UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tesis Doctoral

EXTENSIONES DE ALGEBRAS DE LIE EN EL MARCO DE LA GEOMETRIA SIMPLECTICA

MARCELA ZUCCALLI

1997

Director: Jorge Eduardo Solomin

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
U.N.L.P.

A mis padres.
A Raúl.
A Belén y Francisco.

Agradecimientos

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a todas aquellas personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

En primer lugar al Dr. J. Solomin, quien me ayudó a descubrir la belleza de la matemática, por su amistad y paciente atención durante todos estos años.

Al Dr. Fidel Schaposnik, por su asesoramiento en todo lo relacionado con la Física Teórica.

A mis padres, a quienes les debo tanto, por el inmenso amor con que me acompañan en todas mis cosas.

A Raúl, con quien comparto mi vida, por el amor y el apoyo que siempre me brinda.

A María Belén y Francisco José, mis queridísimos hijos, por alegrarme cada día.

A Marcela y Oscar, mis amigos de cada momento, por el cariño y estímulo con el que siempre están presentes.

A todos mis compañeros de trabajo, en especial a Javier, por compartir con ellos el gusto por la matemática.

A todos mis amigos, por el afecto de siempre.

Indice

1 Introducción

Las extensiones centrales de álgebras de Lie fueron consideradas en Mecánica Clásica antes de que se descubriera el rol que juegan algunas de ellas, las de álgebras de Kac - Moody y de Virasoro, por ejemplo, en teorías cuánticas de campos en dos dimensiones espacio - temporales en relación con los "términos de Schwinger" que surgen de los conmutadores de su álgebra de corrientes.

La importancia de extensiones no centrales como la de Mickelson - Fadeev, por ejemplo, fue en cambio detectada en teorías cuánticas de campos en cuatro dimensiones para posteriormente ser consideradas en el marco de la Mecánica Clásica.

El objetivo de este trabajo es analizar algunos aspectos de la emergencia de extensiones centrales y no centrales en Mecánica Cásica en el contexto de la Geometría Simpléctica y de su relación con las mencionadas teorías cuánticas .

Un bien conocido resultado del enfoque simpléctico de la Mecánica Clásica es que el corchete de Poisson de momentos asociados a una acción simpléctica no Ad^*-equivariante de un grupo de Lie G sobre una variedad simpléctica (M, ω) define una extensión central no trivial del álgebra $Lie(G)$ (ver por ejemplo [1]).

Construcciones más generales en el mismo marco han sido propuestas para el caso de acciones no necesariamente simplécticas. En particular, la llevada a cabo por Cariñena e Ibort en [2] permite definir extensiones más generales de $Lie(G)$ a partir de ecuaciones del descenso construídas mediante técnicas simplécticas. Con hipótesis no demasiado restrictivas, el método allí propuesto da lugar a extensiones, no necesariamente centrales, de $Lie(G)$ módulo cocadenas a valores en las funciones constantes. Resultados similares fueron obtenidos en [4].

En este trabajo demostraremos, en primer término, que tal construcción da lugar, en realidad, a extensiones de $Lie(G)$ asociadas a 2-cociclos equivalentes a los canónicamente definidos por la acción del grupo G.
En efecto, veremos que la necesidad de definirlas módulo las mencionadas cocadenas sólo se debe a las técnicas de demostración utilizadas en [2] y [4].

Nos proponemos, además, mostrar cómo estos resultados permiten analizar los términos de Schwinger de teorías cuánticas en un contexto simpléctico.

Así mismo, para extensiones centrales, analizaremos las órbitas coadjuntas de extensión central pura y el por qué de su particular relevancia (ver por ejemplo [3]) en la construcción de acciones físicas.

La exposición está organizada de la siguiente manera: en el segundo capítulo recordaremos algunos conceptos y resultados de la Geometría Simpléctica que serán utilizados posteriormente y haremos una reseña de la construcción de Cariñena e Ibort.

En el capítulo 3 demostraremos que la construcción de [2] da lugar a una extensión de $Lie(G)$ asociada a un 2-cociclo cohomólogo a uno canónicamente definido por la acción de G, consideraremos el caso particular en el cual la variedad simpéctica (M, ω) es (TQ, ω_L), donde TQ es el espacio de velocidades de una variedad diferenciable Q y ω_L es el pullback por la transformada de Legendre de la estructura simpléctica canónica sobre TQ^*, y analizaremos los términos de Schwinger de teorías cuánticas en el contexto que venimos considerando.

En el capítulo 4 consideraremos extensiones centrales y, en atención a la relevancia en Física de las órbitas coadjuntas de extensión central pura, analizaremos las propiedades de su estructura simpléctica canónica que las distinguen de las demás órbitas.

2 Reseña de resultados conocidos de geometría simpléctica.

Las demostraciones de los resultados enunciados en las secciones 2.1 - 2.6 de este capítulo se encuentran, por ejemplo, en el clásico tratado de Abraham y Marsden ([1]). La sección 2.7 contiene escencialmente resultados de [2].

2.1 Estructuras Simplécticas

El objeto básico en la formulación geométrica de los sistemas hamiltonianos es una variedad simpléctica.

Las variedades simplécticas de dimensión finita aparecen como el espacio de fases de un sistema clásico con un número finito de grados de libertad, donde la forma simpléctica ω es la estructura geométrica que permite definir los campos vectoriales Hamiltonianos y el corchete de Poisson. Las de dimensión infinita aparecen en teoría de campos.

Definición. 2.1 *Dada una variedad diferenciable M (de dimensión finita o infinita), una 2-forma diferencial ω sobre M es no degenerada (débilmente no degenerada si M es de dimensión infinita) si se verifica que*

$$\omega(X,Y) = 0 \ \ \forall \, X \in \chi(M) \ \Rightarrow \ Y = 0,$$

siendo $\chi(M)$ el espacio de los campos vectoriales sobre M.

En otros términos, ω es débilmente no degenerada si la aplicación $\omega^b : \chi(M) \to \chi(M)^*$ dada por

$$\omega^b(X)(\cdot) = i_X\omega(\cdot) := \omega(X,\cdot)$$

es inyectiva.

Diremos que ω es fuertemente no degenerada si ω^b es biyectiva.

Una variedad simpléctica (M, ω) (débilmente simpléctica si M es de dimensión infinita) es una variedad diferenciable M con una 2-forma ω sobre M cerrada y no degenerada (débilmemte no degenerada respectivamente).

Si M es de dimensión infinita y ω es fuertemente no degenerada, diremos que (M, ω) es fuertemente simpléctica.

