2} \langle N, \tilde{M} | \bar{\psi}^{(1)}(0) | 0(\theta) \rangle \\ \langle N, \tilde{M} | \psi^{(1)}(0) | 0(\theta) \rangle &= ie^{\beta(E_N - E_M + \mu)/2} \langle 0(\theta) | \psi^{(1)}(0) | M, \tilde{N} \rangle \\ \langle N, \tilde{M} | \psi^{(2)}(0) | 0(\theta) \rangle &= i \langle 0(\theta) | \psi^{(1)}(0) | M, \tilde{N} \rangle\end{aligned}$$

Además introduciendo la función espectral como

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(p) &= (2\pi)^3 \left(1 + e^{-\beta(p_0 - \mu)}\right) \sum_{MN} \delta^4(p - p_N + p_M) \langle 0(\theta) | \psi^{(1)}(0) | N, \tilde{M} \rangle \\ &\quad \langle N, \tilde{M} | \bar{\psi}_\beta^{(1)}(0) | 0(\theta) \rangle\end{aligned}$$

puede escribirse

$$\begin{aligned}\sigma_{1\alpha\beta}^{(ab)}(p) &= \rho_{\alpha\beta}(p) A_F^{(ab)}(p_0) \\ \sigma_{2\alpha\beta}^{(ab)}(p) &= \rho_{\alpha\beta}(p) B_F^{(ab)}(p_0)\end{aligned}$$

donde se emplearon las definiciones ($x = \beta(p_0 - \mu)$)

$$\begin{aligned}A_F^{(ab)}(p_0) &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-x/2} \\ -e^{-x/2} & e^{-x} \end{bmatrix} \\ B_F^{(ab)}(p_0) &= \frac{1}{1 + e^{-x}} \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-x/2} \\ e^{-x/2} & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Usando las identidades

$$\frac{\theta(\pm p_0)}{p_0 - w + i\epsilon} = \theta(\pm p_0) \left[\frac{\theta(w)}{p_0 - w \pm i\epsilon} + \frac{\theta(-w)}{p_0 - w \mp i\epsilon} \right]$$

$$\frac{\theta(\pm p_0)}{p_0 - w - i\epsilon} = \theta(\pm p_0) \left[\frac{\theta(w)}{p_0 - w \mp i\epsilon} + \frac{\theta(-w)}{p_0 - w \pm i\epsilon} \right]$$

y con la definición (2.50) se encuentra finalmente

$$G_{\alpha\beta}^{(ab)} = \bar{G}_{\alpha\beta}(p) \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_{p_0} & -\text{sen} 2\theta_{p_0}/2 \\ -\text{sen} 2\theta_{p_0}/2 & \text{sen}^2 \theta_{p_0} \end{bmatrix}^{(ab)} + \bar{G}_{\alpha\beta}^*(p) \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \theta_{p_0} & \text{sen} 2\theta_{p_0}/2 \\ \text{sen} 2\theta_{p_0}/2 & \cos^2 \theta_{p_0} \end{bmatrix}^{(ab)}$$

con el parámetro θ_{p_0} definido en (2.38),(2.39). A partir de aquí es inmediato llegar a la forma (2.49).

Apéndice E

Con el propósito de evaluar I_{s_0} (3.14) consideraremos inicialmente el caso de partícula libre, que puede obtenerse tomando $V = 0$. Es decir, se desea evaluar

$$\tilde{I}_s = \int \mathcal{D}s \exp \left\{ \frac{1}{2} i \int d^4x [s(-\square - m_s^2 + i\eta)s + 2\zeta s] \right\} \quad (\text{E.1})$$

Para ello usaremos el procedimiento convencional [85] de pasar del espacio continuo a una red discreta. En consecuencia sólo se consideran aquellos campos clásicos $s(x)$ tales que, al igual que sus derivadas, varían suavemente en el espacio-tiempo.

El dominio de integración en (E.1) se descompone en cubos de dimensión $\Delta V = \epsilon^4$, a cada uno de ellos se asigna un índice n . A su vez el campo $s(x)$ y su variación $\delta s(x)$ pueden reemplazarse por cierto promedio $s_n(x), \delta s_n(x)$ sobre el n -ésimo cubo. En este contexto la medida de integración $\mathcal{D}s$ puede obtenerse en el límite en que el número total de cubos $N \rightarrow \infty$, mientras que $\epsilon \rightarrow 0$.

