UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESIS

Sobre la regularización de determinantes de operadores elípticos

OSCAR ALCIDES BARRAZA

AÑO 1993

A la memoria de mi abuela Adela.

Deseo agradecer sinceramente a mi director, Dr. Jorge Eduardo Solomin, por su gran sabiduría y fina intuición que en ocasiones excedieron el campo de la Matemática. Quiero destacar el apoyo y la orientación que me ha brindado a lo largo de estos años, como así también su particular sentido del humor y su enorme paciencia en la corrección del manuscrito.

En esta etapa de concreciones, siento sumo placer al poder manifestar mi profundo agradecimiento a esa gran persona, y gran matemática, desde luego, que desde un inicio estuvo guiando mis estudios relacionados con operadores pseudodiferenciales, convirtiéndose más tarde en mi incondicional apoyo y fuente de respuestas a mis consultas. Me refiero a la Dra. María Amelia Muschietti.

Quiero expresar mi agradecimiento a los Dres. R. E. Gamboa Saraví, H. Falomir y E. M. Santángelo por haber generado interés en mí sobre temas de la Matemática relacionados con la Física.

Sea también mi agradecimiento para el Dr. Rodolfo Rodríguez y para el Lic. Martín Argerami, quienes con su invalorable ayuda han posibilitado la impresión de la versión final.

Por último, les agradezco a todos los colegas, familiares y amigos que de alguna u otra manera han contribuído positivamente a la realización de este trabajo.

La Plata, marzo de 1993.

INDICE

SECCION I

INTRODUCCION

Dado un operador L en un espacio de Hilbert de la forma $L = I - A$, con I el operador identidad y A tipo traza, su determinante de Fredholm es

$$det\, L = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \lambda_j(A)), \tag{1.1}$$

donde los números $\lambda_j(A)$ son los autovalores de A, repetidos las veces que indique su multiplicidad. La finitud de este producto es equivalente a que A sea tipo traza. Si A no es tipo traza pero sí lo es $|A|^p$, con $|A| = \sqrt{A^*A}$ y p un número natural, Hilbert propuso tomar como regularización del determinante de L a la expresión

$$det_p(L) = \prod_{j=1}^{\infty}\left[(1 - \lambda_j(A))e^{\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}\lambda_j(A)^k}\right], \tag{1.2}$$

a la que llamaremos "p-determinante" de L. Para $p = 1$, las expresiones (1.1) y (1.2) coinciden.

En diversas áreas de la Matemática, por ejemplo en geometría diferencial ([F]), y de la Física, por ejemplo en la construcción de teorías cuánticas mediante la integración funcional ([S], [GS-M-S1], [GS-M-S2], [B-F-GS-S], etc.), especial interés presenta el cálculo del determinante de operadores definidos como $L = D_0 D_1^{-1}$, con D_0 y D_1 operadores diferenciales elípticos.

R. Forman [F] ha estudiado las propiedades del determinante Fredholm de L y su relación con los valores de borde de D_0 y D_1, así como con la regularización de los determinantes de D_0 y D_1 mediante el método de la función ζ de Riemann, para el caso $L = D_0 D_1^{-1} = I - A$, con A tipo traza.

Nos proponemos extender algunos de estos resultados al p-determinante de L, para $L = D_0 D_1^{-1} = I - A$, con $|A|^p$ tipo traza.

En esta sección damos algunos conceptos básicos y definiciones de los dos métodos de regularización empleados: p-determinante y ζ-determinante, como así también la notación utilizada. Resultados sobre regularidad del p-determinante y sus correspondientes pruebas son expuestas en la sección II. En la sección III se establece una expresión para el p-determinante del cociente de dos operadores diferenciales elípticos con condiciones de contorno, en términos de los valores de borde de sus soluciones. En la sección IV se da una fórmula para la derivada del logaritmo del ζ-determinante y se relaciona el cociente de ζ-determinantes de dos operadores con el

p-determinante del cociente de los mismos. Finalmente, en la sección V se exponen algunas aplicaciones físicas.

I.A:Conceptos básicos y notación

Como es usual, $\mathbf{N}$ denotará el conjunto de los números naturales, $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathbf{C}$ el conjunto de los múmeros complejos. Si $\omega \in \mathbf{C}$, sus partes real e imaginaria serán anotadas respectivamente $\mathcal{R}e(\omega)$ y $\mathcal{I}m(\omega)$. Las letras griegas $\alpha, \beta, \ldots$ denotarán multi-índices de números naturales; así:

$$\begin{aligned} &\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \quad , \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \\ &\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots \alpha_n + \beta_n) \\ &\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n! \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n . \end{aligned}$$

Las letras x, y, ξ denotarán puntos del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$. Así:

$$\begin{aligned} &x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad , \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \\ &\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} . \end{aligned}$$

Si M es un subconjunto abierto de $\mathbf{R}^n$, de $\mathbf{C}$, o bien una variedad diferencial dotada de una medida μ,

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f\colon M \longrightarrow \mathbf{C} \,/\, f \text{ es infinitamente diferenciable}\}.$$

Esto es, el espacio de las funciones sobre M a valores complejos que admiten derivadas de todos los órdenes.

En general H denotará un espacio de Hilbert. $\mathcal{L}(H)$ será el conjunto de todos los operadores lineales y continuos $T\colon H \longrightarrow H$ y, en particular, $H = \mathcal{L}^2(M)$ será el espacio de Hilbert de las funciones $f\colon M \longrightarrow \mathbf{C}$ de cuadrado integrable.

Con L, L_1, L_t, etc. se designará a los operadores diferenciales o pseudodiferenciales, y con A, B, etc. a las condiciones de contorno. (E, M, π_E) y (F, M, π_F) denotarán espacios fibrados vectoriales sobre M.

Un operador pseudodiferencial (clásico) L de orden m definido de las secciones $\mathcal{C}^\infty$ del fibrado (E, M, π_E) a las secciones $\mathcal{C}^\infty$ del fibrado (F, M, π_F) es un operador lineal que para cada carta local $(\mathcal{O}, \varphi)$ de M y para cada sección local f sobre $\mathcal{O}$ se escribe:

$$L\, f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i<\varphi(x), \xi>} \, \sigma(L)(\varphi(x), \xi)\, \widehat{f \circ \varphi^{-1}}(\xi)\, d\xi,$$

donde $\widehat{g}(\xi)$ indica la transformada de Fourier de la función g, y $\sigma(L)(y,\xi)$, llamado símbolo de orden m de L, es una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ que verifica :

$$|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(L)(y,\xi)| \leq C_{\alpha\,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|},$$

para todo par de multi-índices α, β y cierta constante C que depende de los mismos.

Cuando el símbolo $\sigma(L)(x,\xi)$ de L admite un desarrollo asintótico $\sum_{j\geq 0} a_{m-j}(x,\xi)$, siendo las $a_{m-j}(x,\xi)$ funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ y homogéneas en $|\xi| \geq 1$ de grado $m-j$, diremos que el operador L está en la clase $I_h^m(M)$.

Se llama símbolo principal de L, y se denota $\sigma_0(L)$, a la función $a_m(x,\xi)$ del desarrollo anterior.

Una composición de dos operadores L_1 y L_2 pertenecientes a las clases $I_h^{m_1}(M)$ y $I_h^{m_2}(M)$, respectivamente, es otro operador pseudodiferencial clásico en la clase $I_h^{m_1+m_2}(M)$. Su símbolo completo está dado por ([C], [H]):

$$\sigma(L_1\,L_2) = \sigma(L_1)\circ\sigma(L_2) \sim \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha p)(\partial_x^\alpha q), \tag{1.3}$$

con $p = \sigma(L_1)$ y $q = \sigma(L_2)$. En particular, para el símbolo principal se tiene $\sigma_0(L_1\,L_2) = \sigma_0(L_1)\sigma_0(L_2)$.

Una matriz de tamaño $k \times k$ de operadores pseudodiferenciales $L \in I_h^m(M)$ se dice (uniformemente) elíptica si tiene un símbolo principal $\sigma_0(L)$ que satisface:

$$|det\ \sigma_0(L)(x,\xi)| \geq C|\xi|^{mk}, \quad \text{para } |\xi| > N \ \text{ y } \ C > 0.$$

Para cada operador pseudodiferencial elíptico (clásico) L existe una matriz Q de tamaño $km \times km$ de operadores pseudodiferenciales en la clase $I_h^0(X)$ llamado operador de proyección de Calderón sobre los datos de Cauchy modificados de las funciones $\mathcal{C}^\infty$ pertenecientes al núcleo de L ([C], [H]). El símbolo principal q de Q depende únicamente de $\sigma_0(L)$ ([C]) y es una matriz de $km \times km$, la cual supondremos de rango constante r. (Esto es siempre cierto para $n \geq 3$.)

Una matriz B de $r \times km$ de operadores pseudodiferenciales en la clase $I_h^0(X)$ tal que

$$B\colon \underbrace{\mathcal{C}^\infty(X,E)\otimes\cdots\otimes\mathcal{C}^\infty(X,E)}_{m\ veces} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\tilde{F})$$

donde $\tilde{F}$ es un subfibrado vectorial r-dimensional de $\underbrace{F\otimes\cdots\otimes F}_{m\ veces}$, es una condición elíptica de borde para el operador L si la matriz bq tiene rango constante igual a r ([C]). El símbolo principal b de B es una matriz de tamaño $r \times km$. Para tales L y B diremos que el problema de contorno $L_B = (L,B)$ es elíptico.

Denotamos con T a la aplicación lineal que da los datos de Cauchy

$$T\colon \mathcal{C}^\infty(M,E) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{C}^\infty(X,E)\otimes\mathcal{C}^\infty(X,E)\otimes\cdots\otimes\mathcal{C}^\infty(X,E)}_{m\ veces}$$
$$u(x)=u(x',x_n)\mapsto Tu(x)=\left(u(x'),\partial_\nu u(x'),\ldots,\partial_\nu^{m-1}u(x')\right),$$

donde ν es un campo local normal al borde X, exterior a M. Para cada punto x en una carta local de M con intersección con X anotamos $x=(x',x_n)\in M$ con $x'\in X$ y x_n la coordenada normal a X.

La única función

$$G(x,y)\colon M\times M\longrightarrow Hom(F,E)$$

que es lineal de la fibra de F sobre y a la fibra de E sobre x y que satisface:

(i) $L(G(x,y))=\delta(x,y)$, donde $\delta(x,y)$ es la función delta de Dirac;

(ii) $T(G(x,y))\in Ker(B)$, i. e. los datos de Cauchy de $G(x,y)$ pertenece, como función de x, al núcleo del operador de borde B;

será llamada la función de Green para el problema de contorno $L_B=(L,B)$. Esta función $G(x,y)$ es el núcleo del operador inverso L_B^{-1}. En lo sucesivo, $G(x,y)$ será escrita $L_B^{-1}(x,y)$ cuando no se preste a confusión.

I.B:ζ-determinante

Sea L un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,$ λ_k son los autovalores de L repetidos las veces necesarias que indica su multiplicidad, el determinante de L se escribe $det_1\, L=det\,L=\prod_{j=1}^k\lambda_j$.

Por tanto,

$$\ln det\,L=\sum_{j=1}^k\ln\lambda_j=\frac{d}{ds}\left[-\sum_{j=1}^k\lambda_j^{-s}\right]\Bigg|_{s=0}=-\frac{d}{ds}\left[Tr(L^{-s})\right]\big|_{s=0},$$

para una determinación adecuada de la función logaritmo, de donde

$$det\,L=\exp\left\{-\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left[Tr(L^{-s})\right]\right\}. \tag{1.4}$$

Sea ahora L un operador pseudodiferencial elíptico de orden $m>0$ definido sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(M)$, si M es una variedad diferencial compacta sin borde; o bien un operador diferencial elíptico con condiciones de borde elípticas también definido sobre $\mathcal{L}^2(M)$, si M es una variedad diferencial compacta con borde.

Es claro que por tratarse de un operador no acotado, el producto de sus autovalores es divergente. A fin de establecer en este caso una expresión similar a (1.4) que permita obtener una cantidad finita en función de estos autovalores, es necesario definir la función zeta de Riemann generalizada, asociada al operador L. Para ello hay que precisar la noción de potencias complejas de L. Dado un número complejo s, una de las formas de definir el operador L^{-s} ([S1] y [S2]) es

$$\begin{aligned} L^{-s} &= \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{-s}(L-\lambda I)^{-1}\,d\lambda, \qquad \text{para} \qquad \mathcal{R}e(s)>0 \qquad \text{y} \\ L^{-s} &= L^k.L^{-(k+s)}, \qquad \text{si} \qquad -k<\mathcal{R}e(s)\le -(k-1) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}e(s)\le 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

con $k\ge 1$ un número entero y Γ el camino en el plano complejo dado por: $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ donde para cierto ángulo θ son

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{te^{i\theta}\}, \quad \text{variando } t \text{ de } \infty \text{ a } \epsilon>0, \\ \Gamma_2 &= \{|\lambda|=\epsilon\} \quad \text{recorrida en sentido horario, y} \\ \Gamma_3 &= \{te^{i\theta}\}, \quad \text{variando } t \text{ de } \epsilon \text{ a } \infty, \end{aligned} \tag{1.6}$$

suponiendo que alrededor de la semirrecta $arg\lambda=\theta$ existe un cono de direcciones de modo que sobre las mismas no haya ningún autovalor de L. En los trabajos [S1], [S2] y [S3] se ha probado que la función $Tr(L^{-s})$ es holomorfa en cierto semiplano y que admite una extensión meromorfa a todo el s-plano complejo, siendo $s=0$ un punto de analiticidad. Luego, se define la función zeta de Riemann generalizada, asociada a L, mediante:

$$\zeta(L,s)=Tr(L^{-s}),$$

llamada así por su similitud con la función zeta de Riemann numérica. De este modo la fórmula (1.4) da la definición del determinante del operador L regularizado mediante la función zeta de Riemann generalizada y que en lo sucesivo se denotará $Det_\zeta L$. En consecuencia

$$Det_\zeta L = \exp\left\{-\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\zeta(L,s)\right\}. \tag{1.7}$$

I.C:Clases de Schatten y p-determinante

Un operador compacto A definido en un espacio de Hilbert H es un elemento de la p-ésima clase de Schatten $\mathcal{J}_p$, para un número $p\ge 1$, si $|A|^p$ es un operador tipo traza, i. e. si

$$Tr(|A|^p)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^p(A)<\infty,$$

donde $\mu_j(A)$, los valores singulares de A, son los autovalores de $|A|=\sqrt{A^*A}$. En particular $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ son los ideales de los operadores tipo traza y Hilbert-Schmidt sobre H, respectivamente. Si I es el operador identidad en H y A es un operador en $\mathcal{J}_1$ con autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, el determinante Fredholm $det_1(I-A)$ está definido como

$$det_1(I-A) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-\lambda_j).$$

Si A es un elemento de $\mathcal{J}_p$, el p-determinante de $I-A$ está definido como ([G-K], [S], [D-S]):

$$det_p(I-A) = det_1\left\{(I-A)\exp\left[A+\frac{A^2}{2}+\cdots+\frac{A^{p-1}}{p-1}\right]\right\}, \tag{1.8}$$

o, equivalentemente [S], como:

$$det_p(I-A) = det_1\big(I-R_p(A)\big),$$

donde

$$R_p(A) = I-(I-A)\exp\left[A+\frac{A^2}{2}+\cdots+\frac{A^{p-1}}{p-1}\right].$$

Notemos que $R_p(z)$ es una función entera en el plano complejo $\mathbf{C}$ cuyo logaritmo tiene por desarrollo en potencias de z al desarrollo en serie de potencias de la función $\ln(1-z)$ habiendo suprimido las primeras $p-1$ potencias. Es fácil mostrar que si $A \in \mathcal{J}_p$ entonces $R_p(A) \in \mathcal{J}_1$ ([S]).