Observación. 2.2 *Es obvio que, si la dimensión de M es finita, ω es débilmente no degenerada si y sólo si es fuertemente no degenerada.*

Ejemplos. 2.3

- *Forma canónica en dimensión finita.*

  Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y sean $(e_i)_i$ una base de E y $(e_i^*)_i$ su base dual de E^*.

  Si consideramos la base $((e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, e_1^*), ..., (0, e_n^*))$ del espacio $Y = E \times E^*$, la matriz de la forma canónica ω que llamaremos J tiene la siguiente forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

  donde I y 0 son las matrices identidad y nula de orden n respectivamente.

- *La forma simpléctica canónica de la Mecánica Cuántica.*

  Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $<,>: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ un producto interno hermitiano.

  $\omega : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\omega(\phi_1, \phi_2) = -2\text{h} Im < \phi_a, \phi_2 > \ \forall \ \phi_1$ y $\phi_2 \in \mathcal{H}$

  (donde h es la constante de Planck) es una forma fuertemente simpléctica sobre $\mathcal{H}$.

- *Fibrados cotangentes*

  En muchos problemas de mecánica, la variedad simpléctica básica utilizada en su formulación geométrica es el espacio de fases de un espacio de configuración. Si el espacio de configuración es una variedad Q de dimensión n, el espacio de fases (espacio de momentos) es el fibrado cotangente

T^*Q de dimensión $2n$ con una estructura simpléctica canónica que describimos a continuación.

Teorema. 2.4 *Sean Q una variedad de dimensión n y $M = T^*Q$. Consideremos $\pi_Q^* : M \to Q$ y su diferencial $T\pi_Q^* : TM \to TQ$.*

Sean $\alpha_q \in M$ (con $q \in Q$) y v_{α_q} un punto de TM en la fibra sobre α_q.

$$\begin{tikzcd} TT^*Q \arrow[r, "T_{\pi_Q^*}"] \arrow[d, "\pi_{T^*Q}"'] & TQ \arrow[d, "\pi_Q"] \\ T^Q \arrow[r, "\pi_Q^*"] & Q \end{tikzcd}$$

Se define la 1-forma θ sobre M así : $\theta(\alpha_q)(v_{\alpha_q}) = \alpha_q(T\pi_Q^* v_{\alpha_q})$

Entonces, $\omega = -d\theta$ es una 2-forma simpléctica sobre M.

θ y ω son llamadas formas canónicas sobre M.

De ahora en más utilizaremos la convención de Einstein: se omite la sumatoria sobre índices repetidos.

Si consideramos coordenadas locales $(q^i)_i$ sobre Q y coordenadas $(q^i, p_i)_i$ sobre T^*Q, θ y ω se escriben del siguiente modo:

$$\theta = p_i dq^i \quad y \quad \omega = dq^i \wedge dp_i$$

Las variedades fuertemente simplécticas tienen una propiedad fundamental y es que son localmente "planas" en el sentido de que la matriz de su estructura fuertemente simpléctica canónica es constante (cosa que no siempre es válido en el caso de una variedad de dimensión infinita débilmente simpléctica). Así lo afirma el teorema de Darboux que se enuncia a continuación.

Teorema. 2.5 *Sea (M, ω) una variedad fuertemente simpléctica. Entonces, para cada $m \in M$ existe un entorno abierto U de m y un sistema de coordenadas locales, que llamaremos coordenadas canónicas, tal que la matriz de $\omega|_U$ es constante.*

Corolario. 2.6 *Si M es de dimensión finita entonces resulta que es de dimensión par, digamos $2n$.*

Además, para cada $m \in M$ existe un entorno U en M y un sistema local de coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ tal que

$$\omega|_U = dq^i \wedge dp_i$$

Corolario. 2.7 *Si (M, ω) es una variedad simpléctica de dimensión $2n$, las formas $\omega^2, ..., \omega^n$ son no degeneradas. En particular, M es orientable y la $2n$-forma $\epsilon = (-1)^n \frac{\omega^n}{n!}$ se denomina volumen de Liouville.*

Dos variedades simplécticas se pueden relacionar mediante transformaciones simplécticas (también llamdas canónicas).

Definición. 2.8 *Dadas (M, ω) y (N, β) dos variedades simplécticas, una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una transformación simpléctica o canónica, si $f^*\beta = \omega$, siendo $f^*\beta$ el pull-back de la 2-forma β por la aplicación f.*

Los difeomorfismos de Q en sí mismo dan lugar a transformaciones simplécticas sobre el fibrado cotangente T^*Q mediante el "levantamiento" de los mismos al fibrado cotangente.

En el siguiente teorema se define el levantamiento de un difeomorfismo de Q, y se prueba que se obtiene un difeomorfismo simpléctico sobre T^*Q.

Teorema. 2.9 *Sean Q una variedad diferenciable y $f : Q \rightarrow Q$ un difeomorfismo. Se define el levantamiento de f a T^*Q de la siguiente manera:*

$$T^*f : T^*Q \rightarrow T^*Q \quad (T^*f)(\alpha_q) \cdot v = \alpha_q(Tf \cdot v) \text{ donde } q \in Q \text{ y } v \in T_{f^{-1}(q)}Q.$$

Entonces, T^*f es un difeomorfismo simpléctico que también preserva el potencial simpléctico θ; es decir, $(T^*f)^*\theta = \theta$.

Observación. 2.10 *Es claro que de manera análoga se puden levantar difeomorfismos $f : Q_1 \longrightarrow Q_2$ y generar así transformaciones canónicas entre los fibrados cotangentes de Q_1 y Q_2 : $T^*f : T^*Q_2 \longrightarrow T^*Q_1$.*

2.2 Campos Hamiltonianos y Corchetes de Poisson

En una variedad fuertemente simpléctica (M,ω) existe una manera natural de identificar los campos vectoriales sobre M con las 1-formas sobre M.

Si $\wedge^1(M)$ es el espacio vectorial de las 1-formas diferenciales, consideremos las aplicaciones

$$^\flat : \chi(M) \longrightarrow \wedge^1(M) \text{ y } ^\sharp : \wedge^1(M) \longrightarrow \chi(M) \text{ dadas por } X^\flat = i_X\omega \text{ y } i_{\alpha^\sharp}\omega = \alpha$$

donde, como indicamos antes, $i_X\omega$ indica la 1-forma obtenida al contraer ω contra el X.

La no degeneración fuerte de ω equivale a que esta identificación es un isomorfimos de espacios vectoriales. Este isomorfismo nos permite definir los campos hamiltonianos.

Definición. 2.11 *Sea (M,ω) una variedad fuertemente simpléctica y una función diferenciable $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo hamiltoniano de H que denotaremos como X_H es el campo identificado con la 1-forma dH.*

Es decir, X_H está determinado por la condición

$$dH \cdot Y = \omega(X_H, Y) \quad \forall\, Y \in \chi(M).$$

Usando la notación empleada más arriba, $X_H = -(dH)^\sharp$.

