

**Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física**

**TESIS DOCTORAL**

**Fenómenos Oscilatorios Lineales y no Lineales en  
Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos**

**Hilda Angela Larrondo  
Director de Tesis: Dr. Luis N. Epele**

**1997**

## Índice

0	<u>Introducción</u>	0-01
1	<u>Capítulo 1: Sistemas dinámicos y la teoría cualitativa</u>	
1.1	Introducción a la teoría de cualitativa de ecuaciones diferenciales.	1-01
1.2	Sistemas dinámicos continuos	1-02
1.3	Sistemas dinámicos discretos	1-04
1.4	Comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos: conjuntos $\omega$ -límite y $\alpha$ -límite	1-05
1.5	Conjuntos límites, singularidades y tiempos característicos en el problema lineal.	1-06
1.6	Puntos fijos y su estabilidad en el problema no lineal.	1-16
1.7	Otros conjuntos $\omega$ -límite y $\alpha$ -límite. Dominios de atracción.	1-25
1.8	Estabilidad de órbitas cerradas	1-29
2	<u>Sistemas de baja dimensión (I)</u>	
2.1	Caos y sincronización en osciladores forzados	2-01
2.2	Modelos Matemáticos típicos de osciladores forzados	2-03
2.3	El Retrato de Fases	2-07
2.4	Análisis geométrico: el mapa de curvas isofase	2-11
2.5	Caso de fuerzas periódicas impulsivas	2-12
2.6	Relación entre la PTC y las curvas isofase	2-16
2.7	Red de isofases del modelo de Bonhöffer-Van der Pol	2-20
2.8	Red de isofases para los modelos V, B y S.	2-21
2.9	La PTC de los modelos V, B y S.	2-24
2.10	Resultados para otros tipos de fuerzas impulsivas	2-25
2.11	El problema de los retardos	2-29
2.12	Ejemplo de utilización del análisis geométrico para estabilizar una solución caótica.	2-42
3	<u>Sistemas de baja dimensión (II)</u>	
3.0	Introducción	3-01
3.1	Espectro de Fourier de Sistemas oscilatorios lineales y no lineales	3-02
3.2	Oscilador Puente de Wien	3-04
3.3	El Teorema de Takens	3-09
3.4	Reconstrucción del atractor	3-10
3.5	Entropía de Kolmogorov	3-13
3.6	Exponentes de Lyapunov en mapas 1D	3-15
3.7	Dimensiones de un atractor caótico	3-26
3.8	Desarrollo de un banco de medición para el caso de fuerzas paramétricas impulsivas.	3-33
3.9	Método simplificado para el caso de fuerzas de amplitud constante	3-39
4	<u>Sistemas de dimensión infinita (I)</u>	
4.0	Introducción	4-01
4.1	Clasificación de las EDDP desde el punto de vista computacional	4-03
4.2	El método de Rayleigh-Ritz	4-05

4.3	El método de Galerkin	4-14
4.4	Otros métodos de residuos ponderados	4-18
5	<u>Sistemas de dimensión infinita (II)</u>	
5.0	Introducción	5-01
5.1	Aplicaciones de los métodos variacionales	5-02
	a) Determinación de las frecuencias naturales para los modos de vibración axi-anti simétricos de una placa circular de espesor escalonado por el método de Rayleigh-Ritz optimizado.	5-02
	b) Vibraciones axisimétricas en placas circulares aeolotrópicas con masas concentradas.	5-09
	c) Oscilaciones forzadas senoidalmente	5-16
	d) Vibraciones transversales en placas anulares	5-20
	e) Vibraciones transversales de placas rectangulares por el método de Kantorovich optimizado	5-22
	f) Placa rectangular con masa elásticamente acoplada	5-25
	g) Placa rectangular ortótropa con orificios y masa concentrada	5-29
6	<u>Sistemas de dimensión infinita (III)</u>	
6.0	Introducción	6-01
6.1	Sistemas conservativos integrables y no integrables.	6-02
6.2	Los modos normales y la variedad central en un sistema lineal	6-04
6.3	Variedades invariantes en sistemas no lineales	6-07
6.4	La variedad central	6-08
6.5	Aproximación variacional a la determinación de los modos normales no lineales en sistemas mecánicos oscilatorios	6-12
6.6	Conexión entre sistemas vibrantes continuos disipativos y osciladores de baja dimensión	6-27
7	<u>Conclusiones y problemas abiertos</u>	7-01
8	<u>Agradecimientos</u>	8-01
9	<u>Bibliografía</u>	9-01
A	<u>Apéndice A: Algunas consideraciones referentes a los métodos numéricos empleados</u>	
A1	Determinación de la PTC y de las isofases de un oscilador forzado	A-01
A2	La descomposición SVD (Singular Value Decomposition)	A-04
B	<u>Apéndice B: Consideraciones relativas al hardware necesario para experimentos en sincronización de osciladores</u>	
B1	Capacidades de transferencia directa a memoria de una PC standard	B-01
B2	Circuitos especiales de adquisición de datos y controlador DMA	B-03

## Introducción

El tratamiento teórico de todo fenómeno físico requiere una idealización de las verdaderas propiedades para obtener un *modelo* del sistema. Este proceso de idealización debe conservar las *variables relevantes* y debe conducir a una adecuada descripción cualitativa y cuantitativa. La idealización conduce usualmente a sistemas de ecuaciones diferenciales (ordinarias o a derivadas parciales) lineales o no lineales. Los modelos lineales son siempre preferibles desde el punto de vista matemático: el principio de superposición ha permitido encontrar de manera sistemática la forma de resolverlos. Cabe entonces preguntarse en qué casos no es posible utilizar un modelo lineal.

Precisamente la presencia de fenómenos oscilatorios estables en un sistema físico es un primer indicio de la no linealidad esencial del sistema. En efecto, si bien en sistemas lineales pueden presentarse oscilaciones, la disipación hace que, aunque más no sea en forma relativamente lenta, se produzca una pérdida de energía y por consiguiente una disminución del volumen del espacio de fases hasta alcanzar, en el régimen asintótico, únicamente puntos de equilibrio. Para que en un sistema lineal con disipación la solución oscilatoria se mantenga indefinidamente es necesario que exista una fuente oscilatoria externa. Es más, la linealidad garantiza que la señal de salida del sistema contendrá en su espectro de Fourier únicamente las frecuencias que están presentes en el espectro de Fourier de la excitación.

Si el sistema es conservativo pueden obtenerse trayectorias periódicas, sin necesidad de una fuente oscilatoria externa. Sin embargo, una característica esencial de las oscilaciones en estos sistemas es que esas trayectorias periódicas son sólo *marginalmente estables*: es decir existe una infinidad de soluciones periódicas. Una perturbación infinitesimal en el estado del sistema produce una transición de una trayectoria periódica a otra. En los sistemas conservativos no existen soluciones periódicas *asintóticamente estables* [p.e. Arnold et al 74], que son aquellas para las cuales, producida una pequeña perturbación en el estado del sistema, éste

vuelve a la misma solución periódica, luego de un transitorio cuya duración está dada por un tiempo característico.

En numerosos sistemas físicos de baja dimensión aparece una clase muy diferente de oscilaciones: *las oscilaciones autosostenidas*. Estas oscilaciones se diferencian radicalmente de las mencionadas anteriormente en cuanto al tipo de estabilidad que presentan: las trayectorias periódicas, son curvas cerradas aisladas en el espacio de fases y producida una perturbación infinitesimal en el estado del sistema éste evoluciona con cierta constante de tiempo característica y retorna a la trayectoria autosostenida. Este tipo de fenómeno sólo puede modelarse introduciendo un mecanismo de intercambio de energía entre el sistema y una fuente externa de tipo autorregulado: el sistema debe absorber energía en la medida que la oscilación decrece por debajo de cierto valor y por el contrario debe entregarla si la oscilación ha adquirido una amplitud excesiva.

La característica fundamental de los sistemas auto oscilatorios es su capacidad de producir un proceso periódico a partir de uno que no lo es: el espectro de Fourier de la salida presenta componentes de Fourier diferentes a las del espectro de entrada, comportamiento que sólo es posible si el sistema no es lineal y por lo tanto no es aplicable el principio de superposición. Las oscilaciones autosostenidas fueron identificadas como un fenómeno no lineal hace casi setenta años, cuando van del Pol y van der Mark estudiaron el funcionamiento de un oscilador electrónico. Por su parte, el problema de la estabilidad fue estudiado por Lyapunov, Lagrange y Poincaré entre otros y sus ideas se han mantenido hasta nuestros días prácticamente sin modificación conceptual [*van der Pol et al 28*].

En los problemas del continuo, que en general son modelados por ecuaciones a derivadas parciales, existen otros fenómenos de naturaleza aún más compleja que las oscilaciones periódicas. En especial en los fluidos puede existir un *flujo turbulento* y su aparición está ligada al valor de un *parámetro de control*, el número de Reynolds, que está vinculado a la disipación de energía a través de la viscosidad. Hasta hace unos veinte años se consideraba que el número infinito de grados de libertad de estos sistemas era

esencial para la aparición del fenómeno [Landau et al 59].

A mediados de este siglo surgieron desde la matemática varias perspectivas, aparentemente abstractas, de diferentes modelos: la teoría de catástrofe introducida por Thom [Thom 75] y los *atractores curiosos* descubiertos por Cartwright, Littlewood y Levinson [Cartwright et al 45, Levinson 49] son sólo algunos ejemplos. El teorema KAM [p.e. Moser 73], mostró en forma indubitable la necesidad de rever las ideas acerca del comportamiento de los sistemas conservativos [p.e. Helleman 80].

La importancia de un tratamiento unificado de todos estos fenómenos recién se hace evidente a partir del uso extensivo de las computadoras. A partir de *experimentos numéricos* se pudo inferir que, comportamientos que se creían sólo casos particulares de algunos modelos especialmente complejos, o ligados a los infinitos grados de libertad, eran en realidad *genéricos* en los sistemas físicos no lineales y aparecían aún en sistemas de muy baja dimensión [Feigenbaum 78, Lorenz 84]. Cobró asimismo gran importancia la *teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales* cuyo origen se remonta a comienzos de siglo con los trabajos de Poincaré [Poincaré 1892] y que permite un análisis de las trayectorias del sistema en el espacio de fases sobre la base del estudio de sus singularidades.

Dentro de este marco general, esta tesis presenta los resultados originales obtenidos a lo largo de un estudio unificado de problemas oscilatorios de distinto número de grados de libertad, con énfasis en los fenómenos auto-oscilatorios y de sincronización. Se incluyen casos de baja dimensión y de dimensión infinita presentando el material en orden creciente de complejidad.

La nomenclatura que se empleará es la usual en la teoría de sistemas dinámicos. En primer lugar es conveniente aclarar las definiciones de *sistemas discretos* y *sistemas continuos*. En efecto, está bastante arraigado en la literatura el identificar los sistemas continuos con los *problemas del continuo*, es decir aquéllos que se representan en un espacio de fases de dimensión infinita. Se trata de sistemas modelados por ecuaciones dife-

renciales en derivadas parciales (una viga por ejemplo); por su parte el término discreto suele utilizarse como equivalente a *sistema con un número finito de grados de libertad*. En la nomenclatura de sistemas dinámicos, en cambio, todos los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales, sean éstas ordinarias o a derivadas parciales, se denominan continuos; la única distinción entre unos y otros es la dimensión del espacio de fases en que se los describe [Hirsch et al 74, Guckenheimer et al 83, Akin 93]: una ecuación diferencial a derivadas parciales puede expresarse como un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias (de allí la dimensión infinita de su espacio de fases) por lo que, desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos, sólo se trata de un caso especialmente complejo, pero conceptualmente idéntico al caso finito. Se reservará la designación de *sistemas discretos* para aquéllos cuyo modelo matemático está constituido por ecuaciones de tipo iterativo, también denominadas *mapas* ó *mapas discretos*.

A pesar de esta primera distinción existe una estrecha vinculación entre los sistemas discretos y los sistemas continuos. En efecto, algunos importantes aspectos de la dinámica de un sistema continuo pueden estudiarse sin hacer uso del modelo completo (es decir del sistema de ecuaciones diferenciales) sino que es suficiente con plantear una versión discretizada del modelo: el *mapa de Poincaré* [Poincaré 1892]. En efecto, al representar la evolución temporal del sistema de  $n$  grados de libertad en su espacio de fases  $n$ -dimensional se obtiene una *trayectoria*. En muchos casos es posible encontrar una hipersuperficie  $n-1$  dimensional que es cortada varias veces por la trayectoria durante la evolución temporal, sin que existan puntos de tangencia entre trayectoria y superficie. El conjunto de puntos de intersección se denomina *órbita* ó *trayectoria discreta* y la relación iterativa entre los puntos que la constituyen es un sistema dinámico discreto (mapa). Un caso especialmente útil en las aplicaciones que se estudian en esta tesis es el llamado *mapa estroboscópico*, que se obtiene muestreando el estado del sistema a intervalos regulares de tiempo [Winfrey 79, González et al 84a, Campbell et al 89].

La tesis está estructurada en dos partes. En la primera, formada por

los capítulos 2 y 3, se estudian los sistemas de baja dimensión, tanto desde el punto de vista teórico como experimental. El análisis teórico y experimental se efectúa sobre la base de modelos específicos, pero la metodología es aplicable a una gama muy amplia de casos. La segunda parte, formada por los capítulos 4 a 6, estudia el caso de los sistemas oscilatorios de infinitos grados de libertad. En este caso los modelos constan de un conjunto de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (EDDP) acopladas, lineales o no lineales, acompañadas por condiciones iniciales y condiciones de contorno. En los casos de interés para este trabajo las EDDP son de segundo orden en las derivadas temporales. Los modelos estudiados corresponden a sistemas conservativos no lineales cuya aproximación lineal es integrable.

En el capítulo 1 se introducen las ideas fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos, necesaria como herramienta fundamental para la comprensión de todo este trabajo. En el capítulo 2 se reportan resultados originales correspondientes a osciladores con un ciclo límite (atractor) y un punto fijo (repulsor), forzados periódicamente en forma impulsiva tanto por fuerzas puramente dependientes del tiempo como por fuerzas periódicas. Se efectúa un estudio detallado de las regiones de sincronización. Para estos sistemas disipativos se muestra asimismo la potencia del modelado mediante mapas unidimensionales [*Glass et al 82, 83, 84a, 84b, González et al 84b, 85, Arizmendi et al 85, Campbell et al 86a, 86b, Larrondo et al 96a*]

Los modelos básicos considerados son típicos de diferentes aplicaciones. Uno de ellos (el modelo S) [*González et al 83*] es integrable en el caso autónomo, en tanto los restantes requieren integración numérica de sus ecuaciones. La similitud cualitativa de su comportamiento se debe a que poseen un diagrama de singularidades esencialmente idéntico. Se establecen entre ellos comparaciones de tipo cualitativo que apuntan a la comprensión del proceso de sincronización, haciendo uso justamente del análisis geométrico de sus mapas.

El aporte más importante de este capítulo es el estudio de la influencia de los retardos en osciladores sincronizados externamente por fuerzas

impulsivas paramétricas. El análisis se efectúa mediante consideraciones geométricas simples y permite definir, aspectos importantes tales como el rango de valores del retardo que no obstaculiza el proceso de sincronización [Larrondo et al 96a]. Los cálculos se realizan sobre el modelo S, que tiene la ventaja de poseer solución analítica, eliminando los errores numéricos de los métodos de integración.

La presencia de retardos ha sido reportada como un obstáculo importante para el control exitoso de algunos procesos oscilatorios [Boe et al 89, Krasovskiyy et al 90, Roesky et al 93, Case 94]. Por el contrario, recientemente han sido propuestos métodos para "tomar control" del caos, haciendo uso inteligente de este mismo retardo [Pyragas 92, 93, Schneider et al 93, Weiner et al 89, Hunt et al 93].

El capítulo 3 está dedicado al estudio experimental de sistemas de baja dimensión. Se reportan resultados experimentales sobre diferentes características: *espectro de Fourier* [González et al 89], *regiones de sincronización con forzado senoidal* [Arizmendi et al 84], *dimensión de correlación de atractores*, *exponentes de Lyapunov*, y *reconstrucción de atractores* [Takens 81, Grassberger 83, Grassberger et al 83a, 83b, González et al 88].

La principal contribución original de este capítulo es el desarrollo de un "banco de medición", controlado por una PC que permite estudiar permite estudiar *en tiempo real* sistemas del tipo analizado en forma teórica en el capítulo 2 [Larrondo et al 96a, 96b]. En un experimento en tiempo real se requiere el muestreo de la señal de control y la generación del pulso a aplicar. Siempre existe un retardo  $\tau$  entre el instante en que se realiza el muestreo y aquél en que se aplica el pulso. Como mínimo este retardo corresponde al tiempo finito requerido para efectuar los procesos de medición de la variable de salida, el cálculo y la generación del pulso.

El método desarrollado hace uso de las capacidades de manejo de transferencia directa a memoria (DMA) de las actuales PC [Van Gylluwe 93, Prokin 93] y el banco puede utilizarse con osciladores paramétricos cuya señal de

salida tenga un contenido relevante de frecuencias de hasta 25 KHz, lo que significa un incremento importante si se lo compara con el método tradicional que emplea generadores controlados por interfases tipo IEEE 488 y que sólo permiten llegar hasta 50 Hz para este tipo de problema. El sistema es flexible pues permite modificar por software el tipo de pulso a aplicar, admitiendo tanto pulsos de amplitud constante como paramétricos, de ancho y período variables y con un retardo que se fija por programa.

El sistema particular sobre el que se reportan las mediciones del capítulo 3, es un oscilador tipo Puente de Wien [*Schilling et al 68*]. Este modelo se ha elegido por ser uno de los más difundidos, tanto por sus aplicaciones como desde el punto de vista didáctico. Sin embargo, la metodología desarrollada es aplicable a una amplia variedad de osciladores, no sólo electrónicos, sino también biológicos y químicos. Por supuesto en estos casos se requiere la introducción de transductores adecuados.

En el capítulo 4 se describen varios métodos semianalíticos que aportan, para este tipo de problemas, una metodología alternativa muy eficiente desde el punto de vista computacional al método de Elementos Finitos [*Basombrio et al 86, Zienkiewicz et al 95*]. Se establece además la relación entre los sistemas de dimensión infinita y los osciladores de baja dimensión, utilizando el criterio de Galerkin para la reducción de la dimensión.

En el capítulo 5 se incluyen problemas lineales con diversas geometrías y condiciones de contorno y con acoplamientos a otros de menor dimensión [*Avalos et al 88, 89, 90, 93, 94, 96, 97, Bhat et al 95, Larrondo et al 92, 93, 94, Laura et al 95, Sonzogni et al 96*]. Se efectúan estudios de convergencia y comparaciones con elementos finitos.

En el capítulo 6 se estudian problemas no lineales. Se retoma la teoría cualitativa para describir las características de las variedades invariantes de sistemas lineales y no lineales. Se presenta un método que combina una primera proyección de Galerkin (o alternativamente el método de Rayleigh-Ritz), con el análisis de la *dinámica restringida a las variedades invariantes bidimensionales*, que constituyen la variedad central del

sistema [Carr 81, Shaw 94, Vakakis 90, Slater 96]. Este enfoque es mucho más realista que los tradicionalmente utilizados en los que las formas modales no lineales tienen las mismas propiedades de auto-similaridad que los correspondientes modos normales lineales [Nayfeh et al 79, 95a, 95b, 95c, Nayfeh 95]. El método desarrollado es apto para atacar casos de importancia por sus aplicaciones, como son los problemas con fundaciones tipo Winkler no lineales [Larrondo et al 95, 96c, 97a].

Para efectuar determinaciones cuantitativas se requiere obtener con precisión no sólo los autovalores sino también las autofunciones del problema lineal. Se utiliza la descomposición en valores singulares (SVD) para el análisis lineal. La descripción de la SVD se incluye en el apéndice A2 [Albano et al 88, Press et al 92].

Se han incluido dos apéndices. El apéndice A contiene información útil en relación con los métodos numéricos empleados en el estudio teórico de los problemas de baja dimensión del capítulo 2; también se describe la descomposición SVD utilizada en el capítulo 6. El apéndice B, por su parte, contiene una descripción detallada del banco de mediciones reportado en el capítulo 3 y de las capacidades de transferencia directa a memoria de una PC standard.

Además de efectuar un análisis cualitativo de los distintos sistemas se ha dedicado una parte importante a métodos que permitan determinaciones cuantitativas aplicables a problemas de la Ingeniería, y a sistemas de medición aptos para el estudio experimental. Con el fin de lograr un trabajo autocontenido se han incluido las herramientas matemáticas mínimas necesarias. Estas herramientas deben complementarse sin duda con los textos indicados en la bibliografía.

# Capítulo 1

## Sistemas dinámicos y la teoría cualitativa

### 1.1 Introducción a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

A diferencia de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, para los cuales existe una teoría matemática relativamente completa y satisfactoria [p.e. *Roxin et al 76*], no existen métodos generales de resolución para los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, ordinarias o a derivadas parciales. La dificultad esencial radica en que el principio de superposición, no es válido en el caso no lineal. Tampoco es en general admisible la separación de variables.

Esta dificultad dió origen al desarrollo de una serie de técnicas agrupadas actualmente bajo el nombre de *teoría cualitativa o geométrica de las ecuaciones diferenciales* [*Poincaré 1892, Lefschetz 57, Minorsky 62, Andronov et al 66, Blaquiere 66, Deift et al 94*]. La teoría cualitativa es válida tanto para sistemas lineales como no lineales, de cualquier dimensión, sean éstos conservativos o disipativos. Provee una visión general de la dinámica de un sistema físico, basada en la topología de su espacio de fases [*Akin 93*].

La idea esencial de la teoría cualitativa, es encontrar las singularidades del sistema en el espacio de fases, estudiar luego el problema linealizado, y analizar si la linealización conduce a una buena descripción de la dinámica no lineal. Si éste no fuera el caso se requerirán desarrollos de tipo perturbativo de mayor orden para analizar el comportamiento en las vecindades de dichas singularidades.

Las determinaciones cuantitativas están en general limitadas a sistemas de baja dimensión o bien a los *sistemas cuasilineales* y se basan en general en técnicas perturbativas [*Helleman et al 80*] y en el estudio de la dinámica restringida a las variedades invariantes [*Carr 81*]. Un punto importante es el análisis de estabilidad de las soluciones y de la estabilidad estructural del propio sistema [*Thom 75*].

## 1.2 Sistemas dinámicos continuos

Sea un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, generalmente no lineales, que en adelante se denomina *sistema dinámico continuo de orden  $n$* :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \tag{1.2.1}$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t)$$

El sistema (1.2.1) puede escribirse en forma abreviada utilizando notación vectorial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(x_1, \dots, x_n, t) \tag{1.2.2}$$

donde se ha supuesto que  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  es el *estado* en el instante  $t$  y  $\vec{f}: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se denomina el *campo vectorial* (si bien más adelante se pueden generalizar las ideas a otras variedades).

Un sistema *autónomo* es aquél en el que el campo vectorial  $\vec{f}$  no depende explícitamente del tiempo; en ese caso siempre se puede considerar el instante inicial como  $t_0 = 0$ . La solución de (1.2.2) para el caso autónomo, con la condición inicial  $\vec{x}_0$  se llama *trayectoria* y se denota por  $\Phi_t(\vec{x}_0)$ , o por  $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ . El mapa continuo  $\Phi_t: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  se llama el *flujo* del sistema y representa el conjunto de todas las trayectorias con condiciones iniciales en  $W$ .

En el caso general *no autónomo* el campo vectorial  $\vec{f}$  depende del tiempo y, a diferencia del caso autónomo, el instante inicial no puede elegirse arbitrariamente como cero [Guckenheimer et al 83], por lo que la solución de (1.2.2), que en el instante  $t_0$  pasa por  $\vec{x}_0$ , se designa  $\Phi_t(\vec{x}_0, t_0)$  ó  $\vec{x}(t, x_0, t_0)$ .

El sistema dinámico (1.2.2) se denomina *sistema dinámico lineal* si  $\vec{f}(\vec{x},t)$  es lineal con respecto a  $\vec{x}$ . En particular el sistema es *lineal a coeficientes constantes* si puede expresarse en la forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (1.2.3)$$

donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$  con coeficientes constantes.

Un sistema no autónomo es *periódico de período  $T$*  si existe un  $T > 0$  tal que, para todo  $\vec{x}$  y para todo  $t$ , es  $\vec{f}(\vec{x},t) = \vec{f}(\vec{x},t+T)$  (dado que un múltiplo del período también satisface la condición dada se considera el *período mínimo*).

Un sistema de orden  $n$ , periódico y no autónomo puede siempre convertirse en uno autónomo de orden  $(n+1)$  agregando una variable adicional  $\theta = 2\pi t/T$ . El sistema autónomo así obtenido está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \vec{f}_1(x_1, \dots, x_n, \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Dado que  $\vec{f}$  es periódica con período  $T$ , el nuevo sistema (1.2.4) es periódico en la variable  $\theta$ , con período  $2\pi$ . Luego, los planos  $\theta=0$  y  $\theta=2\pi$  pueden identificarse entre sí. De este modo el espacio de fases ampliado con el agregado de la variable  $\theta$ , es el cilindro  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}$ , donde  $\mathbb{S} = [0, 2\pi)$  es la circunferencia. La solución de (1.2.4) en este nuevo espacio de fases es:

$$\begin{bmatrix} \vec{x}(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(\vec{x}_0, t_0) \\ (2\pi t/T) \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

donde la función módulo restringe la variable  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Un sistema no autónomo y no periódico también puede convertirse en uno autónomo, sin embargo el espacio ampliado no es compacto y no puede

asegurarse que la solución exista para todo  $t > 0$ . Dado que para este trabajo el interés se centra especialmente en sistemas periódicos, en adelante se trabaja con sistemas autónomos, entendiendo incluidos por lo dicho arriba a los no autónomos periódicos.

Hay varias propiedades útiles relacionadas con la existencia y unicidad de las soluciones de los sistemas dinámicos. Los enunciados precisos pueden verse en cualquier libro de ecuaciones diferenciales [p.e. *Hirsch et al 74*]. En lo que sigue se supondrá que, para todo tiempo finito,  $\Phi_t$  es un difeomorfismo [*Roxin et al 76*]. Esta condición no es restrictiva y tiene varias consecuencias importantes:

- $\Phi_t(\vec{x}) = \Phi_t(\vec{y})$  si y sólo si  $\vec{x} = \vec{y}$ . O sea las trayectorias de los sistemas autónomos quedan determinadas a partir de la condición inicial.
- $\Phi_t(\vec{x}, t_0) = \Phi_t(\vec{y}, t_0)$  si y sólo si  $\vec{x} = \vec{y}$ . Esto implica que una vez fijado el instante inicial, la trayectoria de un sistema no autónomo queda unívocamente especificada por el estado en ese instante inicial; sin embargo si  $t_0 \neq t_1$ , es posible que  $\Phi_t(\vec{x}, t_0) = \Phi_t(\vec{y}, t_1)$ , y  $\vec{x} \neq \vec{y}$ , mostrando que las trayectorias de los sistemas no autónomos periódicos, proyectadas sobre  $\mathbb{R}^n$ , pueden intersectarse, a diferencia de lo que ocurre en los sistemas autónomos. La intersección desaparece en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}$ .
- La derivada de una trayectoria con respecto a la condición inicial existe y es no singular. De ello se sigue que para  $t$  y  $t_0$  fijos,  $\Phi_t(\vec{x}_0, t_0)$  es una función continua de la condición inicial  $\vec{x}_0$ .

### 1.3 Sistemas dinámicos discretos

Además de los sistemas dinámicos continuos, descritos por ecuaciones diferenciales, tienen gran importancia los *sistemas dinámicos discretos*. Estos sistemas están definidos a través de un *mapa discreto*  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y su evolución está regida por ecuaciones de recurrencia, que expresadas en forma vectorial:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{f}(\vec{x}_k) \quad k=0,1,\dots \quad (1.2.6)$$

Ahora  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$  es el *estado* y  $\vec{f}$  es el *mapa* que lleva el estado  $\vec{x}_k$  al estado

$\vec{x}_{k+1}$ . Aplicando el mapa en forma iterativa a partir de una condición inicial  $\vec{x}_0$ , se obtiene una secuencia de puntos en el espacio  $\mathbb{R}^n$ :

$$\{\vec{x}_k; k=0, \dots, \infty\}$$

llamada *órbita* del sistema discreto.

Los sistemas discretos son de interés pues, a través del *mapa de Poincaré* que se define más adelante, se puede reemplazar el análisis del flujo de un sistema continuo por el análisis de la órbita de un sistema discreto, sin necesidad de resolver ecuaciones diferenciales [*Poincaré 1892, Winfree 80, Guevara et al 82, Larrondo et al 96a*].

#### 1.4 Comportamiento asintótico de los sistemas dinámicos: conjuntos $\omega$ -límite y $\alpha$ -límite

Se denomina *estado estacionario* el comportamiento asintótico de un sistema dinámico (es decir el comportamiento para  $t \rightarrow \infty$ ). Se denomina *transitorio* la diferencia entre la solución y el estado estacionario. Desde el punto del vista físico el límite  $t \rightarrow \infty$  significa en realidad que se estudia el estado para tiempos *suficientemente largos*, comparados con las *constantes de tiempo características del sistema*, idea que será precisada con mayor detalle en el acápite 1.5.

Un punto  $\vec{y}$  se llama *punto  $\omega$ -límite* ( *$\alpha$ -límite*) de otro punto  $\vec{x}$  si, para todo entorno  $U$  de  $\vec{y}$  resulta  $\Phi_t(\vec{x}) \in U$  para  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ). El conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límite se denomina *conjunto  $\omega$ -límite*  $L_\omega(\vec{x})$  (*conjunto  $\alpha$ -límite*  $L_\alpha(\vec{x})$ ). Los conjuntos límite son *cerrados e invariantes* bajo la acción de  $\Phi_t$ . Eso significa que:

$$\forall \vec{x} \in L \wedge \forall t \Rightarrow \Phi_t(\vec{x}) \in L \quad (1.4.1)$$

Un conjunto límite  $L$  es *atractor* (*repulsor*) si existe un abierto  $U$  de  $L$  tal que:

$$\forall \vec{x} \in U \Rightarrow L_\omega(\vec{x}) \equiv L \text{ (o } L_\alpha(\vec{x}) \equiv L \text{ respectivamente)}. \quad (1.4.2)$$

La unión de todos los abiertos  $U$  se denomina *dominio de atracción* (*repulsión*)  $B(L)$  de  $L$ .

Los conjuntos atractores son especialmente importantes, ya que son los únicos que pueden ser observados, experimentalmente y en las simulaciones. Sin embargo los conjuntos repulsores pueden tener una profunda influencia en el transitorio del sistema y en la determinación de los dominios de atracción de los distintos conjuntos atractores.

En lo que sigue se considera el término *atractor* como sinónimo de conjunto límite atractor (a pesar de que pueden existir diferencias entre ambos). A continuación se estudian las singularidades de los sistemas dinámicos continuos y su estabilidad en un orden creciente de complejidad.

### 1.5 Conjuntos límites, singularidades y tiempos característicos en el problema lineal.

Sea el sistema dinámico lineal, a coeficientes constantes, de orden  $n$  (ver ecuación (1.2.3)). La solución del sistema, con la condición inicial:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (1.5.1)$$

es la función vectorial  $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ . Es importante notar que la solución de un sistema lineal está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  y para todo  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Se trata de una existencia *global*, situación que en general no se da en el caso de los sistemas no lineales.

Si la matriz  $A$  es no singular el sistema presenta un *punto fijo* en el origen de coordenadas. Se dice que  $\vec{x}^*$  es un *punto fijo* cuando es una solución constante de (1.2.2), es decir:

$$\phi_t(\vec{x}^*) = \vec{x}^* \quad (1.5.2)$$

En los puntos fijos el campo vectorial se anula y excepto para unos pocos casos patológicos la condición  $\vec{f}(\vec{x}^*) = 0$  equivale a que  $\vec{x}^*$  sea un punto fijo.

En el caso particular del sistema (1.2.3) el origen es el *único punto fijo*. Nótese que si hubiera otro punto fijo, por ejemplo  $\vec{x}_1$ , entonces todos los puntos de la recta  $\lambda\vec{x}_1$ , que une el origen (punto fijo 0) con  $\vec{x}_1$  (punto fijo 1), también son puntos fijos. Del mismo modo si existiera un tercer punto fijo  $\vec{x}_2$ , linealmente independiente del anterior, es decir no perteneciente a la recta recién mencionada, entonces todo el plano generado por los vectores  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  estará constituido por puntos fijos. Pero todos estos casos corresponden a una matriz  $A$  singular, como surge trivialmente de la solución del sistema  $A\vec{x}=\vec{0}$

La expresión simbólica de la solución es:

$$\vec{x}(\vec{x}_0, t) = e^{tA}\vec{x}_0 \quad (1.5.3)$$

donde, como es usual, la exponencial significa el desarrollo en serie:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \quad (1.5.4)$$

El análisis de la estabilidad del origen está directamente vinculado al estudio de los *autovalores* y *autovectores* de la matriz  $A$ . Se dan a continuación los principales resultados. Existen numerosos textos clásicos sobre matrices donde pueden encontrarse las demostraciones o ampliarse el tema [ver por ejemplo *Golub 96*].

Como primer paso es conveniente expresar la matriz  $A$  en su *forma canónica de Jordan*, mediante cambios de coordenadas que inducen una *transformación de semejanza*, pues el sistema dinámico resulta notablemente simple en este caso. En efecto, si se efectúa una transformación de coordenadas, representada por la matriz no singular  $P$ :

$$\vec{s} = P\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = P^{-1}\vec{s}, \quad (1.5.5)$$

la evolución en la nueva base resulta dada por:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = PAP^{-1}\vec{s} = B\vec{s}, \quad (1.5.6)$$

donde la matriz  $\mathbf{B}$  está relacionada con la matriz original  $\mathbf{A}$  mediante una transformación de semejanza. Entre ambas matrices existen las siguientes relaciones [Hirsh et al 74, Press et al 92]:

- Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen la misma traza.
- Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo determinante.
- Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo rango.
- Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo polinomio característico.

Para el caso particular de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{B}$  puede llevarse siempre a una de las formas siguientes:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \mu \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline b & a \end{array} \right]; \quad \left[ \begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 1 & \lambda \end{array} \right] \quad (1.5.7)$$

donde todas las componentes de las matrices de (1.5.7) son reales y  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $(a \pm ib)$  son los autovalores de  $\mathbf{A}$  y de  $\mathbf{B}$ . Las respectivas matrices  $e^{\mathbf{B}t}$  están dadas por:

$$\left[ \begin{array}{c|c} e^{\lambda t} & 0 \\ \hline 0 & e^{\mu t} \end{array} \right]; \quad e^{at} \left[ \begin{array}{c|c} \cos bt & -\sin bt \\ \hline \sin bt & \cos bt \end{array} \right]; \quad e^{\lambda t} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & t \end{array} \right] \quad (1.5.8)$$

y la matriz  $e^{t\mathbf{A}}$  de (1.5.4) está dada por  $\mathbf{P}^{-1}e^{t\mathbf{B}}\mathbf{P}$ .

De acuerdo a los autovalores obtenidos el sistema dinámico tiene distinto comportamiento asintótico y distintas constantes de tiempo en la vecindad de su punto fijo. Se establece entonces la siguiente clasificación (ver Figura 1.1):

Casos en que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable:

- *Puerto* (o también punto de ensilladura o del inglés *saddle*): corresponde a  $\lambda < 0 < \mu$ , es decir autovalores reales y de signo opuesto. La matriz  $\mathbf{P}$  que efectúa el cambio de base está formada por las componentes, en la base original, de los dos autovectores independientes de la matriz  $\mathbf{A}$  (cada autovector está asociado a uno de

los autovalores). Luego de la transformación de coordenadas los autovectores corresponden a los ejes del nuevo sistema (Figura 1.1a). Las rectas definidas por los autovectores son *variedades invariantes* unidimensionales: si en  $t=0$  el sistema se encuentra en un punto perteneciente a una de esas rectas evolucionará "atrapado" dentro de ese espacio unidimensional para todo  $t>0$ . Además el punto fijo (origen) y el plano  $\mathbb{R}^2$  son *variedades invariantes triviales*. El sistema tiene dos constantes de tiempo características,  $|\lambda|^{-1}$  y  $|\mu|^{-1}$ . Desde el punto de vista práctico puede considerarse que el sistema ha alcanzado el régimen asintótico cuando  $t>\tau$  siendo  $\tau$  la mayor de ambas constantes. Un puerto es un punto fijo inestable.

- *Foco estable*. Corresponde a  $\lambda=\mu<0$  (Figura 1.1.b). Si  $\lambda=\mu>0$  se trata de un *foco inestable* (invertir el sentido de las flechas en 1.1.b).
- *Nodo estable*. Corresponde a  $\lambda<0, \mu<0$ . El análisis es análogo al caso anterior. Si  $\lambda>0, \mu>0$ . Ahora el punto fijo es un *nodo inestable* (invertir el sentido de las flechas en 1.1.c)

Casos en que la matriz A no es diagonalizable:

- *Nodo impropio estable*: corresponde a  $\lambda=\mu<0$ . Corresponde a la última matriz de (1.5.7). La solución del sistema dinámico adquiere la forma (1.5.8) correspondiente (Figura 1.1.d):

$$\begin{aligned} s_1(t) &= c_1 e^{t\lambda} \\ s_2(t) &= c_2 e^{t\lambda} + c_1 t e^{t\lambda} \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

Si  $\lambda>0$  las flechas se invierten y se obtiene un *nodo impropio inestable*.

- *Sumidero en espiral*. Si los autovalores son complejos conjugados, con  $a<0$ , las soluciones espiralan hacia el origen siguiendo la solución dada por la segunda matriz de (1.5.7) (Figura 1.1.e).

El signo de b define el sentido de rotación alrededor del origen. El sistema tiene dos constantes de tiempo características para este caso; ellas son  $2\pi/b$ , *período de rotación* de todas las trayectorias en espiral y  $a^{-1}$ , *constante de decaimiento*.

Si  $a>0$  se obtiene una *fuerza en espiral* (Figura 1.1.e con las flechas

invertidas).

Si  $a=0$  el punto fijo se denomina *centro*. En este caso existe un continuo de trayectorias periódicas, de período  $2\pi/b$  alrededor del origen. Ese período es el único tiempo característico del sistema, pues la constante de decaimiento  $a$  es nula, es decir se alcanza la trayectoria estacionaria en tiempo cero (figura 1.1.f).

Para el caso general de orden  $n$ :

$$s^{(n)} + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s^{(1)} + a_n s = 0 \quad (1.5.10)$$

una vez escrito en la forma (1.2.3) tiene una matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & & & . & . \\ . & . & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \dots & 0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (1.5.11)$$

Esta matriz tiene un *polinomio característico asociado* cuyos ceros son los autovalores  $\lambda_k$ .

$$p(t) = \prod_{k=1}^r (t - \lambda_k)^{n_k} \quad (1.5.12)$$

En la expresión anterior todos los  $\lambda_k$  son autovalores distintos,  $n_k \geq 1$  es la *multiplicidad* del autovalor  $\lambda_k$ , y  $n_1 + \dots + n_k = n$  es la dimensión del espacio vectorial. Cada  $\lambda_k$  tiene asociado un *autoespacio* de  $A$ , que es el núcleo de la matriz  $(A - \lambda_k I)$ . Se define además un *autoespacio generalizado* que es el núcleo de la matriz  $(A - \lambda_k I)^{n_k}$ . Los autoespacios y los autoespacios generalizados son los *subespacios o variedades invariantes* (no triviales) de la matriz  $A$ .

Las matrices en general cumplen las siguientes propiedades [Golub 96]:

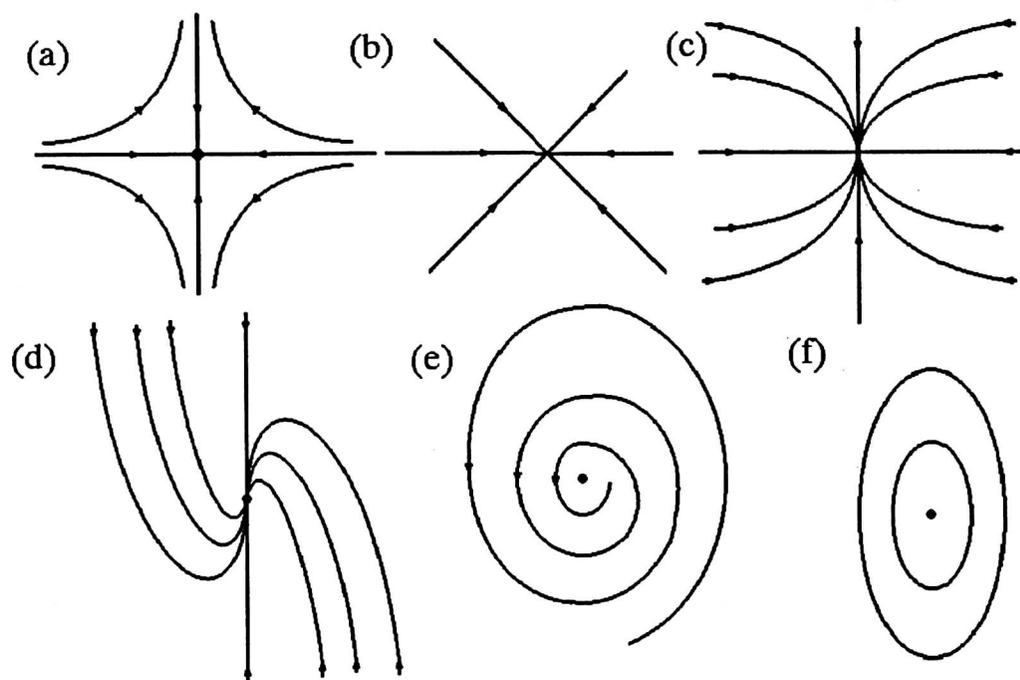


Figura 1.1. Formas canónicas para el caso de  $\mathbb{R}^2$  y sus soluciones. (a) Puerto ( $\lambda < 0 < \mu$ ); (b) Foco ( $\lambda = \mu < 0$ ); (c) Nodo ( $\lambda < \mu < 0$ ); (d) Nodo impropio ( $\lambda < 0$ ); (e) Sumidero en espiral ( $b > 0 > a$ ); (f) Centro ( $a = 0, b > 0$ ); (Los restantes casos surgen invirtiendo el sentido de las flechas)

- Dos matrices  $S$  y  $N$  que conmutan, es decir  $SN = NS$ , satisfacen  $e^{(S+N)} = e^S e^N = e^N e^S$
- Para toda matriz  $A$  se cumple que  $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
- Las matrices  $A$  y  $e^A$  tienen los mismos autovectores y los autovalores de  $e^A$  son  $e^\lambda$ , con  $\lambda$  autovalor de  $A$ .
- Si la matriz  $A$  es autoadjunta (hermítica en  $\mathbb{C}^n$  o simétrica en  $\mathbb{R}^n$ ) entonces siempre existe una transformación de semejanza que la diagonaliza. Si se trabaja en  $\mathbb{R}^{2n}$  en lugar de  $\mathbb{C}^n$  resulta diagonal por bloques.

El proceso de obtención de la forma canónica de Jordan de la matriz  $A$  se realiza en los siguientes pasos [Golub 96]:

- Toda matriz  $A$  que actúa sobre un espacio vectorial  $E$  puede expresarse

en forma unívoca en la forma  $A=N+S$ , donde las matrices  $N$  y  $S$  conmutan entre sí,  $S$  es semisimple (es decir en el campo complejo es diagonalizable y en el campo real es diagonalizable por bloques, con bloques de  $2 \times 2$ ) y  $N$  es nilpotente (es decir existe un  $m$  tal que  $N^m=0$ )

- La matriz nilpotente  $N$  puede llevarse, mediante un cambio de base (no necesariamente simple de obtener) a la forma de una matriz diagonal por bloques  $L$ , donde cada bloque es un *bloque nilpotente elemental*. El bloque nilpotente elemental es una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.13)$$

- La matriz  $S$  por su parte puede llevarse mediante un cambio de base a una forma diagonal por bloques, donde los bloques elementales tienen alguna de las formas siguientes:

$$[\lambda_q]; \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \quad (1.5.14)$$

- Luego toda matriz  $A$  puede llevarse mediante cambio de base (es decir mediante una transformación de semejanza) a la llamada *forma canónica de Jordan*, en la que se transforma en una matriz  $B$  diagonal por bloques. Luego la matriz  $B$  es expresable en la forma de una suma directa de matrices de menor dimensión. La dimensión de cada bloque coincide con la multiplicidad del correspondiente autovalor. Aquellos bloques en que el autoespacio coincide con el autoespacio generalizado tienen forma 1.5.14. Esto es lo que ocurre si los propios autovectores forman la base del correspondiente autoespacio. Estos bloques diagonales son de la forma  $S_i$ . En cambio, si se deben utilizar autovectores generalizados la forma del bloque resulta  $S_i+N_i$ . En definitiva la expresión global de la matriz  $B$  es la siguiente:

$$\mathbf{B} = \bigoplus_{i_b=1}^{n_b} (\mathbf{S}_i + \mathbf{N}_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i_b=1}^{n_b} \dim(i_b) = n \quad (1.5.15)$$

En la base en que la matriz  $\mathbf{B}$  queda expresada en su forma canónica la solución del sistema dinámico lineal es muy simple de obtener. En efecto, dado que las matrices  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{N}$  conmutan entre sí resulta:

$$e^{t\mathbf{B}} = e^{t\mathbf{S}} e^{t\mathbf{N}}. \quad (1.5.16)$$

Según las formas canónicas adoptadas se dan distintos casos, por ejemplo, para un bloque  $\mathbf{B}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{N}_i$  llamado *bloque  $\lambda$ -diagonal elemental de Jordan*:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.17)$$

entonces  $\vec{s}(t) = e^{t\mathbf{B}} \vec{C}$  (con  $\vec{C}$  vector de condiciones iniciales) resulta:

$$\vec{s}(t) = e^{t\lambda} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & t & & & & \\ & & t^2/2 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & t^{n-1} & & & \\ & & & & & & (n-1)! & t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix} \quad (1.5.18)$$

Para un *bloque elemental de Jordan con diagonal compleja*:

$$B = \begin{bmatrix} D & & & \\ I & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & & I & D \end{bmatrix} \text{ con } D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ é } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5.19)$$

la correspondiente matriz  $T$  obtenida de la complexificación, tiene la forma normal:

$$B = \begin{bmatrix} \mu & & & \\ I & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & & I & \mu \end{bmatrix} \text{ con } \mu = a + ib \quad (1.5.20)$$

y teniendo en cuenta que  $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt)$  se obtiene:

$$s_j^{(1)}(t) = e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [L_{j-k} \cos bt - M_{j-k} \operatorname{sen} bt] \quad (1.5.21)$$

$$s_j^{(2)}(t) = e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [M_{j-k} \cos bt - L_{j-k} \operatorname{sen} bt]$$

donde  $j$  corre de 1 a  $m$ , con  $m$  la dimensión del autoespacio en el campo complejo ( $2m$  en el campo real) y  $s_j^{(1)}(0) = L_j$  en tanto que  $s_j^{(2)}(0) = M_j$ . La base en la que se logra la forma canónica para  $B$  está constituida, como se dijo arriba, por los autovectores y los autovectores generalizados de  $B$ .

Cualquiera sea la dimensión del problema lineal, los autoespacios invariantes son siempre hiperplanos, es decir espacios euclídeos  $E_i$ . Las condiciones de estabilidad están ligadas al signo de la parte real de los autovalores de la matriz  $A$ , correspondientes a cada uno de estos autoespacios, pues son estas partes reales las que definen las constantes de tiempo de decaimiento del sistema. El espacio total  $E = \mathbb{R}^n$  puede ponerse como suma directa de los autoespacios generalizados  $E_i$ , es decir:

$$E = \bigoplus_{i_b=1}^{n_b} E_i \quad (1.5.22)$$

de modo que cada uno de los bloques corresponde a un subespacio invariante de autovalor  $\lambda$ .

Si se efectúa la suma directa de todos los autoespacios correspondientes a  $\text{Re}\{\lambda\} < 0$  se obtiene el *autoespacio invariante estable*  $E^s$ . Del mismo modo, si se efectúa la suma directa de los autoespacios correspondientes a  $\text{Re}\{\lambda\} > 0$  se obtiene el *autoespacio invariante inestable*  $E^u$ . Por último, la suma directa de los autoespacios correspondientes a  $\text{Re}\{\lambda\} = 0$  da por resultado el *autoespacio invariante central*  $E^c$ .

En resumen, los autoespacios invariantes permiten encontrar las soluciones más elementales del sistema lineal. En el caso más general los autovalores son complejos y cada solución elemental corresponde a una constante de tiempo de decaimiento y a un período de oscilación característicos, dados respectivamente, por los módulos de la parte real e imaginaria del correspondiente autovalor. Para el caso en que el autovalor es imaginario puro la dinámica restringida al subsistema de dos dimensiones dentro del autoespacio asociado se denomina un *modo normal*. En el capítulo 6 se retoma el tema de las variedades invariantes bidimensionales, en conexión con la determinación de los modos normales de oscilación de sistemas de infinitos grados de libertad. Nótese además que las nociones de estabilidad definidas son de naturaleza *local* pues se vinculan con el comportamiento de las soluciones en las proximidades del punto fijo  $\vec{x}^*$ .

Los sistemas lineales han sido extensamente aplicados en la ingeniería y se han desarrollado varios criterios de estabilidad que son equivalentes al de análisis de autovalores explicado en este acápite. Entre ellos merece mencionarse los criterios de Routh y de Hurwitz, extensamente aplicados en sistemas de control lineales. El tipo de sistema dinámico está en general modelado por una EDO, lineal, de orden  $n$ , no autónoma. Tanto el criterio de Routh como el de Hurwitz se basan en el estudio de los polos de la transformada de Laplace de la solución del sistema dinámico, que se denomina la *señal de salida*. Se supone que esa transformada puede escribirse en la forma [D'Azzo et al 70]:

$$X_o(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} X_i(s), \quad (1.5.23)$$

donde  $X_i(s)$  es la transformada de Laplace de la excitación (*señal de entrada*), y  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios en la variable  $s$ . Supuesto que  $X_i(s)$  no tiene polos, los polos de la señal de salida son entonces los ceros del polinomio  $Q(s)$ . Puede demostrarse que esos polos son los autovalores de la matriz  $A$  estudiados arriba [Akin 93]. El criterio de estabilidad, basado en que los polos tengan parte real negativa, es entonces equivalente al ya mencionado. Tanto el criterio de Routh como el de Hurwitz permiten determinar el número de polos con parte real positiva, sin necesidad de obtenerlos explícitamente.

### 1.6 Puntos fijos y su estabilidad en el problema no lineal.

El estudio del sistema no lineal (1.2.2) se inicia también con la búsqueda de los puntos fijos que, a diferencia del caso lineal, pueden ser varios puntos aislados. Supóngase que  $\vec{x}^*$  es uno de esos puntos fijos. Si se linealiza el sistema (1.2.2) alrededor de  $\vec{x}^*$ , mediante el cambio de variables:

$$\vec{x} = \vec{x}^* + \vec{\xi} \quad (1.6.1)$$

se obtiene:

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = D\vec{f}(\vec{x}^*) \cdot \vec{\xi}; \text{ con } D\vec{f}(\vec{x}^*) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]_{\vec{x} = \vec{x}^*}, \quad (1.6.2)$$

que es un sistema lineal a coeficientes constantes, cuya solución está dada por:

$$\vec{\xi}(t) = e^{tD\vec{f}(\vec{x}^*)} \cdot \vec{\xi}(0). \quad (1.6.3)$$

La pregunta importante es: ¿cuándo es lícito efectuar el análisis lineal?; es decir, ¿cuándo el sistema no lineal responderá en forma similar al linealizado?. La respuesta surge de dos teoremas fundamentales [Guckenheimer et al 83].

• Teorema de Hartman-Grobman

Si todos los autovalores de  $D\vec{f}(\vec{x}^*)$  tienen parte real no nula, existe un homeomorfismo en alguna vecindad  $U$  de  $\vec{x}^*$ , entre las órbitas del flujo no lineal y las del flujo lineal definidas por  $\exp [t D\vec{f}(\vec{x}^*)]$ , y dicho homeomorfismo preserva el sentido de las órbitas.

• Teorema de las variedades

Si  $\vec{x}^*$  es un punto singular hiperbólico, existen variedades locales estable e inestable del sistema no lineal de igual dimensión que los subespacios estable e inestable del sistema linealizado en  $\vec{x}^*$ . Estas variedades son tan suaves como  $\vec{f}$  tienen la misma dimensión que los respectivos subespacios del sistema lineal y son tangentes a ellos.

Un punto fijo es hiperbólico si todos los autovalores de  $Df(\vec{x}^*)$  tienen parte real no nula. Para cada punto fijo se definen las variedades locales, estable e inestable, como sigue:

Variedad estable:

$$W_{loc}^s(\vec{x}^*) = \left\{ \vec{x} \in U, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\vec{x}) = \vec{x}^* \wedge \phi_t(\vec{x}) \in U, \forall t \geq 0 \right\} \quad (1.6.4)$$

Variedad inestable

$$W_{loc}^u(\vec{x}^*) = \left\{ \vec{x} \in U, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\vec{x}) = \vec{x}^* \wedge \phi_t(\vec{x}) \in U, \forall t \leq 0 \right\}, \quad (1.6.5)$$

donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una vecindad del punto fijo  $\vec{x}^*$ . Las variedades invariantes  $W_{loc}^s(\vec{x}^*)$  y  $W_{loc}^u(\vec{x}^*)$  son los análogos no lineales de los subespacios planos invariantes del problema lineal, es decir  $E^s$  y  $E^u$  respectivamente.

De los dos teoremas anteriores surge que todo flujo no lineal, hiperbólico en un punto fijo  $\vec{x}^*$ , se comporta, en el entorno de ese punto fijo, esencialmente como una deformación del flujo linealizado  $D\vec{f}(\vec{x}^*)$ . Además la variedad estable (inestable) es tangente al autoespacio  $E^s$  ( $E^u$ )

correspondiente a los autovalores de  $D\vec{f}(\vec{x}^*)$  con parte real negativa (positiva). Cuando el punto fijo no es hiperbólico es necesario un desarrollo a mayor orden que el primero para poder analizar la dinámica del sistema no lineal. La Figura 1.2 muestra el significado de ambos teoremas para el caso de un punto fijo tipo puerto.

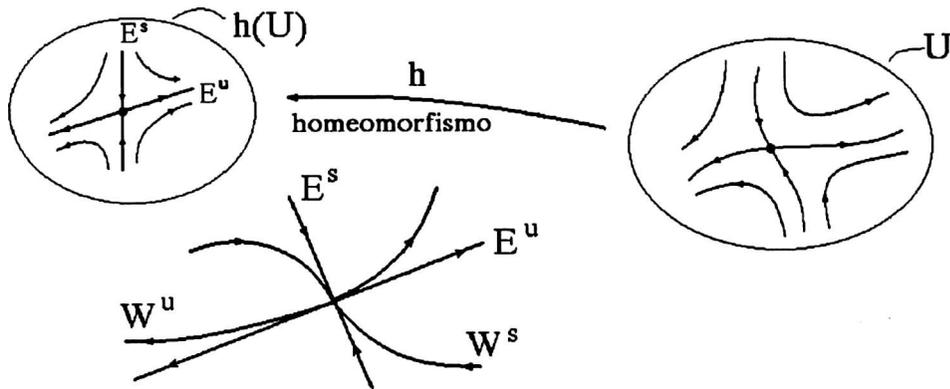


Figura 1.2. Teorema de Hartman-Grobman. Existe un homeomorfismo entre las variedades estable e inestable y sus respectivas versiones lineales (tangentes)

El estudio de estabilidad de los conjuntos límite juega un papel central. En el caso de los puntos fijos la noción de estabilidad utilizada más a menudo es la de Liapunov en la que un punto fijo se considera estable si soluciones cercanas permanecen cercanas para todo tiempo futuro [Lyapunov 47]. La definición matemática rigurosa es la siguiente (ver Figura 1.3a):

- Criterio de estabilidad de Liapunov

Sea  $\vec{x}^* \in W$  un punto de equilibrio. Es estable si para toda vecindad  $U$  de  $\vec{x}^*$  existe otra vecindad  $U_1$  de  $\vec{x}^*$  tal que todas las soluciones que arrancan dentro de  $U_1$  permanecen dentro de  $U$ ,  $\forall t > 0$ .

El criterio de Liapunov es más débil que el siguiente criterio de estabilidad asintótica (ver Figura 1.3b):

- Criterio de estabilidad asintótica

Sea  $\vec{x}^* \in W$  un punto de equilibrio. Es estable si para toda vecindad  $U$  de  $\vec{x}^*$  satisface el criterio de Liapunov y además se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

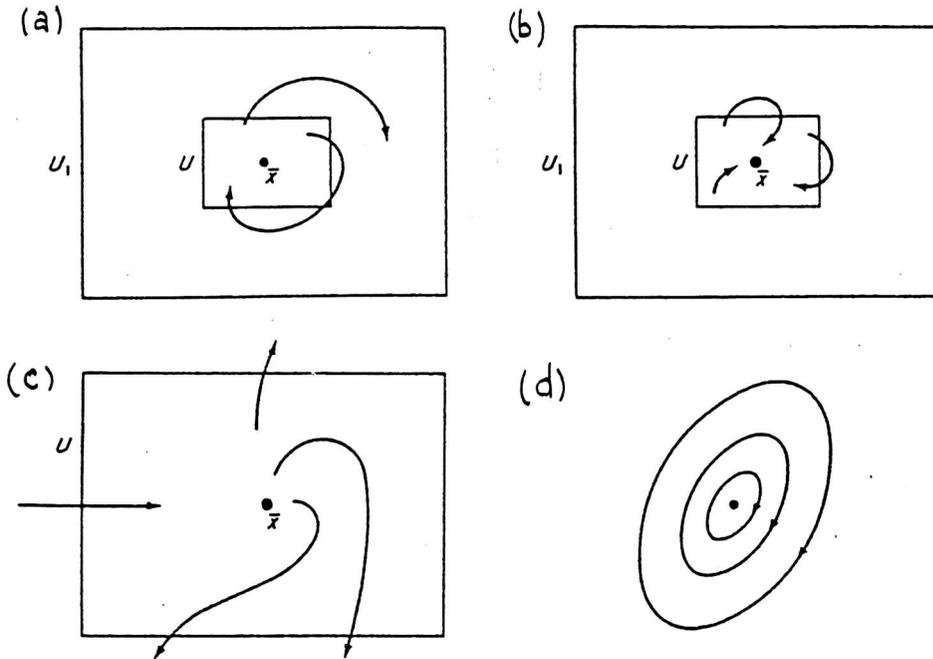


Figura 1.3. (a) Estabilidad; (b) estabilidad asintótica; (c) inestabilidad, (d) estable pero asintóticamente inestable

Un punto fijo que no es estable (asintóticamente estable) es inestable (asintóticamente inestable; ver Figuras 1.3.c y 1.3d). Los puntos fijos hiperbólicos son inestables o asintóticamente estables. En el caso de los puntos fijos no hiperbólicos la estabilidad del sistema lineal no define la del no lineal. Se dice en ese caso que el sistema es *estructuralmente inestable* pues una perturbación, aún infinitesimal, modifica sustancialmente la dinámica. El oscilador armónico, por ejemplo, tiene un centro en el origen pero si se agrega un término disipativo ese punto fijo se convierte en un sumidero o una fuente según el signo del término incorporado.

Liapunov demostró un criterio de estabilidad válido para algunos sistemas (hiperbólicos y no hiperbólicos). Tiene el inconveniente que requiere encontrar una función llamada *función de Liapunov*, sin que exista ningún método sistemático para lograrlo. Su enunciado es el siguiente:

• Criterio basado en la función de Liapunov

Sea  $\vec{x}^* \in W$  un equilibrio del sistema dinámico. Sea  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en una vecindad  $U$  de  $\vec{x}^*$  con  $U \subset W$ . Sea  $V$  diferenciable en  $U - \vec{x}^*$  y sea  $V(\vec{x}^*) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ . Sea además  $dV(\Phi_t(\vec{x}))/dt|_{t=0} \leq 0$  en  $U - \vec{x}^*$ . Entonces  $\vec{x}^*$  es estable.

Si  $dV/dt < 0$  (en lugar de  $\leq$ ) entonces la estabilidad es asintótica. La función (si se la encuentra) se llama función de Liapunov o función de Liapunov estricta (para el caso de estabilidad asintótica).

Un caso en el que puede encontrarse la función de Liapunov es el sistema dinámico siguiente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \tag{1.6.6}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\Phi(\vec{x})$$

que corresponde a la ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\text{grad}\Phi(\vec{x}). \tag{1.6.7}$$

Se trata de un sistema conservativo (por ejemplo una masa sometida a fuerzas conservativas únicamente). En este caso el punto de equilibrio  $\vec{x}^*$  corresponde a:

$$\text{grad}\Phi(\vec{x}^*) = 0. \tag{1.6.8}$$

La función de Liapunov se construye a partir de la energía total y está dada por:

$$V(\vec{x}, \vec{v}) = E - E^*; \text{ con } E(\vec{x}, \vec{v}) = m\vec{v}^2/2 + m\Phi(\vec{x}) \tag{1.6.9}$$

Nótese que  $V(\vec{x}^*) = 0$ , y  $dV/dt = 0$ . En este caso el criterio de Liapunov equivale al de Lagrange: un punto de equilibrio de un sistema sometido a un campo de fuerzas conservativo es estable si la energía potencial tiene un

mínimo local absoluto en ese punto.

Para algunos problemas hiperbólicos también es posible emplear este criterio de estabilidad obteniéndose el mismo resultado que mediante la linealización. Por ejemplo, para un péndulo con amortiguamiento, la función de Liapunov es la energía total y tiene derivada negativa para el punto de equilibrio correspondiente a la posición más baja.

Otro caso en que es aplicable corresponde a los denominados *sistemas tipo gradiente*, que son de la forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\text{grad}V(\vec{x}) \quad (1.6.9)$$

En este caso la propia función  $V(\vec{x})$  es la función de Liapunov buscada. Si  $dV/dt$  es la derivada temporal de  $V$  sobre las trayectorias del sistema dinámico resulta que  $dV/dt \leq 0$  para todo  $\vec{x}$ . La igualdad corresponde a los puntos de equilibrio. Por lo tanto todos los puntos de equilibrio aislados resultan ser asintóticamente estables para este tipo de sistemas [Akin 93].

### 1.7 Otros conjuntos $\omega$ -límite y $\alpha$ -límite. Dominios de atracción.

En los sistemas no lineales existen otros conjuntos  $\omega$ -límite ( $\alpha$ -límite), además de los puntos fijos. La Figura 1.4 muestra algunos de los que aparecen en sistemas no lineales en  $\mathbb{R}^2$ .

El caso más importante, para los problemas de baja dimensión que se estudian en esta tesis, es el de los ciclos límite (Figura 1.4d). Los ciclos límite son trayectorias cerradas (aisladas, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, con las órbitas de un oscilador armónico), y son conjuntos  $\omega$ -límite (ó  $\alpha$ -límite) de, al menos todos los puntos que los integran. Las conexiones entre puertos, denominadas curvas *homoclínicas* o *heteroclínicas*, según conecten un mismo puerto o puertos diferentes, son también conjuntos  $\omega$ -límite ( $\alpha$ -límite) propios de los flujos planos (Figura 1.4c).

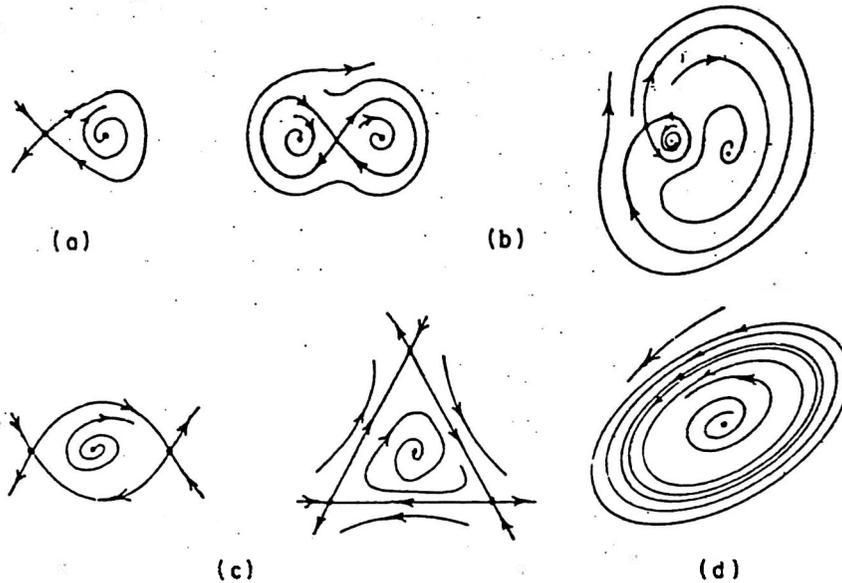


Figura 1.4. Algunos conjuntos límite para flujos planos. (a) órbita homoclinica, (b) órbita homoclinica doble; (c) órbitas heteroclinicas; (d) ciclos límite

Cada punto fijo de un sistema dinámico tiene, un entorno tal que cualquier curva solución que comience dentro de él tiende al punto fijo (para  $t \rightarrow \infty$ ). La unión de todas esas curvas solución, que tienden a un punto fijo dado, conforman su *dominio de atracción*. Las variedades estables de los distintos puntos fijos actúan como separatrices en los respectivos dominios de atracción, que necesariamente son disjuntos (supuesto que se cumplen los requisitos del teorema de existencia y unicidad de las soluciones).

La Figura 1.5a muestra el caso de un sistema con un punto fijo repulsor en el origen y varios ciclos límite a su alrededor. Estos ciclos límite son alternativamente atractores o repulsores. Esta configuración de singularidades corresponde a modelos denominados *osciladores blandos* como los estudiados en el capítulo 2. Dado que en este caso la variedad estable del punto fijo es el propio punto fijo, que es inestable, cualquier pequeña perturbación hace que el sistema evolucione hacia el ciclo límite interno que es atractor. También existen *osciladores duros*, con un punto fijo en el origen (atractor) y al menos dos ciclos límite rodeándolo (el interno repulsor, el externo atractor). En estos osciladores es necesario superar

el ciclo límite interno para que el sistema evolucione hacia el ciclo límite exterior, en lugar de caer en el punto fijo del origen.

En la Figura 1.5b se muestra el caso de un sistema con varios puntos fijos y un ciclo límite y se indica las variedades estable e inestable de cada punto fijo y los respectivos dominios de atracción. Nótese que la variedad estable del punto fijo tipo puerto  $q_2$  sirve como separatriz entre el dominio de atracción del ciclo límite y el del punto fijo atractor  $q_3$ . Los dominios de atracción de los puertos  $q_2$  y  $q_4$  se reducen a sus variedades estables, en tanto que el dominio de atracción de  $q_1$  es el propio  $q_1$  [Guckenheimer et al 83].

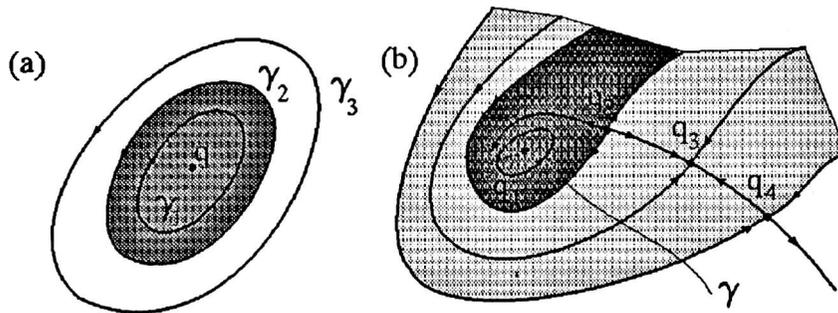


Figura 1.5. Dos ejemplos de dominios de atracción y variedades. (a) sistema con un punto fijo repulsor en el origen y un ciclo límite atractor. La zona central sombreada es el dominio de atracción de la órbita  $\gamma_1$ ; la zona externa es dominio de atracción de  $\gamma_3$ . Las órbitas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , y  $\gamma_3$  son atractor, repulsor y atractor respectivamente. El punto fijo  $q$  es repulsor. (b) sistema con varios puntos fijos y un ciclo límite atractor. El punto  $q_1$  es repulsor,  $q_2$  y  $q_4$  son puertos y  $q_3$  es un foco. Las zonas sombreadas corresponden al dominio de atracción del ciclo límite  $\gamma$  y del punto fijo atractor  $q_3$  respectivamente.

La presencia de ciclos límite o *soluciones oscilatorias estables autosostenidas*, como también se los denomina, es fácil de comprender cualitativamente mediante el siguiente ejemplo que corresponde al modelo denominado de Rayleigh (Figura 1.6) [Nayfeh et al 79]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \epsilon \left( \frac{dx}{dt} - \frac{1}{3} \left( \frac{dx}{dt} \right)^3 \right) \quad \text{con } (\epsilon > 0); \quad (1.7.1)$$

La existencia del ciclo límite se debe al hecho que el sistema posee una *fuerza viscosa no lineal*, dada por el término con coeficiente  $\epsilon$ , que puede ser de amortiguamiento o de regeneración, conforme al signo de la expresión entre paréntesis, signo que depende de la región del espacio de fases en que nos encontremos. En efecto si la expresión entre paréntesis es negativa, el término viscoso es regenerativo en tanto, en caso contrario se vuelve disipativo. La "solución de compromiso" es justamente el ciclo límite. El valor del parámetro  $\epsilon$  permite modificar la forma de la oscilación autosostenida, haciéndola "casi senoidal", cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  o "casi cuadrada" cuando  $\epsilon \rightarrow \infty$ . En este último caso las oscilaciones se denominan de *relajación*, nombre que refleja el hecho que el sistema permanece gran parte del período en el techo o en el valle de la oscilación en tanto que las transiciones entre ambos son breves. En la Figura 1.7 se muestran las oscilaciones estacionarias para varios valores de  $\epsilon$ .

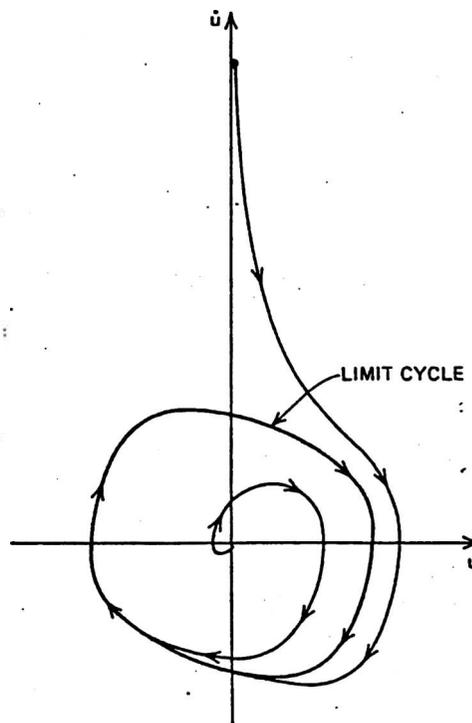


Figura 1.6: Ciclo límite y trayectorias de la ecuación de Rayleigh para  $\epsilon=0.1$ ; las trayectorias tienden al ciclo límite desde adentro o desde afuera.

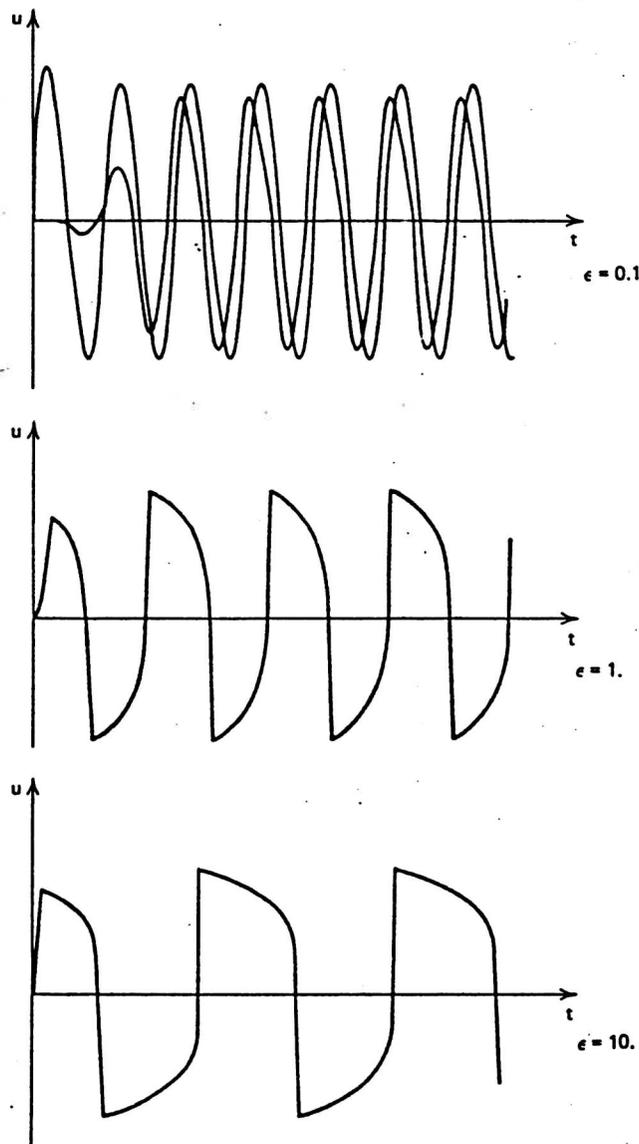


Figura 1.7: oscilaciones del modelo de Rayleigh para varios valores de  $\epsilon$ .