Dos propiedades básicas de los p-determinantes que utilizaremos más adelante son las siguientes ([G-K], [S]):
si $A \in \mathcal{J}_p$ entonces $I-A$ es invertible si y solo si $det_p(I-A) \neq 0$;
si además $A \in \mathcal{J}_{p-1}$,

$$det_p(I-A) = det_{p-1}(I-A).\exp\{\frac{1}{p-1}Tr(A^{p-1})\}.$$

En particular, si $A \in \mathcal{J}_1$ se tiene

$$det_p(I-A) = det_1(I-A).\exp\{\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j}Tr(A^j)\}. \tag{1.9}$$

También utilizaremos la representación integral del p-determinante dada en [G-K]:

$$det_p(I-A) = \exp\left\{-\int_{\gamma} tr\ \left[z^{p-1}A^p(1-zA)^{-1}\right]\,dz\right\}, \tag{1.10}$$

con γ: $[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ una curva continua tal que $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$ y de manera que exista y sea acotado $(1-zA)^{-1}$ para todo z en γ.

SECCION II

LEMAS DE DIFERENCIABILIDAD DE LOS P-DETERMINANTES

En esta sección se establecen algunos lemas técnicos sobre la diferenciabilidad de la "traza" y el "determinante"de operadores acotados definidos sobre un espacio de Hilbert y pertenecientes a la p-ésima clase de Schatten. Estos resultados serán empleados en la sección III.

II.A: Caso de operadores tipo traza (Ideal de Schatten $\mathcal{J}_1$)

Lema 2.1.

Sea $A(z)\colon G \longrightarrow \mathcal{J}_1$ una aplicación holomorfa sobre un subconjunto abierto G de $\mathbf{C}$ a valores en el ideal $\mathcal{J}_1$ dotado con la norma de $\mathcal{L}(H)$.

Supongamos que la norma traza de $A(z)$, $\|A(z)\|_1$ está acotada sobre cada subconjunto compacto de G.

Entonces, la función $det_1(I - A(z)) :\ G \longrightarrow \mathbf{C}$ es holomorfa.

Demostración. Sea $\{\Phi_j\}_1^\infty$ una base ortogonal de H. Para cada $n \geq 1$, sea P_n la proyección ortogonal sobre el subespacio de H generado por $\left\{\Phi_j\right\}_{j=1}^{n}$.

Definamos $A_n(z) = P_n A(z) P_n$. Para cada $z \in G$ fijo, se verifica

$$det_1(I - A(z)) = \lim_{n\to\infty} det_1(I - A_n(z)),$$

debido a que $A_n(z) \to A(z)$ para $n \to \infty$ en $\mathcal{J}_1$ y a que det_1 es continua en $\mathcal{J}_1$.

Por ser $A(z)$ holomorfa en G, se deduce que $det_1(I - A_n(z)) = det(\delta_{jk} - (A(z)\Phi_k, \Phi_j))_{j,k=1,\dots,n}$ es también una función holomorfa en G y que $det_1(I - A(z))$ es una función medible.

En consecuencia, para cada n se tiene:

$$det_1(I - A_n(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z|=r} \frac{det_1(I - A_n(w))}{w - z}\, dw, \tag{2.1}$$

donde la curva $\{|w - z| = r\} \subset G$, es recorrida en sentido antihorario. Además, si se denota con $\lambda_j(A_n(z))$ y $z_j(A_n(z))$ a los valores propios y los valores singulares del operador $A_n(z)$ se tiene

$$|det_1(I - A_n(z))| = \prod_{j=1}^{n} |1 - \lambda_j(A_n(z))|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \prod_{j=1}^{n} 1+|\lambda_j(A_n(z))| \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} 1+z_j(A_n(z)) \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} e^{z_j(A_n(z))} \\
&= e^{\sum_{j=1}^{n} z_j(A_n(z))} \\
&= e^{\|A_n(z)\|_1} \\
&\leq e^{\|A(z)\|_1}.
\end{aligned}
$$

Como por hipótesis $\|A(z)\|_1$ está acotada para $z \in K$, para cualquier compacto K de G, la misma propiedad es válida para $det_1(I - A_n(z))$.

Finalmente, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se deduce de la igualdad (2.1) la representación

$$
det_1(I - A(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{det_1(I - A(w))}{w - z}\, dw,
$$

que garantiza que $det_1(I - A(z))$ es holomorfa en G.

■

Lema 2.2.

Bajo las hipótesis del lema 2.1 se verifica:

(a) la derivada de $A(z)$ es tipo traza para todo $z \in G$;

(b) la función $Tr(A(z))$ es holomorfa en G, y

(c) $\frac{d}{dz}\left[Tr(A(z))\right] = Tr\left[\frac{d}{dz}A(z)\right]$.

Observación: Debido a que $\mathcal{J}_1$ no es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(H)$ con la norma de los operadores acotados, la afirmación (a) no es obvia.

Demostración. Probaremos (a) mostrando que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} < \frac{d}{dz}A(z)\phi_j, \phi_j >$ es absolutamente convergente para todo $z \in G$ y toda base ortonormal $\{\phi_j\}_1^{\infty}$ de H. Por hipótesis, las funciones $a_j(z) =< \frac{d}{dz}A(z)\phi_j, \phi_j >: G \longrightarrow \mathcal{C}$ son holomorfas. Luego, la sucesión $S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j(z)$ tiende a $Tr(A(z))$. Por otra parte, estas sumas parciales resultan uniformemente acotadas sobre compactos de G debido a las hipótesis y a la desigualdad

$$
|S_n(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j(z)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(z)| = \|A(z)\|_1.
$$

Tomando la curva $\gamma = \{|w - z| = r\} \subset G$, se tiene la representación integral

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{S_n(w)}{w - z}\, dw.$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se obtiene:

$$Tr(A(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Tr(A(w))}{w - z}\, dw.$$

Esta representación indica que la función $Tr(A(z))$ es holomorfa en G y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[Tr(A(z))\right] &= \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dz}(S_n(z)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dz} < A(z)\phi_j, \phi_j > \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} < \frac{d}{dz} A(z)\phi_j, \phi_j > \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} < \frac{d}{dz} A(z)\phi_j, \phi_j >, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

independientemente de la elección de la base ortonormal $\{\phi_j\}_1^\infty$. En particular, es independiente de cualquier reordenación de la base y por lo tanto, la serie es absolutamente convergente. Así, $\frac{d}{dz}A(z)$ es tipo traza y, de (2.2) resulta

$$\frac{d}{dz}\left[Tr(A(z))\right] = Tr\left[\frac{d}{dz}A(z)\right].$$

■

Lema 2.3.

Bajo las hipótesis del lema 2.1 se verifica:

$$\frac{d}{dz} ln(det_1(I - A(z)) = -Tr\left[(I - A(z))^{-1} \frac{d}{dz}(A(z))\right].$$

Demostración. Razonando de manera similar a como lo hemos hecho en la demostración del lema anterior, se tiene:

$$ln[det_1(I - A(z))] = \lim_{n\to\infty} ln[det_1(I - A_n(z))]$$

$$\text{y} \quad \frac{d}{dz} ln[det_1(I - A(z))] = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dz} ln[det_1(I - A_n(z))],$$

si $z \in \mathbf{C}$ tal que $det_1(I - A(z)) \neq 0$.

Para las matrices de dimensión finita $A_n(z)$ del lema 2.1 es válido que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} ln[det_1(I - A_n(z))] &= \frac{d}{dz} Tr[ln(I - A_n(z))] \\
&= Tr\left[(I - A_n(z))^{-1} \frac{d}{dz}(I - A_n(z))\right] \\
&= -Tr\left[(I - A_n(z))^{-1} \frac{d}{dz} A_n(z)\right],
\end{aligned}$$

y además $(I - A_n(z))^{-1} \rightarrow (I - A(z))^{-1}$ en $\mathcal{J}_1$.

Luego, por la continuidad de la funcional Tr en el ideal $\mathcal{J}_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} ln[det_1(I - A(z))] &= \lim_{n \to \infty} -Tr\left[(I - A_n(z))^{-1} \frac{d}{dz} A_n(z)\right] \\
&= -Tr\left[(I - A(z))^{-1} \frac{d}{dz} A(z)\right].
\end{aligned}$$

■

II.B:Caso de operadores en el ideal de Schatten $\mathcal{J}_p$, $p > 1$

Lema 2.4.

Sea $A(z)\colon G \longrightarrow \mathcal{J}_p$ una aplicación holomorfa sobre un subconjunto abierto G de $\mathbf{C}$ a valores en el ideal $\mathcal{J}_p$ dotado con la norma de $\mathcal{L}(H)$.

Supongamos que la norma del p-ésimo ideal de Schatten de $A(z)$, $\|A(z)\|_p$ está acotada sobre cada subconjunto compacto de G.

Entonces, la función $det_p(I - A(z)) : G \longrightarrow \mathbf{C}$ es holomorfa.

Demostración. Siguiendo a [S], se escribe

$$R_p(A(z)) = I - (I - A(z))e^{A(z) + \frac{(A(z))^2}{2} + \cdots + \frac{(A(z))^{p-1}}{p-1}},$$

siendo $R_p(z) = 1 - (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{p-1}}$ una función entera. Como por hipótesis $A(z) \in \mathcal{J}_p$, resulta $R_p(A(z)) \in \mathcal{J}_1$ y $det_p(I - A(z)) = det_1(I - R_p(A(z)))$.

Veamos que $R_p(A(z))$ satisface las hipótesis del lema 2.1. Para mostrar que $R_p(A(z))\colon G \longrightarrow \mathcal{J}_1$ es una función holomorfa, se escribe

$$R_p(A(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} R_p(\lambda)(\lambda - A(z))^{-1}\, d\lambda,$$

con Γ_z una curva que rodea al espectro de $A(z)$. (Por ejemplo, podemos tomar $\Gamma_z = \{\lambda \in \mathcal{C} / |\lambda| = 2\|A(z)\|\}$, recorrida en sentido antihorario.)

Sea $r > 0$ tal que $\{z \in \mathcal{C}/|z| < r\} \subset G$ y sea $h \in \mathcal{C}$ con $|h| \leq r/2$. Tenemos:

$$\frac{R_p(A(z+h)) - R_p(A(z))}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_z} R_p(\lambda) \frac{[(\lambda - A(z+h))^{-1} - (\lambda - A(z))^{-1}]}{h} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_z} R_p(\lambda)(\lambda - A(z+h))^{-1} \frac{(A(z) - A(z+h))}{h} (\lambda - A(z))^{-1} \, d\lambda. \tag{2.3}$$

Del teorema del valor medio entre espacios de Banach obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A(z) - A(z+h)\|_{H,H} &\leq |h| \max_{0 \leq t \leq 1} \|\frac{d}{dz}(A(z+th))\|_{H,H} \\ &\leq |h| \max_{|\nu| \leq r/2} \|\partial_\nu(A(\nu))\|_{H,H} \\ &= C|h|. \end{aligned}$$

Como $(\lambda - A(z+h))^{-1} = (\lambda - A(z))^{-1} \left[I + (A(z) - A(z+h))(\lambda - A(z))^{-1}\right]^{-1}$, se tiene

$$\begin{aligned} &\|(\lambda - A(z+h))^{-1}\|_{H,H} \leq \\ &\quad \leq \|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H} \, \|[I + (A(z) - A(z+h))(\lambda - A(z))^{-1}]^{-1}\|_{H,H} \\ &\quad \leq \|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H} \left[1 - \|(A(z) - A(z+h)\|_{H,H} \|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H}\right]^{-1} \\ &\quad \leq 2\|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H}, \qquad \text{para todo} \quad \lambda \in \Gamma_z. \end{aligned}$$

Por la continuidad de $A(z)$ en $\mathcal{L}(H)$, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\|A(z) - A(z+h)\|_{H,H} < \frac{1}{2} \frac{1}{\max_{\lambda \in \Gamma_z} \|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H}}$. Tomando h tal que $|h| < \min\{\delta, r/2\}$ se tiene $\|A(z) - A(z+h)\|_{H,H} \, \|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H} < \frac{1}{2}$ uniformemente en λ para $\lambda \in \Gamma_z$.