X_H es el campo hamiltoniano con función energía H.

Es claro que si M es una variedad conexa, dos hamiltonianos H_1 y H_2 de un mismo campo X sólo pueden diferir en una constante.

Diremos que (M,ω,X_H) es un sistema hamiltoniano.

En la siguiente proposición veremos cómo se escribe una campo hamiltoniano en un sistema local de coordenadas.

Proposición. 2.12 *Si (M,ω) es una variedad simpléctica de dimensión finita y $(q^i,p_i)_i$ es un sistema de coordenadas canónicas para ω, se tiene que*

$$X_H = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i}) = J \cdot dH$$

Por otra parte , una curva $(q(t),p(t))$ es una curva integral del campo X_H si y sólo si es solución local de las ecuaciones de Hamilton dadas por

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad y \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad \forall\, i \in \{1,...,n\}$$

Dada una variedad fuertemente simpléctica (M,ω), la noción de campo hamiltoniano permite definir un corchete de Lie sobre $C^\infty(M)$: el corchete de Poisson.

Definición. 2.13 *Sea (M,ω) una variedad fuertemente simpléctica. Dadas f y $g \in C^\infty(M)$ definimos el corchete de Poisson de f y g como la función $\{f,g\} \in C^\infty(M)$ dada por*

$$\{f,g\}(m) = \omega_m(X_f, X_g) \quad \forall\, m \in M$$

En forma equivalente,

$$\{f,g\} = -L_{X_f}g = L_{X_g}f$$

Si (M,ω) es de dimensión finita y $(q^i)_i$ es un sistema de coordenadas canónicas para ω se tiene

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

Proposición. 2.14

$(C^\infty(M), \{,\})$es un álgebra de Lie real (de dimensión infinita).

Corolario. 2.15

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$$

Es decir, la aplicación de $C^\infty(M)$ en $\chi(M)$ que le asigna a cada f su campo hamiltoniano X_f es un antihomomorfismo de álgebras de Lie.

2.3 Sistemas Lagrangianos

Consideremos una variedad diferenciable Q como espacio de configuración, su fibrado tangente TQ como espacio de velocidades y una función diferenciable $L : TQ \to \mathbb{R}$ como función Lagrangiana.

Con estos elementos se construye la versión lagrangiana (enfoque variacional) de la mecánica, relacionada con la formulación Hamiltoniana a través de la transformada de Legendre.

Definición. 2.16 *Dada una función $L : TQ \to \mathbb{R}$ que llamaremos Lagrangiano, definimos una aplicación $FL : TQ \to T^*Q$ llamada Transformada de Legendre que está dada por:*

$$FL(v) \cdot w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(v + tw)$$

donde v y $w \in T_qQ$.

$FL(v) \cdot w$ es la derivada de L en v a lo largo de la fibra T_qQ en la dirección de w y también se la llama derivada a lo largo de la fibra.

La función energía asociada $E : TQ \to \mathbb{R}$ está dada por

$$E(v) = FL(v) \cdot v - L(v).$$

Si Q es una variedad de dimensión n y $(q^i, \dot{q}^i)_i$ es un sistema local de coordenadas sobre TQ, la expresión de FL es la siguiente:

$$FL(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$$

Es decir, FL está dada por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$.

Sea ω la forma simpléctica canónica sobre T^*Q y θ un potencial local de ω (es decir, $\omega = d\theta$). Mediante FL se obtiene una 1-forma θ_L y una 2-forma ω_L sobre TQ definidas como:

$$\theta_L = FL^*\theta \ \text{ y } \ \omega_L = FL^*\omega.$$

Como el diferencial exterior d conmuta con el pullback, $\omega_L = d\theta_L$.

Utilizando las expresiones en coordenadas para ω y θ, se obtienen las siguientes expresiones locales de ω_L y θ_L :

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \quad \text{y} \quad \omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j$$

En términos matriciales,

$$\omega_L = \begin{pmatrix} A & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} & 0 \end{pmatrix}$$

siendo A la matriz antisimetrizada de $[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}]$.

Definición. 2.17 *Un Lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}$ es hiperregular si FL es un difeomorfismo.*

En este caso, ω_L es fuertemente no degenerada y de esta manera se tiene una estructura fuertemente simpléctica canónica sobre TQ definida a partir de la estructura fuertemente simpléctica canónica sobre T^*Q.

Existe también una manera natural de "levantar" aplicaciones entre variedades Q_1 y Q_2 a los fibrados tangentes TQ_1 y TQ_2.

Definición. 2.18 *Dado* $f : Q_1 \to Q_2$ *un difeomorfismo, su levantamiento* $Tf : TQ_1 \to TQ_2$ *está dado por su diferencial.*

Esta noción de levantamiento permite generar transformaciones simplécticas sobre fibrados tangentes.

Proposición. 2.19 *Dada* Q *una variedad diferenciable, consideremos un difeomorfismo* $f : Q \to Q$ *y un lagrangiano hiperregular* $L : TQ \to \mathbb{R}$ *tal que* $L \circ Tf = L$.

Entonces, $(Tf)^*\theta_L = \theta_L$ *y por lo tanto el levantamiento de* f *a* TQ *es una aplicación canónica.*

2.4 Acciones de grupos de Lie

Definición. 2.20 *Sean* M *una variedad diferenciable y* G *un grupo de Lie. Una acción de* G *sobre* M *es una aplicación infinitamente diferenciable*

$\phi : G \times M \to M$ *que verifica las siguientes condiciones:*

- $\forall\, m \in M \quad \phi(e, m) = m$
- $\forall\, g, h \in G \quad \phi(g, \phi(h, m)) = \phi(gh, m)\ \forall\, m \in M$

Ejemplo. 2.21 *Si* H *es un subgrupo del grupo* G, $\phi : H \times G \to G$ *dada por* $\phi(h, g) = h \cdot g$ *es una acción de* H *sobre* G.

Ejemplo. 2.22 *Un flujo completo* F *sobre* M *es una acción de* $\mathbb{R}$ *sobre* M.

Dada una acción ϕ de G sobre M, $\forall\ g \in G$ se tiene una aplicación infinitamente diferenciable $\phi_g : M \to M$ dada por $\phi_g(m) = \phi(g,m)$ que verifica que $\phi_e = id|_M$ y $\phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h\ \forall\ g,h \in G$.

En particular, $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ y por lo tanto ϕ_g es un difeomorfismo.