La existencia de un ciclo límite ( $\omega$ -límite o  $\alpha$ -límite) requiere que el sistema sea al menos bidimensional. Precisamente para el caso bidimensional el *teorema de Poincaré-Bendixon* [Guckenheimer et al 83] establece: un conjunto  $\omega$ -límite ( $\alpha$ -límite) de un flujo en  $\mathbb{R}^2$ , que no contiene ningún punto fijo, es un ciclo límite. Por otra parte si sobre una región simplemente conexa  $D \subset \mathbb{R}^2$  la expresión  $\partial f_1/\partial x + \partial f_2/\partial y$  no es idénticamente nula, ni cambia de signo, entonces es imposible la existencia de ciclos límite encerrados enteramente en  $D$  [*criterio de Bendixon*].

Un ciclo límite es una *copia difeomórfica* del círculo  $S^1$ , por lo que frecuentemente es conveniente pensar en los ciclos límite como circunferencias. En el capítulo 2 se utiliza esta propiedad para construir un mapa de los osciladores de baja dimensión que allí se estudian.

La dinámica de un sistema en  $\mathbb{R}^2$  es sumamente restringida pues la unicidad de las soluciones impide que una curva solución pueda cortarse a sí misma por lo que no es posible formar ningún tipo de *nudo* [González et al 89]. El tipo de singularidades y el comportamiento asintótico de estos sistemas se conoce en forma completa [Hirsh et al 74, Guckenheimer et al 83]. Para los sistemas de mayor dimensión se presentan conjuntos límites más complejos.

Para dimensión tres por ejemplo aparecen, entre otros, las *soluciones cuasiperiódicas* y los *atractores caóticos* y en dimensiones mayores existen *atractores hipercaóticos* como el de Rossler [Holden 86].

Una solución cuasiperiódica es aquella que se puede expresar como suma finita de funciones periódicas:

$$\vec{x} = \sum_i \vec{h}_i(t) \quad (1.7.2)$$

donde  $\vec{h}_i$  tiene período mínimo  $T_i$  y una frecuencia  $f_i = 1/T_i$ . Si el sistema está recorriendo una solución cuasiperiódica, existe un conjunto finito de *frecuencias base*  $\{\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\}$  con las siguientes dos propiedades:

- es un conjunto linealmente independiente en el sentido que no existe un conjunto de enteros no nulos  $\{k_1, \dots, k_p\}$  tales que  $k_1 \hat{f}_1 + \dots + k_p \hat{f}_p = 0$ .
- forma una base entera finita para los  $f_i$ ; es decir, todas las frecuencias pueden expresarse en la forma  $f_i = k_1 \hat{f}_1 + \dots + k_p \hat{f}_p$  siendo  $\{k_1, \dots, k_p\}$  un conjunto de números enteros.

En palabras, una forma de onda cuasiperiódica es una suma de formas de onda periódicas cada una de las cuales tiene una frecuencia que es una *combinación* lineal de las frecuencias base. Note que las frecuencias base no están unívocamente definidas, pero la dimensión  $p$  sí lo está. Una

solución cuasiperiódica con base de dimensión  $p$  se llama  $p$ -periódica. (Una forma de onda periódica es un caso particular de onda cuasiperiódica con  $p=1$ ). Un ejemplo simple es el de una solución 2-periódica:

$$x(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (1.7.3)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son inconmensurables, es decir su cociente es un irracional. El espectro de tal forma de onda consiste en dos conjuntos de armónicos. El primer conjunto, con frecuencia fundamental  $1/T_1$ , corresponde a  $h_1(t)$ , y el segundo conjunto, con frecuencia fundamental  $1/T_2$ , corresponde a  $h_2(t)$ . La Figura 1.8 muestra la trayectoria cuasiperiódica para el caso de un oscilador de Van der Pol con  $\mu=1$ , forzado por una señal externa senoidal, de amplitud 0.5 y período 1.1.

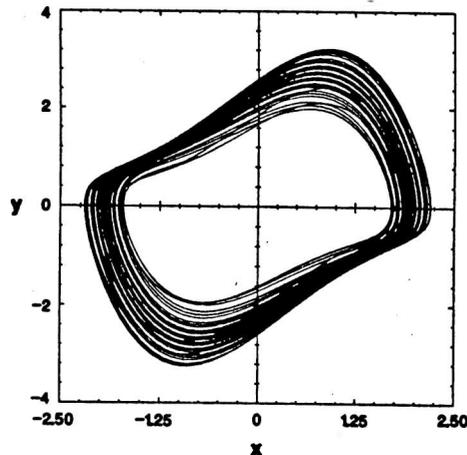
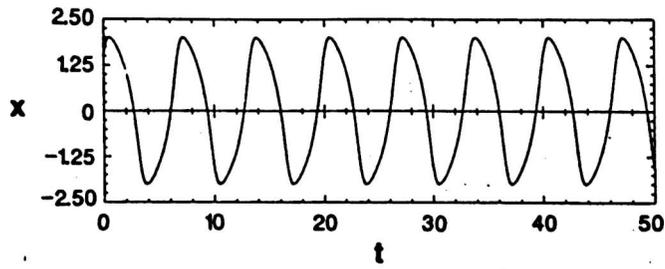
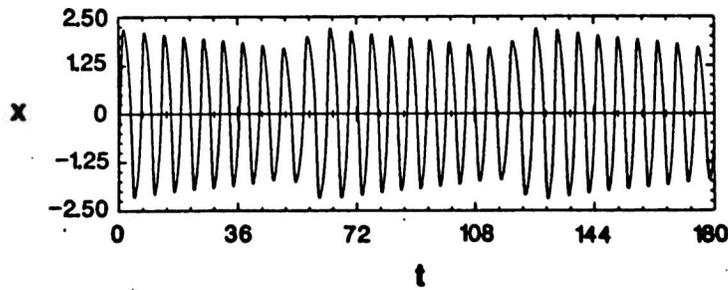
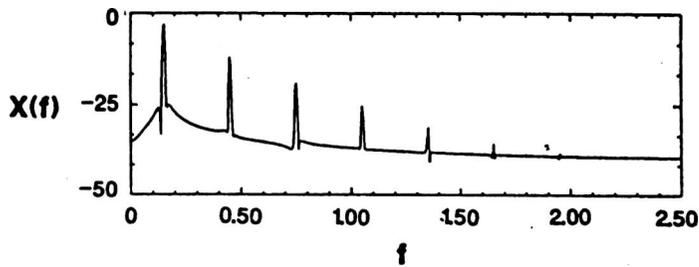


Figura 1.8. Trayectoria cuasiperiódica del oscilador de Van der Pol forzada con  $0.5 \cos(1.81\pi t)$ .

La Figura 1.9, por su parte, muestra el espectro de una trayectoria 2-periódica de la ecuación de Van der Pol forzada. El espectro consiste en el espectro del sistema libre (Figura 1.9a) al que se adicionan más bandas laterales, "apelotonadas" debido a la relativamente pequeña modulación (Figura 1.9b). Dentro de los errores de medida, el espaciado de los armónicos dentro de las bandas laterales es la diferencia entre la frecuencia natural  $1/T_1$  y la frecuencia forzante  $1/T_2$ .



(a)



(b)

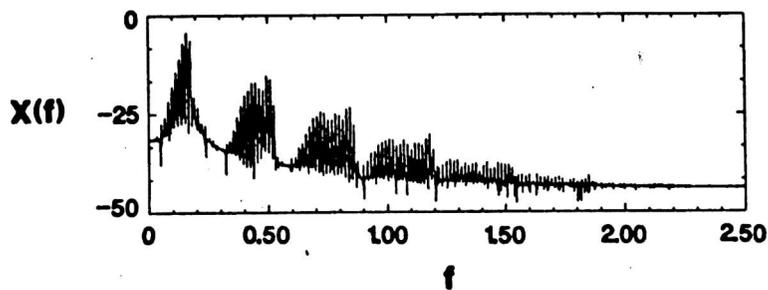


Figura 1.9. Forma de onda y transformada de Fourier para soluciones del oscilador de Van der Pol. (a) oscilador libre, con  $\mu=1$ . (b) trayectoria cuasiperiódica de la Figura 1.8

Los *atractores extraños* no son objetos geométricos simples, como el círculo o el toro, sino que están relacionados con los conjuntos de Cantor

y los fractales [Mandelbrot et al 77]. Una de sus características esenciales es su dimensión fractal [González et al 88]. Las propiedades de los atractores extraños se estudian con mayor detalle en los Capítulos 2 y 3. Como ejemplo, la Figura 1.10 muestra el atractor extraño de uno de los modelos estudiados [Campbell et al 89].

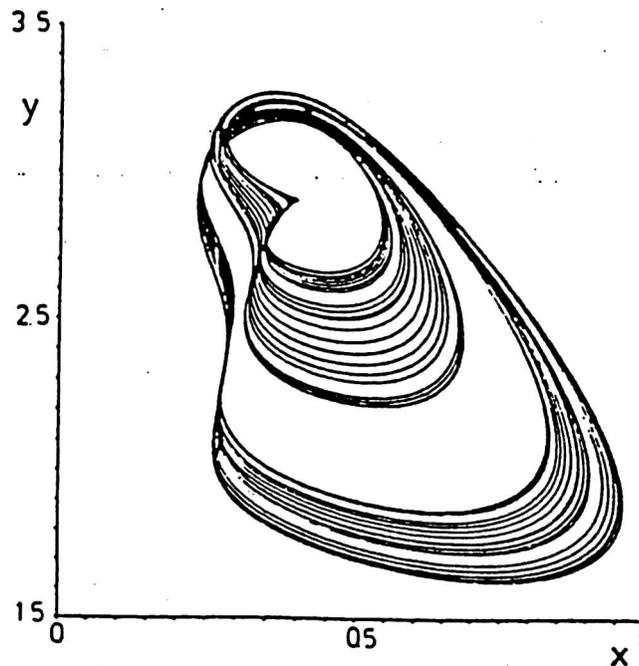


Figura 1.10. Atractor extraño del oscilador de Brusellas estudiado en el capítulo 2, para  $a=0.05$  y  $\omega=0.80$ .

### 1.8 Estabilidad de órbitas cerradas

Sea  $\gamma$  una órbita cerrada del flujo. Se dice que es asintóticamente estable si para todo abierto  $U_1 \subset W$ , tal que  $\gamma \subset U_1$  existe otro abierto  $U_2$ , tal que  $\gamma \subset U_2 \subset U_1$  y se cumple que para todo  $t > 0$ ,  $\Phi_t(U_2) \subset U_1$  y  $d[\Phi_t(\vec{x}), \gamma]$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito, siendo  $d(\vec{x}, \gamma)$  la mínima distancia desde  $\vec{x}$  hasta un punto de  $\gamma$  [Hirsch et al 74].

Las órbitas del oscilador armónico no son asintóticamente estables pues no están aisladas entre sí (sino que están una pegada al lado de otra), en tanto que los ciclos límite de los osciladores estudiados en el

capítulo 2 son asintóticamente estables.

Si  $\gamma$  es una órbita cerrada, asintóticamente estable y de período  $\lambda$ , entonces existe un entorno de  $\gamma$  tal que todos los puntos de  $U$  tienen un período asintótico  $\lambda$  (es decir  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi_{\lambda+t}(\vec{x}) - \phi_t(\vec{x})| = 0$ ). Por otra parte si  $\gamma$  es una órbita de período  $\lambda$  y  $\vec{p} \in \gamma$  es un punto tal que  $n-1$  autovalores del mapa lineal  $D\Phi_\lambda(\vec{p})$  son menores que uno en valor absoluto, entonces  $\gamma$  es asintóticamente estable (toda órbita tiene al menos un autovalor igual a 1) [Hirsch et al 74].

Este requisito es condición suficiente, pero no necesaria para la estabilidad asintótica. Cuando una órbita lo satisface, se dice que es un *atractor periódico*, lo cual significa que los puntos vecinos no sólo tienen el mismo período asintótico que la órbita  $\gamma$ , sino que tienen también una fase asintótica idéntica a la de un punto vecino sobre  $\gamma$ . En los sistemas estudiados en el capítulo 2, el cumplimiento de este tipo de estabilidad permite construir curvas continuas, las *curvas isofase* [Campbell et al 89, Larrondo et al 96a].

El método habitual en teoría de perturbaciones consiste en definir la solución en la forma de la órbita más una pequeña perturbación y estudiar luego el crecimiento o decrecimiento de esa perturbación. Un modo alternativo especialmente útil y con una visión más geométrica es el que se establece mediante el *mapa de Poincaré* [Poincaré 1892].

● Teorema de Poincaré

Sea  $\gamma$  una solución periódica de algún flujo  $\phi_t$  en  $\mathbb{R}^n$ , proveniente de un campo vectorial no lineal  $\vec{f}(\vec{x})$ . Se toma una sección local transversal  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensión  $n-1$ <sup>1</sup>. Se achica  $\Sigma$  hasta que la curva  $\gamma$  la corte en un solo punto  $\vec{p}$ . Sea  $U \subset \Sigma$  un entorno de  $\vec{p}$ . Se define el mapa de Poincaré  $P: U \rightarrow \Sigma$ , para todo  $\vec{q} \in U$ , por la siguiente expresión:

$$P(\vec{q}) = \phi_\tau(\vec{q}) \tag{1.8.1}$$

<sup>1</sup> La condición de transversalidad se cumple si  $\vec{f}(x) \cdot \vec{n}(x) \neq 0$ , para todo  $\vec{x} \in \Sigma$ , siendo  $\vec{n}(x)$  la normal unitaria a  $\Sigma$ , en el punto  $x$ .

donde  $\tau = T(\vec{q})$ , es el tiempo requerido para que la trayectoria  $\phi_\tau(\vec{q})$ , basada en  $\vec{q}$ , retorne por primera vez a  $\Sigma$ . Note que en general  $\tau$  depende de  $\vec{q}$  y no será igual a  $T = T(\vec{p})$ , período de  $\gamma$ . No obstante,  $\tau \rightarrow T$  a medida que  $\vec{q} \rightarrow \vec{p}$ .

A través del mapa de Poincaré el estudio de la estabilidad de la órbita periódica se reduce al de la estabilidad del punto fijo  $\vec{p}$  del mapa de Poincaré como puede verse en la Figura 1.11.

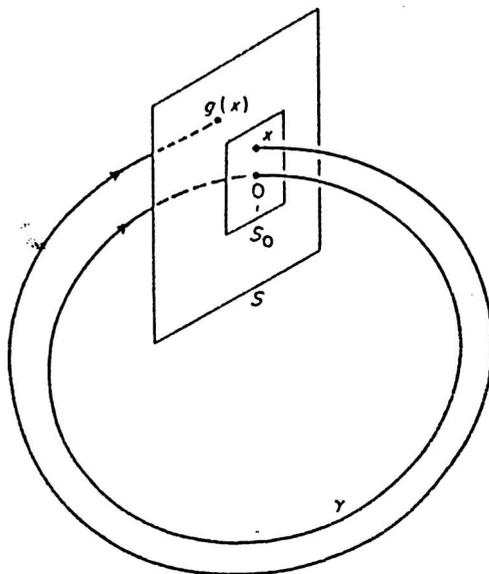


Figura 1.11. Mapa de Poincaré. La curva  $\gamma$  es una órbita periódica y se corresponde con un punto fijo  $x^*$  del mapa (del sistema discreto)

Para los mapas no lineales existen teoremas análogos a los dados para el caso de flujos. Los enunciados de estos teoremas son los siguientes:

- Teorema de Hartman-Grobman

Sea  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa suave con inversa (difeomorfismo). Sea  $\vec{x}^*$  un punto fijo hiperbólico; entonces existe un homeomorfismo  $H$  definido sobre alguna vecindad  $U$  de  $\vec{x}^*$  tal que  $H(G(\vec{\xi})) = DG(\vec{x}^*) \cdot H(\vec{\xi})$ , para todo  $\vec{\xi} \in U$ .

● Teorema de las variedades

Sea  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa suave con inversa (difeomorfismo). Sea  $\vec{x}^*$  un punto fijo hiperbólico; entonces existen las variedades locales estable e inestable  $W_{loc}^s(\vec{x}^*)$  y  $W_{loc}^u(\vec{x}^*)$ , las cuales resultan ser tangentes a los subespacios estable e inestable del mapa linealizado y tienen la misma dimensión que ellos.

La diferencia entre el caso discreto y el continuo consiste en que los puntos fijos hiperbólicos del sistema discreto tienen asociados autovalores con módulo distinto de 1 en tanto que los del sistema continuo, tienen asociados autovalores con parte real distinta de cero. Sin embargo, como se estudia en varios modelos en el capítulo 2, los sistemas dinámicos continuos pueden a menudo discretizarse mediante una variante del mapa de Poincaré sencilla de implementar: el *mapa estroboscópico* [Campbell et al 89, Glass et al 82, González et al 84, Larrondo et al 96a].

En aquellos sistemas en que este mapa está bien definido, como es el caso de los osciladores forzados de los capítulos 2 y 3, el mapa estroboscópico se obtiene, tanto teórica como experimentalmente, muestreando las variables del sistema. El estudio en detalle de la conexión entre sistemas continuos de dimensión finita y sistemas discretos se reserva para el capítulo 2

## Capítulo 2

### Sistemas de baja dimensión (I)

#### 2.1.- Caos y sincronización en osciladores forzados

El problema de la sincronización de osciladores mediante señales externas aparece en forma reiterada tanto en aplicaciones tecnológicas como en estudios básicos. Desde el inicio de las comunicaciones electrónicas, se ha empleado la técnica de utilizar un oscilador patrón, de frecuencia muy estable (un oscilador a cristal por ejemplo), pero de baja potencia como sincronismo de varios osciladores de inferior calidad y de mayor potencia [Cartwright et al 48].

Por otra parte el comportamiento de muchos sistemas complejos puede entenderse asimismo estudiando la sincronización entre grandes poblaciones de osciladores acoplados [Bonilla et al. 93]. La biología provee un gran número de ejemplos de este tipo de sistemas: la evolución de poblaciones de distintas especies interactuantes [Bottani 95], la actividad rítmica de las células cardíacas [Glass 83, 84a, 84b], en el metabolismo celular [Rapp 79], el funcionamiento de las neuronas sensoriales [Hodgkin et al. 52], son algunos ejemplos.

La sincronización de osciladores desacoplados entre sí, que es el caso típico en comunicaciones, es en esencia más simple que el alterar, mediante señales externas, el sincronismo natural que se establece cuando osciladores casi idénticos se acoplan entre sí constituyendo un sistema más robusto [Carroll et al 94] pero aún el problema más sencillo de varios osciladores independientes entre sí, sincronizados por una señal periódica externa presenta una estructura de resonancias múltiples muy compleja [González et al 83, Arizmendi et al 84, Larrondo et al 96a].

En los últimos años han surgido nuevas áreas de investigación en torno a problemas vinculados a la sincronización. En primer lugar, del estudio profundo de los mecanismos mediante los cuales se produce la sincronización, se pueden inferir métodos para controlar un sistema caótico

[*Lourenco et al 94*]. En este sentido se han obtenido logros importantes en lo referente a estrategias para controlar arritmias cardíacas, reacciones químicas industriales de tipo oscilatorio y sistemas electrónicos [*Pyragas 92, Hunt 93, Newell et al 94, Babloyantz et al 95*]. En segundo lugar, recientemente se ha comenzado a estudiar la modulación y demodulación de señales mediante portadoras caóticas, en procesos de encriptado [*Kocarev et al 95, 96a, 96b*]. Y por último se investiga el comportamiento de sistemas caóticos frente a señales de sincronismo también caóticas. [*Rosenblum et al. 96*]

El mecanismo más común por el cual un oscilador forzado se vuelve caótico es la duplicación de período. A medida que se incrementa el parámetro de control, que en general es la amplitud de la fuerza externa, el sistema tiene órbitas estables cuyo período se duplica en cada bifurcación. Otra ruta común hacia el caos, un poco más compleja es la cuasiperiodicidad. En este caso, a medida que se incrementa el parámetro de control, la señal inicialmente periódica, se convierte en una señal modulada por una nueva frecuencia independiente. El estado es cuasiperiódico pero no presenta hipersensibilidad a las condiciones iniciales de modo que dos trayectorias que se inician en condiciones iniciales cercanas permanecerán cercanas indefinidamente. Si el parámetro de control se incrementa por encima de un valor crítico la señal cuasiperiódica se vuelve sincronizada y finalmente caótica. A menudo, cerca de la transición al caos, aparece una tercer frecuencia o bien una duplicación de período [*Campbell et al 86a, 86b*].

Es importante destacar que, este tipo de comportamiento caótico es determinista pues en realidad posible predecir la evolución, dado que los movimientos siguen leyes físicas conocidas [*Feingold et al 93*]. El comportamiento a largo plazo en cambio está signado por la *sensibilidad a las condiciones iniciales*: dos puntos del espacio de fases separados por un error  $\epsilon$ , evolucionan siguiendo trayectorias que se alejan a un ritmo superior a una exponencial (en alguna de las direcciones). Esta sensibilidad equivale, en la práctica, a una limitación en el tiempo para el que es predecible la evolución, dado que todo sistema de medición o de simulación

sólo permite un número finito de dígitos.

En este capítulo se presenta un análisis del proceso de sincronización utilizando distintos tipos de fuerzas externas impulsivas tanto de amplitud constante como paramétricas [Campbell et al 89]. Los resultados se obtienen a partir de la teoría presentada en el capítulo 1, aplicada a cuatro modelos que constituyen, cada uno de ellos, un paradigma dentro de algún campo. Asimismo se presentan métodos para lograr la sincronización mediante realimentación con y sin retardos [Larrondo et al 96a].

## 2.2.- Modelos Matemáticos típicos de osciladores forzados

Se estudia a continuación el caso particular de los osciladores forzados por fuerzas externas periódicas. Para este caso, el espacio de fases puede ser considerado ya sea como la variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  o bien como la variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ . Ésto permite entonces definir una sección transversal global:

$$\Sigma = \left\{ (\vec{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 / \theta = \theta_0 \right\} \quad (2.2.1)$$

ya que, dado que  $d\theta/dt = 1$ , todas las soluciones serán transversales a dicha sección. En concordancia con ésto el mapa de Poincaré puede ahora definirse también en forma global [Guckenheimer et al 83]. En la Figura 2.1 se muestra el espacio de fases como variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  y como variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ .

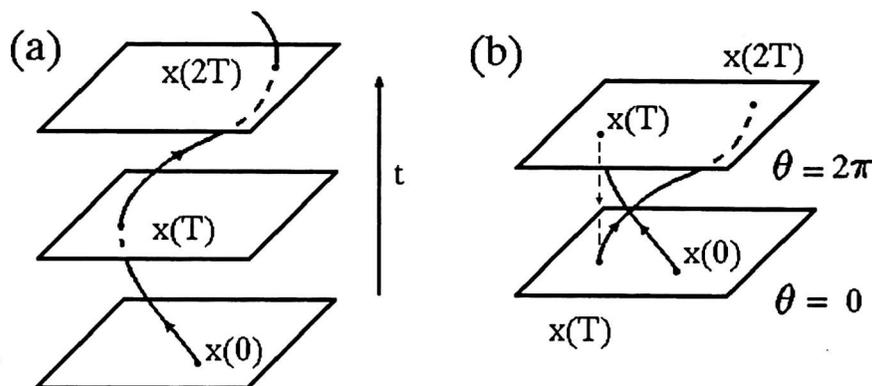


Figura 2.1: Mapa estroboscópico: (a) en la variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ ; (b) en la variedad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$

Nótese que en el primer caso la sección se produce con un conjunto de planos equiespaciados en el eje  $\theta$ . Este tipo particular de mapa de Poincaré recibe el nombre de *mapa estroboscópico* dado que los sucesivos puntos de intersección son las posiciones del sistema forzado, proyectadas sobre el espacio bidimensional  $\vec{x}$ , para instantes  $t, t + T, t + 2T$ , etc [Winfree 77, 80, Guevara et al 81, 82, González et al 84a, Figliola et al 87, Feingold et al 93, González et al 94, Larrondo et al 96a].

Los osciladores de relajación con un único ciclo límite atractor son modelados, en su régimen autónomo, por un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden,

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \tag{2.2.2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

con condiciones iniciales

$$f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0 \tag{2.2.3}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el punto fijo se ha ubicado en el origen [Guckenheimer et al 83]. A continuación se presentan cuatro modelos que constituyen cada uno de ellos un caso típico estudiado en este capítulo.

a) Modelo de Bonhöffer-Van del Pol (B-V). Este modelo fue construido por Fitzhugh combinando el modelo de Bonhöffer (utilizado en el estudio cables de acero) y el modelo de Van der Pol. Además es una simplificación interesante de la ecuación de Hodgkin-Huxley que modela el funcionamiento de una neurona marcapasos [Hodgkin et al 52]. Las ecuaciones son:

$$\frac{dx_1}{dt} = 3(x_2 + x_1 - \frac{x_1^3}{3} + 0.4) \tag{2.2.4}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = - \frac{(x_1 - 0.7 + 0.8x_2)}{3}$$

b) Van der Pol (V): es el primer modelo de un circuito eléctrico oscilatorio, que involucra una válvula triodo [Van der Pol et al 28]. Posteriormente fue estudiado por Cartwright [Cartwright 48] y por Holmes y Rand [Holmes et al 78]. La expresión matemática, expresada en función de un solo parámetro de control  $\mu$ , es:

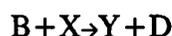
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (\mu > 0) \quad (2.2.5)$$

o en forma equivalente:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (2.2.6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu(x_1^2-1)x_2 - x_1$$

c) Brusellas (B): es un conjunto de reacciones químicas:



(2.2.7)

que se producen en un sistema espacialmente homogéneo. En este modelo se han ignorado las reacciones inversas y las concentraciones inicial y final de los reactivos A, B, D y E se han mantenido fijas. Fue introducido por Prigogine y Lefever [Prigogine et al 68] como modelo abstracto de un sistema autocatalítico en equilibrio. Con todas las constantes cinéticas igualadas a uno, las ecuaciones de la cinética química resultan:

$$\frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2y \quad (2.2.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = bx - x^2y$$

Mediante un cambio de coordenadas se traslada su punto al origen:

$$\frac{dx_1}{dt} = a - (b+1)(x_1+a) + (x_1+a)^2(x_2 + \frac{b}{a}) \quad (2.2.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b(x_1+a) - (x_1+a)^2(x_2 + \frac{b}{a})$$

d) Modelo exactamente resoluble (S): este modelo estudiado en muchos de sus aspectos por González y Piro [*González et al.* 83, 84a, 84b, 85, 94], es muy similar al de Van del Pol, con el agregado de términos de tercer y quinto orden en  $x$ . Pertenece a una familia de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya solución general exacta es expresable en término de funciones elementales. La solución se obtiene mediante un cambio de variables no-lineal, a partir de la solución del oscilador armónico. La forma explícita de la familia es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + \left[ B^2(x) + \omega^2 \right] x = 0 \quad (2.2.10)$$

con:

$$f(x) = (n+2)bx^{n-2}a \quad (2.2.11)$$

$$B(x) = x^{-2} \int_0^x yf(y)dy = bx^{n-a}$$

Para el caso particular  $n=2$  adquiere la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (4bx^2 - 2a)\frac{dx}{dt} + b^2x^5 - 2abx^3 + (a^2 + \omega^2)x = 0 \quad (2.2.12)$$

Reescrito como sistema de primer orden resulta:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (2.2.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(4bx_1^2 - 2a)x_2 - b^2x_1^5 + 2abx_1^3 - (a^2 + \omega^2)x_1$$

Los cuatro modelos comparten características comunes en su dinámica, lo cual queda plenamente justificado desde el punto de vista de la teoría cualitativa, ya que tienen la misma estructura de singularidades: un único

ciclo límite atractor y un punto fijo repulsor en su interior (Figura 2.2).

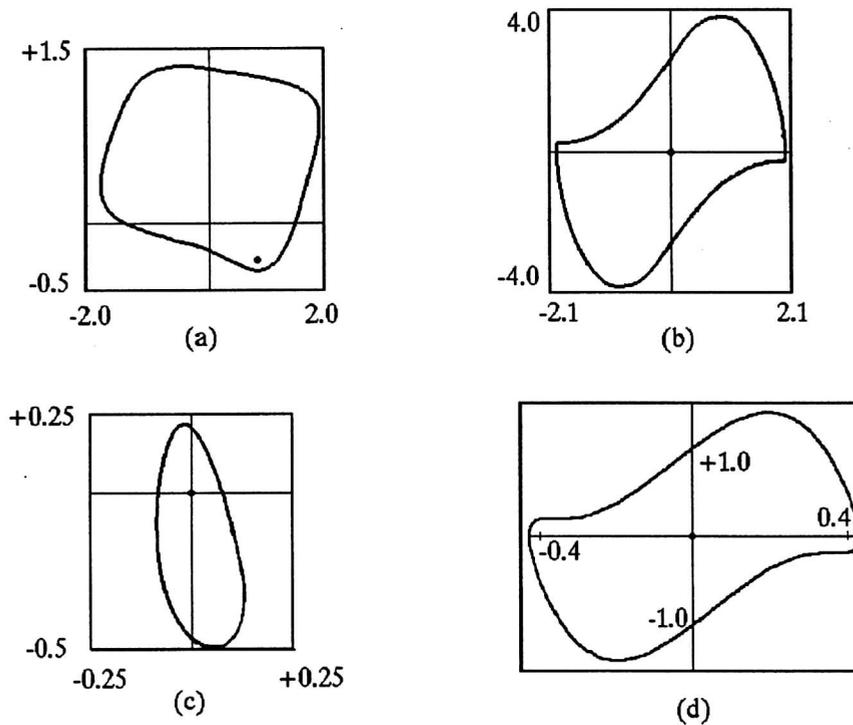


Figura 2.2: Ciclos límite de distintos modelos: a) B-V; b) V; c) B; d) S

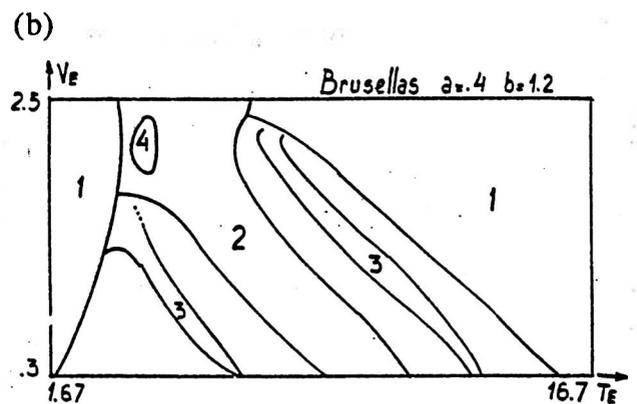
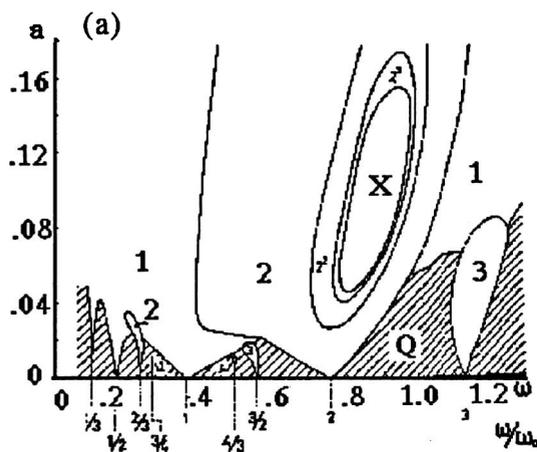
### 2.3.- El Retrato de Fases

Un primer modo de visualizar el proceso de sincronización es la construcción del *retrato de fases*. Consiste en un gráfico bidimensional en los parámetros  $V_E$  y  $T_E$ , amplitud y período respectivamente de la fuerza externa. Se los puede construir o bien medir experimentalmente, muestreando la salida del sistema y buscando la periodicidad una vez que se ha alcanzado el comportamiento asintótico. En el modelo S, por ejemplo, el parámetro que regula la constante de tiempo de decaimiento es  $a$  [Figliola et al 87]. Obviamente debe adoptarse un criterio para considerar el fin del transitorio. En el apéndice A1 se define la aproximación numérica adoptada [Campbell et al 89, Capecchi 95, Larrondo et al 96a].

El cociente entre el período de la señal del oscilador y el período de la señal de sincronismo  $T_E$  se denomina *número de rotación*. Luego, a cada

punto del plano  $(T_E, V_E)$  puede asignársele el número de rotación correspondiente. Los casos en que el número de rotación resulta racional corresponden a un juego de los parámetros  $V_E, T_E$  para los cuales el oscilador se mantiene sincronizado con la señal externa: en efecto, un número de rotación  $p/q$  significa que cada  $q$  períodos de la fuerza externa caben  $p$  períodos del oscilador. Por otra parte un número de rotación irracional indica que ese sincronismo no existe. Esta falta de sincronización puede responder a varios comportamientos: a) el oscilador genera una señal caótica (de período infinito); b) el oscilador genera una señal cuasiperiódica; c) el oscilador genera una señal periódica pero "corre libre", desacoplado de la señal de sincronismo. Si bien estos casos son indistinguibles utilizando el número de rotación, se los puede diferenciar a través del cálculo (o de la medición) de otras magnitudes, tales como los exponentes de Lyapunov, la dimensión de correlación del atractor, el espectro de Fourier, etc [González et al 89, De Young et al 96, Holden 86, Figliola et al 87].

En las *regiones de sincronización* es posible expresar el número de rotación como un racional dado por el cociente entre dos números naturales primos  $p$  y  $q$ . Se acostumbra rotular esas regiones utilizando el número  $q$ . La Figura 2.3 muestra los retratos de fases correspondientes a los modelos, V, B y S con distintos tipos de excitación externa [Arizmendi et al 85, González et al 88]. Cada una de las zonas rotuladas por un número es una zona de sincronización.



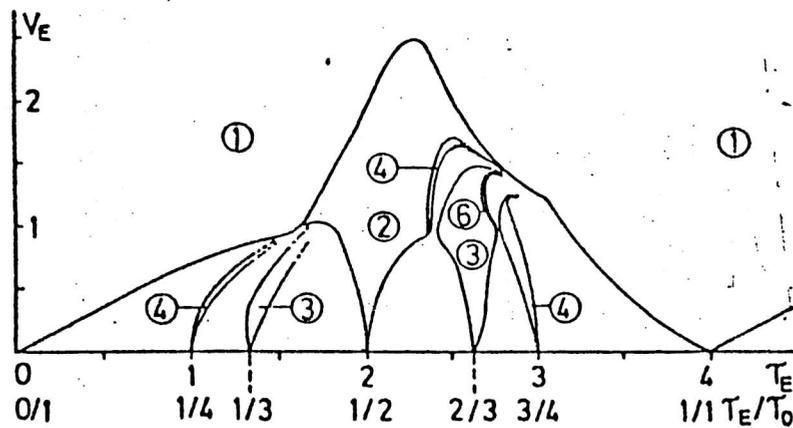
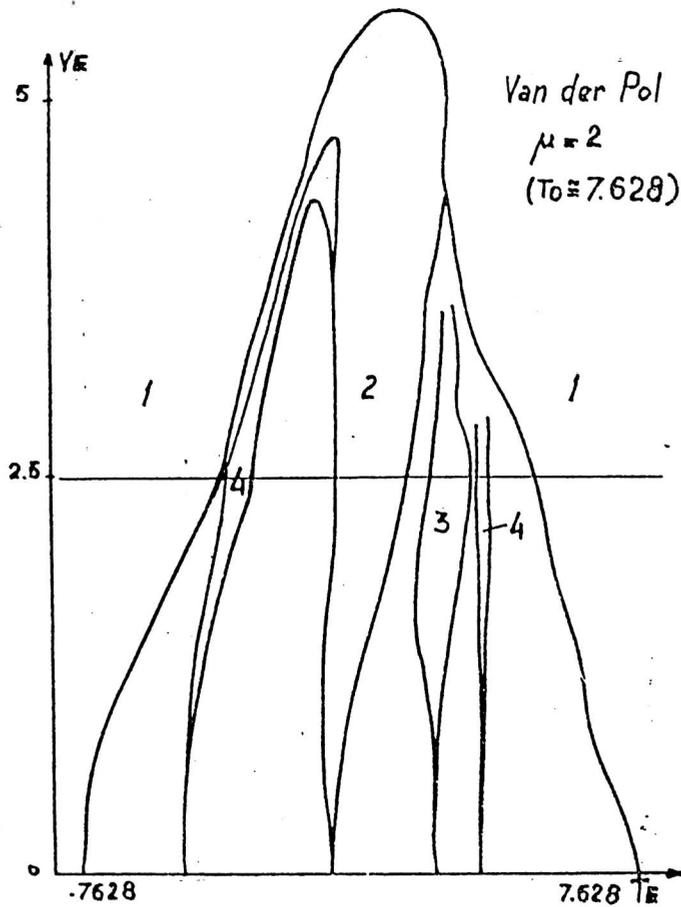


Figura 2.3: Retratos de fases para distintos osciladores forzados: a) B con fuerza externa senoidal <sup>1</sup>; b) B con tren de deltas de altura fija; c) V con tren de deltas de altura fija; d) S con tren de deltas de altura fija <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Extraída de Tomita 86

<sup>2</sup> Extraída de González et al. 93

La Figura 2.4 por su parte muestra las señales de salida del oscilador para una región de sincronización, para una región caótica y para una región cuasiperiódica.

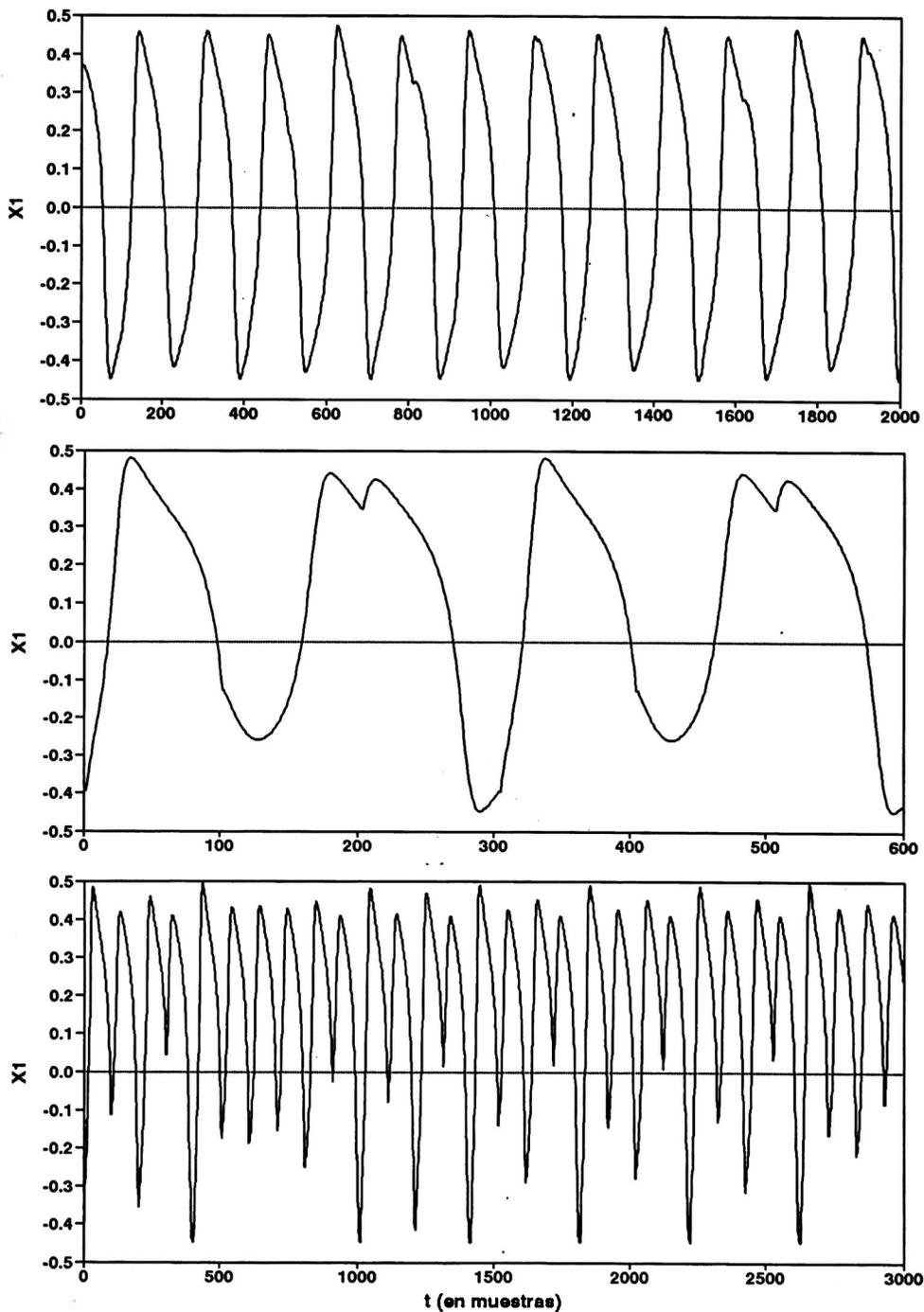


figura 2.4. señal de salida del oscilador  $S$  forzado por deltas de altura fija con  $T_E=2.51$ . (a) cuasiperiódica,  $V_E=0.3$ . (b) sincronizada  $V_E=1.0$ . (c) caótica  $V_E=1.625$

## 2.4.- Análisis geométrico: el mapa de curvas isofase

Dado que el ciclo límite es una curva cerrada, se lo puede parametrizar igual que el círculo unitario, mediante una variable que se designa genéricamente fase ( $\varphi$ ). De este modo, para los puntos del ciclo límite  $C$  se puede establecer la correspondencia:

$$\begin{aligned} C &\rightarrow S^1 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \varphi = \varphi(x_1, x_2), \quad \varphi \in [0, \varphi_{\text{máx}}) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Para los modelos del acápite 2.2 el dominio de atracción del ciclo límite comprende todo el espacio de fases, excepto el origen, que es un punto fijo inestable. Se puede por lo tanto extender la correspondencia establecida en (2.4.1) a:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 - (0,0) &\rightarrow S^1 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow \varphi = \varphi \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{nT_0}(x_1, x_2) \right] \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

donde  $\Phi_\tau$  es el flujo del sistema en el instante  $\tau$ ,  $T_0$  es el período del oscilador autónomo, y  $(x_1, x_2)$  es un punto genérico del espacio de fases. Se define entonces las *curvas isofase* como sigue:

*Definición: una curva isofase es la preimagen de  $\varphi$ , donde  $\varphi$  es un elemento de  $S^1$ .*

Cada isofase intercepta el ciclo límite exactamente una vez, es decir, una parametrización del ciclo límite es equivalente a la numeración de las isofases. Tal como ocurre con toda curva contenida en  $\mathbb{R}^2$ , el ciclo límite se puede parametrizar de varias maneras. En particular, si se toma en (2.4.2)  $\varphi_{\text{máx}} = \alpha T_0$ , con  $\alpha = 1$  rad/s las isofases toman el nombre de *isócronas* [Winfree 80, Campbell et al 89] debido al hecho que, en este caso, a partir de una condición inicial arbitraria, el flujo del sistema tiende al ciclo límite, cruzando isofases a velocidad unitaria (Figura 2.5).

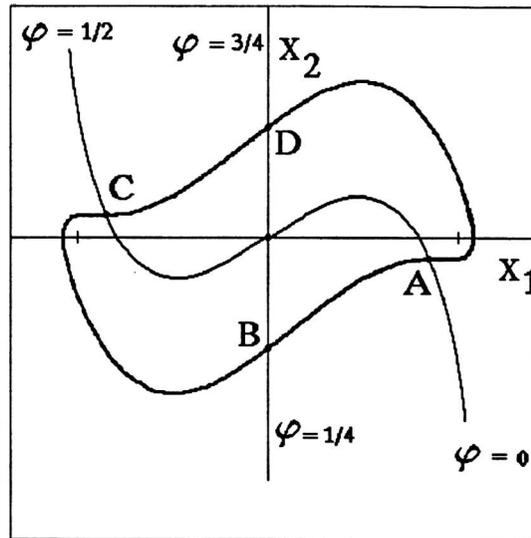


Figura 2.5: A partir de una condición inicial arbitraria, sobre la isócrona A, el flujo del sistema tiende al ciclo límite, cruzando isofases a velocidad unitaria. La parametrización es  $\varphi = t \bmod T_0$ . Es decir que el sistema cruza la isócrona B en  $t=1/4$ , C en  $t=1/2$ , etc.

## 2.5.- Caso de fuerzas periódicas impulsivas

Cuando uno de los osciladores de 2.2 es manejado por un término puramente dependiente del tiempo, periódico y de período  $T_E$ , el sistema de ecuaciones (2.2.2) se convierte en:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \quad (2.5.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t)$$

que es equivalente al sistema autónomo de dimensión 3:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \theta)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \theta) \quad (2.5.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

Como ya se dijo, el comportamiento esencial del sistema emerge de su mapa estroboscópico de Poincaré que es equivalente a un muestreo del estado del sistema a intervalos  $T_E$  [Guckenheimer et al 83]. Un tipo interesante de fuerza externa periódica consiste en una secuencia de impulsos igualmente espaciados en el tiempo; se lo puede utilizar como un modelo idealizado de una gran variedad de sistemas reales tales como un tejido cardíaco auto-oscilatorio, tanto autosincronizado como externamente sincronizado [Guevara et al. 81, 82, Glass et al 82, 83a], un sistema de neuronas acopladas [Winfree 77], osciladores electrónicos de relajación [Van Exter et al. 83, Arizmendi et al 84], convección en presencia de gradientes salinos [Knobloch et al 81], osciladores químicos [Epstein 83], etc.

Este tipo de excitación se puede modelar utilizando un *tren de deltas*. Por ejemplo, para el (V) resulta:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{2.5.3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 + V_E \sum_n \delta(t - nT_E)$$

en tanto que en el caso (B) resulta:

$$\frac{dx_1}{dt} = a - (b + 1)(x_1 + a) + (x_1 + a)^2(x_2 + \frac{b}{a}) \tag{2.5.4}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b(x_1 + a) - (x_1 + a)^2(x_2 + \frac{b}{a}) + V_E \sum_n \delta(t - nT_E)$$

y para el (S):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{2.5.5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(4bx_1^2 - 2a)x_2 - b^2x_1^5 + 2abx_1^3 - (a^2 + w^2)x_1 + V_E \sum_n \delta(t - nT_E)$$

Puede verse fácilmente que los sistemas (2.5.3) a (2.5.5) son autónomos en el lapso entre dos deltas, en tanto que cada delta produce simplemente una discontinuidad en una de las variables del espacio de fases del oscilador autónomo (de hecho la variable  $x_2$ , como se muestra en la Figura 2.6).

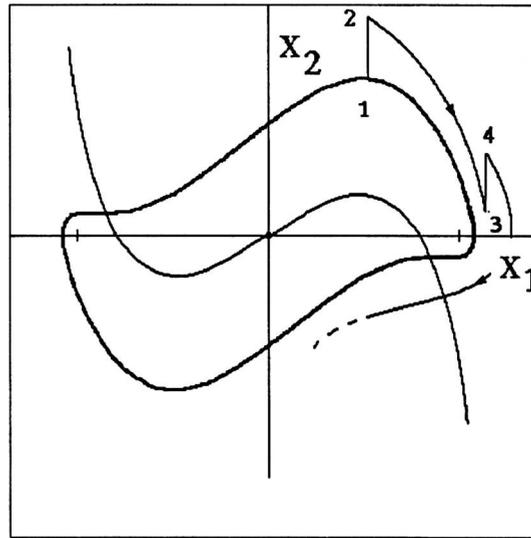


Figura 2.6: Evolución de un sistema pulsado. En el tramo 2-3 el sistema es autónomo. Los saltos 1-2 y 3-4 son causados por dos pulsos ( $\delta$ )

Si el estado del sistema en el instante anterior a la aplicación de la delta, es  $(x_{10}, x_{20})$  perteneciente al ciclo límite, luego de la aplicación de una delta de peso  $V_E$ , pasará a ser  $(x_{10}, x_{20} + V_E)$ .

Si para cada punto "de partida" perteneciente al ciclo límite, se calcula el correspondiente punto "de llegada", al cual "salta" el sistema luego de aplicada una delta, se obtiene una nueva curva cerrada que se denomina *curva de condiciones iniciales* [Campbell et al 89]; en el caso de deltas de amplitud constante la curva de condiciones iniciales es simplemente una traslación del ciclo original y es, para este caso, la misma curva que Winfree y Glass [Winfree 80, Glass et al. 82] denominan *ciclo límite desplazado*; sin embargo, bajo fuerzas impulsivas paramétricas, con o sin retardo en el lazo de realimentación, la transformación no es una simple traslación del ciclo límite [Campbell et al 89].

Partiendo de esta nueva condición inicial, ubicada sobre la curva de condiciones iniciales, el sistema evoluciona aproximándose al ciclo límite atractor, según la dinámica de las ecuaciones autónomas.

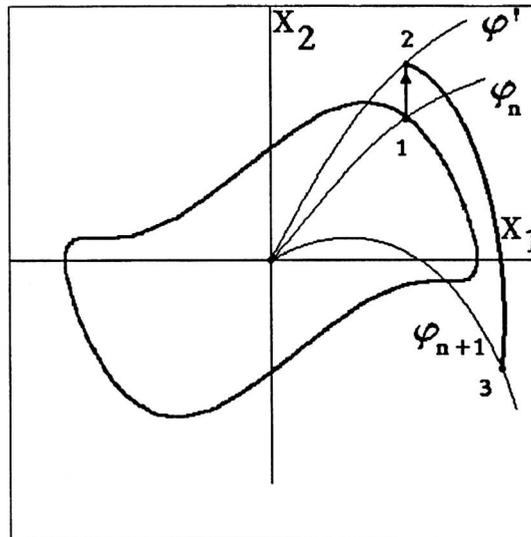


Figura 2.7: Aproximación unidimensional al mapa de Poincaré. Una  $\delta$  causa un salto desde el punto 1 (con fase  $\varphi$ ) hasta el punto 2 (con fase  $\varphi'$ ). Luego el sistema evoluciona siguiendo las ecuaciones autónomas durante  $T_E$ . Esto implica que  $\varphi_{n+1} = \varphi' + T_E \text{ mod } T_0$

En rigor el sistema no puede alcanzar el ciclo límite en tiempo finito. Sin embargo, en los llamados sistemas *con relajación fuerte*, la trayectoria decae hacia el ciclo límite con una constante de relajación característica. En el modelo S, por ejemplo, el parámetro  $a$  es quien regula la constante de tiempo de decaimiento hacia el ciclo límite en tanto que  $\omega$  determina el período de dicho ciclo límite. Si el período de las deltas externas  $T_E$  es superior al tiempo que el sistema requiere para alcanzar una posición distante del ciclo límite en un valor  $\epsilon$ , menor que el error de medición, puede considerarse que el pulso siguiente vuelve a encontrar al sistema sobre el ciclo límite.

Bajo estas hipótesis la dinámica del sistema puede estudiarse mediante un mapa unidimensional del ciclo límite sobre sí mismo; se trata de la aproximación unidimensional del verdadero mapa estroboscópico (que es bidimensional como se ve en la Figura 2.7). Utilizando la parametriza-

ción provista por las isofases la expresión del mapa unidimensional está dada por:

$$S^1 \rightarrow S^1 \quad (2.5.6)$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi_{n+1} = f(V_E, T_E, \varphi_n)$$

En resumen, para los sistemas con relajación fuerte la evolución se puede separar en dos etapas: en la primera la excitación (delta) produce un salto (en tiempo cero), llevando el estado del sistema desde  $(x_{10}, x_{20})$ , con fase  $\varphi_n$ , hasta  $(x'_1, x'_2)$ , con fase  $\varphi'$ ; en la segunda etapa el sistema evoluciona siguiendo las ecuaciones autónomas, durante  $T_E$  unidades de tiempo. Entonces la expresión del mapa resulta:

$$\varphi_{n+1} = \varphi' + \alpha(T_E \text{ mod } T_0) \quad (2.5.7)$$

es decir, todos los mapas correspondientes al mismo valor de  $V_E$  y a distintos valores de  $T_E$  tendrán la misma forma y simplemente serán traslaciones verticales de un mismo mapa base, denominado Phase Transition Curve, abreviado PTC [Winfrey 80, Guevara et al. 82, González et al. 83, Van Exter et al. 83, González et al. 84a 84b, Glass et al. 84a, 84b]:

$$\varphi' = g(\varphi, V_E) \quad (2.5.8)$$

En el apéndice A1 se describe el método numérico empleado.

## 2.6.- Relación entre la PTC y las curvas isofase

La PTC puede obtenerse a partir de la red de isofases (Figura 2.8) según los pasos siguientes:

- se dibuja la curva de condiciones iniciales (en el caso de una excitación de amplitud  $V_E$  constante, el ciclo límite trasladado verticalmente en  $V_E$ ).
- se elige un punto del ciclo límite, su fase será  $\varphi$ , dada por la isofase que intersecta al ciclo límite en el punto elegido.
- se busca el punto correspondiente sobre la curva de condiciones iniciales (se sube verticalmente hasta alcanzarla); su fase será  $\varphi'$ , dada por la isofase que intersecta a la curva de condiciones

iniciales.

- se repite el proceso (ii) (iii) recorriendo todo el ciclo límite.

Si la PTC (y en consecuencia el mapa unidimensional) es un difeomorfismo del círculo, la dinámica iterada es equivalente a una rotación pura. En este caso sólo son posibles un comportamiento periódico o uno cuasiperiódico. Si en cambio, la PTC no es invertible y su tangente en algún punto es menor que  $-1$  es posible la aparición de una cadena de duplicaciones de período, que finaliza en una órbita caótica.

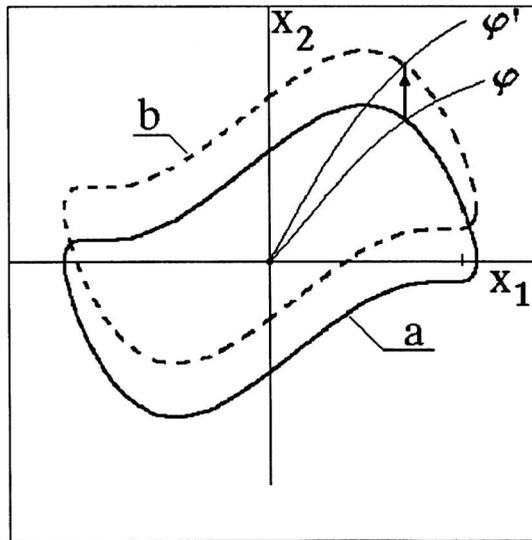


Figura 2.8: Obtención de la PTC a partir del mapa del isofases. El sistema está sobre el ciclo límite (a) cuando es aplicada una  $\delta$ . Entonces salta hasta la "curva de condiciones iniciales" (b).  $\varphi = g(V_E, \varphi)$  es la PTC

Es por lo tanto de interés estudiar la no invertibilidad de la PTC. En general que  $g(\varphi, V_E)$  sea o no un difeomorfismo depende del valor del parámetro  $V_E$ . Cuando  $V_E = 0$ ,  $g(\varphi, V_E)$  es la identidad (un difeomorfismo trivial). A medida que  $V_E$  se incrementa puede aparecer un valor crítico en el que  $g(\varphi, V_E)$  se hace no invertible.

La transición [difeomorfismo]  $\rightarrow$  [no difeomorfismo] puede ocurrir por dos mecanismos diferentes (Figura 2.9):

- A medida que se incrementa  $V_E$ , se alcanza un valor crítico  $V_C$  para el cual la PTC presenta en algún punto una singularidad cúbica ( $g^{-1}$  deja de ser diferenciable en ese punto). Si se continúa incrementando  $V_E$ , por encima del valor crítico,  $g$  pasa a ser no invertible, aunque mantiene su grado topológico igual a 1 (Figura 2.10a) [Milnor 65].
- A medida que se incrementa  $V_E$ , se alcanza un valor crítico  $V_C$  para el cual la PTC se hace discontinua en algún punto; para valores de  $V_E$  inferiores a ese valor crítico es continua y de grado topológico uno en tanto que para valores de  $V_E$  superiores al valor crítico también es continua pero su grado topológico es cero (en los modelos de dimensión 3 estudiados) (ver Figura 2.9b).

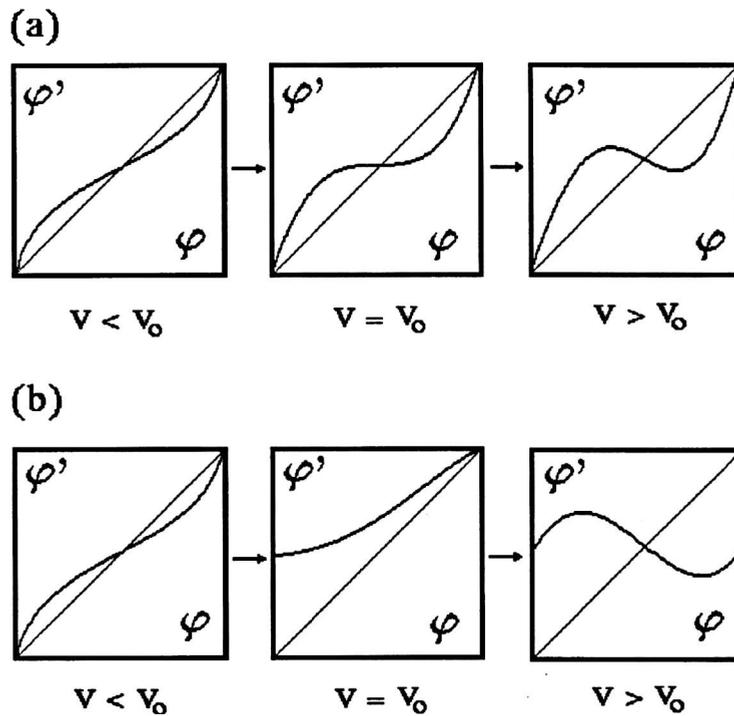


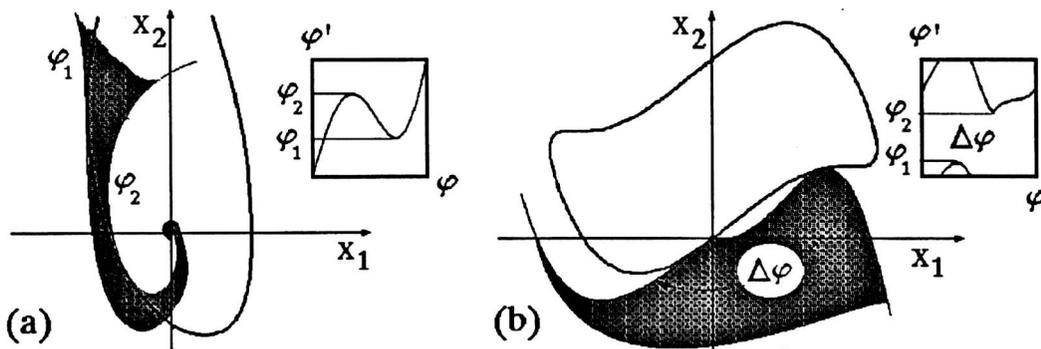
Figura 2.9: Transiciones de la PTC. En (a) la PTC tiene una singularidad cúbica. En (b) se produce un cambio de grado topológico

Tanto el caso de cambio de grado topológico como el caso de singularidad cúbica han sido reportados en diversos experimentos reales y numéricos [Guevara et al. 81, Glass et al. 82, 84, Campbell et al. 89, Larrondo et al. 96a], y ambos pueden predecirse, a través del estudio de la red de isofases, sin necesidad de construir explícitamente la PTC. El

argumento es puramente geométrico y es el siguiente:

*La PTC será no monótona si la curva de condiciones iniciales interseca las isofases del intervalo  $(\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$ , en tanto que es tangente a las isofases  $\varphi_{\min}$  y  $\varphi_{\max}$ . El número de intersecciones que la curva tiene con cualquiera de las isofases del intervalo  $(\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$  es  $2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) (Figura 2.10a).*

*La PTC es de grado topológico cero cuando la curva de condiciones iniciales no interseca a las isofases del intervalo  $(\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$  (Figura 2.10b).*



*Figura 2.10: (a) Las isócronas entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son intersectadas tres veces por la curva de condiciones iniciales. La correspondiente PTC es no invertible. (b) Las isócronas entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  no son intersectadas por la curva de condiciones iniciales. La correspondiente PTC tiene grado topológico cero.*

De la combinación de ambos criterios geométricos surge la posibilidad de obtener una PTC: monótona y de grado uno; monótona y de grado cero; no monótona y de grado uno; no monótona y de grado cero.

A partir de la observación del retrato de isofases del oscilador se puede conjeturar que el cambio de grado se produce cuando la curva de condiciones iniciales deja de encerrar a la variedad sin fase (que es el punto fijo en el origen) [Winfree 79]. Asimismo, el índice de Poincaré [Guckenheimer et al. 83] de la curva de condiciones iniciales coincide con el grado topológico de la correspondiente PTC.

La determinación numérica y/o analítica de la red de isofases se describe en el Apéndice A1; desde el punto de vista computacional, es mucho más eficiente que el cálculo de las distintas PTC's (también descrito en dicho apéndice) en especial para aquellos casos en que sólo es posible una determinación numérica.

## 2.7.- Red de isofases del modelo de Bohnhöffer-Van der Pol

El modelo de Bohnhöffer-Van der Pol tiene una estructura de isofases especialmente compleja. Fue estudiado por Winfree [Winfree 80] y sus resultados se muestran en la Figura 2.11a.

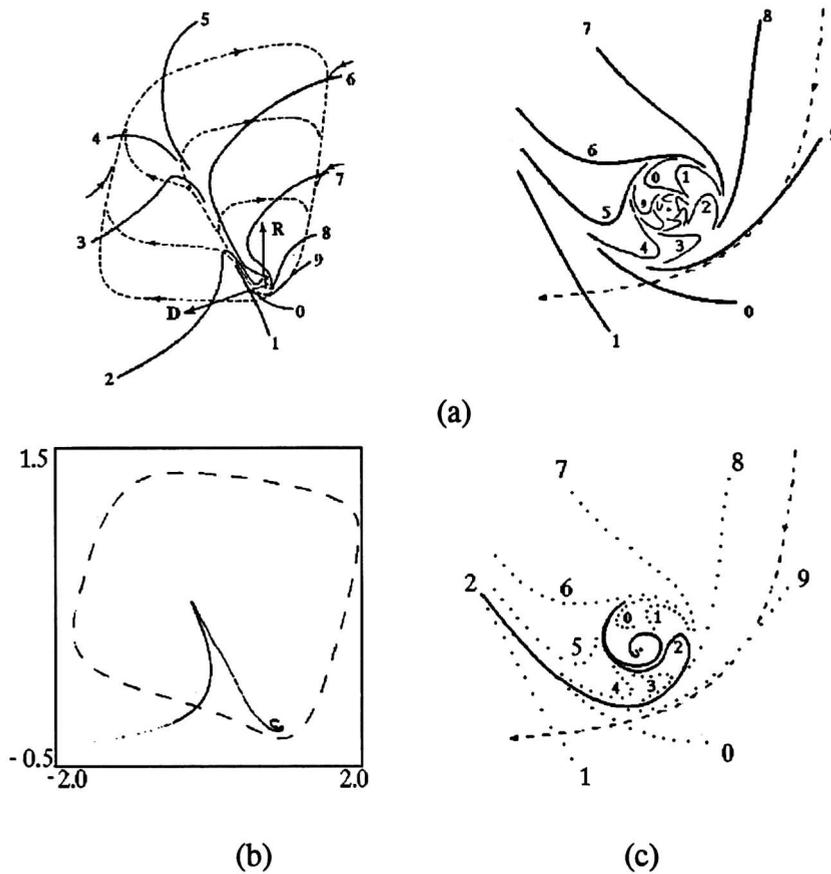


Figura 2.11. (a) Isócronas del modelo B-V obtenidas por Winfree. (b) Una isócrona obtenida por el método del apéndice A1. (c) la misma isócrona ampliada, superpuesta a las isócronas de Winfree

Por tratarse de un modelo con un único ciclo límite y un punto fijo

repulsor sus isofases deben ser continuas. Sin embargo ello no queda claro en la figura de Winfree. Citando las propias palabras de Winfree "*Las isócronas se aproximan a un estado estacionario en una forma muy complicada*".

El método desarrollado en el Apéndice A1 muestra ser muy efectivo para el estudio de este problema. Las isócronas se han reconstruido como se muestra en las Figuras 2.11b y 2.11c. En esas figuras se ve claramente que las isócronas son continuas y presentan una especie de "enrosque" alrededor del punto fijo inestable.

## 2.8.- Red de isofases para los modelos V, B y S.

El mismo método numérico mencionado en el punto anterior se ha aplicado al estudio de los osciladores V, B y S. Los dos primeros no tienen solución analítica conocida de modo que sus trayectorias en el espacio de fases así como sus isofases y sus PTC han sido determinadas utilizando los métodos numéricos descritos en el Apéndice A1. Las redes de isofases se muestran en las Figuras 2.12 a y b junto con los respectivos ciclos límite.

En el caso particular del oscilador (S) la red de isofases puede obtenerse en forma exacta. La solución del sistema autónomo está dada por:

$$x(t) = \cos(\omega t + \theta) \left\{ A \exp(-2at) + \frac{b}{2a(1 + a^2/\omega^2)} \left[ 1 + \frac{2a^2}{\omega^2} \cos^2(\omega t + \theta) + \frac{2a}{\omega} \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta) - \exp(-2at) \left( 1 + \frac{2a^2}{\omega^2} \cos^2\theta + \frac{2a}{\omega} \sin\theta \cos\theta \right) \right]^{-1/2} \right\} \quad (2.8.1)$$

donde A y  $\theta$  dependen de las condiciones iniciales a través de las siguientes expresiones:

$$A = \omega^2 [x_0^2 \omega^2 + (ax_0 - bx_0^3 - \dot{x}_0)^2]^{-1} \quad (2.8.2)$$

$$\sin\theta = \frac{(ax_0 - bx_0^3 - \dot{x}_0)}{[x_0^2\omega^2 + (ax_0 - bx_0^3 - \dot{x}_0)^2]^{1/2}} \quad (2.8.3)$$

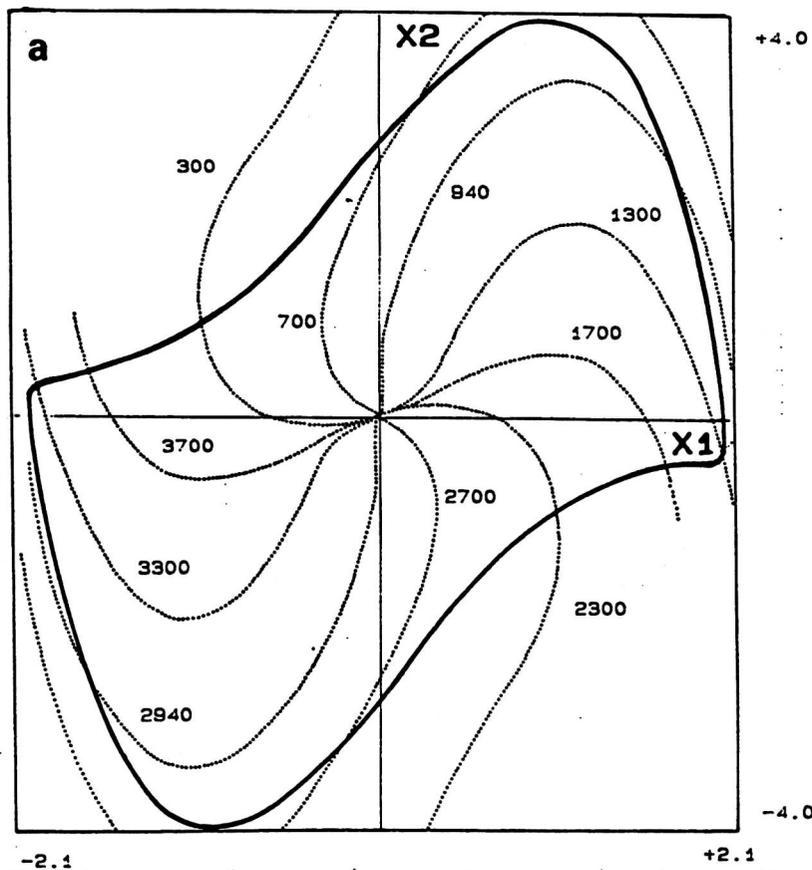
$$\cos\theta = \frac{\omega x_0}{[x_0^2\omega^2 + (ax_0 - bx_0^3 - \dot{x}_0)^2]^{1/2}} \quad (2.8.4)$$

Como ya fue indicado el oscilador tiene un punto fijo tipo "fuente" en (0,0) y un ciclo límite asintóticamente estable dado por la siguiente expresión analítica:

$$(x_2 - 2ax_1 + bx_1^3)^2 - (2a/b - x_1^2)(\omega^2 + a^2) = 0 \quad (2.8.5)$$

donde, como es usual,  $x_1 = x$  and  $x_2 = dx/dt$ . Las isócronas tienen la siguiente expresión analítica (Figura 2.12c)

$$x_1\omega \tan\theta - ax_1 + bx_1^3 - x_2 = 0 \quad (2.8.6)$$



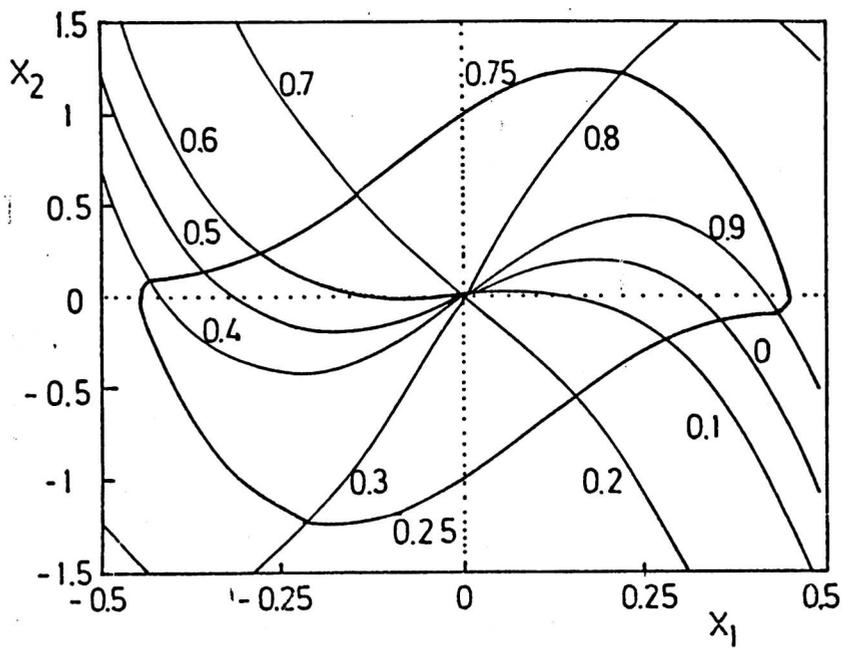
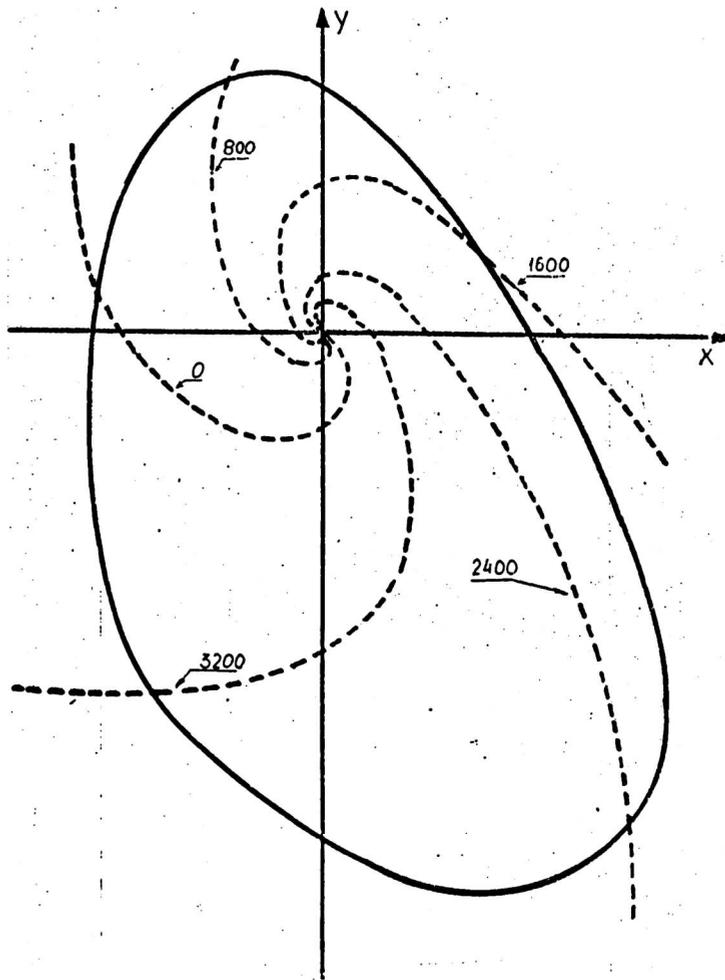
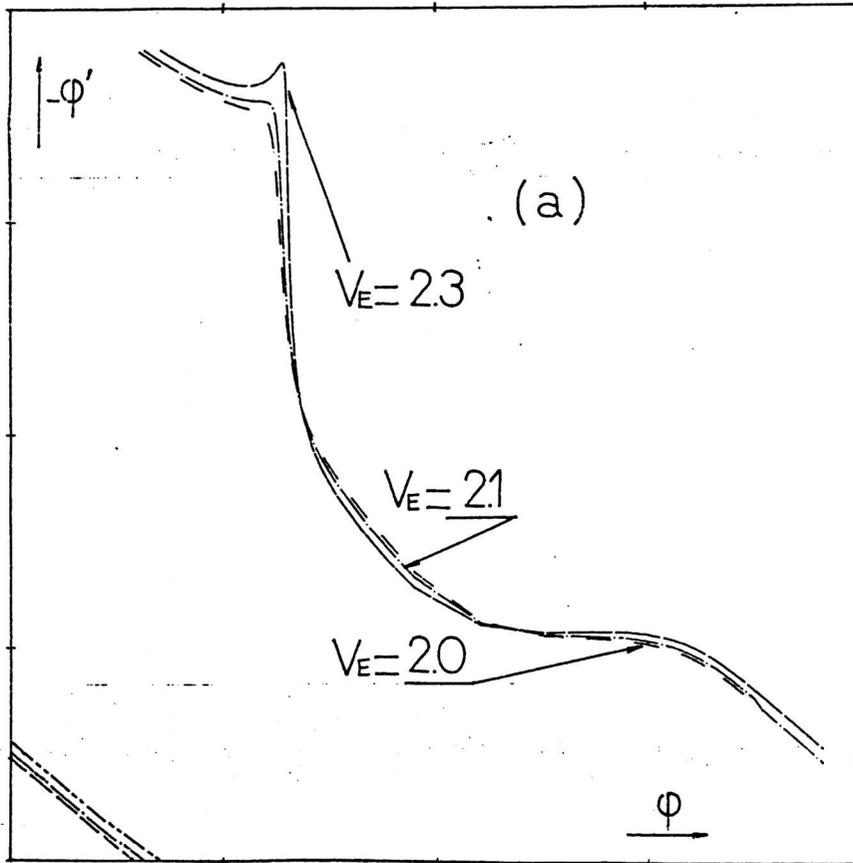


Figura 2.12: Mapa de isofases de varios modelos: (a)  $V$  ( $\mu=2$ ); (b)  $B$  ( $a=0.4$ ,  $b=1.2$ ); (c)  $S$  ( $a=0.5\pi$ ,  $b=5\pi$ ,  $\omega=0.5\pi$ )

## 2.9.- La PTC de los modelos V, B y S.

Como ya se dijo en el punto 2.6 se puede predecir la invertibilidad de la PTC sin construirla. Para el caso del modelo V se encontraron ambos tipos de transiciones; en efecto, cuando  $V_E = 2.1$  la curva de condiciones iniciales intersecta la isofase rotulada 1320 (y a las isofases vecinas) tres veces. Nótese que se han numerado las isofases de 0 a 4000. Debe esperarse entonces que para este valor del parámetro se produzca una pérdida de monotonía de la PTC. Al llegar al valor  $V_E=2.5$ , para el cual la curva de condiciones iniciales cruza el origen, la PTC cambia su grado topológico. Ambas transiciones se muestran en la Figura 2.13 a y b. Para el modelo (B) se obtienen resultados similares (Figura 2.14). En el caso del modelo S forzado por deltas de altura fija, sólo se presenta la transición con cambio de grado topológico, que se produce en  $V_E = 1$ , valor para el cual la curva de condiciones iniciales deja de encerrar el punto fijo repulsor ubicado en el origen de coordenadas. En la Figura 2.15 se muestra la transición con cambio de grado de este modelo.