Resulta así que, para h suficientemente pequeño, el integrando de la igualdad (2.3) está uniformemente acotado en la norma de $\mathcal{L}(H)$ por una función integrable en λ. Por el teorema de la convergencia dominanda de Lebesgue, se tiene que la función $R_p(A(z))$ de G a valores en $\mathcal{L}(H)$ es holomorfa.

Por otro lado, escribiendo $R_p(z) = z^p h(z)$, con $h(z)$ una función entera tal que $h(0) = \frac{1}{p} \neq 0$, resulta $R_p(A(z)) = (A(z))^p h(A(z))$. Debido a que $h(A(z))$ pertenece a $\mathcal{L}(H)$ y $(A(z))^p$ es tipo traza, $R_p(A(z))$ es tipo traza y

$$\|R_p(A(z))\|_1 \leq \|(A(z))^p\|_1 \, \|h(A(z))\|_{H,H} \leq \|A(z)\|_p{}^p \, \|h(A(z))\|_{H,H}.$$

Esta desigualdad asegura que $R_p(A(z))$ está uniformemente acotado sobre cualquier subconjunto compacto de G, ya que el primer factor del término de la derecha lo está por hipótesis y el segundo es una función continua de z. Finalmente, por el lema 2.1 se concluye que la función $det_p(I - A(z))$ es holomorfa.

■

Lema 2.5.

Bajo las hipótesis del lema 2.4 se verifica:

(a) el operador $\frac{d}{dz}A(z)$ está en la clase $\mathcal{J}_p$ para todo $z \in G$;

(b) la función $Tr[(A(z))^p]$ es holomorfa en G;

(c) $\frac{d}{dz}\left[Tr[(A(z))^p]\right] = p\,Tr\left[(A(z))^{p-1}\frac{d}{dz}A(z)\right]$.

Demostración. Por ser $A(z)$ holomorfa, se tiene en la norma de $\mathcal{L}(H)$

$$\frac{d}{dz}(A(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{A(w)}{(w-z)^2}\,dw,$$

donde la curva $\Gamma = \{|w-z| = r\} \subset G$ está recorrida en sentido antihorario y $r > 0$ suficientemente pequeño. De este modo

$$\begin{aligned}\|\frac{d}{dz}(A(z))\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\Gamma}\|A(z)\|_p\frac{2\pi r}{r^2}\\ &= \frac{1}{r}\sup_{\Gamma}\|A(z)\|_p < \infty,\end{aligned}$$

debido a la hipótesis de acotación sobre compactos. Por consiguiente $\frac{d}{dz}(A(z)) \in \mathcal{J}_p$.

Luego, las afirmaciones (a) y (b) de la tesis resultan inmediatamente del lema 2.2. Para (c), utilizando el lema 2.2 y la propiedad cíclica de las trazas, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}Tr[A(z)^p] &= Tr[\frac{d}{dz}(A(z))^p]\\ &= Tr\left[\sum_{j=1}^{p} A(z)^{j-1}\,\frac{d}{dz}(A(z))\,A(z)^{p-j}\right]\\ &= \sum_{j=1}^{p} Tr\left[A(z)^{j-1}\,\frac{d}{dz}(A(z))\,A(z)^{p-j}\right]\\ &= \sum_{j=1}^{p} Tr\left[A(z)^{p-1}\,\frac{d}{dz}(A(z))\right]\\ &= p\,Tr[A(z)^{p-1}\,\frac{d}{dz}(A(z))].\end{aligned}$$

■

Lema 2.6.

De las hipótesis del lema 2.4 resulta:

$$\frac{d}{dz}\ln\,det_p(I - A(z)) = -Tr\left[(I - A(z))^{-1}(A(z))^{p-1}\frac{d}{dz}(A(z))\right].$$

Demostración. Para todo $z \in G$ tal que $I - A(z)$ sea invertible, se tiene

$$\ln det_p(1 - A(z)) = \ln det_1(1 - R_p(A(z))),$$

con $R_p(A(z))$ como antes.

De los lemas 2.3 y 2.4 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\ln det_p(I - A(z)) &= \frac{d}{dz}\ln det_1(I - R_p(A(z))) \\ &= -Tr\left[(I - R_p(A(z)))^{-1}\,\frac{d}{dz}(R_p(A(z)))\right].\end{aligned}$$

Sea $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, y sea P_n la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\{\phi_j,\ j = 1, \dots, n\}$. Entonces $A(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(z)$ en la norma $\mathcal{J}_p$, siendo $A_n(z) = P_n\, A(z)\, P_n$.

Notemos que, en primer lugar, para todo exponente r tal que $1 \le r \le p$, $A_n(z)^r \to A(z)^r$ en la norma del ideal $\mathcal{J}_{p/r}$ si $n \to \infty$, ya que $A(z)^r \in \mathcal{J}_{p/r}$ y $A_n(z)^r = P_n A(z)^r P_n$. Por otra parte, si $h(z)$ es una función entera de z y Γ es una curva que rodea al espectro de $A(z)$, es válida la siguiente estimación para cada $z \in G$ fijo:

$$\begin{aligned}&\|h(A_n(z)) - h(A(z))\|_{H,H} \\ &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(\lambda)\,[(\lambda - A_n(z))^{-1} - (\lambda - A(z))^{-1}]\,d\lambda\right\|_{H,H} \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |h(\lambda)|\,\|[(\lambda - A_n(z))^{-1} - (\lambda - A(z))^{-1}]\|_{H,H}\,|d\lambda| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |h(\lambda)|\,\|(\lambda - A_n(z))^{-1}\|_{H,H}\,\|A(z) - A_n(z)\|_{H,H}\,\|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H}\,|d\lambda| \\ &\le \left(\tfrac{1}{\pi}\int_\Gamma |h(\lambda)|\,\|(\lambda - A(z))^{-1}\|^2_{H,H}\,|d\lambda|\right)\|A(z) - A_n(z)\|_{H,H} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

puesto que, para n suficientemente grande, $\|(\lambda - A_n(z))^{-1}\|_{H,H} \le 2\|(\lambda - A(z))^{-1}\|_{H,H}$. Vemos así que $h(A_n(z)) \to h(A(z))$ en la norma de $\mathcal{L}(H)$.

Aplicando la desigualdad triangular, se tiene

$$R_p(A(z)) = \lim_{n\to\infty} R_p(A_n(z)) \qquad \text{en} \qquad \mathcal{J}_1$$

ya que $R_p(A(z)) = g(A(z))$, siendo $g(z) = z^p\, h(z)$, con $h(z)$ una función entera.

Luego

$$\frac{d}{dz}\ln det_p(I - A(z)) = -\lim_{n\to\infty} Tr\{[I - R_p(A_n(z))]^{-1}\frac{d}{dz}[R_p(A_n(z))]\}. \tag{2.4}$$

Para cada natural n se tiene

$$
\begin{aligned}
&Tr\{[I-R_p(A_n(z))]^{-1}\frac{d}{dz}[R_p(A_n(z))]\} = Tr\{[I-g(A_n(z))]^{-1}\frac{d}{dz}[g(A_n(z))]\} \\
&= Tr\Big\{(I-A_n(z))^{-1}e^{-A_n(z)-\frac{1}{2}A_n(z)^2-\cdots-\frac{1}{p-1}A_n(z)^{p-1}}\times \\
&\quad\times\frac{d}{dz}\Big[I-(I-A_n(z))e^{A_n(z)+\frac{1}{2}A_n(z)^2+\cdots+\frac{1}{p-1}A_n(z)^{p-1}}\Big]\Big\} \\
&= -Tr\Big\{(I-A_n(z))^{-1}e^{-A_n(z)-\cdots-\frac{1}{p-1}A_n(z)^{p-1}}\Big[-\frac{d}{dz}(A_n(z))\times \\
&\quad\times e^{A_n(z)+\cdots+\frac{1}{p-1}A_n(z)^{p-1}}+(I-A_n(z))\sum_{j=1}^{p-1}e^{A_n(z)+\cdots+\frac{1}{j-1}A_n(z)^{j-1}}\times \\
&\quad\times\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{1}{j}A_n(z)^j}\right)e^{\frac{1}{j+1}A_n(z)^{j+1}+\cdots+\frac{1}{p-1}A_n(z)^{p-1}}\Big]\Big\} \\
&= Tr\left[(I-A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right]-\sum_{j=1}^{p-1}Tr\left[e^{-\frac{1}{j}A_n(z)^j}\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{1}{j}A_n(z)^j}\right)\right]. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

(Para obtener la última igualdad hemos aplicado la propiedad cíclica de la traza de matrices en dimensión finita.)

Sea K un subconjunto compacto de G. Debido a que $\|A(z)\|$ está acotado sobre K podemos tomar una curva cerrada simple Γ que rodee el espectro de $A_n(z)$ para $z\in K$ y $n\in\mathrm{N}$. Aplicando la fórmula de Cauchy tenemos

$$
e^{\frac{A_n(z)^j}{j}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda^j}{j}(\lambda-A_n(z))^{-1}\,d\lambda. \qquad (2.6)
$$

Esto implica que la familia $e^{\frac{A_n(z)^j}{j}}$ de matrices de tamaño $n\times n$ está bien definida y es analítica en z. Eligiendo K igual a la clausura de un entorno de z contenido en G y derivando con respecto a z en (2.6) se tiene:

$$
\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{A_n(z)^j}{j}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}(\lambda-A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))(\lambda-A_n(z))^{-1}\,d\lambda
$$

De aquí, (por la propiedad cíclica de las trazas) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{A_n(z)^j}{j}}\right)\right] = \\
&= Tr\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}(\lambda-A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))(\lambda-A_n(z))^{-1}\,d\lambda\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}(\lambda-A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))(\lambda-A_n(z))^{-1}\right]d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}Tr\left[(\lambda-A_n(z))^{-1}e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}(\lambda-A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right]d\lambda
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}} Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}(\lambda - A_n(z))^{-2}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right] d\lambda$$
$$= Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}(\lambda - A_n(z))^{-2}\, d\lambda\right)\frac{d}{dz}(A_n(z))\right].$$

El factor $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\frac{\lambda^j}{j}}(\lambda - A_n(z))^{-2}\, d\lambda$ es la derivada de la función $e^{\frac{\lambda^j}{j}}$ evaluada en la matriz $A_n(z)$, es decir, $e^{\frac{A_n(z)^j}{j}} A_n(z)^{j-1}$. Esto permite escribir:

$$Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}}\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{A_n(z)^j}{j}}\right)\right] = Tr\left[e^{\frac{-A_n(z)^j}{j}} e^{\frac{A_n(z)^j}{j}} A_n(z)^{j-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right]$$
$$= Tr\left[A_n(z)^{j-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right].$$

Continuando con la igualdad (2.5), se tiene para cada número natural n:

$$Tr\{[I - R_p(A_n(z))]^{-1}\frac{d}{dz}[R_p(A_n(z))]\} =$$
$$= Tr\left[(I - A_n(z))^{-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right] - \sum_{j=1}^{p-1} Tr\left[A_n(z)^{j-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right]$$
$$= Tr\left[\left((I - A_n(z))^{-1} - \sum_{j=1}^{p-1} A_n(z)^{j-1}\right)\frac{d}{dz}(A_n(z))\right]$$
$$= Tr\left[(I - A_n(z))^{-1} A_n(z)^{p-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right], \tag{2.7}$$

(Hemos utilizado la fórmula de Taylor con resto para establecer la última igualdad.)

Es fácil comprobar que

$$(I - A_n(z))^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} (I - A(z))^{-1} \text{ en la norma de } \mathcal{L}(H),$$

y que

$$A_n(z)^{p-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} A(z)^{p-1} \text{ en la norma del ideal } \mathcal{J}_{p/p-1}.$$

Por otro lado, como

$$\frac{d}{dz}(A_n(z)) = \frac{d}{dz}(P_n A(z) P_n) = P_n\frac{d}{dz}(A(z))P_n$$

se tiene que

$$\tfrac{d}{dz}(A_n(z)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{d}{dz}(A(z)) \text{ en la norma del ideal } \mathcal{J}_p,$$

De todo lo anterior resulta que

$$(1 - A_n(z))^{-1}A_n(z)^{p-1}\tfrac{d}{dz}(A_n(z)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 - A(z))^{-1}A(z)^{p-1}\tfrac{d}{dz}(A(z)).$$

Combinando este hecho con (2.4) y (2.7), y utilizando la continuidad de la traza en el ideal $\mathcal{J}_1$, obtenemos finalmente :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\ln det_p(1-A(z)) &= -\lim_{n\to\infty} Tr\left[(1-A_n(z))^{-1}A_n(z)^{p-1}\frac{d}{dz}(A_n(z))\right] \\ &= -Tr\left[(1-A(z))^{-1}A(z)^{p-1}\frac{d}{dz}(A(z))\right].\end{aligned}$$

■

SECCION III

RELACION ENTRE EL P-DETERMINANTE Y LOS VALORES DE CONTORNO DE UN PROBLEMA ELIPTICO

III.A: Introducción

En esta sección se considera una familia monoparamétrica de matrices de operadores pseudodiferenciales elípticos L_t invertibles y de orden $m > 0$ con igual símbolo principal actuando entre las secciones $\mathcal{C}^\infty$ de dos fibrados vectoriales (E, M, π_E) y (F, M, π_F) , ambos con fibras de dimensión k. Recordemos que M es una variedad diferencial compacta n-dimensional con borde X.

Denotemos con Q_t al operador de proyección de Calderón ([C], [H]) sobre los datos de Cauchy modificados de funciones $\mathcal{C}^\infty$ del núcleo de L_t, para cada t. (Ver Sección I.) Q_t es una matriz de operadores pseudodiferenciales en la clase $I_h^\circ(X)$ de tamaño $km \times km$. Se supone que su símbolo principal q tiene rango constante $r \leq km$. (Esto siempre ocurre para $n \geq 3$ [C]). Recordemos que q se construye a partir del símbolo principal de L_t ([C]), que no depende de t por hipótesis.