Entonces, podemos decir que ϕ es una acción de G sobre M si la aplicación $G \to Diff(M)$ dada por $g \to \phi_g$ es un homomorfismo de grupos.

Si M es un espacio vectorial y cada ϕ_g es una transformación lineal, la acción de G sobre M se denomina representación de G sobre M.

Definición. 2.23

- *Sea ϕ una acción de G sobre M. Para cada $m \in M$, la órbita de m por la acción ϕ está dada por $G \cdot m = \{\phi_g(m)\ /\ g \in G\}$.*
- *Una acción es propia si la aplicación $\tilde{\phi} : G \times M \to M \times M$ dada por $\tilde{\phi}(g,m) = (m, \phi(g,m))$ es propia.*
- *Dado $m \in M$, el grupo de isotropía de m es el subgrupo cerrado de G definido como $G_m = \{g \in G\ /\ \phi_g(m) = m\}$.*

Para cierto tipo de acciones es posible identificar la órbita $G \cdot m$ con la variedad cociente G/G_m ya que puede probarse el siguiente resultado:

Proposición. 2.24 *Si $\phi : G \times M \to M$ es una acción, $\forall\ m \in M$ la aplicación $\tilde{\phi}_m : G/G_m \to G \cdot m$ dada por $\tilde{\phi}_m([g]) = \phi_g(m)$ es una inmersión inyectiva.*

Además, si ϕ es propia, la órbita $G \cdot m$ es una subvariedad cerrada de M y $\tilde{\phi}_m$ es un difeomorfismo $\forall\ m \in M$.

En mecánica es fundamental la descripción infinitesimal de una acción.

Definición. 2.25 *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción. Si $a \in Lie(G)$, la aplicación $\phi^a : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ definida como $\phi^a(t,m) = \phi(exp(ta), m)$ es una $\mathbb{R}-$acción sobre M (es decir, ϕ^a es una flujo sobre M).*

El campo vectorial sobre M dado por

$$\tilde{X}_a(m) = \frac{d}{dt}\phi(exp(ta), m)|_{t=0}$$

es llamado generador infinitesimal de la acción ϕ correspondiente al elemento $a \in Lie(G)$.

Observación. 2.26 *De la proposicion 2.24 se puede deducir que*

$$T_m(G \cdot m) = \{\tilde{X}_a(m) \quad / \quad a \in Lie(G)\}$$

Ejemplos. 2.27

- *Sea $\phi : G \times G \longrightarrow G$ dada por $\phi(g,h) = gh = L_g h$, la multiplicación a izquierda. (Análogamente se tiene la multiplicación a derecha R_g.)*

  Dado $a \in Lie(G)$, ϕ^a está dada por $\phi^a(t,h) = exp(ta)h = R_h exp(ta)$.

  $$\text{Entonces, } \quad \tilde{X}_a(g) = T_e R_g a.$$

- *Sea $\phi : G \times Lie(G) \longrightarrow Lie(G)$ la acción que se denomina acción adjunta de G sobre $Lie(G)$ y que está definida como*

  $$\phi(g,a) = Ad_g a = T_e(R_{g^{-1}} L_g)a.$$

  Si $a \in Lie(G)$, $\tilde{X}_a = ad_a$ donde ad denota la acción adjunta de $Lie(G)$ sobre $Lie(G)$ y que está dada por $ad_a(b) = [a,b]$.

- *Sea $\phi : G \times Lie(G)^* \longrightarrow Lie(G)^*$ la acción dada por $\phi(g,\alpha)(a) = \alpha(Ad_g a)$. Esta acción se llama acción coadjunta de G sobre $Lie(G)^*$ y se tiene que $\tilde{X}_a = -ad_a^*$ $\forall\, a \in Lie(G)$ ya que $\forall\, b \in Lie(G)$ y $\forall\, \alpha \in Lie(G)^*$,*

  $$(\tilde{X}_a(\alpha))(b) = \alpha([a,b]) = -ad_a(\alpha(b)).$$

Entre las propiedades básicas sobre los generadores infinitesimales podemos señalar:

Proposición. 2.28 *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción.*
Entonces, $\forall\, g \in G$ y $\forall\, a, b \in Lie(G)$ se tiene que:

- $\tilde{X}_{Ad_g(a)} = \phi^*_{g^{-1}} \tilde{X}_a$
- $[\tilde{X}_a, \tilde{X}_b] = -\tilde{X}_{[a,b]}$

Observación. 2.29 *Esta última igualdad nos dice que la aplicación*

$$Lie(G) \longrightarrow \chi(M)$$
$$a \longrightarrow \tilde{X}_a$$

es un anti-homomorfimso de álgebras de Lie:

2.5 Aplicaciones momento

Dada una variedad simpléctica (M, ω) vamos a considerar las acciones de grupos de Lie G sobre M que dan lugar a aplicaciones simplécticas.

Definición. 2.30 *Una acción ϕ de un grupo de Lie G sobre (M, ω) es una acción simpléctica si $\forall\, g \in G$ la aplicación $\phi_g : M \longrightarrow M$ es una transformación simpléctica.*

Para algunas acciones simplécticas es posible definir una aplicación momento.

Definición. 2.31 *Sean* (M,ω) *una variedad simpléctica y* $\phi : G \times M \longrightarrow M$ *una acción simpléctica de* G *sobre* M.

Una aplicación infinitamente diferenciable $\mathcal{J} : M \longrightarrow Lie(G)^*$ *es una aplicación momento para la acción* ϕ *si,* $\forall\ a \in Lie(G)$,

$$d\tilde{\mathcal{J}}(a) = i_{\tilde{X}_a}\omega,$$

donde $\tilde{\mathcal{J}}(a) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *está dada por* $\tilde{\mathcal{J}}(a)(m) = \mathcal{J}(a)\cdot m$ *y* $\tilde{X}_a$ *es el generador infinitesimal de la acción* ϕ *correspondiente al elemento* a.

Es decir, $\mathcal{J}$ *es una aplicación momento si* $X_{\tilde{\mathcal{J}}(a)} = \tilde{X}_a \quad \forall\ a \in Lie(G)$.

En este caso, $(M,\omega,\phi,\mathcal{J})$ *se denomina* G*-espacio hamiltoniano.*

Señalaremos una serie de propiedades importantes de las aplicaciones momento.

En primer lugar enunciaremos la versión hamiltoniana del Teorema de Noether.

Teorema. 2.32 *Sea* ϕ *una acción simpléctica de* G *sobre la variedad simpléctica* (M,ω) *con aplicación momento* $\mathcal{J}$. *Supongamos que* $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *es invariante por la acción* ϕ*; es decir,* $H(\Phi_g(m)) = H(m)\ \forall\ m\ \in M\ y\ \forall\ g \in G$.