Entonces (E.1) puede escribirse

$$\tilde{I}_s = \lim \int \prod_n^N ds_n \exp \left\{ \frac{1}{2} i \sum_n^N \epsilon^4 \left[\epsilon^4 \sum_l^N s_n K_{nl} s_l + 2\zeta_n s_n \right] \right\} \quad (\text{E.2})$$

De esta expresión, comparando con (E.1) puede obtenerse la expresión para K_{nl} en el límite considerado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_l^N s_n K_{nl} s_l \epsilon^4 = \frac{1}{2} s(x) (-\square - m_s^2 + i\eta) s(x)$$

por lo tanto

$$\lim K_{nl} = (-\square_x - m_s^2 + i\eta) \delta^4(x - y)$$

En (E.2) se tiene un producto de N integrales gaussianas, que pueden evaluarse para dar

$$\tilde{I}_s = \lim (\det K)^{-1/2} (2\pi i / \epsilon^4)^{\frac{N}{2}} \exp(-\frac{1}{2} i \zeta^t K^{-1} \zeta)$$

Por definición se tiene $\sum_m K_{nm} K_{mi}^{-1} = \delta_{ni}$ en el límite $N \rightarrow \infty$ resulta

$$\int d^4 z (-\square_x - m_s^2 + i\eta) \delta^4(x-z) K^{-1}(x,y) = \delta^4(x-y)$$

Por lo tanto $K^{-1}(x,y)$ debe identificarse con la función de Green correspondiente al operador diferencial $-\square + m_s^2 - i\eta$, es decir con el propagador de Feynman $\Delta^0(x-y)$ para partícula libre.

Puede escribirse finalmente

$$\tilde{I}_s = \tilde{I}_{s0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \int d^4 x d^4 y \zeta(x) \Delta^0(x,y) \zeta(y) \right\} \quad (\text{E.3})$$

donde $\tilde{I}_{s0} = \lim (\det K)^{-1/2} (2\pi i / \epsilon^8)^{N/2}$ es independiente de la fuente $\zeta(x)$ y puede ser considerada como constante de normalización

Volviendo a (3.14) notamos que esta difiere de E.1 en un término adicional $V''(\phi_0)$ al operador $\square + m_s^2 - i\eta$. Si consideramos sólo configuraciones uniformes y estáticas para ϕ_0 entonces dicho término adicional puede asimilarse a la definición de una masa efectiva: $m_s^2 \rightarrow m_s^2 + V''(\bar{\sigma})$ que intervendrá modificando el propagador de partícula libre llevándolo a su forma (3.15). Por lo tanto (3.14) presenta el mismo factor exponencial (E.3) con (3.15) en vez de Δ^0 . En cambio el factor de normalización contiene ahora $\det^{-1/2} K'$ donde $K'(x,y) = -(\square + m_s^2 + V''(\bar{\sigma}) + i\eta) \delta^4(x-y)$.

A continuación evaluaremos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\det^{1/2} K}{\det^{1/2} K'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{2} \text{tr} \ln K K'^{-1} \right)$$

Usando la discretización del espacio-tiempo puede evaluarse

$$K K'^{-1} = \int d^4 z K(x-z) \Delta(z-y) = \delta^4(x-y) - V''(\bar{\sigma}) \Delta(x-y)$$

En su forma discreta esto es equivalente a $(K K'^{-1})_{mn} = \delta_{mn} - \epsilon^4 \Delta_{mn} V''(\bar{\sigma})$. Tomando logaritmo y realizando una expansión en serie de Taylor

$$\ln(K K'^{-1})_{mn} = - \sum_{n=1}^{\infty} m \frac{1}{n} (\epsilon^4 \Delta_{mn} V''(\bar{\sigma}))$$

que en el límite puede interpretarse como

$$\text{tr} \ln(K K'^{-1}) = \int d^4 z \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(1 - V''(\bar{\sigma}) \Delta(p)) \quad (\text{E.4})$$

En base a la discusión previa y reuniendo (E.3)-(E.4) se tiene finalmente

$$I_s = \tilde{I}_{s0} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 z \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln[1 - V''(\bar{\sigma}) \Delta(p)] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \zeta(x) \Delta(x-y) \sigma(y) \right\}$$

El mismo tipo de discusión es aplicable a (3.16); pero como no se ha supuesto una autointeracción del campo w_μ , es suficiente el análogo de (E.3)-(E.4), de lo cual se obtiene (3.16).

La integral de camino para los bariones introduce el uso de elementos del álgebra de Grassman $\eta(x), \bar{\eta}(x)$. La evaluación de (3.19) para campos uniformes $\bar{\sigma}$ se reduce al caso correspondiente a partícula libre con una masa efectiva $M \rightarrow M - g_s \bar{\sigma}$. Empleando resultados generales para integrales de camino fermiónicas ([39]) se obtiene

$$\tilde{I}_B = \tilde{I}_{B0} \exp \left\{ -i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) G_F^0 \eta(y) \right\}$$

donde \tilde{I}_{B0} es proporcional al determinante de $K_0 = (i \not{\partial}_x - M) \delta^4(x-y)$. Por otra parte (3.17), contendrá un factor de normalización proporcional al determinante de $K(x,y) = (i \not{\partial}_x - \gamma_\mu \bar{\omega}^\mu - M + g_s \bar{\sigma}) \delta^4(x-y)$. Siguiendo el procedimiento delineado previamente puede evaluarse

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\det K_0}{\det K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp [tr \ln(K_0 K^{-1})]$$

que resulta ser

$$\exp \left\{ \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr \ln \left(1 + \frac{g_s \not{p} - g_s \bar{\sigma}}{\not{p} - M + g_s \bar{\sigma} + i\epsilon} \right) \right\}$$

Reuniendo todos estos elementos se llega a (3.19).