Sean además A y B pertenecientes a la clase $I_h^\circ(X)$ dos condiciones de contorno tales que los problemas de contorno $L_{tA} = (L_t, A)$ y $L_{tB} = (L_t, B)$ sean elípticos, para todo t.

Recordemos que T denota la aplicación lineal sobre los datos de Cauchy en el borde X. Así mismo, P_{tB} denotará la aplicación de Poisson asociada al problema de contorno (L_t, B), es decir, P_{tB} es la aplicación lineal

$$P_{tB}\colon \underbrace{\mathcal{C}^\infty(X,F)\otimes\mathcal{C}^\infty(X,F)\otimes\cdots\otimes\mathcal{C}^\infty(X,F)}_{m \quad veces} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,E)$$

tal que si $h \in Im(B)$, entonces $f = P_{tB}(h)$ satisface las igualdades $L_t f = 0$ y $BTf = h$. Esto significa pues que $BTP_{tB|Im(B)} = id_{|Im(B)}$ y que $P_{tB}BT_{|Ker(L_t)} = I_{|Ker(L_t)}$. Análogamente, P_{tA} será la aplicación de Poisson asociada a (L_t, A).

Sea b el símbolo principal del operador B; es una matriz de tamaño $r \times km$. Debido a la elipticidad del problema (L_t, B) la matriz bq, de tamaño $r \times km$, tiene rango r, al igual que q. Así $b_{|Im(q)}$ es inyectiva entre subespacios de dimensión r, y por lo tanto es biyectiva. En estas condiciones existe un operador S_{tB} inverso a derecha de B ([H]), dado por $S_{tB} = TP_{tB}$, que verifica $Q_t S_{tB} = S_{tB}$ y $BS_{tB} = BTP_{tB} = id_{Im(B)}$. De la misma manera existe S_{tA} inverso a derecha de A con propiedades análogas.

Para las condiciones de contorno A y B y para cada uno de los operadores L_t consideramos la biyección $\Phi_{t\,AB} : Im(B) \longrightarrow Im(A)$ definida por $\Phi_{t\,AB} = A\,T\,P_{tB} = A\,S_{tB}$.([F]). Notemos que por ser A y B elementos de $I_h^\circ(X)$, resulta $S_{tB} \in I_h^\circ(X)$, por lo que $T\,P_{tB}\,B$ y $T\,P_{tA}\,A$ también resultan elementos de $I_h^\circ(X)$.

A continuación se transcribe un importante lema debido a R. Forman donde se relacionan las parametrices y las aplicaciones de Poisson de los problemas de contorno (L_t, A) y (L_t, B).

Lema 3.1. *[F]*

Con las notaciones anteriores se tiene:

a) $\frac{d}{dt}P_{tB} = -L_{tB}^{-1}.\frac{d}{dt}L_t.P_{tB}$

b) $P_{tA}\,A\,T\,L_{tB}^{-1} = L_{tB}^{-1} - L_{tA}^{-1}$,

con L_{tA}^{-1} *y* L_{tB}^{-1} *los operadores cuyos núcleos son las funciones de Green de los problemas de contorno* (L_t, A) *y* (L_t, B) *respectivamente.*

Este lema se usará en la generalización del resultado de Forman que expresa el cociente de zeta-determinantes del operador L_t con las condiciones A y B en términos del determinante Fredholm de un cociente de operadores en la variedad borde X, construído a partir de los valores de borde de las soluciones de los problemas de contorno dados. En este punto es importante destacar la relación entre dos parametrices de un mismo operador L con condiciones de contorno A y B que se deduce del inciso b) del lema 3.1: si se conoce la parametriz L_B^{-1} del problema de contorno (L, B), entonces la parametriz L_A^{-1} de (L, A) está dada por $L_A^{-1} = L_B^{-1} - P_A\,A\,T\,L_B^{-1}$. (Esto es en esencia lo realizado por R. Seeley en [S2] al construir la parametriz de un problema elíptico de contorno a partir del problema con condiciones de borde periódicas, vale decir, sin condiciones de contorno).

El siguiente teorema fue probado por R. Forman y sobre él se basa nuestra generalización.

Teorema 3.2. *[F]*

Sean L_t *una familia monoparamétrica de operadores diferenciales elípticos y* A *y* B *dos condiciones de contorno elípticas para cada* L_t. *Sea* $L_t' = \frac{d}{dt}(L_t)$. *Si para todo* t *se satisfacen:*

$$1)\int_M |trL_t'(L_{tA}^{-1} - L_{tB}^{-1})| \quad < \infty,$$

$$2)\int_{sopL_t'} |tr(L_{tA}^{-1} - L_{tB}^{-1})| \quad < \infty,$$

$3)L_t'\,L_{tB}^{-1}$, *o bien* $L_t'\,L_{tA}^{-1}$ *, está acdtado,* *entonces*

$$\frac{Det_\zeta L_{t,A}}{Det_\zeta L_{t,B}} \cdot \frac{Det_\zeta L_{0,B}}{Det_\zeta L_{0,A}} = det_1\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right).$$

En particular $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}$ es tipo traza.

La generalización consistirá justamente en considerar el caso en que $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}$ no es un operador tipo traza. En lo que sigue se mostrará que tal operador está en la clase de Schatten $\mathcal{J}_p$, para cierto valor de p, y se extenderá el teorema 3.2 a este caso.

III.B: $\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)^n$ es tipo traza

Lema 3.3.

El operador $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}$ es un pseudodiferencial de orden -1 en X y $\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)^n$ es tipo traza.

Demostración. Sean a, b, q los símbolos principales de los operadores A, B, Q. (Se han suprimido momentáneamente los subíndices t ya que se considerará a cada miembro de la familia $\{L_t\}_t$ por separado.) Los símbolos principales de $A\,Q$ y $B\,Q$, aq y bq, son matrices de tamaño $r \times km$, de rango máximo r debido a la elipticidad de los problemas (L, A) y (L, B) ([C]). Las matrices de tamaño $r \times r$ aqq^*a^* y bqq^*b^* , símbolos principales de los operadores $A\,Q\,Q^*\,B^*$ y $B\,Q\,Q^*\,B^*$, respectivamente, tienen claramente rango r y, por lo tanto, son invertibles. Para ver que lo mismo ocurre con aqq^*b^*, símbolo principal de $A\,Q\,Q^*\,B^*$ notemos que de $r = rango(q) = rango(bq)$ se deduce que $b_{|Im(q)}$ es inyectiva. Luego $Ker(q) = Ker(bq)$ y, de manera análoga, $Ker(q) = Ker(aq)$ por ser $r = rango(bq) = rango(aq)$. Entonces $Ker(aq) = Ker(bq)$, lo que equivale a $Im(q^*a^*) = Im(q^*b^*)$, de donde $Im(aqq^*b^*) = Im(aqq^*a^*)$, y $rango(aqq^*b^*) = r$. Así los operadores $A\,Q\,Q^*\,B^*$ y $B\,Q\,Q^*\,B^*$ son pseudodiferenciales elípticos de orden 0 definidos en la variedad borde X. El hecho de que estos operadores tengan como núcleos a subespacios de dimensión finita [C], admite cada uno un inverso a derecha si restringimos sus dominios al complemento de sus núcleos. Por abuso de notación llamemos $(A\,Q\,Q^*\,B^*)^{-1}$ y $(B\,Q\,Q^*\,B^*)^{-1}$ a tales inversas a derecha, las que resultan ser operadores pseudodiferenciales de orden 0 en X. Sus símbolos principales son respectivamente $(aqq^*b^*)^{-1}$ y $(bqq^*b^*)^{-1}$ debido a la invertibilidad bilátera de los mismos.

Entonces, llamando

$$S_A = Q\,Q^*\,B^*\,(A\,Q\,Q^*\,B^*)^{-1} \qquad \text{y} \qquad S_B = Q\,Q^*\,B^*\,(B\,Q\,Q^*\,B^*)^{-1}$$

se tiene

$$B\,S_B = I \qquad Q\,S_B = S_B$$
$$A\,S_A = I \qquad Q\,S_A = S_A.$$

De este modo, para la aplicación T que da los datos de Cauchy y las aplicaciones de Poisson P_A y P_B, se tiene:

$$T\,P_A = Q\,S_A = S_A \qquad \text{y} \qquad T\,P_B = Q\,S_B = S_B$$

y, para cada valor del parámetro t,

$$\Phi_{t\,BA} = B\,T\,P_{tA} = B\,S_{tA} \qquad \text{y} \qquad \Phi_{t\,AB} = A\,T\,P_{tB} = A\,S_{tB}.$$

Notemos que para todo t se tiene

$$\begin{aligned}(\Phi_{t\,BA})^{-1} = (B\,S_{tA})^{-1} &= \left[B\,Q_t\,Q_t^*\,B^*\,(A\,Q_t\,Q_t^*\,B^*)^{-1}\right]^{-1}\\ &= A\,Q_t\,Q_t^*\,B^*\,(B\,Q_t\,Q_t^*\,B^*)^{-1}\\ &= A\,S_{tB} = \Phi_{t\,AB}.\end{aligned}$$

En consecuencia, el operador

$$\Phi_{0\,AB}^{-1}\,\Phi_{t\,AB} = \Phi_{0\,BA}\,\Phi_{t\,AB} = B\,S_{0A}\,A\,S_{tB}$$

es un pseudodiferencial en la clase $I_h^{\circ}(X)$ cuyo símbolo principal está dado por

$$\sigma_0(\Phi_{0\,AB}^{-1})\sigma_0(\Phi_{t\,AB}) = \sigma_0(\Phi_{0\,AB})^{-1}\sigma_0(\Phi_{t\,AB}) = id,$$

ya que $\sigma_0(\Phi_{t\,AB})$ no depende del parámetro t. Observemos que los símbolos principales de S_{tA} y S_{tB} no dependen de t porque se construyen a partir del símbolo principal de Q_t, y éste, a su vez, sólo depende del símbolo principal de L_t, que es el mismo para todo t.

Luego, el símbolo principal del operador pseudodiferencial $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\,\Phi_{t\,AB}$ es la matriz nula.

Por consiguiente el operador $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\,\Phi_{t\,AB}$ tiene orden -1, es decir está en la clase $I_h^{-1}(X)$, y como $dim(X) = n-1$, la potencia n de este operador es tipo traza, esto es,

$$I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\,\Phi_{t\,AB} \in \mathcal{J}_n \qquad \text{y} \qquad det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\,\Phi_{t\,AB}\right) < \infty.$$

■

III.C: Generalización del teorema 3.2

En este parágrafo se establece la relación que liga el p-determinante de un operador construído a partir de una familia $\{L_t\}$ de operadores elípticos con el cociente de operadores pseudodiferenciales en la variedad borde X, vinculados con los valores de borde de las soluciones de L_t.

Lema 3.4. *[B-F-GS-S]*

Para todo número natural r se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right)\left(I - L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1}\right)^r = \\
&\qquad\qquad = \left(I - P_{t\,B}\, B\, T\, P_{0\,A}\, A\, T\right)^r \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

Demostración. Será suficiente con mostrarlo para $r = 1$; el resto sigue por el principio de inducción completa.

Por aplicación del lema 3.1 b) se tiene:

$$
A\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) = A\,T\,\left(-L_{t\,B}^{-1}\right) \quad \text{y} \quad B\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) = B\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1}\right)
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right)\left(I - L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1}\right) = \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right)\left(L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1}\right) \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, L_{t\,A}^{-1} L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1} \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} \quad L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1} \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, \left(L_{0\,A}^{-1} - L_{0\,B}^{-1}\right)\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1} \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, P_{0\,A}\, A\, T\, \left(-L_{0\,B}^{-1}\right)\, L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1} \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, P_{0\,A}\, A\, T\, \left(-L_{t\,B}^{-1}\right) \\
&\quad = \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) - P_{t\,B}\, B\, T\, P_{0\,A}\, A\, T\, \left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right) \\
&\quad = \left(I - P_{t\,B}\, B\, T\, P_{0\,A}\, A\, T\right)\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

■

El siguiente es uno de los resultados más relevantes de este trabajo y da la anunciada generalización del teorema 3.2.

Teorema 3.5.

Sea M una variedad diferencial n-dimensional compacta con borde X y G un subconjunto abierto de $\mathbf{C}$. Sea $\{L_z\}_{z \in G}$ una familia monoparámetrica analítica en *la norma $\mathcal{L}^2(M)$ de $k \times k$-matrices de operadores diferenciales elípticos invertibles de orden $m > 0$ e idéntico símbolo principal definidos entre las secciones $\mathcal{C}^\infty(M,E)$ y $\mathcal{C}^\infty(M,F)$ de dos fibrados vectoriales complejos E y F ambos de base M y fibras k-dimensionales.*

Sea $z(t)$: $[0,1] \longrightarrow G$ una curva diferenciable y definamos la familia $\{L_t\}_{t\in[0,1]}$ como $L_t = L_{z(t)}$.

Sean A y B dos condiciones de contorno de manera que los problemas $(L_{t\,A})$ y $(L_{t\,B})$ sean elípticos e invertibles para todo $t \in [0,1]$.

Entonces, para cada $t \in [0,1]$, el operador $L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}$ es pseudodiferencial en M, su n-determinante es finito y se verifica

$$det_n\left(L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\right) = det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right).$$

En particular $I - L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B} \in \mathcal{J}_n$.

Demostración. Será suficiente con comparar los logaritmos de los determinantes propuestos.