Entonces, $\mathcal{J}$ *es una constante de movimiento para* H.

Es decir, si F_t *es el flujo de* X_H, $\mathcal{J} \circ F_t = \mathcal{J}$.

Proposición. 2.33 *Sea* $(M,\omega,\phi,\mathcal{J})$ *un* G*-espacio Hamiltoniano. Definimos* $\forall\ g \in G\ \ y\ \ \forall\ a \in Lie(G)$ *la aplicación* $\psi_{g,a} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\psi_{g,a}(m) = \mathcal{J}(a)(\phi_g(m)) - \mathcal{J}(Ad_{g^{-1}}a)(m).$$

Entonces, $\psi_{g,a}$ *es constante sobre* M.

Como consecuencia de ésto se puede definir una aplicación de G sobre $Lie(G)^*$ que llamaremos **cociclo asociado a** $\mathcal{J}$.

Definición. 2.34 *Sea la aplicación* $\sigma : G \longrightarrow Lie(G)^*$ *tal que* $\sigma(g)\cdot a = \psi_{g,a}$.

De manera equivalente, la definición de σ puede enunciarse así:

$$\sigma(g) = \mathcal{J}(\phi_g(m)) - Ad^*_{g^{-1}}(\mathcal{J}(m))$$

Como se verifica que $\sigma(gh) = \sigma(g) + Ad^*_{g^{-1}}\sigma(h)\ \forall\ g$ y $h \in G$ tenemos que σ es un Ad*-cociclo sobre el grupo G a valores en $Lie(G)^*$. Recordemos que un Ad*-cociclo Δ es un coborde si existe $\mu \in Lie(G)^*$ tal que $\Delta(g) = \mu - Ad^*_{g^{-1}}\mu$ y dos cociclos son cohomólogos si difieren en un coborde.

Definición. 2.35 *Una aplicación momento $\mathcal{J}$ es llamada Ad^*-equivariante si se verifica que:*

$$\mathcal{J}(\phi_g(m)) = Ad^*_{g^{-1}}(\mathcal{J}(m))\quad \forall\ g \in G\ y\ \forall\ m \in M.$$

Es decir, $\mathcal{J}$ es Ad^*-equivariante si el siguiente diagrama es conmutativo $\forall\ g \in G$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi_g} & M \\ \mathcal{J}\downarrow & & \downarrow\mathcal{J} \\ Lie(G)^* & \xrightarrow{Ad^*_{g^{-1}}} & Lie(G)^* \end{array}$$

Observación. 2.36 *$\mathcal{J}$ es Ad^*-equivariante si y sólo si su cociclo asociado es nulo. El cociclo σ de una aplicación momento cualquiera nos da una medida su no equivarianza.*

En caso de no tener Ad^*-equivarianza, la acción puede ser modificada de manera que el momento resulte equivariante con respecto a la nueva acción: si definimos la aplicación $\Psi : G \times Lie(G)^* \rightarrow Lie(G)^*$

$$\Psi(g, \alpha) = Ad^*_{g^{-1}}\alpha + \sigma(g),$$

Ψ resulta una acción y $\mathcal{J}$ es equivariante con respecto a ella.

Ejemplo. 2.37 *Es importante señalar que existen ejemplos sencillos en los cuales el momento no es equivariante. A continuación mostramos uno de ellos.*

Sean $G = \mathbb{R}^2$ *(con coordenadas* (g_1, g_2)*) y* $M = \mathbb{R}^2$ *con la estructura simpléctica canónica* $\omega = dx_1 \wedge dx_2$.

Supongamos que G *actúa sobre* M *por traslaciones.*

Entonces, dado $(a_1, a_2) \in Lie(G) = \mathbb{R}^2$ *podemos elegir la aplicación*

$$\mathcal{J}(x_1, x_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1.x_2 - a_2.x_1$$

como una aplicación momento para esta acción, y el cociclo asociado está dado por:

$$\sigma(g_1, g_2) \cdot (a_1, a_2) = g_1.a_2 - g_2.a_1$$

Es claro que σ *no es cohomólogo a cero.*

El siguiente resultado es de suma importancia para el estudio de las extensiones de $Lie(G)$ que vamos a realizar.

Teorema. 2.38 *Sea* $\phi : G \times M \longrightarrow M$ *una acción simpléctica con una aplicación momento* $\mathcal{J}; M \longrightarrow Lie(G)^*$. *Sea* $\sigma : G \longrightarrow Lie(G)^*$ *el cociclo asociado a la aplicación* $\mathcal{J}$.

Definimos la aplicación $\Sigma : Lie(G) \times Lie(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la siguiente manera:*

$$\Sigma(a, b) = d\hat{\sigma}_b(e) \cdot a \quad \textit{donde } \hat{\sigma}_b : G \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ está dada por } \hat{\sigma}_b = \sigma(g) \cdot b.$$

Entonces,

- Σ *es una forma bilineal simétrica sobre* $Lie(G)$ *que verifica la identidad de Jacobi; es decir:*

$$\Sigma(a, [b, c]) + \Sigma(b, [a, c]) + \Sigma(c, [a, b]) = 0 \quad \forall\ a, b \text{ y } c \in Lie(G).$$

- $\{\hat{\mathcal{J}}(a), \hat{\mathcal{J}}(b)\} = \hat{\mathcal{J}}([a, b]) - \Sigma(a, b)$

Corolario. 2.39 *Si* $\mathcal{J}$ *es una aplicación momento* Ad^**-equivariante, se tiene que*

$$\{\hat{\mathcal{J}}(a), \hat{\mathcal{J}}(b)\} = \hat{\mathcal{J}}([a, b]).$$

Es decir, $\hat{\mathcal{J}} : Lie(G) \longrightarrow C^\infty(M)$ *es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

2.6 Extensiones de álgebras de Lie

Definición. 2.40 *Sean un álgebra de Lie A y V un A-módulo. Una extensión $\tilde{A}$ de A por V es una sucesión exacta corta de la forma*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \tilde{A} \xrightarrow{p} V \longrightarrow 0$$

donde $\tilde{A}$ se identifica con $A \oplus V$, i es la inclusión de A en $\tilde{A}$ y p la proyección de $\tilde{A}$ sobre V.

Dada un álgebra de Lie A y una A-módulo V, es sencillo encontrar todas las posibles extensiones de A por V. Ellas están caracterizadas por el segundo grupo de cohomología de álgebra de Lie con coeficientes en V, $H^2(Lie(G), V)$.

Recordemos la definición de esta cohomología.