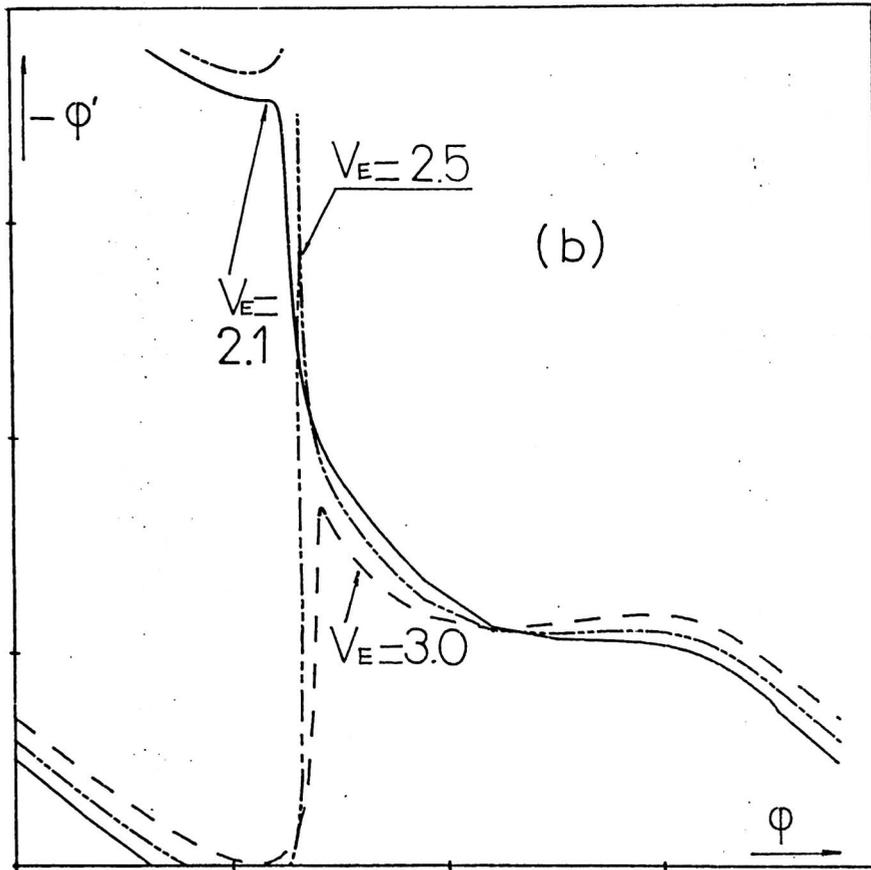


Figura 2.13: Transiciones en la PTC del modelo V ( $\mu=2$ ) forzado con deltas de altura fija. (a) Transición con singularidad cúbica. (b) Transición con cambio de grado

## 2.10.- Resultados para otros tipos de fuerzas impulsivas

Si la amplitud de la fuerza externa es función de las variables de estado se obtienen ecuaciones de tipo paramétrico. Por ejemplo, la ecuación resultante para el modelo del Van der Pol, con  $f(t)=xV_E\cos\omega t$ , es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2-1) \frac{dx}{dt} + (V_E\cos\omega t+1)x = 0,$$

ecuación del tipo de la utilizada por Mathieu en conexión con el problema de vibraciones de una membrana elíptica [Mathieu 1868]. En el análisis tradicional este tipo de ecuación se ha estudiado mediante el método de

Floquet [Nayfeh et al 79]. En lo que sigue, se aplicará el mismo método de análisis geométrico en base a la red de isofases.

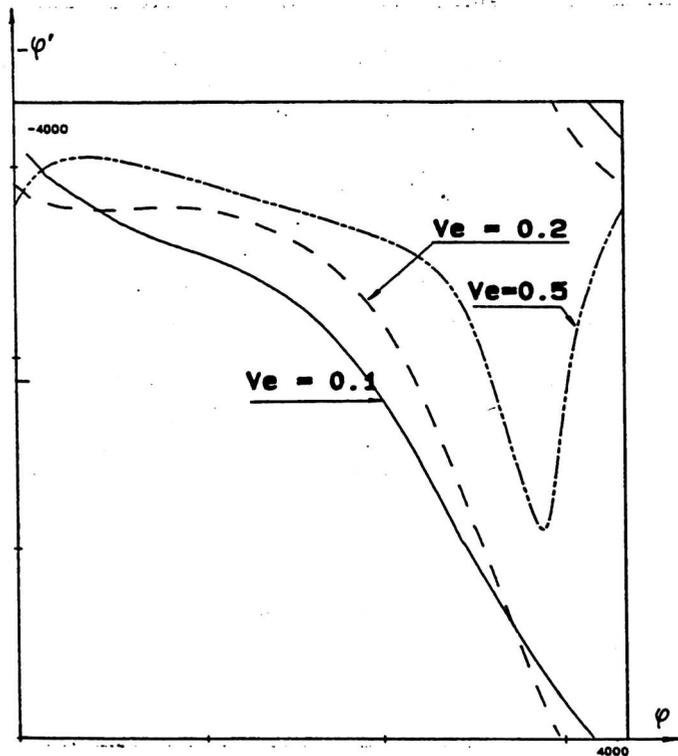


Figura 2.14: Transiciones en la PTC del modelo B ( $a=0.4$ ,  $b=1.2$ ) excitado por deltas de altura fija. Para  $V_E > 0.2$  la PTC es no monótona y de grado uno. Para  $V_E > 0.5$  la PTC es de grado cero.

En efecto este método puede extenderse a toda una familia de fuerzas externas impulsivas:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[x_1(t_m), x_2(t_m)\right] \delta(t-nT_E) \quad (2.10.1)$$

donde  $t_m$  es el instante en que se muestrean las variables  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente.

Formalmente la única diferencia que existe entre este caso y el estudiado en 2.9 está en la curva de condiciones iniciales a utilizar, que ahora se obtiene mediante la siguiente transformación del ciclo límite:

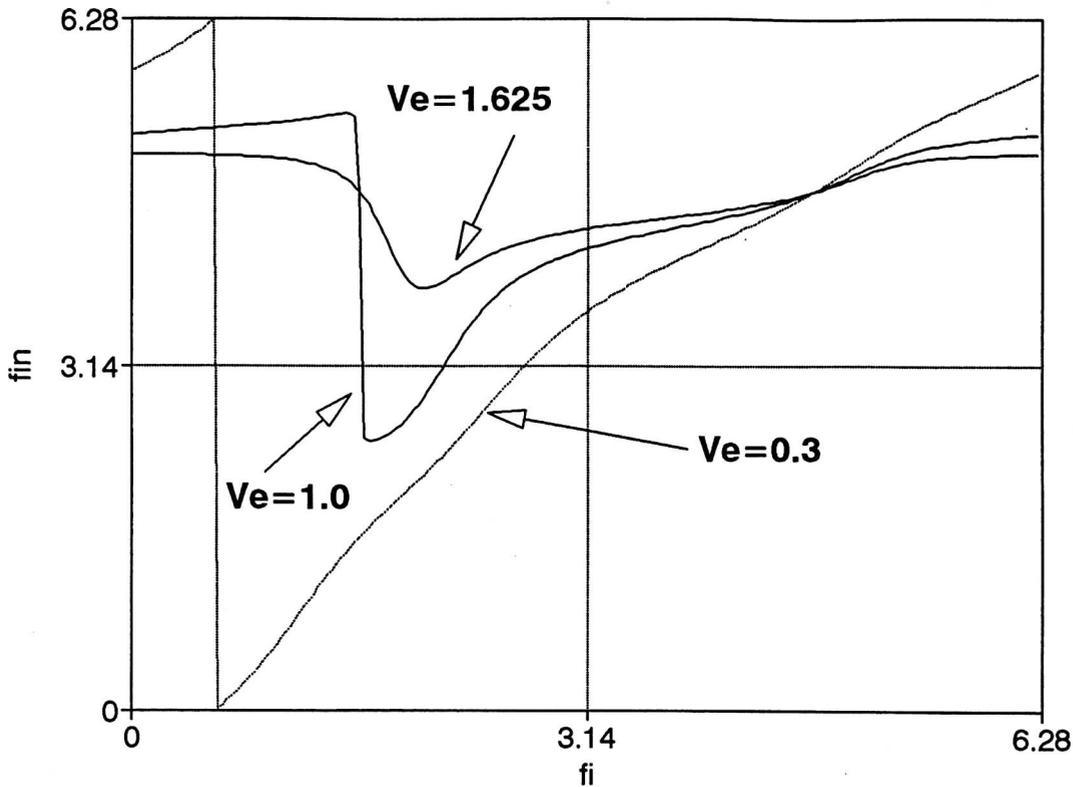


Figura 2.15: Transición con cambio de grado topológico en el modelo S

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + V_E f(x_1, x_2)) \quad (2.10.2)$$

Por ejemplo en la Figura 2.16 se muestra la curva de condiciones iniciales para el oscilador V, correspondiente a una excitación paramétrica, en la que la fuerza externa tiene la forma:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(t) \delta(t - nT_E) \quad (2.10.3)$$

En la Figura 2.17 se muestra la transición en las correspondientes PTC. En todos los casos se trata de una transición sin cambio de grado, dado que la curva de condiciones iniciales obligatoriamente corta todas las isofases de la red, dado que encierra al punto fijo repulsor.

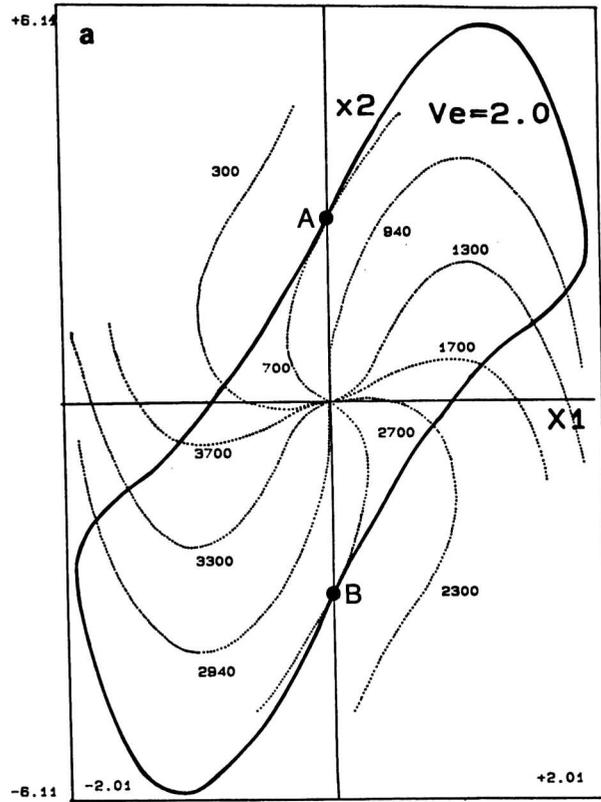
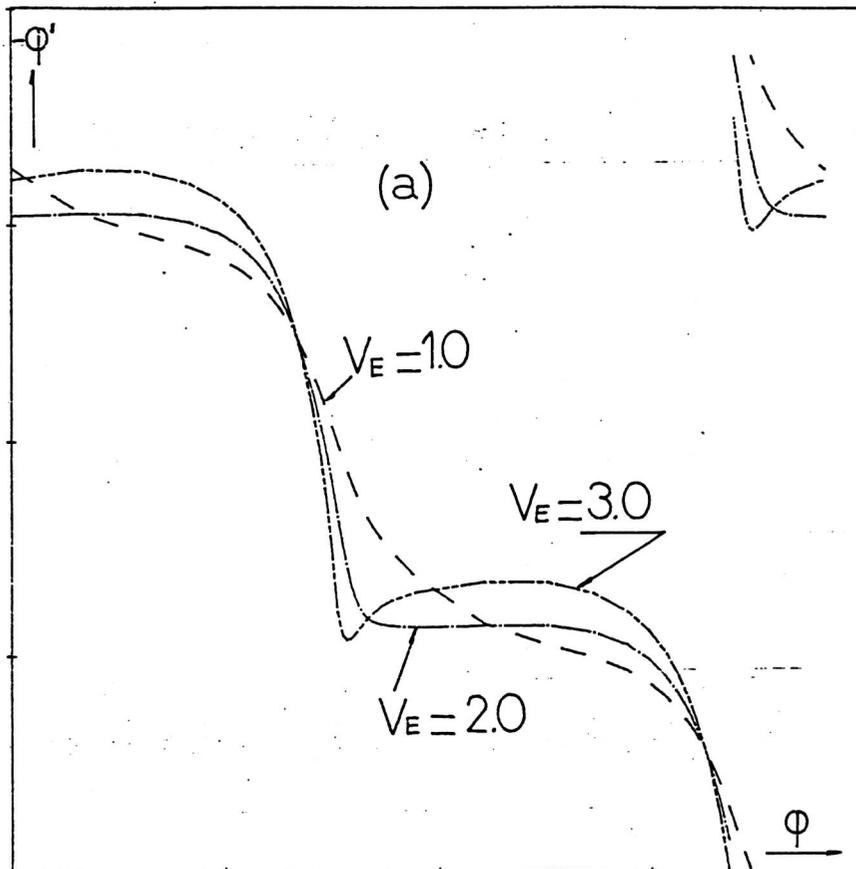


Figura 2.16: Isócronas y curva de condiciones iniciales para el modelo V ( $\mu=2$ ) excitado por deltas paramétricas.



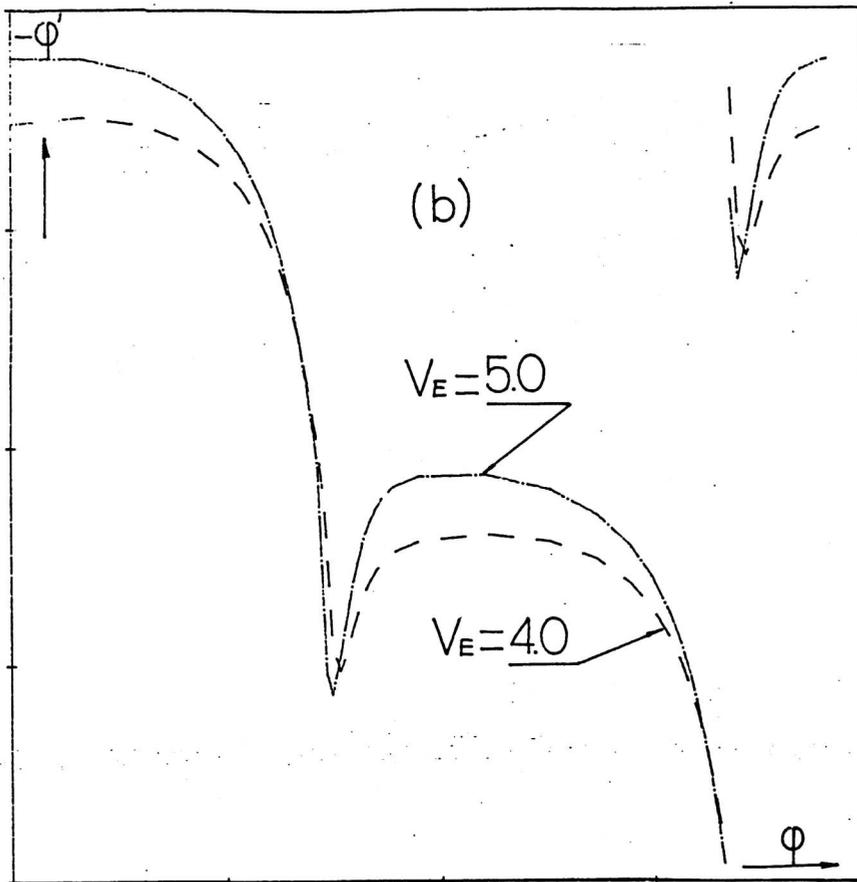


Figura 2.17: Transiciones en la PTC del modelo V ( $\mu=2$ ) excitado por deltas paramétricas. En  $V_E=2$  se produce la singularidad cúbica.

En la Figura 2.18 se muestra las transiciones en la PTC del modelo B con excitación paramétrica.

El modelo S por su parte presenta PTC's monótonas no decrecientes por lo que no se producen en este caso ninguna de las dos transiciones posibles (Figura 2.19)

## 2.11.- El problema de los retardos

Todo sistema físico realimentado presenta en general retardos en su lazo de realimentación. Las causas pueden ser varias: tiempo finito requerido para la propagación de las señales, retardos propios de actuadores, retardos en los sistemas de medición de la señales de realimentación, etc. Un ejemplo de sistemas con retardo es la ecuación de Mackey-Glass [Mackey

et al 77]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax(t-\tau)}{1+[x(t-\tau)]^{10}} - bx(t) \quad (2.11.1)$$

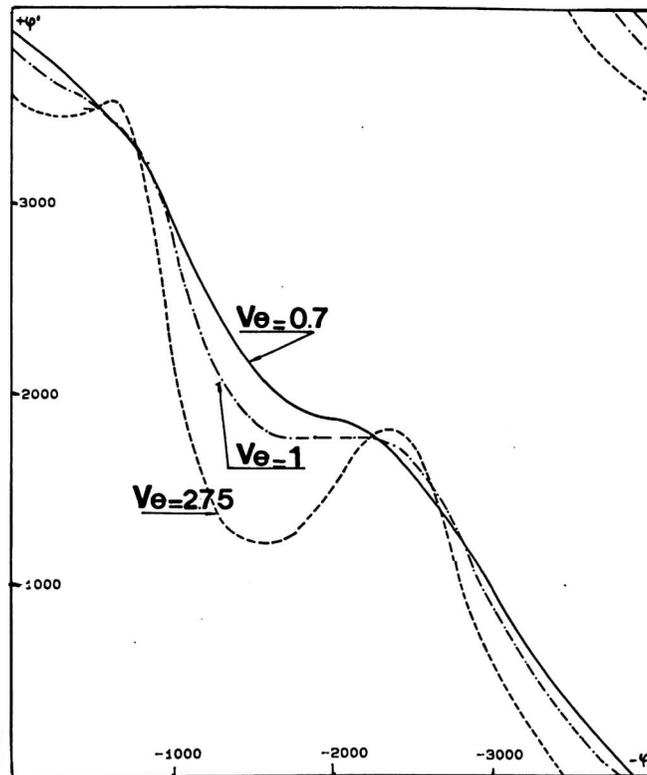


Figura 2.18: Transiciones en la PTC del modelo B ( $a=0.4$ ,  $b=1.2$ ) con excitación paramétrica.

Esta ecuación describe la regeneración de las células de la sangre y es infinito-dimensional dado que, para conocer la evolución temporal posterior a  $t$  se requiere conocer el valor de  $x$  en todo el intervalo  $(t, t-\tau)$ .

El aumento de dimensionalidad del sistema, inducido por los retardos, hace más compleja, su dinámica como ya se explicara en el capítulo 1. Case muestra como un simple oscilador armónico masa resorte, forzado por una fuerza externa, que es función de la posición en un tiempo anterior, tiene un comportamiento inestable que desaparece al eliminar el retardo [Case 93]. En forma similar, un laser semiconductor con una realimentación optoelectrónica produce una salida modulada, con un pico agudo en la frecuencia, que es función del retardo de la realimentación [Giacomelli et

al 89]. En procesos químicos los retardos provocados por los actuadores que intervienen en el sistema de control realimentado tienen importancia fundamental en la evolución de la reacción [Weiner et al 89, Chevalier et al 91, Roesky et al 93].

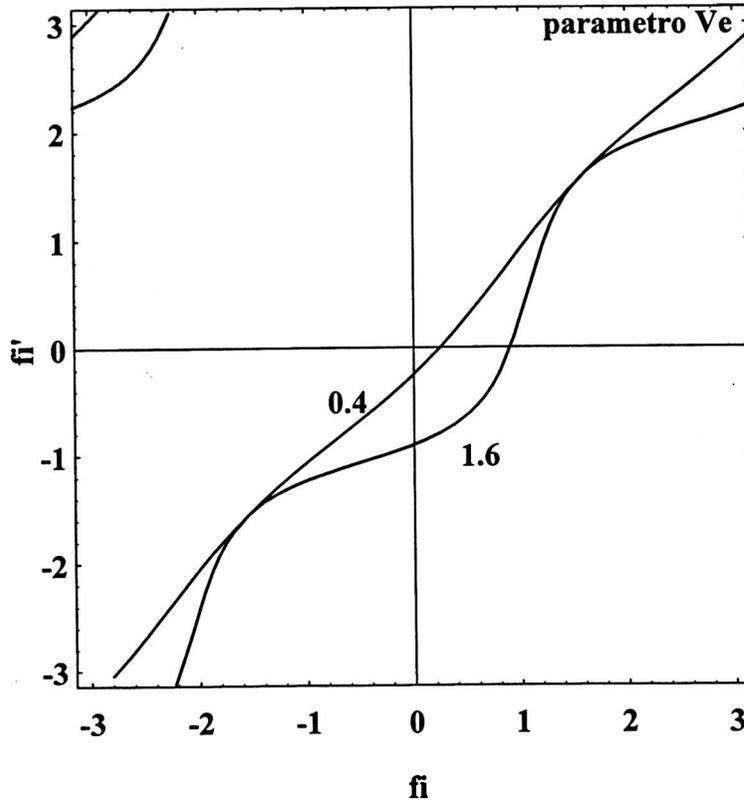


Figura 2.19: Transiciones en la PTC del modelo S ( $a=0.5\pi$ ,  $b=5\pi$ ,  $\omega=0.5\pi$ ) con excitación paramétrica. Las PTC son monótonas para todo valor de  $V_E$

El uso de retardos ha sido asimismo la base para varios métodos de control del caos. El primer trabajo sobre control del caos fue realizado por Edward Ott, Celso Grebogi y James Yorke [Ott et al. 90]. Su método se conoce como método OGY (Ott, Grebogi, Yorke). Embebido en el atractor de un sistema caótico, existen simultáneamente órbitas periódicas inestables; de hecho el sistema evoluciona continuamente de una órbita periódica a otra. El método OGY consiste en esperar a que la trayectoria pase cerca de la órbita periódica deseada y producir una modificación en alguno de los parámetros del sistema por un lapso de tiempo breve haciendo que el sistema continúe sobre esa órbita. El proceso debe ser repetido indefinidamente: cada vez que el sistema escapa hacia su comportamiento caótico hay que producir

la señal de corrección. El método fue aplicado con éxito en un número de sistemas, en general de baja frecuencia, pues requiere el uso de una computadora en el lazo de control, para realizar el cálculo de la perturbación necesaria.

Otro método es el conocido como OPF (occasional proportional feedback), que consiste en una modificación del método OGY. En lugar de utilizar una computadora que produzca la corrección sobre el sistema se utiliza la realimentación de la propia salida del sistema para lograr una autocorrección [Hunt 91, Hunt et al. 93, Newell et al. 94].

Sobre esta misma idea Pyragas propuso dos métodos de control continuos [Pyragas 92]. En el primero de ellos se elige una de las órbitas inestables que sobreviven inmersas en el atractor caótico; el método procura volver estable esa órbita. Para hacerlo se mide la señal de salida del sistema y se la compara con una señal de referencia; la diferencia entre ambas es aplicada como señal de control del sistema. Como señal de referencia se utiliza precisamente la órbita deseada. La estabilización se produce aún en presencia de ruido. En la Figura 2.20a se reproducen los resultados obtenidos por Pyragas para el oscilador de Rossler utilizando este método de estabilización. Es importante notar que para generar la órbita deseada se requiere entonces un oscilador externo especial, requisito que es sencillo de satisfacer en un modelo teórico pero no es simple de resolver en la práctica.

El segundo método presentado por Pyragas es un control derivativo y resulta mucho más interesante dado que su implementación sólo requiere una línea de retardo. En este caso la señal de control es proporcional a la diferencia entre la salida del oscilador a controlar, en el instante  $t$ , y la misma salida en el instante  $(t-\tau)$ , resultando por lo tanto proporcional a la derivada de la señal de salida (si  $\tau$  es pequeño). En la Figura 2.20b se reproducen los resultados de Pyragas que muestran la estabilización obtenida para el mismo oscilador de Rossler.

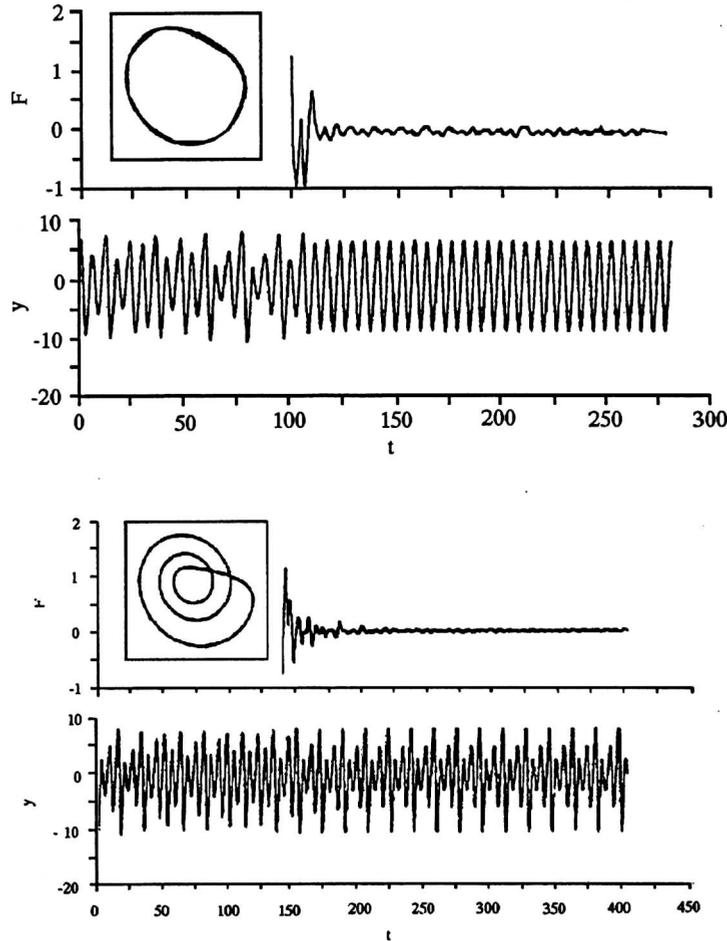


Figura 2.20: Estabilización de órbitas en el sistema de Rossler (a) órbita de período uno para  $K=0.4$  y ruido superpuesto de amplitud  $e=0.1$ . (b) órbita de período tres para  $K=0.2$  y retardo  $\tau=17.5$ .  $F(t)$  es la perturbación,  $y(t)$  es la señal de salida del sistema. El origen de la curva  $F(t)$  indica el inicio de la perturbación<sup>1</sup>

Cuando se considera el caso en que el sistema es forzado por una secuencia de pulsos paramétricos, y existe un retardo en el lazo de realimentación, la fuerza externa adquiere la forma:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_E x(t-\tau) \delta(t-nT_E) \quad (2.11.1)$$

donde  $\tau$  es el retardo y  $V_E$  es una constante de proporcionalidad. El sistema

<sup>1</sup> Extraída de [Pyragas 92]

dinámico resultante es, para el caso del modelo S [Larrondo et al 96a]:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (2.11.2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (4bx_1^2 - 2a)x_2 - b^2x_1^5 + 2abx_1^3 - (a^2 + \omega^2)x_1 + V_E x_1(t-\tau)\delta_T$$

El caso  $\tau=0$  corresponde a la excitación paramétrica estudiada en 2.10 y presenta un comportamiento muy estable: sólo existen órbitas con comportamiento periódico o cuasiperiódico. El retrato de fases para este caso se muestra en forma de tabla en la Figura 2.21. Por su parte, la Figura 2.22 muestra la superficie  $\phi' = \phi'(\phi, V_E)$  para un rango de valores de  $V_E$  que va desde 0 hasta 5. La sección de esta superficie con los planos  $V_E = \text{constante}$  da las diferentes PTC's de las cuales dos están graficadas en la Figura 2.19.

El plantear una excitación paramétrica e instantánea no es del todo realista al modelar un sistema físico porque, como se indicara antes, la excitación paramétrica requiere la medición de la variable de estado ( $x_1$  en el caso planteado) y esta operación involucra un tiempo finito. Resulta entonces de interés estudiar el caso  $\tau \neq 0$ .

Es importante destacar que, para fuerzas impulsivas y bajo la hipótesis de relajación fuerte, la dinámica se puede analizar en términos de un mapa unidimensional, a pesar de tratarse de un sistema en rigor infinito-dimensional. Este mapa es la aproximación unidimensional al verdadero mapa estroboscópico bidimensional. La PTC para el caso planteado tiene la forma:

$$\tan \phi' = \tan \phi -$$

$$\frac{V_E \cos \theta_r}{\omega \cos \theta} \left[ \frac{1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta + (2a/\omega)\sin\theta\cos\theta}{1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta_r + (2a/\omega)\sin\theta_r\cos\theta_r} \right]^{1/2} \quad (2.11.3)$$

$$\text{sign}(\cos \theta') = \text{sign}(\cos \theta) = \text{sign}(x) \quad (2.11.4)$$



con

$$\theta_r = 2\pi\phi - \omega\tau \quad \text{y} \quad \theta = 2\pi\phi. \quad (2.11.5)$$

Todos los cálculos para el oscilador S han sido realizados para  $a = \omega = 0.5\pi$  y  $b = 5\pi$ . Para estos valores de los parámetros el período del oscilador libre es  $T_0 = 4$ . La condición inicial adoptada corresponde al punto  $(x_{10}, x_{20})$  intersección de la isócrona  $\phi_0 = 0$  con el ciclo límite (Figura 2.13c)

Para el caso  $\tau = 0$  la PTC es una función monótona no decreciente, para cualquier valor de  $V_E$  y tiene siempre grado topológico uno. El sistema sólo puede tener comportamiento periódico o cuasiperiódico [González *et al.* 84b].

Para  $\tau \neq 0$ , tanto la curva de condiciones iniciales, que ahora es un "ciclo límite deformado", como el ciclo límite original, intersectan las mismas isócronas. Este hecho impide que se produzca el cambio de grado topológico. Este hecho implica a su vez que esta clase de transición de difeomorfismo a PTC no invertible nunca se presentará.

Sin embargo podría en principio aparecer una singularidad cúbica. Este es justamente el caso. En la Figura 2.23, por ejemplo, se muestra la transición vía una singularidad cúbica, para un valor fijo de  $\tau$  y diferentes valores de  $V_E$  (en la figura  $\tau = 0.8$  and  $V_E = 0.3, 0.6, \text{ y } 1.413$ ). En la Figura 2.24 se muestra la transición para un valor fijo de  $V_E$  y diferentes valores de  $\tau$  (en la figura  $V_E = 1, \tau = 0.4 \text{ and } 0.8$ )

Una manera equivalente al estudio del la PTC es analizar la geometría de la red de isócronas dado que la transición se evidencia también en ella, con el método indicado en el acápite 2.6.

Por ejemplo en el caso  $\tau = 0.8$  y  $V_E = 1.413$  el "ciclo límite deformado" intersecta tres veces las isócronas en la vecindad de  $\phi \approx 0$  y  $\phi = 1/2$  (ver Figura 2.25) significando que la correspondiente PTC es no monótona (Figura 2.24, curva b).

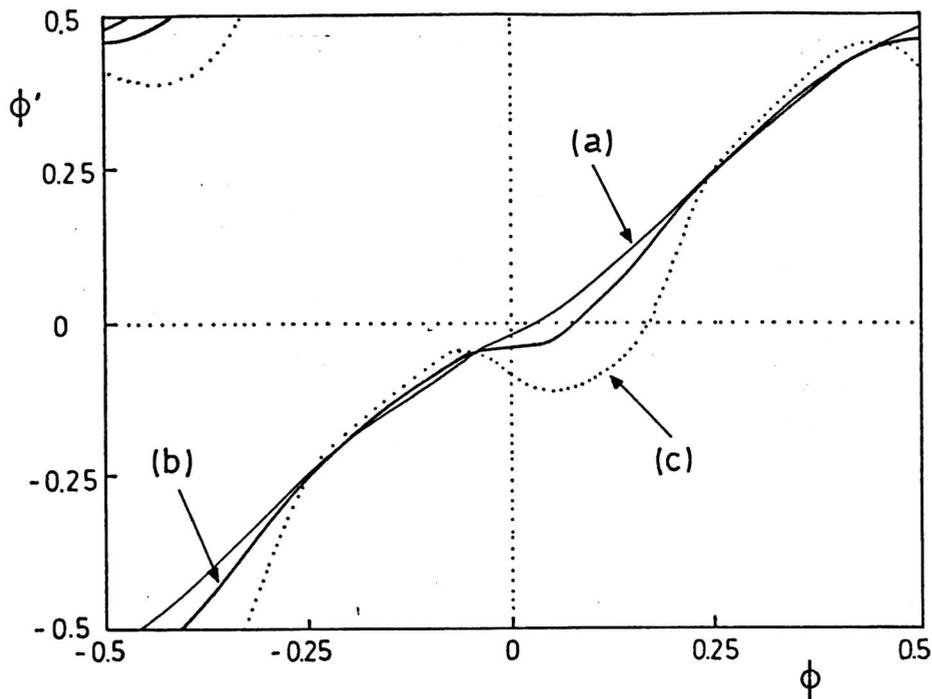


Figura 2.23: Transición de la PTC para el modelo S con  $\tau=0.8$ . La curva (a) es un difeomorfismo y corresponde a  $V_E=0.3$ . La curva (b) corresponde a  $V_E=V_0=0.6$  (la singularidad cúbica); la curva (c) es no-difeomórfica y corresponde a  $V_E=V_{\text{crit}}=1.413$  (el valor crítico)

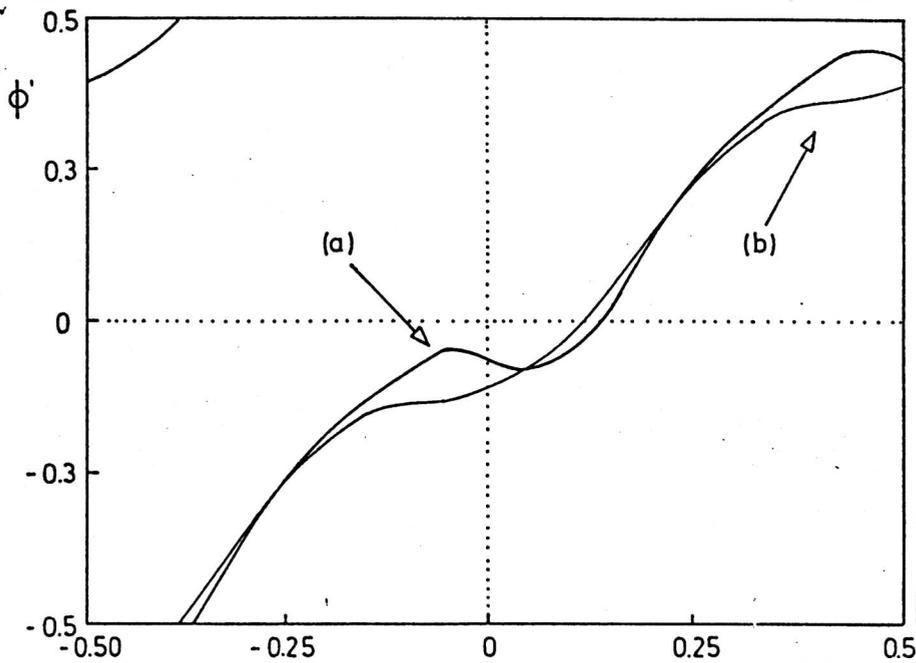


Figura 2.24: Transición para  $V_E=1$ ; la curva (a) corresponde a  $\tau=0.8$  y es no difeomórfica; la curva (b) es un difeomorfismo y corresponde a  $\tau=0.4$

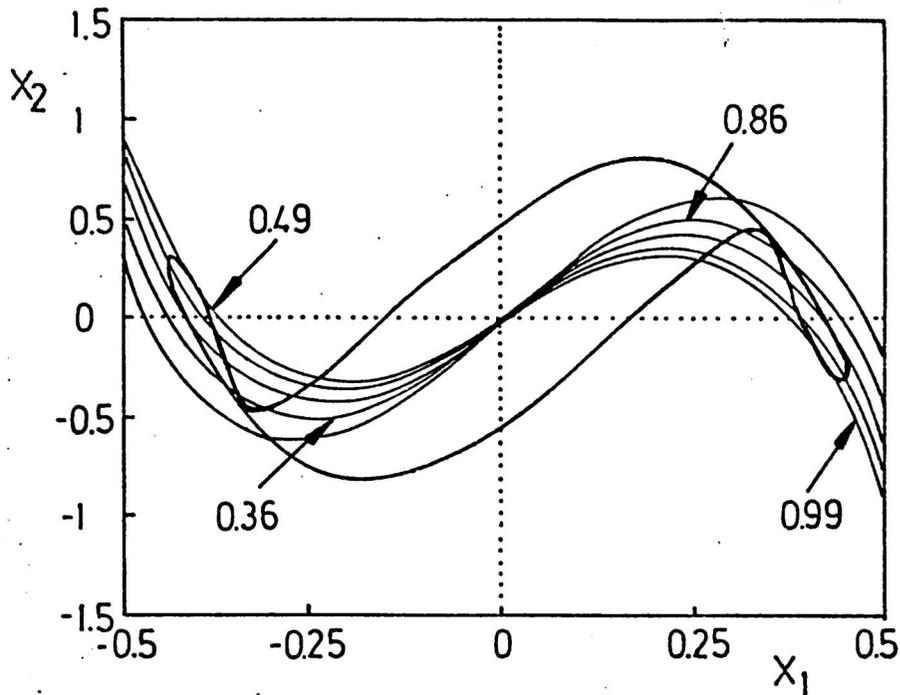


Figura 2.25: Curva de condiciones iniciales para el valor crítico  $V_E=1.413$  y  $\tau=0.8$ . Note que la curva interseca tres veces las isócronas pertenecientes a los intervalos  $(0.86, 0.99)$  y  $(0.36, 0.49)$

La presencia de una cadena de duplicación de período sólo es posible cuando la PTC tiene una derivada cuyo valor está por debajo de  $-1$  (al menos en un punto). En nuestro caso la expresión analítica para esta derivada es:

$$\frac{d\phi'}{d\phi} = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \left[ \sin\theta - \frac{V_E}{\omega} \cos\theta_r R \right]^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{V_E}{\omega} \frac{\cos\theta_r}{\cos\phi} \frac{1}{2R} \left[ \frac{-\sin\theta_r \cos\theta + \cos\theta_r}{\cos^2\theta} \right] R \right. \quad (2.11.6)$$

$$\left. \frac{V_E}{\omega} \frac{\cos\theta_r}{\cos\phi} \frac{1}{2R} \left[ \frac{A}{B} + \frac{CD}{B^2} \right] \right\}$$

con:

$$R = \left[ \frac{1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta + (2a/\omega)\sin\theta \cos\theta}{1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta_r + (2a/\omega)\sin\theta_r \cos\theta_r} \right],$$

$$\theta_r = (2\pi\phi - \omega\tau)$$

$$\theta = 2\pi\phi$$

$$A = -(4a^2/\omega^2)\cos\theta \sin\theta + (2a/\omega)\cos^2\theta - (2a/\omega)\sin^2\theta$$

$$B = 1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta_r + (2a/\omega)\sin\theta_r \cos\theta_r$$

$$C = 1 + (2a^2/\omega^2)\cos^2\theta + (2a/\omega)\sin\theta\cos\theta$$

$$D = -(4a^2/\omega^2)\cos\theta_r \sin\theta_r + (2a/\omega)\cos^2\theta_r - (2a/\omega)\sin^2\theta_r$$

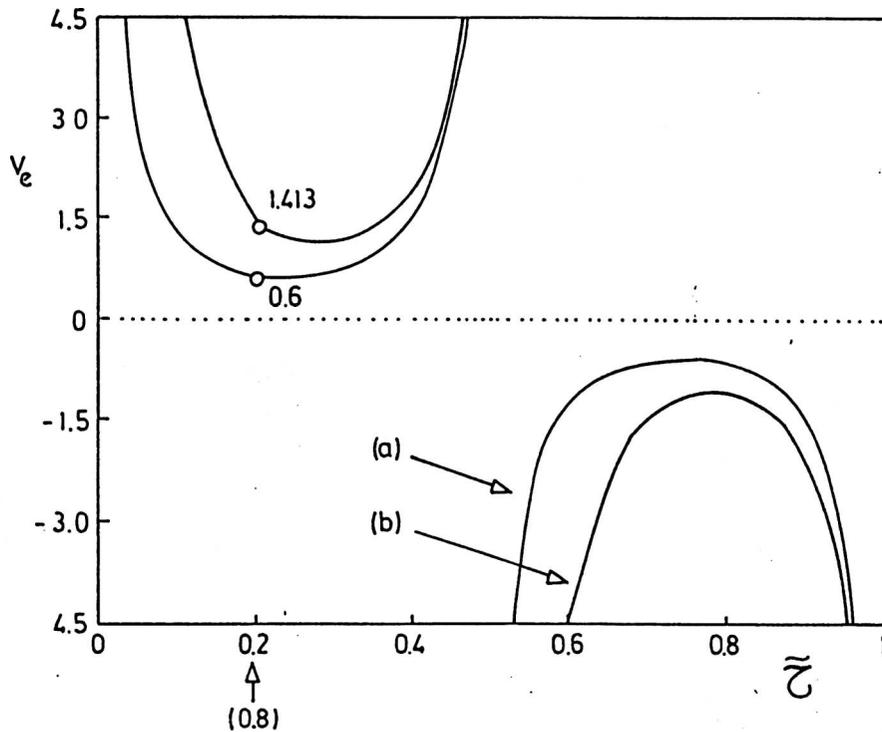


Figura 2.26: (a) Valores de  $V_E$  correspondientes a la singularidad cubica, como función de  $\tilde{\tau} = \tau/T_0$ . (b) Valores críticos de  $V_E$ , correspondientes a la transición de duplicación de período  $1 \rightarrow 2$ , como función de  $\tilde{\tau}$

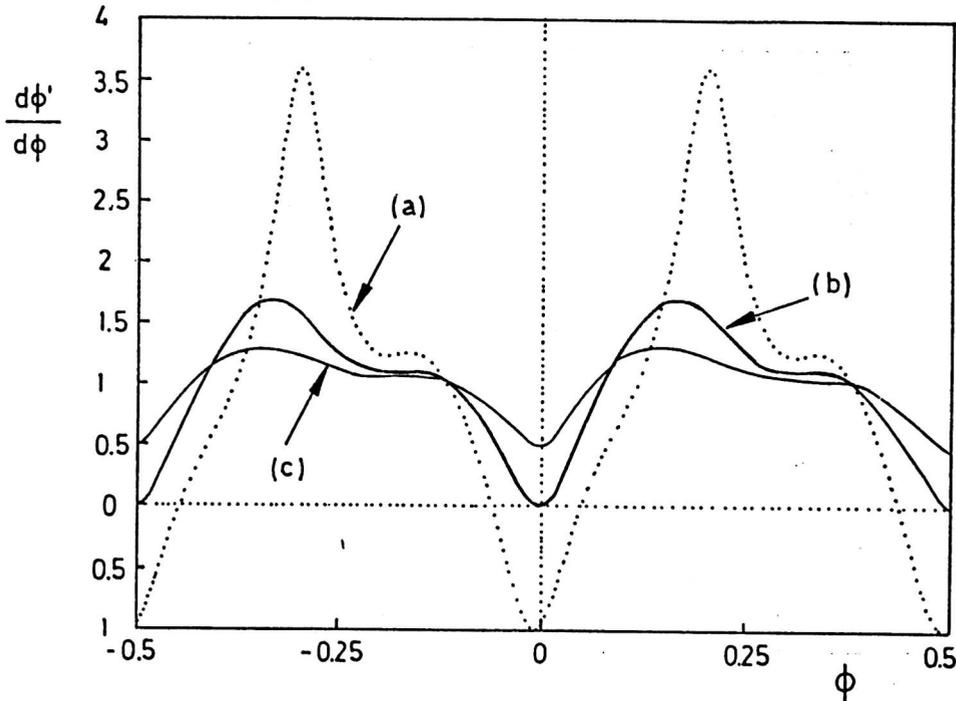


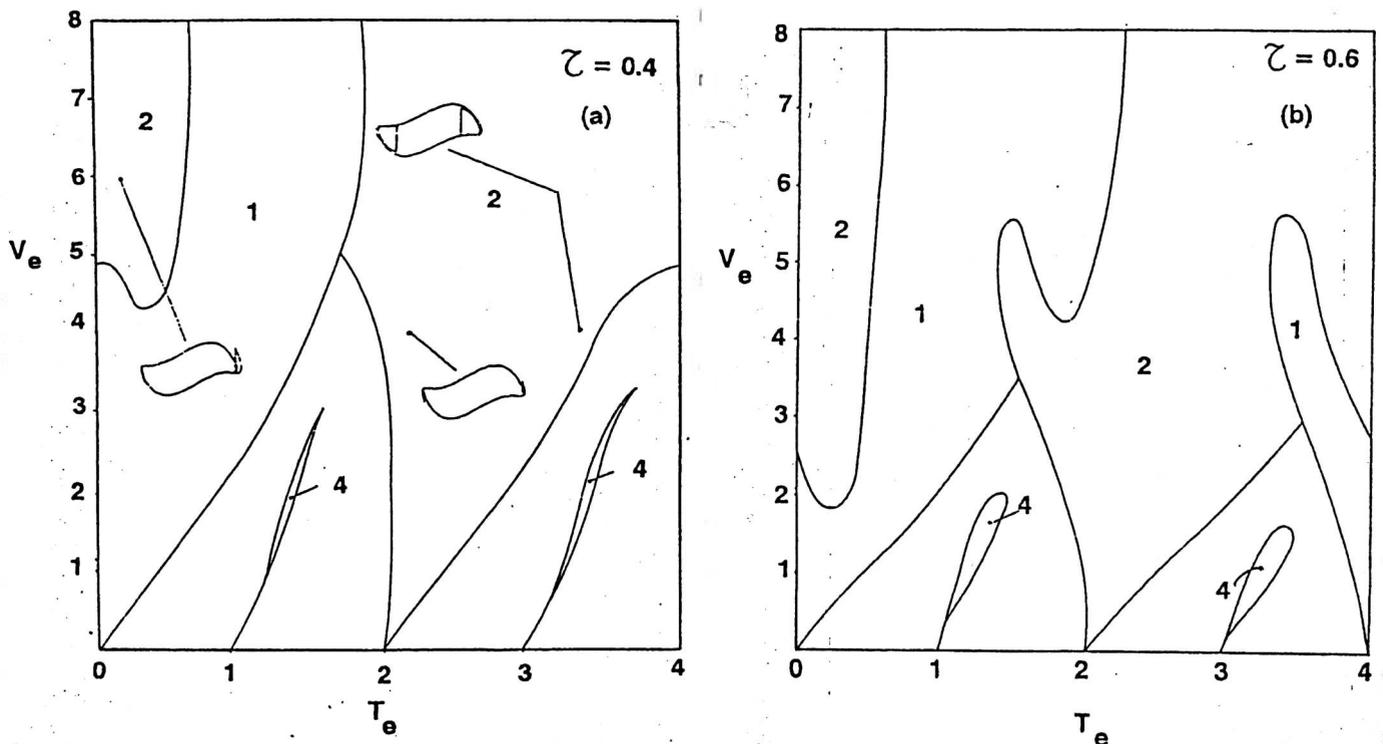
Figura 2.27: Derivada de la PTC del modelo S, como función de  $\phi$ , para  $\tau=0.8$  y (a)  $V_E=1.413$ ; (b)  $V_E=0.6$ ; (c)  $V_E=0.3$

Para cada valor de  $\tau$ , distinto de  $nT_0/2$ , existe un valor crítico de  $V_E$ , que designamos  $V_{\text{crít}}$ , para el cual  $d\phi'/d\phi$  alcanza el valor -1 en al menos un punto (debido a la simetría presente en el modelo existen de hecho dos puntos). Por ejemplo, para  $\tau=0.8$ ,  $d\phi'/d\phi$  es igual a -1 en  $\phi = -0.062$  y en  $\phi = 0.438$  (ver Figura 2.27) y el valor de  $V_{\text{crít}}$  resulta igual a 1.413 (ver Figura 2.26). La PTC correspondiente a este último caso se muestra en la Figura 2.21 curva (c).

Como una verificación adicional de la presencia de las transiciones que surgen de la geometría de la PTC se han obtenido los retratos de fase para valores de  $\tau$  comprendidos entre 0 y 0.8 cuatro de ellos se muestran en la Figura 2.28. Han sido construídos en forma directa muestreando la salida del sistema y buscando la periodicidad una vez que se ha alcanzado el comportamiento asintótico (se ha adoptado el criterio de considerar 100 períodos de la fuerza externa como transitorio). Las zonas rotuladas con números enteros corresponden a regiones de sincronización, es decir

regiones en el plano  $(T_E, V_E)$  con número de rotación racional.

A medida que se incrementa el retardo estas zonas de sincronización se pliegan sobre sí mismas (ver Figuras 2.28b y 2.28c), conduciendo finalmente al retrato de fases mostrado en la Figura 2.28d donde aparecen dos burbujas de comportamiento complicado. Si se afina la escala, a medida que se agrandan las burbujas, surge la estructura fina típica de las duplicaciones de período, rodeando a un atractor caótico central. Las fronteras entre zonas en este último retrato de fases son cada vez más difíciles de obtener, a medida que se modifican los parámetros penetrando en la zona central de las burbujas, debido a esta estructura fina. La resolución en el plazo  $(T_E, V_E)$ , empleada en los gráficos mostrados, es de  $160 \times 320$  puntos, respectivamente de modo que las fronteras de las distintas zonas han sido determinadas con esa resolución. Por ejemplo la transición de período uno a período dos, para el valor crítico  $V_{crit}=1.413$ , prevista por el análisis geométrico de la PTC o bien del mapa de isócronas, se produce para  $T_E \approx 0.3$  (ver Figura 2.28d).



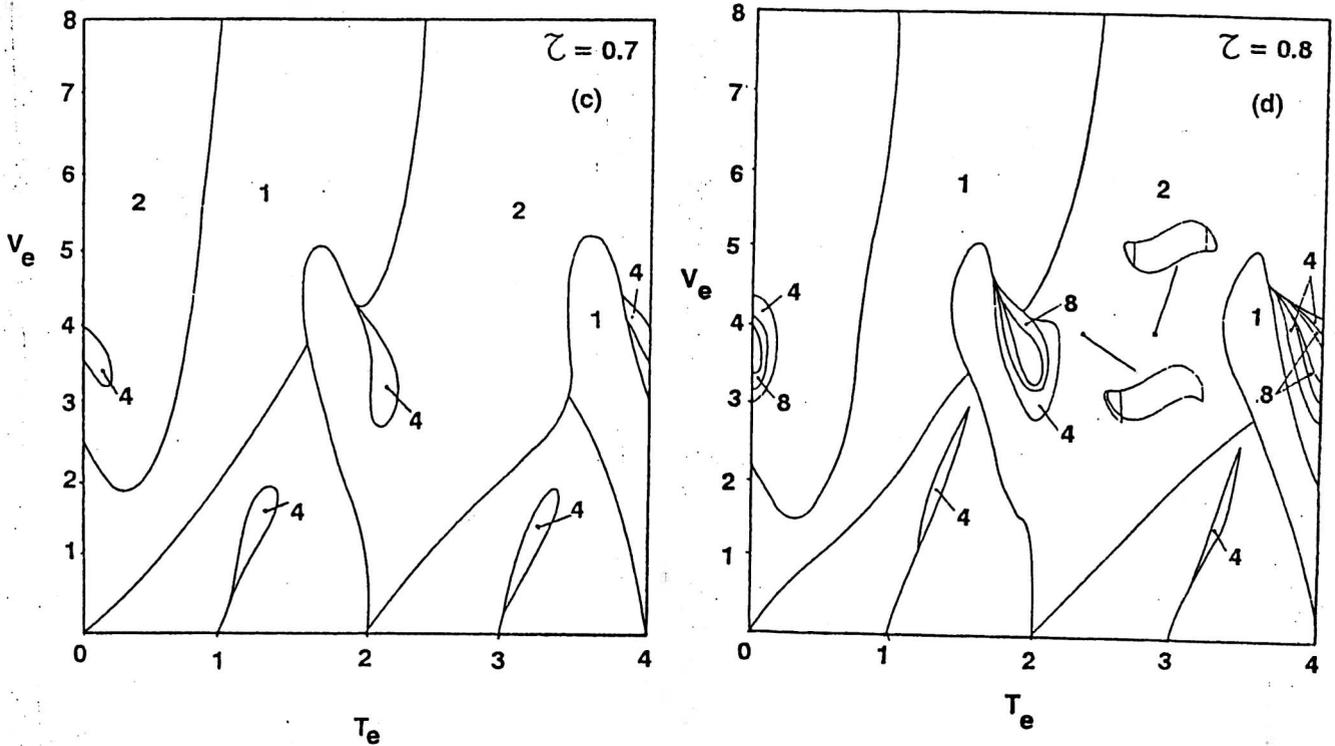


Figura 2.28: Retratos de fase para varios valores de  $\tau$ : en (a)  $\tau=0.4$ ; en (b)  $\tau=0.6$ ; en (c)  $\tau=0.7$ ; en (d)  $\tau=0.8$ . En (a) y (d) se muestran algunas trayectorias en el espacio de fases.

Dentro de cada zona de sincronización existen soluciones con diferente número de rotación y diferentes propiedades de simetría. Algunas de esas soluciones son mostradas en las Figuras 2.28a y 2.28d. Este comportamiento complejo parece estar relacionado con la simetría del propio modelo y con la inversión de signo de las funciones delta paramétricas [González et al 85]

### 2.12. Ejemplo de utilización del análisis geométrico para estabilizar una solución caótica.

Se estudia a continuación la eliminación del comportamiento caótico en un sistema mediante el agregado de una realimentación con retardo. El

sistema caótico bajo estudio es el oscilador S, forzado por un "tren de deltas" de amplitud y período tales que la señal de salida es caótica. En efecto de la Figura 2.4d, se deduce que se presentará una salida caótica para los siguientes valores de los parámetros:

$$a=0.5\pi; b=5\pi; \omega=0.5\pi; V_E=1.625; T_E=2.51 \quad (2.12.1)$$

La Figura 2.29 muestra la trayectoria obtenida y el correspondiente atractor extraño. La figura 2.30 muestra la superficie  $\phi'=\phi'(\phi, V_E)$ .

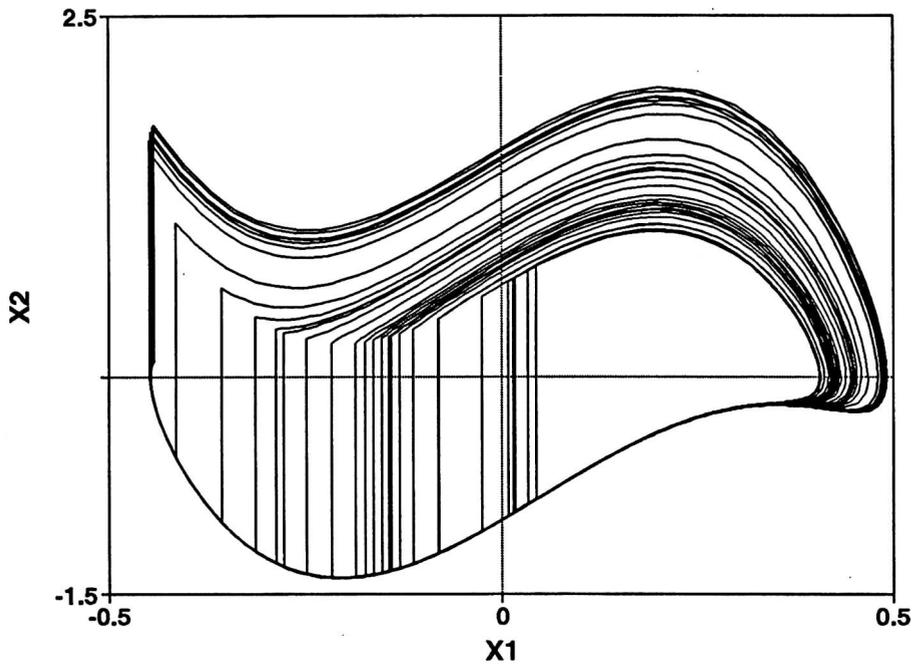


Figura 2.29: Órbita caótica para el modelo S ( $a=0.5\pi$ ,  $b=5\pi$ ,  $\omega=0.5\pi$ ) forzado con deltas de altura fija  $V_E=1.625$  y  $T_E=2.51$

Está claro que para eliminar esta transición debe lograrse modificar la curva de condiciones iniciales hasta que encierre nuevamente el origen. Una excitación paramétrica, proporcional a la señal de salida  $x(t)$ , no podrá cumplir este objetivo, dado que la nueva curva de condiciones iniciales continuará cortando el eje vertical en los mismos puntos en que lo hace la correspondiente al caso caótico. Por lo tanto debe escogerse un instante de muestreo  $t_m$  tal que la curva de condiciones iniciales obtenida satisfaga el requerimiento geométrico apuntado.

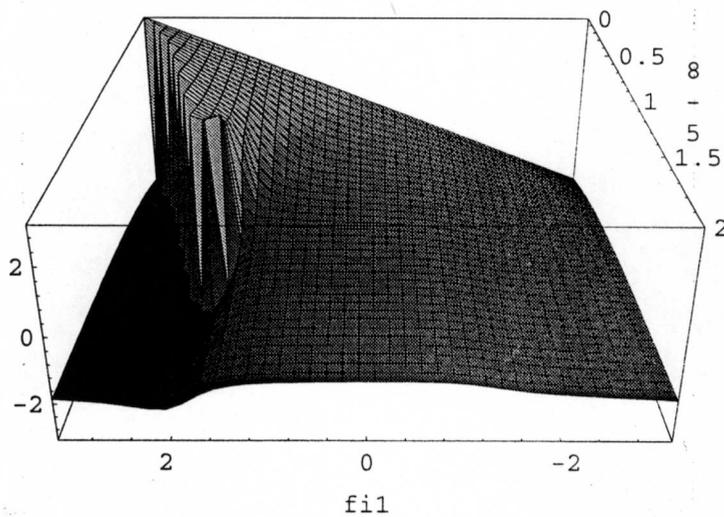
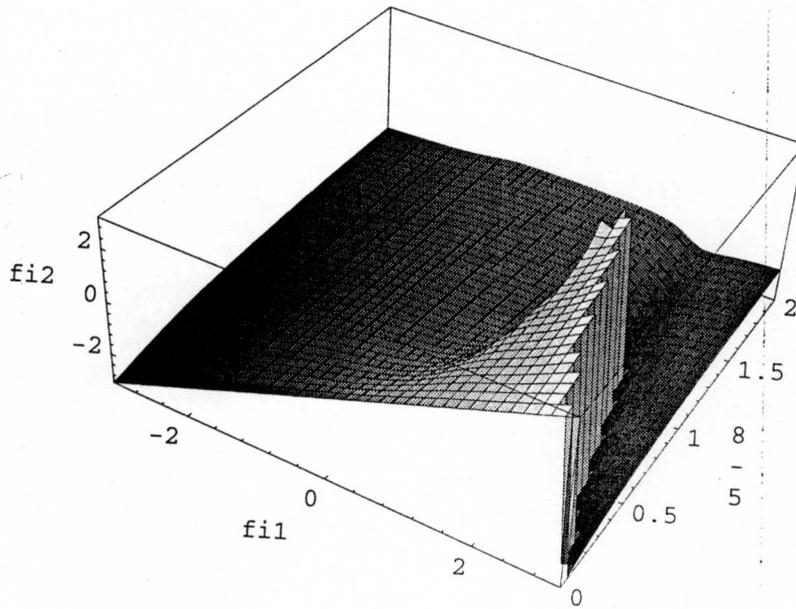


Figura 2.30: Superficie  $\phi' = \phi'(\phi, V_E)$ . Las PTC presentarán una transición por cambio de grado en  $V_E=1$ .

Si se adiciona una realimentación paramétrica con retardo a las deltas fijas que dieron origen al comportamiento caótico del sistema, la ecuación resultante está dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (4bx^2 - 2a)\frac{dx}{dt} + b^2x^5 - 2abx^3 + (a^2 + \omega^2)x = F(t) \quad (2.12.2)$$

con:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_E(1 + \alpha x(t-\tau))\delta(t - nT_E) \quad (2.12.3)$$

Para  $V_E=1.6$ ;  $\alpha=2.5$  y  $\tau=3$  la correspondiente curva de condiciones iniciales es la mostrada en la Figura 2.31. Como se ve, la curva de condiciones iniciales encierra el punto fijo inestable del origen por lo que intersecta todas las isofases impidiendo que se produzca el cambio de grado topológico.

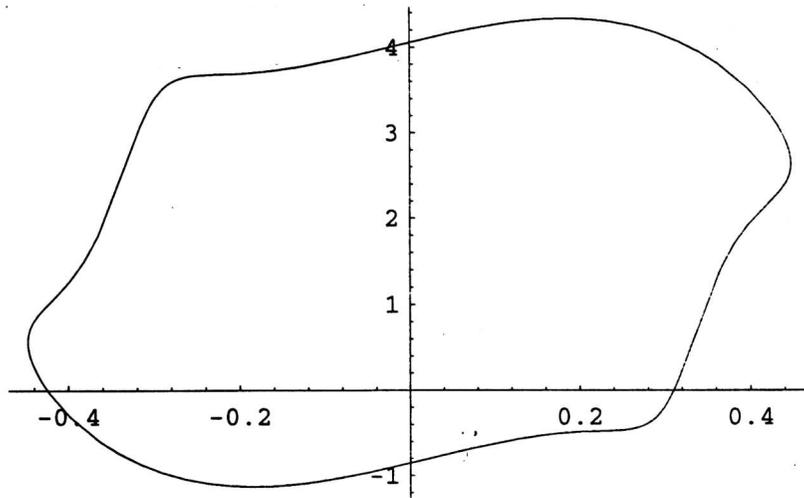


Figura 2.31: Curva de condiciones iniciales para el oscilador caótico, una vez introducida la realimentación paramétrica con retardo. La figura corresponde a  $V_E=1.625$ ,  $\tau=3$ ,  $\alpha=2.5$

La correspondiente superficie  $\phi' = \phi'(\phi, V_E)$  se muestra en la figura 2.32, en la que puede verse claramente que ha desaparecido la transición correspondiente al cambio de grado. Por otra parte las PTC resultantes son monótonas indicando que sólo es posible un comportamiento periódico o cuasiperiódico, pero no se harán presentes transiciones de duplicación de período ni caos.

Por último la figura 2.33 muestra el correspondiente retrato de fases que confirma el resultado del análisis geométrico. En este caso el retrato de fases se ha presentado en forma de tabla en lugar de utilizar las gráficas del tipo del la Figura 2.28

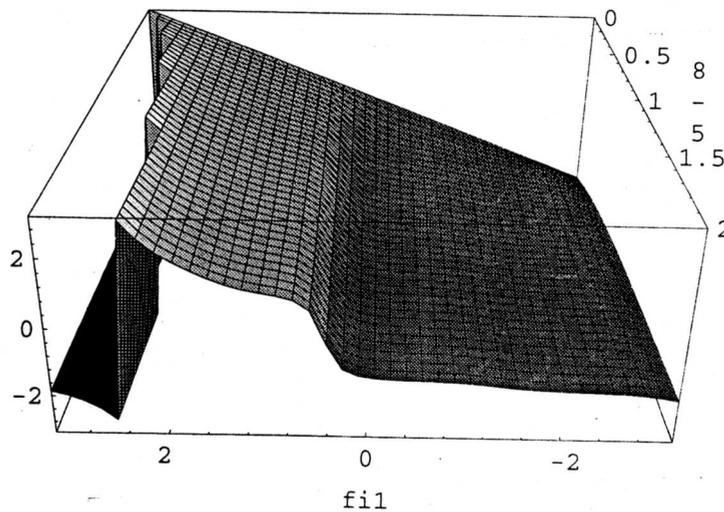
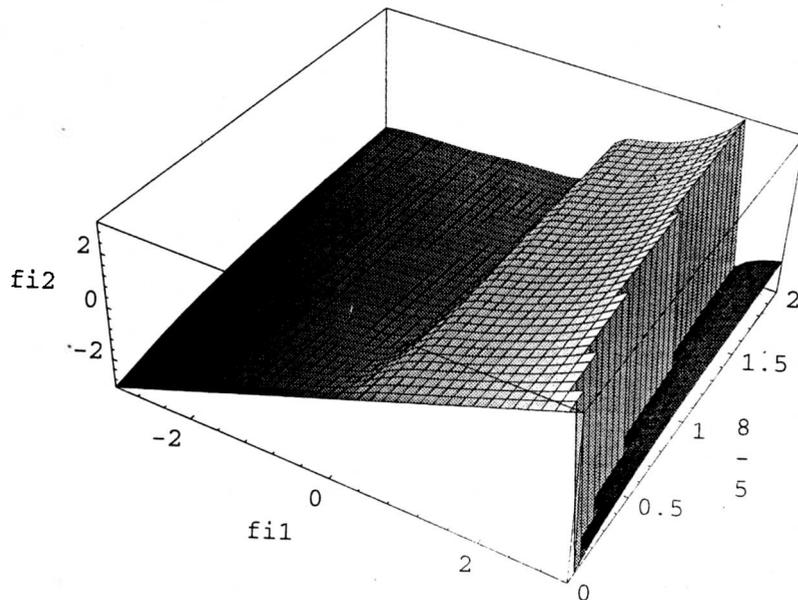


Figura 2.32: Superficie  $\phi' = \phi'(\phi, V, E)$  para los mismos valores de la Figura 2.31. Ha desaparecido la transición presente en la Figura 2.30

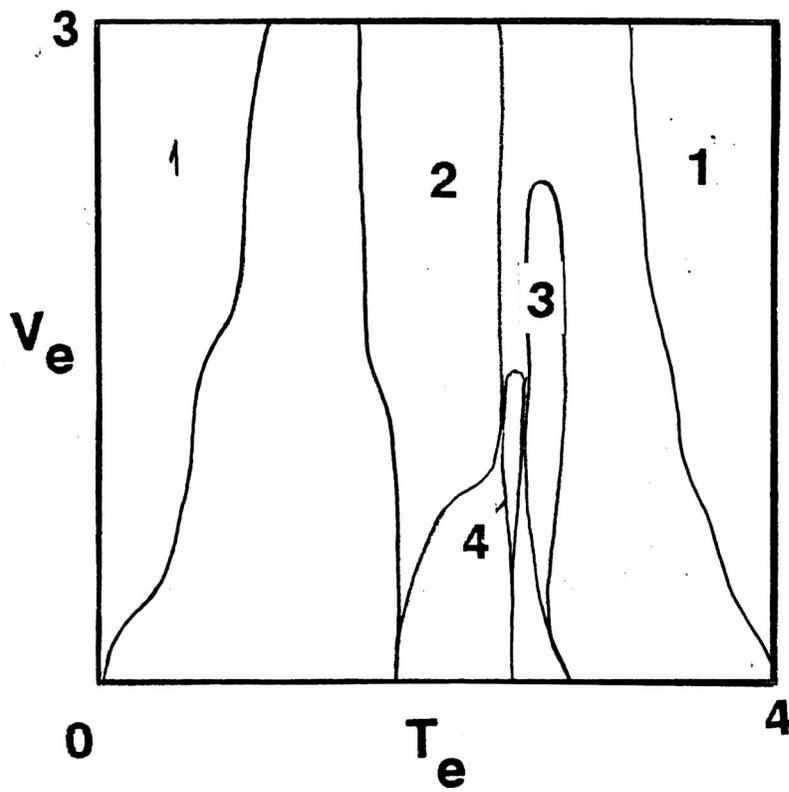


Figura 2.33: Retrato de fases para el caso de las Figuras 2.31 y 2.32. Nótese que sólo se presenta comportamiento periódico y cuasiperiódico

## Capítulo 3

### Sistemas de baja dimensión (II)

#### 3.0. Introducción

En este capítulo se presentan resultados experimentales correspondientes a dos sistemas electrónicos de baja dimensión: un circuito resonador con diodo, forzado senoidalmente, y un oscilador tipo Puente de Wien con excitación senoidal e impulsiva. Algunas mediciones se han realizado con instrumental analógico controlado por computadora [González *et al* 89], sin digitalización de las variables de estado del sistema; en otras en cambio la digitalización resulta indispensable [González *et al* 88, Larrondo *et al* 96b, 97b].

Para el estudio de osciladores con excitación paramétrica se desarrolló un banco de mediciones capaz de evaluar la incidencia de los retardos en el lazo de realimentación. El sistema desarrollado utiliza las capacidades de transferencia a memoria (DMA) de una PC standard y permite estudiar osciladores cuyo contenido de frecuencias relevantes es de hasta 25 KHz. La misma PC controla además el generador maestro y el analizador de espectro, mediante interfases IEEE 488 [Larrondo *et al* 96b, 97b].

Aún en los sistemas de dimensión finita es común la imposibilidad de medir todas las variables de estado del sistema. Además en la mayoría de los sistemas reales no se conoce a priori la dimensión ni las variables relevantes sino que su determinación experimental es precisamente la que permite construir un modelo del sistema.