Se sabe por el lema 3.3 que la familia monoparamétrica analítica $I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}$, con $t \in [0,1]$ está formada por operadores pseudodiferenciales de orden -1 definidos sobre la variedad $n-1$-dimensional, compacta sin borde X. Esto asegura estar bajo las hipótesis del lema 2.6. Aplicando este lema y el lema 3.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\ln det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right) = \\
&= Tr\left\{\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)^{n-1}\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)_{|Im(B)}\right\} \\
&= -Tr\left\{\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)^{n-1}\Phi_{t\,AB}^{-1}\Phi_{0\,AB}\Phi_{0\,AB}^{-1}\frac{d}{dt}\left(\Phi_{t\,AB}\right)_{|Im(B)}\right\} \\
&= -Tr\left\{\left(I - B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T\,P_{t\,B}\right)^{n-1}B\,T\,P_{t\,A}\,A\,T\,\frac{d}{dt}\left(P_{t\,B}\right)_{|Im(B)}\right\} \\
&= -Tr\left\{\left(I - B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T\,P_{t\,B}\right)^{n-1}B\,T\,P_{t\,A}\,A\,T\left(-L_{t\,B}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t).\,P_{t\,B}\right)_{|Im(B)}\right\} \\
&= -Tr\left\{\left(I - B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T\,P_{t\,B}\right)^{n-1}B\,T\,\left(P_{t\,A}\,A\,T(-L_{t\,B}^{-1})\right).\frac{d}{dt}(L_t).\,P_{t\,B|Im(B)}\right\} \\
&= -Tr\left\{\left(I - B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T\,P_{t\,B}\right)^{n-1}B\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).\frac{d}{dt}(L_t).\,P_{t\,B|Im(B)}\right\}.
\end{aligned}$$

Por ser P_{tB} un isomorfismo entre $Im(B)$ y $Ker(L_t)$ tenemos:

$$\frac{d}{dt}\ln det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right) =$$

$$= -Tr\left\{P_{t\,B}\,(I - B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T\,P_{t\,B})^{n-1}\,B\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\right\}$$
$$= -Tr\left\{(I - P_{t\,B}\,B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T)^{n-1}\,P_{t\,B}\,B\,T\,\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\right\}.$$

Por lema 3.1 b) y la definición de la función de Green, $P_{t\,B}\,B\,T(L_{t\,B}^{-1}) = 0$, luego

$$\frac{d}{dt}\ln det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right) =$$
$$= -Tr\left\{(I - P_{t\,B}\,B\,T\,P_{0\,A}\,A\,T)^{n-1}\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right).\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\right\}$$
$$= -Tr\left\{\left(L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right)\left(I - L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\,L_{t\,B}^{-1}\right)^{n-1}.\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\right\}. \tag{3.1}$$

Por otro lado:

$$\frac{d}{dt}\ln det_n\left(L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right) =$$
$$= Tr\Big\{\left(I - L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right)^{n-1}\,L_{0\,B}^{-1}\,L_{0\,A}\,L_{t\,A}^{-1}\,L_{t\,B}\,\times$$
$$\times\,\frac{d}{dt}\left(I - L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right)_{|Ker(L_t)}\Big\}$$
$$= -Tr\Big\{\left(I - L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right)^{n-1}\,L_{0\,B}^{-1}\,L_{0\,A}\,L_{t\,A}^{-1}\,L_{t\,B}\times$$
$$\times\,\left[-L_{t\,B}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t)\,L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B} + L_{t\,B}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t)\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right]_{|Ker(L_t)}\Big\}$$
$$= -Tr\Big\{\left(I - L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right)^{n-1}\,L_{0\,B}^{-1}\,L_{0\,A}\,L_{t\,A}^{-1}\,L_{t\,B}\,L_{t\,B}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t)\times$$
$$\times\,\left[L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right]\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B|Ker(L_t)}\Big\}$$
$$= -Tr\Big\{\left[L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right]\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\,\left(I - L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right)^{n-1}\times$$
$$\times\,L_{0\,B}^{-1}\,L_{0\,A}\,L_{t\,A}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\Big\}$$
$$= -Tr\Big\{\left[L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right]\,\left(I - L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\,L_{t\,B}^{-1}\right)^{n-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\times$$
$$\times\,L_{0\,B}\,L_{0\,B}^{-1}\,L_{0\,A}\,L_{t\,A}^{-1}.\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\Big\}$$
$$= -Tr\Big\{\left[L_{t\,A}^{-1} - L_{t\,B}^{-1}\right]\left(I - L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\,L_{t\,B}^{-1}\right)^{n-1}\,\frac{d}{dt}(L_t)_{|Ker(L_t)}\Big\}. \tag{3.2}$$

Por (3.1) y (3.2),

$$\frac{d}{dt}\ln det_n\left(L_{t\,B}^{-1}\,L_{t\,A}\,L_{0\,A}^{-1}\,L_{0\,B}\right) = \frac{d}{dt}\ln det_n\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right). \tag{3.3}$$

existe y es finita para todo $t \in [0,1]$.
La tesis se obtiene integrando miembro a miembro la igualdad (3.3) entre 0 y t y tomando luego exponenciales.

■

Observación: Si no se supone que el símbolo principal de L_t es independiente de t, no se puede afirmar que $\left(I - L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\right)^p$ es tipo traza para $p = n$; pero continúa siendo válida la igualdad

$$det_p\left(L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\right) = det_p\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right)$$

para un valor de p tal que el miembro izquierdo sea finito.

En particular, cuando $I - L_{t\,B}^{-1}L_{0\,B}$ y $I - L_{0\,A}^{-1}L_{t\,A}$ son operadores tipo traza, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{Det_\zeta L_{t,A}}{Det_\zeta L_{t,B}}.\frac{Det_\zeta L_{0,B}}{Det_\zeta L_{0,A}} &= det_1\left(L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1}\right).det_1\left(L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\right)\\
&= det_1\left(L_{0\,B}\, L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\right)\\
&= det_1\left(L_{t\,B}^{-1}\, L_{t\,A}\, L_{0\,A}^{-1}\, L_{0\,B}\right)\\
&= det_1\left(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{t\,AB}\right),
\end{aligned}$$

lo que generaliza el teorema 3.2.

Otro caso que puede ser estudiado con estas herramientas es aquél en el que se tiene un operador L con dos familias $\{A_t\}$ y $\{B_t\}$ de condiciones de contorno elípticas. Para aplicar los resultados anteriores tomamos como hipótesis la existencia de una transformación lineal multiplicativa no singular $\mathcal{U}_t$ tal que $A_t = A\,\mathcal{U}_t^{-1}$ y $B_t = B\,\mathcal{U}_t^{-1}$ siendo A y B condiciones elípticas fijas. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\mathcal{U}_0 = I$. Entonces, dado el problema elíptico

$$\begin{cases} Lf = 0 & \text{en } M \\ AT\,\mathcal{U}_t^{-1}f = h & \text{en } X, \end{cases} \tag{3.4}$$

mediante la transformación $g = \mathcal{U}_t^{-1}f$, obtenemos el problema equivalente

$$\begin{cases} L_t g = 0 & \text{en } M \\ AT\,g = h & \text{en } X, \end{cases} \tag{3.5}$$

donde hemos escrito $L_t = \mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t$. Con esta notación, se entenderá $L_{t\,A} = \left(\mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t\right)_A$ como así también $L_{t\,A}^{-1} = \left(\mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t\right)_A^{-1} = \mathcal{U}_t^{-1}.\,L_{A\,\mathcal{U}_t^{-1}}^{-1}.\,\mathcal{U}_t$.

Teorema 3.6.

Sea L un sistema de operadores diferenciales elípticos, de orden $m > 0$, invertible y de tamaño $k \times k$ actuando entre las secciones C^∞ de dos fibrados vectoriales (E, M, π_E) y (F, M, π_F) ambos con fibras k-dimensionales.

Sean $\{A_z\}$ y $\{B_z\}$ dos familias de condiciones de contorno elípticas para el operador L que se supondrán operadores pseudodiferenciales elípticos en $I_h^0(X)$ analíticos sobre un abierto G del plano complejo. Sea $z(t)$: $[0,1] \longrightarrow G$ una curva diferenciable; y definamos $A_t = A_{z(t)}$, $B_t = B_{z(t)}$.

Supongamos que existe una familia $\mathcal{U}_z$ de matrices de tamaño $mk \times mk$, no singular y con $\mathcal{U}_0 = id$ y analítica sobre G y condiciones de contorno fijas A y B tales que $A_z = A\mathcal{U}_z^{-1}$ y $B_z = B\mathcal{U}_z^{-1}$); y sea $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{z(t)}$.
Si además se cumple alguna de las condiciones siguientes:

(i) la acción por $\mathcal{U}_t$ preserva el símbolo principal del operador de proyección de Calderón Q asociado a L ,

(ii) los símbolos principales de A y B son iguales,
entonces

$$det_n \left\{ \left(\mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t\right)_B^{-1} \left(\mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t\right)_A L_A^{-1}\, L_B \right\} = det_n \left(\Phi_{0\,AB}^{-1} \Phi_{t\,AB}\right),$$

donde, en este caso, $\Phi_{t\,AB} = A\mathcal{U}_t^{-1}\, T\, P_{B\,\mathcal{U}_t^{-1}}$.

Observación: Notemos que la hipótesis (i) se verifica si, por ejemplo la matriz $\mathcal{U}_t$ conmuta o anticonmuta con el símbolo principal de L o el de Q.

Utilizaremos el siguiente lema sobre el comportamiento del proyector de Calderón asociado a L bajo la acción de $\mathcal{U}_t$ y $\mathcal{U}_t^{-1}$.

Lema 3.7.

Bajo las hipótesis del Teorema 3.6, si q_t y q denotan los símbolos principales de Q_t y Q , operadores de proyección de Calderón asociados a los operadores diferenciales $L_t = \mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t$ y L respectivamente, entonces se verifica $q_t = \mathcal{U}_t^{-1} q\,\mathcal{U}_t$.

Demostración. Por abuso de notación, también denotaremos a una extensión a M del operador multiplicativo original $\mathcal{U}_t \in I_h^0(X)$. Su símbolo principal es la misma matriz $\mathcal{U}_t$.

Recordemos que el símbolo principal de L_t está dado mediante la regla de composición de operadores pseudodiferenciales, $\sigma_0(L_t) = \sigma_0\big(\mathcal{U}_t^{-1}\, L\,\mathcal{U}_t\big) = \mathcal{U}_t^{-1}\sigma_0(L)\mathcal{U}_t$.

De acuerdo con [C], el símbolo principal $q_t(x', x_n, \xi', \xi_n)$ en cada carta local $(\mathcal{O}, \varphi)$ que interseca al borde puede ser calculado mediante el desarrollo del símbolo principal de L_t en potencias de la variable conormal ξ_n : $\sigma_0(L_t)(x', x_n, \xi', \xi_n) = \sum_{j=0}^{m} \sigma_{m-j}(t)(x', x_n, \xi').\xi_n^j$. El símbolo q_t es una matriz de $m \times m$ bloques, siendo cada uno una matriz de $k \times k$ cuya expresión está dada por [C]:

$$(q_t)_{h\,l} = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \big(\sigma_0(L_t)(x', x_n, \xi', \xi_n)\big)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{m-j}(t)(x', x_n, \xi').\xi_n^{j-l+h-1}.|\xi'|^{l-h}\, d\xi_n, \tag{3.6}$$

para $h, l = 1, 2, \ldots, m$, siendo Γ una curva simple cerrada que rodea en sentido horario todos los polos del integrando en el semiplano $\mathcal{I}m\xi_n < 0$ y las funciones

$\sigma_{m-j}(t)$ son los símbolos de operadores diferenciales de orden $m-j$ en las variables tangenciales ξ'.

Podemos suponer que en cada carta local que interseca al borde, la extensión $\mathcal{U}_t$ que hemos tomado no depende de la variable normal x_n. Siempre es posible extender $\mathcal{U}_t$ de este modo. La derivada con respecto a x_n conmuta entonces con $\mathcal{U}_t$ y con $\mathcal{U}_t^{-1}$.

Por lo tanto, cada uno de los símbolos $\sigma_{m-j}(t)$ se expresa como

$$\sigma_{m-j}(t)(x', x_n, \xi') = \mathcal{U}_t^{-1}\sigma_{m-j}(0)(x', x_n, \xi')\mathcal{U}_t.$$

De (3.6) se deduce

$$q_t = \mathcal{U}_t^{-1} q \mathcal{U}_t.$$

En particular, esta fórmula indica que el rango de la matriz q_t no depende de t, esto es, permanece constantemente igual a r, que es el rango de q.

■

Demostración del Teorema 3.6. Debido a que cerca del borde la transformación $\mathcal{U}_t$ es independiente de la variable normal, es claro que $\mathcal{U}_t^{-1}\, T\,\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_t^{-1}\,\mathcal{U}_t\, T = T$ para todo t.