Apéndice F

A fin de llevar a cabo el reemplazo $(\sigma, \omega^\mu) \rightarrow (\bar{\sigma}, \bar{\omega}^\mu)$ se propone la descomposición

$$\bar{\sigma} = \sigma + \sigma_1 \quad \bar{\omega} = \omega + \omega_1$$

donde σ_1, ω_1 cancelan las correcciones cuánticas contenidas en σ, ω y deben ser al menos $O(\hbar)$. Luego se realiza una expansión del lado derecho de (3.26) en torno de σ . Manteniendo solamente el orden $O(\hbar)$ es suficiente realizar directamente el reemplazo indicado en $W^{(2)}$ sin generar términos adicionales.

Reagrupando términos en (3.26) puede escribirse

$$\Gamma^{(2)}[\sigma, \omega] = S_0 + \int d^4x [j(x)\sigma_1(x) + J_\mu(x)\omega_1^\mu(x)] + W^{(1)}[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] + W^{(2)}[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] \quad (\text{F.1})$$

Usando la siguiente relación

$$-\frac{\delta S_0}{\delta \sigma(x)}[\sigma = \bar{\sigma}] = (\square + m_s^2)\bar{\sigma} + V'(\bar{\sigma}) = j(x) \quad (\text{F.2})$$

$$-\frac{\delta S_0}{\delta \omega_\mu(x)}[\omega = \bar{\omega}] = \partial_\nu \bar{F}^{\nu\mu} + \frac{1}{2}m_v^2\bar{\omega}^\mu = J^\mu(x) \quad (\text{F.3})$$

puede verse que el segundo término de (F.1) cancela el término lineal en la expansión

$$\begin{aligned} S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] &= S_0[\sigma, \omega] + \int d^4x \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\sigma}(x)}[\sigma = \bar{\sigma}]\sigma_1(x) + \int d^4x \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\omega}^\mu(x)}[\omega = \bar{\omega}]\omega_1^\mu \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S_0}{\delta \sigma(y)\delta \sigma(x)}\sigma_1(y)\sigma_1(x) + \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S_0}{\delta \sigma(y)\delta \omega^\mu(x)}\sigma_1(y)\omega_1^\mu(x) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S_0}{\delta \omega^\mu(y)\delta \omega^\nu(x)}\omega_1^\mu(y)\omega_1^\nu(x) + O(\hbar^3) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Como $S_0[\bar{\sigma}, \bar{\omega}^\mu]$ no acopla $\bar{\sigma}$ con $\bar{\omega}$ la derivada funcional cruzada es nula. Además usando (F.2), (F.3) se tiene que

$$\frac{\delta^2 S_0}{\delta \bar{\sigma}(y) \delta \bar{\sigma}(x)} = -\frac{\delta j(x)}{\delta \bar{\sigma}(y)} \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\delta^2 S_0}{\delta \bar{\omega}^\mu(y) \delta \bar{\omega}^\nu(x)} = -\frac{\delta J^\nu(x)}{\delta \bar{\omega}^\mu(y)} \quad (\text{F.6})$$

Por otro lado usando (3.5) resulta $\sigma(x) = \frac{\delta W_0}{\delta j(x)} + \frac{\delta W^{(1)}}{\delta j(x)} + \frac{\delta W^{(2)}}{\delta j(x)}$. El primer término es $O(\hbar)$ y puede identificarse con $\bar{\sigma}$, por lo tanto los restantes representan a $-\sigma_1$. El último término es $O(\hbar^2)$ y puede omitirse de aquí en mas. Suponiendo que puede determinarse la dependencia funcional $j = j[\bar{\sigma}]$, puede escribirse

$$-\sigma_1(x) = \int d^4x \frac{\delta \bar{\sigma}(y)}{\delta j(x)} \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(y)} [\bar{\sigma}, \bar{\omega}] \quad (\text{F.7})$$

Pero (F.5) es equivalente a

$$-\frac{\delta j(x)}{\delta \bar{\sigma}(y)} = -[\square + m_s^2 + V''(\bar{\sigma})] \delta^4(x-y) = \delta^{-1}(x-y)$$

En consecuencia (F.7) es

$$\sigma_1(x) = \int d^4y \Delta(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(y)} \quad (\text{F.8})$$