Takens demostró que es posible determinar algunas propiedades importantes del atractor en el espacio de fases a partir de la serie temporal de una sola componente [Takens 81]. En particular puede efectuarse una reconstrucción del atractor y determinarse su entropía de Kolmogorov, sus exponentes de Lyapunov, su retrato de fases, su dimensión de correlación y su espectro de Fourier [Guckenheimer 83, Grassberger 83, Grassberger *et al* 83a, 83b, González *et al* 88, 89].

### 3.1. Espectro de Fourier de Sistemas oscilatorios lineales y no lineales

Sea un sistema físico que responde a la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (3.1.1)$$

la solución de esta ecuación lineal es inmediata y está dada por:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.1.2)$$

donde  $\omega$  es la *pulsación* y las constantes  $A$  y  $\varphi$  dependen de las condiciones iniciales. A partir de este sistema lineal se puede construir otro, no lineal, efectuando simplemente un *cambio de variables no lineal*:

$$x = \sqrt{y} \quad (3.1.3)$$

la ecuación diferencial satisfecha por  $y(t)$  resulta:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y - \frac{1}{2y^3} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (3.1.4)$$

Utilizando el cambio de coordenadas, puede obtenerse la solución de esta ecuación diferencial (no lineal):

$$y = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (3.1.5)$$

que puede escribirse:

$$y(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(2\omega t + \varphi) \quad (3.1.6)$$

En la Figura 3.1 se observan la forma de onda y el espectro de Fourier tanto para  $x(t)$  como para  $y(t)$ . El espectro de frecuencias se ha modificado completamente al efectuar la transformación no lineal. Es más, la única frecuencia presente en  $x(t)$  ha desaparecido completamente en  $y(t)$ . Debido a la falta de linealidad de (3.1.4), cada uno de los dos términos de Fourier (la constante y el término senoidal), que sumados constituyen la solución  $y(t)$ , no son solución de (3.1.4) si se los toma individualmente.

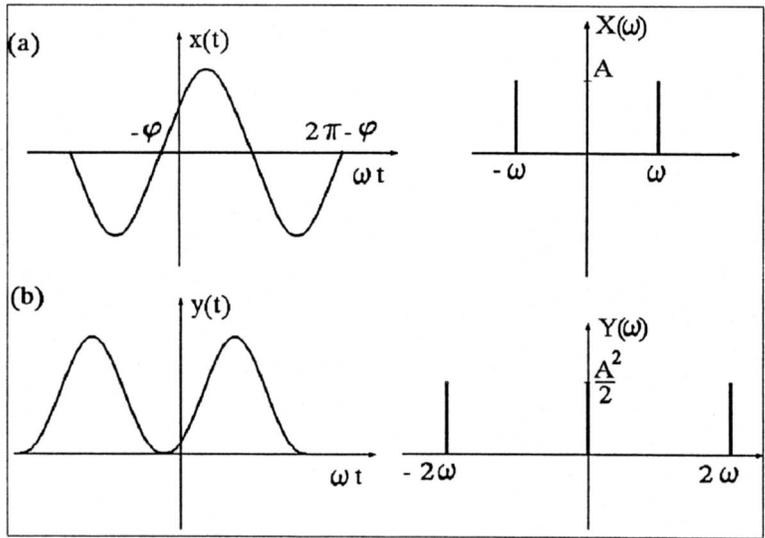
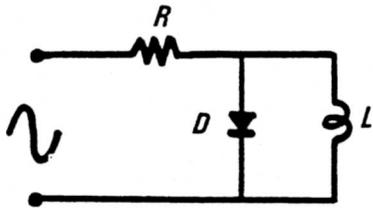


Figura 3.1: Formas de onda y espectros de Fourier de las soluciones de: (a) ecuación (3.1.1); (b) ecuación (3.1.4).

En la Figura 3.2 se muestra el resultado obtenido experimentalmente para un circuito muy simple armado con un diodo una inductancia y una resistencia y excitado por un generador externo.



$D = 1N4004, L = 30 \text{ mH},$

$f = 100 \text{ kHz}.$

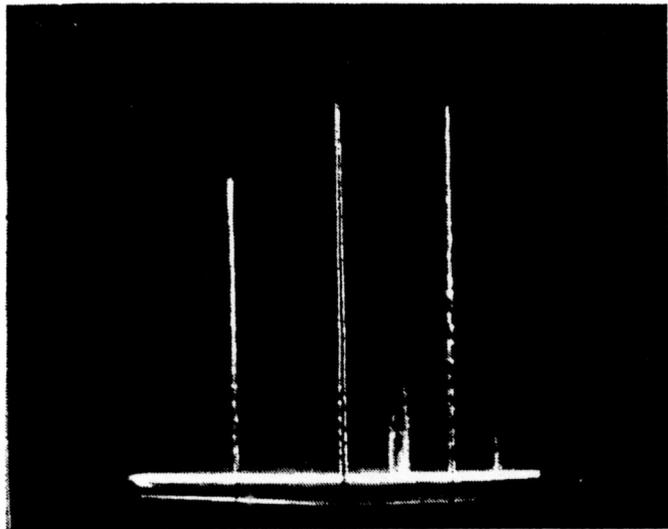


Figura 3.2.(a) Circuito bajo estudio. (b) Espectro de Potencia

Este circuito es un *resonador* no lineal y, a diferencia de un oscilador, tiene sólo un nodo en el origen de coordenadas de su espacio de

fases tridimensional [Testa et al 82]. A la frecuencia utilizada (100 kHz) la inductancia  $L$  resuena con la capacidad de difusión del diodo. Las fotos muestran *el espectro de potencia*, es decir el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier, obtenido en forma directa, utilizando un analizador de espectros. El generador utilizado en las mediciones genera una señal senoidal con una distorsión armónica inferior a 0.04%. El espectro de la salida fotografiado, corresponde a frecuencias inferiores a la del generador (*subarmónicas* [González et al 89]).

### 3.2. Oscilador Puente de Wien

El oscilador Puente de Wien es un circuito típico cuyo empleo como generador de señales está ampliamente difundido. Es sumamente estable de modo que los resultados obtenidos son fácilmente repetibles. El circuito básico forzado se muestra en la Figura 3.3 [Schilling et al 73]. En el caso libre el generador  $e_g$  está cortocircuitado. Suponiendo características ideales en el amplificador operacional las ecuaciones que modelan el funcionamiento son (ver Figura 3.4a):

$$\frac{e_o - e_A}{R_F} = \frac{e_A - e_g}{R_A}$$

$$\frac{e_o - e_+}{Z_1} = \frac{e_+}{Z_2} \quad (3.2.1)$$

$$e_o = (e_+ - e_A)A + e_A$$

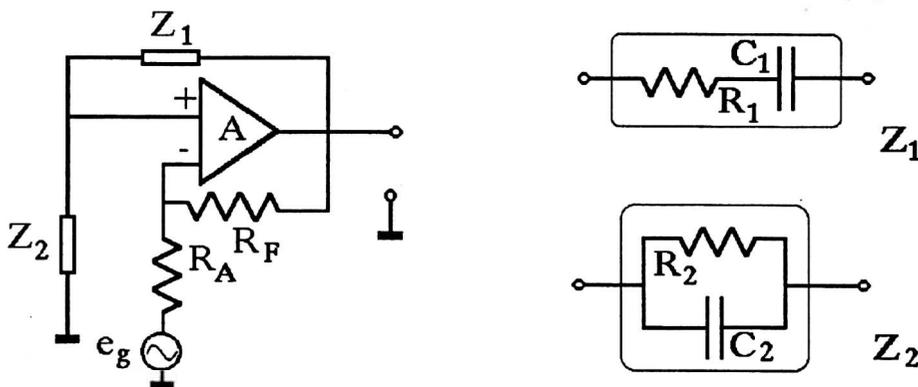


Figura 3.3: Esquema del Oscilador Puente de Wien

Suponiendo características ideales en el amplificador operacional y pasando al límite para  $A \rightarrow \infty$  resulta:

$$e_0 = -e_g \left( \frac{R_F}{R_A} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \quad (3.2.2)$$

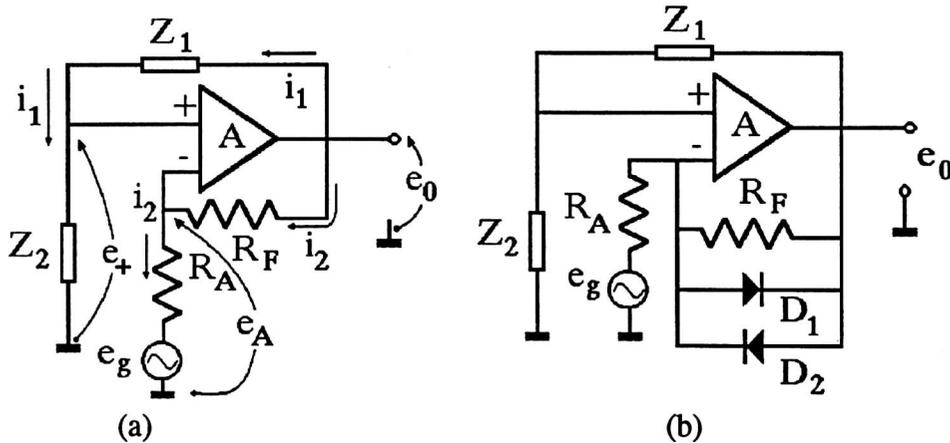


Figura 3.4: (a) Variables utilizadas en la descripción del oscilador Puento de Wien; (b) control automático de ganancia mediante los diodos  $D_1$  y  $D_2$ .

Si existe algún valor de  $\omega$  para el cual el denominador se anule resulta  $e_0 \neq 0$  aún cuando  $e_g = 0$ . Este caso corresponde a la condición de oscilación autosostenida. Llamando

$$\beta = \frac{R_F}{R_F + R_A} \quad (3.2.3)$$

y suponiendo  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$  (por razones que se detallan más abajo) la condición de oscilación resulta:

$$\omega = 1/RC \quad \beta = 1/3 \quad (3.2.4)$$

Las condiciones para que se produzca la oscilación son muy críticas. Si  $\beta$  varía respecto del valor calculado el oscilador "se apaga" o bien genera una onda cuadrada (de amplitud limitada por las fuentes de alimentación). Este es el motivo por el cual es necesario adicionar al circuito algún tipo de control automático de ganancia. Los diodos  $D_1$  y  $D_2$  de la Figura 3.4b cumplen esa función.

En efecto, suponiendo diodos ideales resulta que, cuando la ganancia  $\beta$  es demasiado elevada, el diodo actúa como un "corto circuito" sobre la resistencia  $R_B$  de tal modo que hace disminuir  $\beta$ . Si  $\beta$  es muy pequeño el diodo se "abre" y  $R_3$  queda conectada de modo que  $\beta$  tiende a subir. Este efecto de control automático de ganancia hace que la oscilación sea estable para un rango amplio de posiciones de cursor del potenciómetro  $P_1$ . El efecto del potenciómetro  $P_1$  es variar la amplitud y la frecuencia de la oscilación autosostenida del circuito llevándolo de este modo a distintas zonas de funcionamiento. Si se toma en cuenta la característica real del diodo el efecto limitativo resulta más suave.

Cuando el puente de Wien se utiliza como generador de señal senoidal se pretende que la distorsión sea lo más pequeña posible. Para ello se sintonizan ambos filtros RC logrando  $R_1C_1=R_2C_2$ . En el caso de los osciladores de relajación tratados en el capítulo 2 en cambio, interesa lograr una señal de salida con tiempos de subida y caída muy cortos. Como ejemplo la Figura 3.5 muestra una oscilación de relajación generada por el modelo S del capítulo 2.

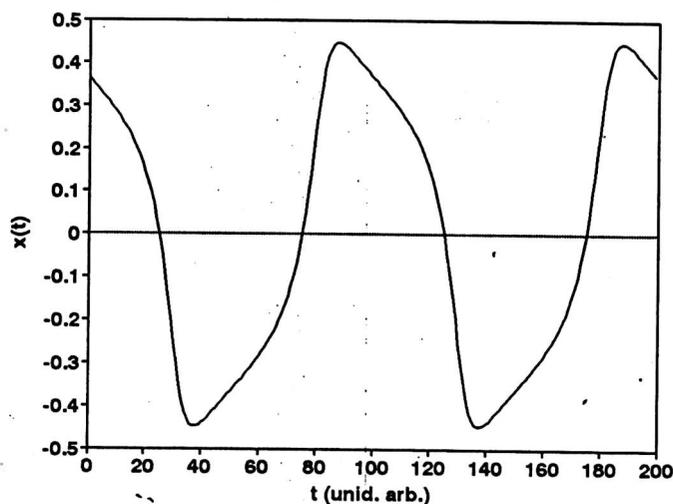
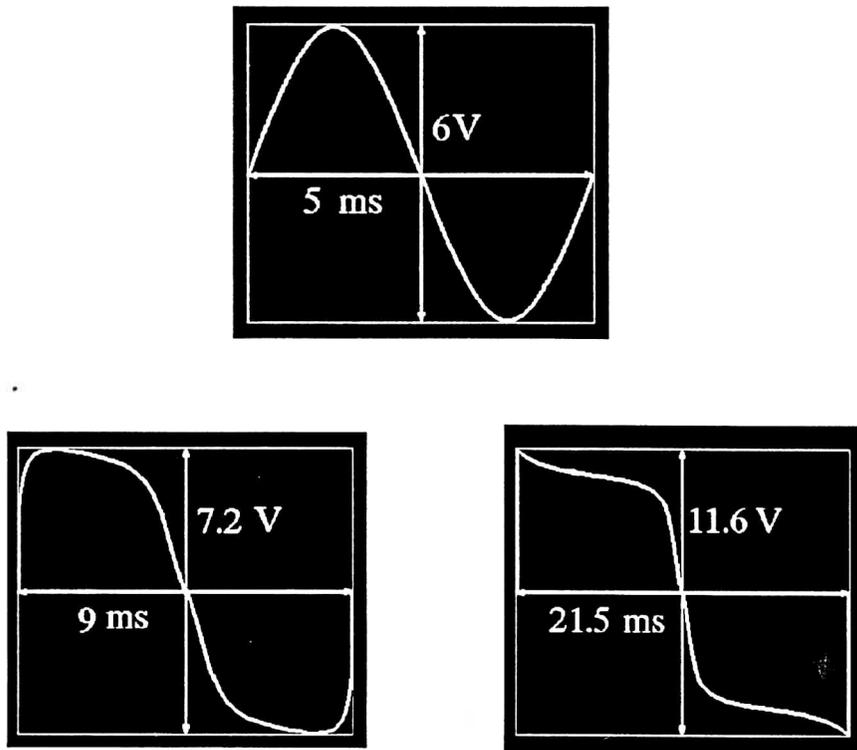


Figura 3.5. Forma de onda para el modelo S con  $a=0.5\pi$ ,  $b=5\pi$  y  $\omega=0.5\pi$

Para los valores indicados de los parámetros puede verse que existe

una región de variación rápida y otra lenta, como es característico en todos los osciladores de relajación.

En el circuito puente de Wien, se puede obtener una forma de onda similar desintonizando uno de los filtros RC respecto del otro. En las Figuras 3.6 a, b y c se muestran las formas de onda obtenidas para distintos valores de  $C_1$ . El circuito final estudiado es el de la Figura 3.7.



*Figura 3.6: Formas de onda para el oscilador Puente de Wien (a), (b) y (c) corresponden a distintos valores del potenciómetro P*

En las experiencias se trabajó con excitación senoidal y con excitación pulsada. Se utilizó un generador programable a través de interfase IEEE488, capaz de generar señales desde 100  $\mu\text{Hz}$  hasta 15 MHz con una distorsión armónica menor al 0.04% y pulsos con un tiempo de ascenso (rise time) inferior a los 20 ns. Su impedancia es de salida de 50 Ohms.

La salida del generador se debe monitorear durante todo el experimento de modo de asegurarse que el circuito no esté alterando la forma de onda del generador y que, por lo tanto, se está trabajando con un oscilador forzado y no con dos osciladores acoplados (que es un problema de mayor dimensión). Si no se dispone del generador adecuado es necesario intercalar una etapa de adaptación o *buffer* del tipo mostrado en la figura 3.8.

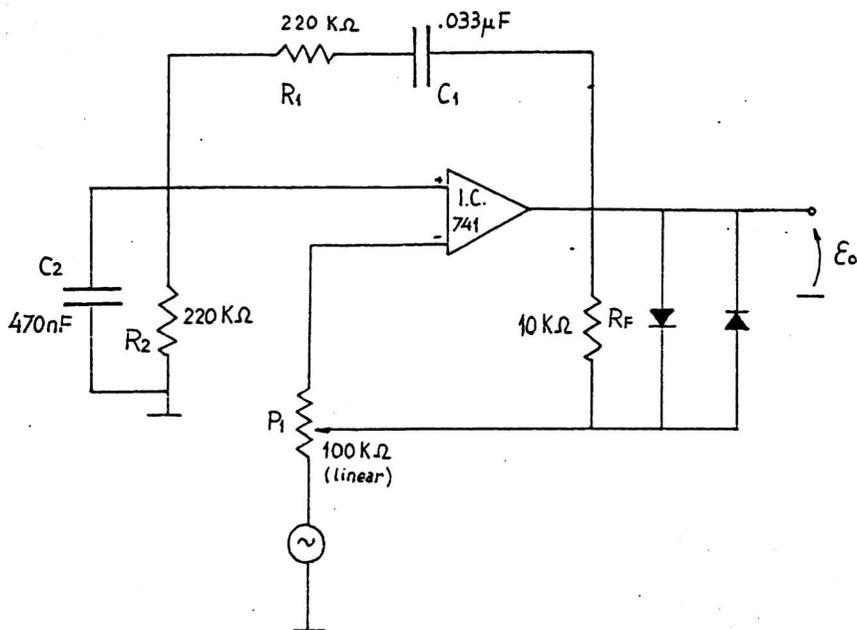


Figura 3.7: Circuito final implementado

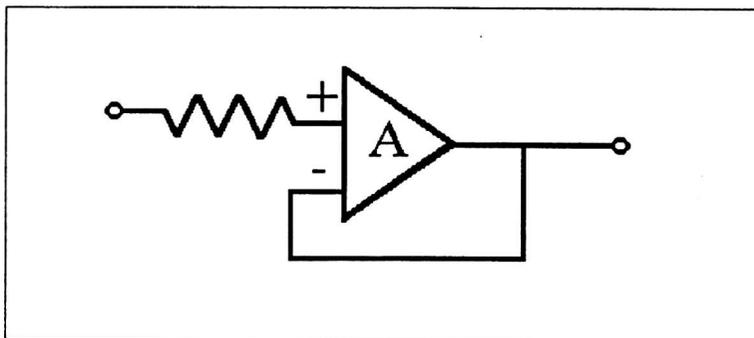


Figura 3.8. Circuito Buffer de adaptación del generador

Este circuito funciona como adaptador de impedancias: el generador "ve" una impedancia de carga prácticamente infinita en tanto que la carga "ve" una impedancia del generador prácticamente nula [Schilling et al 73].

La programación del generador HP33210 empleado requiere de 10 a 100 ms, según el número de funciones a programar. Por ese motivo en el caso de excitación paramétrica, para poder trabajar a frecuencias más elevadas, se utiliza el generador sólo como generador de sincronismo de todo el sistema. Los verdaderos pulsos a aplicar se fabrican utilizando un conversor digital analógico (DAC) controlado por la PC, como se explica en el acápite 3.8.

### 3.3. El Teorema de Takens

Al describir en el capítulo 2 los distintos tipos de comportamiento de un oscilador forzado se han mencionado en especial las zonas periódica, cuasiperiódica, caótica e hipercaótica. Al estudiar experimentatmente un sistema es necesario en primer lugar establecer claramente a cuál de estos tipos pertenece la señal de salida del oscilador. Se han desarrollado varias herramientas de análisis basadas en el teorema de Takens. El enunciado de Takens es el siguiente:

- Teorema de Takens

Sea un flujo  $d$ -dimensional  $\{\vec{x}(t)\}$ . El vector  $2d+1$  dimensional:

$$\vec{\xi}(t) = \{x_j(t), x_j(t + T), \dots, x_j[t + (2d + 1) T]\} \quad (3.3.1)$$

donde  $x_j(t)$  es una componente arbitraria del vector  $\vec{x}$ , y  $T$  es el período del muestreo, da un embedding suave para el flujo. Las propiedades métricas en ambos espacios, el  $d$ -dimensional  $\{x(t)\}$  y el  $(2d+1)$  dimensional  $\{\xi(t)\}$ , son las mismas, en el sentido que las distancias en  $\{x(t)\}$  y en  $\{\xi(t)\}$  tienen entre sí la misma relación y esta relación está uniformemente acotada a medida que nos alejamos de cero.

Entre las magnitudes medibles sobre la base de este teorema se encuentran la reconstrucción del atractor, la entropía de Kolmogorov, los

exponentes de Lyapunov y la dimensión de correlación [Grassberger 83, Grassberger et al 83a, 83b, González et al 88].

### 3.4 Reconstrucción del atractor

Para el oscilador Puente de Wien forzado en forma periódica el espacio de fases puede suponerse tridimensional. La proyección del espacio de fases sobre el plano  $(x_1, x_2)$ , con  $x_2 = dx_1/dt$  se mide en forma directa mediante un circuito derivador y un osciloscopio. Empleando el teorema de Takens se efectúa la reconstrucción sobre la base de una sola variable de estado.

El circuito derivador se ha calculado para funcionar dentro del rango de frecuencias utilizado. El circuito derivador básico se muestra en la figura 3.9a. Suponiendo características ideales en el amplificador operacional, resulta la respuesta en frecuencia de la figura 3.9b. Este circuito presenta el inconveniente que su transferencia sólo está limitada, en altas frecuencias, por la curva de respuesta del amplificador operacional. Por otra parte conviene disminuir la amplificación a altas frecuencias para disminuir la presencia de ruido. Por ello se utiliza el circuito modificado que se muestra en la Figura 3.10a, cuya transferencia es la mostrada en la Figura 3.10b.

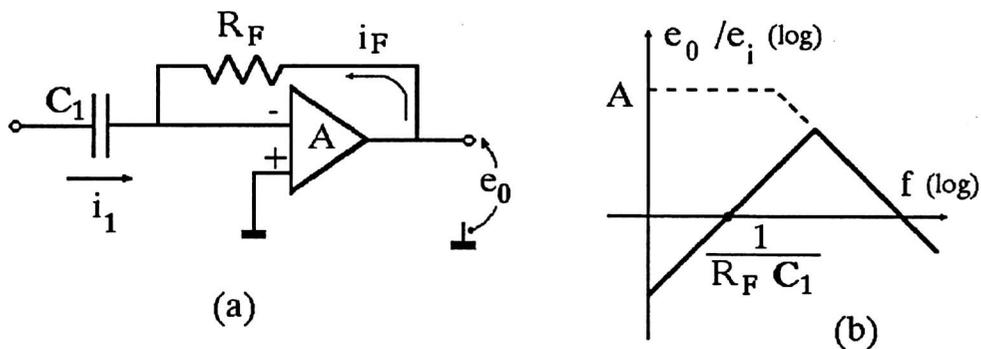


Figura 3.9. Circuito Derivador Básico. (a) circuito. (b) Transferencia

Se envían a los canales x e y del osciloscopio las señales  $x(t)$  y  $dx/dt$  respectivamente. De este modo se visualiza en la pantalla la proyección del atractor sobre ese plano  $(x_1, x_2)$  (la tercer variable de

estado es  $\theta = t \text{ mod } T_e$ ).

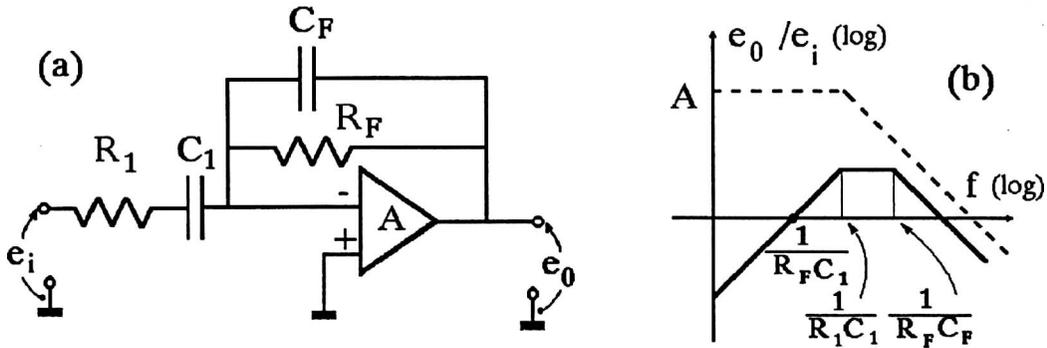


Figura 3.10. Circuito Derivador Modificado. (a) Circuito. (b) Transferencia

En la Figura 3.11 se muestra el atractor reconstruido a partir de la medición de la variable  $x(t)$  únicamente, en diversas condiciones de funcionamiento. En la Figura 3.12 se muestra la señal  $x(t)$ , reconstruida a partir de las muestras. El estado del sistema corresponde al punto indicado PR3 en el retrato de fases que se muestra más adelante (ver Figura 3.21b). La foto que acompaña cada figura muestra la señal medida directamente con el osciloscopio, notándose claramente la concordancia entre ambas.

Tanto la reconstrucción del atractor como la de la señal de salida se efectuaron utilizando los datos digitalizados mediante una tarjeta de adquisición standard, con una velocidad del muestreo baja (1 KHz). Esta frecuencia de muestreo permite trabajar con osciladores de hasta 500 Hz de contenido relevante de frecuencia (suponiendo que puede trabajarse en el límite permitido por el teorema del muestreo [Carlson 68], no obstante lo cual se logra una excelente reconstrucción.

El código desarrollado para la reconstrucción del atractor tiene como parámetro libre el período de muestreo. Cuando no se puede medir en forma directa una proyección del atractor se construye el espacio de embedding con un determinado período de muestreo calculado sobre la base del espectro de potencia de la señal medida. Se modifica el período de muestreo y se verifica la convergencia de los resultados.

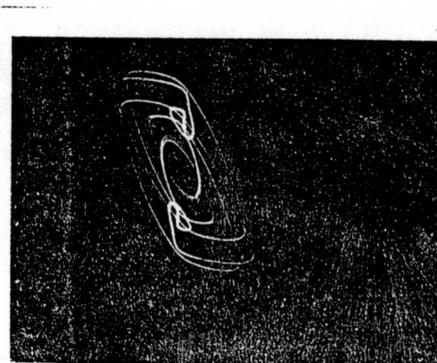
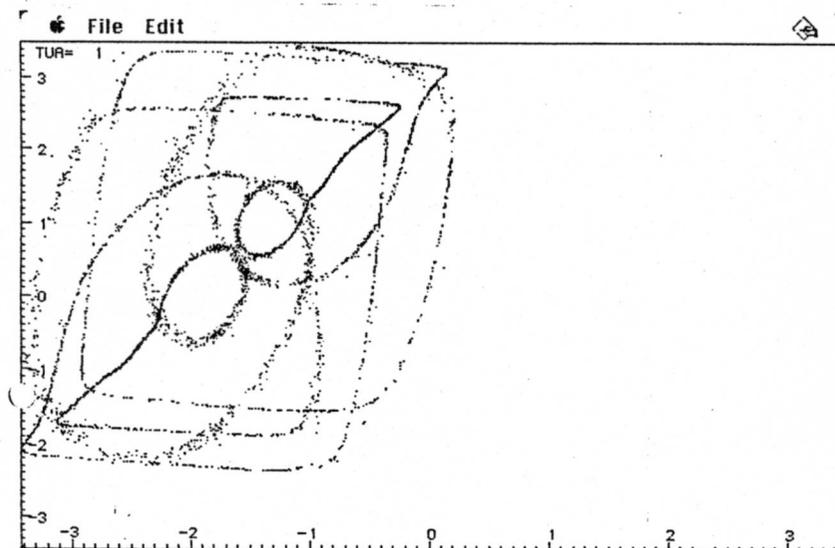
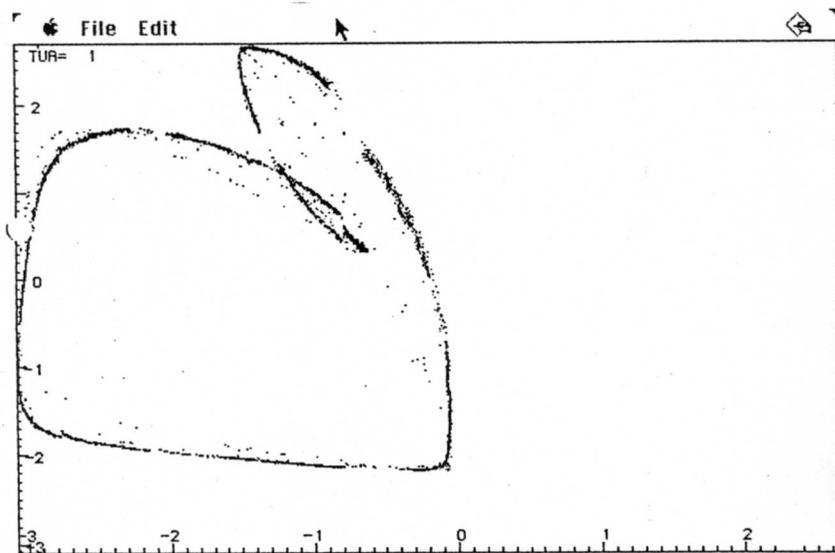
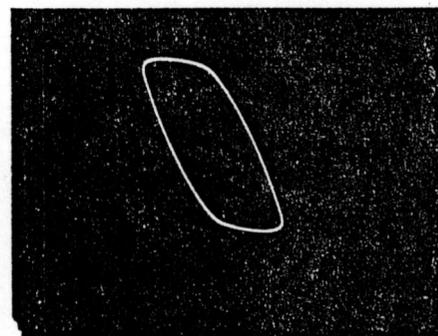
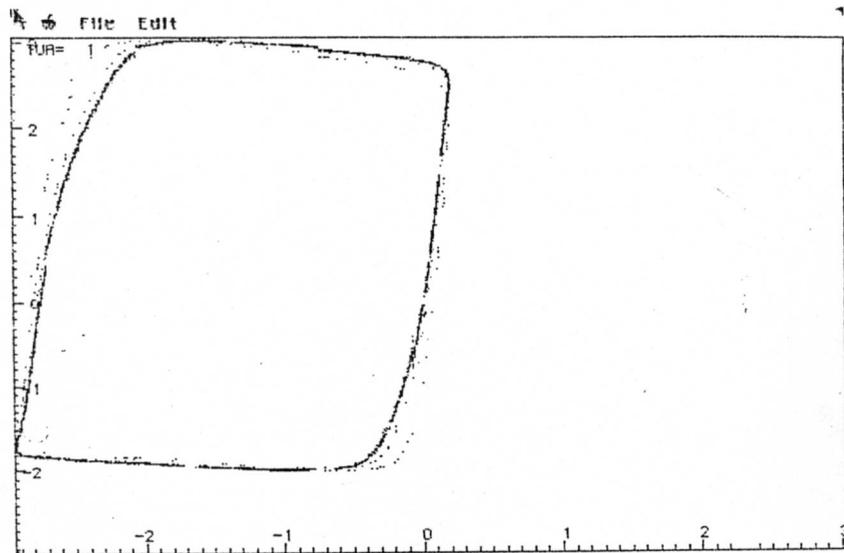


Figura 3.11. Atractores del puente de Wien con excitación senoidal, en tres condiciones de funcionamiento. Gráfica: reconstruido con la variable  $x_1$ . Foto: atractor medido con el derivador de la Fig. 3.9.

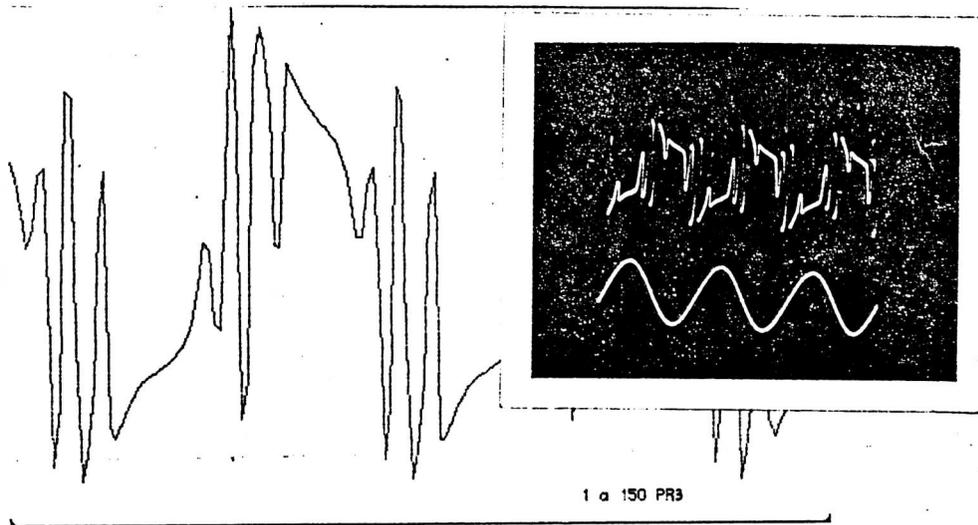


Figura 3.12: Reconstrucción de la señal de salida  $x(t)$  a partir de la señal muestreada. La foto es la señal medida.

### 3.5 Entropía de Kolmogorov

Según la Teoría de la Información [Katz 67] una medida del desorden, de un sistema físico cualquiera, está dada por su entropía  $S$ , que puede expresarse:

$$S \propto - \sum_i p_i \log p_i \quad (3.5.1)$$

Por otra parte un incremento en el desorden de un sistema origina un incremento en la ignorancia que se tiene acerca del estado en que éste se encuentra. Siguiendo a Shannon se define la información de un evento  $i$ , que tiene una probabilidad de ocurrir  $p_i$  de entre  $N$  eventos posibles, mediante la expresión [Shannon et al 49]:

$$I \propto \log(1/p_i) \quad (3.5.2)$$

con

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (3.5.3)$$

Con esta definición un evento cierto ( $p_i=1$ ) no contiene ninguna información. La entropía dada por la ecuación (3.5.1) es entonces el valor medio de la información contenida en el conjunto de eventos posibles, ponderando cada evento por su probabilidad de ocurrencia. Generalizando la idea de Shannon se define la llamada *entropía de Kolmogorov* que pretende medir cuán caótico es un sistema [Arnold et al 74].

• Definición de Entropía de Kolmogorov

Sea  $\vec{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_d(t)\}$  la trayectoria de un sistema dinámico en su espacio de fases  $d$ -dimensional. Se discretiza el espacio de fases partiéndolo en cajas de volumen  $\epsilon^d$ . Se muestrea el estado del sistema con período de muestreo  $\Delta t$ . Sea  $P_{i_0 \dots i_n}$  la probabilidad que  $\vec{x}(t=0)$  esté en la caja  $i_0$ ,  $\vec{x}(t=\Delta t)$  esté en la caja  $i_1, \dots, \vec{x}(t=N\Delta t)$  esté en la caja  $i_N$ . La expresión:

$$K_N = - \sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N} \log P_{i_0 \dots i_N} \quad (3.5.4)$$

es proporcional a la información que se requiere para localizar el sistema sobre una trayectoria en especial  $i_1^* \dots i_N^*$  con precisión  $\epsilon$ , suponiendo que se conoce a priori las probabilidades  $P_{i_0 \dots i_N}$ . Entonces la diferencia entre  $K_{N+1}$  y  $K_N$  mide la información adicional que se necesita para predecir en cuál celda  $i_{N+1}^*$  estará el sistema del cual conocemos sus estados previos  $i_1^* \dots i_N^*$ . Es decir mide la pérdida de información acerca del estado del sistema desde el instante  $N$  hasta el  $N+1$ . La entropía de Kolmogorov se define como el promedio de la velocidad de pérdida de información:

$$K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{N+1} - K_N) \quad (3.5.5)$$

que es igual a:

$$K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N} \log P_{i_0 \dots i_N} \quad (3.5.6)$$

El límite  $\epsilon \rightarrow 0$  en la (3.5.6) debe efectuarse después que el límite  $N \rightarrow \infty$ , y

es el que hace que  $K$  resulte independiente de la partición particular en que se haya discretizado el espacio de fases. Por razones que se explican en el acápite 3.7 es complicado medir experimentalmente la entropía de Kolmogorov y resulta mucho más simple determinar la dimensión de correlación del atractor [González et al 88, Larrondo et al 97b].

### 3.6. Exponentes de Lyapunov en mapas 1D

Si bien en el uso cotidiano la palabra *caos* se toma como equivalente a *azar*, desde el punto del vista de la teoría de sistemas dinámicos no lineales tiene una significación más precisa y bastante diferente: en un sistema caótico la predicción a largo plazo del estado del sistema es imposible debido a que la incerteza en el estado inicial crece exponencialmente a medida que el transcurre el tiempo. Es decir las órbitas estacionarias partiendo de condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas, y que por lo tanto corresponden a sistemas preparados casi idénticamente (indistinguibles dentro del error de medición), divergen en promedio con velocidad exponencial.

Se trata de una pérdida de poder predictivo mucho más rápida que la que se presenta en sistemas no caóticos. En efecto en sistemas no caóticos las órbitas cercanas convergen con rapidez exponencial hacia respuestas finales idénticas o bien divergen pero, en el peor de los casos, exhiben una divergencia más lenta que la exponencial: las predicciones a largo plazo son al menos teóricamente posibles.

Los exponentes de Lyapunov precisamente caracterizan las velocidades de convergencia o divergencia [Lyapunov 47]. Exponentes de Lyapunov positivos indican divergencia de las órbitas y establecen la constante de tiempo con la que se pierde la capacidad predictiva. Exponentes de Lyapunov negativos determinan la constante de tiempo de los transitorios hacia el estado final. El espectro de exponentes de Lyapunov de un sistema se puede obtener utilizando el teorema de Takens [Packard et al 80].

El sistema caótico de más baja dimensión es un mapa unidimensional. Un ejemplo es el mapa logístico dado por la ecuación:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (3.6.1)$$

donde  $x_0$  es la condición inicial, elegida dentro del intervalo (0,1), y  $r$  es el parámetro de control, definido en el intervalo [0,4]. Para  $r=4$  la trayectoria (secuencia de iteraciones del mapa  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, \infty$ ) se sabe que es caótica [Feigenbaum 80]. Para comprender el mecanismo por el que se produce la pérdida de predictibilidad se muestran, en la Figura 3.13a, las trayectorias del mapa a partir de condiciones iniciales muy próximas. Puede verse la divergencia de las órbitas al cabo de tres iteraciones.

Por otra parte dos condiciones iniciales lejanas, ubicadas sobre lados opuestos de la parábola, convergen transitoriamente a un mismo punto, para reiniciar luego su divergencia exponencial. Este segundo fenómeno "de gran escala" se denomina *plegado del mapa* (figura 3.13b). Para explicar el comportamiento caótico se requieren los dos fenómenos, divergencia exponencial de órbitas infinitesimalmente cercanas, y plegado del mapa.

El crecimiento exponencial de las incertezas iniciales infinitesimales se puede explicar mediante un análisis de estabilidad lineal, considerando la propagación del error a través del mapa. Si se denomina  $dx_n$  el error en la especificación del iterado  $x_n$ , entonces el error en el iterado  $x_{n+1}$  está definido por:

$$x_{n+1} + dx_{n+1} = f[x_n + dx_n] \approx f[x_n] + dx_n f'[x_n], \quad (3.6.2)$$

que para el caso del mapa logístico resulta:

$$\Rightarrow dx_{n+1} = dx_n f'[x_n] = dx_n r[1-2x_n] \quad (3.6.3)$$

Puesto en términos de la incerteza inicial resulta:

$$|dx_n| = |dx_0| \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| = |dx_0| \prod_{i=0}^{n-1} |r(1-2x_i)| \quad (3.6.4)$$

Si un factor  $|r[1-2x_i]|$  de la productoria es mayor que uno se lo denomina *factor de estiramiento*. Todo valor de  $r$  para el que la productoria

tiende a un valor mayor que uno produce un crecimiento exponencial las incertezas iniciales, a medida que crece el número de iteraciones (lo que equivale a un crecimiento con el tiempo).

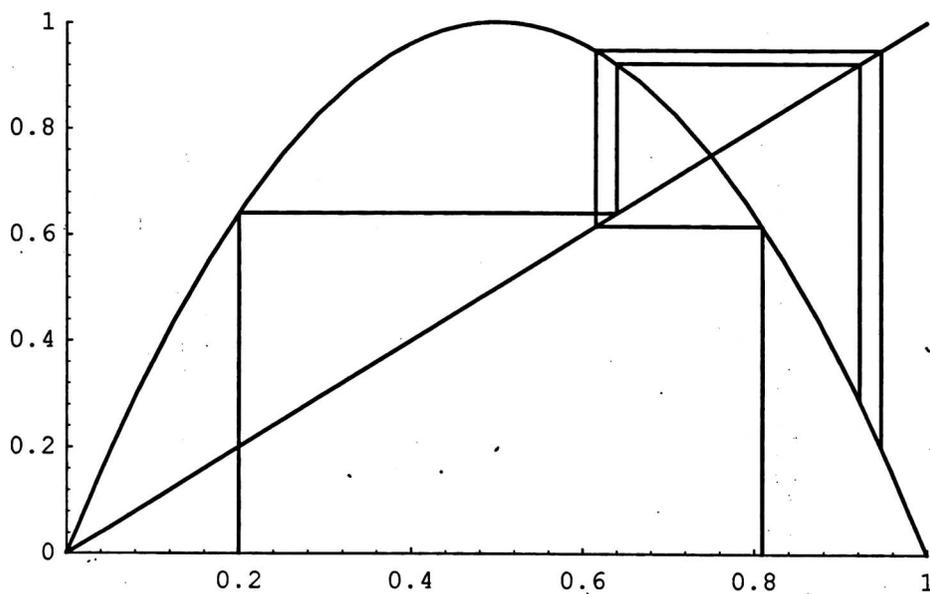
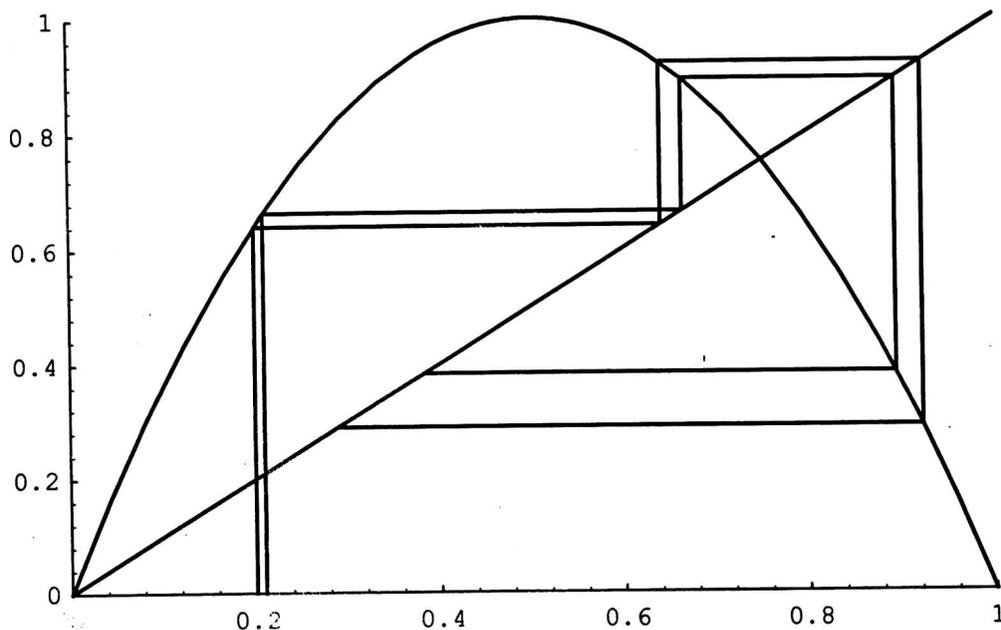


Figura 3.13: Ruta al caos en el mapa logístico con  $r=4$ . (a) Crecimiento exponencial de las incertezas infinitesimales iniciales en las tres primeras iteraciones. (b) Plegado a gran escala.

En efecto si se iguala la incerteza con un crecimiento exponencial en base dos:

$$dx_n = dx_0 2^{\lambda n} \quad (3.6.5)$$

resulta:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |f'(x_i)| \quad (3.6.6)$$

donde  $\lambda$  se define como el exponente de Lyapunov del mapa.

Es necesario calcular el límite para  $n$  tendiendo a infinito pues se pretende obtener una cantidad que describa el comportamiento a largo plazo y que además sea independiente de la condición inicial. El límite efectivamente promedia sobre todas las condiciones iniciales, a excepción de un conjunto de puntos de medida nula (en el mapa logístico los tres puntos que evolucionan hacia el punto fijo inestable ubicado en el origen).

Se define la *densidad de probabilidad del mapa* como el promedio de las funciones delta que marcan las ubicaciones  $x_i$  visitadas por la trayectoria, es decir:

$$p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta[x-x_i] \quad (3.6.7)$$

De la combinación con la ecuación (3.6.5) resulta la siguiente expresión para el exponente de Lyapunov:

$$\lambda = \int p(x) \log_2 |f'(x)| dx, \quad (3.6.8)$$

donde la integral se extiende a todo el dominio del mapa, que en el caso del mapa logístico es el intervalo  $[0,1]$ .

En la Figura 3.14 se muestra el exponente de Lyapunov para la ecuación logística con  $r$  en el intervalo  $(3.4, 4.0)$ . A medida que  $r$  se incrementa desde 0 hasta aproximadamente 3.57, el sistema exhibe una secuencia de duplicaciones de período. En esta zona todos los valores de  $r$  dan origen a

una secuencia de iterados  $x_i$  que convergen hacia una órbita, de período  $2^n$ ;  $n$  se incrementa en cada punto de bifurcación ( $r \approx 3.45$  es uno de ellos) [Wolf et al 85].

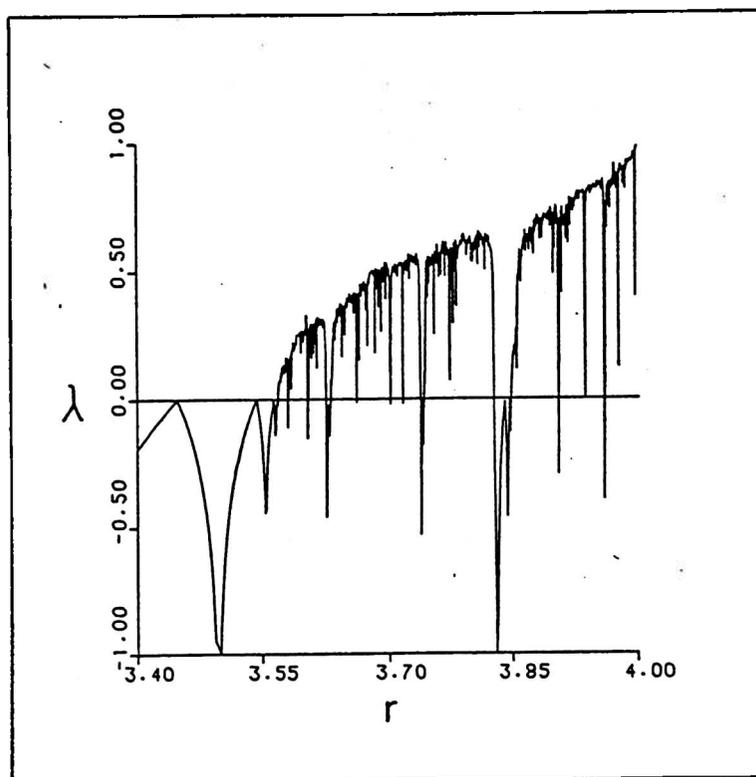


Figura 3.14: Exponente de Lyapunov del mapa logístico en función del parámetro  $r$ .

Las órbitas periódicas estables se caracterizan por exponentes de Lyapunov negativos; los puntos de bifurcación corresponden a órbitas de estabilidad marginal con exponentes cero. Para cada uno de los períodos  $2^n$  existe un valor particular de  $r$  cuya convergencia es más rápida que la exponencial. Estos valores de  $r$  producen las llamadas órbitas superestables y para ese caso  $\lambda$  tiende a  $-\infty$ . En la Figura 3.14 se ven en la forma de picos agudos negativos. A medida que  $r$  crece desde 3.57 hasta 4.0 hay una tendencia creciente hacia el comportamiento caótico y por lo tanto un exponente positivo y creciente, interrumpido por un número infinito de "ventanas" de comportamiento periódico. Cuando el exponente de Lyapunov se define como en la ecuación (3.5.8) Las unidades de medida de  $\lambda$  resultan ser bits/iteración.

Para cualquier  $r$  y para cualquier precisión especificada en la condición inicial el valor de  $\lambda$  cuantifica la velocidad promedio de pérdida de potencia predictiva. Por ejemplo, para  $r=4$  resulta  $\lambda=1.0$  bits por iteración. Si una condición inicial es especificada con 16 bits de precisión sólo 8 bits permanecen luego de 8 iteraciones, 4 bits luego de 12 iteraciones y 0 bits luego de 16 iteraciones, es decir la potencia predictiva se ha perdido completamente luego de 16 iteraciones.

La pendiente del mapa no es en todos lados mayor que uno. Luego, en general hay mejora predictiva (factor de estiramiento menor que uno) en algunos iterados y pérdida en otros (factor de estiramiento mayor que uno). Pero, dado que  $\lambda$  mide el promedio sobre infinitos ciclos de iteración, si  $\lambda$  es mayor que cero, siempre se producirá una pérdida progresiva a medida que transcurren las iteraciones.

El exponente de Lyapunov para un mapa 1D es entonces la velocidad a la cual los bits se van corriendo a través de un registro de desplazamiento [Shaw 81]. La analogía con los registros de desplazamiento de los circuitos digitales es directa: con una elección adecuada de las coordenadas la ecuación logística para  $r=4$  se convierte en un mapa de corrimiento de bits dado por  $x_{n+1}=2x_n$  módulo 1 [Wolf et al 85].

Para un mapa 1D la separación exponencial es incompatible con el movimiento confinado dentro del intervalo, a menos que se produzca un proceso de plegado que mezcle puntos ampliamente separados. En el caso de la ecuación logística el plegado se produce cuando un par de puntos provenientes de una iteración del mismo orden, caen en extremos opuestos de  $x=1/2$ . En la siguiente iteración estos puntos arribarán a posiciones muy próximas y la divergencia original perderá transitoriamente su carácter exponencial. De los dos procesos, estiramiento y plegado, que dan origen al caos, el estiramiento es una característica local y determina el valor de  $\lambda$ ; el plegado es una propiedad a gran escala que nunca aparece en forma directa en el cálculo de los exponentes de Lyapunov. La divergencia orbital exponencial promedio va acompañada por una "aproximación" de las trayectorias debida al plegado.

En el caso de los osciladores forzados los mapas unidimensionales obtenidos en el Capítulo 2 son una aproximación del mapa de Poincaré, válida para el caso de forzado impulsivo y en el régimen de relajación fuerte. Por otra parte el verdadero mapa de Poincaré de estos sistemas con espacio de fases 3D, es bidimensional. Una forma gráfica de entender la existencia de varios exponentes de Lyapunov consiste en observar la evolución temporal de dos puntos muy próximos. Si el exponente de Lyapunov en la dirección del vector que une las dos condiciones iniciales es mayor que uno la distancia entre los puntos se incrementa (en promedio) en forma exponencial, al transcurrir el tiempo. Si ese exponente es nulo la distancia permanece invariante (en promedio) y si el exponente es negativo la distancia disminuye en forma exponencial (en promedio).

Es importante notar que, a medida que las órbitas evolucionan, el vector que une dos condiciones iniciales va cambiando no sólo de módulo sino de dirección, de modo que no es posible asociar ejes fijos a los distintos exponentes de Lyapunov. Para todo atractor caótico perteneciente a un sistema continuo 3D existen tres coeficientes de Lyapunov, uno negativo, otro positivo y otro nulo [Haken 83]. Se dice entonces que el *espectro de exponentes de Lyapunov* del sistema es del tipo  $(-,0,+)$ .

Un tipo particular de sistemas tridimensionales son los osciladores de V, B y S estudiados en el Capítulo 2. El atractor caótico resultante en estos sistemas tiene forma espiral (el tercer eje es  $\theta = \alpha t$ ). En la Figura 2.29 se ha graficado precisamente la proyección sobre el plano  $(x_1, x_2)$  de una porción finita de dicho atractor caótico (en rigor habría que esperar tiempo infinito para reproducir el atractor completo).

Aún cuando no se conozcan las magnitudes de los exponentes de Lyapunov, el tipo espectral provee una imagen cualitativa de la dinámica del sistema. Un mapa unidimensional sólo tiene un exponente de Lyapunov, que puede ser positivo, negativo o cero, para los casos caótico, periódico y marginalmente estable, respectivamente. En sistemas disipativos continuos tridimensionales los únicos tipos espectrales posibles son:  $(+,0,-)$  para un atractor caótico,  $(0,0,-)$  para un toro bidimensional,  $(0,-,-)$  para un ciclo

límite y (-,-,-) para un punto fijo.

Wolf da una definición particularmente útil de los exponentes, que se adecua a los algoritmos numéricos requeridos. Dado un sistema dinámico continuo disipativo en un espacio de fases n-dimensional, se monitorea la evolución a tiempos largos de una n-esfera infinitesimal de condiciones iniciales. Debido a la naturaleza deformante del flujo la esfera se transformará en un n-elipsoide. Se supone que el centro de la esfera está sobre el atractor en  $t=0$ . El  $i$ ésimo exponente de Lyapunov se define en términos de la velocidad de crecimiento del  $i$ ésimo eje principal  $p_i(t)$  del elipsoide

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \left[ \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \right] \quad (3.6.9)$$

La dimensión lineal  $i$ ésima del elipsoide crece como  $2^{\lambda_i t}$ , el área definida por los dos primeros ejes principales crece como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ , el volumen definido por los tres primeros ejes crece como  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$  y así siguiendo. Esta propiedad permite una definición alternativa del espectro de exponentes: la suma de los primeros J exponentes está dada por la velocidad de crecimiento exponencial a largo plazo del J-volumen definido por los primeros J ejes principales. Esta definición alternativa es muy útil en el cálculo numérico de los exponentes. Cualquiera sea la definición empleada basta seguir el movimiento de tantos puntos de la n-esfera como ejes principales.

Una estrategia directa para la determinación de los exponentes de Lyapunov consiste en elegir una condición inicial de referencia, ubicada sobre el atractor, y tantas condiciones iniciales auxiliares como dimensión tenga el espacio de fases. Esas condiciones iniciales se eligen lo más próximas que sea posible a la condición de referencia, y en direcciones correspondientes a los autovectores del sistema en el punto que es la condición inicial de referencia. Los vectores con origen en la condición de referencia y extremo en las condiciones auxiliares son linealmente independientes. Mediante las ecuaciones de evolución se determina cómo evoluciona cada uno de los vectores con el tiempo.

Sin embargo, al implementar el cálculo, surgen dos problemas de índole numérica. El primero es la dificultad para lograr una convergencia en el cálculo de las evoluciones infinitesimales (que desde el punto de vista numérico siempre son finitas), antes que se produzca un plegado del mapa de Poincaré del sistema. En efecto, el plegado cambia drásticamente la región en que continúa la dinámica del sistema y dado que el crecimiento es exponencial en alguna dirección en muy pocos pasos se llega al proceso de plegado. Para resolver este problema hay que reemplazar cada, N pasos, los vectores obtenidos por otros de dimensión proporcional pero lo más pequeña posible (compatible con los límites de precisión de la máquina) y reiniciar el cálculo.

El segundo problema es que los ejes principales colapsan hacia la dirección con exponente de Lyapunov máximo indistinguibles en muy pocos pasos de cálculo, cualquiera sea la precisión de la computadora. La Figura 3.15 muestra el caso del mapa bidimensional de Henón donde se ve como los vectores inicialmente perpendiculares se hacen paralelos al cabo de apenas dos iteraciones [Hénon 76].

La técnica más apropiada para eliminar simultáneamente ambos problemas apuntados arriba consiste en aplicar el método de Gram-Schmidt (en lo que sigue se abrevia como GS) [Moore 72]. La determinación es más eficiente si se la realiza con el método de la descomposición en valores singulares (SVD) explicado en el apéndice A2. Tomando en cuenta que  $\lambda_1$  es determinado por el crecimiento de longitud del vector 1,  $\lambda_1 + \lambda_2$  la del área definida por los dos primeros vectores, etc., resulta fundamental que los subespacios generados por los vectores ortonormalizados sean idénticos a los generados por los vectores originales. Con el método indicado el primer exponente es calculado mediante la expresión:

$$(\lambda_1)_m = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^m \log_2 \left[ \frac{L(t_{j+1})}{L(t_j)} \right] \quad (3.6.10)$$

donde L indica la longitud del primer autovector. El segundo exponente surge de la expresión:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)_m = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^m \log_2 \left[ \frac{A(t_{j+1})}{A(t_j)} \right] \quad (3.6.11)$$

donde A es el área definida por los dos primeros vectores. En forma similar se determinan los restantes.

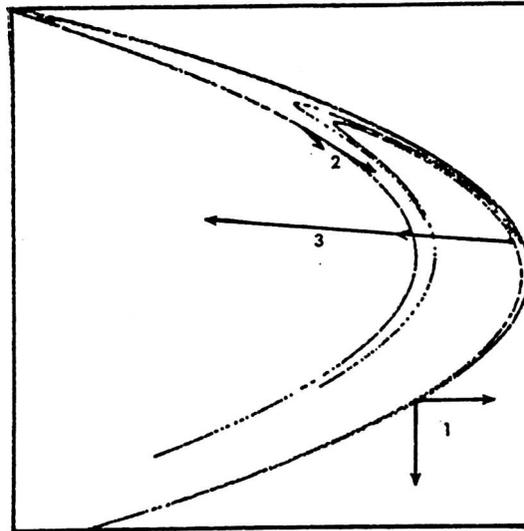


Figura 3.15: Dos vectores inicialmente ortogonales y su evolución luego de dos iteraciones en el Mapa de Henón

En el caso de la medición experimental la técnica utilizada comienza con la reconstrucción del espacio de fases mediante muestreo de una sola variable de estado, empleando muestras retardadas [Takens 81, Wolf et al 85, González et al 88] ya descrita. Mediante esta técnica se obtiene un atractor cuyo espectro de Lyapunov es idéntico al del atractor original. El crecimiento exponencial a tiempos largos del elemento de volumen J-dim está gobernado por la suma de los primeros J exponentes de Lyapunov (suponiendo que el volumen del elemento es suficientemente pequeño como para que sea aplicable la aproximación lineal).

Al calcular el espectro a partir de los datos experimentales no puede aplicarse exactamente GS porque en general una vez calculados los nuevos

vectores ortonormales, sus extremos no coinciden con las coordenadas de los valores experimentales que se disponen. Wolf demostró que puede utilizarse un método modificado de GS en el cual los nuevos vectores son aproximados por otros que coinciden con los datos experimentales disponibles. A esta operación se la denomina *reemplazo*. Si entre dos reemplazos sucesivos transcurre un tiempo suficientemente largo, y si se permite que el sistema converja en un número suficiente de pasos, el error en la estimación de  $\lambda_1$  por este método resulta ser del orden de  $\theta_M^2/\lambda_1 t_r$ , donde  $\theta_M$  es el máximo error producido en un único reemplazo y  $t_r$  es el tiempo entre reemplazos.

Si los reemplazos están suficientemente espaciados, se pueden estimar los exponentes de Lyapunov en forma precisa, a partir de los datos experimentales. En particular el decaimiento exponencial de los errores de orientación originados en el procedimiento de reemplazo fue demostrado por Wolf para el caso de cualquier sistema caótico.

Para estimar por ejemplo los dos primeros exponentes de Lyapunov el procedimiento es estimar el primero de ellos y luego la suma de ambos, en forma similar a lo expresado para el caso del sistemas definidos por ecuaciones diferenciales de movimiento. Dado un atractor reconstruido en un espacio de embedding n-dimensional, el elemento de área se define tomando tres puntos próximos entre sí: uno de ellos es la coordenada retardada y los otros dos son los dos puntos más cercanos al punto anterior. La evolución de los vértices de este triángulo puede seguirse, observando la serie temporal; también es simple calcular la evolución de su área. El proceso puede continuarse hasta que el crecimiento sea excesivo o bien el triángulo comience a retorcerse con lo que esperamos un gran error en el cálculo del área (que se determina como si fuera plana). Llegada esta situación se guardan los valores inicial y final del área y se busca un elemento de reemplazo.

La búsqueda del elemento de reemplazo es en general complicada pues requiere la minimización simultánea de la longitud de los dos vectores de reemplazo y del ángulo entre las normales al triángulo de reemplazo y al triángulo original (para preservar la orientación lo más posible). Si el

área inicial del elemento  $j$ -ésimo se designa  $A(t_j)$  en tanto que el elemento reemplazado tiene área  $A'(t_{j+1})$ , luego de haberse realizado  $m$  reemplazos la expresión para estimar los exponentes de Lyapunov es la (3.6.11) con la única diferencia que ahora se trabaja sobre en espacio de fases reconstruido en el que los elementos de reemplazo son siempre de tamaño finito y no infinitesimal y donde la orientación se preserva sólo aproximadamente.

Para una serie temporal infinita y sin ruido puede demostrarse que por este método se obtiene el valor correcto de los exponentes de Lyapunov. Sin embargo, en general este no es el caso de modo que sólo se puede esperar una aproximación al valor correcto. El método falla cuando se intentan calcular los exponentes negativos pues en este caso en general no se dispone de datos adecuados para efectuar el proceso de reconstrucción. Como idea cualitativa puede estimarse el número de datos requeridos para efectuar buenas determinaciones de todos los exponentes no negativos en un sistema caótico es aproximadamente  $10^d$  a  $30^d$  según sea la complejidad del sistema, donde  $d$  es la dimensión del espacio de fases. La Figura 3.16 muestra gráficamente el proceso utilizado.

Para el caso del oscilador Puente de Wien los resultados obtenidos se encuentran contenidos en la Tabla 3.II (ver acápite 3.7).

### 3.7. Dimensiones de un atractor caótico

Se resumen a continuación algunas características distintivas de un atractor caótico son [Grassberger et al 83a]:

- Está confinado en una región acotada del espacio de fases.
- Atrapa las trayectorias del sistema que hayan partido de condiciones iniciales ubicadas en su dominio de atracción (es decir es atractor).
- El dominio de atracción puede ser muy complicado. En la Figura 3.17 se muestra un ejemplo determinado por Greboggi [Greboggi et al. 87].
- El atractor no puede descomponerse en conjuntos más simples pues cualquier trayectoria atrapada recorre todos los puntos del atractor si se deja pasar suficiente tiempo. Nótese que por lo tanto un atractor caótico no es una mera colección de infinitos puntos fijos aislados pues,

en ese caso, las trayectorias que parten del dominio de atracción de uno de los puntos fijos no recorrerían los restantes.

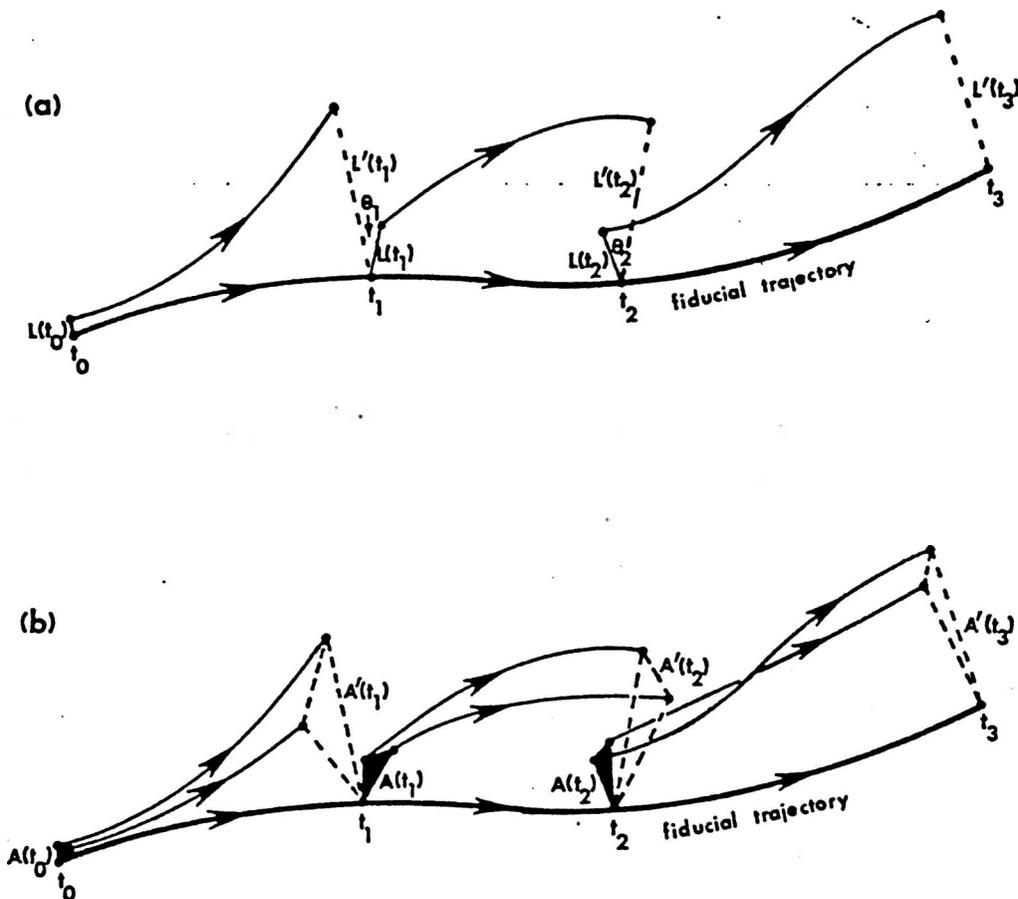


Figura 3.16: Representación gráfica del proceso de determinación de los dos primeros exponentes de Lyapunov basado en los datos experimentales. Nótese el cambio de orientación del triángulo producido en cada proceso de reemplazo<sup>1</sup>

- La propiedad principal que hace extraño al atractor es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Ésto se produce porque, a pesar de la contracción de volumen, las longitudes no se contraen en todas direcciones sino que pueden contraerse en una dirección y expandirse en otras. Esto hace que puntos que están arbitrariamente cercanos se separen macroscópicamente para tiempos suficientemente largos y que, por

<sup>1</sup> Extraída de [Holden 86]

un proceso de plegado, puntos lejanos se junten en algún instante de la evolución.

- Para que corresponda a un sistema físico real el atractor tiene que ser estructuralmente estable y genérico. En otras palabras, un pequeño cambio de los parámetros del campo vectorial debe cambiar la estructura del atractor en forma continua (estabilidad estructural), y el conjunto de valores de los parámetros que generan el atractor extraño no debe ser de medida nula (de lo contrario sería no genérico y sin significado físico).
- Todos los atractores extraños encontrados hasta el presente tienen una dimensión de Hausdorff fraccionaria. No se ha demostrado en realidad si esa dimensión fraccionaria es consecuencia de las condiciones anteriores o es una propiedad adicional que debe exigirse a un atractor para considerárselo extraño. Cualquiera sea el caso, la dimensión fraccionaria es una característica esencial de los atractores extraños.

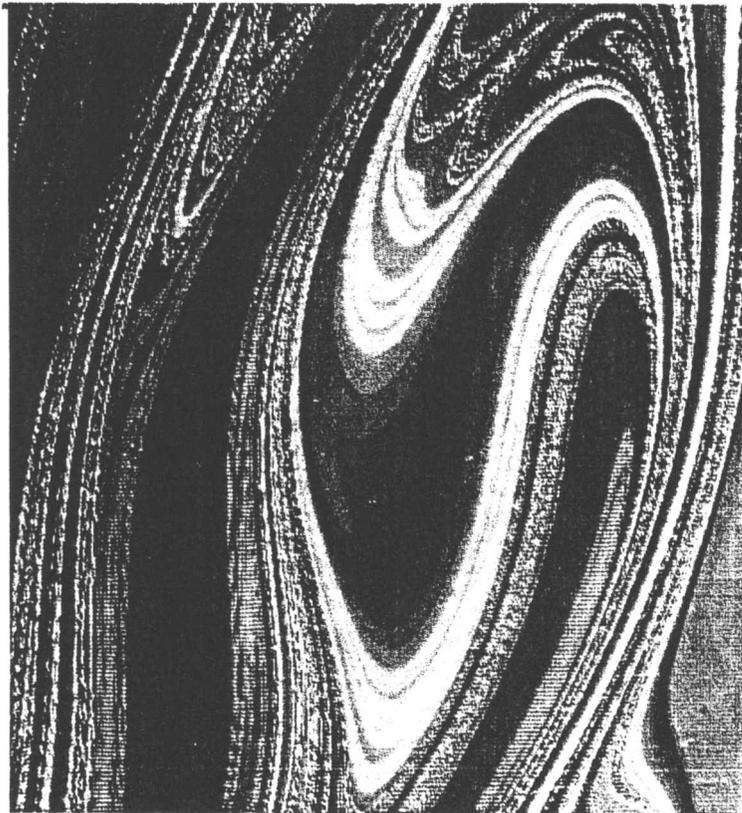


Figura 3.17: Dominio de atracción fractal en un sistema no lineal<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Extraída de [Grebogi et al 87]

La dimensión es un parámetro muy importante para caracterizar los atractores extraños y es una generalización del concepto de dimensión de una variedad en geometría diferencial, que es la siguiente [Milnor 65]:

- Dimensión de una variedad

*Una variedad se dice que tiene dimensión  $n$  (entera) si todo entorno de cualquier punto de la variedad se asemeja a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  (es decir es difeomórfico a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ )*

Por ejemplo, un ciclo límite es de dimensión uno pues localmente se asemeja a un intervalo, un toro es bidimensional, pues localmente se asemeja a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Un punto de equilibrio se considera que tiene dimensión cero. El entorno de cualquier punto de un atractor extraño, tiene una estructura fina y no se asemeja a ningún espacio euclídeo. De allí que los atractores extraños no son variedades y no tienen dimensión entera. Hay varias maneras de generalizar la dimensión al caso fraccionario y éste es el punto que se aborda a continuación.

- Dimensiones de un atractor extraño

*Sea  $\{\vec{x}(t)\}$  la trayectoria de un sistema dinámico que evoluciona sobre un atractor extraño. Sean  $x(0), x(\Delta t), \dots, x(H \cdot \Delta t)$ ... las posiciones ocupadas en los instantes en que se efectúa el muestreo. Dividamos el espacio de fases que es  $d$ -dimensional en celdas de lado  $\epsilon$ . El atractor será cubierto por un número de celdas que dependerá del tamaño de dichas celdas; llamamos  $M(\epsilon)$  este número de celdas. Las probabilidades de encontrar un punto del atractor en la celda número  $i$  será:*

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad i=1, \dots, M(\epsilon) \quad (3.7.1)$$

*donde  $N_i$  es el número de puntos del atractor que se encuentran dentro de la celda  $i$  y  $H$  es el número total de puntos del atractor (los cuales pertenecen a la secuencia de muestreo) cuya ubicación se ha medido. Para caracterizar la estructura estática no homogénea del*

atractor se puede definir un conjunto infinito de dimensiones  $D_f$ , que están relacionadas con la  $f$ -ésima potencia de la probabilidad  $p_i$ , de la siguiente forma:

$$D_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f-1} \left( \log \sum_{i=0}^{M(\epsilon)} p_i^f \right) / \log \epsilon \quad f = 0, 1, \dots \quad (3.7.2)$$

Para el caso  $f \rightarrow 0$  se obtiene la llamada *dimensión de Hausdorff o dimensión fractal (o capacidad)*:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \log \sum_{i=0}^{M(\epsilon)} 1 \right) / \log \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\log M(\epsilon)}{\log \epsilon} \right] \quad (3.7.3)$$

En la Tabla 3.I se muestran los resultados del cálculo de las dimensiones  $D_f$ 's, de tres atractores muy estudiados desde el punto de vista teórico [Schuster 84].

TABLA 3.I: DIMENSIONES DE VARIOS MODELOS TEÓRICOS

Mapa	parámetros	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_\infty$
Logístico	$r=4$	1	1	1	1
Logístico	$r=r_\infty$	0.538	0.537	0.5	0.394
Hénon	$a=1.4$ $b=0.3$	1.26	—	1.21	—

Nótese que la capacidad  $D_0$  no depende en realidad de la distribución de los puntos del atractor sobre las distintas celdas sino sólo del número total de celdas necesarias para cubrir todo el atractor. El nombre de dimensión fractal proviene de que  $D_0$  es fraccionaria (al igual que las otras  $D_f$ ) para los atractores extraños [Grassberger 83]. Tomando el límite para  $f \rightarrow 1$  se obtiene la llamada *dimensión de información*. La ecuación (3.9.2) se transforma en:

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\log S(\epsilon)}{\log \epsilon} \right] \quad (3.7.4)$$

donde

$$S(\epsilon) = \sum_{i=0}^{M(\epsilon)} p_i \log p_i \quad (3.7.5)$$

es la entropía de información de Shannon e informa cuánto se "gana en información" a medida que  $\epsilon$  se aproxima a 0.