Además la aplicación de Poisson P_{B_t} del problema $L_{B_t} = (L, B_t)$ verifica

$$B_t\, T\, P_{B_t\,|Im(B_t)} = I_{|Im(B_t)} \quad \text{y} \quad P_{B_t}\, B_t\, T_{|Ker(L)} = I_{|Ker(L)}.$$

Denotando con P_{tB} a la aplicación de Poisson del problema $L_{tB} = (L_t, B)$ se tiene $P_{tB} = \mathcal{U}_t P_{B_t}$ y verifica

$$\begin{aligned} B\, T\, P_{tB|Im(B_t)} &= B\, T\,\mathcal{U}_t^{-1}\, P_{B_t\,|Im(B_t)} = B\,\mathcal{U}_t^{-1}\, T\, P_{B_t\,|Im(B_t)} \\ &= B_t\, T\, P_{B_t\,|Im(B_t)} = I_{|Im(B_t)} = I_{|Im(B)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P_{tB}\, B\, T_{|Ker(L_t)} &= \mathcal{U}_t^{-1}\, P_{B_t}\, B_t \mathcal{U}_t\, T_{|Ker(L_t)} = \mathcal{U}_t^{-1}\, P_{B_t}\, B_t\, T_{|Ker(L)}\,\mathcal{U}_t \\ &= \mathcal{U}_t^{-1}\, I_{|Ker(L)}\,\mathcal{U}_t = I_{|Ker(L_t)}. \end{aligned}$$

Sean S_{B_t} y S_{tB} las inversas a derecha de B_t y B respectivamente dadas por $S_{B_t} = T\, P_{B_t}$ y $S_{tB} = T\, P_{tB}$. Teniendo en cuenta lo anterior resulta $S_{tB} = \mathcal{U}_t^{-1} S_{B_t}$.
Si $\Phi_{A_t B_t}$ es la aplicación de Forman entre $Im(B_t)$ y $Im(A_t)$ para el operador L y Φ_{tAB} la aplicación de Forman entre $Im(B)$ y $Im(A)$ para el operador L_t se tiene

$$\Phi_{tAB} = A\, S_{tB} = A\mathcal{U}_t^{-1}\, S_{B_t} = A_t\, S_{B_t} = {}'\Phi_{A_t B_t}.$$

La prueba continúa de modo análogo a la del teorema 3.5. La única diferencia es que al depender de t el símbolo principal de L_t, también depende de t el símbolo principal de Q_t y es necesario modificar levemente la demostración del lema 3.3 para ver que $I - \Phi_{0AB}^{-1}\,\Phi_{tAB} \in I_h^{-1}(X)$. Como antes, este operador pertenece a la clase $I_h^0(X)$. Si vale (i), $\mathcal{U}_t$ no altera $q_t = q$ y se está en la situación del lema 3.3. Si vale (ii), se tiene $a = \sigma_0(A) = \sigma_0(B) = b$ y, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\sigma_0\big(I - \Phi_{0AB}^{-1}\,\Phi_{tAB}\big) = id - \sigma_0\big(B\,S_A\,A\,S_{tB}\big)\\
&= id - bqq^*b^*(aqq^*b^*)^{-1}aq_tq_t^*b^*(bq_tq_t^*b^*)^{-1}\\
&= id - id = 0,
\end{aligned}
$$

de donde $I - \Phi_{0AB}^{-1}\,\Phi_{tAB} \in I_h^{-1}(X)$.

■

SECCION IV

RELACIONES ENTRE ζ-DETERMINANTE, DETERMINANTE DE FREDHOLM Y P-DETERMINANTE

IV.A: Preliminares

A continuación damos un par de resultados relativos al llamado residuo no conmutativo, expuestos en [W] y presentados también en [Fr], de donde los extractamos. Tales resultados serán aplicados en esta sección.

Sea L un operador pseudodiferencial clásico de orden m que actúa sobre las secciones de un fibrado vectorial E sobre una variedad cerrada M de dimensión n. Recordemos que L admite un símbolo $\sigma(L)(x,\xi)$ que tiene un desarrollo asintótico $\sum_{j\geq 0} \sigma_{m-j}(x,\xi)$, siendo cada función $\sigma_{m-j}(x,\xi)$ homogénea de grado $m-j$ en $|\xi| \geq 1$.

Teorema 4.1. *[W]*

Si $n \geq 2$ y $d\sigma_\xi$ es la medida sobre la esfera unitaria S^{n-1}, entonces la integral

$$res(L,x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=1} \sigma_{-n}(x,\xi)\, d\sigma_\xi\, dx \tag{4.1}$$

define una medida sobre M.

Sea $\Phi(s)$ una familia holomorfa de operadores pseudodiferenciales clásicos de modo que cada $\Phi(s)$ tenga orden $\alpha s + \beta$, con $\alpha \neq 0$. La restricción del núcleo de $\Phi(s)$ a la diagonal se anotará $\Phi_s(x,x)$. El siguiente teorema generaliza el resultado clásico de Seeley para la familia particular $\Phi(s) = L^s$.

Teorema 4.2. *[W]*

La función $\Phi_s(x,x)$, definida y holomorfa en el semiplano $\mathcal{R}e(\alpha s+\beta) < -n$, se extiende analíticamente a una función meromorfa en todo el plano complejo, todos sus polos son simples y están localizados en los puntos

$$s_j = \frac{j-n-\beta}{\alpha}, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Además,

$$Res_{s=s_j} \Phi_s(x,x)\, dx = -\frac{1}{\alpha} res(\Phi(s_j),x). \tag{4.2}$$

IV.B: Derivada del logaritmo del ζ-determinante

En general para un operador L actuando sobre en espacio de Hilbert H la noción de determinante Fredholm, y más aún la de ζ-determinante (si por ejemplo L fuera un operador arbitrario no acotado), carece de sentido. Por otro lado, en muchas ocasiones se está interesado en el cociente de determinantes de dos operadores más que en el determinante de un único operador.

Dentro de esta última línea se encuadran los trabajos [GS-M-S1] y [GS-M-S2] donde se muestra que el cociente entre los ζ-determinantes de dos operadores elípticos $A + \epsilon A_1$ y A definidos sobre una variedad diferencial compacta sin borde, siendo A pseudodiferencial de orden positivo y A_1 operador diferencial con $orden(A_1) < orden(A)$, está dado por:

$$\frac{Det_\zeta(A+\epsilon A_1)}{Det_\zeta(A)} = \exp\left\{\epsilon \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left[s.Tr(A^{-s-1}A_1)\right] + O(\epsilon^2)\right\}. \tag{4.3}$$

Otra versión sobre la derivada del logaritmo del ζ-determinante con respecto al parámetro se presenta en el paper [F] donde se establece, también para un cociente de operadores diferenciales elípticos de una familia monoparamétrica L_t del mismo orden y con igual símbolo principal y una misma condición de contorno elíptica B para cada mienbro de la familia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log Det_\zeta L_{t\,B} &= \frac{d}{ds}\, Tr\left.\left[s.(\frac{d}{dt}L_{t\,B}).L_{t\,B}^{-s-1}\right]\right|_{s=0}\\ &= \frac{d}{dt}\log det_1\left(L_{t\,B}.L_{0\,B}^{-1}\right) \end{aligned}\tag{4.4}$$

bajo la hipótesis, suficientemente restrictiva, de que para todo t el operador $\left(\frac{d}{dt}L_{t\,B}\right)L_{t\,B}^{-1}$ es tipo traza.

En el siguiente Teorema probaremos que este resultado sigue siendo válido aún en condiciones más generales. La demostración del mismo me fue sugerida por M. A. Muschietti ([M2]).

Teorema 4.3.

Sea Ω un conjunto abierto del plano complejo, y sea $z(t)$: $[0,1] \longrightarrow \Omega$ una curva diferenciable.

Sea $\{L_z\}_{z\in\Omega}$ una familia analítica en z de operadores pseudodiferenciales elípticos, invertibles, de orden $m > 0$ y con idéntico símbolo principal definidos sobre una variedad M n-dimensional compacta con borde X. Sea B una condición de contorno elíptica para cada L_z. Denotaremos con L_t al problema elíptico $(L_{z(t)}, B)$, para todo $t \in [0,1]$.

Se supone que el símbolo principal, común a todos los operadores de la familia, admite un cono de rayos de mínimo crecimiento, esto es, un cono de semirrectas en el plano complejo sobre las cuales dicho símbolo no tenga autovalores.
Entonces para todo $t \in [0,1]$ *se verifica:*

$$\frac{d}{dt}\ln Det_{\zeta} L_t = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} Tr\left[s.(\frac{d}{dt}L_t).L_t^{-s-1}\right],$$

siendo el miembro derecho de esta igualdad la "parte finita" o "término finito" de la extensión analítica de $Tr\left[(\frac{d}{dt}L_t).L_t^{-s-1}\right]$ *en* $s=0$.

Nota: Este resultado continúa siendo válido para una familia de operadores L_z en las mismas condiciones cuando M sea una variedad compacta y sin borde. En este caso se denotará $L_t = L_{z(t)}$, para $t \in [0,1]$.

Demostración. Bajo estas hipótesis están bien definidas las potencias complejas ([S1],[S2],[S3]) de L_t dadas por:

$$L_t^{-s} = \frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{-s}(L_t-\lambda)^{-1}\,d\lambda, \qquad \text{para} \qquad \mathcal{R}e(s)>0 \qquad \text{y}$$
$$L_t^{-s} = L_t^{k}.L_t^{-(k+s)}, \qquad \text{si} \qquad -k<\mathcal{R}e(s)\leq -(k-1) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}e(s)\leq 0,$$

siendo $k \geq 1$ un número entero y Γ la curva ya descripta en (1.6) de la sección I.

Sean $k > \frac{n}{m}$ un número natural y $s \in C$ tal que $\mathcal{R}e(s) \geq k$. Entonces de acuerdo con [S1], [S2], [S3] y [W], el operador L_t^{-s} es tipo traza pues su núcleo es continuo en la diagonal de M. Como las potencias complejas continúan siendo analíticas con respecto al parámetro s ([M1]), por el lema 2.2 sigue para $\mathcal{R}e(s) > k$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Tr(L_t^{-s}) &= \frac{d}{dt}Tr\left[L_t^{k-s}\,L_t^{-k}\right]\\
&= \frac{d}{dt}Tr\left[\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{k-s}(L_t-\lambda)^{-1}\,L_t^{-k}\,d\lambda\right]\\
&= Tr\left\{\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{k-s}\left[-(L_t-\lambda)^{-1}\,\frac{d}{dt}(L_t)\,(L_t-\lambda)^{-1}\,L_t^{-k}+\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+\,(L_t-\lambda)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k}L_t^{-j+1}\frac{d}{dt}(L_t^{-1})L_t^{-k+j}\right)\right]d\lambda\right\}\\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{k-s}Tr\left[(L_t-\lambda)^{-1}\,\frac{d}{dt}(L_t)\,(L_t-\lambda)^{-1}\,L_t^{-k}\,d\lambda\right]+\\
&\quad +\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{\Gamma}\lambda^{k-s}Tr\left[-(L_t-\lambda)^{-1}\,L_t^{-j+1}\,L_t^{-1}\frac{d}{dt}(L_t)\,L_t^{-1}L_t^{-k+j}\right]d\lambda.
\end{aligned}$$

Por la propiedad cíclica de la traza se tiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Tr(L_t^{-s}) &= -\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{k-s} Tr\left((L_t-\lambda)^{-2}\frac{d}{dt}(L_t)\,L_t^{-k}\right)\,d\lambda- \\
&\quad -\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_\Gamma \lambda^{k-s} Tr\left[(L_t-\lambda)^{-1}\,\frac{d}{dt}(L_t)\,L_t^{-k-1}\right]d\lambda \\
&= Tr\left[-\frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^{k-s}(L_t-\lambda)^{-2}\,d\lambda\frac{d}{dt}(L_t)\,L_t^{-k}\right] - kTr\left[L_t^{k-s}\,\frac{d}{dt}(L_t)\,L_t^{-k-1}\right].
\end{aligned}
$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\mathcal{R}e(s) > k$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Tr(L_t^{-s}) &= Tr\left[(k-s)\frac{d}{dt}(L_t)L_t^{-s-1} - k\frac{d}{dt}(L_t)L_t^{-s-1}\right] \\
&= Tr\left[-s\frac{d}{dt}(L_t)L_t^{-s-1}\right] \\
&= (-s).Tr\left[\frac{d}{dt}(L_t).L_t^{-s-1}\right] \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

El miembro derecho de la fórmula (4.5) se extiende de manera meromorfa ([S1], [S2], [S3] y [W]) como función de s a todo el plano complejo con polos simples localizados en $s = \frac{n-j}{m}$, para $j = 1, 2, \ldots$. En particular en $s = 0$ dicha extensión es analítica .

Finalmente, combinando la definición (1.7) de ζ-determinante y la expresión (4.5) se concluye:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\ln Det_\zeta L_t &= \frac{d}{dt}\left\{-\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Tr(L_t^{-s})\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left\{\frac{d}{dt}Tr(L_t^{-s})\right\} \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left\{s.Tr\left[\frac{d}{dt}(L_t).L_t^{-s-1}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

■

Corolario 4.4. *(Versión integrada)*

Bajo las hipótesis del teorema 4.3 y, con la convención anterior, se tiene:

$$
\frac{Det_\zeta L_{t_o}}{Det_\zeta L_0} = \exp\left\{\int_0^{t_o}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\left\{s.Tr\left[\frac{d}{dt}(L_t).L_t^{-s-1}\right]\right\}dt\right\}.
$$

En particular se obtiene (4.3).

Corolario 4.5. *(Versión integrada de (4.4))*

Bajo las condiciones del teorema 4.3 , si además es tipo traza el operador $\left(\frac{d}{dt}L_t\right).L_t^{-1}$ *para todo* t*, es válido que:*

$$\frac{Det_\zeta L_{t_o}}{Det_\zeta L_0} = det_1\left(L_{t_o}.L_0^{-1}\right).$$

Observación: Este Corolario nos muestra que el teorema 4.3 es una generalización del resultado dado en [F].

Demostración. En virtud de la representación integral del determinante Fredholm det_1 dado en [G-K] se tiene:

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left\{s.Tr\left[\frac{d}{dt}(L_t).L_t^{-s-1}\right]\right\} = Tr\left[\frac{d}{dt}(L_t).L_t^{-1}\right] = \frac{d}{dt}\ln det_1\left(L_t.L_0^{-1}\right).$$

La tesis se obtiene integrando miembro a miembro entre 0 y t_o y exponenciando.

■

IV.C: ζ-determinante y p-determinante

En esta sección se presenta una relación entre el cociente de determinantes de operadores elípticos, definidos en una variedad cerrada, regularizados mediante la función zeta de Riemann generalizada y el p-determinante del cociente de tales operadores. Tal relación se deduce de una generalización de la fórmula (1.9) que vincula $det_1(I-A)$ con $det_p(I-A)$ para operadores A tipo traza.

Teorema 4.6.