Insertando (F.5) y (F.7) en el término $O(\hbar^2)$ de (F.4) se obtiene

$$\int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S_0}{\delta \bar{\sigma}(y) \delta \bar{\sigma}(x)} \sigma_1(x) \sigma_1(y) = \int d^4x d^4y \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(y)}$$

Un resultado similar rige para la contribución vectorial

$$\omega_1^\mu(x) = \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\omega}^\nu(y)} \quad (\text{F.9})$$

$$\int d^4x d^4y \frac{\delta^2 S_0}{\delta \bar{\omega}^\mu(y) \delta \bar{\omega}^\nu(x)} [\sigma, \omega] \omega_1^\mu(x) \omega_1^\nu(y) = \int d^4x d^4y \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\omega}^\nu(x)} D^{\mu\nu}(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\omega}^\mu(y)} \quad (\text{F.10})$$

Insertando (F.8) y (F.9) resulta

$$W^{(1)}[\bar{\sigma}, \bar{\omega}] = W^{(1)}[\sigma, \omega] + \int d^4x d^4y \left[\frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\sigma}(y)} + \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\omega}^\mu(x)} D^{\mu\nu}(x-y) \frac{\delta W^{(1)}}{\delta \bar{\omega}^\nu(y)} \right] + O(\hbar^3) \quad (\text{F.11})$$

Reuniendo todos estos resultados parciales en (3.26) se obtiene finalmente (3.27).

Apéndice G

a) En la evaluación de las integrales que definen la autoenergía mediante el término de intercambio interviene la función

$$\delta(q^2 + E'^2 \mp 2q_0E + 2pp'\nu - m^2) \quad (G.1)$$

donde p_μ es el impulso externo y p'_μ es la variable de integración; $q_\mu = p_\mu - p'_\mu$, $p = |\mathbf{p}|$, $p' = |\mathbf{p}'|$, $E = \sqrt{p'^2 + M^{*2}}$; ν es el coseno del ángulo entre \mathbf{p} y \mathbf{p}' y m representa una cualquiera de las masas de los mesones.

La fórmula (G.1) puede reescribirse como

$$\frac{1}{2pp'} \delta\left(\nu + \frac{q^2 + E^2 \mp 2q_0E - m^2}{2pp'}\right) \theta\left(1 - \frac{|q^2 + E^2 \mp 2q_0E - m^2|}{2pp'}\right) \quad (G.2)$$

La función de Heaviside hace explícito el carácter acotado de ν .

De (G.1) puede verse que en el caso $p' = 0$ la función delta es independiente de las variables de integración: $\delta(q^2 + M^{*2} \mp 2q_0M^* - m^2)$ cuando $p' \rightarrow 0$. Sin embargo en este caso la integral da contribución nula debido a la medida de integración $dp' p'^2/p' \rightarrow 0$.

A continuación estudiaremos la función de Heaviside en (G.2), distinguiendo por un subíndice \pm según la elección del signo realizada en (G.1)

$$\theta_\pm = \theta(1 - |q_0(E - E_0)|/pp') \quad (G.3)$$

con $E_0 = (q^2 + M^{*2} - m^2)/2q_0$.

Esta función es nula solamente si

$$|q_0(E - E_0)| < pp' \Rightarrow q^2 E^2 \pm 2E_0 E q_0^2 + q_0^2 E_0^2 + M^{*2} p^2 < 0$$

Suponiendo $q^2 \neq 0$ la última desigualdad puede reescribirse

$$q^2(E - E_\pm^a)(E - E_\pm^b) < 0 \quad (G.4)$$

con $E_\pm^a = \mp q_0^2 E_0 / q^2 - \sqrt{\Delta}$, $E_\pm^b = \mp q_0^2 E_0 / q^2 + \sqrt{\Delta}$, $\Delta = p^2(q_0^2 E_0^2 - M^{*2} q^2) / q^4$. Teniendo en cuenta que $E \geq M^*$ por construcción, la relación (G.4) establece condiciones sobre la

Caso	$q^2, q_0 > 0$	$q^2, q_0 < 0$	$q^2 < 0, q_0^2 E_0 + M^* q^2 < 0$	$q^2 < 0, q_0^2 E_0 + M^* q^2 > 0$
E_+^a	menor	mayor	menor	menor
E_+^b	mayor	mayor	mayor	mayor
E_-^a	mayor	mayor	menor	menor
E_-^b	mayor	menor	mayor	mayor

posible variación de E. Si $q^2 > (q_0 E_0 / M^*)^2$ entonces $\Delta < 0$. Puede verificarse haciendo $q_0^2 E_0^2 = \alpha M^{*2} q^2$ con $\alpha < 1$, que la forma cuadrática $(E - E^a)(E - E^b)$ es definida positiva y por lo tanto no se cumple (G.4) y la función (G.3) es nula.