Para un atractor homogéneo, donde todas las  $p_i$  son iguales la dimensión de información es igual a la dimensión de Hausdorff. La diferencia entre  $D_0$  y  $D_1$  es por lo tanto una medida de la no uniformidad del atractor. Además, debido a que  $S(\epsilon)$  está acotada superiormente por  $M(\epsilon)$  según:

$$S(\epsilon) \leq \log M(\epsilon) \quad (3.7.6)$$

resulta que la dimensión de información es siempre menor o igual que la dimensión de Hausdorff. Ésto puede generalizarse a las otras dimensiones. El caso  $f=2$  se conoce como *dimensión de correlación* y de todas las  $D_f$  es la que interesa especialmente y que será objeto de medición. La razón por la cual esta dimensión es importante desde el punto de vista experimental es que, en tanto que el proceso de cubrir el espacio de fases con un conjunto de cajas de volumen  $\epsilon^d$  y contar el número de iterados que caen en cada celda es un trabajo tedioso y en realidad imposible para atractores de dimensiones altas, el caso especial  $f=2$  es mucho más simple. En efecto, en este caso resulta:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\log \sum_{i=0}^{M(\epsilon)} p_i^2}{\log \epsilon} \right) \quad (3.7.7)$$

Esta dimensión se puede determinar a partir de la *integral de correlación*  $C(\epsilon)$  dada por la siguiente expresión:

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \frac{\theta(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|)}{N^2} \quad (3.7.8)$$

donde  $\theta(x)$  es la función escalón de Heaviside. La integral puede evaluarse a partir del conocimiento de las muestras de una de las variables del espa-

cio de fases [Takens 81]. La relación entre  $D_2$  y  $C(\epsilon)$  surge del siguiente proceso:

$$M(\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^2 \quad (3.7.9)$$

es la probabilidad de que dos puntos del atractor se encuentren dentro de una misma celda de esférica de volumen  $\epsilon^d$ , valor que a su vez es igual a la probabilidad de que dos puntos del atractor estén separados por una distancia menor que  $\epsilon$  y es igual a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left[ \begin{array}{l} \text{número de pares} \\ \text{que distan menos que } \epsilon \end{array} \right] \quad (3.7.10)$$

que a su vez es igual a  $C(\epsilon)$ . La Figura 3.18a muestra cómo se determina  $D_2$  a partir de  $C(\epsilon)$  en un caso genérico con dimensión de embedding  $d$ .

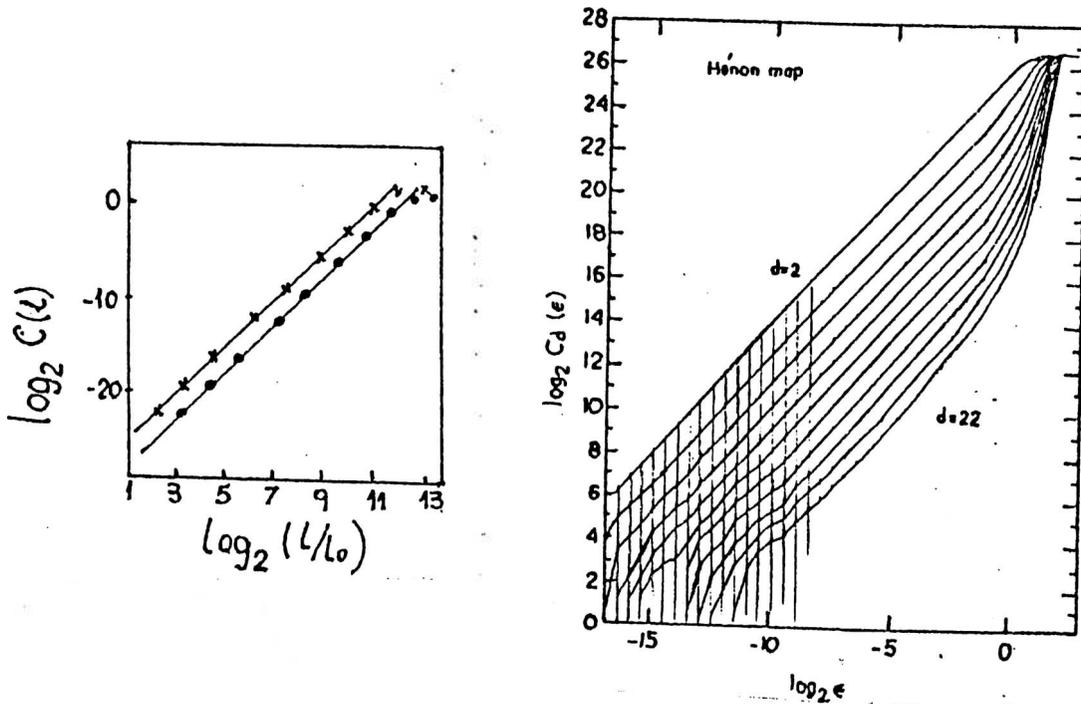


Figura 3.18. Determinación de  $D_2$  a partir de muestras. (a) Caso genérico para una dimensión de embedding  $d$ . (b) para el mapa de Henón, donde se muestra la saturación de la pendiente al aumentar la dimensión del embedding

Si no se conoce la dimensión de embedding del atractor, como

generalmente ocurre, se arman espacios de embedding  $\xi_i$  de dimensión creciente. Para cada dimensión de embedding se recalcula la dimensión de correlación  $C(\epsilon)$ . El proceso converge y, a partir de la dimensión de embedding mínima aceptable, se produce una saturación en el gráfico  $\log C(\epsilon)$  vs  $\log \epsilon$  (Figura 3.18b).

La Tabla 3.II indica los valores obtenidos a partir del análisis de las series temporales para el oscilador Puente de Wien forzado en forma senoidal. En la misma tabla se reporta tanto el valor del mayor exponente de Lyapunov como la dimensión de correlación. El rótulo puesto a cada juego de muestras analizado corresponde al punto sobre el retrato de fases de la figura 3.23.

TABLA 3.II: RESULTADOS EXPERIMENTALES PARA EL OSCILADOR PUENTE DE WIEN

Juego de muestras	$V_E$ (V)	$f_E$ (Hz)	$D_2$	Máx. Exp. Liapunov	$f_E/f_0$
PR8	2.2	350	1.2	0	1
PR9	2.2	530	1.01	0	3
PR10	2.2	1004	1.005	-0.16	5
PR11	2.2	1308	1.00	-0.22	7
PR12	2.2	1565	1.00	-0.20	9

### 3.8. Desarrollo de un banco de medición para el caso de fuerzas paramétricas impulsivas.

Como se vió en el capítulo 2 las fuerzas impulsivas, tanto de amplitud constante como paramétricas son importantes en el modelado de diversos procesos físicos. Un oscilador forzado por pulsos externos trabaja como sigue: el oscilador tiene un período propio  $T_0$ . Recibe un impulso (kick) producido por la señal externa con un período  $T_E$ . El impulso consiste un un pulso de forma aproximadamente rectangular, de ancho  $\Delta_E$  y amplitud  $A_E$ .

Si se desea explorar el comportamiento del sistema cuando la energía de los pulsos de excitación es una función de la señal de salida es necesario muestrear dicha señal de salida, cada  $T_E$  segundos y generar el pulso a aplicar. Siempre existe un retardo  $\tau$  entre el instante en que se

realiza el muestreo y aquél en que se aplica el pulso. Como mínimo este retardo corresponderá al tiempo finito requerido para realizar la medición de la variable de salida, el cálculo y la generación del pulso.

En el caso de osciladores electrónicos el retardo es en general pequeño, pero puede ser una variable relevante en el caso de procesos químicos, en los que deben accionarse dispositivos mecánicos, pues en el caso de un sistema químico el "pulso de excitación" corresponderá al ingreso de un reactivo en el sistema. La presencia de retardos ha sido reportada como un obstáculo importante para el control exitoso de algunos procesos químicos oscilatorios [Boe et al 89]. Por otra parte, recientemente han sido propuestos métodos para "tomar control" del caos, haciendo uso inteligente de este mismo retardo [Pyragas 92, Case 94, Krasovskiy et al. 90, Schneider et al 93, Roesky et al 93].

La implementación de un banco eficiente, capaz de realizar una simulación en tiempo real de este tipo de sistema se realizó siguiendo el diagrama en bloques de la Figura 3.19. El banco aprovecha la potencia y flexibilidad de las PC para controlar instrumentación standard y requiere únicamente un mínimo de circuitería adicional de bajo costo.

El bloque 1 es el sistema dinámico bajo estudio. Puede ser en principio cualquier tipo de oscilador, no sólo uno electrónico, pero en caso de tratarse de sistemas no electrónicos se deben agregar transductores adecuados. La entrada indicada IN corresponde a la aplicación de los pulsos externos en tanto que la salida OUT es la señal de interés. El bloque 2 es un generador, capaz de producir un tren periódico de pulsos, de frecuencia programable (se empleó un HP33210). Trabaja como generador principal del experimento por lo que en lo que sigue se lo identifica como *generador maestro*. El bloque 3 es el corazón del banco de medición: la *tarjeta de adquisición de datos multifunción* desarrollada en el laboratorio (en adelante MFDAB): ella realiza tanto el proceso de muestreo de la salida del oscilador como el proceso de digitalización y la generación de los pulsos retardados. Incluye asimismo una interfase IEEE-488 para controlar el generador maestro.

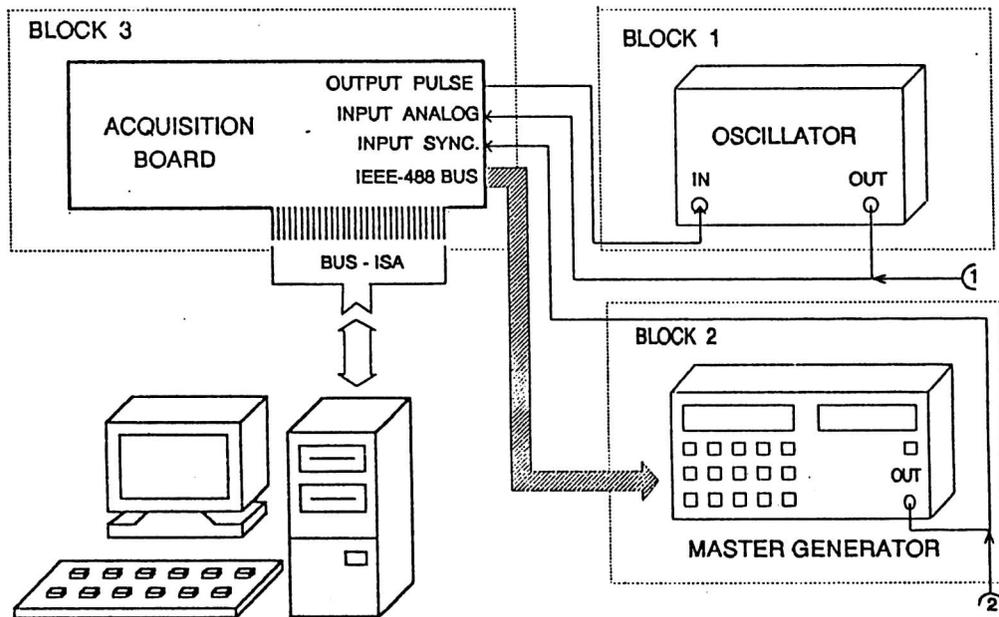


Figura 3.19: Diagrama en bloques general del banco de medición

La Figura 3.20 muestra el diagrama de tiempos general de un experimento típico. En esa figura la curva rotulada (a) es la señal de salida del oscilador bajo estudio (punto de medición 1 de la Figura 3.19); (b) es la salida del generador maestro (punto de medición 2 de la Figura 3.19); (c) es la señal muestreada; la frecuencia de muestreo es  $1/\Delta t$ . Las muestras indicadas  $X_1, X_2, X_3, \dots$  son empleadas para construir los pulsos paramétricos; (d) son los impulsos periódicos que actúan sobre el oscilador; tienen una amplitud proporcional al valor de la señal en  $(t-\tau)$  donde  $\tau$  es el retardo. En la Figura 3.20  $t_B$  es el tiempo de construcción del pulso, según el proceso que se describe más abajo.

En una simulación *en tiempo real*, tanto el período  $T_E$  como el ancho  $\Delta_E$  de los pulsos son inicializados al comienzo del proceso del medición y permanecen constantes durante todo el experimento. La amplitud  $A_E$  es una función arbitraria de la salida del oscilador, que puede ser seleccionada mediante programa por el usuario; por lo tanto la amplitud varía de un pulso a otro.

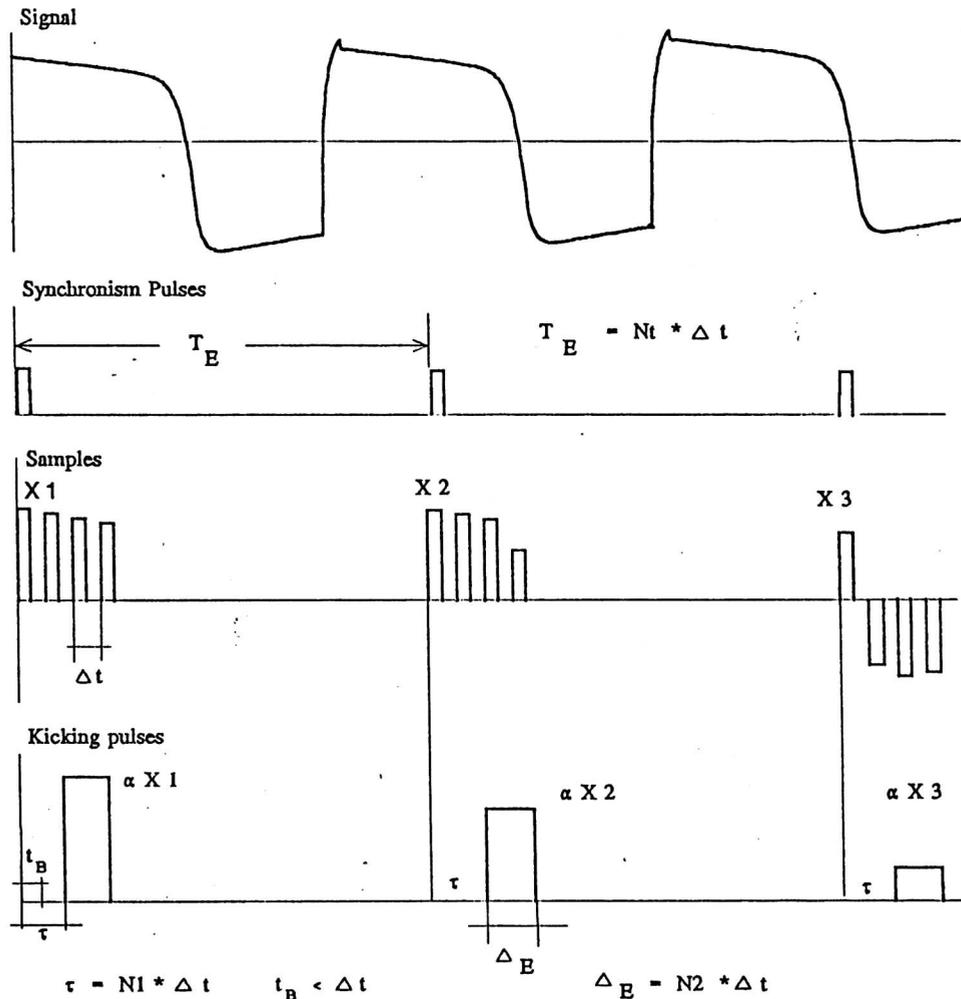


Figura 3.20: Diagrama general del tiempo para un oscilador típico

El tiempo  $t_B$  es la variable crítica que limita la máxima frecuencia obtenible en el proceso. Existen varias razones para ello: en primer lugar durante el tiempo de construcción  $t_B$  la PC está incapacitada de adquirir muestras de modo que, si se desea evitar la pérdida de muestras, se debe elegir  $\Delta t$  mayor que  $t_B$ . En segundo lugar, el criterio de Nyquist para el muestreo establece, para este caso que  $f_{\max}$  debe ser menor que  $1/(2t_B)$ , donde  $f_{\max}$  es la máxima frecuencia relevante en el espectro de Fourier de la señal de salida. Por último el retardo  $\tau$  debe ser mayor que  $t_B$  por una simple restricción física.

Para osciladores de baja frecuencia los pulsos paramétricos podrían en principio obtenerse mediante un generador de funciones programable vía interfase IEEE-488; por ejemplo el mismo generador empleado en este banco como generador maestro sería adecuado a este fin. Sin embargo, los tiempos típicos requeridos para la inicialización serían, en ese caso, del orden de 10 ms a 100 ms según el número de funciones a programar, por lo que, aún en el mejor de los casos, sólo podría utilizarse para osciladores con un contenido relevante en frecuencia de 50 Hz. En el caso en que la amplitud de la fuerza externa es constante puede emplearse este método pues allí no existe la realimentación [Larrondo et al 96b, 97b].

El banco de mediciones desarrollado permite reducir  $t_b$  hasta el orden de los 15  $\mu s$ , pues aprovecha las capacidades de *transferencia directa a memoria* DMA, y de generación de pulsos (convertidor DAC) incluidas en las PC's standard. La MFDAB está conectada a un BUS ISA. El valor de  $t_b$  depende de características de arquitectura de ese BUS y no de la PC empleada; en el caso del banco aquí desarrollado el valor de 15  $\mu s$  ha sido medido en una 386, una 486 DX2 (66 MHz) y una 486 DX4 (100 MHz).

A los fines de completitud se incluye en el apéndice B1 una breve descripción de las capacidades DMA incluidas en las PC's y en B2 se detalla el funcionamiento de la tarjeta de adquisición de datos desarrollada.

El proceso completo se describe en la Figura 3.21 (ver también el diagrama de tiempos de la Figura 3.20). El proceso funciona del siguiente modo: 1) se fija la frecuencia del generador maestro ( $1/T_E$ ) mediante la interfase IEEE incluida en la MFDAB (ver Apéndice 2); se inicializa el número total de períodos  $N_p$  y la velocidad de muestreo ( $1/\Delta t$ );  $1/\Delta t$  se elige igual a  $N_1(1/T_E)$ , es decir un múltiplo entero de la frecuencia del generador maestro (mínimo  $\Delta t=15 \mu s$ ); 3) los *registros de Modo, Dirección Base y Contador Base de palabra*, son inicializados a los valores indicados en la Figura b1.2 (Apéndice B1). El retardo está dado por  $N_1\Delta t$  y este valor  $N_1$  es almacenado en el registro Contador Base de Palabra (valor mínimo de  $N_1$  es 1); 4) la DMA es habilitada; 5) Ahora, el próximo pulso del generador maestro dispara el proceso de adquisición de datos en el canal dos de la MFDAB,

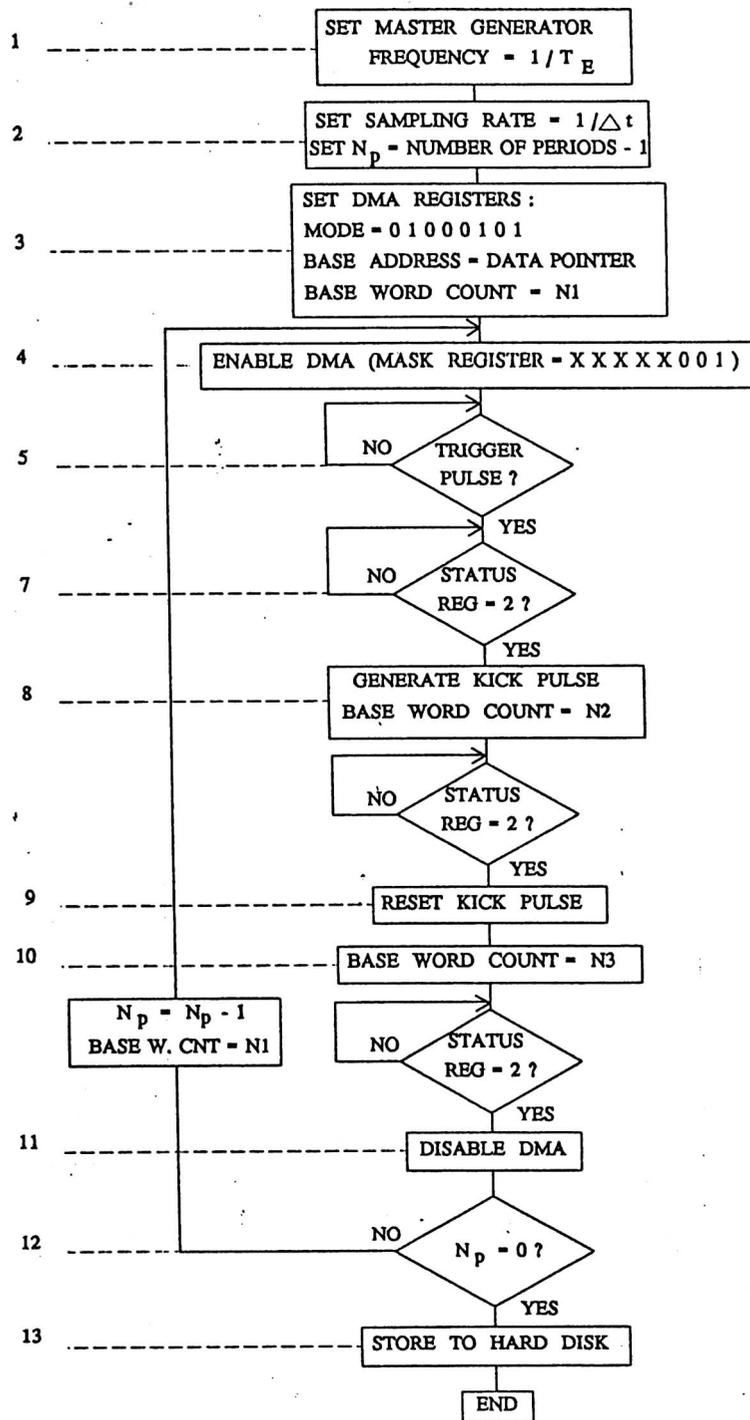


Figura 3.21: Diagrama de flujo del proceso de medición

en el que está conectada la salida del oscilador; 6) tan pronto como se adquiere la primera muestra, se procede a calcular la amplitud  $A_E$  del próximo impulso a ser aplicado. Esta amplitud puede ser una función cualquiera del valor de la muestra; 7) una vez que se han transferido  $N_1$  muestras a la memoria (y esto significa que ha finalizado el retardo  $\tau$ ) el segundo bit menos significativo del registro de estado de DMA pasa al estado "alto", indicando que el impulso debe ser aplicado al oscilador; 8) el ancho  $\Delta_E$  de este impulso se fija colocando un nuevo número  $N_2$  en el Registro de Contador de Palabra Base;  $\Delta_E$  es igual al  $N_2\Delta t$ ; los pasos 6, 7 y 8 requieren un mínimo  $t_B$  de 15  $\mu s$ ; 9) la adquisición continúa hasta que se han adquirido  $N_2$  nuevas muestras; el segundo bit menos significativo en el Registro de Estado de DMA pasa nuevamente al nivel "alto" indicando que hay que resetear la DAC pues la excitación ha finalizado; 10) se almacenan en el Registro Contador de Palabra Base el número  $N_3$ , que es el número restante hasta completar las  $N_t$  muestras que completan el proceso; 11) Con el próximo pulso del generador maestro se reinicia el proceso y los pasos 5 a 10 se repiten con una frecuencia  $1/T_E$  hasta que se alcanza el número total de períodos  $N_p$ ; 12) los datos almacenados en la memoria son guardados en el disco rígido para el posterior análisis [Larrondo et al 96b, 97b].

### 3.9. Método simplificado para el caso de fuerzas de amplitud constante

Un modo de obtener las zonas de sincronización del oscilador con un generador externo, adecuado al caso fuerzas externas independientes, es el correspondiente a la disposición experimental indicada en la figura 3.22. La salida del oscilador y la salida del generador externo son enviadas a los canales X e Y del osciloscopio respectivamente. Se obtiene una figura de Lissajous resultando sencillo (aunque tedioso!) localizar las zonas en el espacio de los parámetros en las que hay relación entera entre la frecuencia de ambas señales.

De este modo se obtuvieron los tres retratos de fases de la Figura 3.23. En esta Figura los puntos indicados con el rótulo PR seguido de un número corresponde a los atractores cuya dimensión de correlación y exponente de Lyapunov se reportó en la tabla 3.II.

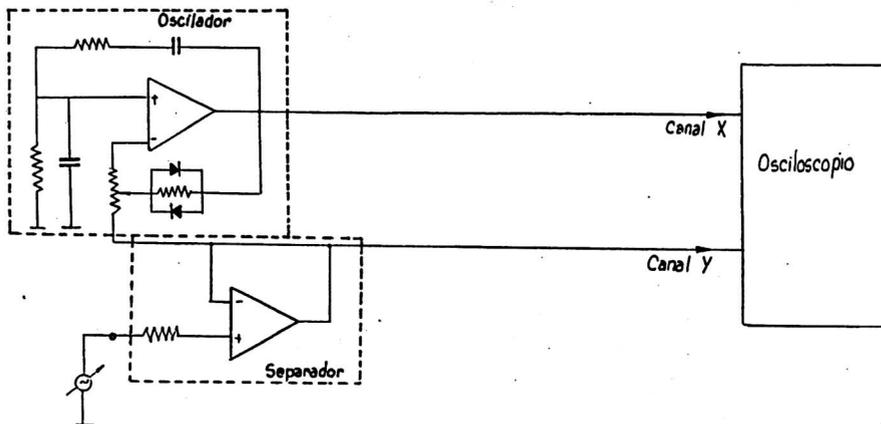
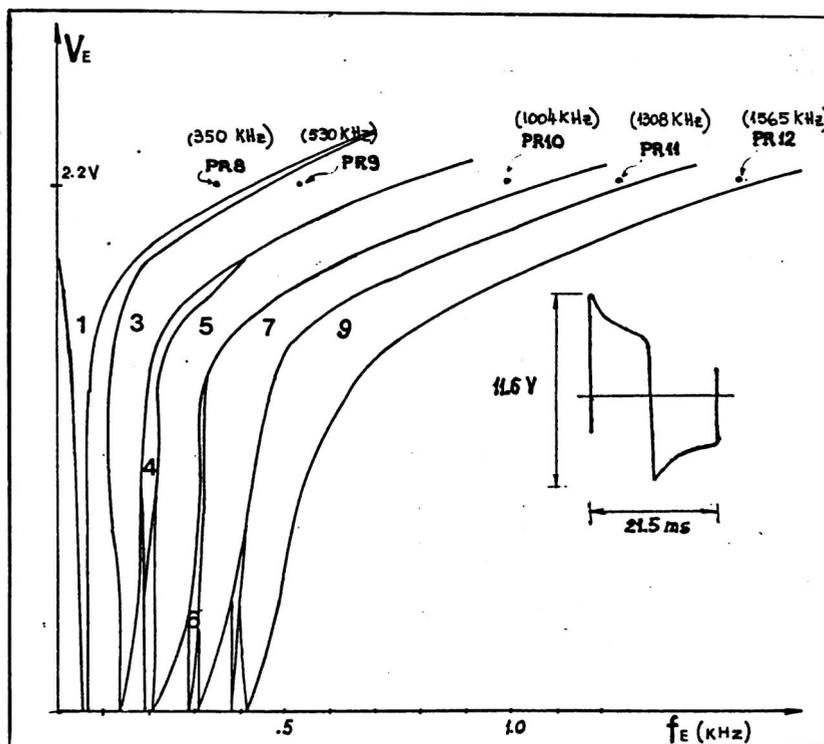


Figura 3.22: Diagrama en bloques para determinar las zonas de sincronización



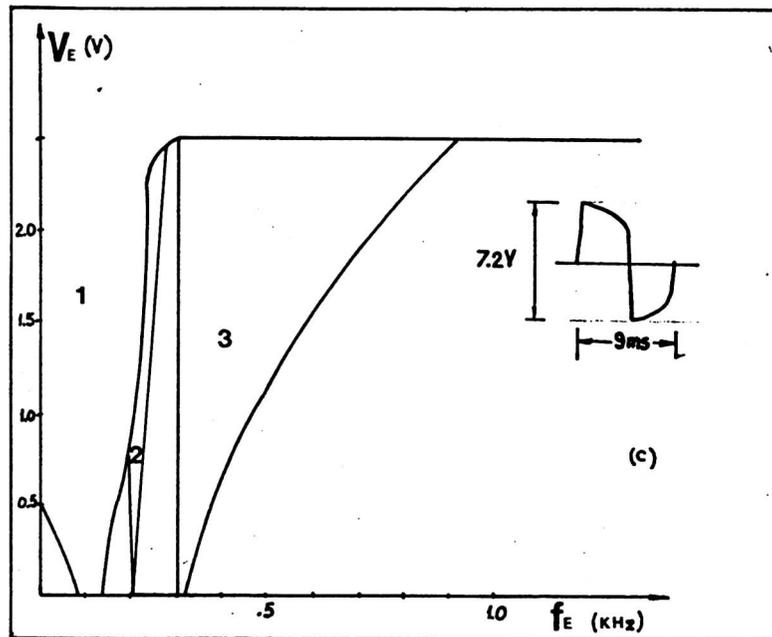
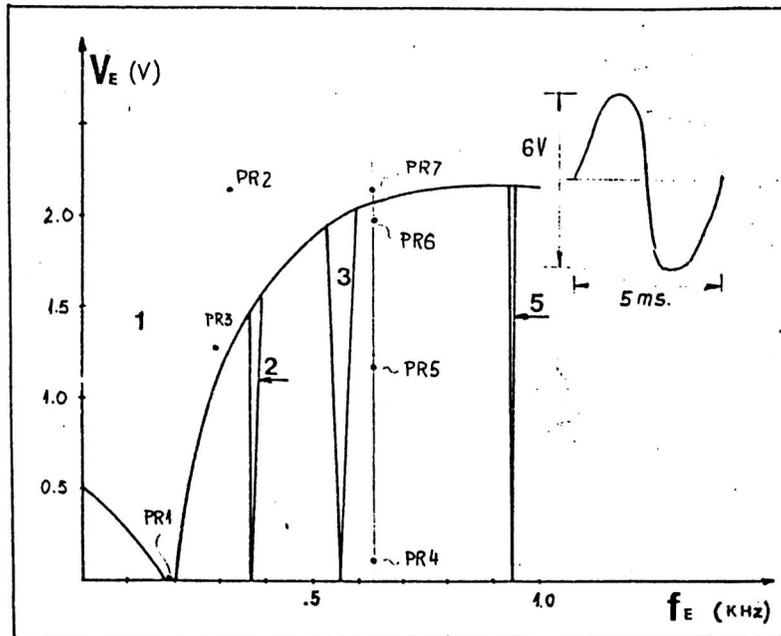


Figura 3.23: Retratos de fases del oscilador Puente de Wien con forzado senoidal, para distintas posiciones del potenciómetro P de la Figura 3.7; la señal del oscilador libre es la indicada en el recuadro

Los tres retratos corresponden a distinta condición de funcionamiento del oscilador libre (es decir distinta posición del potenciómetro P de la Figura 3.7). la forma de la señal del oscilador libre para cada caso se muestra a la derecha de cada retrato de fases.

## Capítulo 4

### Sistemas de Dimensión Infinita (I)

#### 4.0.- Introducción

Los sistemas mecánicos en general consisten en un conjunto de componentes estructurales con masa y propiedades elásticas distribuidas. Ejemplos de elementos estructurales de interés son vigas [*Larrondo et al 92, Rossi et al 93*], placas [*Leissa et al 80, Avalos et al 88, 89, 90, Laura et al 91a, 95, Wang 92, Larrondo et al 93 y 94, Topalián et al 96*], membranas, cables, etc. Estos elementos pueden estar vinculados a través de diferentes condiciones de contorno o mediante fundaciones. Los fenómenos oscilatorios en tales sistemas están gobernados por EDDP que involucran variables espaciales y el tiempo. Son sistemas dinámicos de infinitos grados de libertad.

Un caso importante en la ingeniería es aquél en el que existen elementos discretos acoplados al sistema continuo, como por ejemplo, maquinarias instaladas sobre una estructura o componentes electrónicos en una placa. En estos casos los elementos discretos se modelan mediante masas concentradas acopladas al sistema continuo ya sea en forma rígida o mediante acoplamientos elásticos de diversas características [*Larrondo et al 92, 93, Avalos et al 96*]

También interesa estudiar la influencia de orificios y sobre espesores de diversa forma en el comportamiento de la estructura [*Bhat et al 95*]. Esta es una situación habitual en la ingeniería debido a razones operacionales tales como la necesidad de instalar ductos para el pasaje de instalaciones [*Avalos et al 96, Gallego Juárez 73*]

Las EDDP que modelan el problema pueden ser lineales o no lineales. Hasta épocas recientes el caso no lineal había sido encarado mediante métodos perturbativos [*Nayfeh et al 95a y 95b*] que, en el orden más bajo, eran equivalentes a la linealización del problema. En los últimos años la Teoría de Sistemas Dinámicos ha extendido las interpretaciones geométricas [*Shaw*

*et al 92, Larrondo et al 95]* y ha permitido generalizar algunos métodos propios de los problemas lineales a los casos no lineales [*Larrondo et al 96c, Larrondo et al 97a*].

En este capítulo se introducen varios métodos variacionales semianalíticos, desarrollados inicialmente para su aplicación a problemas lineales. Si bien el estudio de los problemas lineales no es novedoso desde el punto de vista físico, el conocimiento previo de las soluciones lineales resulta imprescindible para el enfoque adoptado en el caso de los problemas no lineales, pues las soluciones lineales serán utilizadas como espacio de base para el estudio de los no lineales. Además la introducción de los métodos variacionales presentados es más sencilla en el caso lineal.

Computacionalmente métodos semianalíticos como los de Galerkin [*Larrondo et al 96c*], Rayleigh Ritz [*Larrondo et al 93*], Residuos Ponderados [*Fynlayson et al 66*] y Kantorovich [*Laura et al 91b*], son mucho más eficientes que el de cuadratura diferencial [*Larrondo et al 94*] y el de elementos finitos [*Avalos et al 96*] y permiten analizar en forma más sencilla el comportamiento cualitativo de las soluciones.

En todos los métodos presentados una limitación es que para la obtención de buenos resultados hay que elegir adecuadamente las funciones de prueba que se adoptan como base del espacio funcional. Las bases ortogonales son óptimas en cuanto a la convergencia hacia la solución correcta [*Duff et al 66*], pero no en todos los casos son sencillas para el cálculo numérico. Los polinomios, por otra parte, resultan muy simples de utilizar pero se producen problemas de convergencia en algunas configuraciones particulares [*Ferguson et al 72*].

El problema de convergencia es relevante si se pretende que los resultados sean aplicables a la Ingeniería. Luego, en cualquier caso real, deben realizarse dos verificaciones básicas: la comprobación con configuraciones simples cuya solución se conozca y el análisis de convergencia de las soluciones aproximadas obtenidas al incrementar el número de términos de la aproximación.

#### 4.1. Clasificación de las EDDP desde el punto de vista computacional.

Las EDDP que modelan los sistemas del continuo se pueden clasificar según distintos criterios. Desde un punto de vista puramente matemático es tradicional la clasificación, sobre la base de las *características* o *curvas de propagación de la información*, en tres categorías: *hiperbólicas*, *parabólicas* y *elípticas* [Sommerfeld 49]. Ejemplos prototípicos de cada caso son:

- Ecuación de la Gravitación (elíptica)

$$\nabla^2 \xi = - \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.1.1)$$

- Ecuación de ondas (hiperbólica)

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.1.2)$$

- Ecuación de difusión (parabólica):

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (4.1.3)$$

Al aplicar métodos como el de separación de variables las ecuaciones resultantes pueden cambiar de naturaleza. Por ejemplo, al analizar el problema hiperbólico (4.1.2), en régimen estacionario, y con condiciones de contorno, se obtiene una ecuación diferencial elíptica para las variables espaciales.

Desde un punto de vista computacional, existe otra clasificación más importante: las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.3) definen un *problema de Cauchy de valor inicial*, en tanto que la ecuación de Gravitación (4.1.1) define un *problema de contorno*. En el primer caso, las ecuaciones gobiernan la evolución temporal de  $\xi(\vec{r}, t)$ , y se supone conocida  $\xi$  (y su derivada temporal si es necesario), en cierto instante inicial  $t_0$  y para todo  $\vec{r}$ . La subclasificación adicional de los problemas de valor inicial en parabólicos e hiperbólicos es mucho menos importante porque muchos problemas reales son de tipo mixto y porque no existen diferencias esenciales en los esquemas

computacionales prácticos [Press et al 92].

En los problemas de contorno la solución debe satisfacer las ecuaciones diferenciales en el interior de la región de interés y debe cumplir *condiciones de contorno* (las más comunes son las de Dirichlet, las de Neumann y las mixtas) en la frontera de esa región de interés. En estos problemas no se puede "integrar a partir del contorno" en una forma similar a lo que se hace en el problema de valor inicial en que "se integra hacia adelante en el tiempo" a partir de una condición inicial.

Una distinción similar a la que existe entre problemas de valor inicial y de contorno se da en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para las que el método usual de obtención de la solución consiste en separar el análisis de la respuesta transitoria del sistema (solución de la ecuación homogénea) de la solución estacionaria (solución particular).

En los problemas de valor inicial un método numérico es exitoso si logra mantener acotado el error a lo largo de la evolución temporal; al resolver numéricamente un problema de valor inicial siempre debe realizarse el control de la *estabilidad del algoritmo*. Este es uno de los problemas principales a resolver pues muchos algoritmos "razonables" pueden ser numéricamente inestables cuando se los aplica a problemas de valor inicial.

En contraste la estabilidad es relativamente fácil de alcanzar para los problemas de contorno. El aspecto clave en estos problemas es la *eficiencia del algoritmo*, tanto en lo referente a la carga computacional como a los requisitos de almacenamiento: el algoritmo debe resolver el problema en un tiempo "razonable" y empleando una cantidad de memoria compatible con los recursos disponibles. Debido a que todas las condiciones sobre la frontera se deben satisfacer en forma simultánea los problemas de contorno se pueden considerar como la solución de un gran número de ecuaciones algebraicas en general no lineales.

En el caso de los sistemas no lineales las no linealidades pueden responder básicamente a dos orígenes:

- existencia de vínculos no lineales: en este caso la no linealidad se encuentra en las condiciones de contorno, o bien en la fundación, o en el amortiguamiento del sistema, etc. Un caso típico, que será estudiado en el capítulo 6, corresponde a una viga de Bernoulli con fundación elástica parcial, con una no linealidad cúbica:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + [k_f w + \eta_f w^3] [\theta(x) - \theta(x-a)] = 0 \quad (4.1.4)$$

donde  $k_f$  y  $\eta_f$  son constantes elásticas de la fundación y  $\theta(x)$  es la función escalón unitario de Heaviside.

- el material del sistema tiene propiedades elásticas no lineales. Como ejemplos pueden mencionarse la ecuación de ondas para un medio no lineal:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\epsilon_2}{c} \frac{\partial^2 (|\vec{E}|^2 \vec{E})}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1.5)$$

donde se ha supuesto que el medio tiene una permitividad eléctrica  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_2 |\vec{E}|^2$ , y la ecuación Seno-Gordon que aparece en numerosas aplicaciones [Vvedensky 94]:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu \kappa^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \tau \kappa^{-1} \text{sen} \phi \quad (4.1.6)$$

## 4.2. El método de Rayleigh-Ritz

La mayoría de las soluciones explícitas de EDDP lineales, conocidas en la matemática aplicada, han sido obtenidas mediante separación de variables. El problema se convierte así en uno de determinación de autovalores y autofunciones [Courant et al 89]. Sea por ejemplo la ecuación de onda, en una región  $\Omega$  con borde  $\Gamma$ . Si se efectúa una separación entre las variables espaciales y el tiempo:

$$w(\vec{r}, t) = e^{i\omega t} W(\vec{r}), \quad (4.2.1)$$

la función espacial  $W$  debe satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 W + \omega^2 W = 0. \quad (4.2.2)$$

Las condiciones de contorno más usuales son de una de las tres formas siguientes:

- Condición de Dirichlet:

$$W = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (4.2.3)$$

- Condición de Neumann:

$$\frac{\partial W}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (4.2.4)$$

- Condición mixta:

$$hW + \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (4.2.5)$$

En los casos usuales  $\Omega$  es una región de  $\mathbb{R}^3$  y  $\Gamma$  es la superficie que la limita. Si la región  $\Omega$  está limitada por superficies coordenadas de ciertos tipos especiales denominados *separables*, es posible reiterar el método de separación de variables, pero ahora aplicado a las coordenadas espaciales. No obstante los sistemas de coordenadas separables no son numerosos, y en la práctica están restringidos a sistemas elípticos o sus casos particulares degenerados [Duff et al 66].

En muchos problemas, entre los que se encuentra la ecuación de onda, la parte espacial resultante de la separación, es una *ecuación de Sturm-Liouville generalizada* [Churchill 41, Shilov 61]:

$$\nabla^2 W(\vec{r}) - q(\vec{r})W(\vec{r}) + \lambda \rho(\vec{r})W(\vec{r}) = 0, \quad (4.2.6)$$

donde  $\rho = \rho(\vec{r}) > 0$  es una función positiva de la posición, denominada *peso*, y  $q(\vec{r})$  es una función acotada (que sin pérdida de generalidad se puede considerar como positiva). Los valores de  $\lambda$  para los que (4.2.6) admite soluciones que satisfagan las condiciones de contorno se denominan *autovalores* y las soluciones, *autofunciones*. El problema de encontrar los autovalores y autofunciones de (4.2.6) es equivalente al problema de autovalores y autovectores en matrices, en un espacio euclídeo infinito dimensional [Shilov 61].

Este tipo de problema admite un principio variacional integral; en efecto es posible encontrar una integral, llamada integral de Dirichlet (en adelante *el funcional*), que es minimizada por las soluciones de la ecuación diferencial. La forma de la integral de Dirichlet para el caso de los problemas tipo Sturm-Liouville es:

$$J[W] = \int_{\Omega} [(\nabla^2 W)^2 + q(\vec{r})W^2] d\Omega \quad (4.2.7)$$

La integral de Dirichlet es una funcional cuadrática definida positiva, sobre el espacio de las *funciones de prueba*  $W(\vec{r})$  *admisibles*, que son aquéllas que están definidas y son diferenciables hasta el orden requerido en  $\Omega$ , y satisfacen las condiciones de contorno en  $\Gamma$ .

Si la condición de contorno es  $W=0$  en  $\Gamma$ , el mínimo de  $J[W]$  corresponde a  $W=0$ , ya que de otro modo el funcional es positivo. Si se imponen restricciones adicionales aparecen las soluciones no triviales. Por ejemplo si se pide la condición de normalización:

$$H[W] = \int_{\Omega} \rho W^2 d\Omega = 1 \quad (4.2.8)$$

además de las condiciones de borde, el mínimo de  $J[W]$  se calcula empleando la teoría de los multiplicadores de Lagrange para problemas de extremo condicionado, es decir se busca el extremo libre de:

$$J[W] - \lambda H[W] = \int_{\Omega} [(\nabla^2 W)^2 + (q - \lambda \rho)W^2] d\Omega. \quad (4.2.9)$$

La dificultad del método de minimización es demostrar *la existencia* de la función minimizante pues no está garantizado que el problema tenga solución. Para dominios suaves y acotados la tiene y en ese caso es posible probar las siguientes propiedades [Duff et al 66, Courant et al 89]:

- Si  $W_1(\vec{r})$  es la función que minimiza  $J[W]$  con la condición (4.2.8), y es dos veces continuamente diferenciable, entonces  $W_1(\vec{r})$  es una autofunción que satisface (4.2.6). El correspondiente autovalor  $\lambda_1$  está dado por el valor (mínimo)  $J[W_1]$ .

- Si  $V(\vec{r})$  es otra función, que se anula en la frontera  $\Gamma$  entonces:

$$J[W_1, V] - \lambda H[W_1, V] = 0, \quad (4.2.10)$$

donde

$$H[U, V] = \int_{\Omega} \rho UV d\Omega = 1 \quad (4.2.11)$$

- Los restantes autovalores y autofunciones pueden obtenerse por un proceso iterativo. La función  $W_n$  será aquella tal que minimice  $J[W]$  con las restricciones adicionales:

$$H[W] = 1; H[W, W_1] = 0; \dots; H[W, W_{n-1}] = 0 \quad (4.2.12)$$

El enésimo mínimo sucesivo de  $J[W]$  será  $J[W_n]$  y corresponde al autovalor  $\lambda_n$ . Los autovalores obtenidos siguiendo esta secuencia resultan ordenados en forma creciente.

- El operador  $\nabla^2 - q$  es autoadjunto; sus autovalores son reales y sus autofunciones correspondientes a autovalores distintos, son ortogonales entre sí, con respecto a la función peso  $\rho$ .
- Para la condición de Neumann se reemplaza la restricción  $W=0$  sobre  $\Gamma$ , por la anulación de la derivada normal sobre  $\Gamma$ .
- Para la condición de contorno mixta se agrega un término de contorno al funcional:

$$J_h[W] = \int_{\Omega} [(\nabla W)^2 + qW^2] d\Omega + \int_{\Gamma} hW^2 d\Gamma \quad (4.2.13)$$

El nuevo funcional es también cuadrático definido positivo y se reduce a  $J[W]$  cuando la función  $h$  sobre la frontera es idénticamente nula. La condición de normalización y las sucesivas condiciones de ortogonalidad entre autofunciones se mantienen iguales al caso de Dirichlet.

El método de obtención de autovalores y autofunciones de un problema de Sturm Liouville, mediante la minimización del funcional, muestra que un problema de contorno en una región finita  $R$  tiene, en general, una secuencia infinito numerable de autovalores  $\lambda_1 \leq \lambda_2, \dots$  y un conjunto de autofunciones  $W_n$  ortonormales con respecto a la función peso  $\rho$ .

Puede demostrarse que las autofunciones de la ecuación de Helmholtz en  $\Omega$  y con cualquiera de las condiciones de contorno sobre  $\Gamma$  constituye una secuencia completa ortonormal en el espacio vectorial de las funciones admisibles en  $\Omega$ . Estas autofunciones pueden ser usadas como base para el *desarrollo de Fourier generalizado* y cualquier otra función admisible es expresable en la forma:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n \quad (4.2.14)$$

donde los coeficientes de Fourier resultan dados por:

$$A_k = \int_{\Omega} \rho \varphi W_k d\Omega = H[\varphi, W_k]. \quad (4.2.15)$$

Para espacios infinito-dimensionales, la noción de expansión de un espacio vectorial depende de la clase de convergencia especificada para la serie. La clase de convergencia que se adapta especialmente a los espacios vectoriales con producto interno es la *convergencia cuadrática media*. Una secuencia de funciones  $W_n(\vec{r})$ , definida sobre la región  $\Omega$ , converge con convergencia cuadrática media a la función  $W$  sí y sólo si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho \|W_n - \varphi\|^2 dV = 0. \quad (4.2.16)$$

En forma similar la serie de (4.2.14) converge a  $\varphi$  (en el sentido de la convergencia cuadrática media) cuando las sumas parciales:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n A_k W_k \quad (4.2.17)$$

convergen a  $\varphi$ . Esto es, dado un  $\epsilon > 0$ , se puede encontrar un  $n = n(\epsilon)$  tal que para todo  $n > n(\epsilon)$  se cumple:

$$\int_{\Omega} \rho \|\varphi_n - \varphi\|^2 dV < \epsilon \quad (4.2.18)$$

Los coeficientes de Fourier (4.2.15) satisfacen la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \leq H[W] \quad (4.2.19)$$

pero además, por ser  $\{W_1, \dots, W_{\infty}\}$  un conjunto completo, se cumple el signo de igualdad en la expresión anterior. Este es el teorema de Parseval, análogo al teorema de Pitágoras de la geometría. Es decir, los coeficientes de Fourier son las componentes o coordenadas de la función  $W$ , en el sistema ortonormal de coordenadas constituido por las funciones de base  $\{W_1, \dots, W_{\infty}\}$  [Duff et al 66].

Existen desde luego configuraciones geométricas para las cuales no es sencillo hallar una base en el espacio de las funciones admisibles. Para estos problemas son adecuados los métodos que se describen en el acápite 4.4.

El mismo resultado, ya obtenido por el método de los multiplicadores de Lagrange, se puede también obtener minimizando el *cociente de Rayleigh*:

$$\frac{J[W]}{H[W]}, \quad (4.2.20)$$

sin que se requiera en este caso la restricción de normalización (4.2.8). El valor mínimo del cociente de Rayleigh es  $\lambda_1$ ; el mínimo con la restricción adicional  $H[W_1, W]=0$  es  $\lambda_2$ ; y así siguiendo, el mínimo restringido por las  $n-1$  condiciones  $H[W, W_k]=0$  para  $k=1, \dots, n-1$  es  $\lambda_n$ . Los autovalores  $\lambda_n$  son los sucesivos valores mínimos del cociente de Rayleigh, con las sucesivas restricciones de ortogonalidad  $H[W_k, W]=0$ ,  $k=1, \dots, n-1$ .

Un teorema importante es el llamado *principio del máximo mínimo*, que establece:

● Principio del máximo mínimo

Sean  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  los sucesivos valores mínimos del cociente de Rayleigh  $J[W]/H[W]$ , sujetos para  $n > 1$  a las  $n-1$  restricciones de

*ortogonalidad sucesivas:*

$$H[V_1, W]=0, H[V_2, W]=0, \dots, H[V_{n-1}, W]=0 \quad (4.2.21)$$

*definidas por una dada secuencia de funciones  $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, \dots$ , que no coincide en general con la secuencia de las autofunciones, entonces:*

$$\mu_1 \leq \lambda_1; \mu_2 \leq \lambda_2; \dots; \mu_n \leq \lambda_n \quad (4.2.22)$$

*donde la igualdad entre  $\mu_n$  y  $\lambda_n$  sólo se produce cuando las  $V_k$  coinciden con las autofunciones y en ese caso los valores del cociente de Rayleigh coinciden con los autovalores  $\lambda_k$ .*

Este teorema permitirá en el capítulo 5 resolver configuraciones complejas utilizando bases polinómicas que, si bien expanden el espacio de las funciones admisibles, no son las autofunciones del problema.

Todo vínculo adicional que se imponga al sistema origina un incremento (nunca un decremento) en los autovalores. Si, por ejemplo, el problema de autovalores, con la condición de Dirichlet  $W=0$  sobre  $\Gamma_1$  y la condición de Neumann  $\partial W/\partial n=0$  sobre  $\Gamma-\Gamma_1$ , tiene autovalores  $\mu_k$ , entonces  $\mu_k$  es monótona creciente con el tamaño de  $\Gamma_1$ . Los autovalores  $\lambda_k$  del problema mixto son monótono-crecientes con la función coeficiente  $h$ , para  $h \geq 0$  [Duff et al 66]. Si se divide la región  $\Omega$  en un número de subregiones parciales  $\Omega_1, \dots, \Omega_\infty$ , insertando ciertas superficies de división interna  $\Gamma_j$  y se impone una restricción adicional, a saber, que las funciones admisibles se desvanezcan sobre las fronteras internas  $\Gamma_j$ , ésto hará aumentar los autovalores. Pero el problema restringido incluye entre sus autovalores todos los autovalores de las regiones parciales  $\Omega_1, \dots, \Omega_\infty$  con condición de Dirichlet. De hecho, si se consideran todas las funciones que son idénticamente nulas en todas las regiones a excepción de una, se obtiene una clase de funciones idéntica a la de las funciones admisibles de esa región parcial. Esta descomposición en subregiones es la base del método de elementos finitos [Zienkiewicz et al 95].

El conjunto de funciones admisibles es infinito dimensional. En las

aplicaciones del capítulo 5 se trabajará con un método desarrollado inicialmente por Lord Rayleigh y modificado por Ritz, que permite restringir el problema a dimensión finita. Se introducirán además parámetros libres en las funciones de base, cuyo valor resultará de la optimización de los autovalores aproximados obtenidos [Avalos et al 88].

En el método de Rayleigh-Ritz y su variante optimizada se reemplaza el sistema mecánico continuo por un sistema de un número finito de grados de libertad, cuyos autovalores se obtienen por resolución de una ecuación polinomial. Ésto es equivalente a minimizar el funcional dentro de un espacio de dimensión finita. La elección de este sistema aproximante finito y aún del número de grados de libertad puede realizarse de varias formas y en general se requiere una visión física del problema para hacer más eficiente la aproximación.

Formalmente se selecciona un subconjunto de funciones independientes  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , dentro del conjunto de funciones admisibles. Estas *funciones de prueba* pueden elegirse por inspección, como buenas aproximaciones de las verdaderas autofunciones que se desea obtener. Con ellas se forma la combinación lineal:

$$W^* = \sum_{k=1}^N A_k \phi_k, \quad (4.2.23)$$

con coeficientes indeterminados  $A_k$  y se la ensaya en el cociente de Rayleigh. Este cociente es ahora una función de los  $N$  números  $A_k$ . Por analogía con el problema variacional completo, se trata de encontrar el mínimo del cociente de Rayleigh, pensado como función de las  $N$  variables  $A_1 \dots A_N$ . Este valor mínimo es el autovalor aproximado. El proceso de minimización conduce simultáneamente a la solución aproximada. El problema de minimizar el cociente de Rayleigh es equivalente nuevamente al problema de multiplicadores de Lagrange de encontrar el mínimo de  $J[W^*] - \lambda^* H[W^*]$ . De (4.2.23) surge:

$$J[W^*] - \lambda^* H[W^*] = \sum_{k,l=1}^N \{A_k A_l J[\phi_k, \phi_l] - \lambda^* H[\phi_k, \phi_l]\} \quad (4.2.24)$$

Si las matrices  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  de  $N \times N$ , están definidas por sus elementos de matriz:

$$\begin{aligned} J_{kl} &= J[\phi_k, \phi_l] = J_{lk} \\ H_{kl} &= H[\phi_k, \phi_l] = H_{lk} \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

el problema consiste en minimizar la forma cuadrática:

$$J[W^*] - \lambda^* H[W^*] = \sum_{k,l=1}^N (J_{kl} - \lambda^* H_{kl}) A_k A_l. \quad (4.2.26)$$

Diferenciando respecto a  $A_k$  e igualando a cero la derivada resulta:

$$\sum_{l=1}^N (J_{kl} - \lambda^* H_{kl}) A_l = 0, \quad (4.2.27)$$

que puesto en forma matricial es:

$$\mathbf{J}\vec{A} = \lambda^* \mathbf{H}\vec{A} \quad (4.2.28)$$

Todo  $\vec{A}$  que satisface la (4.2.23) se denomina *autovector respecto de H*. Si el conjunto original de funciones  $\phi_1, \dots, \phi_N$  es ortonormal con respecto a  $\mathbf{H}$  entonces la matriz  $\mathbf{H}$  resulta ser una matriz unitaria. En ese caso los vectores que satisfacen la (4.2.23) son autovectores de la matriz  $\mathbf{J}$  y los valores de  $\lambda^*$  son autovalores de esa misma matriz. Si  $\mathbf{H}$  no es una matriz unitaria los vectores  $\vec{A}$  y los  $\lambda^*$  son los *autovectores y autovalores de J con respecto a H*, y pueden obtenerse en forma simultánea empleando la descomposición en valores singulares (SVD) del apéndice A2 [Golub et al 96]. De (4.2.28) se obtiene la ecuación de autovalores:

$$\det(J_{kl} - \lambda^* H_{kl}) = 0 \quad (4.2.29)$$

Esta es una ecuación polinómica de grado  $N$  en la variable  $\lambda^*$ . Sus  $N$  raíces  $\lambda^*_1, \dots, \lambda^*_N$  puede ser encontradas al menos aproximadamente. Estas raíces son reales, se pueden ordenar en forma creciente y son los valores aproximados de los  $N$  primeros autovalores del problema variacional completo. La (4.2.23) da las  $N$  primeras autofunciones aproximadas.

Los vectores  $\vec{A}^{(j)}$  y  $\vec{A}^{(k)}$ , correspondientes a  $\lambda^*_j \neq \lambda^*_k$ , son ortogonales

con respecto a  $H$  [Duff et al 66].

Se puede demostrar además que las autofunciones aproximadas  $W^{*(i)}$  son ortogonales con respecto al funcional  $H$ . Dado que las funciones  $\phi_j$  pertenecen al conjunto de funciones admisibles en el problema variacional, se ve que el autovalor aproximado más bajo  $\lambda^*_1$  no puede ser menor que el verdadero mínimo  $\lambda_1$ . Los autovalores aproximados restantes se pueden comparar con los verdaderos considerando a las funciones de prueba  $\phi_k$  como restricciones sobre el sistema. Geométricamente, el sistema original infinito dimensional ha sido restringido a caer dentro de un espacio vectorial  $N$ -dimensional, expandido por  $\phi_1, \dots, \phi_N$ . Luego los  $N$  autovalores aproximados  $\lambda^*_j$  son límites superiores para los  $N$  autovalores más bajos:

$$\lambda_j \leq \lambda^*_j \quad j=1, \dots, N \quad (4.2.28)$$

Es mucho más difícil encontrar límites inferiores para los autovalores. No obstante la exactitud de la aproximación obtenida por los  $\lambda^*_j$  es usualmente muy buena.

El método de Rayleigh-Ritz no está limitado al operador de Helmholtz sino que puede aplicarse a una amplia gama de problemas y, en particular, a los problemas de vibraciones de vigas y placas para los que las EDDP's son de cuarto orden en las variables espaciales [Courant et al 89].

### 4.3. El método de Galerkin

El método de Galerkin es equivalente al de Raleigh-Ritz pero tiene una aplicación más amplia en el sentido que se lo puede utilizar en aquellos casos en que no se conoce el funcional de Dirichlet. Aplicado al problema general de vibraciones lineales el método puede esquematizarse como sigue [Ames 92, Zienkiwicz et al 95, Avalos et al 82]:

- Se expresa el problema mediante operadores en la forma:

$$\mathcal{L}[\xi] + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3.1a)$$

donde  $\xi$  es una función de las variables espaciales designadas genéricamente con  $s$  y del tiempo  $t$ , que debe estar definida en todo el dominio de interés  $\Omega$  y debe además satisfacer condiciones de contorno:

$$\mathcal{B}[\xi]=0 \quad \forall s \in \Gamma \text{ (contorno de } \Omega) \text{ y } \forall t > 0, \quad (4.3.1b)$$

y  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{B}$  son operadores lineales que actúan sobre las variables espaciales del problema.

• Se separan las variables espaciales del tiempo para lo cual se adopta como es usual la forma funcional:

$$\xi(s,t) = W(s)e^{i\omega t} \quad (4.3.2)$$

que reemplazada en (4.3.1a y b) conduce al problema de autovalores:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[W] - \omega^2 W = 0 \\ \mathcal{B}[W] = 0 \quad \forall s \in \Gamma \text{ (contorno de } \Omega) \end{cases} \quad (4.3.3)$$

• La función  $W(s)$  pertenece al espacio vectorial de las funciones admisibles. En este espacio puede definirse un producto interno en la forma [Duff et al 66]:

$$\langle F(s), G(s) \rangle = \int_{\Omega} \rho F G d\Omega \quad (4.3.4)$$

que es idéntico a  $H[F,G]$  definido en el método de Rayleigh-Ritz. Se elige una base  $\{\phi_j\}$  del espacio de las funciones admisibles.

• Se expresa  $W(s)$  en la forma:

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \phi_j(s) \quad (4.3.5)$$

que al ser sustituida en (4.3.3) conduce a:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \left[ -\omega^2 \phi_j + \mathcal{L}[\phi_j] \right] = 0 \quad (4.3.6)$$

Debe notarse que si las funciones de la base fuesen además soluciones de la EDDP ellas constituirían las autofunciones del operador lineal  $\mathcal{L}$  y el problema estaría resuelto. No obstante la base puede estar constituida (y así ocurre en general en las aplicaciones prácticas del método) por autofunciones de otro operador. Como se les impone la exigencia de satisfacer exactamente las condiciones de contorno (4.3.1b), toda función expresada tal como  $W(s)$  en (4.3.5), automáticamente las satisfará. Para que  $W(s)$  sea además la solución de la EDDP, los coeficientes  $A_j$  deberán además satisfacer la (4.3.6).

Las funciones admisibles están estructuradas como espacio vectorial [Shaw et al 93, 94, Leung et al 95]. En ese espacio la función  $W(s)$  es un vector. La ecuación (4.3.3) considerada como ecuación operacional en el espacio de las funciones admisibles, expresa el hecho que el operador  $[\mathcal{L}-\omega^2]$ , al actuar sobre la función  $W(s)$ , da como imagen el vector nulo (Figura 4.1). Si bien el espacio de las funciones admisibles es de dimensión infinita se lo representa en la Figura 4.2 como si fuera  $\mathbb{R}^3$ .

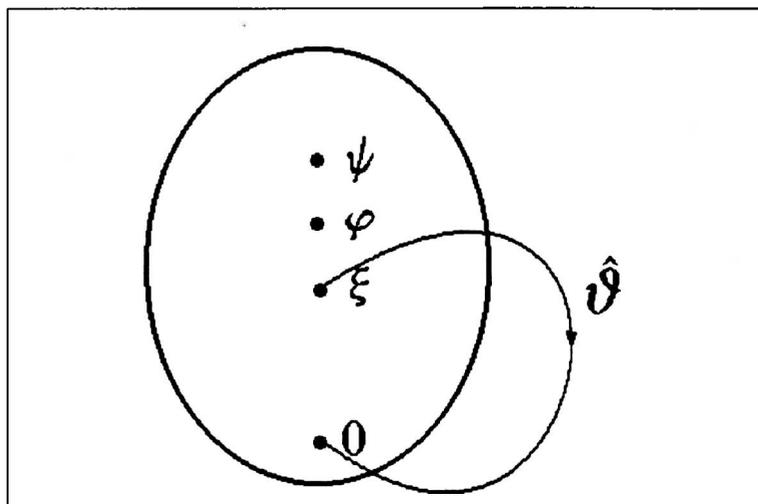


Figura 4.1. El operador actúa sobre la función  $\xi$ , que es un vector del espacio de las funciones que satisfacen las condiciones de contorno, y lo transforma en el vector nulo.

En esta figura los versores coordenados representan las funciones de la base (que se ha supuesto ortonormal) en tanto que un vector cualquiera representa la función  $W(s)$ . Por su parte los coeficientes  $A_j$  de (4.3.6) son

las componentes del vector  $W$  en cada uno de los versores de base, dadas por (Figura 4.2):

$$A_j = \langle W, \phi_j \rangle \quad j=1,2,\dots,\infty \quad (4.3.7)$$

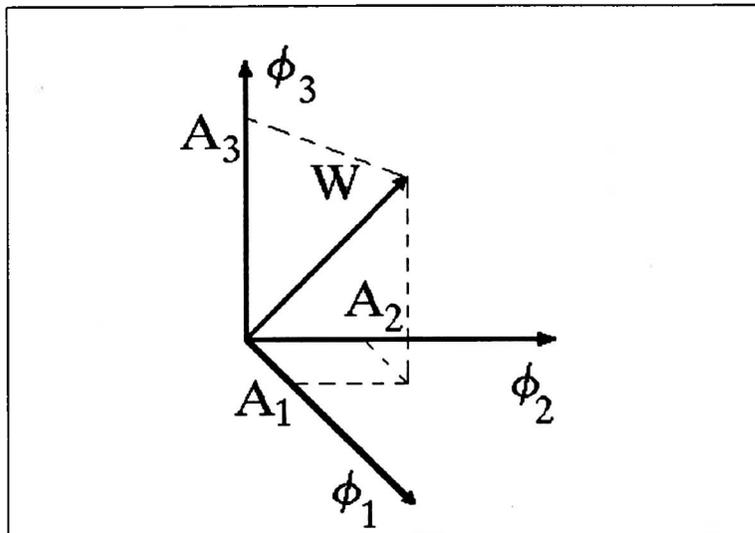


Figura 4.2 El espacio vectorial al que pertenece  $W(s)$  es representado como  $\mathbb{R}^3$ . Las funciones base son los versores coordenados  $A_i$ .

Si  $W(s)$  es la función solución buscada, al proyectar la (4.3.3) sobre cada uno de los versores de la base resulta:

$$\langle [\mathcal{L}-\omega^2]W, \phi_j \rangle = 0 \quad j=1,2,\dots,\infty \quad (4.3.8)$$

Como se ve el problema originalmente planteado como EDDP se ha transformado en otro consistente en un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

- se reemplaza la función incógnita  $W$  por una función aproximada  $W^*$  dada por:

$$W^* = \sum_{j=1}^J A_j \phi_j \quad (4.3.9)$$

Al haber restringido la dimensión del espacio a un valor finito, ya no será posible, en general, que se satisfaga la ecuación diferencial. En efecto al reemplazar la función  $W^*$  en (4.3.3) se obtendrá un residuo o error:

$$\mathcal{L}[W^*] - \omega^2 W^* = \epsilon(s) \quad (4.3.10)$$

• El criterio de Galerkin consiste en exigir que el residuo  $\epsilon$  sea ortogonal al espacio de dimensión finita adoptado (ver Figura 4.3), es decir:

$$\langle \epsilon(s), \phi_j \rangle = \langle \mathcal{L}[W^*] - \omega^2 W^*, \phi_j \rangle = 0 \quad j=1,2,\dots,J \quad (4.3.11)$$

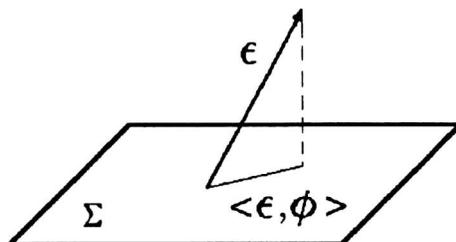


Figura 4.3. En el método de Galerkin se pide ortogonalidad entre el error  $\epsilon$  y el espacio de dimensión finita  $\Sigma$ . Luego  $\langle \epsilon, \phi \rangle$  será nulo.

El sistema de ecuaciones (4.3.11) tiene como incógnitas los coeficientes  $A_j$  y puede escribirse en la forma matricial:

$$C_{ij}A_j = \omega^2 A_j \quad (4.3.12)$$

donde la matriz  $C$  está dada por sus elementos:

$$C_{ij} = \langle \mathcal{L}[\phi_i], \phi_j \rangle \quad (4.3.13)$$

En aquellos problemas en que existe el funcional de Dirichlet el sistema de ecuaciones al cual se arriba por ambos métodos es idéntico [Finlayson et al 66]. Al igual que en todos los métodos en que se limita la dimensión del espacio, es necesario efectuar un análisis de convergencia. Desde el punto de vista estrictamente matemático la convergencia hacia una función no garantiza sin embargo que esa función sea la solución buscada. Sin embargo desde el punto de vista práctico sí lo es pues puede afirmarse que coincide con ella, a menos de un conjunto de puntos de medida nula [Courant et al 89].

#### 4.4 Otros métodos de residuos ponderados

Bajo el nombre de *método de los residuos ponderados* se agrupa un

conjunto amplio de métodos aproximados entre los que el método de Galerkin desarrollado arriba es el caso particular más importante. Constituyen una herramienta de la ingeniería para encontrar soluciones aproximadas a las ecuaciones de los medios continuos. En el caso de los problemas de vibraciones este método es apto tanto para su aplicación en ecuaciones lineales como a las no lineales y se lo emplea para obtener las soluciones a problemas de contorno y de valor inicial.

Sea  $W^*$  la solución aproximada obtenida mediante reducción de la dimensión a un valor finito  $J$ . A diferencia del método de Galerkin, en el método general de los residuos ponderados se admite que la solución no satisfaga ni las condiciones de contorno ni la ecuación diferencial. Es decir que al ensayar la solución aproximada resulta en general:

$$\begin{cases} R[W^*] = (\mathcal{L} - \omega^2)[W^*] \\ R_0[W^*] = \mathcal{B}[W^*] \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde  $R[W^*]$  y  $R_0[W^*]$  se denominan *residuos*. Se exige que ambos residuos sean ortogonales al espacio de dimensión finita utilizado para la aproximación:

$$\begin{cases} \langle R, u_j \rangle = 0 \\ \langle R_0, w_j \rangle = 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, J) \quad (4.4.2)$$

En la (4.4.2) el producto interno puede ser el dado por (4.4.4) pero en ocasiones se utilizan otros (ver métodos mixtos más adelante). Las funciones  $u_j$  y  $w_j$ , denominadas funciones de peso, pueden elegirse con diferentes criterios. Según cuál sea la elección que se haga de ellas resultan métodos que, hasta la unificación realizada por Crandall [Crandall 56], fueron desarrollados por diferentes investigadores bajo denominaciones diversas. Los más importantes son [Finlayson et al 66]:

- Método de Galerkin: visto como caso particular de residuos ponderados, es aquél en que las funciones de peso son las propias funciones de la

base empleada para la aproximación. Dado que se las ha escogido de modo que satisfagan las condiciones de contorno el residuo  $R_0$  resulta ser nulo y la segunda ecuación (4.4.2) es innecesaria. A posteriori se desarrollaron muchas técnicas similares bajo la denominación de método de Galerkin generalizado consistentes en: (i) reemplazar los coeficientes  $A_j$  por funciones  $q_j(t)$  para los problemas dependientes del tiempo; (ii) la solución aproximada es de la forma más general  $W^* = W^*(\vec{r}, \{c_j\})$  con funciones de peso  $u_j = \partial W^* / \partial c_j$ ; (iii) las funciones de peso son de la forma  $K[u_j]$  en lugar de ser  $u_j$ , donde  $K$  es un operador diferencial.

- Método de los momentos: es similar al de Galerkin excepto que los residuos se hacen ortogonales a los miembros de un sistema de funciones diferente que el conjunto de funciones de base. Ambos métodos, se designan a veces como métodos de ortogonalización.
- Método de colocación: adopta como funciones de peso funciones delta de Dirac:

$$u_j = \delta(\vec{r}_j - \vec{r}) \quad (4.4.3)$$

La ED resulta entonces satisfecha en forma exacta en los  $J$  puntos de colocación  $\vec{r}_j$ . A medida que se incrementa la dimensión  $J$  del espacio aproximando, la condición de anulación de los residuos se satisface en mayor número de puntos y la función aproximada  $W^*$  tiende hacia la solución del problema para todo el dominio  $\Omega$ .

- Método de los subdominios: las funciones de peso son del tipo "escalón unitario de Heaviside", dentro de subdominios  $\Omega_j$ :

$$u_j = \begin{cases} 1 & \forall \vec{r} \in \Omega_j \\ 0 & \forall \vec{r} \notin \Omega_j \end{cases} \quad (4.4.4)$$

esto significa que la ecuación diferencial es satisfecha "en promedio" en cada uno de los  $N$  subdominios  $\Omega_j$ . Si los  $\Omega_j$  son disjuntos (aunque no es necesario) el tamaño de los subdominios disminuye al incremen-

tarse la dimensión  $J$  del espacio aproximante, con el resultado que la ecuación diferencial se satisface en promedio en regiones más y más pequeñas y el residuo tiende a cero en todo el dominio  $\Omega$ .

- Método de mínimos cuadrados: las funciones de peso son:

$$u_j = \frac{\partial R}{\partial A_j} \quad (4.4.5)$$

y el valor cuadrático medio del residuo en el dominio  $\Omega$ , se minimiza con respecto a las constantes  $A_j$ .

- Método de Kantorovich: el método se desarrolló originalmente para problemas de geometría bidimensional (placas, membranas, etc). Se exige que el residuo se anule a lo largo de una curva contenida en el dominio. Una variante, aplicable cuando es posible aplicar separación entre las variables espaciales, consiste en escribir la solución como el producto de una función espacial que se adopta a priori en tanto que la otra función debe satisfacer exactamente la ecuación diferencial resultante.

- Métodos de contorno: [Collatz 60]

A la inversa del método de Galerkin, aquí se utilizan funciones aproximadas  $W^*$  que satisfacen la ED pero no las condiciones de contorno. El requisito exigido al residuo  $R_0$  es:

$$\langle u_j, R_0[W^*] \rangle = 0 \quad (4.4.6)$$

pero con el producto interno definido como sigue:

$$\langle u_j, v \rangle = \int_{\Gamma} u_j v d\Gamma \quad (4.4.7)$$

donde  $\Gamma$  es la frontera del dominio  $\Omega$ .

- Métodos mixtos:

Se trata de una solución intermedia en la que la solución aproximada

no satisface ni la ED ni las condiciones de contorno. Es decir ambos residuos son no nulos. Existen distintas variantes para estos métodos: puede exigirse ortogonalidad de  $R[W^*]$  respecto de un conjunto de funciones de peso, usando (4.4.4) como producto interno y, simultáneamente, ortogonalidad respecto de otro conjunto de funciones de peso, usando una integral de superficie como la (4.4.7) para el producto interno. Si se emplean  $J$  funciones de peso para cada caso, se obtiene  $2J$  condiciones. Sin embargo sólo  $J$  condiciones pueden ser satisfechas por las  $J$  constantes independientes de la función de prueba. Para que el procedimiento sea aplicable se deben descartar las condiciones sobrantes [*Snyder et al 64*]. Otra variante es combinar en una única ecuación los dos residuos (4.4.1) de tal modo que al integrar por partes el residuo  $R[W^*]$  se obtenga un término de contorno que anule exactamente al residuo  $R_0[W^*]$ . Esta metodología sólo puede aplicarse para determinadas condiciones de contorno.