Una cocadena de grado n sobre $Lie(G)$ a valores en V es una aplicación n-lineal antisimétrica $\alpha : Lie(G) \times .... \times Lie(G) \rightarrow V$. Denotaremos con $C^n(Lie(G), V)$ el espacio vectorial formado por todas estas n-cocadenas.

El operador de cohomología de álgebra de Lie $\delta : C^n \rightarrow C^{n+1}$ está dado por:

$$\begin{aligned}
(\delta\alpha)(x_1, ..., x_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^{(i+1)} x_i \cdot \alpha(x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_{k+1}) \\
&+ \sum_{i<j} \alpha([x_i, x_j], x_1, ..., \hat{x}_i, ..., \hat{x}_j, ..., x_{k+1})
\end{aligned}$$

donde el símbolo " ^ " indica que el elemento correspondiente se suprime.

α es un n-cociclo si $\delta\alpha = 0$ y es un n-coborde si existe una β un $(n-1)$-cociclo tal que $\alpha = d\beta$.

Si $Z^n(A, V)$ es el espacio de los cociclos y $B^n(A, V)$ es de los cobordes,

$$H^n(A, v) = Z^n(A, V)/B^n(A, V)$$

es el n-ésimo grupo de cohomología del álgebra de Lie A con coeficientes en V.

Ahora bien, dado $\Omega \in H^2(A, V)$ se define en $A \oplus V$ la siguiente aplicación bilineal a valores en $A \oplus V$:

$$[(x, v), (x', v')] = ([x, x'], x \cdot v' - x' \cdot v + \Omega(x, x'))$$

Por ser Ω un 2-cociclo se puede probar que $A \oplus V$ con este corchete es un álgebra de Lie y que da origen a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus V \xrightarrow{p} V \longrightarrow 0$$

Definición. 2.41

- *Dadas dos extensiones $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$ de A, diremos que son equivalentes si resultan isomorfas como álgebras de Lie.*

  Se puede verificar fácilmente que si los cociclos son cohomólogos, entonces las extensiones que definen son equivalentes.

  Ej.: la extensión de $\mathbb{R}^{2n}$ asociada al cociclo definido de modo análogo al del ejemplo 2.37 es el álgebra de Lie del grupo de Heisemberg - Weil.

- *Si la acción de A sobre V es trivial, diremos que la extensión $\tilde{A}$ de A por V es central. En este caso, el corchete en $\tilde{A}$ tiene la siguiente expresión*

$$[(x, v), (x', v')] = ([x, x'], \Omega(x, x')).$$

Extensiones centrales de $Lie(G)$ asociadas a una aplicación momento Ad^*-equivariante

Volvamos a considerar el último teorema de la subsección anterior.

Decir que la aplicación $\Sigma : Lie(G) \times Lie(G) \to \mathbb{R}$ es bilineal, antisimétrica y que verifica la identidad de Jacobi es equivalente a decir que Σ es un 2-cociclo sobre $Lie(G)$ con valores en $\mathbb{R}$ considerado como $Lie(G)$-módulo con la acción trivial.

Entonces, podemos decir que:

Si ϕ es una acción simpléctica sobre (M, ω) y $\mathcal{J}$ es una aplicación momento para esta acción, la aplicación

$$\Sigma : Lie(G) \times Lie(G) \to \mathbb{R} \text{ dada por } \Sigma(a,b) = \hat{\mathcal{J}}([a,b]) - \{\hat{\mathcal{J}}(a), \hat{\mathcal{J}}(b)\}$$

define una extensión central de $Lie(G)$.

Si $\mathcal{J}$ es Ad^*-equivariante dicha extensión resulta trivial.

Por otro lado, es fácil verificar que considerar la acción coadjunta del grupo G sobre la extensión del dual de $Lie(G)$ es equivalente a considerar la acción corregida sobre $Lie(G)^*$, tal como fue definida en la observación 2.36.

2.7 La construcción de Cariñena e Ibort

Sea una variedad simpléctica (M, ω) y un grupo de Lie G que actúa sobre M, no necesariamente de manera simpléctica.

La acción de G sobre M induce de manera natural una acción de G sobre $C^\infty(M)$:

$$\begin{array}{rcl} G \times C^\infty(M) & \to & C^\infty(M) \\ (g \cdot f)(m) & = & f(g^{-1} \cdot m) \end{array}$$

Por derivación, se obtiene una acción de $Lie(G)$ sobre $C^\infty(M)$ dada por

$$\begin{array}{rcl} Lie(G)\times C^\infty(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ a\cdot f & = & -L_{\tilde{X}_a} f \end{array}$$

donde $L_{\tilde{X}_a} f$ es la derivada de Lie de f en la dirección del generador infinitesimal de la acción ϕ de G sobre M correspondiente al elemento $a\in Lie(G)$.

Más generalmente, $Lie(G)$ actúa sobre el espacio de todas las formas diferenciales sobre M de la misma manera:

$$\begin{array}{rcl} Lie(G)\times F(M) & \rightarrow & F(M) \\ a\cdot \alpha & = & -L_{\tilde{X}_a}\alpha \end{array}$$

Como no estamos suponiendo que la acción ϕ de G sobre M sea simpléctica, la variación infinitesimal de la estructura simpléctica ω de M bajo la acción de $Lie(G)$ no es necesariamente nula. Para cada $a\in Lie(G)$ tenemos una 2-forma

$$\omega_a = a\cdot\omega = -L_{\tilde{X}_a}\omega.$$

Como el diferencial exterior conmuta con la derivada de Lie, $\{\omega_a\}_{a\in Lie(G)}$ resulta ser una familia de 2-formas cerradas sobre M.

Esta familia de 2-formas será el punto de partida para la ecuación de descenso que se va a describir a continuación.

Dado U un abierto de M, consideremos el complejo doble

$$\Omega(Lie(G),U) \;=\; \bigoplus_{p,q\geq 0}\Omega^{p,q}(Lie(G),U)$$

donde $\Omega^{p,q}(Lie(G),U)$ es el conjunto de las p-cocadenas sobre $Lie(G)$ que toman valores en las q-formas diferenciales sobre U.

Los operadores diferenciales del complejo son los siguientes:

$$d:\Omega^{p,q}(Lie(g),U)\rightarrow\Omega^{p,q+1}(Lie(g),U)$$

que es el operador diferencial exterior sobre U y

$$\delta : \Omega^{p,q}(Lie(G), U) \to \Omega^{p+1,q}(Lie(G), U)$$

que es el operador de cohomología del álgebra $Lie(G)$ con valores en el espacio de las formas diferenciales sobre U.