Si $\Delta > 0$ entonces las raíces E^a, E^b establecen las cotas de variación de E. En el caso $q^2 > 0$ resultará $E^a < E < E^b$, al contrario si $q^2 < 0$ entonces se tiene el dominio infinito $(-\infty, E^a) \cup (E^b, \infty)$. Dado que $\Delta = [q^2 - (M^* - m)^2][q^2 - (M^* + m)^2]$, la condición $\Delta > 0$ se satisface siempre que $q^2 \in (-\infty, (M^* - m)^2) \cup ((M^* + m)^2, \infty)$.

Además se encuentra que las cotas E^a, E^b cumplen las relaciones de desigualdad respecto de M^* indicadas en la tabla.

Reuniendo todos los resultados parciales puede escribirse

$$\begin{aligned}\theta_+ &= \theta(-q^2)\theta(E - E_+^a) + \{\theta[q^2 - (M^* + m)^2] + \theta(q^2)\theta[(M^* - m)^2 - q^2]\} \\ &\quad \times \theta(-q_0)\theta(E - E_+^a)\theta(E_+^b - E) \\ \theta_- &= \theta(-q^2)\theta(E - E_+^b) + \{\theta[q^2 - (M^* + m)^2] + \theta(q^2)\theta[(M^* - m)^2 - q^2]\} \\ &\quad \times \theta(q_0)\theta(E - E_-^a)\theta(E_-^b - E)\end{aligned}$$

El caso $q_0 = 0, q^2 \neq 0$ queda contemplado en la situación $q^2 < 0$. En este caso las funciones θ_+, θ_- coinciden.

Por último el caso $q^2 = 0$ puede obtenerse como caso límite de una cualquiera de ellas. Por ejemplo, escribiendo

$$E_+^b = -\frac{q^2 + M^{*2} - m^2}{2(q_0 - p)} + \frac{M^{*2}p}{q^2 + M^{*2} - m^2} - q^2(q^2 + M^{*2} - m^2)F(q^2)$$

donde $F(q^2)$ es no nula y finita para $q^2 \rightarrow 0$. En el límite los dos últimos términos contribuyen con $2M^{*2} |q_0| / (M^{*2} - m^2)$. Para el primer sumando debe tenerse en cuenta que $q^2 < 0$ si $q_0 < 0$. Tomando $p \rightarrow -q_0$ resulta $q_0 - p \rightarrow 2q_0 < 0$. En cambio si $q_0 > 0$ cuando $p \rightarrow q_0, q_0 - p \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$E_+^b \rightarrow \begin{cases} \frac{m^2 - M^{*2}}{4q_0} + \frac{m^{*2}q_0}{m^2 - M^{*2}} & q_0 < 0 \\ +\infty & q_0 > 0 \end{cases}$$

De la misma manera se demuestra que

$$E_-^b \rightarrow \begin{cases} -\frac{m^2 - M^{*2}}{4q_0} - \frac{m^{*2}q_0}{m^2 - M^{*2}} & q_0 > 0 \\ +\infty & q_0 < 0 \end{cases}$$

Cuando $E^b \rightarrow +\infty$ no hay contribución de las integrales ya que debe ser $E > E^b$.
b) La fórmula (3.35) puede escribirse

$$-i\Sigma_{\epsilon\alpha\beta}^{(11)}(p) = g_s^2(I_a + I_b + I_c + I_d) + g_v^2(J_a + J_b + J_c + J_d)$$

donde

$$\begin{aligned} I_a &= -2\pi i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + M^*}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \delta[(p-p')^2 - m_s^2] \operatorname{senh}^2 \phi_{p_0-p'_0} \\ I_b &= 2\pi i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + M^*}{(p-p')^2 - m_s^2 + i\epsilon} \delta[q^2 - M^{*2}] \operatorname{sen}^2 \theta_{p'_0} \\ I_c &= 4\pi^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{q} + M^*) \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p-p')^2 - m_s^2] \operatorname{senh} 2\phi_{p_0-p'_0} \operatorname{sen} 2\theta_{p'_0} \\ I_d &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} + M^*}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \frac{1}{(p-p')^2 - m_s^2 + i\epsilon} \\ J_a &= -2\pi i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{q} + M^*}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \gamma_\nu \xi^{\mu\nu} \delta[(p-p')^2 - m_v^2] \operatorname{senh}^2 \phi_{p_0-p'_0} \\ J_b &= 2\pi i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{q} + M^*}{(p-p')^2 - m_v^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \xi^{\mu\nu} \delta[q^2 - M^{*2}] \operatorname{sen}^2 \theta_{p'_0} \\ J_c &= 4\pi^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu (\not{q} + M^*) \gamma_\nu \xi^{\mu\nu} \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p-p')^2 - m_v^2] \\ &\quad \times \operatorname{senh} 2\phi_{p_0-p'_0} \operatorname{sen} 2\theta_{p'_0} \\ J_d &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{q} + M^*}{q^2 - M^{*2} + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{\xi^{\mu\nu}}{(p-p')^2 - m_s^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