En las aplicaciones presentadas en este trabajo se utilizarán los métodos de Rayleigh-Ritz, Galerkin y Kantorovich.

## Capítulo 5

### Sistemas de dimensión infinita (II)

#### 5.0. Introducción

En este capítulo se presentan aplicaciones de los métodos variacionales semianalíticos al caso de las oscilaciones de sistemas lineales de infinitos grados de libertad. Se han seleccionado sólo unos pocos de entre todos los casos investigados. Se remite a la bibliografía para los resultados de una veintena de casos que se han investigado para evaluar la validez, precisión y confiabilidad de los distintos métodos, con vistas a su posterior aplicación a problemas no lineales que se efectúa en el capítulo 6 [Larrondo et al 92, 93, 94, 95, 96c, 97a].

En cada caso se presenta ya sea un método diferente o bien la aplicación a configuraciones de diferente geometría. Se reportan resultados en placas circulares de espesor variable [Avalos et al 88, Laura et al 91, 95], ortótropas [Larrondo et al 93, Avalos et al 97], forzadas senoidalmente [Avalos et al 90], placas anulares [Larrondo et al 94, Bhat et al 95, Avalos et al 96], rectangulares [Avalos et al 87, 89], con masas acopladas [Avalos et al 93, 94], con orificios [Sonzogni et al 96] y con fundación [Larrondo et al 95, 96c, 97a]. Se calculan diferentes magnitudes de interés: frecuencias naturales de vibración, formas modales libres y forzadas, momentos flectores, coeficientes de pandeo, etc. De hecho, en el problema lineal, una vez conocida la forma modal aproximada y las frecuencias naturales de vibración, es posible determinar las restantes magnitudes de interés.

Se han incluido casos en que existe un acoplamiento de tipo elástico entre el sistema infinito dimensional y otro de dimensión finita. El tipo de sistema estudiado corresponde a un problema usual en la ingeniería, que es el de modelar una estructura en la que están montadas maquinarias [Magrab 79, Larrondo et al 93, Rossi et al 93, Avalos et al 97]. En aquellos casos en que el elemento estructural presenta frecuencias naturales degeneradas, como ocurre por ejemplo para la placa rectangular,

esa degeneración se remueve a causa del acoplamiento con el sistema masa resorte, en forma totalmente análoga al desdoblamiento que se produce, por ejemplo, entre dos péndulos de igual frecuencia natural acoplados [Goldstein 80] ó cuando un átomo se acopla a un campo eléctrico externo [Merzbacher 70].

## 5.1. Aplicaciones de los métodos variacionales

### a) Determinación de las frecuencias naturales para modos de vibración axiales para una placa circular de espesor escalonado por el método de Rayleigh-Ritz optimizado.

El comportamiento dinámico de placas circulares con espesor escalonado en regiones circulares concéntricas es de interés en el diseño de sistemas acústicos, dado la aplicación de estos elementos estructurales en transductores de alta frecuencia. Esos sistemas presentan modos de vibración alternativamente simétricos y antisimétricos. La Figura 5.1 muestra el caso de una placa donde el sobreespesor está ubicado en la región central. La placa está soportada en sus bordes por vínculos elásticos, tanto a la traslación como a la rotación. La EDDP que gobierna la dinámica es [Love 27, Laura 73, Shabana 91]:

$$D(x) \nabla^4 \xi + \rho(x) h(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1.1)$$

que corresponde al modelo de Lagrange-Sophie Germaine con el agregado de una variación espacial de las propiedades del material. La solución analítica podría obtenerse resolviendo la ecuación lineal a coeficientes constantes por tramos mediante el método de separación de variables y pegando las soluciones en la forma standard. Dado que las discontinuidades en los coeficientes son finitas la solución es  $C^3$ . Las condiciones de contorno son:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=a} = +\phi M_r |_{r=a} \quad (5.1.2a)$$

$$W|_{r=a} = - \left( \frac{V_r}{K} \right)_{r=a} \quad (5.1.2b)$$

donde  $V_r$  es el esfuerzo de corte dado por la fórmula de Kirchoff:

$$V_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r}$$

en tanto que los momentos tienen las siguientes expresiones:

$$M_r = - D_1 \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu_1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

$$M_\theta = - D_1 \left[ \mu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{1}{r^2} \right]$$

$$M_{r\theta} = - D_1 (1 - \mu_1) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$

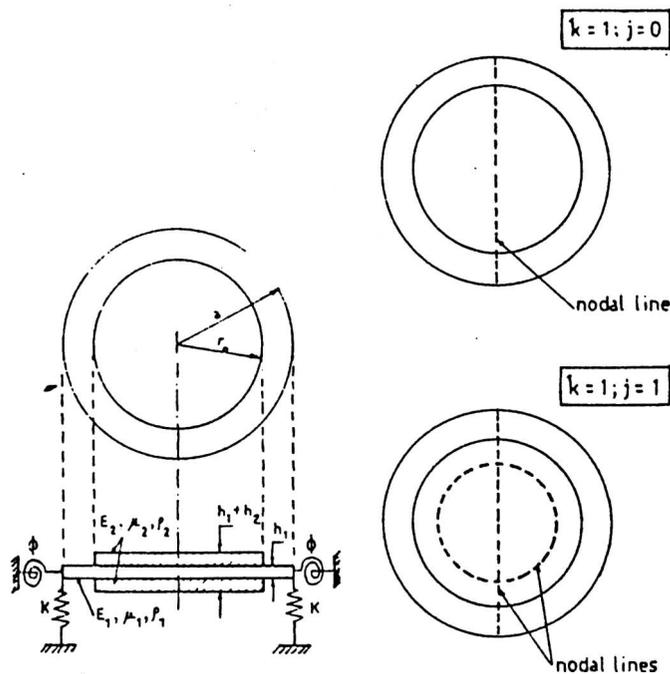


Figura 5.1 Placa circular escalonada. A la derecha se indican dos modos normales de vibración

El primer paso en la solución es la separación entre las variables espaciales y el tiempo. Dado que interesa la respuesta estacionaria se ensaya la solución:

$$w(r,\theta,t) = W(r,\theta) e^{i\omega t} \quad (5.1.3)$$

donde  $W(r,\theta)$  es la *forma modal* y es función únicamente de las variables espaciales en tanto que la evolución temporal es senoidal. Una aproximación conveniente a la forma modal  $k$  para este problema es [Avalos et al 87]:

$$W^{(k)}(r,\theta) \cong W_a^{(k)}(r,\theta) = \cos k\theta \sum_{j=0}^J A_j^{(k)} \left[ \alpha_{jk} \left(\frac{r}{a}\right)^\gamma + \beta_{jk} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{r}{a}\right)^{j+k} \quad (5.1.4)$$

donde los  $\alpha_{jk}$ 's y los  $\beta_{jk}$ 's son determinados sustituyendo cada función coordenada en las condiciones de contorno (5.1.2),  $\phi$  es la flexibilidad del resorte rotacional del contorno, definido por la relación constitutiva (5.1.2a),  $K$  es la constante del resorte traslacional del contorno, el coeficiente de rigidez a la flexión de la base es  $D_1 = E_1 h_1^3 / [12(1-\mu_1^2)]$  y  $\gamma$  es un parámetro de optimización. Sustituyendo la expresión (5.1.4) en (5.1.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} a_{11} + \beta_{jk} a_{12} &= b_1 \\ \alpha_{jk} a_{21} + \beta_{jk} a_{22} &= b_2 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

con:

$$a_{11} = (j+k+\gamma) \frac{a}{\phi D_1} + (j+k+\gamma)(j+k+\gamma+1) + \mu_1(j+k+\gamma-k^2)$$

$$a_{12}[(j+k+2) \frac{a}{\phi D_1} + (j+k+2)(j+k+1) + \mu_1(j+k+2-k^2)]$$

$$b_1 = - [(j+k)(j+k-1) + \mu_1(j+k-k^2)] - \frac{a}{\phi D_1} (j+k)$$

$$a_{21} = \frac{Ka^3}{D_1} - (j+k+\gamma)^2(j+k+\gamma-2) + k^2(j+k+\gamma-2) + k^2(1-\mu_1)(j+k+\gamma-1)$$

$$a_{22} = \frac{Ka^3}{D_1} - (j+k+2)^2(j+k) + k^2(j+k) + k^2(1-\mu_1)(j+k+1)$$

$$b_2 = (j+k)^2 (j+k-2) - k^2(j+k-2) - k^2(1-\mu_1)(j+k-1) - \frac{Ka^3}{D_1}$$

La solución del sistema (5.1.5) es,

$$\alpha_{jk} = \frac{A(j,k)}{\Delta}, \beta_{jk} = \frac{B(j,k)}{\Delta}$$

donde:

$$\begin{aligned} B(j,k) &= a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \\ A(j,k) &= a_{22} b_1 - a_{12} b_2 \\ \Delta &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

El caso axisimétrico corresponde a  $k = 0$  en la (5.1.4). Para este caso se adopta una versión modificada de (5.1.4) en la que se reemplaza  $j$  por  $2j$ . El sistema se resuelve por el método de Rayleigh-Ritz optimizado. Se construye el funcional  $J[W] =$  máxima energía potencial ( $U_{m\acute{a}x}$ ) - máxima energía cinética ( $T_{m\acute{a}x}$ ). La energía potencial está dada por:

$$U_{m\acute{a}x} = U_{p1} + U_{p2} + U_b \quad (5.1.7)$$

donde

$$U_{p1} = \frac{D_1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 R \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right]^2 - 2(1-\mu_1) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} dR$$

es la energía potencial elástica de la placa base,

$$U_{p2} = \frac{D_2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\eta R \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right]^2 \right\}$$

$$-2(1-\mu_2) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial R} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] dR$$

es la energía potencial elástica del sobreespesor, y

$$U_b = \frac{D_1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \frac{a}{\phi D_1} \left( \frac{\partial W}{\partial R} \right)_{R=1}^2 + \frac{Ka^3}{D_1} (W)_{R=1}^2 \right]$$

es la energía elástica almacenada en los vínculos. Por su parte la energía cinética  $T_{\text{máx}}$  está dada por:

$$T_{\text{máx}} = \Omega^2 \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 R W^2 dR + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\eta R W^2 dR \right]$$

En las ecuaciones anteriores  $\rho$  es la densidad del material,  $h$  es el espesor,  $\mu$  es el módulo de Poisson,  $E$  es el módulo de Young. Los subíndices indican la placa base (1) o el sobreespesor (2). Se han utilizado los radios adimensionales  $R = r/a$ ,  $\eta = r_0/a$  y se definen dos coeficientes de rigidez a la flexión  $D_1$  y  $D_2$  dados por:

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\mu_1^2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 (h_1 + h_2)^3}{12(1-\mu_2^2)} - \frac{E_2 h_1^3}{12(1-\mu_2^2)}$$

Aemás  $\Omega^2 = \rho_1 h_1 \omega^2 a^4 / D_1$  es la frecuencia natural adimensional.

La forma modal aproximada  $W_a(R, \theta)$  puede ser expresada en forma más conveniente:

$$W_a^{(k)}(R, \theta) = \cos k\theta \sum_{j=0}^J \sum_{n=1}^3 A_j^{(k)} C_{nj}^{(k)} R^{j+k+\gamma_n} \quad (5.1.8)$$

donde las componentes  $\gamma_n$  del vector  $\vec{\gamma}$  están dadas por:

$$\vec{\gamma} = (0, 2, \gamma) \quad (5.1.9)$$

en tanto que los coeficientes  $C_{nj}^{(k)}$ , elementos de la matriz  $C^{(k)}$  están dados por:

$$C^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{1k} \dots \alpha_{Jk} \\ \beta_{1k} \dots \beta_{Jk} \end{bmatrix} \quad (5.1.10)$$

Sustituyendo en  $J[W]$  resulta finalmente:

$$\begin{aligned} J[W_a^{(k)}] &= \frac{\pi D_1}{2} \sum_{i=0}^J \sum_{m=1}^3 \sum_{j=0}^J \sum_{n=1}^3 A_i^{(k)} A_j^{(k)} C_{mi}^{(k)} C_{nj}^{(k)} \\ &\times \left\{ \frac{[(i+j+\gamma_m)^2 - k^2] [(j+k+\gamma_n)^2 - k^2]}{i + j + 2k + \gamma_m + \gamma_n - 2} \left[ 1 + \frac{D_2}{D_1} \eta^{-2+i+j+2k+\gamma_m+\gamma_n} \right] \right. \\ &- 2 (1-\mu_1) \frac{(i+k+\gamma_m-1) [(j+k+\gamma_n-k^2) (i+k+\gamma_m) - k^2(j+k+\gamma_n-1)]}{i + j + 2k + \gamma_m + \gamma_n - 2} \quad (5.1.11) \\ &\times \left[ 1 + \frac{D_2}{D_1} \frac{1-\mu_2}{1-\mu_1} \eta^{-2+i+j+2k+\gamma_m+\gamma_n} \right] + (i+k+\gamma_m) (j+k+\gamma_n) \frac{a}{\phi D_1} + \frac{Ka^3}{D_1} \\ &- \Omega^2 \frac{\left[ 1 + (\rho_2 h_2 / \rho_1 h_1) \eta^{+2+i+j+2k+\gamma_m+\gamma_n} \right]}{i + j + 2k + \gamma_m + \gamma_n + 2} \end{aligned}$$

Finalmente se minimiza el funcional respecto de las  $A_j$ :

$$\frac{\partial J[W_a^{(k)}]}{\partial A_j^{(k)}} = 0 \quad (j = 0, \dots, J) \quad (5.1.12)$$

El sistema de ecuaciones resultante es homogéneo de modo que una solución no trivial implica la nulidad del determinante. Las raíces de la

ecuación característica,  $\Omega_j^{(k)}$  constituyen límites superiores de las verdaderas frecuencias naturales. Por ello la optimización consiste en minimizar los  $\Omega_j^{(k)}$  aplicando la condición de optimización respecto del parámetro de ajuste  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \Omega_{kj}}{\partial \gamma} \quad (5.1.13)$$

La tabla 5.I muestra valores correspondientes a los *coeficientes de frecuencia naturales*  $\Omega_0^{(k)}$  para la placa plana ( $h_2/h_1 = 0$ ), correspondientes al modo fundamental axisimétrico y a los modos fundamentales antisimétricos con 1, 2 y 3 líneas nodales radiales respectivamente. La segunda columna de la tabla corresponde al cálculo exacto de esas mismas frecuencias efectuado mediante la solución analítica de la EDDP. El cálculo ha sido realizado con  $J = 3$  que es un valor muy modesto, no obstante lo cual se observa un excelente acuerdo en la comparación.

En la tabla 5.II se transcriben los resultados de las evaluaciones numéricas realizadas para los modos de vibración naturales antisimétricos en el caso de placas con sobreespesor. Se han efectuado los cálculos con  $E_1 = E_2$ ;  $\rho_1 = \rho_2$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$ ;  $\eta = 0.5$  y  $h_2/h_1 = 0.5$  y 1. También se adoptó  $J = 3$  de modo que es esperable que el error sea mayor para los modos superiores. En cada uno de los casos se transcriben cuatro resultados, que corresponden a 1, 2, 3 y 4 líneas nodales circulares concéntricas respectivamente (ver Figura 5.1).

Una ventaja inherente a la aproximación de Rayleigh-Ritz optimizada es el hecho que el procedimiento algorítmico puede ser implementado con recursos computacionales modestos (cuando se los compara con los requeridos para otros métodos aproximados como el de Elementos Finitos). Otra ventaja es el hecho que el coeficiente de Poisson aparece como parámetro explícito, en tanto que en las soluciones analíticas lo hace en una ecuación de frecuencia trascendente. La función de prueba adoptada es útil también en otros casos con simetría cilíndrica, tales como en placas anulares con y sin sobreespesor, en placas circulares con varios sobreespesores, etc.

TABLA 5.1. COMPARACION ENTRE LOS VALORES DE  $\Omega_0^{(k)}$ , PARA EL CASO DE LA PLACA PLANA ( $h_2/h_1=0$ ). LA SOLUCION EXACTA CORRESPONDE A *Leissa 69*

	$k \backslash \Omega_{k0}$	Present study	Exact results (Ref. 6)
Rigidly clamped	0	10.215	10.2158
	1	21.260	21.26
	2	34.877	34.88
	3	51.030	51.04
Simply supported	0	4.935	4.977
	1	13.898	13.94
	2	25.613	25.65
	3	39.957	...

**b) Vibraciones axisimétricas en placas circulares aeolotrópicas con masas concentradas.**

El mismo método del caso anterior puede utilizarse para estudiar casos mucho más complejos incluso no isótropos. Un caso particular corresponde a las placas aeolotrópicas [*Love 27, Larrondo et al. 93, Avalos et al 97*]. Se plantea a continuación un caso general sometido a presión hidrostática en el plato P (ver Figura 5.2). El espesor de la placa varía en la dirección radial en forma lineal según la expresión:

$$h(r) = h_0(1 + \alpha \frac{r}{a}) = h_0 H(r) \quad (5.1.14)$$

Para una placa aeolotrópica los coeficientes de rigidez a la flexión en las direcciones radial y angular son:

$$D_r(r) = \frac{E_r h_0^3 H^3(r)}{12(1-\mu_r\mu_\theta)} = D_{r_0} H^3(r) \quad (5.1.15)$$

$$D_{\theta}(r) = \frac{E_{\theta} h_0^3 H^3(r)}{12(1-\mu_r\mu_{\theta})} = D_{\theta 0} H^3(r)$$

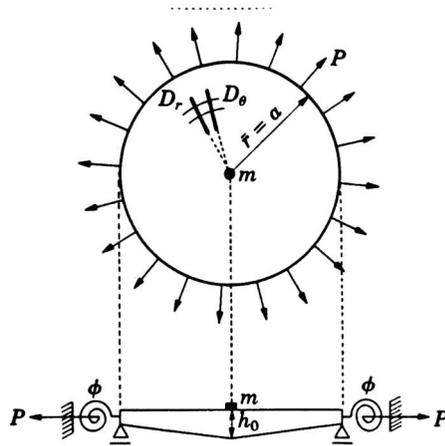


Figura 5.2. Plato circular ortótropo de espesor linealmente variable, con masa concentrada en el centro

Utilizando la variable adimensional  $R=r/a$  el funcional resulta en este caso:

$$J[W] = U_p + U_b + U_l - T_p - T_m \quad (5.1.16)$$

donde nuevamente las  $U$  son las energías potenciales correspondientes a la deformación de la placa, a los vínculos y a la carga hidrostática respectivamente en tanto que las  $T$  son las energías cinéticas de la placa y de la masa concentrada respectivamente. Las expresiones correspondientes a cada una de ellas, para el caso axisimétrico bajo estudio, son:

$$U_p = \left[ \frac{\pi D_{r0} h_0^2}{a^2} \right] \int_0^1 \left\{ H^3 \left[ \left( \frac{d^2W}{dR^2} \right)^2 R + \frac{k^2}{R} \left( \frac{dW}{dR} \right)^2 + 2\mu_{\theta 0} \frac{d^2W}{dR^2} \frac{dW}{dR} \right] \right\} dR$$

TABLA 5.II VALORES DE  $\Omega_j^{(k)}$  EN EL CASO DE UNA PLACA CON SOBRESPESESOR. (a)

CASO  $k=1; j=0,1,2,3$ . (b) CASO  $k=2; j=0,1,2,3$ . (c) CASO  $k=3; j=0,1,2,3$ .

	$a/\phi D_1$				$a/\phi D_1$						
	$ka^3/D_1$	$\infty$	8	1	0	$ka^3/D_1$	$\infty$	8	1	0	
(a)	$\frac{h_2}{h_1} = 0.5$	$\infty$	24.02	20.15	16.55	15.40	$\infty$	25.88	21.42	17.52	16.32
			74.71	66.06	61.16	60.01		90.30	79.14	73.10	71.73
			152.3	135.6	129.0	127.7		177.8	158.2	151.1	149.8
		304.7	279.8	273.1	271.9	380.5	352.2	345.5	344.4		
		32	9.616	9.582	9.522	9.492	9.586	9.565	9.528	9.510	
			35.50	32.94	29.48	28.08	40.40	37.05	32.78	31.12	
	89.66		82.96	76.55	74.60	107.8	99.82	92.66	90.60		
	$\frac{h_2}{h_1} = 1.0$	1	221.5	208.8	202.3	201.2	293.1	277.7	270.6	269.7	
			3.580	3.261	2.518	1.959	3.603	3.262	2.493	1.931	
			34.25	31.01	26.43	24.51	39.10	35.03	29.64	27.50	
		89.28	82.29	75.66	73.66	107.5	99.25	91.92	89.82		
		221.4	208.7	202.5	201.7	293.1	277.8	271.1	270.4		
0		3.164	2.754	1.673	0	3.199	2.766	1.660	0		
34.21	30.95	26.33	24.40	39.06	34.96	29.55	27.39				
89.27	82.27	75.63	73.63	107.5	99.23	91.89	89.80				
221.4	208.7	202.5	201.7	293.1	277.8	271.1	270.5				
(b)	$\frac{h_2}{h_1} = 0.5$	$\infty$	39.20	33.85	29.82	28.71	$\infty$	43.42	37.57	33.39	32.26
			103.1	91.34	85.70	84.48		122.2	106.7	99.42	97.86
			195.6	176.1	169.3	168.0		229.1	207.0	199.9	198.6
		337.9	308.3	300.5	299.2	407.5	374.6	366.9	365.6		
		32	15.00	14.83	14.57	14.46	17.02	16.73	16.32	16.14	
			52.66	48.54	43.80	42.11	58.37	53.50	48.14	46.30	
	122.8		113.6	105.9	103.8	146.1	134.4	125.4	123.0		
	237.0	222.2	213.9	212.2	299.6	283.2	275.8	274.6			
	$\frac{h_2}{h_1} = 1.0$	1	10.76	9.867	8.308	7.492	13.19	12.16	10.45	9.610	
			51.85	47.26	41.93	40.03	57.58	52.25	46.37	44.36	
			122.5	113.0	105.2	103.0	145.8	133.9	124.8	122.4	
		236.8	222.0	213.7	212.0	299.5	283.1	275.9	274.7		
0		10.59	9.648	7.990	7.106	13.04	11.97	10.18	9.290		
51.82		47.22	41.87	39.97	57.56	52.21	46.32	44.30			
122.4	113.0	105.2	103.0	145.8	133.9	124.8	122.3				
236.8	222.0	213.7	212.0	299.5	283.1	275.9	274.7				
(c)	$\frac{h_2}{h_1} = 0.5$	$\infty$	57.71	50.57	46.05	44.91	$\infty$	65.34	57.14	52.16	50.93
			131.5	117.2	111.3	110.1		150.7	133.5	126.9	125.6
			243.1	221.8	213.9	212.5		286.1	258.4	250.2	248.7
		395.6	359.7	350.8	349.3	466.7	427.8	419.2	417.7		
		32	22.36	21.53	20.49	20.08	24.92	23.80	22.44	21.92	
			73.66	68.30	62.98	61.26	82.94	76.53	70.44	68.55	
	156.3		144.6	136.0	133.8	181.0	166.1	156.1	153.5		
	275.8	258.7	249.5	247.5	339.8	320.0	310.8	309.1			
	$\frac{h_2}{h_1} = 1$	1	19.15	17.50	15.22	14.26	21.85	19.88	17.28	16.21	
			73.11	67.41	61.73	59.88	82.41	75.67	69.27	67.29	
			156.1	144.1	135.4	133.2	180.7	165.7	155.5	153.0	
		275.7	258.5	249.3	247.4	339.7	319.8	310.7	309.0		
0		19.04	17.35	15.01	14.03	21.74	19.73	17.07	15.98		
73.09		67.38	61.69	59.84	82.40	75.64	69.23	67.25			
156.1	144.1	135.4	133.1	180.7	165.7	155.5	152.9				
275.7	258.5	249.3	247.3	339.7	319.8	310.7	309.0				

$$U_b = \frac{\pi h_0^2}{\phi a} \left( \frac{dW}{dr} \right)_{R=1}^2$$

$$U_p = \left[ \frac{\pi N D_{r_0} h_0^2}{(1+\alpha) a^2} \right] \int_0^1 H R^k \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 dR$$

$$T_p = \pi \Omega^2 D_{r_0} \frac{h_0^2}{a^2} \int_0^1 H W^2 R dR$$

$$T_m = \frac{1}{2} M (1+2\alpha/3) \pi \Omega^2 D_{r_0} (h_0^2/a^2) W_{R=0}^2$$

Los parámetros adimensionales empleados son:

$$N = Pa^2/D_{r_0}, \quad k^2 = D_{\theta_0}/D_{r_0}, \quad \Omega^2 = \rho \omega^2 a^4 h_0 / D_{r_0}, \quad M = m/m_p$$

con  $m_p$  la masa total de la placa, dada por  $\pi \rho h_0 a^2 (1+2\alpha/3)$ . Nótese que ahora  $k$  es un coeficiente de ortotropía y no tiene nada que ver con el definido anteriormente para los modos antisimétricos.

La forma modal aproximada para los modos axisimétricos está dada por:

$$W(R) \cong W_a(R) = \sum_{j=0}^J A_j (\alpha_j R^\gamma + \beta_j R^2 + 1) R^{2j} \quad (5.1.17)$$

donde nuevamente los  $\alpha_j$ 's y los  $\beta_j$ 's se determinan exigiendo que cada función coordenada satisfaga las condiciones de contorno que en este caso resultan:

$$W(1) = 0, \quad \left( \frac{dW}{dR} \right)_{R=1} = - \left[ \frac{(1+\alpha)^3}{a/\phi D_{r_0}} \right] \left[ \frac{d^2W}{dR^2} + \frac{\mu_\theta}{R} \frac{dW}{dR} \right]_{R=1} \quad (5.1.18)$$

Las Tablas 5.IIIa y b muestran la comparación entre nuestros cálculos y los obtenidos por otros autores. La referencia [1] de la tabla

corresponde a [Gunaratnam et al 89] en tanto que la [2] corresponde a [Leissa 69]. Estos resultados corresponden a placas planas, sin presión externa y sin masa acoplada, con diferentes coeficientes de ortotropía. A excepción del caso  $k = 0$  para el que se obtienen valores 3% más elevados que en [Gunaratnam et al 89] el acuerdo es muy bueno. Desde el punto de vista ingenieril esta diferencia resulta aceptable. Nuestros resultados en estas dos tablas se han obtenido con  $J=10$ .

TABLA 5.III. COMPARACION ENTRE LOS VALORES DE  $\Omega_{00}$  OBTENIDOS POR VARIOS MÉTODOS. [1] Gunaratnam et al 89; [2] Leissa 69; [3] Laura et al 81. NOTE QUE  $N=0$ ;  $m=0$ ;  $\alpha=0$  Y  $\mu=0.3$ . (a) CASO EMPOTRADO  $a/\phi D r_0 = \infty$ . (b)  $a/\phi D r_0 = 10$ .

$k$	$\Omega_{(n)}$			Present work
	Exact values [2]	Ritz method [1]	Series approach [1]	
0.0	7.160	—	7.155	7.339
0.5	8.691	8.758	8.684	8.689
1.0	10.224	10.214	10.214	10.216
1.5	11.761	11.749	11.746	11.750
2.0	13.301	13.283	13.281	13.285
2.5	14.844	14.819	14.818	14.822
3.0	16.390	16.358	16.279	16.361
3.5	17.940	17.900	17.900	17.904
4.0	19.492	19.445	19.445	19.449
4.5	21.047	20.991	20.991	20.995
5.0	22.604	22.539	22.539	22.543

$k$	$\Omega_{00}$			Present work
	Series solution [1]	Ritz method [1]	[3]	
0.0	6.057	—	—	6.207
0.5	7.398	7.457	7.397	7.400
0.75	8.073	8.080	8.073	8.074
1.00	8.752	8.752	—	8.751
1.25	9.434	9.436	9.434	9.435
1.50	10.120	10.123	10.120	10.122
2.00	11.501	11.504	—	11.501
2.50	12.894	12.895	—	12.894
3.00	14.297	14.299	—	14.298
3.50	15.713	15.713	—	15.712
4.00	17.137	17.137	—	17.136
4.50	18.569	18.569	—	18.569
5.00	20.010	20.010	—	20.009

En las Tablas 5.IVa, b y c se presentan valores de coeficientes de

frecuencia del modo fundamental, para  $\alpha=0.5$ , 0 y  $-0.5$  respectivamente y para varias combinaciones de valores de  $k$ ,  $a/\phi D_{r_0}$ ,  $M$  y  $N$  [Larrondo et al 93]. Por su parte en la Tabla 4.V se reportan los coeficientes para modos superiores y para configuraciones correspondientes a una placa simplemente apoyada, con coeficiente de ortotropía 1.5.

El cálculo del coeficiente de pandeo puede realizarse en forma similar al de las frecuencias naturales. En este caso, la placa no tiene energía cinética pues se encuentra en reposo. Por lo tanto desaparecen ambos términos  $T_p$  y  $T_m$  del funcional. El coeficiente  $N$  pasa a ser la variable de interés y el proceso realizado anteriormente para obtener los valores de  $\Omega$  se repite, pero ahora buscando los valores de  $N$  que anulan la ecuación característica que surge al minimizar el funcional. El valor crítico  $N_{crit}$  corresponde precisamente a la minimización del funcional. En la Tabla 5.VI se muestra la comparación con [Gunaratnam et al 89] en el caso de la placa plana sin masa concentrada y para dos condiciones de contorno diferentes. Los cálculos se han efectuado con  $J=10$ . Por último, en la tabla 5.VII se reportan los resultados para varias combinaciones de valores de  $k$ ,  $\alpha$  y  $a/\phi D_{r_0}$ . En vista de la exactitud obtenida en los casos previos es razonable esperar que estos autovalores posean una exactitud aceptable desde el punto de vista de las aplicaciones.

TABLA 5.IV VALORES DE  $\Omega_{00}$ . (a)  $\alpha=0.5$ ; (b)  $\alpha=-0.5$ ; (c)  $\alpha=0$ ; PARA TODOS LOS CASOS  $\mu=0.3$ , Y VARIOS VALORES DE  $k$ ,  $M$ ,  $N$  Y  $a/\phi D_{r_0}$

$k$	$\frac{a}{\phi D_{r_0}}$	$M = 0$			$M = 0.2$			$M = 0.5$		
		$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$	$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$	$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$
0.5	0	—	3.962	8.336	—	2.202	4.609	—	1.536	3.180
	10	—	8.491	11.541	—	4.098	5.691	—	2.786	3.834
	$\infty$	7.350	12.176	15.202	2.943	5.085	6.531	1.951	3.370	4.327
1.0	0	1.286	6.293	9.111	1.291	3.732	5.276	1.350	2.635	3.681
	10	7.812	10.279	12.250	4.207	5.473	6.458	2.903	3.752	4.405
	$\infty$	12.259	14.302	16.063	5.757	6.693	7.492	3.874	4.492	5.016
2.0	0	9.067	10.806	12.279	5.837	6.825	7.621	4.213	4.882	5.410
	10	12.852	13.988	15.028	7.714	8.298	8.820	5.430	5.814	6.154
	$\infty$	17.884	18.726	19.530	9.548	9.925	10.280	6.540	6.785	7.014
3.0	0	14.303	15.311	16.238	9.402	9.952	10.441	6.802	7.162	7.481
	10	17.509	18.224	18.904	10.929	11.284	11.615	7.761	7.989	8.200
	$\infty$	22.759	23.234	23.697	12.937	13.146	13.349	8.965	9.098	9.226

$k$	$\frac{a}{\phi D_{r_0}}$	$M = 0$			$M = 0.2$			$M = 0.5$		
		$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$	$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$	$N = -10$	$N = 0$	$N = 10$
0.5	0	—	2.842	10.836	—	1.882	7.197	—	1.379	5.174
	10	—	5.124	12.425	—	3.063	7.825	—	2.168	5.530
	$\infty$	—	5.284	12.663	—	3.134	7.912	—	2.212	5.578
1.0	0	—	3.550	10.261	—	2.468	6.788	—	1.841	4.894
	10	—	5.961	11.677	—	3.811	7.358	—	2.751	5.226
	$\infty$	—	6.150	11.885	—	3.903	7.435	—	2.810	5.271
2.0	0	—	4.951	9.888	—	3.607	6.808	—	2.747	5.018
	10	—	7.567	11.259	—	5.178	7.463	—	3.830	5.425
	$\infty$	—	7.809	11.460	—	5.309	7.554	—	3.916	5.482
3.0	0	1.992	6.375	10.237	1.716	4.749	7.305	1.456	3.655	5.483
	10	4.993	9.141	11.748	3.654	6.474	8.118	2.795	4.857	6.013
	$\infty$	5.536	9.433	11.976	4.020	6.642	8.236	3.063	4.970	6.088
0.5	0	—	3.453	9.075	—	2.060	5.399	—	1.462	3.773
	10	—	7.400	11.785	—	3.810	6.307	—	2.603	4.302
	$\infty$	—	8.689	13.185	—	4.222	6.676	—	2.856	4.513
1.0	0	—	4.935	9.073	—	3.128	5.555	—	2.255	3.924
	10	—	8.752	11.749	—	4.935	6.564	—	3.432	4.531
	$\infty$	5.828	10.216	13.146	3.139	5.467	6.992	2.175	3.759	4.781
2.0	0	3.727	7.858	10.377	2.600	5.283	6.773	1.948	3.875	4.894
	10	9.527	11.502	13.169	6.013	7.127	8.028	4.316	5.073	5.675
	$\infty$	11.581	13.284	14.783	6.959	7.870	8.645	4.921	5.533	6.047
3.0	0	8.625	10.804	12.523	6.097	7.468	8.486	4.568	5.525	6.218
	10	13.085	14.299	15.395	8.610	9.291	9.888	6.251	6.708	7.104
	$\infty$	15.377	16.361	17.277	9.693	10.217	10.695	6.935	7.284	7.598

TABLA 5.V. COEFICIENTES DE FRECUENCIA  $\Omega_{0j}$  ( $j=0,\dots,4$ ) PARA  $k=1.5$  Y  $\mu=0.3$ .

$\alpha$	$N$	$M = 0$					$M = 0.5$				
		$\Omega_{00}$	$\Omega_{01}$	$\Omega_{02}$	$\Omega_{03}$	$\Omega_{04}$	$\Omega_{00}$	$\Omega_{01}$	$\Omega_{02}$	$\Omega_{03}$	$\Omega_{04}$
0	0	6.396	33.580	80.562	147.380	234.093	3.060	19.042	55.549	112.322	189.457
0	10	9.568	36.843	83.854	150.682	237.428	4.341	21.491	58.498	115.454	192.691
0.5	0	8.557	42.790	101.146	183.428	288.526	3.752	22.212	67.902	137.170	218.684
0.5	10	10.532	44.527	102.843	185.074	289.296	4.474	23.588	69.401	138.548	218.794

TABLA 5.VI. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE PANDEO  $N_{cr}$  POR DISTINTOS MÉTODOS. [1] *Guratnam et al. 89*, [PRESENT WORK] *Larrondo et al. 93*.  $\mu=0.3$ ,  $\alpha=0$ ; (a)  $a/\phi D_{r_0}=0$ ; (b)  $a/\phi D_{r_0}=1$

$k$	[1] Exact solution	[1] Ritz method	Present work
0.5	1.644	1.718	1.645
1.0	4.198	4.198	4.198
0.75	2.775	2.785	2.775
1.25	5.913	5.915	5.916
1.5	7.919	7.923	7.926
2.0	12.808	12.809	12.811
3.0	26.083	26.083	26.083
4.0	44.023	44.023	44.023

$k$	[1] Exact solution	[1] Ritz method	Present work
0.5	2.947	3.064	3.001
0.75	4.502	4.519	4.502
1.0	6.353	6.353	6.353
1.25	8.499	8.502	8.500
1.5	10.937	10.942	10.939
2.0	16.692	16.695	16.692

TABLA 5.VII. COEFICIENTES DE PANDEO PARA  $\mu=0.3$  Y VARIOS VALORES DE  $k$ ,  $a/\phi D_{r_0}$  Y  $\alpha$ .

$k^2$	$\frac{a}{\phi D_{r_0}}$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$
0.5	0	0.964	2.564	5.005
	1	1.882	4.221	6.867
	10	2.348	8.039	15.387
	$\infty$	2.442	9.452	22.708
5	0	3.528	15.474	40.884
	1	6.531	19.762	45.329
	10	9.213	36.966	74.523
	$\infty$	9.728	49.156	135.953

### c) Oscilaciones forzadas senoidalmente

El método de Rayleigh-Ritz optimizado puede extenderse al caso de vibraciones forzadas senoidalmente [*Avalos et al 89, 90*]. Como ejemplo se presenta el caso de interés para el diseño de transductores ultrasónicos [*Gallego Juárez 73*] en el que la carga está distribuida sobre la superficie

de la placa de manera uniforme siendo  $q_0$  la amplitud de la carga por unidad de superficie. El funcional presenta ahora un término adicional y su expresión es:

$$J[W] = U_{\text{máx}} - T_{\text{máx}} - q_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a W r dr \quad (5.1.19)$$

Para los modos axisimétricos puede utilizarse la misma forma modal aproximada que en el caso anterior. Una vez hechas las adimensionalizaciones y reemplazada esta forma modal aproximada el funcional queda expresado en la forma:

$$J[W_a] = \pi D_1 \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J A_i A_j X_{ij} - \pi D_1 Q_0 \sum_{j=0}^J A_j Y_j \quad (5.1.20)$$

donde

$$X_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 C_{mi}^{(0)} C_{nj}^{(0)} Z_{ijmn} \quad Y_j = \sum_{n=1}^3 C_{nj}^{(0)} \frac{2}{\gamma + 2j + 2}$$

La matriz  $Z$  corresponde a la expresión entre llaves de (5.1.11), en la que se efectúan los reemplazos  $k \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow 2i$ ,  $j \rightarrow 2j$  y con el agregado de un término adicional, que surge de la carga senoidal externa y que está dado por:

$$- \frac{4\pi D_1}{2} Q_0 \sum_{j=0}^J \sum_{n=1}^3 \frac{A_j C_{nj}^{(0)}}{\gamma + 2j + 2} \quad (5.1.21)$$

La minimización del funcional conduce ahora a un sistema de ecuaciones para los coeficientes  $A_j$ , cuyo valor puede optimizarse minimizando el funcional con respecto al parámetro  $\gamma$ . Una vez determinados los valores de los  $A_j$ 's puede con ellos obtenerse el desplazamiento y las amplitudes de los momentos de flexión radiales de la placa como función de la frecuencia externa.

La Figura 5.3 muestra la amplitud adimensional del desplazamiento en el centro de la placa para frecuencias de excitación inferiores a la

fundamental de la placa como función de la frecuencia externa. Se trata de una placa empotrada con un sobreespesor que llega hasta la mitad de su radio. Los valores de las dos primeras frecuencias adimensionales se indican en el recuadro de la Figura 5.3. Las expresiones de las magnitudes adimensionales involucradas son las siguientes:

$$W_{ad} = \frac{W(0)}{q_0 a^4 / D_1}; \quad \alpha = \frac{\Omega}{\Omega_{00}} \quad \text{con} \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho_1 h_1}{D_1}} \omega a^2 \quad (5.1.22)$$

en tanto que  $E$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $D$ ,  $a$  tienen el mismo significado que en los casos anteriores. Las tres curvas corresponden a distinta altura del sobreespesor y puede observarse el típico incremento de amplitud de la oscilación cuando la frecuencia externa se aproxima a la frecuencia natural  $\Omega_{00}$  de la placa.

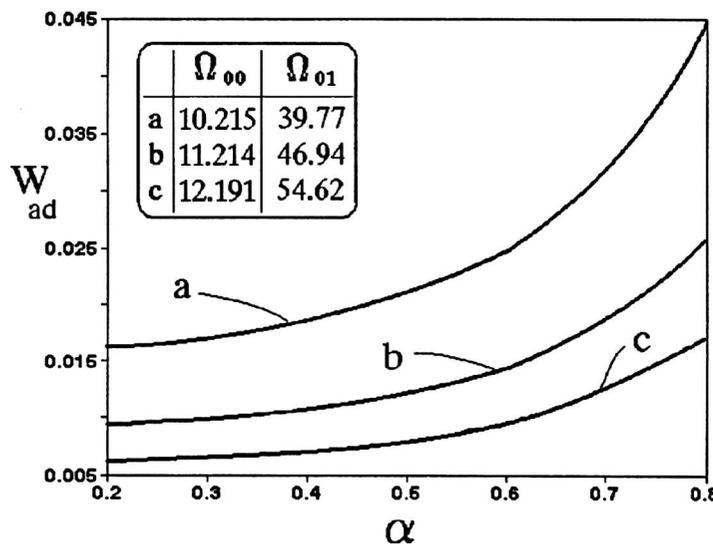


Figura 5.3. Amplitud del desplazamiento adimensional en el centro de la placa empotrada, como función de la frecuencia externa adimensional  $\alpha = \Omega / \Omega_{00}$ . (a)  $h_2/h_1=0$ ; (b)  $h_2/h_1=0.5$ ; (c)  $h_2/h_1=1$

La Figura 5.4 corresponde al caso en que la frecuencia de excitación externa está comprendida entre las dos primeras frecuencias naturales, indicadas en el recuadro. Al igual que en la figura anterior las tres curvas corresponden a tres espesores diferentes. En este caso,

$$\alpha = \frac{\Omega - \Omega_{00}}{\Omega_{01} - \Omega_{00}} \quad (5.1.23)$$

y puede verse como la amplitud de la oscilación en el centro de la placa crece cuando la frecuencia externa se acerca a cualquiera de las dos frecuencias de resonancia del sistema.

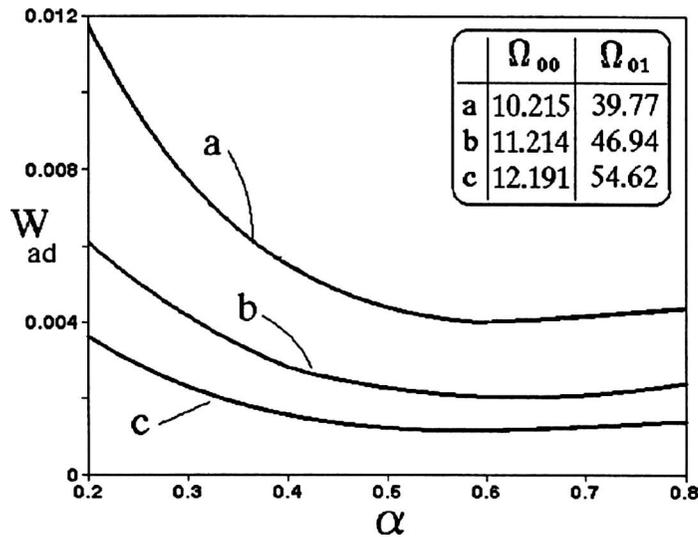


Figura 5.4. Amplitud del desplazamiento adimensional en el centro de la placa empotrada, como función de la frecuencia externa adimensional  $\alpha = (\Omega - \Omega_{00}) / (\Omega_{01} - \Omega_{00})$ . (a)  $h_2/h_1 = 0$ ; (b)  $h_2/h_1 = 0.5$ ; (c)  $h_2/h_1 = 1$

Las Figuras 5.5 y 5.6 muestran el momento flector adimensional en el centro de la placa como función de la frecuencia de excitación adimensional, la primera para el caso de frecuencia de excitación menor que la fundamental y la segunda para una frecuencia comprendida entre  $\Omega_{00}$  y  $\Omega_{01}$ . La placa tiene vínculos elásticos tanto a la traslación como a la rotación caracterizados por las constantes indicadas al pie de las dos figuras. La expresión del momento adimensional es:

$$M_{ad} = \frac{M_r}{q_0 a^2} \quad (5.1.24)$$

donde  $M_r$  es el mismo que en las (5.1.2) y los significados de las constantes son los mismos que en las Figuras 5.3 y 5.4.

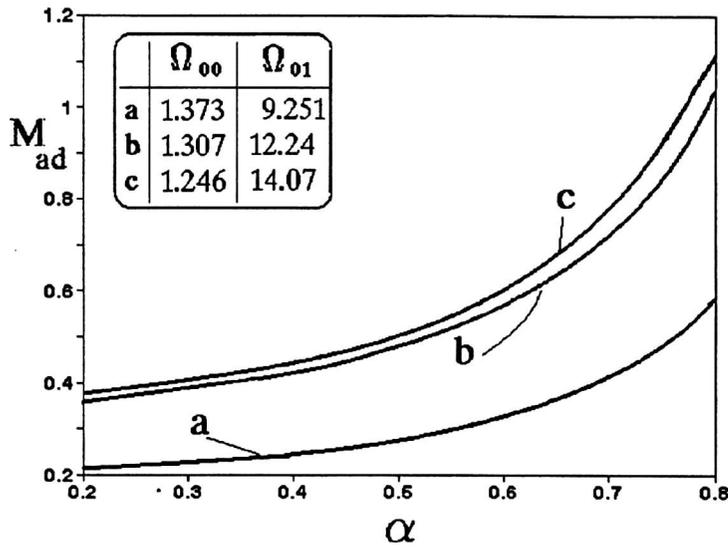


Figura 5.5. Momento flector adimensional en el centro de la placa con sobreespesor empotrada, como función de la frecuencia externa adimensional (a)  $h_2/h_1=0$ ; (b)  $h_2/h_1=0.5$ ; (c)  $h_2/h_1=1$  ( $a^3k/D_1=1$  y  $a/\phi D_1=0$ )

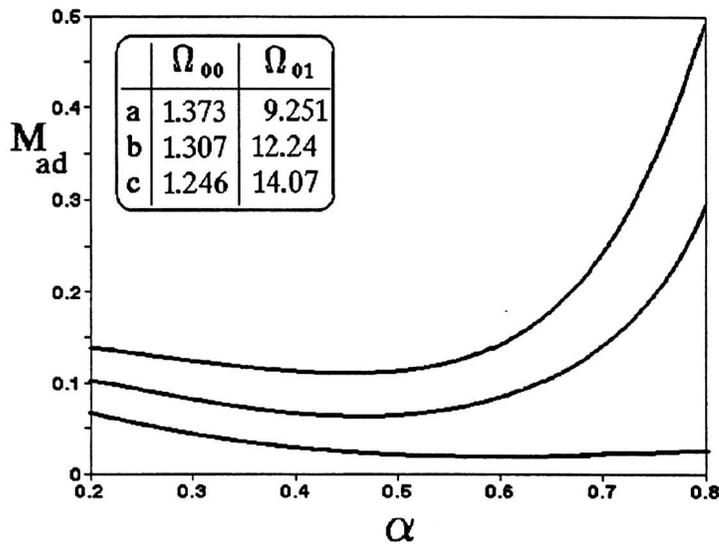


Figura 5.6. Momento flector adimensional en el centro de la placa con sobreespesor empotrada, como función de la frecuencia externa adimensional (a)  $h_2/h_1=0$ ; (b)  $h_2/h_1=0.5$ ; (c)  $h_2/h_1=1$  ( $a^3k/D_1=1$  y  $a/\phi D_1=0$ )

#### d) Vibraciones transversales en placas anulares

Uno de los métodos más empleados para el estudio de las vibraciones en placas anulares planas es el llamado método de Cuadratura Diferencial (DQ)

[Wang et al 93]. Utilizando la misma función aproximada  $W_a$  de (5.1.17) y las condiciones de contorno en ambos bordes se puede resolver el mismo problema por el método de Rayleigh-Ritz. La Tabla 4.VIII presenta los resultados para el caso de una placa anular de radios interno y externo  $b$  y  $a$  respectivamente, obtenidos por tres métodos: (1) método DQ [Wang et al 93]; (2) Solución analítica [Leissa 69] (3) Rayleigh-Ritz con  $J = 9$  [Larrondo et al 94].

TABLA 5.VIII. COEFICIENTE DE FRECUENCIA FUNDAMENTAL EN LOS CASOS LIBRE (F), SIMPLEMENTE SOPORTADA (SS) EMPOTRADA (C); (1) Wang et al 93; (2) Leissa 69; (3) Larrondo et al 94  
 $\Omega = \omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$ ,  $\mu = 1/3$

Boundary conditions		$b/a$									
Int.	Ext.	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6	0-7	0-8	0-9	
SS	SS	(1)	14.43	16.73	21.04	28.09	40.01	62.13	110.0	247.1	987.1
		(2)	14.44	17.39	21.10	28.25	40.01	62.09	110.0	—	988
		(3)	14.4386(*)	16.72984	21.03571	28.08536	40.01117	62.12644	110.0389	247.06880	987.25289
C	SS	(1)	17.68	22.73	30.02	41.26	59.90	94.26	168.6	381.6	1534
		(2)	17.85	22.79	30.05	41.23	59.91	95.16	168	—	1535
		(3)	17.8376(*)	22.76742	30.03679	41.26050	59.8987	94.26360	168.64940	381.63733	1534.502
SS	C	(1)	22.54	26.62	33.65	44.93	63.86	98.80	174.3	389.5	1549
		(2)	22.61	26.57	33.66	44.89	64.06	99.16	175	—	1550
		(3)	22.5846	26.61968	33.65269	44.93236	63.85628	98.79370	174.25357	389.51123	1549
F	C	(1)	13.41	10.04	11.31	13.50	17.60	25.54	42.98	92.82	359.6
		(2)	10.18	10.34	11.37	13.54	17.51	25.60	42.38	85.32	360
		(3)	10.1348	10.34706(*)	11.33796	13.50042	17.59799	25.54022	42.9800	92.81548	359.95342
C	F	(1)	4.230	5.212	6.702	9.072	13.09	20.61	37.07	84.68	344.4
		(2)	4.235	5.244	6.739	7.036	13.05	20.63	36.6	81.45	345
		(3)	4.2629(*)	5.21350	6.70117	9.07188	13.08941	20.60663	37.06906	84.67757	344.76102
F	SS	(1)	7.138	4.481	4.633	4.741	5.043	5.663	6.864	9.455	17.51
		(2)	4.933	4.726	4.654	4.752	5.040	5.664	6.864	9.431	17.81
		(3)	4.8903	4.73270(*)	4.65935	4.74377	5.043218	5.66307	6.86443	9.455027	17.51078
SS	F	(1)	3.447	3.313	3.386	3.630	4.070	4.809	6.109	8.782	16.89
		(2)	3.516	3.312	3.378	3.610	4.060	4.951	6.101	8.779	18.92
		(3)	3.4401	3.31314	3.38657	3.62965(*)	4.070067	4.80873	6.10904	8.78224	16.90748
F	F	(1)	5.077	5.011	4.818	4.532	4.207	3.865	3.523	3.197	2.88
		(2)	5.203	5.053	4.822	4.567	4.203	3.865	3.519	3.20	2.89
C	C	(1)	27.31	34.63	45.37	61.97	89.32	139.8	248.7	560.3	2246
		(2)	27.3	—	45.36	62.33	89.30	—	248	—	2237
		(3)	27.280	34.60925	45.34623	61.87221	89.2507	139.61908	248.40208	559.16190	2236.8

En general los casos de placas simplemente conectadas son más simples y han sido estudiados con mayor profundidad. En los casos doblemente conexos, como es el caso en placas anulares [Avalos et al 96] se demuestra

empíricamente que, si el borde interior es libre y sólo el borde externo está restringido en forma elástica, la convergencia mejora si se satisfacen únicamente las condiciones de borde externas. Esta conjetura se cumple también en el caso de placas anulares con sobreespesor.

A manera de ejemplo, en la Tabla 5.IX se reportan los coeficientes adimensionales de frecuencia, tanto axisimétricos como antisimétricos, para una placa con radio interno  $b/a$  y sobreespesor en la región  $c/a \leq R \leq 1$ . Los resultados obtenidos en la forma indicada en el párrafo anterior están indicados (RR). Se realizó asimismo el cálculo mediante elementos finitos (FE). En este último caso se empleó la malla indicada en la Figura 5.7 donde, por ejemplo, para el caso  $b/a$  la malla tiene 661 elementos en la mitad del dominio.

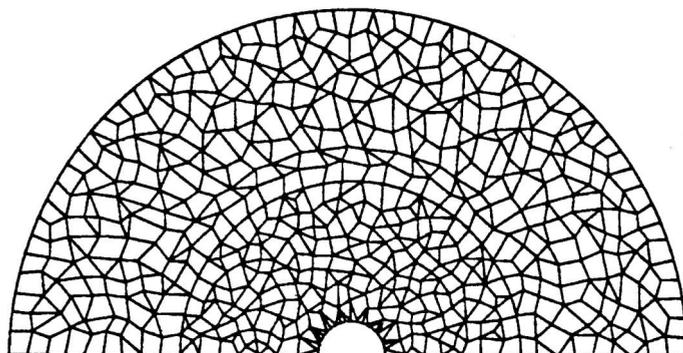


Figure 2. The finite element mesh ( $b/a = 0.10$ ,  $c/a = 0.5$ ).

Figura 5.7. Malla empleada para el cálculo con elementos finitos en el caso  $b/a=0.1$ ,  $c/a=0.5$ . La malla contiene 661 elementos en la mitad del dominio.

### e) Vibraciones transversales de placas rectangulares por el método de Kantorovich optimizado

La configuración particular bajo estudio se muestra en la Figura 5.8. El espesor del plato varía en forma lineal en la dirección  $x$ , por lo que el coeficiente de rigidez tiene la expresión

$$D(X) = D_0 H^3(X) = \frac{E h_0^3}{12(1-\mu^2)} (\alpha X + 1)^3 \quad (5.1.25)$$

TABLA 5.IX. COEFICIENTES DE FRECUENCIA ADIMENSIONALES PARA UNA PLACA ANULAR CON BORDE EXTERNO SIMPLEMENTE SOPORTADO ( $r=a$ ) Y BORDE INTERNO LIBRE ( $r=b$ ). LA PLACA TIENE UN SOBRESPESESOR DESDE  $r=c$  HASTA  $r=a$  DE VALOR  $h_1$ .

( $\mu = 0.30$ ): (a)  $h_1/h_0 = 1.0$ ; (b)  $h_1/h_0 = 0.8$ ; (c)  $h_1/h_0 = 0.6$

(a)					
$b/a$	0.1	0.3	0.5	0.7	
Mode	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	
FE	4.85347	4.6644	5.0770	6.9304	
RR	4.80970	4.64788	5.07571	6.93095	
Mode	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	
FE	13.8896	12.8271	11.6063	13.3069	
RR	13.8429	12.8156	11.6072	13.3109	
Mode	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	
FE	25.4438	24.1738	22.3666	24.3224	
RR	25.3810	24.1119	22.3563	24.3292	
Mode	(0, 1)	(0, 1)	(3, 0)	(3, 0)	
FE	29.4370	37.1031	35.6762	37.1053	
RR	29.0929	36.9522	35.6305	37.0966	

(b)						
$b/a$ $c/a$	0.1			0.4		0.7
	0.2	0.5	0.8	0.5	0.8	0.8
Mode	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
FE	4.7551	4.4345	4.1015	4.6212	4.1669	6.7001
RR	4.74156	4.20351	4.04527	4.62123	4.16524	6.70109
Mode	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)
FE	13.8267	12.8987	11.6499	11.3619	10.1686	12.5621
RR	13.7091	12.8473	11.6280	11.3531	10.1637	12.5681
Mode	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)
FE	25.2007	24.1461	21.7443	22.2904	19.8378	22.7885
RR	25.1554	23.8250	21.7088	22.1639	19.8385	22.8047
Mode	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(3, 0)	(3, 0)	(3, 0)
FE	29.0230	27.4253	24.0427	36.1037	32.2040	34.6299
RR	28.8748	24.7388	23.4361	36.0125	32.2166	34.6381

(c)						
$b/a$ $c/a$	0.1			0.4		0.7
	0.2	0.5	0.8	0.5	0.8	0.8
Mode	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
FE	4.6721	4.1066	3.4670	4.5829	3.7526	6.7485
RR	4.63629	4.09509	3.37831	4.57657	3.75331	6.74942
Mode	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)
FE	13.7232	11.6682	9.5843	10.9350	8.5853	12.3617
RR	13.6044	10.5530	9.52475	10.9166	8.57459	12.3698
Mode	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)	(2, 0)
FE	25.0339	22.6140	18.2338	21.5589	16.8204	22.1804
RR	24.9926	22.7704	18.2273	21.5241	16.8392	22.2046
Mode	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(3, 0)	(3, 0)	(3, 0)
FE	28.9399	24.1413	18.2762	35.0410	27.3737	33.4125
RR	28.6074	21.9788	16.7241	34.9585	27.4007	33.4511

donde  $X$  es  $x/a$ .

El método propuesto [Laura et al 91b] consiste en minimizar el funcional  $J[W]$  pero ensayando una forma funcional del tipo

$$W(x,y) \approx W_a(x,y) = f(x) g(y) \quad (5.1.26)$$

donde  $f(x)$  es una función fija y  $g(y)$  se elige de modo de satisfacer la optimización del funcional. La expresión adoptada para  $f(x)$  es:

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + x^\gamma$$

y la minimización del funcional corresponde a una  $g(y)$  que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^4 g(y)}{dy^4} + \xi_1 \frac{d^2 g(y)}{dy^2} + \xi_2 g(y) = 0 \quad (5.1.27)$$

donde:

$$\xi_1 = \frac{r^2 (T_3 - T_4)}{T_2}; \quad \xi_2 = \frac{r^2 T_1}{T_2} \quad (5.1.28)$$

con

$$\begin{aligned} T_1 = & \int_0^1 H^3(x) f_{xx}^2 dx + \frac{N_x a^2}{D_0} \int_0^1 f_x^2 dx + \frac{a}{\Phi_1 D_0} f_x^2|_{x=0} \\ & + \frac{a}{\Phi_2 D_0} f_x^2|_{x=1} - \Omega^2 \int_0^1 H(x) f^2 dx \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

$$T_2 = \int_0^1 H^3(x) f^2 dx; \quad T_3 = \int_0^1 2\mu H^3(x) f_{xx} f dx$$

$$T_4 = \int_0^1 2(1-\mu) H^3(x) f_x^2 dx + \int_0^1 \frac{N_y a^2}{D_0} f^2 dx$$

La solución exacta de la (5.1.27) es:

$$g = A_1 \cosh(p_1 y) + A_2 \sinh(p_1 y) + A_3 \cos(p_2 y) + A_4 \sin(p_2 y) \quad (5.1.30)$$

donde  $p_{1,2} = \{\pm \xi_1 + (\xi_1^2 - 4\xi_2)^{1/2}/2\}^{1/2}$ . Esta expresión de  $g(y)$  se reemplaza en las condiciones de contorno y conduce a una ecuación característica cuya raíz más baja corresponde al modo fundamental de vibración. Nótese que la función de prueba ensayada en este caso es un producto de una función de  $x$  por una función de  $y$ , siendo esta última solución exacta; los valores de frecuencia obtenidos son inferiores a los que se encuentran mediante Rayleigh-Ritz. Dado que las raíces obtenidas por métodos aproximados son límites superiores de las verdaderas raíces, esta aproximación significa una mejora en los resultados obtenidos.

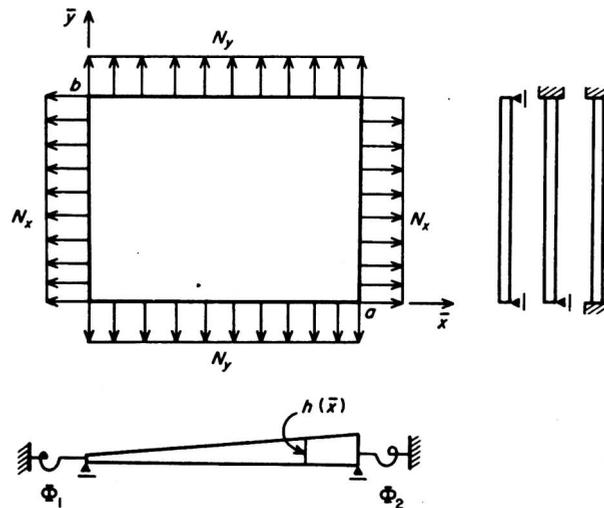


Figura 5.8. Sistema mecánico estudiado por Kantorovich optimizado

#### f) Placa rectangular con masa elásticamente acoplada

Las vibraciones de pequeña amplitud del sistema de la Figura 5.9 son:

$$D \nabla^4 w(x,y,t) - \rho h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = F(t) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$$

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} = -F(t) \quad (5.1.31)$$

$$F(t) = -k [w(x_0, y_0, t) - Z]$$

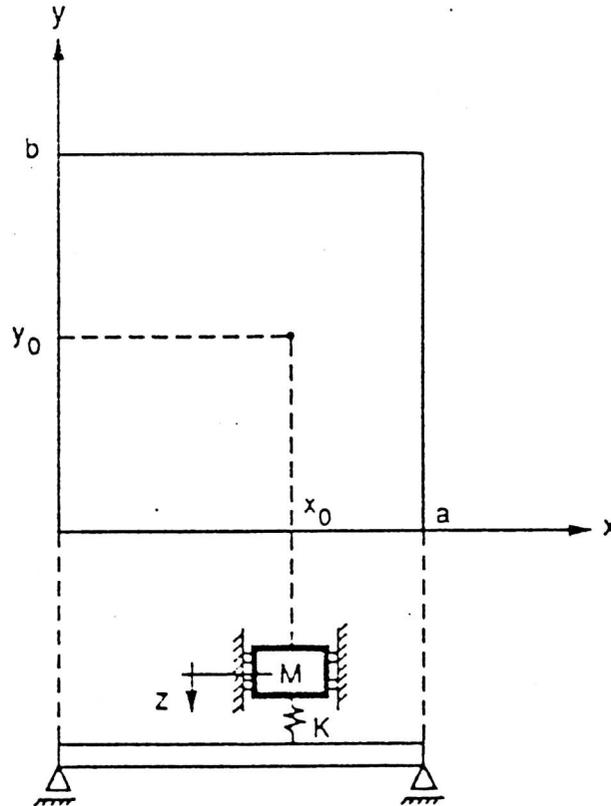


Figura 5.9. Placa simplemente soportada con una masa concentrada acoplada elásticamente

En el caso de modos de oscilación senoidales:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= W(x, y) e^{i\omega t} \\ w(x_0, y_0, t) &= W_0(x_0, y_0) e^{i\omega t} \\ Z(t) &= Z e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Desarrollando las funciones  $W(x, y)$  y  $\delta(x)$ , en la base de Fourier

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

(5.1.33)

$$\delta(x-x_0) \delta(y-y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b}$$

con:

$$c_{nm} = \frac{4}{ab} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y_0}{b}$$

resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales en los coeficientes  $b_{nm}$ :

$$\left[ \pi^4(n^2 + m^2 r^2)^2 - \Omega^2 \right] b_{nm} = \frac{4\Omega^2(M/M_p)}{1-\delta^2\Omega^2} \times$$

$$\left[ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} b_{jl} \operatorname{sen}(j\pi X_0) \operatorname{sen}(l\pi Y_0) \right] \times$$

$$\operatorname{sen}(n\pi X_0) \operatorname{sen}(m\pi Y_0) \quad (5.1.34)$$

donde  $M_p = \rho h a b$  es la masa total de la placa,  $X_0 = x_0/a$ ,  $Y_0 = y_0/b$ ,  $r = a/b$ , son coordenadas adimensionales, y finalmente  $K = ka^2/D$ ,  $\delta^2 = (M/M_p)/(Kr)$  y  $\Omega^2 = \omega^2 \rho h a^4/D$  son, respectivamente, la constante de acoplamiento, la masa y la frecuencia adimensionales.

Un análisis superficial del problema podría hacer descartar la raíz correspondiente al valor singular  $\Omega\delta = 1$  en la (5.1.34). Sin embargo, bajo circunstancias especiales  $\Omega\tau = 1/\delta$  es un verdadero autovalor. Para obtener todas las raíces relevantes se transforma los polos en  $\Omega = 1/\delta$  en ceros de orden par del sistema. Se buscan las raíces del determinante de (5.1.34) de orden impar únicamente, empleando un algoritmo numérico de partición del intervalo.

Las cinco frecuencias naturales inferiores del sistema, para distintos valores de la constante del resorte y de la masa se muestran en la tabla 5.X. Es interesante notar que el sistema masa-resorte resulta efectivamente desacoplado de la placa en aquellos casos en que la posición  $(X_0, Y_0)$  se encuentra sobre alguna de las líneas nodales de la placa. Las frecuencias

para las cuales esto ocurre son las que se indican en la base de la tabla.

TABLA 5.X: COEFICIENTES ADIMENSIONALES DE FRECUENCIA DEL SISTEMA DE LA FIGURA 5.9 PARA  $a/b=1; x_0/a=y_0/b=0.75$

$M/M_p$	$\frac{ka^2}{D}$					
0.10	0.2	1.41346	19.74430	49.35613	78.96190	98.69604
0.25		0.89395	19.74428	49.35613	78.96190	98.69604
0.50		0.63212	19.74428	49.35613	78.96190	98.69604
1.00		0.44698	19.74427	49.35613	78.96190	98.69604
2.00		0.31606	19.74427	49.35613	78.96190	98.69604
5.00		0.19989	19.74427	49.35613	78.96190	98.69604
0.10	0.5	2.23307	19.75201	49.36831	78.96951	98.69604
0.25		1.41233	19.75192	49.36829	78.96950	98.69604
0.50		1.00000	19.75188	49.36823	78.96950	98.69604
1.00		0.70617	19.75187	49.36827	78.96950	98.69604
2.00		0.49934	19.75186	49.36827	78.96950	98.69604
5.00		0.31581	19.75185	49.36827	78.96950	98.69604
0.10	1.0	3.15376	19.76510	49.38865	78.98221	98.69604
0.25		1.99466	19.76470	49.38855	78.98218	98.69604
0.50		1.41045	19.76457	49.38852	78.98218	98.69604
1.00		1.00000	19.76451	49.38850	78.98217	98.69604
2.00		0.70523	19.76448	49.38850	78.98217	98.69604
5.00		0.44603	19.76446	49.38849	78.98217	98.69604
0.10	2.0	4.44781	19.79217	49.42949	79.00766	98.69604
0.25		2.81330	19.79053	49.42909	79.00757	98.69604
0.50		1.98937	19.79000	49.42896	79.00753	98.69604
1.00		1.40671	19.78975	49.42889	79.00752	98.69604
2.00		1.00000	19.78962	49.42886	79.00751	98.69604
5.00		0.62911	19.78954	49.42884	79.00750	98.69604
0.10	5.0	6.97179	19.88113	49.55322	79.08454	98.69604
0.25		4.41208	19.87001	49.55072	79.08393	98.69604
0.50		3.12040	19.86668	49.54989	79.08372	98.69604
1.00		2.20666	19.86508	49.54948	79.08362	98.69604
2.00		1.56041	19.86429	49.54928	79.08357	98.69604
5.00		1.00000	19.86382	49.54916	79.08354	98.69604
0.10	$\infty$	18.71386	40.88059	69.98092	94.75128	98.69604
0.25		17.14952	34.44945	66.82514	93.75513	98.69604
0.50		14.89216	30.43729	65.46611	93.33347	98.69604
1.00		11.92765	28.08147	64.73565	93.10304	98.69604
2.00		9.00041	26.92277	64.36020	92.98272	98.69604
5.00		5.91680	26.26600	64.13223	92.90886	98.69604

Note: The values  $\Omega_{n,m} = [n^2 + (ma/b)^2] \pi^2$  where "n" or "m" are multiples of 4, are also roots of the frequency equation.

Las Figuras 5.10 muestran la frecuencia fundamental como función de la masa y de la constante elástica del acoplamiento, para el caso de una placa cuadrada y para una placa rectangular con  $a/b = 2$ , ambas con una masa colocada en  $X_0 = Y_0 = 0.75$ . Por su parte la Figura 5.10 muestra el desdoblamiento en uno de los modos degenerados de la placa cuadrada, al variar la constante de acoplamiento con una masa M de igual valor al de la

placa. En todos los casos la placa está simplemente soportada en sus bordes.

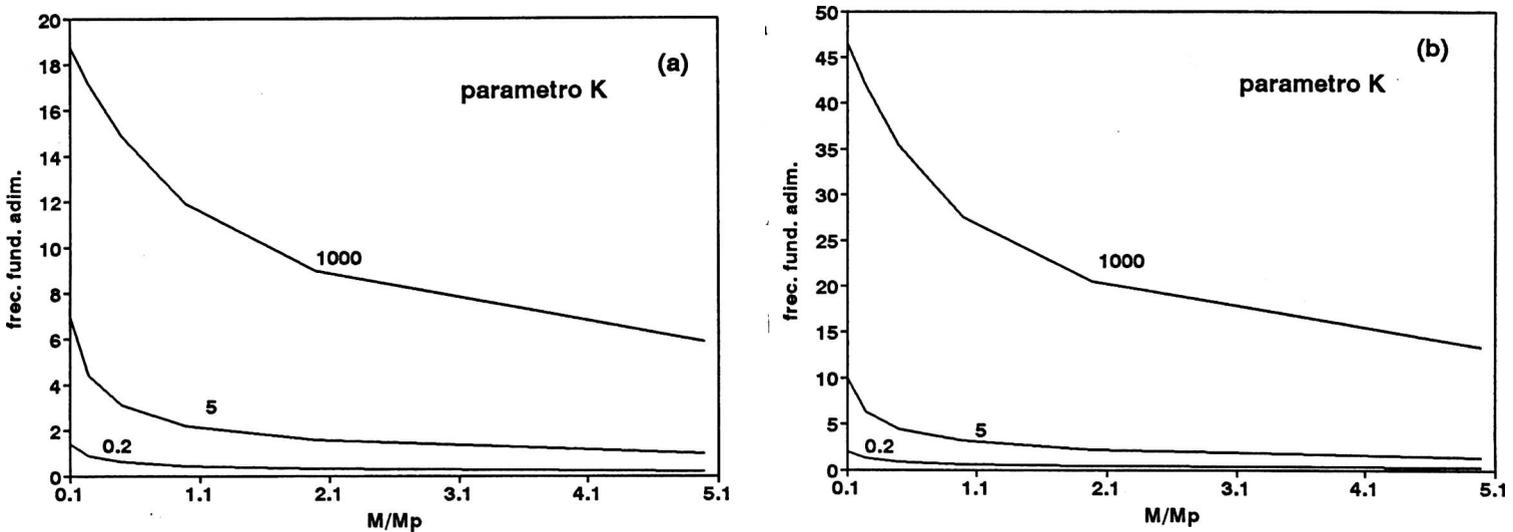


Figura 5.10. Variación de la frecuencia fundamental vs la masa para distintos valores de la constante de acoplamiento elástico,  $x_0/a=y_0/b=0.75$ .  
(a)  $a/b=1$ ; (b)  $a/b=2$

Una placa cuadrada presenta las siguientes frecuencias naturales adimensionales:

$$\Omega^2 = (n^2 + m^2)\pi^2 \quad (5.1.35)$$

En particular el modo ( $n=1, m=3$ ) y el modo ( $n=3, m=1$ ) son dos modos de oscilación de igual frecuencia  $\Omega=10\pi^2$ . No obstante, a medida que el acoplamiento con la masa concentrada se incrementa a partir de cero, las frecuencias se separan como muestra la Figura 5.11.

### g) Placa rectangular ortótropa con orificios y masa concentrada

El sistema bajo estudio se muestra en la Figura 5.12. Para este caso no puede obtenerse la solución analítica por la dificultad que introducen la ortotropía y la frontera libre del orificio interior. Sin embargo pueden obtenerse las frecuencias naturales de oscilación por el método de Rayleigh-Ritz dando excelente acuerdo con el método de elementos finitos.

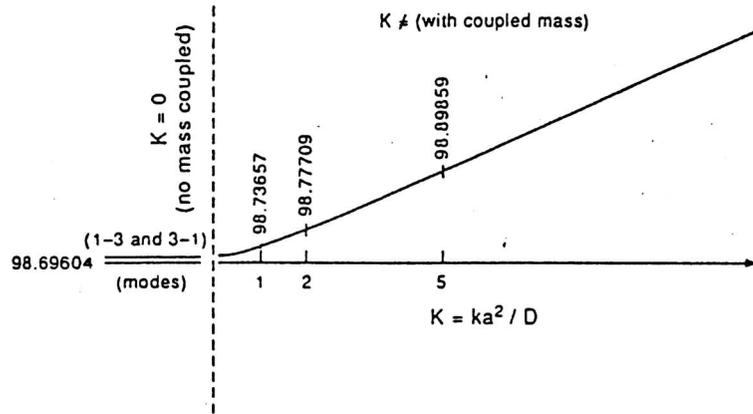


Figura 5.11. Desplazamiento en la frecuencia degenerada para el caso de una placa cuadrada, a medida que la constante elástica del acoplamiento se incrementa, para  $M/M_p=1$ .