Es claro que estos operadores conmutan ya que

$$\begin{aligned}(\delta\alpha)(a_1, ..., a_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i L_{\bar{X}_{a_i}}\alpha(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j}\alpha([a_i, a_j], a_1, ..., \hat{a}_i, ..., \hat{a}_j, ..., a_{k+1})\end{aligned}$$

(donde $\alpha \in \Omega^{k,q}(Lie(G), U)$ y $a_1, ..., a_{k+1} \in Lie(G)$) y, como ya dijimos, el operador diferencial exterior d conmuta con la derivada de Lie.

Entonces, el esquema del complejo $\Omega(Lie(G), U)$ es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \to & & \Omega^{p,q}(Lie(G), U) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p,q+1}(Lie(G), U) & & \to \\ & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\ \to & & \Omega^{p+1,q}(Lie(G), U) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1,q+1}(Lie(G), U) & & \to \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

La familia de 2-formas $\{\omega_a\}_{a\in Lie(G)}$ puede considerarse como un elemento ω de $\Omega^{1,2}(Lie(G), U)$ y es claro que $\delta\omega = 0$ pues $\delta\omega \in \Omega^{2,2}(Lie(G), U)$ está dado por:

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(a, b) &= a \cdot \omega_b \; - \; b \cdot \omega_a \; - \; \omega[a, b] \\ &= -L_{\bar{X}_a}L_{\bar{X}_b}\omega \; + \; L_{\bar{X}_b}L_{\bar{X}_a}\omega \; - \; L_{\bar{X}_{[a,b]}}\omega \\ &= -L_{\bar{X}_a}L_{\bar{X}_b}\omega \; + \; L_{\bar{X}_b}L_{\bar{X}_a}\omega \; + \; L_{[\bar{X}_a,\bar{X}_b]}\end{aligned}$$

y es igual a cero porque la derivada de Lie verifica que

$$L_{[X,Y]}\alpha = L_X L_Y \alpha - L_Y L_X \alpha \quad \forall\, \alpha \in F(M)$$

Como ya vimos $d\omega_a = 0 \;\forall\, a \in Lie(G)$ y, por lo tanto, las 2-formas ω_a son localmente exactas. Es decir, existen U (abierto y contráctil de M) y una familila de 1-formas $\{\alpha_a\}_{a\in Lie(G)}$ tales que $d\alpha_a = \omega_a \;\forall\, a \in Lie(G)$. En otras palabras, existe $\alpha \in \Omega^{1,1}(Lie(G), U)$ tal que $\omega = d\alpha$.

Consideremos el elemento de $\Omega^{2,1}(Lie(G), U)$ $\lambda = \delta\alpha$ cuya forma explícita es la siguiente:

$$\lambda(a,b) = (\delta\alpha)(a,b) = a\cdot\alpha_b - b\cdot\alpha_a - \alpha_{[a,b]}$$

$$= -L_{\tilde{X}_a}\alpha_b + L_{\tilde{X}_b}\alpha_a - \alpha_{[a,b]}$$

Aplicando la fórmula de Cartan,

$$L_X\beta = di_X\beta + i_X d\beta \quad \forall\, \beta \in F(M),$$

obtenemos:

$$-L_{\tilde{X}_a}\alpha_b = -di_{\tilde{X}_a}\alpha_b - i_{\tilde{X}_a}d\alpha_b = -di_{\tilde{X}_a}\alpha_b - i_{\tilde{X}_a}\omega_b$$

Luego,

$$\lambda(a,b) = -di_{\tilde{X}_a}\alpha_b - i_{\tilde{X}_a}\omega_b + di_{\tilde{X}_b}\alpha_a + i_{\tilde{X}_b}\omega_a - \alpha_{[a,b]}$$

$$= -i_{\tilde{X}_a}\omega_b + I_{\tilde{X}_b}\omega_a + d(i_{\tilde{X}_b}\alpha_a - i_{\tilde{X}_a}\alpha_b) - \alpha_{[a,b]}$$

Las 1-formas $\lambda(a,b)$ son cerradas ya que $d\lambda = d\delta\alpha = \delta d\alpha = \delta\omega$. Por lo tanto son localmente exactas. Es decir, siendo U un abierto de M lo suficientemente pequeño, existe un elemento $h \in \Omega^{2,0}(Lie(G), U)$ que verifica que $\lambda = dh$.

El proceso de descenso que hemos descripto puede ser esquematizado en el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{d} & \Omega^{1,2} \\
 & & \alpha & & \omega \\
 & & \delta \downarrow & & \\
\Omega^{2,0} & \xrightarrow{d} & \Omega^{2,1} & & \\
\mathrm{h} & & \lambda & &
\end{array}
$$

Observación. 2.42 *Esta ecuación de descenso puede ser considerada como un caso particular del "lema del ta-te-ti" para complejos dobles.*

Observación. 2.43 *Si la acción es simpléctica, h es un cociclo. En efecto, dado que $\omega_a = 0 \ \forall \ a \in Lie(G)$, las 1-formas α_a son cerradas. Entonces, existe un elemento $\beta \in \Omega^{1,0}(Lie(G), U)$ tal que $d\beta = \alpha$.*

Luego, $\delta\beta = h$ (por la conmutatividad del diagrama) y por lo tanto h es un cociclo.

Además, $dh = 0$ ya que $dh = d\delta\beta = \delta\alpha = \delta\delta\theta = 0$ donde $\theta \in \Omega^{0,1}(Lie(G), U)$ es un potencial local de ω.

Así, esta ecuación de descenso permite obtener un 2-cociclo h sobre $Lie(G)$ con valores en las funciones localmente constantes sobre M.

En el diagrama del complejo, esta situación se representa así :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega^{0,1} & \xrightarrow{d} & \Omega^{0,2} \\
 & & \theta & & \omega \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow \\
\Omega^{1,0} & \xrightarrow{d} & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{d} & \Omega^{1,2} \\
\beta & & \alpha & & 0 \\
\delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
\Omega^{2,0} & \xrightarrow{d} & \Omega^{2,1} & & \\
\mathrm{h} & & 0 & &
\end{array}$$

En el caso de acciones no simplécticas, veremos que puede tomarse como h un cociclo a valores en $C^\infty(M)$.

Mediante esta ecuación de descenso, Cariñena e Ibort construyen extensiones del álgebra $Lie(G)$ utilizando el 2-cociclo λ a valores en el espacio de las 1-formas sobre M. Para ésto, consideran ciertas hipótesis sobre la estructura simpléctica dada por la 2-forma ω que, como veremos más adelante, se verifican naturalmente en los ejemplos de interés físico.

Supongamos que ω puede escribirse como suma de una forma simpléctica e invariante por la acción del grupo y otra forma cerrada (que puede ser degenerada) cuya variación bajo la acción de G es la variación de ω.