con $q_0 = p_0 - (g_v/m_v)^2 p_B$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}$, $\xi_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + p'_\mu p'_\nu / m_v^2$. Si sólo se retiene el primer término en $\xi_{\mu\nu}$ resulta: $\gamma_\mu (\not{q} + M^*) \gamma_\nu \xi^{\mu\nu} = 2(\not{q} - 2M^*)$. En este caso puede unificarse la notación definiendo $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; $g_1 = g_s^2$, $g_2 = 2g_v^2$; $m_1 = m_s$, $m_2 = m_v$; $F_1 = I$, $F_2 = J/2$ junto con $bm_j = (m_j/M^*)^2$ para $j = 1, 2$.

Usando la descomposición

$$\operatorname{Re} \frac{1}{x + i\epsilon} = VP \frac{1}{x} \quad \operatorname{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = -2\pi \delta(x)$$

resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_{aj} &= -4\pi^2 |\lambda_j| \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{q} + \lambda_j M^*) \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p-p')^2 - m_j^2] \\ &\quad \times \operatorname{senh}^2 \phi_{p_0-p'_0} \\ \operatorname{Re} F_{bj} &= 4\pi^2 |\lambda_j| \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{q} + \lambda_j M^*) \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p-p')^2 - m_j^2] \operatorname{sen}^2 \theta_{p'_0} \\ \operatorname{Re} F_{cj} &= F_{cj} \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{\epsilon x \alpha \beta}^{(12)} &= (\pi g'_s)^2 \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' + M^*) \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p - p')^2 - m_s^2] \text{sen} 2\theta_{p'_0} \text{senh} 2\phi_{p_0 - p'_0} \\
&+ 2(\pi g'_v)^2 \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' - 2M^*) \delta(q^2 - M^{*2}) \delta[(p - p')^2 - m_v^2] \\
&\times \text{sen} 2\theta_{p'_0} \text{senh} 2\phi_{p_0 - p'_0}
\end{aligned}$$

que es convergente debido a la presencia de las funciones de distribución térmicas. Usando esta propiedad junto con (3.36) puede determinarse la parte imaginaria regularizada de $\Sigma_{F_{\epsilon x}}$ consistente con las propiedades de la DTC

$$\text{Im}\Sigma_{F_{\epsilon x}}^{(11)reg}(p) = i \cotan 2\theta_{p_0} \Sigma^{(12)}(p) - \sum_{j=1,2} g_j (F_{j_a} + F_{j_b} + F_{j_c})$$

de esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}
\text{Im}\Sigma_{F_{\epsilon x}}(p) &= -g'^2_s 2\pi^2 \theta \left[q^2 - (M^* + m_s)^2 \right] \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' + M^*) \delta(q'^2 - M^{*2}) \\
&- g'^2_v 2\pi^2 \theta \left[q^2 - (M^* + m_v)^2 \right] \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} (\not{q}' + M^*) \delta(q'^2 - M^{*2})
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] R.Reid, *Ann.Phys.* **50** (1968)411
M. Lacombe et al., *Phys.RevD***12**(1975)1495 ; *Phys.Rev C***21** (1980) 861
- [2] B.Leiter, J.Huschilt y G.Szamosi, *Can.J.Phys.* **50** (1970)636
A.B.Volkoff, *Nucl.Phys.* **36** (1962)16
- [3] G.Kalman, *Phys.Rev.* **161** (1967)156; *Phys.Rev. D* **9** (1974)1656
R.Hakim, *Phys.Rev.* **166** (1968)75
- [4] B.D.Serot y J.D.Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16** (1986)1
- [5] B.D.Serot, *Phys.Lett. B* **86** (1979)146
- [6] T.Matsui y B.D.Serot, *Ann.Phys.* **144** (1982)107
- [7] C.J.Horowitz y B.D.Serot, *Nucl.Phys. A* **368** (1981)503
J.Boguta, *Nucl.Phys. A* **372** (1981)386
- [8] R.J.Furnstahl, C.E.Price y G.E.Walker, *Phys.Rev. C* **36** (1987)2590
R.J.Furnstahl y B.D.Serot, *Nucl.Phys. A* **468** (1987)539
Y.K.Gambhir, P.Ring y A.Thimet, *Ann.Phys.* **198** (1990)132
- [9] J.F.Dawson y R.J.Furnstahl, *Phys.Rev. C* **42** (1990)2009
- [10] J.Boguta y A.R.Bodmer, *Nucl.Phys. A* **292** (1977)413
- [11] A.Bouyssy, S.Marcos y P.van Thieu, *Nucl.Phys. A* **422** (1984)541
P.G.Reinhard et al., *Z.Phys. A* **323** (1986)13
M.Rufa et al., *Phys.Rev. C* **38** (1988)390
J.Fink et al., *Phys.Lett. B* **218** (1989)277
- [12] A.J.Niemi y G.W.Semenoff, *Ann.Phys.* **152** (1984)105; *Nucl.Phys. B* **230** (1984)181
L. Dolan y R.Jackiw, *Phys.Rev. D* **9** (1974)3320
R.J.Furnstahl y B.D.Serot, *Phys.Rev. C* **44** (1991)2141
R.L.Kobes y G.W.Semenoff, *Nucl.Phys. B* **260** (1985)714
- [13] R.D.Puff, *Ann.Phys.* **13** (1961)317
W.D.Brown, R.D.Puff y L.Wilets, *Phys.Rev. C* **2** (1970)331
- [14] G.Källen, *Helv.Phys.Acta* **25** (1952) 417
H. Lehmann, *N.Cim.* **11** (1954) 342