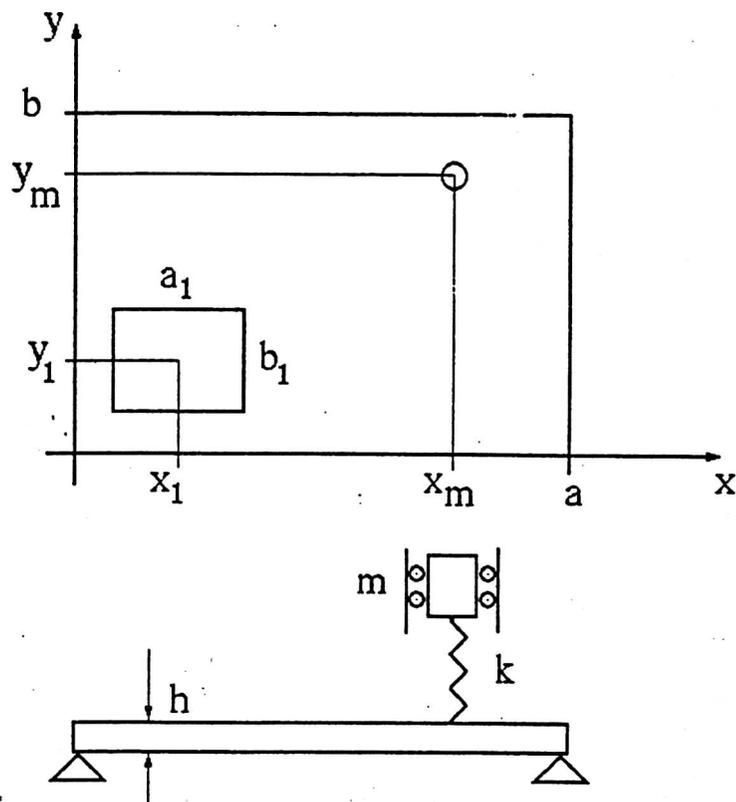


Figura 5.12. Placa ortótropa con masa acoplada y orificios

El funcional a minimizar en este caso está dado por:

$$J = J_p + J_m \quad (5.1.36)$$

con:

$$J_p = \frac{1}{2} \iint_{A_F} \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial x'^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 W'}{\partial x'^2} \frac{\partial^2 W'}{\partial y'^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial y'^2} \right)^2 \right] dx' dy' \quad (5.1.37)$$

$$+ \int_{A_F} 4D_k \left( \frac{\partial^2 W'}{\partial x' \partial y'} \right)^2 dx' dy' - \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_{A_F} W'^2 dx' dy'$$

$$J_m = \frac{k_m}{2} z'^2 - \frac{m\omega^2}{2} \left( z' + W'_m \right)^2 \quad (5.1.38)$$

donde  $W'$  es el desplazamiento de amplitud de la placa,  $z'$  es el desplazamiento de la masa, relativo a la placa,  $z' + W'_m$  es el desplazamiento de amplitud total de la masa y  $W'_m$  es el desplazamiento de la placa en la posición de la masa concentrada. Los coeficientes de rigidez a la flexión de la placa ortótropa están dados por:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} ; D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)} \text{ y } D_k = \frac{G h^3}{12}$$

La primera integral en la ecuación (5.1.38) se toma sobre el área doblemente conectada de la placa y representa la máxima energía de deformación de la placa, en tanto que la segunda integral mide la máxima energía cinética de la placa.

Introduciendo las variables adimensionales  $W = W'/a$ ,  $x = x'/a$ ,  $y = y'/b$  y  $z = z'/a$ , donde  $a$  y  $b$  son las dimensiones de la placa, se obtiene el funcional adimensional:

$$J_{ad} = \frac{2J}{D_1} = \iint_{A_F} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2\nu_2}{s_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{D_2}{D_1 s_1^4} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \quad (5.1.40)$$

$$+ \iint_{A_F} \frac{4D_k}{D_1 s_1^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy - \Omega^2 \iint_{A_F} W^2 dx dy + K_m z^2 - M \Omega^2 (z + W_m)^2$$

donde:

$\Omega^2 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D_1}$  es el cuadrado del coeficiente de frecuencia adimensional,

$M = m/M_p$ , es la masa adimensional, con  $M_p$  la placa sin orificios,

$K_m = \frac{k_m a^2}{D_1 s_1}$  es la constante adimensional del acoplamiento elástico placa-masa

y finalmente  $s_1 = b/a$  es la relación de aspecto de la placa. La amplitud del desplazamiento  $W(x,y)$  de la placa se expresa en forma aproximada por la función:

$$W_a(x,y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{mn} \text{sen}(m\pi x) \text{sen}(n\pi y) \quad (5.1.41)$$

El funcional adimensional se minimiza respecto de los coeficientes  $b_{mn}$  en la forma ya vista en casos anteriores.

La comparación con elementos finitos es excelente empleando  $N=M=20$ , que conduce a un determinante secular de  $401 \times 401$ . Las diferencias entre los valores obtenidos son del orden del 0.3%. Es de destacar que no se han hecho cumplir las condiciones en el borde del orificio al emplear la aproximación variacional pero, dado que el conjunto de funciones (5.1.41)

es un conjunto completo en el espacio de las funciones que cumplen las condiciones de borde en la frontera externa de la placa, está garantizado que a medida que el número de funciones coordenadas tiende a infinito la solución se aproximará a la solución exacta de la ecuación diferencial [Kantorovich et al 64]. Las tablas 5.XI a 5.XV muestran los resultados obtenidos para distintas configuraciones. Dadas las dimensiones de los determinantes involucrados se requiere trabajar con variables de punto flotante de 80 bits. Cuando la constante del resorte  $k$  tiene un valor finito el coeficiente de frecuencia  $\Omega_1$  es obviamente el coeficiente de frecuencia correspondiente al sistema masa-resorte, perturbado por la presencia de la placa, en tanto que  $\Omega_2$  es el coeficiente de frecuencia fundamental de la placa perturbado por el sistema masa resorte. Es interesante notar que en algunos casos,  $\Omega_2$  se incrementa al agrandar el orificio (manteniéndose constantes las restantes variables de la configuración). Este efecto se conoce como rigidización dinámica debido a que la placa tiene menor peso pero frecuencias naturales más elevadas.

TABLA 5.XI. VALORES DE  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  PARA UNA PLACA CUADRADA ORTÓTROPA CON DIFERENTES POSICIONES Y VALORES DEL SISTEMA MASA-RESORTE Y PARA DISTINTAS POSICIONES DEL ORIFICIO RECTANGULAR

Mass Coord.	$m/M_p$	$Ka^2/D$	(A)		(B)		(C)	
			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
x/a = .50 y/b = .75 (a)	0.1	1	3.148	20.01	3.149	19.96	3.148	19.77
		10	9.526	20.59	9.534	20.52	9.532	20.32
		$\infty$	17.92	36.90	17.93	36.86	17.81	36.44
	0.3	1	1.818	20.01	1.818	19.96	1.818	19.77
		10	5.529	20.49	5.533	20.42	5.533	20.22
		$\infty$	14.68	32.09	14.75	31.96	14.69	31.54
x/a = .75 y/b = .75 (b)	0.1	1	3.152	19.98	3.152	19.93	3.152	19.74
		10	9.674	20.27	9.676	20.22	9.676	20.02
		$\infty$	18.86	37.46	18.83	37.44	18.68	37.01
	0.3	1	1.820	19.98	1.820	19.93	1.820	19.74
		10	5.602	20.22	5.602	20.17	5.602	19.97
		$\infty$	16.49	30.43	16.50	30.37	16.42	30.02
x/a = .75 y/b = .50 (c)	0.1	1	3.149	20.01	3.149	19.96	3.149	19.77
		10	9.549	20.60	9.559	20.53	9.556	20.33
		$\infty$	17.96	42.53	17.98	42.46	17.85	41.99
	0.3	1	1.818	20.01	1.818	19.96	1.818	19.77
		10	5.542	20.49	5.547	20.43	5.547	20.23
		$\infty$	14.83	35.77	14.91	35.63	14.84	35.28

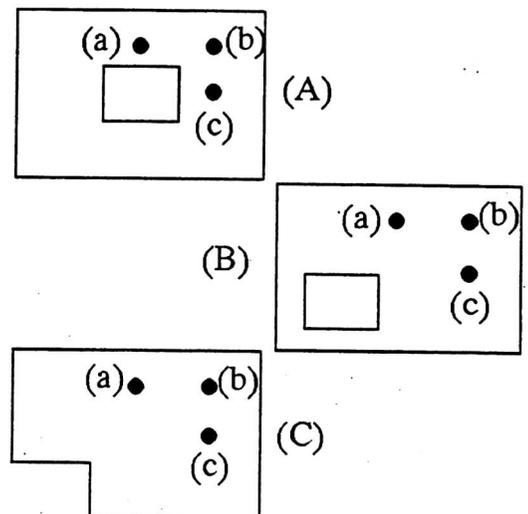


TABLA 5.XII. VALORES DE  $\Omega_1$  Y  $\Omega_2$  PARA UNA PLACA CUADRADA ORTÓTropa CON DIFERENTES POSICIONES Y VALORES DEL SISTEMA MASA-RESORTE Y PARA DISTINTAS POSICIONES DEL ORIFICIO RECTANGULAR;  $a_1/a=0.3$

Mass Coord.	$m/M_p$	$Ka^2/D$	(A)		(B)		(C)	
			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
x/a=.50 y/b=.75 (a)	0.1	1	3.145	21.05	3.148	19.42	3.148	18.43
		10	9.432	21.79	9.511	20.02	9.503	19.98
		$\infty$	18.06	35.50	17.44	37.01	16.80	35.10
	0.3	1	1.816	21.05	1.817	19.42	1.817	18.43
		10	5.477	21.67	5.523	19.90	5.522	18.87
		$\infty$	14.07	31.91	14.37	32.06	14.09	29.97
x/a=.75 y/b=.75 (b)	0.1	1	3.151	21.01	3.152	19.39	3.152	18.40
		10	9.638	21.37	9.668	19.68	9.664	18.67
		$\infty$	19.43	36.34	18.34	37.79	17.57	35.63
	0.3	1	1.819	21.01	1.820	19.39	1.820	18.40
		10	5.582	21.31	5.600	19.63	5.599	18.62
		$\infty$	16.39	30.73	16.15	30.34	15.73	28.57
x/a=.75 y/b=.50 (c)	0.1	1	3.145	21.05	3.149	19.42	3.149	18.43
		10	9.432	21.79	9.533	20.03	9.523	19.01
		$\infty$	18.07	38.60	17.47	42.01	16.79	40.11
	0.3	1	1.816	21.05	1.818	19.42	1.818	18.43
		10	5.477	21.68	5.536	19.91	5.534	18.89
		$\infty$	14.08	33.74	14.50	35.86	14.16	33.73

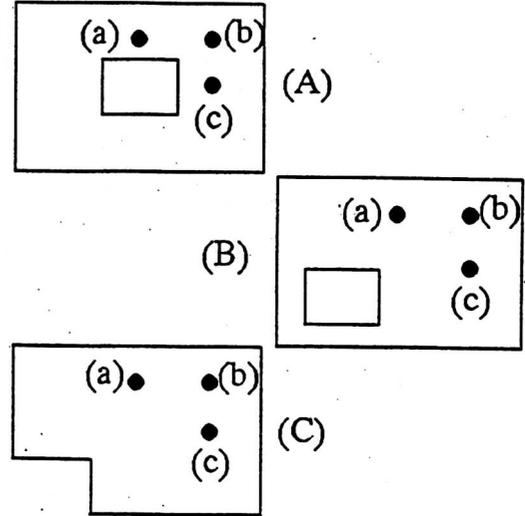


TABLA 5.XIII. VALORES DE  $\Omega_1$  Y  $\Omega_2$  PARA UNA PLACA CUADRADA ORTÓTropa CON DIFERENTES POSICIONES Y VALORES DEL SISTEMA MASA-RESORTE Y PARA DISTINTAS POSICIONES DEL ORIFICIO RECTANGULAR;  $a_1/a=0.5$

Mass Coord.	$m/M_p$	$Ka^2/D$	(A)		(C)	
			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
x/a=.50 y/b=.75 (a)	0.1	1	3.131	26.67	3.146	18.71
		10	9.103	27.69	9.443	19.42
		$\infty$	18.42	34.24	16.62	36.26
	0.3	1	1.808	26.67	1.816	18.70
		10	5.277	27.60	5.494	19.28
		$\infty$	12.14	32.87	13.60	32.27
x/a=.75 y/b=.75 (b)	0.1	1	3.145	26.61	3.152	18.67
		10	9.477	27.19	9.645	19.01
		$\infty$	21.63	35.56	17.62	38.07
	0.3	1	1.816	26.61	1.819	18.67
		10	5.486	27.14	5.590	18.94
		$\infty$	15.48	33.10	15.52	30.96
x/a=.75 y/b=.50 (c)	0.1	1	3.131	26.67	3.147	18.71
		10	9.976	27.67	9.454	19.46
		$\infty$	18.31	34.44	16.60	39.18
	0.3	1	1.807	26.66	1.817	18.71
		10	5.261	27.58	5.501	19.31
		$\infty$	11.98	32.90	13.63	35.95

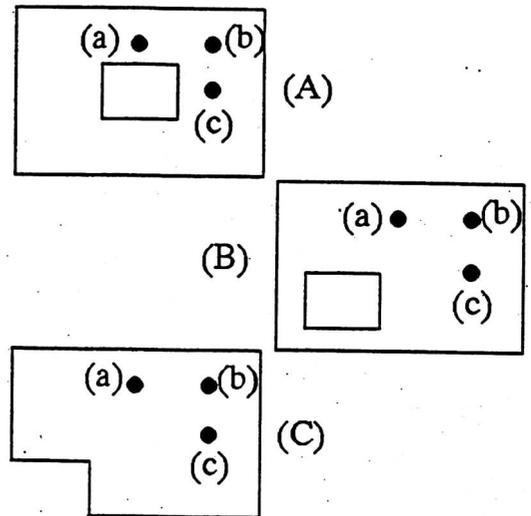


TABLA 5.XIV. VALORES DE  $\Omega_1$  Y  $\Omega_2$  PARA UNA PLACA RECTANGULAR ORTÓTropa CON DIFERENTES POSICIONES Y VALORES DEL SISTEMA MASA-RESORTE Y PARA DISTINTAS POSICIONES DEL ORIFICIO RECTANGULAR;  $a_1/a=0.3$ ;  $b/a=2/3$ .

Mass Coord.	$m/M_p$	$Ka^2/D$	(A)		(C)	
			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
(a)	0.1	1	3.154	31.68	3.156	27.86
		10	9.758	32.13	9.809	28.13
		∞	27.16	58.00	25.37	59.82
	0.3	1	1.821	31.68	1.822	27.85
		10	5.639	32.10	5.669	28.15
		∞	20.97	50.01	21.25	49.81
(b)	0.1	1	3.157	31.66	3.158	27.84
		10	9.848	31.87	9.861	27.99
		∞	29.25	53.59	26.57	52.25
	0.3	1	1.823	31.66	1.823	27.84
		10	5.688	31.85	5.696	27.97
		∞	24.39	45.02	23.59	41.49
(c)	0.1	1	3.154	31.68	3.156	27.85
		10	9.758	32.13	9.795	28.16
		∞	27.14	52.25	25.38	51.10
	0.3	1	1.821	31.68	1.822	27.85
		10	5.640	32.10	5.662	28.13
		∞	20.94	46.87	21.09	43.34

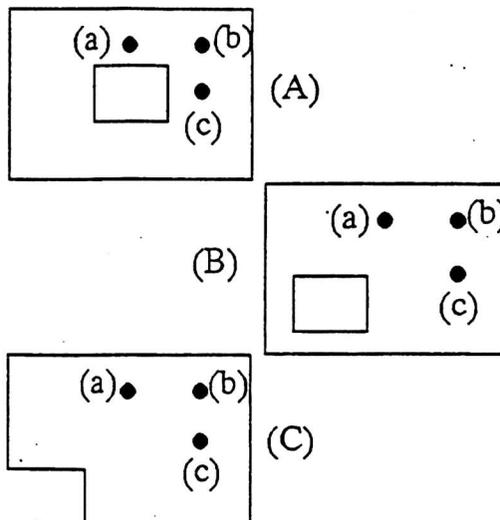
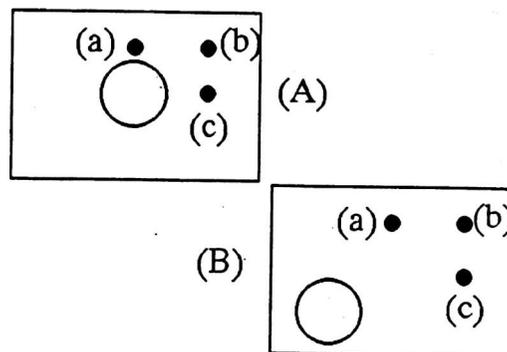


TABLA 5.XV. VALORES DE  $\Omega_1$  Y  $\Omega_2$  PARA UNA PLACA RECTANGULAR ORTÓTropa CON DIFERENTES POSICIONES Y VALORES DEL SISTEMA MASA-RESORTE Y PARA DISTINTAS POSICIONES DEL ORIFICIO CIRCULAR DE RADIO;  $r_0/a=0.15$ .

Mass Coord.	$m/M_p$	$Ka^2/D$	(A)		(B)	
			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
(a)	0.1	1	3.155	33.11	3.156	29.03
		10	9.763	33.56	9.808	29.38
		∞	28.13	57.55	26.14	62.08
	0.3	1	1.821	33.11	1.822	29.03
		10	5.641	33.53	5.669	29.35
		∞	21.43	51.02	21.57	52.23
(b)	0.1	1	3.157	33.09	3.157	29.01
		10	9.851	33.30	9.861	29.18
		∞	30.37	51.72	27.45	52.62
	0.3	1	1.822	33.09	1.823	29.01
		10	5.690	33.29	5.696	29.16
		∞	24.98	45.17	24.01	43.90
(c)	0.1	1	3.154	33.12	3.155	29.03
		10	9.752	33.57	9.794	29.38
		∞	27.91	49.31	26.06	54.44
	0.3	1	1.821	33.12	1.822	29.03
		10	5.636	33.54	5.660	29.35
		∞	21.07	45.38	21.29	46.64



## Capítulo 6

### Sistemas de dimensión infinita (III)

#### 6.0. Introducción

El concepto de *modo normal* está bien desarrollado para los sistemas lineales oscilatorios. Un modo normal es el análogo de un oscilador de un grado de libertad y la dinámica tiene lugar dentro de un plano bidimensional en el espacio de fases del sistema. En el análisis mecánico clásico los modos normales son movimientos colectivos del sistema para los cuales todos los puntos masivos comparten la frecuencia de oscilación [Goldstein 80]. Cualquier otra evolución puede expresarse como combinación de los modos normales.

En el caso no lineal la ausencia del principio de superposición hace que no exista una analogía completa, pero la teoría de sistemas dinámicos permite analizar ambos casos, el lineal y el no lineal, en forma unificada mediante el concepto de *variedades invariantes*. En el capítulo 1 fue ya enunciado uno de los teoremas centrales que permitirán esta unificación: el teorema de las variedades. En este capítulo se retoma este teorema y se lo utiliza en la reconstrucción de los *modos normales no lineales* de vigas y placas con fundación no lineal, problema de interés práctico pues modela situaciones reales en estructuras.

Se comienza con una breve discusión sobre la validez de los desarrollos perturbativos en sistemas hamiltonianos. Luego se desarrolla con más detalle el concepto de variedades invariantes presentado en el capítulo 1 y se lo aplica en primera instancia al caso lineal. En ese caso las variedades son hiperplanos (planos o rectas como caso particular) y en general esos hiperplanos invariantes son suma directa de otros de menor dimensión, cada uno de los cuales está asociado a uno de los autovalores del sistema. Se pasa luego al caso de las variedades estable, inestable y central de los sistemas no lineales. Estas variedades son tangentes a las del sistema lineal y bajo ciertas hipótesis generales pueden ser reconstruídas hasta el orden deseado por métodos perturbativos.

En los casos conservativos, como ocurre en los problemas de vibraciones sin amortiguamiento, la única variedad relevante es la variedad central que está constituida por una foliación de superficies invariantes de dimensión dos [Carr 81]. Un modo normal no lineal se define como la dinámica del sistema restringida a una de esas superficies bidimensionales.

Se han propuesto varios métodos para determinar los modos normales de éstos y otros sistemas no lineales [Rand 74, Bennouna et al 84, Vakakis 90, Benamar et al 91, Rosenberg 92, Nayfeh 95, Natsiavas 96, Shaw 94]. En todos ellos se requiere el conocimiento de la solución exacta del problema lineal, previo a la obtención de los modos normales no lineales. En el método desarrollado en este capítulo [Larrondo et al 95, 96c, 97a] en cambio se utilizan las aproximaciones a dichas autofunciones, obtenidas por alguno de los métodos presentados en los capítulos 4 y 5.

Si existe un amortiguamiento la ecuación se vuelve no conservativa. El origen en este caso pasa a ser un foco estable y los modos normales se amortiguan con constantes de tiempo características. En la última parte de este capítulo se desarrolla el caso de una viga de Bernoulli con disipación viscosa y se muestra, mediante una proyección de Galerkin, la reducción de la dinámica a la del oscilador S estudiado en el capítulo 2.

### **6.1. Sistemas conservativos integrables y no integrables.**

En los sistemas conservativos el volumen de un pequeño elemento del espacio de fases se conserva a través de la evolución temporal. Este es el conocido teorema de Liouville de la Mecánica Estadística [Goldstein 80] y diferencia claramente el comportamiento de los sistemas conservativos del de los disipativos, en los que un elemento de volumen del espacio de fases se contrae a medida que transcurre el tiempo. Nótese sin embargo que en el caso de los osciladores del capítulo 2 existen regiones del espacio de fases en que el volumen se expande y otras en las que se contrae.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema conservativo de  $N$  grados de

libertad se obtienen a partir de su Hamiltoniano en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_k} \\ & \qquad \qquad \qquad k=1, \dots, N \qquad (6.1.1) \\ \frac{dp_k}{dt} &= - \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_k} \end{aligned}$$

En el caso general estas  $2N$  ecuaciones diferenciales de primer orden son no lineales y acopladas. Un cambio de variables  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$  se denomina *transformación canónica* si preserva la forma de las ecuaciones de movimiento. Una transformación canónica especialmente importante es la que convierte el problema en uno expresado en términos de *variables ángulo acción*  $(\vec{I}, \vec{\theta})$ . En ese caso el hamiltoniano transformado no depende de las variables  $\vec{\theta}$  por lo que las ecuaciones se pueden integrar trivialmente obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{dI_k}{dt} &= 0 \Rightarrow \vec{I}(t) = \vec{I}(0) \\ & \qquad \qquad \qquad (6.1.2) \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \omega_k(\vec{I}) \text{ con } \vec{\omega} \text{ constante} \Rightarrow \theta_k(t) = \omega_k t + \theta_k(0) \end{aligned}$$

No siempre es posible encontrar esta transformación canónica. Si esa transformación existe el sistema se denomina *integrable* [Ter Haar 61]. La obtención de esta transformación por métodos perturbativos es el objeto de la Teoría de Perturbación Canónica. En ella las viejas variables  $(\vec{q}, \vec{p})$  se expresan como una serie de potencias en función de las nuevas variables  $(\vec{I}, \vec{\theta})$  y los coeficientes desconocidos de la serie se obtienen efectuando un desarrollo perturbativo. Si este desarrollo perturbativo converge el sistema es integrable.

Las series perturbativas en variables ángulo-acción se denominan *series de Birkhoff*. A menudo el desarrollo se hace divergente debido a la aparición de un cero en el denominador. Esto indica que la serie debe modificarse o bien que no existe una serie convergente. En este último caso el problema se denomina *no integrable*. Si se dispone de una serie de Birkhoff

infinita Rüssmann demostró que para todo sistema integrable la serie es convergente. Luego la divergencia de la serie indica la no integrabilidad del problema. Entre los sistemas integrables pueden mencionarse el problema de los dos cuerpos, el caso de  $N$  osciladores armónicos acoplados, y las ecuaciones de Toda, de Korteweg-de-Vries y de Calogero entre otros [Helleman 80].

Todos los sistemas integrables de  $N$  grados de libertad son equivalentes a  $N$  péndulos o  $N$  osciladores armónicos y éste es el tipo de problema que aparece en el cálculo de los modos normales no lineales en estructuras.

## 6.2. Los modos normales y la variedad central en un sistema lineal

En el capítulo 1 se vio que en los sistemas lineales existe un único punto fijo aislado (en el origen). Además el espacio completo  $E$  es la suma directa de a lo sumo tres subespacios invariantes: el estable  $E^s$ , el inestable  $E^u$  y el central  $E^c$ . Toda solución que "nazca" en uno de estos subespacios evolucionará "atrapada" eternamente en él (por eso son subespacios invariantes) la distancia al punto fijo en el origen variará con el tiempo de la siguiente forma: si la evolución se produce dentro de la variedad estable la distancia al punto fijo disminuye exponencialmente; si está en el subespacio inestable se alejará en forma exponencial del punto fijo; si está en el subespacio central se mantendrá constante en el tiempo (se adopta como espacio métrico  $\mathbb{R}^n$  con la norma inducida por el producto interno canónico).

En el problema de  $N$  osciladores acoplados de la mecánica clásica, se denomina modos normales a las soluciones estacionarias que tienen una frecuencia característica única para todos los osciladores. El caso de un sistema de dos masas acopladas por resortes sirve como ejemplo de este tipo de sistema. La Figura 6.1 muestra la disposición física donde por simplicidad se han adoptado valores unitarios para las masas y para las constantes de los resortes.

El sistema de ecuaciones resultante es:

$$x_2 - 2x_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{6.2.1}$$

$$-2x_2 - x_1 = \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

que reescrito en la forma standard resulta:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \mathbf{A}\vec{x} \tag{6.2.2}$$

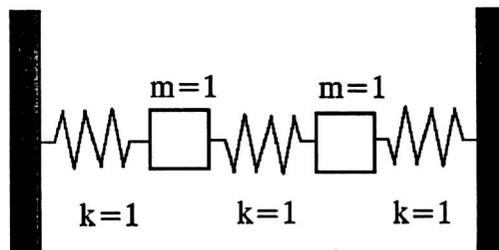


Figura 6.1 Sistema de dos masas acopladas por resortes.

La matriz  $\mathbf{A}$  tiene todos sus autovalores imaginarios. Esos autovalores son  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm i$ . Existen por tanto dos *frecuencias naturales*  $\Omega_1 = \sqrt{3}$  y  $\Omega_2 = 1$ . La matriz  $\mathbf{A}$  puede diagonalizarse en  $\mathbb{C}^2$  o bien escribirse en la forma real del Jordan con dos bloques de  $2 \times 2$  en  $\mathbb{R}^4$ . Esta segunda opción es equivalente a mantener el sistema (6.2.1) original y ensayar soluciones de la forma:

$$x_1(t) = x_{01}e^{i\Omega t} \tag{6.2.3}$$

$$x_2(t) = x_{02}e^{i\Omega t}.$$

En efecto al hacerlo (y esta es la forma usual de resolver los sistemas lineales acoplados) resulta:

$$-\Omega^2 x_{01} = -2x_{01} - x_{02}$$

(6.2.4)

$$-\Omega^2 x_{02} = -x_{01} - 2x_{02}$$

La solución no trivial requiere que el determinante del sistema homogéneo (6.2.4) sea nulo, de donde surgen los mismos dos valores de  $\Omega$  mencionados arriba. Para cada frecuencia natural ambas masas oscilan con la misma frecuencia, se trata de *modos colectivos* del sistema.

Nótese que el único subespacio invariante en este problema es el central  $E^c$  pues todos los autovalores tienen parte real nula. Dentro de ese subespacio invariante pueden a su vez distinguirse dos subespacios, cada uno de dimensión 2 que corresponden a cada una de las dos frecuencias naturales del problema. Por tratarse de un problema lineal cualquier solución del sistema puede expresarse como combinación lineal de los dos modos normales obtenidos.

En el caso de los sistemas hiperbólicos sólo existen la variedad estable y la inestable. La Figura 6.2 muestra dos ejemplos de subespacios invariantes para flujos hiperbólicos 3D.

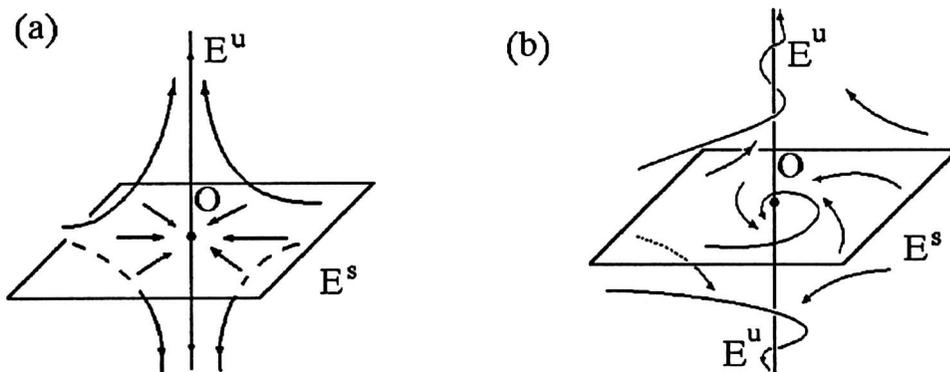


Figura 6.2: subespacios invariantes para flujos hiperbólicos tridimensionales. (a) los autovalores son todos reales; (b) los autovalores son complejos, y las trayectorias espiralan alrededor del origen

Los sistemas con variedad central pueden expresarse siempre en la forma de dos subsistemas acoplados cuyas linealizaciones tienen respectivamente autovalores con parte real negativa y nula [Carr 81]. Por ejemplo, el sistema con autovalores 1 y -1:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + xy \tag{6.2.5}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + y^2 - x^2$$

puede expresarse en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x - x^3 + xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + y^2 - x^2 \tag{6.2.6}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = 0$$

Se ha incrementado la dimensión introduciendo una nueva variable  $\epsilon$  (que en realidad es constante). Con ese artificio el término en  $x$  de la primera ecuación (6.2.5), que es lineal, se transforma en  $\epsilon x$  en la primera ecuación de (6.2.6) que es no lineal. El sistema modificado tiene autovalores 0, 0 y -1 y por lo tanto es del tipo menconado. La dinámica en el régimen asintótico se desarrolla dentro de la variedad central. Las constantes de tiempo de decaimiento de cada solución estable está dada por la inversa del valor absoluto de la parte real de su autovalor asociado.

### 6.3 Variedades invariantes en sistemas no lineales.

En el caso de los sistemas no lineales la estrategia para obtener los modos normales consiste en obtener las variedades invariantes y dentro de ellas la soluciones elementales. En un sistema no lineal pueden existir varios puntos fijos (además de otros tipos de conjuntos límites, como ya se mencionara en el Capítulo 1). En cada uno de estos puntos fijos se puede linealizar el problema y efectuar el análisis de los autovalores y autovectores del problema lineal asociado.

En los puntos fijos hiperbólicos existen únicamente las variedades  $W^u$  y/o  $W^s$  pero no la variedad central  $W^c$ , pues todos los autovalores tienen parte real no nula. En el entorno de estos puntos la dinámica del sistema puede aproximarse por la del sistema lineal. Aún en estos casos puede interesar obtener los órdenes superiores de aproximación a las variedades mencionadas.

En el caso de puntos fijos no hiperbólicos, para los que existe la Variedad Central, es imprescindible llegar hasta estos órdenes superiores. Algunas propiedades importantes de las variedades invariantes son [Guckenheimer et al 83]:

- dos variedades estables pertenecientes a dos puntos fijos distintos no pueden cortarse. El teorema de existencia y unicidad de las soluciones lo prohíbe.
- la variedad estable y la variedad inestable de un mismo punto fijo pueden intersectarse.
- Una variedad estable de un punto fijo puede ser variedad inestable de otro. La Figura 6.3 muestra el caso de un sistema con dos puntos fijos, un puerto y un foco estable. La variedad inestable del puerto  $\vec{x}_1^*$  es variedad estable del foco  $\vec{x}_2^*$ .

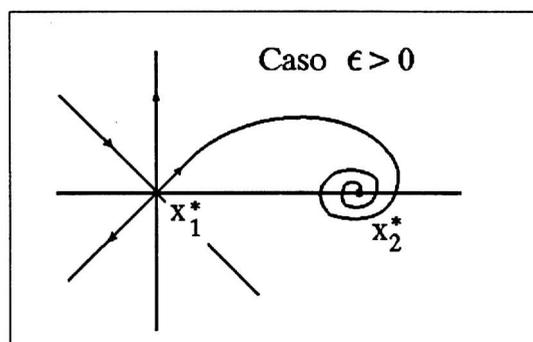


Figura 6.3. La variedad inestable de  $x_1^*$  es variedad estable de  $x_2^*$

#### 6.4. La variedad central

Se enuncia ahora sin demostración el siguiente teorema fundamental

[Guckenheimer et al 83, Carr 81]:

● Teorema de la Variedad Central

- Sea  $\vec{f}$  un campo vectorial  $C^r$  definido sobre  $\mathbb{R}^n$ .
- Sea  $\vec{x}^*$  un punto fijo.
- Sea  $A = D_{\vec{f}}(\vec{x}^*)$
- Sean  $\{\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u\}$  el espectro de autovalores con parte real negativa, cero y positiva respectivamente.
- Sean  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  los espacios invariantes generados por esos autovalores.
- El sistema no lineal tendrá tres variedades invariantes  $W^s$ ,  $W^c$  y  $W^u$ , tangentes respectivamente a  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$ .
- $W^u$  y  $W^s$  serán únicas y  $C^r$
- $W^c$  será  $C^{r-1}$  y no tiene por qué ser única. Por ejemplo, si  $f$  es  $C^\infty$  existen infinitas variedades centrales  $C^1, C^2, \dots, C^r$  para todo  $r < \infty$ .

El método sistemático para hallar una aproximación a la variedad central es el siguiente. Sea el sistema dinámico:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}) \quad (6.4.1)$$

y sea  $\vec{X}^*$  un punto fijo del sistema. Sean

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \{\lambda / \operatorname{Re}(\lambda) < 0\} \text{ y } E^s, \\ \sigma_u &= \{\lambda / \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \text{ y } E^u, \\ \sigma_c &= \{\lambda / \operatorname{Re}(\lambda) = 0\} \text{ y } E^c, \end{aligned}$$

los respectivos autovalores e hiperplanos invariantes del sistema linealizado. Mediante el cambio de coordenadas  $\vec{X} = P\vec{x}$ , donde las columnas de la matriz  $P$  son los vectores de las bases de los autoespacios generalizados, se lleva la parte lineal a su forma de Jordan. Si se ordenan los vectores columna de la matriz  $P$  de modo que:

$$P = \left[ \begin{array}{c|c|c} E^c & E^s & E^u \end{array} \right] \quad (6.4.2)$$

entonces la expresión del problema en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \\ \vec{h} \end{bmatrix} \quad (6.4.3)$$

donde los bloques  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  son de  $n \times n$ ,  $m \times m$  y  $l \times l$  respectivamente. Supongamos como primer caso que  $\mathbf{D} = 0$ , es decir el sistema linealizado sólo tiene variedades central y estable. El vector  $\vec{x}$  se escribe ahora como constituido por dos partes como muestra la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{x}}{dt} \\ \frac{d\vec{y}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad (6.4.4)$$

donde la matriz  $\mathbf{B}$  es de  $n \times n$  y el vector  $\vec{x}$  tiene  $n$  elementos en tanto que la matriz  $\mathbf{C}$  es de  $m \times m$  y el vector  $\vec{y}$  tiene  $m$  elementos. En el subespacio  $\vec{x} = \vec{0}$  el sistema es homeomorfo al lineal.  $\vec{y} = \vec{0}$  es la variedad central  $E^c$  y por el teorema de la variedad central,  $W^c$  es tangente a  $E^c$ . Luego se plantea:

$$W^c \equiv \{ \vec{y} = \vec{h}(\vec{x}), \text{ con } \vec{h}(\vec{0}) = \vec{0} \text{ y } D_h(\vec{0}) = 0 \} \quad (6.4.5)$$

Si la dinámica se restringe a la variedad central resulta:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{B}\vec{x} + \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) \quad (6.4.6)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{C}\vec{y} + \vec{g}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$$

pero dado que:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = D_h(\vec{x}) \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (6.4.7)$$

resulta:

$$D_h(\vec{x}) \left[ B\vec{x} + \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) \right] = C\vec{h}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) \quad (6.4.8)$$

$$\text{con } \vec{h}(\vec{0}) = \vec{0}; D_h(\vec{0}) = \vec{0} \text{ y } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Por ejemplo sea el sistema bidimensional:

$$\frac{dx}{dt} = xy \quad (6.4.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + \alpha x^2$$

con un único punto fijo en (0,0) y con:

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; P = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrito en la forma (6.4.7) resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + I \begin{bmatrix} xy \\ \alpha x^2 \end{bmatrix} \quad (6.4.10)$$

Si  $y = h(x)$  resulta  $D_h(x) \rightarrow dh/dx$  y la (6.4.11) resulta:

$$\begin{aligned} h'[xh] + h - \alpha x^2 &= 0 \\ h(0) = h'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

luego:

$$\begin{aligned} h(x) &= ax^2 + bx^3 + \dots \\ h'(x) &= 2ax + 3bx^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

que reemplazado en la (6.4.8) da una ecuación que puede resolverse por perturbaciones. Igualando los términos de igual orden en x resulta:

$$\begin{aligned} x^2) \quad a - \alpha &= 0 \quad \Rightarrow a = \alpha \\ x^3) \quad b &= 0 \quad \Rightarrow b = 0 \\ x^4) \quad 2a^2 + c &= 0 \quad \Rightarrow c = -2\alpha^2 \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

$$\therefore h(x) = \alpha x^2 - 2\alpha^2 x^4 + O(x^5) \quad (6.4.14)$$

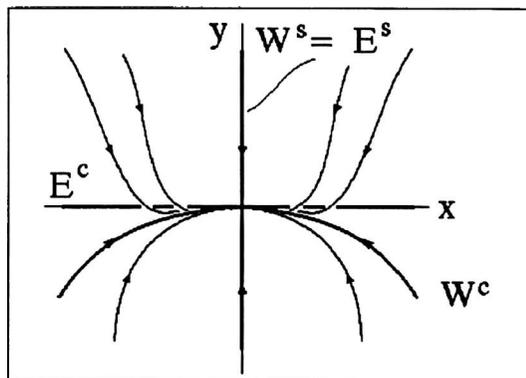
La ecuación diferencial para la variable  $x$ , restringida a la variedad central, se puede aproximar por:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = h(x)x \quad (6.4.15)$$

y por lo tanto en este caso resulta:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \alpha x^3 + \mathcal{O}(x^5) \quad (6.4.16)$$

Esta ecuación permite obtener la estabilidad de las trayectorias. En la Figura 6.4 se muestran algunas trayectorias de este sistema, junto con las variedades estable y central lineal y no lineal. El mismo procedimiento puede extenderse a sistemas de dimensión infinita sobre espacios de Banach [Carr 81].



*Figura 6.4. Variedades central y estable para el sistema linealizado y para el sistema no lineal. Las trayectorias dibujadas se hacen tangentes a  $W^c$  a medida que nos acercamos al origen.*

### 6.5. Aproximación variacional a la determinación de los modos normales no lineales en sistemas mecánicos oscilatorios.

A continuación se presentan dos casos: en el primero, que consiste en una viga de Bernoulli simplemente soportada y con una fundación parcial no lineal, se empleará una primer proyección de Galerkin para obtener la forma de los modos lineales. En el segundo caso, una placa circular con fundación parcial no lineal, se adoptará una aproximación variacional de Rayleigh-

Ritz.

Siguiendo la idea propuesta por Shaw y Pierre [Shaw et al 94] los modos normales se analizan como movimientos sobre la variedad central. Un teorema importante para el caso del problema de N osciladores es:

● Teorema Central de Lyapunov

*Si el Hamiltoniano es  $C^1$  y el sistema linealizado tiene autovalores puramente imaginarios  $\Omega_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) tales que las distintas frecuencias cumplan la condición de ser no resonantes, es decir que, para  $j \neq k$ ,  $\Omega_j/\Omega_k \neq n$  ( $n=1,2,\dots$ ), entonces existen  $m$  variedades invariantes locales,  $C^1$  y bidimensionales.*

La condición de no resonancia se requiere para hacer despreciable la mezcla entre modos que aparecen en los problemas no lineales. Estas  $m$  variedades 2D son la foliación de la variedad central vista en el acápite anterior. Las amplitudes modales lineales y las velocidades se consideran coordenadas independientes.

Los sistemas a los que es aplicable el método son de la forma:

$$\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} + \mathcal{L}[w(s,t)] + \mathcal{N}[w(s,t)] = 0, \quad (6.5.1)$$

donde  $s$  indica coordenadas espaciales adecuadas sobre el dominio  $\Omega$ . Las condiciones de borde deben ser de la forma:

$$\mathcal{B}[w(s,t)] = 0. \quad (6.5.2)$$

Los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{B}$  son lineales en tanto que el operador  $\mathcal{N}$  es no lineal pero se supone que posee las propiedades de continuidad necesarias para permitir que las soluciones puedan expandirse en serie hasta cualquier orden requerido. Todos los operadores actúan sobre las variables espaciales únicamente. El caso  $\mathcal{N}=0$  corresponde al sistema lineal; la solución exacta del problema lineal se obtiene mediante una técnica standard de separación de variables. Se propone:

$$w_0(s,t) = \chi(s) \exp(i\Omega t), \quad (6.5.3)$$

(que claramente no puede ser solución de la (6.5.1) !), donde el subíndice 0 significa que se trata del caso  $N=0$ . Cualquier conjunto completo de funciones  $\{\varphi_j(s), j=1,2,\dots,\infty\}$  que satisfaga las condiciones de borde se puede usar como base para la expansión de la parte espacial  $\chi(s)$ :

$$\chi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varphi_j(s). \quad (6.5.4)$$

Si  $\{\phi_j\}$  es una base ortonormal los coeficientes  $A_j$  están dados por:

$$A_j = \langle \chi(s), \varphi_j(s) \rangle \quad j=0,1,\dots,\infty \quad (6.5.5)$$

donde se ha hecho uso de la definición usual de producto interno:

$$\langle \phi(s), g(s) \rangle = \int_0^1 \rho(\xi) \phi(\xi) g(\xi) d\xi \quad (6.5.6)$$

La función  $\rho(\xi)$  es el factor de peso correspondiente. Para el caso de la viga de Bernoulli-Euler (ver Figura 6.5a) la ecuación de movimiento es:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + [k_f w + \eta_f w^3] [\theta(x) - \theta(x-a)] = 0, \quad (6.5.7)$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección de la viga y A es la sección transversal. En el caso de la placa circular (ver Figura 6.5b) la ecuación que gobierna el sistema es:

$$D \nabla^4 w + \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + [k_f w + \eta_f w^3] [\theta(r) - \theta(r-c) + \theta(r-b)] = 0. \quad (6.5.8)$$

Aquí H es el espesor de la placa y como es usual  $D = EH^3/[12(1-\mu^2)]$  es el coeficiente de rigidez a la flexión y  $\mu$  es el módulo de Poisson. En las ecuaciones (6.5.7) y (6.5.8),  $k_f$  y  $\eta_f$  son las constantes elásticas de la fundación y  $\theta(\xi)$  es la función escalón unitario de Heaviside. Un procedimiento completamente similar se puede aplicar para una gran variedad de configuraciones y de condiciones de contorno.

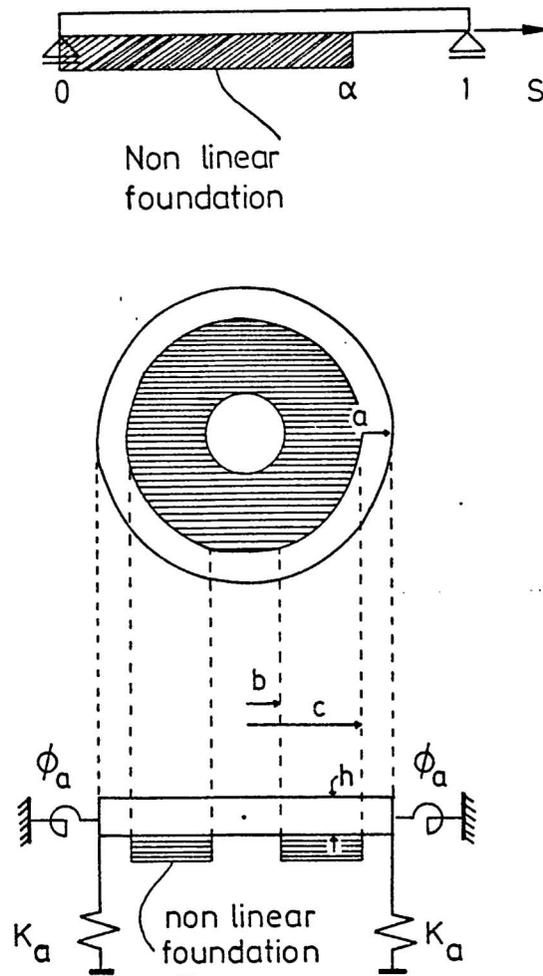


Figura 6.5. Sistemas bajo estudio. (a) Viga de Bernoulli simplemente soportada con fundación no lineal parcial. (b) Placa circular empotrada con fundación no lineal parcial

### b) Primer paso: aproximando las autofunciones lineales

Se utilizan dos métodos diferentes para determinar las autofunciones lineales aproximadas: una proyección de Galerkin en el caso de la viga de Bernoulli y el método de Rayleigh-Ritz en el caso de la placa circular.

Como se vió en la sección 4.3, en el método de Galerkin la parte espacial de la solución lineal se sustituye por una función aproximada:

$$\chi(s) \cong \chi_a(s) = \sum_{j=0}^N A_j \varphi_j(s) \quad (6.5.9)$$

por lo que la solución aproximada dependiente del tiempo resulta ser:

$$w_{0a}(s,t) = \chi_a(s) \exp(\pm i\Omega t) \quad (6.5.10)$$

Por supuesto, el conjunto finito  $\{\varphi_j(s), j=0, \dots, N\}$  genera un espacio de dimensión finita en lugar del espacio infinito-dimensional requerido para obtener una representación exacta de  $\chi(s)$ . Cuando se ensaya  $w_{0a}$  en la ecuación diferencial aparece una función de error espacial  $\epsilon_1(s)$ :

$$-\Omega^2 \chi_a(s) + \mathcal{L}[\chi_a(s)] = \epsilon_1(s) \quad (6.5.11)$$

En la construcción de Galerkin se exige que cada  $\varphi_j(s)$  satisfaga:

$$\langle \epsilon_1(s), \varphi_j(s) \rangle = 0 \quad j=0,1,\dots,N \quad (6.5.12)$$

es decir se fuerza que la función error  $\epsilon_1(s)$  sea perpendicular al espacio finito-dimensional generado por  $\{\varphi_j(s)\}$ . Esta condición de ortogonalidad implica que las  $A_j$ 's deben a su vez satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$-\Omega^2 \langle \chi_a, \varphi_j \rangle + \langle \mathcal{L}[\chi_a], \varphi_j \rangle = 0 \quad j=0,1,\dots,N \quad (6.5.13)$$

Los conjuntos  $\{\Omega_i; i=0, \dots, N\}$  y  $\{A_i^{(j)}; i,j=0, \dots, N\}$  son los  $N$  autovalores y los  $N$  autovectores respectivamente, del operador  $\mathcal{L}$  restringido al espacio  $N$  dimensional. Una vez obtenidas las autofunciones se obtiene fácilmente el correspondiente conjunto de modos lineales aproximados  $\{\chi_a^{(1)}, \dots, \chi_a^{(N)}\}$ . Este conjunto constituye la base para una segunda proyección de Galerkin como se explica abajo.

En el caso particular de la viga de la Figura 6.5a las ecuaciones espaciales adimensionales son:

$$\Omega^2 W + \frac{d^2 W}{ds^4} + [K_f W + N_f W^3] [\theta(s) - \theta(s-\alpha)] = 0, \quad (6.5.14)$$

en tanto que las condiciones de contorno están dadas por:

$$W(0)=0, \quad W(1)=0, \quad (6.5.15)$$

$$\left. \frac{d^2W(s)}{ds^2} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2W(s)}{ds^2} \right|_1 = 0 \quad (6.5.16)$$

donde  $W$  es el desplazamiento adimensional  $w/L$ ,  $s$  es la longitud adimensional  $x/L$ ,  $L$  la longitud de la viga y  $K_f$ ,  $N_f$  y  $\Omega$  son constantes adimensionales dadas respectivamente por:

$$K_f = \frac{k_f L^4}{EI}, \quad N_f = \frac{\eta_f L^6}{EI}, \quad \text{and} \quad \Omega^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI} \quad (6.5.17)$$

En el caso de la viga la base ortogonal adaptada es:

$$\varphi_j(s) = \text{sen}(j\pi s) \quad j=0,1,\dots,N \quad (6.5.18)$$

Y la condición de ortogonalidad para estas funciones es:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 1/2 \delta_{ij} \quad (6.5.19)$$

Para este caso es posible obtener la solución analítica; en la Tabla 1 se muestra una comparación entre los cinco autovalores más bajos y su aproximación por Galerkin para diferente número de términos (diferente valor de  $N$ ).

TABLA I  
COMPARACIÓN ENTRE LOS AUTOVALORES EXACTOS Y LOS APROXIMADOS PARA EL PROBLEMA LINEAL DE LA FIGURA 6.5a

	$\Omega_1^0$	$\Omega_2^0$	$\Omega_3^0$	$\Omega_4^0$
EXACTO	47.83389	101.68207	122.46296	175.81556
N=10	47.83598	101.68244	122.46392	175.81619
N=14	47.83447	101.68218	122.46324	175.81571
N=30	47.83390	101.68207	122.46296	175.81556

La Figura 6.6 muestra la diferencia entre la forma modal exacta y la aproximada para estos mismos casos. Se obtiene excelente acuerdo tanto para los autovalores como para las autofunciones, y puede verse que el error tiende rápidamente a cero a medida que  $N$  sube.

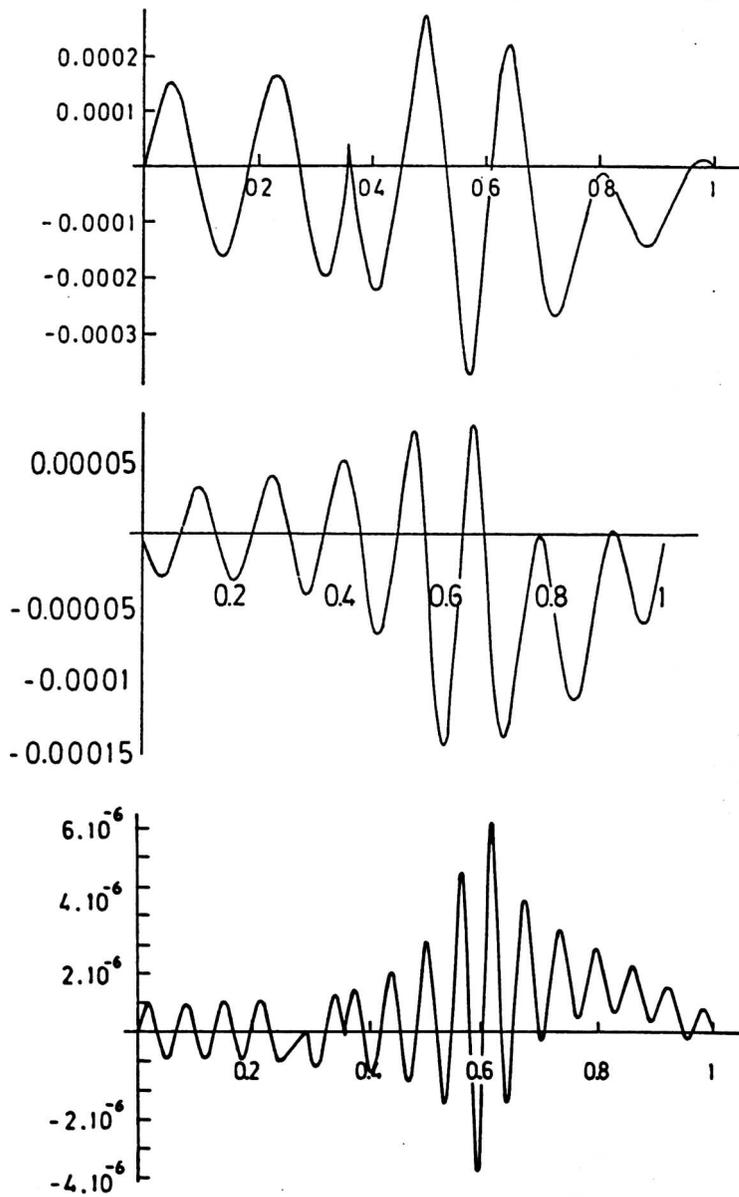


Figura 6.6. Diferencia entre la forma modal exacta y la aproximada para el problema lineal. (a) caso  $N=10$ , (b) caso  $N=14$ , (c) caso  $N=30$ .

### c) Segundo Paso: proyección de Galerkin

La solución de (6.5.14) se aproxima ahora mediante:

$$w_a(s,t) = \sum_{j=1}^J \chi_a^{(j)}(s) q_j(t) \quad (6.5.20)$$

donde  $q_j(t)$  representa la contribución del  $j$ -ésimo modo lineal a la respuesta del sistema. Al sustituir en la ecuación de movimiento (6.5.1) aparece una nueva función error  $\epsilon_2(s)$ . Repitiendo el procedimiento de Galerkin, pero ahora proyectando sobre cada  $\chi_a^{(i)}$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^J \ddot{q}_k \langle \chi_a^{(k)}, \chi_a^{(i)} \rangle + \sum_{k=1}^J q_k \langle \mathcal{L}[\chi_a^{(k)}], \chi_a^{(i)} \rangle + \langle \mathcal{N} \left[ \sum_{k=1}^J q_k \chi_a^{(k)} \right], \chi_a^{(i)} \rangle = 0. \quad (6.5.21)$$

( $i=0, 1, \dots, J$ )

Tomando en cuenta que:

$$\langle \mathcal{L}[\chi_a^{(i)}], \chi_a^{(j)} \rangle = \langle \Omega_i^2 \chi_a^{(i)}, \chi_a^{(j)} \rangle \quad (6.5.22)$$

el sistema (6.5.21) puede reescribirse como sigue:

$$\sum_{k=1}^J (\ddot{q}_k + \Omega_k^2 q_k) \langle \chi_a^{(k)}, \chi_a^{(i)} \rangle + G_i(q_1, \dots, q_J) = 0; \quad (i=0, 1, \dots, J) \quad (6.5.23)$$

Este sistema puede expresarse en forma matricial:

$$\mathbf{B}(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}) + \mathbf{G} = 0, \quad (6.5.24)$$

donde

$$\mathbf{B}_{ik} = \langle \chi_a^{(i)}, \chi_a^{(k)} \rangle, \quad \mathbf{A}_k = \Omega_k^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{G}_i = \langle \mathcal{N} \left[ \sum_{k=1}^J q_k \chi_a^{(k)} \right], \chi_a^{(i)} \rangle. \quad (6.5.25)$$

Dado que  $\{\chi_a^{(k)}, (k=0, \dots, J)\}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes, la matriz  $\mathbf{B}$  es no singular y tiene por lo tanto inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ . Pre multiplicando la ecuación (6.5.24) por esta matriz inversa se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{M} = 0 \quad (6.5.26)$$

donde:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{q}). \quad (6.5.27)$$

Para el caso particular de la viga de Bernoulli, las matrices y vectores en

(6.5.26) toman la forma:

$$\mathbf{B}_{ij} = (1/2) \sum_{k=1}^J \left[ \mathbf{A}_k^{(i)} \mathbf{A}_k^{(j)} \right] \delta_{ij} \quad (6.5.28)$$

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}(t)) = \sum_{l=0}^J \sum_{m=0}^J \sum_{n=0}^J \sum_{j=0}^J \mathbf{B}_{ij}^{-1} \mu_{jlmn} q_l q_m q_n \quad (i=0,1,\dots,J) \quad (6.5.29)$$

donde los coeficientes  $\mu_{jlmn}$ , los cuales dependen de la no linealidad, están dados por:

$$\mu_{jlmn} = N_f \left[ \sum_{rstu} A_r^{(j)} A_s^{(l)} A_t^{(m)} A_u^{(n)} \int_0^\alpha \varphi_r \varphi_s \varphi_t \varphi_u dx \right] \quad (6.5.30)$$

#### d) Tercer paso: aproximación de la variedad invariante

La ecuación (6.5.26) es análoga a la obtenida por Shaw [Shaw 94]. Su método puede ahora aplicarse de manera directa como sigue:

(i) la ecuación (6.5.26) es escrita como sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= p_i(t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\Omega_i^2 q_i(t) - M_i(\mathbf{q}(t)) \end{aligned} \quad (i=0,1,\dots,J) \quad (6.5.31)$$

(ii) la observación clave válida tanto para sistemas lineales como no lineales es: un movimiento de tipo modo normal es aquel, dentro de una familia de movimientos, para el cual el sistema se comporta como un oscilador de segundo orden. Tal movimiento tiene lugar sobre una variedad invariante bidimensional. Para sistemas débilmente no lineales estas variedades son curvadas pero necesariamente tangentes al autoespacio lineal en el punto de equilibrio ( $w(s,t) \equiv 0$ ).

(iii) la construcción de las variedades invariantes se lleva a cabo en la forma usual eligiendo en primer lugar  $(q_k, p_k)$  como coordenadas naturales que describen la variedad correspondiente al k-ésimo modo normal y luego suponiendo que el movimiento sobre todos los otros

pares de coordenadas  $(q_i, p_i)$  se puede describir en términos de  $(q_k, p_k)$ ; ésto restringe la dinámica del sistema completo a una variedad bidimensional y definiendo  $(q_k, p_k) = (u_k, v_k)$ , se supone que existe, al menos localmente, un modo normal expresable en la forma:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= Q_{ik}(u_k(t), v_k(t)) \\ p_i(t) &= P_{ik}(u_k(t), v_k(t)) \end{aligned} \quad i=0,1,\dots,J \quad (6.5.32)$$

Substituyendo (6.5.32) en (6.5.26) las ecuaciones a ser satisfechas por las  $Q_{ik}$ 's y las  $P_{ik}$ 's son obtenidas. Una forma cerrada para la solución de estas ecuaciones no puede hallarse en general, pero una solución local en la forma de una expansión en serie cerca del origen sí puede obtenerse. El procedimiento es standard para la construcción de variedades invariantes [Carr 81]. Para sistemas conservativos no giroscópicos. las expansiones de  $Q_{ik}(u_k, v_k)$  y  $P_{ik}(u_k, v_k)$  están restringidas a aquellos términos que son consistentes con modos normales de tipo onda estacionaria de amplitud constante. Ellos son:

$$Q_{ik}(u_k, v_k) = a_{1ik}u_k + a_{3ik}u_k^2 + a_{5ik}v_k^2 + a_{6ik}u_k^3 + a_{8ik}u_k v_k^2 + \dots \quad (6.5.33)$$

$$P_{ik}(u_k, v_k) = b_{2ik}v_k + b_{4ik}u_k v_k + b_{7ik}u_k^2 v_k + b_{9ik}v_k^3 + \dots \quad (6.5.34)$$

En esta expansión los únicos coeficientes no nulos son:

$$a_{1kk} = b_{2kk} = 1 \quad (6.5.35)$$

$$a_{6ik} = \frac{(7\Omega_k^2 - \Omega_i^2)\beta_{ikkk}}{(\Omega_k^2 - \Omega_i^2)(9\Omega_k^2 - \Omega_i^2)}, \quad (6.5.36)$$

$$a_{8ik} = \frac{6\beta_{ikkk}}{(\Omega_k^2 - \Omega_i^2)(9\Omega_k^2 - \Omega_i^2)} \quad (6.5.37)$$

con

$$\beta_{ilmn} = \sum_{j=1}^J \mathbf{B}_{ij}^{\dagger} \mu_{jlmn}, \quad (6.5.38)$$

y

$$b_{9ik} = a_{8ik}. \quad (6.5.39)$$

La frecuencia fundamental corregida es:

$$\Omega_0^* = \Omega_0 + \frac{3 \beta_{0000} U_0^2}{8\Omega_1} \quad (6.5.40)$$

y el modo normal fundamental corregido es:

$$\chi^{(0)*} = U_0 \chi_a^{(0)} + \sum_{i=2}^J \chi_a^{(i)} a_{6i0} U_0^3 + \dots \quad (6.5.41)$$

La Figura 6.7 muestra la comparación para el caso  $\alpha=0.6$ ,  $N_f=10^6$ ,  $K_f=10^4$  y  $U_0=0.04$ , entre ambos modos normales fundamentales, el lineal (aproximado por una proyección de Galerkin sobre un espacio de dimensión treinta) y el no lineal (corregido usando un espacio de dimensión seis para la segunda proyección de Galerkin).

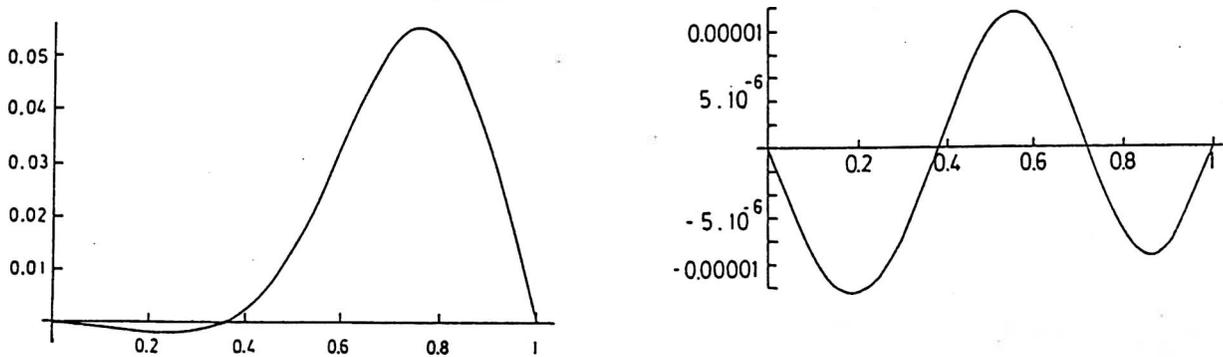


Figura 6.7. (a) Forma modal fundamental para la viga de Bernoulli de la Figura 6.9a. (b) Término principal de corrección no lineal

En tanto que el método presentado es, en algunos aspectos, similar a una técnica de perturbación standard, una comparación entre los resultados obtenidos por este método y los correspondientes a una combinación de balance armónico y expansión en autofunciones, muestra que se obtiene diferentes resultados para las formas modales no lineales aún para el caso simple presentado.

La aproximación de la frecuencia de las oscilaciones fundamentales coincide a primer orden pero la discrepancia en la forma modal a primer

orden conduce a diferencias en las frecuencias de los modos más altos. El emplear dos proyecciones de Galerkin es una técnica computacionalmente más eficiente ya que permite el uso de dos valores de dimensión diferentes para las matrices y vectores intervinientes: (a) un valor grande  $N$ , para la primera proyección de modo de reducir el error de la aproximación lineal y (b) un valor más bajo  $J$ , para la segunda proyección de modo de reducir el tiempo de cálculo total.

#### e) El caso de la placa

El método de Raleigh-Ritz ha sido usado en el capítulo 4 para la determinación de las frecuencias naturales, momentos flectores y coeficientes de pandeo de placas circulares.

En el caso de la placa simplemente soportada la ecuación adimensional es:

$$\nabla^4 W - \Omega^2 W + [K_f W + N_f W^3] [\theta(R) - \theta(R - \eta_1) + \theta(R - \eta_2)] = 0, \quad (6.5.42)$$

Donde  $W$  es el desplazamiento transversal adimensional  $w/a$ ,  $R$  es la coordenada radial adimensional  $r/a$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son los límites de la fundación y  $a$  es el radio de la placa. Por su parte  $\Omega$ ,  $K_f$  y  $N_f$  están dadas por:

$$\Omega^2 = \frac{\rho H \omega^2 a^4}{D} \quad ; \quad K_f = \frac{k_f a^4}{D} \quad ; \quad N_f = \frac{\eta_f a^6}{D}, \quad (6.5.43)$$

Considerando el caso de una placa con restricciones elásticas, tanto a la traslación como a la rotación, las condiciones de borde para los modos axisimétricos son:

$$\Phi_a \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_{R=1} = - \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial R} \right]_{R=1} \quad (6.5.44)$$

$$K_a W \Big|_{R=1} = + \left[ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial R} \right]_{R=1}$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace,  $\Phi_a$  es el coeficiente de flexibilidad adimensional para el resorte que impone el vínculo de rotación y  $K_a$  es la constante del resorte a la traslación. Estos dos últimos están dados por:

$$\Phi_a = \frac{a}{\Phi_a D} \quad K_a = \frac{k_a a^3}{D} \quad (6.5.45)$$

La aproximación para la determinación de los modos axisimétricos es la misma ya utilizada en el capítulo 4:

$$W(R) \cong W_a(R) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=1}^3 A_j C_{ij} R^{\gamma_i + 2j} \quad (6.5.46)$$

$$C_{ij} = \{1, \alpha_j, \beta_j\} \quad \text{y} \quad \gamma_i = \{0, 2, 4\} \quad (6.5.47)$$

donde las  $\alpha_j$ 's y las  $\beta_j$ 's se determinan sustituyendo cada función coordenada en las condiciones de contorno.

Substituyendo (6.5.46) en (6.5.44) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^3 C_{ij} \left[ (\gamma_i + 2j) \Phi_a + (\gamma_i + 2j)(\gamma_i + 2j - 1) + \mu(\gamma_i + 2j) \right] = 0, \quad (6.5.48)$$

$$\sum_{i=1}^3 C_{ij} \left[ K_a - (\gamma_i + 2j)^2 (\gamma_i + 2j - 2) \right] = 0,$$

con  $j=0, 1, 2, \dots, N$ .

El funcional adimensional apropiado para este problema es:

$$J_{ad}(W) = U_p + U_b + U_f - T_p \quad (6.5.49)$$

donde:

$$U_p = \pi D \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] r dr \quad (6.5.50)$$

$$U_b = \pi D \left[ \Phi_a \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=1}^2 + K_a (W^2)_{r=1} \right] \quad (6.5.51)$$

$$U_f = \pi D K_f \int_{\eta_1}^{\eta_2} W^2 r dr \quad (6.5.52)$$

y

$$T_p = \pi D \Omega^2 \left[ \int_0^1 W^2 r dr \right] \quad (6.5.53)$$

son las expresiones correspondientes a las distintas energías intervinientes en el problema: la energía potencial de deformación de la placa, la energía de los vínculos elásticos, la energía potencial de deformación de la fundación y la energía cinética del plato respectivamente. Además,

$$\Omega^2 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D} ; \alpha_1 = \frac{b}{a} ; \alpha_2 = \frac{c}{a} ; K_f = \frac{k_f a^4}{D} \quad (6.5.54)$$

son respectivamente el coeficiente de frecuencia adimensional y los radios de los bordes interno y externo de la fundación. Tal como se indicara en el capítulo 4 se requiere:

$$\frac{\partial J_{ad} [W_a]}{\partial A_j} = 0 \quad j=0,1,\dots, N \quad (6.5.55)$$

y de la condición de no-trivialidad para las  $A_j$ 's se obtienen las frecuencias.

Es una tarea relativamente simple obtener las frecuencias con buena precisión pero el cálculo de las formas modales significa resolver un sistema de ecuaciones lineales con matriz singular. En realidad numéricamente la situación más común es la de una matriz cuasi singular. Este problema se hace particulamente grave cuando la dimensión con que se trabaja es elevada. Para sortear el problema se empleó la técnica de Descomposición del Valor Singular (SVD) [Press et al 92] que se explica en el apéndice A2.

Como prueba de la convergencia del método se estudió el caso de una placa empotrada. En este caso la solución exacta es simple:

$$W_0(r) = C J_0(\sqrt{\Omega} r) I_1(\sqrt{\Omega} r) + D I_0(\sqrt{\Omega} r) J_1(\sqrt{\Omega} r), \quad (6.5.56)$$

con  $J_i$  y  $I_i$  funciones de Bessel de primera clase y modificadas respectivamente. La Tabla II muestra la frecuencia fundamental para diferente número de términos.

TABLA II  
CONVERGENCIA DE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL EN EL CASO DE UNA PLACA CIRCULAR EMPOTRADA SIN FUNDACIÓN

Número de términos	frecuencia adimensional $\Omega_0$	valor exacto
2	10.217027669954404701	10.21582620060082
3	10.215827743253612425	
4	10.215826231455139350	
5	10.215826229854428675	

La Figura 6.8a muestra la forma modal fundamental exacta en tanto que la Figura 6.8b muestra la diferencia entre ella y las formas modales aproximadas obtenida con  $N=10$ . El valor máximo del error es aproximadamente  $10^{-9}$ .

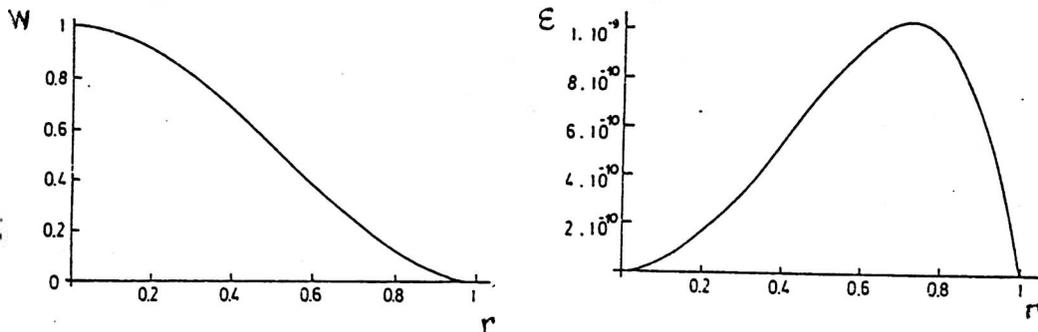


Figura 6.8. (a) Forma modal exacta para la placa circular empotrada; (b) diferencia entre las formas exacta y aproximada para  $N=10$

Para este caso particular las matrices y vectores de (6.5.26) toman la forma:

$$\mathbf{B}_{ij} = 2\pi \sum_{k=0}^J \sum_{n=1}^3 \sum_{l=0}^J \sum_{m=1}^3 \left[ A_k^{(i)} A_l^{(j)} \right] \frac{C_{nk} C_{ml}}{2k+2l+\gamma_n^{(i)}+\gamma_m^{(j)}+1} \quad (6.5.57)$$

$$\mu_{ilmn} = N_f \left[ \sum_{rstu} A_r^{(i)} A_s^{(l)} A_t^{(m)} A_u^{(n)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi_r \varphi_s \varphi_t \varphi_u dx \right] \quad (6.5.58)$$

y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la viga se obtiene el modo y la frecuencia corregidos.

## 6.6. Conexión entre sistemas vibrantes continuos disipativos y osciladores de baja dimensión.

Habiendo avanzado desde los sistemas oscilatorios de baja dimensión hacia los de dimensión infinita es interesante recalcar una vez más la relación entre ambos, mostrando cómo dos de los problemas analizados (la viga de Bernoulli con fundación no lineal y el oscilador S) están vinculados a través de una proyección de Galerkin.

Sea por ejemplo el caso de una viga tipo Bernoulli. La ecuación correspondiente al caso lineal es como ya se vio:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{EI_z}{\rho A} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = 0 \quad (6.6.1)$$

incorporando términos de amortiguamiento viscoso (con lo que se convierte en un sistema disipativo) y una fundación no lineal, esta ecuación resulta de la forma:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \gamma(\xi) \xi = 0 \quad (6.6.2)$$

Un caso particular de las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma(\xi)$  conduce a la siguiente ecuación: ojo revisar el tema de los signos en osc. discretos y continuos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{(a^2 + \omega^2)}{\pi^4} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} + (6b^2 \omega^2 + 2a) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left[ \frac{b^2 \xi^5}{5} - \frac{8ab \xi^4}{3} \right] \xi = 0 \quad (6.6.3)$$

Si la viga está simplemente soportada en ambos extremos la los modos normales lineales para el caso lineal tienen la forma:

$$\phi_j(x) = \text{sen } j\pi x \quad (6.6.4)$$

Ensayando

$$\xi(x,t) = q(t) \text{sen } j\pi x \quad (6.6.5)$$

y exigiendo el cumplimiento del requisito de Galerkin, se llega a la siguiente ecuación ordinaria para la función  $q(t)$ :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + (4bq^2 + 2a) \frac{dq}{dt} + b^2 q^5 - 2abq^3 + (a^2 + \omega^2) q = 0 \quad (6.6.6)$$

ecuación correspondiente al oscilador S estudiado en el Capítulo 2, en relación con el problema de la sincronización de osciladores de baja dimensión.

Es importante notar que, al reducir la aproximación a un sistema de segundo orden se pierde mucha de la riqueza del sistema continuo; en efecto, es un hecho conocido que la no linealidad permite la aparición de frecuencias de batido que son sumas o diferencias de las frecuencias de los distintos modos. Este comportamiento obviamente no aparece si se reduce la aproximación de Galerkin en la forma mostrada arriba. Nótese además que todos los puntos de la viga comparten su respuesta temporal, dada por la función  $q(t)$ .

## Conclusiones y perspectivas

A lo largo de esta tesis se han estudiado los fenómenos oscilatorios que aparecen en sistemas no conservativos y conservativos, de baja o alta dimensión, utilizando distintos enfoques. El primer enfoque, adoptado en el capítulo 2 corresponde al análisis de la dinámica de modelos teóricos de osciladores forzados no lineales a través de la teoría cualitativa. El análisis basado en la teoría cualitativa podría definirse como *cinemático* en el sentido que se efectúa la descripción de las variables de estado del modelo y no un análisis basado en, por ejemplo, intercambios energéticos.