Sean L_0 *y* L_1 *dos operadores pseudodiferenciales elípticos, invertibles, de orden* $m>0$*, definidos sobre una variedad* $(M,d\mu)$ *compacta, sin borde y de dimensión* n*, siendo* $d\mu$ *el elemento de volumen en* M*.*

Supongamos además que L_0 *y* L_1 *tienen el mismo símbolo principal el cual admite un cono de rayos de mínimo crecimiento.*

Sea $p\geq 1$ *el menor número natural para el que el operador* $(I-L_1L_0^{-1})^p$ *es tipo traza. Sea* I *el operador identidad en* $\mathcal{L}^2(M)$*.*

Entonces, se verifica la siguiente relación:

$$\frac{Det_\zeta(L_1)}{Det_\zeta(L_0)} = det_p(L_1L_0^{-1}).exp\left\{\sum_{k=1}^{p-1} a_k + \frac{1}{k}\frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I-L_1L_0^{-1})^k L_1{}^{-s}\right]\right\}_{s=0}\right\},$$

donde los números a_k *están dados por*

$$a_k = \int_M\int_\gamma z^{k-1}\left(Q_k(\tilde{l}_{-k},\ldots,\tilde{l}_{-k-n};l(z)_m,\ldots,l(z)_{m+k-n})\right)\,dz\,d\mu(x),$$

siendo Q_k un polinomio en z de grado $m+n-k$ cuyos coeficientes son funciones polinomiales de sus argumentos y sus derivadas con respecto a las variables x y ξ, y $\tilde{l}$ y $l(z)$ los símbolos de $(I - L_1 L_0^{-1})^k$ y L_z respectivamente.

Demostración. Por el teorema analítico de Fredholm ([R-S], [D-S]) es posible hallar un "camino" de operadores pseudodiferenciales invertibles

$$L_z = L_0 + z(L_1 - L_0), \qquad z = \gamma(t),$$

con $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = 1$. Entonces, por el Corolario 4.4,

$$\begin{aligned} \frac{Det_\zeta(L_1)}{Det_\zeta(L_0)} &= \exp\Big\{ \int_\gamma \frac{d}{ds}\big[s.Tr\big[\frac{d}{dz}(L_z).L_z{}^{-s-1}\big]\big]_{s=0} dz \Big\} \\ &= \exp\Big\{ \int_\gamma \frac{d}{ds}\big[s.Tr\big[(L_1 - L_0).L_z{}^{-1}.L_z{}^{-s}\big]\big]_{s=0} dz \Big\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Mediante la fórmula de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned} L_z^{-1} &= L_0^{-1}\big(I - z(I - L_1 L_0^{-1})\big)^{-1} \\ &= L_0^{-1}\big[I + z(I - L_1 L_0^{-1}) + z^2(I - L_1 L_0^{-1})^2 + \dots \\ &\quad \dots + z^{p-2}(I - L_1 L_0^{-1})^{p-2} + z^{p-1}(I - L_1 L_0^{-1})^{p-1} L_0 L_z^{-1}\big] \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} (L_1 - L_0)L_z^{-1} &= -(I - L_1 L_0^{-1})L_0 L_z^{-1} \\ &= -(I - L_1 L_0^{-1}) - z(I - L_1 L_0^{-1})^2 - \dots \\ &\quad \dots - z^{p-2}(I - L_1 L_0^{-1})^{p-1} - z^{p-1}(I - L_1 L_0^{-1})^p L_0 L_z^{-1}. \end{aligned}$$

De este modo la fórmula (4.6) se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{Det_\zeta(L_1)}{Det_\zeta(L_0)} &= \exp\Big\{ -\sum_{k=1}^{p-1} \int_\gamma z^{k-1} \frac{d}{ds}\big[s.Tr\big[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\big]\big]_{s=0} dz \Big\} \times \\ &\times \exp\Big\{ -\int_\gamma z^{p-1} \frac{d}{ds}\big[s.Tr\big[(I - L_1 L_0^{-1})^p L_0 L_z{}^{-s-1}\big]\big]_{s=0} dz \Big\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $(I - L_1 L_0^{-1})^p \in \mathcal{J}_1$ y para todo s complejo tal que $\mathcal{R}e(s) > 0$ el operador $L_0 L_z^{-s-1}$ es acotado, entonces

$$\frac{d}{ds}\big[s.Tr\big[(I - L_1 L_0^{-1})^p L_0 L_z{}^{-s-1}\big]\big]_{s=0} = Tr\big[(I - L_1 L_0^{-1})^p L_0 L_z{}^{-1}\big].$$

Esta igualdad junto con la representación integral del det_p, dada en la fórmula (1.10) de la Introducción, establece que el último factor de (4.7) es $det_p(L_1 L_0^{-1})$.

Para los otros factores de (4.7) se deberán estudiar las expresiones

$$\frac{d}{ds}\left[s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\right]\right]_{s=0}, \tag{4.8}$$

para $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Si $\mathcal{R}e(s)$ es suficientemente grande, el operador $(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}$ es tipo traza y luego (4.8) representa la extensión analítica, o bien la parte finita, de $Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\right]$ en $s = 0$.

Sea $k = 1, 2, \ldots, p-1$ fijo. Aplicando Teorema 4.2 a la familia s-analítica $(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}$ de operadores pseudodiferenciales clásicos, sabemos que sus núcleos evaluados en la diagonal de M son funciones continuas en $x \in M$ y holomorfas en s dentro del semiplano $\mathcal{R}e(ms + k) > n$ que admiten una extensión meromorfa a todo el plano complejo con polos simples en $s_j = \frac{n-k-j}{m}$, para $j = 0, 1, 2, \ldots$. Luego para s en el semiplano $\mathcal{R}e(ms + k) > n$ es válida:

$$\begin{aligned} &s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\right] = \\ &= s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k (L_z{}^{-s} - L_1{}^{-s})\right] + s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_1{}^{-s}\right], \end{aligned}$$

expresión que se extiende analíticamente a todo el s-plano complejo.

Luego, (4.8) se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}&\left\{s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\right]\right\}_{s=0} = \\ &= \frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k (L_z{}^{-s} - L_1{}^{-s})\right]\right\}_{s=0} + \\ &+ \frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k L_1{}^{-s}\right]\right\}_{s=0}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Veamos el comportamiento de la parte finita en $s = 0$ de

$$Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k (L_z{}^{-s} - L_1{}^{-s})\right],$$

esto es,

$$Q_k(z) = \frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I - L_1 L_0^{-1})^k (L_z{}^{-s} - L_1{}^{-s})\right]\right\}_{s=0}.$$

En lo que sigue utilizaremos una idea desarrollada en [Fr]. Debido a que en $s = 0$ dicha traza puede tener a lo sumo un polo simple, $Q_k(z)$ se escribe:

$$Q_k(z) = Res_{s=0}\left\{Tr\left[\Phi(s)\right]\right\}, \tag{4.10}$$

siendo $\Phi(s) = \left(I - L_1 L_0^{-1}\right)^k . \frac{L_z^{-s} - L_1^{-s}}{s}$. Ésta es una familia s-holomorfa de operadores pseudodiferenciales clásicos, cada uno de orden $-k - ms$. De acuerdo con los Teoremas 4.1 y 4.2, el residuo (4.10) está dado por:

$$Q_k(z) = \frac{1}{(2\pi)^n m} \int_{|\xi|=1} tr\, \sigma_{-n} \left[\Phi(s)\right](x, \xi, z)\, d\xi \Big|_{s=0},$$

donde tr indica la traza de matrices finito-dimensionales.

Para calcular $\sigma_{-n}\left[\Phi(s)\right](x, \xi, z)$ hay que hallar el símbolo

$$\sigma\big[\Phi(s)\big](x, \xi, z) = \sigma\big[\left(I - L_1 L_0^{-1}\right)^k\big] \circ \sigma \left[\frac{L_z^{-s} - L_1^{-s}}{s}\right](x, \xi, z),$$

siendo "o" la composición de símbolos dada por (1.3). Consideraremos los desarrollos asintóticos de los símbolos:

$$\begin{aligned} l^{(z)}(x, \xi) &= \sigma(L_z)(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} l^{(z)}_{m-j}(x, \xi) \\ \tilde{l}(x, \xi) &= \sigma\big[\left(I - L_1 L_0^{-1}\right)^k\big](x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} \tilde{l}_{-k-j}(x, \xi) \quad \text{y} \\ d(x, \xi, z, s) &= \sigma \left[\frac{L_z^{-s} - L_1^{-s}}{s}\right](x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} d^{(s)}_{m-j}(x, \xi, z), \end{aligned}$$

recordando que por hipótesis $l^{(z)}_m(x, \xi) = l_m(x, \xi)$ para todo $z \in \gamma$.

Cálculo de $d^{(0)}_m(x, \xi, z)$:

$$\begin{aligned} d^{(0)}_m(x, \xi, z) &= \sigma_0 \left(\frac{L_z^{-s} - L_1^{-s}}{s}\right)\Big|_{s=0} (x, \xi) \\ &= \frac{(l_m(x, \xi))^{-s} - (l_m(x, \xi))^{-s}}{s}\Big|_{s=0} = 0. \end{aligned}$$

Cálculo de $d^{(s)}_{m-j}(x, \xi, z), j = 1, 2, \ldots$:

Para $z \in \gamma$, sea $r(x, \xi, z, \lambda)$ el símbolo de la resolvente $(L_z - \lambda)^{-1}$. Este símbolo admite un desarrollo asintótico de la forma $r(x, \xi, z, \lambda) \sim \sum_{j=0} r_{-m-j}(x, \xi, z, \lambda)$. Los términos r_{-m-j} esán definidos por las fórmulas de recurrencia:

$$r_m(x, \xi, z) = (l_m(x, \xi) - \lambda)^{-1}$$

y para $j \geq 1$

$$r_{-m-j}(x, \xi, z) = \sum_{\nu=0}^{j-1} \sum_{h+|\alpha|+\nu=j} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha r_{-m-\nu}(x, \xi, z) . \partial_x^\alpha l^{(z)}_{m-h}(x, \xi) . r_{-m-j}(x, \xi, z).$$

Luego, tenemos ([S1], [S2], [M1], [Fr]):

$$d_{m-j}^{(s)}(x,\xi,z)=\frac{1}{s}\cdot\frac{i}{2\pi}\int_{\Gamma}\lambda^{-s}\left[r_{-m-j}(x,\xi,z,\lambda)-r_{-m-j}(x,\xi,1,\lambda)\right]d\lambda, \tag{4.11}$$

donde Γ es la curva definida en (1.6) de la Introducción.

Notemos que r_{-m-j} es suma de términos del tipo

$$(l_m(x,\xi)-\lambda)^{-1}.G_1(x,\xi).\dots.(l_m(x,\xi)-\lambda)^{-1}.G_\rho(x,\xi).(l_m(x,\xi)-\lambda)^{-1} \tag{4.12}$$

para ciertas matrices G_μ, cuyas entradas son expresiones locales de r_{-m}, $l_m^{(z)}$, ... , $l_{m-j}^{(z)}$.

Si $j\geq 1$ entonces $1\leq\rho\leq 2j$. Luego toda entrada de una matriz (4.12) es de la forma

$$G(x,\xi)(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}, \tag{4.13}$$

con $\sum\delta_i\geq 2$, siendo $\lambda_i=\lambda_i(x,\xi)$ los autovalores de $l_m(x,\xi)$. La integral

$$\begin{aligned}&\frac{i}{2\pi}G(x,\xi)\int_\Gamma\lambda^{-s}(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}\,d\lambda=\\&=\frac{i}{2\pi}G(x,\xi)\int_\Gamma(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}\,d\lambda+\\&+\frac{i}{2\pi}G(x,\xi)\int_\Gamma(\lambda^{-s}-1)(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}\,d\lambda\\&=s.\frac{i}{2\pi}G(x,\xi)\int_\Gamma\frac{\lambda^{-s}-1}{s}(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}\,d\lambda\end{aligned}$$

es una función entera con respecto a s que se anula en $s=0$. Luego $d_{m-h}^{(s)}(x,\xi)$ es una función entera con respecto a s y se expresa localmente en términos de $l_{m-h}^{(z)}(x,\xi)$ y $l_{m-h}^{(1)}(x,\xi)$, para $h=0,1,2,\dots$. La entrada (4.13) de la matriz (4.12) genera la entrada $\frac{-i}{2\pi}G(x,\xi)\int_\Gamma\log\lambda(\lambda-\lambda_1)^{-\delta_1}.\dots.(\lambda-\lambda_q)^{-\delta_q}\,d\lambda$ en $d_{m-j}^{(0)}(x,\xi,z)$. Notemos además que, como las funciones $l_{m-j}^{(z)}(x,\xi)$ son lineales en z, los términos $r_{-m-j}(x,\xi,z)$ son polinomios en z de grado a lo sumo j. (Es inmediata la prueba por inducción completa). Lo mismo ocurre con las matrices $d_{m-j}^{(0)}(x,\xi,z)$.

Teniendo en cuenta la fórmula (1.3):

$$\sigma_{-n}\left[\Phi(0)\right](x,\xi,z)=\sum_{\substack{|\alpha|+m+n=k+j+h\\h\geq 1}}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\tilde{l}_{-k-j}(x,\xi).\partial_x^\alpha d_{m-h}^{(0)}(x,\xi,z),$$

de donde se deduce que $Q_k(z)$ es un polinomio en z de grado a lo sumo $m+n-k$ cuyos coeficientes son matrices que dependen localmente de los términos : $\tilde{l}_{-k}(x,\xi)$,

$\tilde{l}_{-k-1}(x,\xi), \ldots, \tilde{l}_{-k-(m+n-k)}(x,\xi)$, $l_m(x,\xi)$, $l^{(0)}_{m-1}(x,\xi)$, $l^{(1)}_{m-1}(x,\xi)$, $l^{(0)}_{m-(m+n-k)}(x,\xi)$, $l^{(1)}_{m-(m+n-k)}(x,\xi)$.

Finalmente, reemplazando $Q_k(z)$ en (4.9) tenemos:

$$\frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I-L_1L_0^{-1})^k L_z{}^{-s}\right]\right\}_{s=0} = Q_k(z) + \frac{d}{ds}\left\{s.Tr\left[(I-L_1L_0^{-1})^k L_1{}^{-s}\right]\right\}_{s=0}.$$

Sustituyendo en (4.7) e integrando obtenemos la tesis.