- [15] P.A.Henning, Nucl.Phys. A 546 (1992)653
G.Krein, M.Nielsen, R.D.Puff y L.Wilets, Phys.Rev. C 47 (1993)2485
- [16] J.D.Walecka, Ann.Phys. 83 (1974)491
- [17] L.D.Landau y E.M.Lifschitz, Fluid Mechanics;Pergamon,1959
- [18] R.Jauch y J.Rohrlich, The theory of photons and electrons. The relativistic quantum field theory of charged particles with spin one half; Addison-Wesley,1955
- [19] S.A.Chin y J.D.Walecka, Phys.Lett. B 52 (1974)24
S.A.Chin, Ann.Phys. 108 (1977)301
- [20] C.J.Horowitz y B.D.Serot, Phys.Lett. B 109 (1982)341 y B 108 (1982)377; Nucl.Phys. A 399 (1983)529
- [21] F.Bloch, Z.Phys. 74 (1932)295
R.P.Feynman, Phys.Rev. 91 (1953)1291
- [22] T.Matsubara, Prog.Theor.Phys. 14 (1955)351
- [23] J.Schwinger, J.Math.Phys. 2 (1961)407
L.V.Keldysh, Sov.Phys.JETP 20 (1964)1018
- [24] R.A.Craig, Ann.Phys. 40 (1966)416
V.Korenman, Ann.Phys. 39 (1966)72; J.Math.Phys. 10 (1969)1387
R.A.Craig, J.Math.Phys. 9 (1968)605
- [25] A.J.Niemi y G.W.Semenoff, Nucl.Phys. B 230[FS10] (1984)181
- [26] L.Leplae, F.Mancini y H.Umezawa, Phys.Rep. 10 (1974)151
- [27] Y.Takahashi y H.Umezawa, Coll.Phen 2 (1975)55
- [28] R.Haag, N.M.Hugenholtz y M.Winnink, Comm.Math.Phys. 5 (1967)215
- [29] M.Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Springer (Berlin),1970.
- [30] N.P.Landsman y Ch.G.van Weert, Phys.Rep. 145 (1987)141
- [31] I.Ojima, Ann.Phys. 137 (1981)1
- [32] H.Matsumoto, Y.Nakano y H.Umezawa, Phys.Rev. D 28 (1983)1931
- [33] G.W.Semenoff y H.Umezawa, Nucl.Phys. B 220 [FS8] (1983)196
- [34] T.Arimitsu y H.Umezawa, Prog.Theor.Phys. 74 (1985)429
- [35] T.Arimitsu, J.Pradko y H.Umezawa, Physica A 135 (1986)487
- [36] T.Arimitsu y H.Umezawa, Prog.Theor.Phys. 77 (1987)33
- [37] H.Umezawa y Y.Yamanaka, Adv.Phys. 37 (1988)531
H.Matsumoto et al., Prog.Theor.Phys. 70 (1983)599