Además de permitir la determinación de las soluciones, el aporte "físico" de la teoría cualitativa es el permitir una clara identificación de las similitudes entre diferentes modelos, sobre la base del análisis de sus singularidades. Asimismo queda clara la conexión entre sistemas continuos y discretos que permite por ejemplo estudiar la existencia de órbitas periódicas, cuasiperiodicidad, caos y sincronización a través del análisis del mapa de Poincaré. En particular, se ha podido unificar el tratamiento de una amplia gama de fuerzas externas de tipo pulsado mediante las isofases y los mapas unidimensionales (PTC). También se ha logrado incluir dentro de este esquema el análisis de sistemas con retardo en su lazo de realimentación.

El segundo enfoque, utilizado en el capítulo 3 y vinculado con el problema de la búsqueda de modelos en los sistemas reales, podría denominarse *geométrico* y está estrechamente ligado a la experimentación. El punto esencial consiste en muestrear una de las variables de estado del sistema y, a partir de esas muestras, reconstruir la dinámica en el espacio de fases. Por ejemplo, se pueden determinar las dimensiones del atractor y conocer, de este modo, el número mínimo de ecuaciones diferenciales que un modelo matemático debe contener para representar la dinámica observada. Por su parte los exponentes de Lyapunov permiten conocer las direcciones en las que el atractor se estira o se contrae hasta volverse caótico.

Para el estudio experimental se comenzó con un montaje básico que per-

mitió, en una primera etapa, la reconstrucción de atractores y la determinación experimental de varias características geométricas y dinámicas de un oscilador tipo Puente de Wien modificado: la dimensión de correlación, los exponentes de Lyapunov, el espectro de Fourier y la reconstrucción de las regiones de sincronización. Se perfeccionó luego este arreglo experimental inicial hasta llegar en la actualidad al banco de medición controlado por computadora, descrito en el acápite 3.8. Este banco de medición permite el análisis de osciladores con un contenido relevante de frecuencias de hasta 25 KHz. El tipo de forzado externo puede seleccionarse mediante software.

Con la configuración actual se pueden utilizar fuerzas senoidales y pulsadas. En este último caso se admiten excitaciones con pulsos tanto de amplitud constante como paramétricos. Dado que los pulsos son generados por un conversor digital-analógico (DAC), es posible adoptar una forma funcional arbitraria para la amplitud de los mismos. El período de los pulsos externos se fija por software, en el momento de la inicialización, y se mantiene constante durante todo el proceso de adquisición. Una extensión interesante que se piensa encarar en el futuro es la modificación del sistema para que puedan utilizarse pulsos de excitación cuyo período sea variable en función de la señal medida.

Para el caso de pulsos paramétricos, que requieren la medición de una variable de estado, también puede introducirse un retardo, ajustable por programa, entre el momento de la medición y la aplicación del pulso, para simular las características de un proceso de medición real. Puede de este modo estudiarse experimentalmente el tipo de problema que, en el capítulo 2, se encarara desde el punto de vista de la teoría cualitativa.

Por último en los capítulos 4 a 6 se han estudiado los sistemas de dimensión infinita mediante un análisis variacional. El análisis variacional ha tenido una innegable trascendencia en todo el desarrollo de la física como queda de manifiesto en la visión que aporta a la comprensión, por ejemplo, de la mecánica clásica, de la mecánica estadística y de la teoría de Campos. Los resultados obtenidos en esta tesis muestran que, además, estos métodos permiten realizar cálculos muy precisos y compiten con éxito,

tanto en problemas lineales como no lineales, con métodos como el de elementos finitos.

El cálculo de frecuencias y formas modales en sistemas no lineales, efectuado en el capítulo 6, establece además la conexión con los métodos de la teoría cualitativa, resaltando la importancia de las variedades invariantes como subespacios relevantes del espacio de fases del sistema. Se ha podido resolver, mediante esta combinación de métodos variacionales y teoría cualitativa, problemas cuya solución analítica no se conoce en forma exacta, aún en el caso lineal.

Habiendo avanzado a lo largo de la tesis desde baja a alta dimensión el ejemplo desarrollado en el último acápite muestra la estrecha conexión que existe entre los sistemas de dimensión infinita y los de baja dimensión; conexión ésta que sugiere fuertemente la conveniencia de estudiarlos en forma conjunta.

Existen varias líneas de trabajo que resultan continuación natural de los temas tratados en esta tesis: los problemas de control del caos y el desarrollo de sistemas de comunicaciones privadas utilizando portadoras caóticas están directamente relacionados con los resultados de los capítulos 2 y 3. Los nuevos mecanismos de sincronización presentados recientemente en [Rosenblum et al. 96, Kocarev et al. 96a, 96b] permiten considerar sincronizaciones de tipo más general que la de frecuencia o de fase tradicionales. En efecto es posible definir una *fase generalizada*, aún para señales caóticas, basada en la transformada de Hilbert de la señal [Smith 92].

En el caso de los problemas modelados por EDDP surgen como continuación interesante el caso de sistemas anisótropos no lineales, de amplia aplicación a los materiales compuestos modernos, tales como los de matriz polimérica y fibra de vidrio, usuales en estructuras con requerimiento de peso reducido. También resulta de interés el estudio de los problemas de valor inicial no lineales que aparecen en los fenómenos de transporte.

## Agradecimientos

En primer lugar todo mi reconocimiento a mi director de Tesis, Dr. Luis Epele quien además de guiarme en la labor científica desarrollada me ha brindado todo su apoyo y su compañerismo.

A mis profesores de la Universidad Nacional de La Plata a quienes debo la permanente preocupación por brindar una formación del más alto nivel. en especial al Dr. Horacio Falomir y la Dra. Mariel Santángelo por innumerables ayudas durante toda mi carrera. A los Dres. Huner Fanchiotti y Carlos García Canal que me entusiasmaron, primero con la idea de encarar una nueva carrera, y luego con el estudio de los sistemas no lineales. A la Dra. Cristina Caracoche, cuyo aliento permanente ha sido de gran ayuda en los momentos difíciles.

A los Dres. Patricio Laura y Daniel Avalos que han sido para mí un ejemplo permanente, como científicos y como seres humanos. En especial les debo el haberme hecho notar la importancia de los métodos variacionales, y el haberme honrado con su amistad.

A mis amigos "caóticos" Diego González, Oreste Piro, Lilia Romanelli, Alejandra Figliola, Gabriel Mindlin y Marcelo Magnasco. A mis compañeros del departamento de Física de la Facultad de Ingeniería (UNMDP): Celso Aldao, Miguel Arizmendi, Daniel Cortázar, Juan Sánchez, Roberto Stimler y Fernando Tomasel. A Raúl Rivera, Roberto Hidalgo, Raúl Marcángeli y Manuel González con quienes tengo el gusto de seguir estudiando electrónica.

Son muchas las personas con quienes estoy en deuda, autoridades, docentes, no docentes y alumnos de la Facultad de Ingeniería (UNMDP) que de muy diversas formas han contribuido a la concreción de esta tesis. A mi familia que me ha soportado estoicamente. A todos ellos MUCHAS GRACIAS.

A mis padres,... me resulta imposible enumerar todo lo que les debo; en especial quiero agradecerles el haberme regalado el placer de disfrutar con el conocimiento.

## Bibliografía

Akin E.

*The General Topology of Dynamical Systems*

American Mathematical Society

Serie Graduate Studies in Mathematics, Vol. 1, 1993.

Albano A.M., J.Muench, C.Schwartz, A.I.Mees, P.E.Rapp

"Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm"

Physical Review A **38(0)** (1988)

Ames W.F.

*Numerical Methods for Partial Differential Equations*

Academic Press (1992)

Andronov A.A., E.A.Vitt

*Theory of Oscillations*

Pergamon Press, Oxford, 1966.

Arizmendi C.M., H.A.Larrondo, J.R.Sánchez, O.Piro

"Bifurcaciones y Caos en un Oscilador Electrónico No Lineal"

69a. Reunión Nacional de la AFA - Buenos Aires (1984).

Arizmendi C.M., H.A.Larrondo, J.R.Sánchez, O.Piro

"Estudio del mapa de fase de la ecuación de Van der Pol en régimen de Relajación Fuerte"

70a. Reunión Nacional de la AFA - Rosario (1985).

Arnold V.I., A. Avez

*Ergodic Problems of Classical Mechanics*

Benjamin, New York (1974)

Avalos D.R.; H.Hack, P.A.A.Laura.

"Galerkin Method and Axisymmetric Vibrations of Polar Orthotropic Circular Plates"

American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 20 (1982) 1626.

Ávalos D.R.; P.A.A. Laura, A.M.Bianchi

"Analytical and experimental investigation on vibrating circular plates with stepped thickness over a concentric circular region"

Journal of the Acoustical Society of America 82/1 (1987) 13.

Ávalos D.R., P.A.A.Laura, H.A.Larrondo

"Vibrating Circular Plates with Stepped Thickness over a Concentric Circular Region: A General Approximate Solution"

Journal of the Acoustical Society of America **84/4** (1988) 1181

Ávalos D.R., H.A.Larrondo, P.A.A.Laura

"Free and Forced Vibrations of a Simply Supported Rectangular Plate Partially Embedded in an Elastic Foundation"

Applied Acoustics 28 (1989) 295.

Ávalos D.R., P.A.A.Laura, H.A.Larrondo  
"Forced Vibrations of Circular Stepped Plates"  
Journal of Sound and Vibration 136/1 (1990) 146.

Ávalos D.R., H.A.Larrondo, P.A.A.Laura  
"Vibrations of a Simply Supported Plate Carrying an Elastically Mounted Concentrated Mass"  
Ocean Engineering 20/2 (1993) 195.

Ávalos D.R., H.A.Larrondo, P.A.A.Laura  
"Transverse Vibrations of a circular plate carrying an elastically mounted mass"  
Journal of Sound and Vibration 177/2 (1994) 251.

Ávalos D.R., H.A.Larrondo, V.Sonzogni, P.A.A.Laura  
"A general approximate solution of the problem of Annular plates of stepped thickness"  
Journal of Sound and Vibration **196(3)** (1996) 275-283

Ávalos D.R., H.A.Larrondo, P.A.A.Laura, E.Rossi  
"Transverse Vibrations of Simply Supported Rectangular Plates with Rectangular Cut-Outs Carrying Elastically Mounted Concentrated Mass"  
Aceptado para su publicación en Jour. of Sound and Vib (1997).

Babloyantz A., Lourenco, C., Sepulchre, J.A.  
"Control of chaos in delay differential equations, in a network of oscillators and in model cortex"  
Physica D **86(1/2)** (1995) 274

Basombrio F.G., M.J.Vénere  
"Notas introductorias al Método de Elementos Finitos"  
Instituto Balseiro (1986) 1-56

Benamar R., M.M.K.Bennouna and R.G.White  
"The effects of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic structures, Part I: simply supported and clamped-clamped beams"  
Journal of Sound and Vibration **149(2)** (1991) 179-195.

Bennouna M.M., R.G.White  
"The effects of large vibration amplitudes on the fundamental modal shape of a clamped-clamped uniform beam"  
Journal of Sound and Vibration **96(3)** (1984) 309-331

Bhat T.B., H.A.Larrondo, V.Topalián, D.R.Avalos, P.A.A.Laura  
"Free Vibrations of annular circular plates of discontinuously varying thickness and elastically restrained edges"  
Applied Mechanics in the Americas Vol 2 (1995) 23.

Blaquiere A.  
*Non-linear Systems Analysis*  
Academic Press, New York 1966.

Boe E., H.Chang

"Dynamics of delayed systems under feedback control"  
Chemical Engineering Science **44** (1989) 1281-1294

Bonilla L.L., C.J.Pérez Vicente, J.M.Rubí

"Glassy Synchronization in a Population of Coupled Oscillators"  
Journal of Statistical Physics **70** (1993) 921-937

Bottani S.

"Pulse-Coupled Relaxation Oscillators: from Biological Synchronization to Self-Organized Criticality"  
Physical Review Letters **74(21)** (1995) 4189-4192

Campbell A., A.González, D.L.González, H.A.Larrondo, O.Piro

"Universalidad de la Transición al Caos en Osciladores de Relajación"  
71a. Reunión Nacional de la AFA - Córdoba (1986a).

Campbell A., A.González, D.L.González, H.A.Larrondo, O.Piro

"Numerical Analysis of the Transition to Chaos in the Van der Pol Oscillator Impulsively Stimulated"  
Coloquio Franco Latino Americano de Física - Buenos Aires (1986b).

Campbell A., A.González, D.L.González, O.Piro y H.A.Larrondo

"Isochrones and the dynamics of kicked oscillators"  
Physica **A155** (1989) 565-584

Capecchi D.

"Geometric Aspects of the Parametrically Driven Pendulum"  
Nonlinear Dynamics **7(2)** (1995) 231.247

Carlson A.B.

*Communication Systems*  
McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo (1968)

Carr J.

*Applications of Center Manifold Theory.*  
New York: Springer Verlag (1981)

Carroll T., J.Heagy, L.M.Pecora

"Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators"  
Physics Letters A **186** (1994) 225-229

Cartwright M.L., J.E.Littlewood

"On the non-linear differential equations of the second order"  
Journal of London Mathematical Society **20** (1945) 180-189

Cartwright M.L.

"Forced oscillations in nearly sinusoidal systems"  
Journal of the Institute of Electrical Engineering **95** (1948) 223-227

- Case W.B.  
 "Time-delay oscillator and instability: A demonstration"  
 American Journal of Physics **62(3)** (1994) 227-230.
- Chevalier T., A.Freund, J.Ross  
 "The effects of a nonlinear delayed feedback on a chemical reaction"  
 Journal of Chemical Physics **95(1)** (1991) 308-316
- Churchill R.V.  
*Fourier series and boundary value problems*  
 Mc. Graw Hill, N.Y. (1941)
- Cole J.D.  
 "On a Quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics"  
 Quarterly of Applied Mathematics **9** (1951) 225-236
- Collatz L.  
*The numerical treatment of differential equations in engineering*  
 Academic Press (1965)
- Courant R, D. Hilbert  
*Methods of Mathematica Physics*  
 John Wiley & Sons (1989)
- Crandall S.H.  
*Engineering analysis*  
 Mc. Graw Hill (1956)
- D'Azzo J., C.H.Houpis  
*Sistemas Realimentados de control (Análisis y Síntesis)*  
 Paraninfo (1970).
- Deift P., C.D.Levermore, C.E.Wayne (ed.)  
*Dynamical Systems and Probabilistic Methods in Partial Differential Equations*  
 American Mahtematical Society - Serie Lectures in Applied Mathematics, Vol 31, 1994
- DeYoung P.A., LaPointe, D., Lorenz, W.  
 "Nonlinear coupled oscillators and Fourier transforms: An advanced undergraduate laboratory"  
 American journal of physics. **64(7)** (1996) 898.
- Duff G.F.D., D.Naylor  
*Differential Equations of Applied Mathematics*  
 John Wiley & Sons (1966)
- Epstein I.R.  
 "Oscillations and chaos in chemical systems"  
 Physica **7D** (1983) 47-56
- Feigenbaum M.J.

"Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations"  
Journal of Statistical Physics **19** (1978) 25

Feingold M., D.L.González, O.Piro y H.Vituro  
"Phase locking, period doubling and chaotic phenomena in externally driven excitable systems"  
Preprint

Figliola A., D.L.González, H.A.Larrondo, L.Romanelli  
"Influence of Dissipation in Chaotic Bubbles"  
2do. Medifynol (1987) Luján.

Ferguson N.B., B.A.Finlayson  
"Error Bounds for Approximate Solutions to Nonlinear Ordinary Differential Equations"  
AIChE Journal **18(5)** (1972) 1053-1059

Finlayson B.A., L.E.Scriven  
"The Method of Weighted Residuals - A Review"  
Applied Mechanics Reviews **19(9)** (1966) 735-748

Gallego Juárez J.A.  
"Axysymmetric vibrations of circular plates with stepped thickness"  
Journal of Sound and Vibration **26** (1973) 411-416

Giacomelli G., M.Calzavara, F.T.Arecchi  
"Instabilities in a semiconductor laser with delayed optoelectronic feedback"  
Optics Communications **74(1,2)** (1989) 97-101

Glass L., R.Pérez  
"Fine structure of phase locking"  
Physical Review Letters **48** (1982) 1772-1775

Glass L., M.R.Guevara, A.Shrier y R.Pérez  
"Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator"  
Physica **7D** (1983) 89-101

Glass L., A.T.Winfrey  
"Discontinuities in phase resetting experiments"  
American Journal of Physiology **246**, (1984) R251-8

Glass L., M.R.Guevara, J.Bélair y A.Shrier  
"Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator"  
Physical Review **29A** (1984) 1348-1357

Goldstein H.  
*Classical Mechanics*  
2nd. ed. Addison-Wesley (1980)

Golub G.H., C.F. van Loan  
*Matrix Computations*

3a. ed. The Johns Hopkins University Press (1996)

González D.L., O.Piro  
"Chaos in a Nonlinear Driven Oscillator with Exact Solution"  
Physical Review Letters **50(12)** (1983) 870-872

González D.L., O.Piro  
"One-Dimensional Poincaré Map for a Non-Linear Driven Oscillator:  
Analytical Derivation and Geometrical Properties"  
Physics Letters **101A (9)** (1984a) 455-458

González D.L., O.Piro  
"Disappearance of chaos and integrability in an externally modulated  
nonlinear oscillator"  
Physical Review A **30(5)** (1984b) 2788-2790

González D.L., O.Piro  
"Symmetric Kicked Self-Oscillators: Iterated Maps, Strange Attractors and  
Symmetry of the Phase-Locking Farey Hierachy"  
Physical Review Letters **55(1)** (1985) 17-20

González D.L., H.A.Larrondo, F.Tomasel, L.Romanelli  
"Measurement of the Correlation Dimension in an Electronic Oscillator"  
First Workshop on Non-linear Phenomena and 3rd. Medifinol - Mar del Plata  
(1988)

González D.L., G.B.Mindlin, M.O.Magnasco, H.A.Larrondo, L. Romanelli  
"A Universal Departure from the Classical Period Doubling Spectrum"  
Physica D **39** (1989) 111.

González D.L., O.Piro  
"Analytical description of the global bifurcation pattern and the phase  
portrait of a two dimensional exactly solvable nonlinear oscillator.  
Relaxation oscillations and saddle-node collisions"  
Preprint (1994)

Grassberger P.  
"Generalization of the Hausdorff dimensions of fractal measures"  
Physics Letters **97A** (1983) 227.

Grassberger P., I.Procaccia  
"On the characterization of strange attractors"  
Physical Review Letters **50** (1983) 346

Grassberger P., I.Procaccia  
"Measuring the strageness of strange attractors"  
Physica **9D** (1983) 189

Grebogi C., E.Ott y J.A.Yorke  
"Chaos, Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear  
Dynamics"  
Science **238**, (1987) 632-638

Guckenheimer J., P.Holmes

*Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*  
Springer, Berlin 1983.

Guevara M.R., L.Glass y A.Shrier

"Phase-locking, period doubling bifurcations and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells"  
*Science* **214** (1981) 1350-1353

Guevara M.R., L.Glass

"Phase-locking, period doubling bifurcations and chaos in a mathematical model of periodically driven oscillators"  
*Journal of Mathematical Biology* **14** (1982) 1-23

Gunaratnam D.J., A.P.Bhattacharya

"Transverse vibrations and stability of polar orthotropic circular plates; high-level relationships"  
*Journal of Sound and Vibration* **137** (1989) 383-392

Haken H.

"At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point"  
*Physics Letters* **94A** (1983) 71-72

Helleman R.H.G.

"Self-Generated chaotic behavior in nonlinear mechanics"  
*Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*  
E.G.D. Cohen, Editor  
North-Holland Publishing Co. (1980).

Hénon M.

"A two dimensional mapping with a strange attractor"  
*Communications on Mathematical Physics* **50** (1976) 69-77.

Hirsch M.W., S.Smale

*Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*  
Academic Press, New York, 1974.

Hodgkin A.L., A.F.Huxley

"A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve"  
*Journal of Physiology* **117** (1952) 500-544

Holden A.V.

*Chaos*

Princeton University Press, Princeton New Jersey (1986)

Holmes P.J., D.Rand

"Bifurcations of the forced van der Pol oscillator"  
*Quarterly of Applied Mathematics* **35** (1978) 495-509

- Hunt E.R.  
 "Stabilizing high-period orbits in chaotic system: the diode resonator"  
 Physical Review Letters **67(15)** (1991) 1953
- Hunt E.R., G.Johnson  
 "Keeping chaos at bay"  
 IEEE Spectrum (Nov. 1993) 32-36
- Katz A.  
*Principles of Statistical Mechanics: the information theory approach*  
 W.H.Freeman and Co. (1967)
- Knobloch A.N., N.O.Weiss  
 "Bifurcations in a model of double diffusive convection"  
 Physics Letters **85A** (1981) 127
- Kocarev L., U. Parlitz  
 "General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication"  
 Physical Review Letters **74(25)** (1995) 5028
- Kocarev L., U.Parlitz  
 "Generalized Synchronization, Predictability and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems"  
 Physical Review Letters **76(11)** (1996a) 1816-2206.
- Kocarev L., U.Parlitz  
 "Synchronizing Spatiotemporal Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators"  
 Physical Review Letters **77(11)** (1996b) 2206-2210.
- Krasovskiy A.V., Yu.A.Morozov, N.I.Sinitsyn  
 "Transient processes during frequency tuning in two-loop microwave oscillator with delay in a nonlinear element"  
 Radioteknika i elektronika **6** (1990) 50-56
- Landau L.D., E.M.Lifshitz  
*Fluid Mechanics*  
 Addison-Wesley Publishing Co. (1959)
- Larrondo H.A., D.R.Ávalos, P.A.A.Laura  
 "Natural Frequencies of a Bernoulli Beam Carrying an Elastically Mounted Concentrated Mass"  
 Ocean Engineering **19/5** (1992) 461.
- Larrondo H.A., D.R.Ávalos, P.A.A.Laura  
 "Axisymmetric Vibrations and Buckling of Non-uniform Cylindrically Aeolotropic Circular Plates Carrying a Central Concentrated Mass"  
 Journal of Sound and Vibration **168/1** (1993) 31.
- Larrondo H.A., V.Topalián, D.R.Avalos, P.A.A.Laura  
 "Comments on 'Free vibration analysis of annular plates by the DQ method'"  
 Journal of Sound and Vibration **177/1** (1994) 137.

Larrondo H.A., L.N.Epele  
"Nonlinear modes of oscillation: general approach"  
Proceedings del VI Workshop on Information Processing and Control (1995)

Larrondo H.A., D.R.Avalos, P.A.A.Laura  
"Dynamics of a kicked oscillator with a delay in its parametric feedback loop: an analytical study"  
Nonlinear Dynamics 11/4 (1996a) 407-419

Larrondo H.A., R.R.Rivera, R.M.Hidalgo, L.Epele  
"Employing the DMA transfer method capabilities of standard PC for the experimental study of kicked oscillators"  
Aceptado para su publicación a IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. (1996b)

Larrondo H.A., D.R.Avalos, L.N.Epele  
"Normal axisymmetrical modes of oscillation of a circular plate with a non-linear foundation"  
Proceedings del MECOM'96 (1996c)

Larrondo H.A., L.N.Epele  
"Variational Approach to the Determination of Non-linear Normal Modes of Oscillation in Mechanical Systems"  
Enviado a Journal of the Acoustical Society of America (1997a)

Larrondo H.A., R.R.Rivera, R.M.Hidalgo, L.N.Epele  
"The complex behavior of the Wien-bridge oscillator"  
Preprint (1997b)

Laura P.A.A.  
*Introducción a la Teoría de Vibraciones de Sistemas Discretos y Continuos*  
Eudeba, (1973)

Laura P.A.A., D.R.Ávalos, H.A.Larrondo  
"Numerical Experiments on the vibration of Circular Plates with Stepped Thickness and with Edges elastically restrained against Rotation and Translation"  
Journal of Sound and Vibration 146(3) (1991a) 533-536.

Laura P.A.A., H.A.Larrondo, V.H.Cortinez, D.R.Ávalos  
"Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non Uniform Thickness Subjected to a Uniform State of In-plane Stress"  
Journal of Sound and Vibration 151/1 (1991b) 175.

Laura P.A.A., H.A.Larrondo, D.R.Avalos, D.V.Bambill, R. Carnicer, H.C.Sanzi  
"Dynamic Stiffening of Circular Plates and Determination of their Buckling In-Plane Pressure"  
Applied Acoustics 44 (1995) 125

Lefschetz S.  
*Ordinary differential Equations: Geometric Theory*

Interscience Publishers, New York (1957)

Leissa A.W.  
"Vibration of Plates"  
NASA SP 160 (1969)

Leissa A.W., Y.Narita  
"Natural Frequencies of Simply Supported Circular Plates"  
Journal of Sound and Vibration **70(2)** (1980) 221-229

Leung A.Y.T., S.G.Mao  
"A Symplectica Galerkin Method for Non-linear Vibration of Beams and Plates"  
Journal of Sound and Vibration **183(3)** (1995) 475-491

Levinson N.  
"A second order differential equation with singular solutions"  
Annals of Mathematics **50** (1949) 127-153

Lourenco C., Babloyantz, A.  
"Control of Chaos in Networks with Delay: A Model for Synchronization of Cortical Tissue"  
Neural Computation **6(6)** (1994) 1141.

Love A.E.,  
*A treatise on the mathematical theory of elasticity*  
New York Dover Publications, (1927)

Lorenz E.N.  
"The local structure of a chaotic attractor in four dimensions"  
Physica **13D** (1984) 90-104

Lyapunov A.M.  
"Problème général de la stabilité du mouvement"  
Ann.Math.Study **17** (1947)

Mackay M.C., L. Glass  
"Oscillation and chaos in physiological control systems"  
Science **197** (1977) 287-289

Magrab E.B.  
*Vibrations of Elastic Structural Members*  
Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands (1979)

Mandelbrot B.B.  
*The fractal geometry of nature*  
W.H.Freeman, San Francisco (1982)

Mathieu E.  
"Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique"  
J. Math **13** (1868) 137-203

- Merzbacher E.  
*Quantum Mechanics*  
 John Wiley, New York (1970)
- Moser J.  
*Stable and Random Motions in Dynamical Systems*  
 Princeton University Press (1973)
- Milnor J.W.  
*Topology from the Differentiable Viewpoint*  
 University Press of Virginia, Charlottesville (1965)
- Minorsky  
*Nonlinear Oscillations*  
 Van Nostrand - Princeton N.J. (1962)
- Moore J.T.  
*Elementary Linear and Matrix Algebra: the Viewpoint of Geometry*  
 Mc.Graw-Hill, New York (1972)
- Natsiavas S., P.Tratskas  
 "On vibration Isolation of Mechanical Systems with Non-Linear Foundations"  
 Journal of Sound and Vibration **194**(2) (1996) 173-185.
- Nayfeh A.H., D.T.Mook  
*Nonlinear Oscillations*  
 Wiley-Interscience, New York, (1979).
- Nayfeh A.H., C.Chin y S.A.Nayfeh  
 "Nonlinear Normal Modes of a Cantilever Beam"  
 Journal of Vibration and Acoustics **117** (1995a) 477-481
- Nayfeh A.H. y S.A.Nayfeh  
 "Nonlinear Normal Modes of a Continuous System with Quadratic Nonlinearities"  
 Journal of Vibration and Acoustics **117** (1995b) 199-205
- Nayfeh A.H., C.M.Chin  
 "Nonlinear Interactions in a Parametrically excited System with widely spaced Frequencies"  
 Nonlinear Dynamics **7**(2) (1995c) 195-216
- Nayfeh A.H.  
 "On Direct Methods of Constructing Nonlinear Normal Modes of Continuous Systems"  
 Journal of Vibration and Control **1** (1995) 389-430.
- Newell T.C., P.M.Alsing, A.Gavrielides, V.Kovanis  
 "Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback"  
 Physical Review Letters **72**(11) (1994) 1647-1650

- Ott E., C.Grebogi, Y.A.Yorke  
 "Controlling chaos"  
 Physical Review Letters **64(11)** (1990) 1196
- Packard N.H., J.P.Crutchfield, J.D.Farmer, R.S.Shaw  
 "Geometry from a time series"  
 Physical Review Letters **45** (1980) 712-716.
- Parlitz U., L. Kocarev, T.Stojanovski, H.Preckel  
 "Encoding messages using chaotic synchronization"  
 Physical Review E **53(5A)** (1996) 4351
- Poincaré H.  
*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*  
 Gautiers-Vilars, Paris (1892).
- Press W.H., S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P.Flannery  
*Numerical Recipes*  
 Cambridge University Press (1992).
- Prigogine I., R.Lefever  
 "Symmetry breaking instabilities in dissipative systems"  
 Journal of Chemical Physics (1968) 1695-1700
- Prokin, M.  
 "DMA transfer method for wide-range speed and Frequency Measurement"  
 IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement **42(4)** (1993) 842-846.
- Pyragas K.  
 "Continuous control of chaos by self-controlling feedback"  
 Physics Letters A **170** (1992) 421-428
- Pyragas K., A.Tamasevicius  
 "Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback"  
 Physics Letters A **180** (1993) 99-102
- Rand R.H.  
 "A direct method for non-linear normal modes"  
 International Journal of Non-Linear Mechanics **9** (1974) 363-368.
- Rapp P.E.  
 "Bifurcation theory, control theory and metabolic regulation"  
 Biological systems, Modelling and Control, ed. D.A.Linkens. Peter  
 Peregrinus, Stevenage (1979) 1-93.
- Roesky P.W., S.I.Doumbouya, F.W.Schneider  
 "Chaos Induced by Delayed Feedback"  
 Journal of Physical Chemistry **97** (1993) 398-402
- Rosenblum M.G., A.S.Pikovsky, J.Kurths  
 "Phase Synchronization of Chaotic Oscillators"  
 Physical Review Letters **76(11)** (1996) 1804-1807

- Rosenberg R.M.  
 "On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom"  
 Advances in Applied Mechanics **9** (1992) 155-242.
- Rossi R.E., P.A.A.Laura, D.R.Ávalos, H.A.Larrondo  
 "Free Vibrations of Timoshenko Beams Carrying Elastically Mounted,  
 Concentrated Masses"  
 Journal of Sound and Vibration **165/2** (1993) 209.
- Roxin E., V.Spinadel  
*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*  
 Eudeba, Argentina, (1976)
- Rulkov N.F. M.Sushchik, L.S.Tsimring, H.D.I.Abarbanel  
 "Generalized synchronizaton of chaos in directionally coupled chaotic  
 systems"  
 Physical Review E **51(2)** (1995) 980-994
- Schilling D.I, C.Belove  
*Circuitos electrónicos: discretos e integrados*  
 Marcombo S.A. de Boixareau Editores  
 (1973)
- Schneider F.W., R.Blittersdorf, A.Förster, T.Hauck, D.Lebender, J.Müller  
 "Continuous Control of Chemical Chaos by Time Delayed Feedback"  
 Journal of Physical Chemistry **97** (1993) 12244-12248
- Schuster H.G., Niebur, E., Locher, M.  
 "Parametric Feedback Resonance in Chaotic Systems"  
 Physical Review Letters **76(3)** (1996) 400
- Schuster H.G.  
*Deterministic Chaos*  
 Physik-Verlag GmbH (1984)
- Shabana A.A.  
*Theory of Vibration*  
 Springer-Verlag (1991).
- Shannon C.E., W.Weaver  
*The Mathematical Theory of Information*  
 University of Illinois Press. Urbana (1949)
- Shaw S.W., C.Pierre  
 "On Nonlinear Normal Modes"  
 Nonlinear Vibrations- DE **50** - AMD **144** (1992) 1-5
- Shaw S.W., C.Pierre  
 "Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems"  
 Journal of Sound and Vibration **164(1)** (1993) 85-124

- Shaw S.W. and C.Pierre  
 "Normal Modes of Vibration for non-linear continuous Systems"  
 Journal of Sound and Vibration **169** (1994) 319-347.
- Shaw S.W.  
 "An invariant manifold approach to nonlinear normal modes of oscillation"  
 Journal of Nonlinear Science **4** (1994) 419-448.
- Shilov G.E.  
 "An introduction to the Theory of Linear Spaces"  
 Prentice Hall Inc., N.Y. (1961)
- Slater J.C.  
 "A Numerical Method for Determining Nonlinear Normal Modes"  
 Nonlinear Dynamics **10** (1996) 19-30
- Smith M.J.  
*Introduction to Digital Signal Processing*  
 Wiley, New York (1992)
- Snyder L.J., T.W.Spriggs, W.EStewart  
 "Solution of the equations of change by Galerkin's method"  
 Chemical Engineering Journal **10** (1964) 535-540.
- Sommerfeld A.  
*Partial Differential Equations in Physics*  
 Academic Press (1949)
- Sonzogni V.E., D.V.Bambill, R.H.Gutiérrez, D.R.Avalos, H.A.Larrondo,  
 P.A.A.Laura  
 "Vibración de placas con orificios de espesor variable"  
 X Jornadas Argentinas del Hormigón Pretensado y XV Jornadas Argentinas de  
 Ingeniería Estructural, octubre de 1996, Buenos Aires, Argentina.
- Takens F.  
 "Detecting strange attractors in turbulence"  
 Lecture Notes in Mathematics 898, eds. D.A.Rand and L/S.Young. Springer,  
 Berlín (1981)
- Tang Y.S., A.I.Mees, L.O.Chua  
 "Synchronization and Chaos"  
 IEEE Transactions on Circuits and Systems **CAS 30(9)** (1983) 620-626
- Ter Haar D.  
*Elements of Hamiltonian Mechanics*  
 North Holland Pub. Amsterdam (1961)
- Testa J., J. Pérez, C. Jeffries  
 "Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator"  
 Physical Review Letters **48** (1982) 714-717.
- Thom R

*Structural Stability and Morphogenesis*  
W.A.Benjamin (1975)

Tomita K.  
"Chaotic responses of nonlinear oscillators"  
Physics Reports **86** (1982) 113-167

Topalián V., H.A.Larrondo, D.R.Avalos, P.A.A.Laura.  
"Free Vibrations of Circular Plates of Varying Thickness Partially Embedded  
in an Elastic Foundation"  
Journal of Sound and Vibration **202(1)**(1997) 125-133

Vakakis A.  
"Analysis and identification of linear and non-linear normal modes in  
vibrating systems"  
PhD. Tesis California Institute of Technology (1990)

Van der Pol B., J.Van der Mark,  
"Le battement du coeur considéré comme oscillation de relaxation"  
Onde Elektriue **7** (1928) 365-392

Van Exter M., A. Lagendijk  
"Observation of fine structures in the phase locking of a nonlinear  
oscillator"  
Physics Letters **A99** (1983) 1-12

VanGilluwe F.  
*The Undocumented PC*  
Addison Wesley Pub. Co. (1993).

Vavriv D. M., Ryabov, V. B., Ito, H. M.  
"Chaotic states of weakly and strongly nonlinear oscillators with  
quasiperiodic excitation"  
Physical Review. E. **53(1A)** (1996) 103-114.

Vvedensky D.  
*Partial Differential Equations*  
Addison-Wesley Pub. Co. ((1994)

Wang J.  
"Free vibration of Stepped Circular Plates on Elastic Foundations"  
Journal of Sound and Vibration **159(1)** (1992) 175-181

Wang S. y D.J.Dawe  
"Vibration of Shear-Deformable Rectangular Plates using a Spline-Function  
Rayleigh-Ritz Approach"  
International Journal for Numerical Methods in Engineering **36** (1993) 695-  
711

Wang X., A.G.Striz, C.W.Bert  
"Free vibration analysis of annular plates by the DQ method"  
Journal of Sound and Vibration **164** (1993) 173-175

Wang Y., Z.Wang  
"Periodic Response of Piecewise-linear oscillators using trigonometric collocation"  
Journal of Sound and Vibration **177(4)** (1994) 573-576

Wargitsch C., A.Hübler  
"Resonances of nonlinear oscillators"  
Physical Review. E. **51(2)** (1995) 1508

Weiner J., F.W.Schneider, K.Bar-Eli  
"Delayed-Output-Controlled Chemical Oscillations"  
Journal of Physical Chemistry **93** (1989) 2704-2711

Winfrey A.T.  
"Phase Control of neural pacemakers"  
Science **197** (1977) 761-780

Winfrey A.T.  
"24 hard problems about the mathematics of 24 hours-rhythms"  
Lecture Notes in Mathematics **17** (1979)

Winfrey A.T.  
*The geometry of biological time*  
Springer Berlin (1980).

Wolf A., J.B.Swift, H.L.Swinney, J.A.Vastano  
"Determining Lyapunov exponents from a time series"  
Physica **16D** (1985) 285-317

Yagasaki K.  
"Chaotic Dynamics of a Quasi-Periodically Forced Beam"  
Journal of Applied Mechanics **59** (1992) 161-167

Zienkiewicz O.C., K.Morgan  
*Finite Elements and Approximation*  
John Wiley and Sons (1995)

## Apéndice A

### Algunas consideraciones referentes a los métodos numéricos empleados

#### A1) Determinación de la PTC y de las isofases de un oscilador forzado

Todos los métodos empleados en este trabajo fueron chequeados con las expresiones analíticas del modelo (S).

a1.1) Método de Integración: en el estudio de sincronización de los osciladores de Van der Pol, de Brusellas y de Bonhoffer-Van der Pol se usó un método de Runge-Kutta de cuarto orden. La elección fue basada en el contraste con los resultados analíticos del modelo (S). Métodos más simples (por ejemplo Euler) no resultaron suficientemente precisos.

El sistema fue normalizado de modo que, para el paso de integración elegido ( $h = 0.001$ ), los ciclos límite discretos almacenados tienen 4000 puntos. En estos osciladores integrados numéricamente el número de pasos parametriza el ciclo límite y es la variable fase (es decir la fase es un número entre 0 y 4000).

El paso de integración elegido ( $h = 0.001$ ) da 7 cifras significativas correctas. Un  $h$  menor no implica una mejor precisión y origina un uso mayor de la CPU.

a1.2) Obtención del ciclo límite: a partir de un punto arbitrario del espacio de fases (condición inicial) se integra la ecuación diferencial durante  $N_{\text{trans}}$  pasos con  $N_{\text{trans}}$  suficientemente grande, donde  $N_{\text{trans}}$  es considerado como el tiempo correspondiente al transitorio.

Luego de verificar que la solución se encuentra sobre el ciclo límite (dentro del error fijado por el cero de máquina) se puede encontrar el período  $T_0$  (con un error propio del método de integración usado). Finalmente, comenzando desde este punto, que se asume como ubicado sobre el ciclo límite, los estados  $(x_1, x_2)$  son almacenados en un archivo durante 4000 pasos, es decir durante un período.

Para el oscilador (V) se conoce una aproximación del período ( $T_0^*$ ) como función de  $\mu$  [Roxin et al 76]. En este caso se adoptó para el transitorio  $N_{\text{trans}} = 10T_0^*/h = 10000T_0^*$ . En el caso del modelo (B) se adoptó  $1.000.000 \gg N_{\text{trans}} \gg 500.000$ .

a1.3) Obtención de las PTC's: partiendo de una condición inicial  $(x_{10}, x_{20})$ , perteneciente al ciclo límite y cuya fase es  $\phi_n$ , se aplica una perturbación ( $\delta$ ) que lleva el sistema al estado  $(x_{10}, x_{20} + V_e x^k(t-\tau))$ , donde  $k=0, \tau=0$  corresponde al caso de amplitud constante en tanto que  $k=1, \tau=0$  corresponde al caso paramétrico sin retardo y  $k=1, \tau \neq 0$  al caso paramétrico con retardo.

El sistema autónomo es integrado desde esta condición inicial y luego de cada paso, el nuevo estado alcanzado por el sistema es comparado con un estado fijo del ciclo límite elegido como referencia. Si  $N$  es el número de pasos requerido para alcanzar dicho estado,  $\phi_{\text{ref}}$  es la fase de ese punto de referencia y  $N_0$  es el número de puntos del ciclo límite entonces:

$$g = \text{const.} - N \bmod N_0 \quad (\text{a1.1})$$

donde  $\text{const.} = \phi_{\text{ref}} - \phi_n$  y  $N_0 = 4000$ . Los valores de  $\phi_n$  y  $g(V_e, \phi_n)$  son guardados en un archivo.

a1.4) Obtención de las curvas isofase: se han encontrado útiles los siguientes pasos:

i) El sistema de ecuaciones es normalizado de modo que el ciclo límite tenga período 4 y 4000 puntos (para ello se utiliza el cambio de variables  $t^* = 4t/P$  con  $P$  período del sistema autónomo). Ésto permite que se requieran sólo cambios menores en el programa para los distintos osciladores estudiados;

ii) El sistema de ecuaciones diferenciales autónomas es integrado con  $h = -0.001$  a partir de un estado ligeramente apartado del ciclo límite,

es decir yendo hacia atrás en el tiempo. Si  $\phi$  es la fase del estado de partida (se considera la del punto perteneciente al ciclo límite, más cercano) los estados, luego de  $m$  pasos de integración, son guardados en los archivos de las correspondientes isofases  $\phi - m, \phi - 2m, \dots$  etc. El número  $m$  se selecciona como sigue: sea  $h$  el paso de integración usado y sea  $N_0$  el número de puntos de un período del ciclo límite; entonces  $N_0/m$  es el número de isofases equiespaciadas en fase que se quiere obtener. Se ha elegido  $m = 20$  y los retratos contienen 200 isofases (sólo se muestran algunas de ellas en las figuras del Capítulo 2);

iii) Complementando (ii) se integra hacia adelante partiendo de una grilla en el espacio de fases y cada  $m$ -ésimo paso de integración es guardado en una matriz. El resultado es almacenado por medio período (2000 pasos). Luego la integración se continúa por suficiente número de períodos como para alcanzar el ciclo límite (dentro del error  $\epsilon$ ) en la fase  $\phi$ . Para el valor de  $\epsilon$  se usó el criterio de coincidencia de al menos tres cifras significativas. Los estados  $(x_m, y_m)$  almacenados en la matriz pueden ahora guardarse en las correspondientes isofases  $\phi + m, \phi + 2m, \dots$  etc, donde  $m$  tiene el mismo significado de arriba. La integración hacia adelante tiene la desventaja de que no se sabe de antemano si las condiciones iniciales usadas corresponden a alguna de las  $N_0/m$  isofases seleccionadas.

Se ha usado este método principalmente para completar las isofases en zonas del espacio de fases en las que por el método (ii) se habían obtenido pocos puntos. La grilla original cubre un rectángulo en esta zona y su trama se define por prueba y error; luego si es necesario se la hace más fina hasta que se obtiene un número suficiente de puntos de las isofases seleccionadas de modo que resulten curvas continuas.

La determinación de la red de isofases es mucho más eficiente que la determinación de las PTC's. En efecto a partir de la red de isofases es posible hallar la forma de cualquier PTC que se desee. La ventaja es notoria especialmente cuando el sistema no es integrable y requiere métodos numéricos de integración.

## A2) La descomposición SVD (Singular Value Decomposition)

Existe un número de técnicas poderosas para trabajar con sistemas de ecuaciones cuyas matrices de coeficientes son singulares o bien numéricamente muy cercanos a singulares. En muchos casos en los que la eliminación Gaussiana o la descomposición LU [Golub *et al* 96] fallan, el conjunto de técnicas conocidas bajo la denominación común de *singular value decomposition* (SVD), permite efectuar un diagnóstico y en muchos casos resolver realmente el problema en el sentido de obtenerse una respuesta numérica útil.

Los métodos SVD están basados en el siguiente teorema del álgebra lineal, cuya prueba puede verse en el libro de Golub y van Loan [Golub *et al* 96].

*Sea una matriz A cualquiera, de M filas por N columnas con  $M > N$ . La matriz puede escribirse como el producto de una matriz U de columnas ortogonales, de M filas y N columnas, por una matriz W diagonal de N elementos positivos o nulos y la traspuesta de una matriz V cuadrada, de N filas y N columnas, ortogonal. Escrito en fórmulas:*

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & w_2 & \\ & & \ddots \\ & & & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.1})$$

Las matrices U y V son ortogonales en el sentido que sus columnas lo son, es decir:

$$\sum_{i=1}^M U_{ik} U_{in} = \delta_{kn} \quad 1 \leq k \leq N; 1 \leq n \leq N \quad (\text{a.2.2})$$

$$\sum_{i=1}^M V_{ik} V_{in} = \delta_{kn} \quad 1 \leq k \leq N; 1 \leq n \leq N$$

Dado que V es cuadrada también son ortonormales sus filas.

La descomposición SVD se puede también llevar a cabo si  $M < N$ . En este caso los valores singulares  $w_j$  con  $j=M+1, \dots, N$  son nulos y las correspondientes columnas de  $U$  también son nulas. La descomposición de (a2.1) puede efectuarse aún en el caso en que  $A$  sea una matriz singular.

Es una descomposición *cuasi-única*. Es decir es única a menos de (i) una permutación de las columnas de  $U$ , los elementos de  $W$  y las columnas de  $V$  (o filas de  $V^T$ ); (ii) una combinación lineal entre las columnas de  $U$  y  $V$  cuyos correspondientes elementos en  $W$  son iguales. Una importante consecuencia de esta libertad de permutación es que para el caso  $m < n$ , no necesariamente los ceros tienen que estar ubicados en las posiciones  $j=M+1, \dots, N$ , sino que puede haber sido dispersados a cualquier posición  $j=1, \dots, N$ .

Si la matriz  $A$  es cuadrada de  $N \times N$  entonces también son cuadradas las matrices  $U$ ,  $V$  y  $W$ . Las inversas de estas tres matrices son triviales de calcular:  $U$  y  $V$  son ortogonales, de modo que sus inversas son sus transpuestas.  $W$  es diagonal de modo que su inversa también es diagonal con elementos recíprocos de los  $w_j$ . Por lo tanto la inversa de la matriz  $A$  puede expresarse:

$$A^{-1} = V \cdot [\text{diag}(1/w_j)] \cdot U^T \quad (\text{a2.3})$$

Este procedimiento obviamente tiene problemas si alguno de los  $w_j$  es cero o bien si numéricamente es tan pequeño que su valor está dentro de los errores de redondeo de la máquina. Se dice que la matriz es más singular cuantos más  $w_j$ 's tengan este problema.

Se define el *número de condición* de una matriz como el cociente entre el mayor y el menor módulos de los  $w_j$ 's. Una matriz singular es la que tiene el número de condición infinito en tanto que una matriz mal condicionada es la que tiene un número de condición tal que su inversa se aproxima a la precisión del máquina.

Dada una matriz singular es importante definir su *espacio nulo* y su

*rango*. Sea el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (\text{a2.4})$$

La matriz  $A$  es un mapa  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , entre los vectores  $\vec{b}$  y  $\vec{x}$ . Si  $A$  es singular, entonces existe un subespacio, llamado *espacio nulo*, formado por todos los vectores  $\vec{x}$  tales que se mapean en el vector nulo. La dimensión de este subespacio se llama *nulidad* de  $A$ .

El conjunto de vectores  $\vec{b}$  tales que son imagen de algún  $\vec{x}$  también es un subespacio. Se lo llama *espacio rango* de  $A$  y a su dimensión se la denomina *rango* de  $A$ . El rango más la nulidad iguala la dimensión  $N$  del espacio.

La SVD provee simultáneamente las bases ortonormales del espacio rango y del espacio nulo. En efecto las columnas de  $U$ , correspondientes a las posiciones  $j$  tales que  $w_j \neq 0$  son la base del espacio rango. Por su parte las columnas de  $V$  correspondientes a las posiciones  $j$  tales que  $w_j = 0$  forman una base ortonormal del espacio nulo.

Luego, si se desea resolver un sistema (a2.4) homogéneo (es decir con  $\vec{b} = 0$ ) y con matriz  $A$  singular, una manera eficiente de hacerlo es efectuar la SVD y observar las posiciones de los ceros en la matriz diagonal  $W$ . Las columnas de  $V$  correspondientes a esas mismas posiciones nos dan los vectores solución del problema (por ser un sistema homogéneo siempre existe la solución trivial).

Por otra parte si se desea resolver el sistema (a2.4) con  $\vec{b} \neq 0$ , se efectúa la descomposición SVD y se buscan las posiciones de los  $w_j \neq 0$ . Las columnas de  $U$  correspondientes a esas mismas posiciones son la base del espacio rango. Nótese que si existen elementos  $w_j$  nulos el sistema sólo puede ser indeterminado o incompatible pues la matriz  $A$  es singular. Cuál de las dos cosas ocurra depende de que el vector  $\vec{b}$  pertenezca o no al espacio rango.

Aún en los casos en que el sistema no tiene solución aún es posible

obtener la mejor aproximación (en el sentido de cuadrados mínimos) a un vector solución. Ese vector es el que satisface:

$$r \equiv |A \cdot \vec{x} - \vec{b}| \text{ es mínimo} \quad (\text{a2.5})$$

El número  $r$  es el *residuo* de la solución. La Figura a2.1 resume el significado de la descomposición SVD.

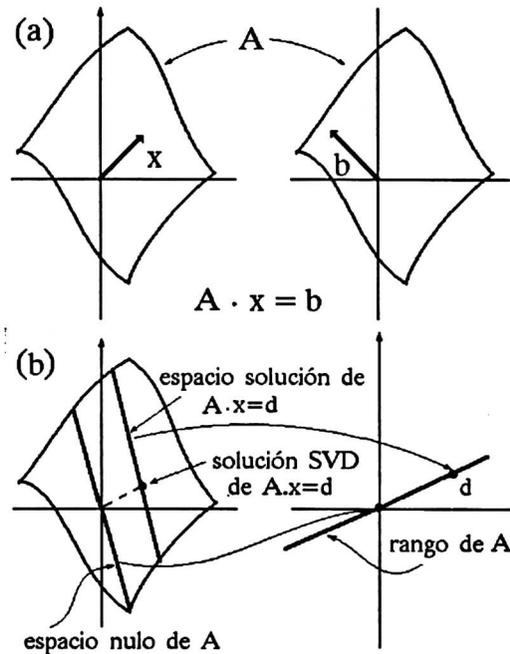


Figura a2.1. (a) Una matriz nosingular  $A$  mapea un espacio vectorial en otro de la misma dimensión. El vector  $\vec{x}$  se mapea en  $\vec{b}$  de modo que  $\vec{x}$  satisface la ecuación  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ . (b) Una matriz  $A$  singular mapea el espacio vectorial en otro de menor dimensión, en el dibujo la línea "rango". Las soluciones de  $Ax=d$  son todos los puntos de la recta marcada. La solución SVD es la de menor valor absoluto.

En el caso de la determinación de autovectores de una matriz, requerido en el capítulo 6 para la obtención de las variedades invariantes lineales, la situación es que algunos de los  $w_j$ 's son muy pequeños pero no son cero. La matriz es singular sólo analíticamente pero los errores numéricos en la determinación de los autovalores hacen que numéricamente sea mal condicionada. En ese caso la solución directa del sistema de

ecuaciones conduce a errores importantes. Se obtiene una mucho mejor aproximación adoptando como soluciones del sistema homogéneo los vectores columna de  $V$  (vectores filas de  $V^T$ ) correspondientes a las posiciones  $j$  tales que  $w_j \cong 0$ .

Para considerar cero un elemento debe encontrarse dentro del error de redondeo de la precisión adoptada; un criterio aproximado puede ser tomar ceros aquellos  $w_j$ 's menores que  $10^{-12}$  para el caso de doble precisión. Sin embargo en el caso de la placa circular estudiado en el capítulo 6 se comprobó que, cuando hay más de un elemento nulo con este criterio, no necesariamente el menor es el que da la mejor aproximación. Es conveniente trabajar con espacios de dimensión finita creciente y efectuar un análisis de la convergencia para seleccionar la solución correcta.

## Apéndice B

### Consideraciones relativas al hardware necesario para experimentos en sincronización de osciladores

#### B1) Capacidades de transferencia directa a memoria de una PC standard

La transferencia directa a memoria (DMA) es un método de transferencia de datos de alta velocidad entre la memoria y el bus de entrada/salida de una PC, donde se encuentran conectados los periféricos y también la tarjeta multifunción del banco de medición.

Los procesadores de la familia 80x86 tienen dos circuitos integrados especiales de tipo 82x37 que se denominan controladores de DMA 1 y 2 respectivamente. Cada uno de ellos contiene cuatro canales separados de DMA y un número de registros de control de las operaciones de DMA, para especificar el número de bytes/palabras a transferir, y para designar las direcciones de memoria a las que se hará la transferencia. Estos registros son accesibles mediante los ports de entrada/salida. Tanto DMA1 como DMA2 están conectados a varias líneas del bus de control: ocho líneas, una para cada canal, designadas DRQ (DMA request); ocho líneas, una para cada canal, designadas DACK (DMA acknowledge), una línea HRQ (hold request), una línea HACK (hold acknowledge) y una línea TC (terminal count). Las líneas DRQ y DACK están disponibles sobre el bus de extensión de la máquina. En el banco de mediciones desarrollado se emplea el canal 1 y sus correspondientes registros y líneas de control.

Una vez finalizado el procedimiento de inicialización el 82x87 toma control de ambos buses (el bus de datos y el bus de direcciones) y lleva al procesador al estado HOLD para permitir que la transferencia se realice sin la supervisión del procesador central y hacerla de este modo más rápida. Hay varios modos de transferencia disponibles, el usado en nuestro banco de mediciones fue el modo Single. En este modo particular el proceso de transferencia se inicia con una solicitud de un dispositivo periférico. Poniendo la línea DRQ en nivel "alto" el 82x37

pone la línea DACK en "bajo" para permitir de tranferencia de datos del periférico a la memoria.

El proceso se repite para cada dato hasta que se alcanza el final del bloque. Varios registros internos se usan con el objeto de inicializar, habilitar y controlar todo el proceso de DMA; ellos son: los registros Base Address, Base Word Count, Current Address, Current Count, Mask, Status y Mode. En la Figura b1.1 se indica la arquitectura del controlador DMA.

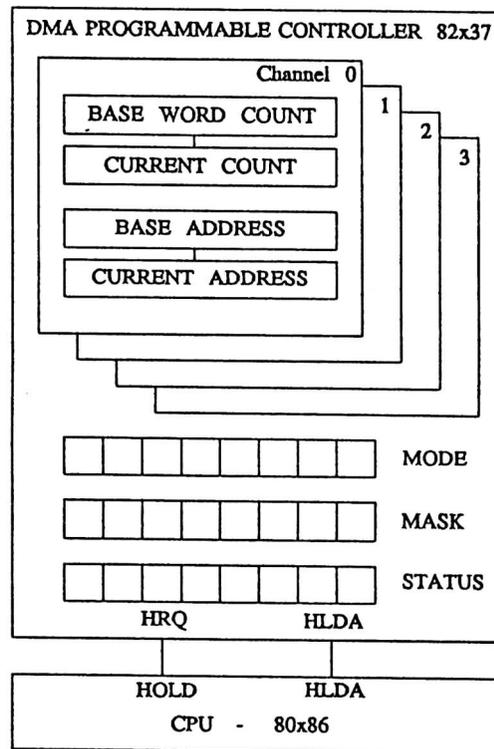


Figura b1.1. Arquitectura del controlador de DMA

El registro Base Address guarda la dirección de partida en la que se iniciará el proceso de almacenamiento. Su contenido es copiado al registro Current Address durante el proceso de inicialización. Luego de cada transferencia este último registro es incrementado automáticamente y por lo tanto guarda en forma instantánea el valor en uso. El registro de Base Word Count almacena el número total de datos a ser transferidos. Su contenido es copiado en el registro Current Count durante el proceso del

inicialización. Este último registro es decrementado automáticamente luego de cada transferencia, de modo que contiene el número de ciclos de transferencia remanentes a realizar.

Una vez que este registro alcanza el valor -1 se genera la señal TC, indicando que se ha completado la secuencia de transferencia DMA. El registro de página (Page Register) sirve para extender la memoria accesible, a 16 MBytes. Los registros Mask, Mode y Status, permiten la selección de las características del proceso de transferencia DMA a realizar. Una breve descripción de las opciones permitidas y de las predisposiciones particulares empleadas por nosotros se muestra en el Figura b1.2.

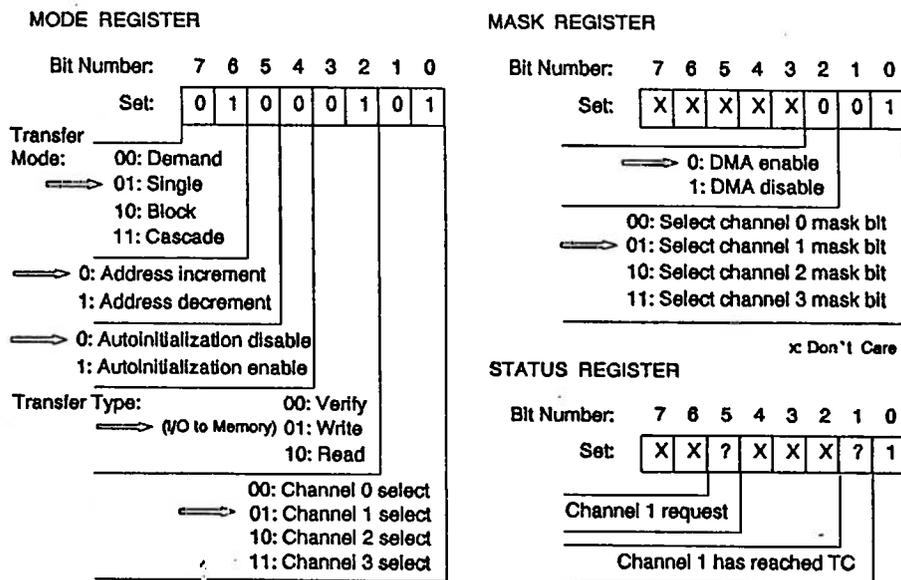


Figura b1.2 Predisposición de los distintos registros de DMA

## B2) Circuitos especiales de adquisición de datos y controlador DMA

Las tarjetas de adquisición de datos se han usado en forma extendida en varios campos de la ciencia y la ingeniería. El disparo exacto de un convertidor A/D es un aspecto crítico, dado que una pequeña variación en el período entre muestras puede conducir a distorsiones fatales en la corriente de datos, especialmente cuando están involucradas mediciones



El proceso de adquisición se inicia cuando la señal del generador maestro, que está conectado al canal 1, alcanza el nivel de disparo determinado en el bloque "D/A Trigger Level". La comparación es realizada por el bloque "Trigger Circuit" que genera la señal de compuerta GS. La inicialización de los registros es realizada por el bloque "Address Decoder".

Dado que el modo *single* de transferencia DMA permite la sincronización entre los instantes de muestreo y de transferencia, es especialmente adecuado para ser usado en este proceso de muestreo. Su operación está controlada por el bloque "Timing Control Circuit" mediante el pulso de sincronismo SP. Este procedimiento tiene la ventaja de no requerir memoria adicional en la tarjeta de adquisición de datos. El bloque "DMA Circuit Controller" se detalla en la Figura b2.2.

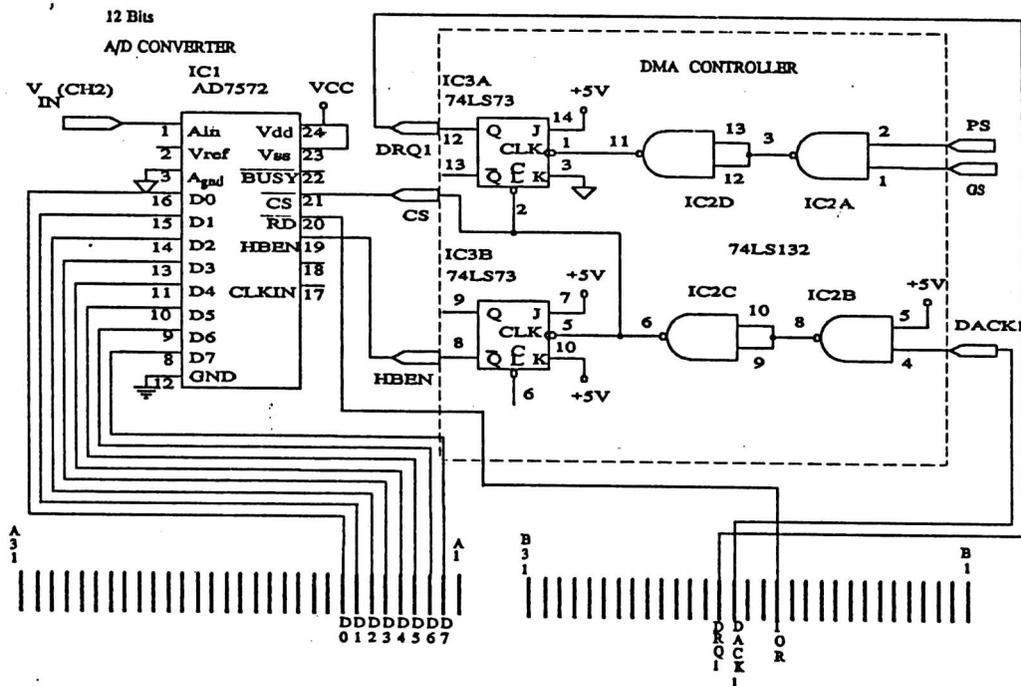


Figura b2.2. Detalle del bloque "DMA Controller Circuit"

Este circuito genera la señal DRQ1, tomando el pulso de sincronismo SP y la señal de compuerta GS. Ambas señales son enviadas a las entradas de una compuerta NAND (IC2A y IC2D) y su salida es conectada a la entrada

de reloj del FF-JK IC3A. La salida Q de este flip-flop es precisamente la señal DRQ1. Esta última señal sube a nivel "alto" y permanece en este estado hasta que la PC tome conocimiento del requerimiento y lleve a nivel "bajo" la línea DACK1. Entonces el requerimiento de acceso finaliza y la salida del FF-IC3A es reseteada por ID2B mediante IC2C. Esa misma salida de IC2C habilita el convertor analógico/digital IC1.

La señal de lectura de entrada salida (IOR) que proviene del BUS de la PC, está conectada a la línea *read* (RD) del bloque "12 Bits A/D Converter" habilitando la transferencia (ver figura b2.3).

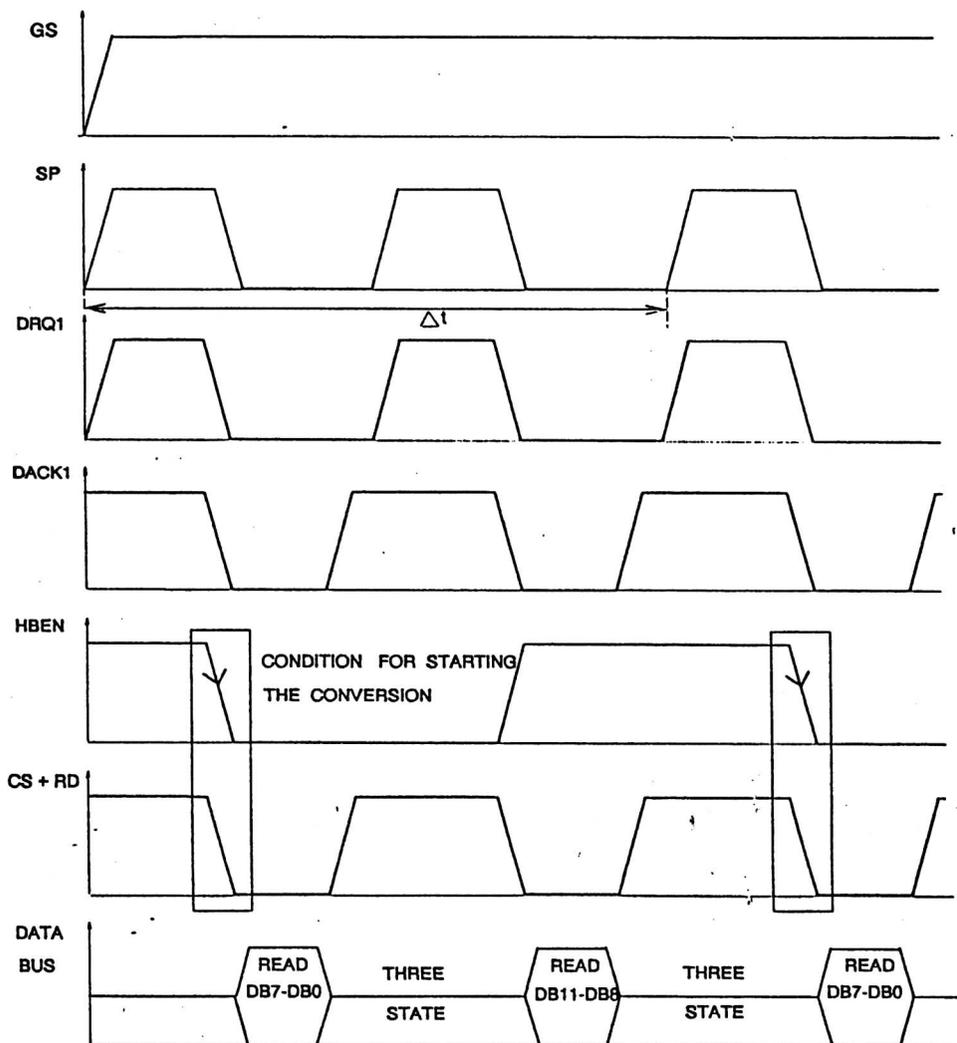


Figura b2.3. Diagrama de tiempos del proceso de transferencia DMA

Dado que la entrada de reloj del FF-IC3B está conectada a la línea DACK1, este FF cambia de estado cada vez que un dato es transferido a la memoria. De este modo, por medio de la línea HBEN (High Byte Enable) la palabra de 12 bits es leída en forma secuencial mediante las líneas de datos del conversor (D0 a D7), en primer lugar los ocho bits más bajos y en segundo lugar los cuatro restantes. Los diagramas de tiempos del proceso de adquisición se muestran en la Figura b2.3.

En la figura b2.4 se muestra una señal adquirida del oscilador Puente de Wien, junto con los correspondientes pulsos de disparo retardados. Para los valores indicados el sistema se ha sincronizado en una región de sincronización 1, por lo que todos los pulsos son de la misma altura.

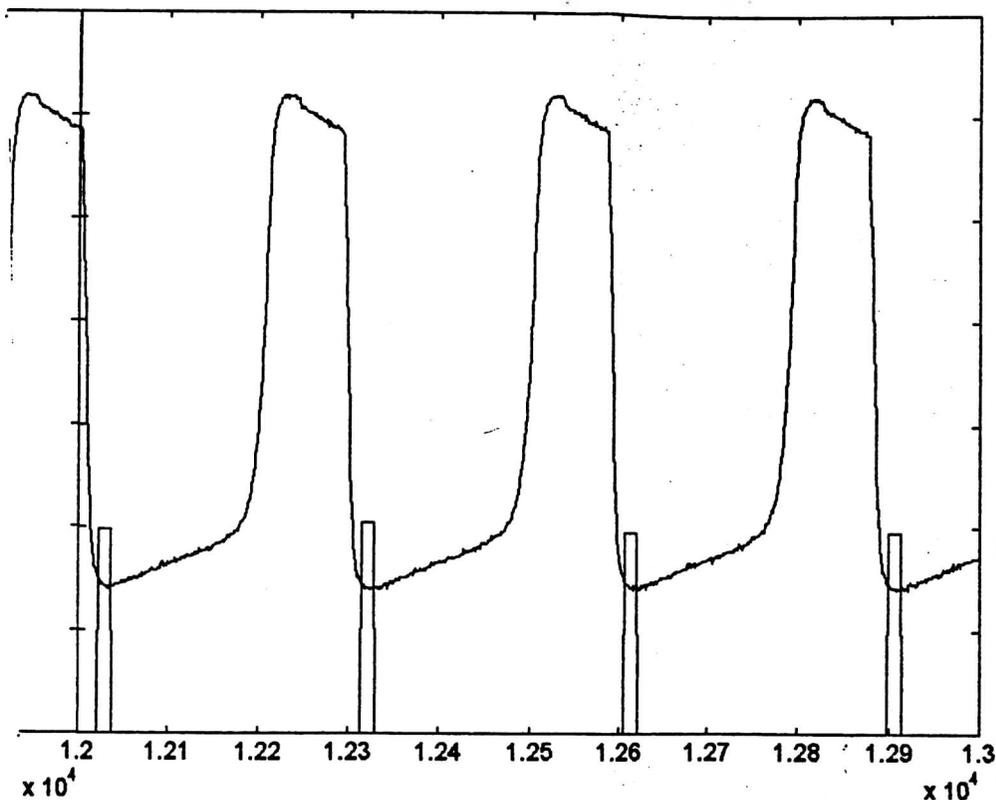
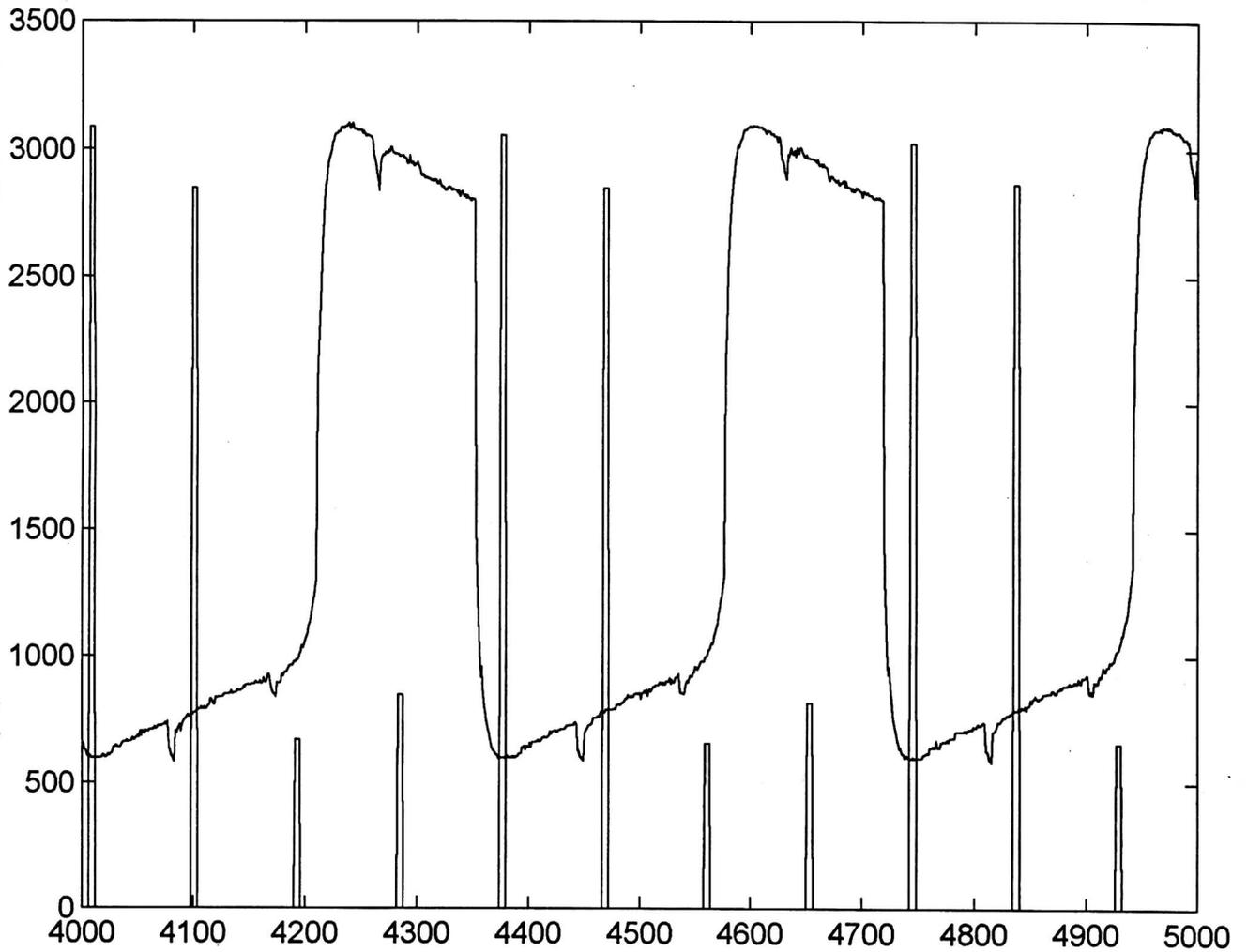


Figura b2.4. Excitación y respuesta para el oscilador puente de Wien del capítulo 3 en una zona de sincronización "2".  $V_E=1$ ,  $T_E=6ms$ ,  $\Delta_E=300\mu s$ ,  $\tau=1ms$

La figura b2.5 en cambio muestra un caso en que el sincronismo se produce para una zona de sincronización 4. En este caso los pulsos re-

sultan de cuatro tamaños diferentes debido a que el instante de muestreo cae en cuatro posiciones del ciclo límite del oscilador (en régimen estacionario).



*Figura b2.5. Excitación y respuesta para el oscilador puente de Wien del capítulo 3 en una zona de sincronización "2".  $V_E=1$ ,  $T_E=2ms$ ,  $\Delta_E=100\mu s$ ,  $\tau=1ms$*