∎

Observación: Notemos que si $k > n$, $s = 0$ cae dentro de la región de holomorfía del núcleo del operador evaluado en la diagonal y en consecuencia, la traza del operador $(I - L_1L_0^{-1})^k$ es finita. Siendo p el menor natural en estas condiciones se deduce que $1 \leq p \leq n+1$.

SECCION V

ALGUNAS APLICACIONES

Las aplicaciones expuestas en esta sección corresponden a la física. Esto es así debido a la aparición del formalismo de la integral funcional en la física cuántica, cuando se hizo necesaria la extensión a dimensiones infinitas de muchos conceptos definidos para finitas dimensiones. Uno de estos conceptos es el de determinante de un operador diferencial (o cociente de operadores diferenciales).

V.A: El laplaciano en el disco

Se considera el operador diferencial

$$L = -\Delta + \lambda^2, \tag{5.1}$$

actuando sobre las funciones $f(r,\theta)$ definidas en el disco

$$M = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq R\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \tag{5.2}$$

y las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}_t^{-1}\,Tf(R,\theta) &= a\partial_r f(R,\theta) + (1-ta)f(R,\theta) \\ B\mathcal{U}_t^{-1}\,Tf(R,\theta) &= f(R,\theta), \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\mathcal{U}_t(r)$ es una función diferenciable con continuidad tal que $\mathcal{U}_t^{-1}(R) = 1$ y $\partial_r\mathcal{U}_t^{-1}(R) = -t$, siendo A y B las condiciones de contorno fijas

$$\begin{aligned} A\,Tf(R,\theta) &= a\partial_r f(R,\theta) + f(R,\theta), \quad a \in \mathbf{R} \\ B\,Tf(R,\theta) &= f(R,\theta). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Luego (5.1) se transforma en

$$L_t = \mathcal{U}_t^{-1}L\mathcal{U}_t = -\mathcal{U}_t^{-1}\Delta\mathcal{U}_t + \lambda^2 = -\Delta + \lambda^2 = L \tag{5.5}$$

con las condiciones de contorno A y B dadas en (5.3).

Si $\Phi_{t\,AB}$ se desarrolla en la base de funciones $\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ del núcleo de L, tenemos:

$$< \Phi_{t\,AB}e^{ik'\theta}, e^{ik\theta} >= \left[(1-ta) + a\lambda\frac{I_k'(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}\right]\delta_{kk'} \tag{5.6}$$

donde $\{I_k(z)\}_k$ son las funciones de Bessel modificadas para $\lambda \neq 0$, y $I_k(z) = r^{|k|}$ para $\lambda = 0$ y $k \in \mathbf{Z}$. ([B-F-GS-S]). El operador $I - \Phi_{0\,AB}^{-1\,\prime}\Phi_{t\,AB}$ no es tipo traza,

pero sabemos que es Hilbert-Schmidt por el Teorema 3.6. Notemos que la hipótesis (i) de tal teorema es satisfecha pues $\sigma_0(L)$ conmuta con q.
Finalmente para $\lambda \neq 0$ se obtiene:

$$det_2(\mathcal{U}_t^{-1} L^{-1}_{B\,\mathcal{U}_t^{-1}} \mathcal{U}_t L_A^{-1} L_B) = det_2(\Phi_{0\,AB}^{-1} \Phi_{t\,AB})$$
$$= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{ta}{1 + a\lambda \frac{I_k'(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}} \right\} \exp \left\{ \frac{ta}{1 + a\lambda \frac{I_k'(\lambda R)}{I_k(\lambda R)}} \right\}, \tag{5.7}$$

y si $\lambda = 0$ es:

$$det_2(\mathcal{U}_t^{-1} L^{-1}_{B\,\mathcal{U}_t^{-1}} \mathcal{U}_t L_A^{-1} L_B) = det_2(\Phi_{0\,AB}^{-1} \Phi_{t\,AB})$$
$$= \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{ta}{1 + |k| \frac{a}{R}} \right\} \exp \left\{ \frac{ta}{1 + |k| \frac{a}{R}} \right\}. \tag{5.8}$$

V.B : Campo bosónico a temperatura $1/\beta$ positiva

Aquí se considera el operador diferencial

$$L = \Delta^2 - \partial_t^2 + m^2, \tag{5.9}$$

sobre la variedad tridimensional

$$M = \{(re^{i\theta}, t) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq \beta\}, \tag{5.10}$$

siendo t la coordenada temporal. L actúa sobre las funciones periódicas en la dirección t que satisfacen $AT\mathcal{U}_s^{-1} f = 0$ y $BT\mathcal{U}_s^{-1} f = 0$ en $r = R$, siendo A y B las condiciones de contorno definidas en (5.3) y la transformación $\mathcal{U}_s$ igual que en el ejemplo anterior. En este caso tenemos que $\Phi_{s\,AB}$ es diagonal en la base de funciones $\{e^{ik\theta + i\omega_n s}\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ definidas sobre el borde de M, siendo $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$.

Debido a que $\sigma_0(L)$ y $\mathcal{U}_s$ conmutan, se tiene del Teorema 3.6 que el operador $\left(I - \Phi_{0\,AB}^{-1} \Phi_{s\,AB}\right)^p$ es tipo traza si $p = 3 = dim(M)$, como efectivamente se comprueba en [B-F-GS-S] después de largos cálculos. Además se obtiene:

$$det_3(\mathcal{U}_s^{-1} L^{-1}_{B\mathcal{U}_s^{-1}} L_{A\mathcal{U}_s^{-1}} \mathcal{U}_s L_A^{-1} L_B) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{sa}{1 + a\lambda_n \frac{I_k'(\lambda_n R)}{I_k(\lambda_n R)}} \right\} \times$$
$$\times \exp \left\{ \frac{sa}{1 + a\lambda_n \frac{I_k'(\lambda_n R)}{I_k(\lambda_n R)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{sa}{1 + a\lambda_n \frac{I_k'(\lambda_n R)}{I_k(\lambda_n R)}} \right)^2 \right\}. \tag{5.11}$$

V.C : Campo externo variable

Ahora consideramos (5.9) y (5.10) en la que aparece un campo externo $\mathcal{U}_s(r,\theta)$ tal que:

$$\mathcal{U}_s(R,\theta) = 1$$
$$\mathcal{U}_s \partial_r \mathcal{U}_s^{-1}(R,\theta) = -s \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{il\theta}. \tag{5.12}$$

Debido a que el operador L es el mismoque en el parágrafo anterior, podemos tomar como base de su núcleo la considerada en V.B. Luego, los valores de borde se expresan como

$$h'_{n\,k}(\theta,s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(1 + a\lambda_n \frac{I'_k(\lambda_n R)}{I_k(\lambda_n R)}\right) \delta_{l\,0} - sC_l \right\} I_k(\lambda_n R) e^{i(k+l)\theta + \omega_n s}$$
$$h_{n\,k}(\theta,s) = I_k(\lambda_n R) e^{i(k+l)\theta + \omega_n s}. \tag{5.13}$$

En esta situación resulta:

$$(\Phi_{0\,AB}^{-1} \Phi_{s\,AB})_{k'\,k}^{n'\,n} = \left\{ \delta_{k'\,k} - \frac{s\,a\,C_{k'-k}}{1 + a\lambda_n \frac{I'_k(\lambda_n R)}{I_k(\lambda_n R)}} \right\} \delta^{n'\,n}, \tag{5.14}$$

el cual admite det_3 finito ([B-F-GS-S]). Aplicando nuevamente el teorema 3.6 sabemos ahora que el det_p es finito si $p = dim(M) = 3$. Como en V.B, se verifica aquí la hipótesis (i) ya que el símbolo principal de L conmuta con $\mathcal{U}_s$.

V.D: Energia libre para una bolsa estatica quiral tetra-dimensional a temperatura positiva

Como en [D-F-S], se considera en $\mathbf{R}^4$ una teoría de fermiones libres sin masa dentro de la esfera de radio fijo R con $t \in [0,\beta]$, e interactuando en el borde con una "configuración erizada" de un campo piónico externo.

Esta teoría puede ser descripta por el operador diferencial de primer orden

$$L = i\,\partial\!\!\!/ = i \sum_{j=0}^{3} \gamma_j \partial_{x_j} \tag{5.15}$$

actuando en las secciones definidas sobre la variedad $M = \{x \in \mathbf{R}^4 : |x| \leq R\}$ que son antiperiódicas en t, para $t \in [0,\beta]$, con símbolo $\sigma(L)(x,\xi) = i\sum_{j=0}^{3} \gamma_j \xi_j$, siendo $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, id_4 la matriz identidad de tamaño 4×4 y γ_j las matrices de Dirac que verifican:

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = 2\delta_{j\,k} id_4, \qquad j,\, k = 0,1,2,3$$
$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

Las condiciones de contorno correspondientes son:

$$A\,T\psi = \frac{1}{2}(1 + i\ \not\eta e^{-i\theta\tau\cdot\eta\gamma_5})\psi = 0 \qquad \text{en} \quad r = R$$
$$B\,T\psi = \frac{1}{2}(1 + i\ \not\eta)\psi = 0 \qquad \text{en} \quad r = R, \tag{5.17}$$

con η la normal exterior a la superficie de M.Se introduce la transformación regular

$$\mathcal{U}_s = e^{-is\tau\cdot\eta\gamma_5}. \tag{5.18}$$

Veamos nuevamente que se aplica el Teorema 3.6 probando que se verifica la hipótesis (i). En efecto, notemos que de (5.15) se deduce que en cada carta local con intersección no vacía con la variedad borde S^3, con coordenadas tangenciales $x' = (x_0, x_1, x_2)$, coordenadas cotangentiales $\xi' = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ y coordenada conormal ξ_3, se tiene

$$\sigma(L) = \sigma_0(L) = a_0(x', \xi') + a_1(x', \xi')\xi_3, \tag{5.19}$$

donde $a_0(x', \xi') = i\sum_{j=0}^{2}\gamma_j\xi_j$ y $a_1(x', \xi') = i\gamma_3)$.

Siguiendo ([C]) escribimos:

$$\begin{aligned} q(x', \xi') &= \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma (\sigma_0(L))^{-1} a_1(x', \xi')\, d\xi_3 \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_\Gamma \left(a_1(x', \xi')^{-1} a_0(x', \xi') + \xi_3 id_4\right)^{-1} d\xi_3, \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde Γ es un curva cerrada simple que rodea en sentido horario los polos de $\sigma_0(L)$ que están en el semiplano $\mathcal{I}m(\xi_3) < 0$.

Teniendo en cuenta que $\gamma_3^{-1} = \gamma_3$, el integrando en (5.20) se escribe:

$$\sum_{j=0}^{2}\gamma_3\gamma_j\xi_j + \xi_3 id_4,$$

expresión que obviamente conmuta con γ_5, pues cada matriz γ_j, para $j = 0, 1, 2, 3$, anticonmuta con γ_5. Así, q conmuta con γ_5 y por lo tanto con la $\mathcal{U}_s$ definida en (5.18). Es claro entonces que en este caso el símbolo q se preserva bajo la acción de $\mathcal{U}_s$.

Finalmente, se obtiene que $det_4(\mathcal{U}_s^{-1} L_{B\mathcal{U}_s^{-1}}^{-1} L_{A\mathcal{U}_s^{-1}} \mathcal{U}_s L_A^{-1} L_B)$ es finito y es igual a $det_4(\Phi_{0\,AB}^{-1}\Phi_{s\,AB})$.

REFERENCIAS

[B-F-GS-S] Barraza,O., Falomir,H., Gamboa Saraví, R.E., Santangelo, E.M.: P-determinants and boundary values, J.Math. Phys.33 (6), (1992).

[C] Calderón, A.P.:Pseudodifferential operators and boundary elliptic problems I, Publicaciones del I.A.M., núm. 1, Buenos Aires 1976.

[D-F-S] De Francia, M., Falomir, H., Santangelo, E.M.: Free energy of a four-dimensional chiral bag, Phys. Rev. D, 45 (6), (1992).

[D-S] Dunford, N., Schwartz, J.:Linear Operators, part II. New York, Interscience, 1958.

[F] Forman, R.: Functional determinants and geometry, Invent. math. 88, 447-493 (1987).

[Fr] Friedlander, L.: Determinants of elliptic operators. Tesis, M.I.T., 1989.

[GS-M-S1] Gamboa Saraví, R.E., Muschietti, M.A., Solomin, J.E.: On perturbation theory for regularized determinants of differential operators, Commun. Math. Phys. 89, 363-373 (1984).

[GS-M-S2] Gamboa Saraví, R.E., Muschietti, M.A., Solomin, J.E.: On the quotient of the regularized determinant of two elliptic operators, Commun. Math. Phys. 110, 641-654 (1987).

[G-K] Gohberg, I.C., Krein, M.G.:Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, vol. 18 (Traslation of Mathematical Monographs). Providence, Rhode Island, American Mathematical Society 1969.

[H] Hörmander, L.: The analysis of the linear partial differential operators, part III. Berlin, Springer-Verlag, 1985.

[M1] Muschietti, M.A.: Sobre las potencias complejas de operadores elípticos. Tesis, U.N.L.P., 1984.

[M2] Muschietti, M.A.: Comunicación privada.

[R-S] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics, I. Functional analysis, Academic Press, 1972.

[S1] Seeley, R.: Complex powers of an elliptic operator. Singular Integrals (Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics, Chicago, Illinois 1966), Providence, Am. Math. Soc. pp. 288-307

[S2] Seeley, R.: The resolvent of an elliptic boundary problem. Am J. Math. 91, 889-920 (1969).

[S3] Seeley, R.: Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems. Am. J. Math. 91, 963-983 (1969)

[S] Simon, B.: Trace ideals and their applications, London Mathematical Society, Lectures Note Series 35, Cambridge U.P., Cambridge 1979.
[W] Wodzicki, M.:Noncommutative residue, Lect. Notes in Math. 1289, Springer-Verlag, 1987.