- [38] E.Fabri y L.E.Picasso, Phys.Rev.Lett. **16** (1966)408
J.Bernstein, Rev.Mod.Phys. **46** (1974)7
- [39] C.Itzykson y J.B.Zuber, Quantum Field Theory;McGraw-Hill (1980)
- [40] H.Umezawa y Y.Yamanaka, Phys.Lett. **A 155** (1991)75
- [41] O. Civitarese, A.L. DePaoli, M.C. Rocca, Phys.Lett. **B 336** (1994)275; Nuc.Phys. **A**
(en prensa)
- [42] H.Umezawa, H.Matsumoto y M.Tachiki, Thermo Field Dynamics and Condensed
States, Nort-Holland,Amsterdam;1982
- [43] H.Matsumoto, Fortschr. Phys. **25** (1977)1
- [44] R.Aguirre,O.Civitarese; en preparación
- [45] H.Matsumoto, I.Ojima y H.Umezawa, Ann.Phys. **152** (1984)348
- [46] K.Soutome, Z.Phys. **C 40** (1988)479
- [47] K.Saito,T.Maruyama y K.Soutome, Phys.Rev. **C 40** (1989)407
- [48] A.F.Bielajew, Nucl.Phys. **A 404** (1983)428
- [49] M.Jaminon, C.Mahaux y P.Rochus, Nucl.Phys. **A 365** (1981)371
- [50] L.D.Miller, Phys.Rev. **C 9** (1974)537; Phys.Rev. **C 12** (1975)710
R.Brockmann, Phys.Rev. **C 18** (1978)510
- [51] A.F.Bielajew y B.D.Serot, Ann.Phys. **156** (1984)215
- [52] R.J.Furnstahl, R.J.Perry y B.D.Serot, Phys.Rev. **C 40** (1989)321,Errata: Phys.Rev. **C**
41 (1990)404
- [53] N.Weiss, Phys.Rev. **D 27** (1983)899
- [54] B.D.Serot, Rep.Prog.Phys **55** (1992)1855
- [55] R.Aguirre, O.Civitarese y A. De Paoli,Nucl.Phys. **A 579** (1994)573
- [56] R.Aguirre, O.Civitarese y A.De Paoli, aceptado para su publicación en Nuclear Physics
A.
- [57] P.J. Ellis et al., Phys.Rep. **242** (1994)379
- [58] S.Coleman y E.Weinberg, Phys.Rev. **D 7** (1973)1888
- [59] K.Wehrberger, R.Wittman y B.D.Serot, Phys.Rev. **C 42** (1990)2680
- [60] A.L.Fetter y J.D.Walecka Quantum Theory of Many Particle Systems, McGraw-
Hill,1976
- [61] R.J.Perry, Phys.Lett. **B 199** (1987)489
T.D.Cohen, M.K.Banerjee y C.Y.Ren, Phys.Rev. **C 36** (1987)1653
K.Wehrberger, R.Wittman y B.D.Serot, Phys.Rev. **C 42** (1990)2680

- [62] R.J.Furnstahl y C.J.Horowitz, Nucl.Phys. A 485 (1988)632
J.Diaz Alonso y A.Pereaz Canyellas, Nucl.Phys. A 526 (1991)623
K.Tanaka, W.Bentz y A.Arima, Nucl.Phys. A 528 (1991)676
- [63] J.P.Blaizot, D.Gogny y B.Grammaticos, Nucl.Phys. A 265 (1976)315
- [64] G.E.Brown y E.Osnes, Phys.Rev. B 159 (1985)223
- [65] G.Co' y J.Speth, Phys.Rev.Lett. 57 (1986)547
- [66] M.Jaminon y C.Mahaux, Phys.Rev. C 40 (1989)354
- [67] M.Sharma, S.A.Moszkowski y P.Ring, Phys.Rev. C 44 (1991)2493
- [68] J.Zimanyi et al., Nucl.Phys. A 484 (1988)647
- [69] S.A.Moszkowski y C.G.Kalman, Nucl.Phys. A 287 (1977)495
- [70] B.M.Waldhauser et al., Phys.Rev. C 36 (1987)1019
E.Heide y P.J.Ellis, Nucl.Phys. A 532 (1991)634
- [71] B.M.Waldhauser et al., Phys.Rev. C 38 (1988)1003
- [72] J.Zimanyi y S.A.Moszkowski, Phys.Rev. C 42 (1990)1416
- [73] N.K.Glendenning et al., Phys.Rev. C 45 (1992)844
- [74] T.D.Lee y M.Margulies, Phys.Rev. D 11 (1975)1591
- [75] C.G.Kallman, Phys.Lett. B 55 (1975)178
C.G.Kallman y S.A.Moszkowski, Phys.Lett. B 57 (1975)183
- [76] J.K.Zhang y D.S.Onley, Phys.Rev. C 44 (1991)2230
- [77] B.Datta y P.K.Sahu, Phys.Lett. B 318 (1993)277
- [78] Z.X.Qian, H.Q.Song y R.K.Su, Phys.Rev. C 48 (1993)154
- [79] W.D.Myers y W.J.Swiatecki, Ann.Phys. 55 (1967)395
- [80] J.L.Friar y J.W.Negele, Adv.Nucl.Phys. 8 (1975)219
- [81] N.M.Hugenholtz y L.van Hove, Physica 24 (1958)363
V.F.Weisskopf, Nucl.Phys. 3 (1957)423
- [82] L.Wilets, Rev.Mod.Phys. 30 (1958)542
A.R.Bodmer, Nucl.Phys. 17 (1960)388
- [83] Y.K.Gambhir, P.Ring y a.Thimet, Ann.Phys. 511 (1990)129 y referencias allí citadas.
- [84] J.Schwinger, Phys.Lett. B 24 (1967)473
S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 18 (1967)188; Phys.Rev. 166 (1968)1568; Physica A 96 (1979)327
- [85] E.S.Abers y B.W.Lee, Phys.Rep. C 9 (1973)1