Es decir,

$$\omega = \omega^i + \Delta\omega$$

donde ω^i es simpléctica y $L_{\tilde{X}_a}\omega^i = 0$ y $L_{\tilde{X}_a}\Delta\omega = L_{\tilde{X}_a}\omega$.

Como la acción ϕ de G sobre la variedad simpléctica (M, ω^i) es simpléctica se puede considerar una aplicación momento $J : M \to Lie(G)^*$ asociada a esta acción que, como ya vimos, está dada por

$$< J(m), a >= \quad J_a(m) \quad \forall\, m \in M$$

donde $\forall\ a \in Lie(G)$ la aplicación $J_a : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $dJ_a = i_{\tilde{X}_a}\omega^{\prime}$.

Por otro lado, podemos considerar la estructura simpléctica original ω sobre M y tomar el campo Hamiltoniano asociado a cada función J_a, que denotaremos como X_{J_a}. Es decir, $dJ_a = i_{X_{J_a}}\omega \quad \forall\ a \in Lie(G)$.

Es obvio que si se parte de una acción simpléctica se obtiene $\tilde{X}_a = X_{J_a}$ tomando $\omega = \omega^{\prime}$ y $\Delta\omega = 0$.

En general, se pueden considerar los campos $\Delta X_a = \tilde{X}_a - X_{J_a}$ que permiten escribir el generador infinitesimal $\tilde{X}_a$ como suma de un campo hamiltoniano (con respecto a ω) y otro que no lo es.

ΔX_a mide la diferencia entre los campos hamiltonianos correspondientes a las funciones J_a calculados con respecto a las estructuras simplécticas $\omega^{\prime}$ y ω.

Bajo la hipótesis $\omega(\Delta X_a, \Delta X_b) = 0 \quad \forall\ a\ y\ b \in Lie(G)$, Cariñena e I-bort ([2]) obtienen el siguiente resultado:

Teorema. 2.44 . *Sean (M,ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie que actúa sobre M no necesariamente en forma simpléctica.*

Supongamos que se verifican las condiciones detalladas anteriormente.

Entonces,

$$d\{J_a, J_b\} - dJ_{[a,b]} = \lambda(a,b) \quad \forall\ a\ y\ b \in Lie(G)$$

donde $\lambda(a,b)$ es el 2-cociclo sobre $Lie(G)$ con valores en las 1-formas sobre M obtenido por la ecuación del descenso descripta antes.

En particular,

$$\{J_a, J_b\} - J_{[a,b]} = h(a,b) + c(a,b)$$

donde $c(a,b)$ son constantes que sólo dependen de a y b (y que aparecen con la integración).

A continuación recordamos la demostración de este resultado ya que nos facilitará la escritura de la demostración de los resultados que presentaremos más adelante.

Demostración.

Las 1-formas α_a son tales que su diferencial es igual a ω_a.
Entonces, se puede elegir $\alpha_a = -i_{\Delta X_a}\omega$, ya que:

$$d\alpha_a = -di_{\Delta X_a}\omega = -di_{\tilde{X}_a}\Delta\omega = -L_{\tilde{X}_a}\Delta\omega = \omega_a$$

Ahora bien,

$$d\{J_a, J_b\} = d\omega(X_{Ja}, X_{Jb}) = d\omega(\tilde{X}_a - \Delta X_a, \tilde{X}_b - \Delta X_b)$$

$$= d\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - d\omega(\Delta X_a, \tilde{X}_b) - d\omega(\tilde{X}_a, \Delta X_b)$$

$$= d\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - d\omega(\tilde{X}_a, \Delta X_b) + d\omega(\tilde{X}_b, \Delta X_a)$$

$$= di_{\tilde{X}_b} i_{\tilde{X}_a}\omega + di_{\tilde{X}_a} i_{\Delta X_b}\omega - di_{\tilde{X}_b} i_{\Delta X_a}\omega$$

$$= di_{\tilde{X}_b} i\tilde{X}_a\omega + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= L_{\tilde{X}_b} i_{\tilde{X}_a}\omega - i_{\tilde{X}_b}(di_{\tilde{X}_a}\omega) + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= i_{[\tilde{X}_b, \tilde{X}_a]}\omega + i_{\tilde{X}_a} L_{\tilde{X}_b}\omega - i_{\tilde{X}_b}(di_{\tilde{X}_a}\omega) + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= i_{[\tilde{X}_b, \tilde{X}_a]}\omega - i_{\tilde{X}_a}\omega_b - i_{\tilde{X}_b}(L_{\tilde{X}_a}\omega) + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= i_{[\tilde{X}_b \tilde{X}_a]}\omega - i_{\tilde{X}_a}\omega_b + i_{\tilde{X}_b}\omega_a + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= i_{\Delta X_{[a,b]}}\omega + i_{X J[a,b]} - i_{\tilde{X}_a}\omega_b + i_{\tilde{X}_b}\omega_a + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

$$= dJ_{[a,b]} - \alpha_{[a,b]} - i_{\tilde{X}_a}\omega_b + i_{\tilde{X}_b}\omega_a + d(-i_{\tilde{X}_a}\alpha_b + i_{\tilde{X}_b}\alpha_a)$$

Entonces,

$$d\{J_a, J_b\} - dJ_{[a,b]} = \lambda(a, b).$$

□

3 Extensiones no centrales en el marco de la geometría simpléctica

3.1 Cociclo canónico y extensión asociada.

Probaremos, en el teorema 3.3, que el método descripto en la subsección 2.7 da lugar a una extensión de $Lie(G)$ y que esta extensión está asociada a un 2-cociclo canónico que definiremos a continuación.

Sea $\Omega : Lie(G) \times Lie(G) \to C^\infty(M)$ dada por

$$\Omega(a,b)(m) = \omega_m(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) \quad \forall\, m \in M$$

Lema. 3.1 *Ω es un 2-cociclo sobre $Lie(G)$ a valores en $C^\infty(M)$.*

Demostración.

$$(\delta\Omega)(a,b,c)$$

$$= a \cdot \Omega(b.c) - b \cdot \Omega(a,c) + c \cdot \Omega(a,b)$$

$$-\Omega([a,b],c) + \Omega([a,c],b) - \Omega([b,c],a)$$

$$= -L_{\tilde{X}_a}\omega(\tilde{X}_b, \tilde{X}_c) + L_{\tilde{X}_b}\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_c) - L_{\tilde{X}_c}\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b)$$

$$-\omega(\tilde{X}_{[a,b]}, \tilde{X}_c) + \omega(\tilde{X}_{[a,c]}, \tilde{X}_b) - \omega(\tilde{X}_{[b,c]}, \tilde{X}_a)$$

$$= -\tilde{X}_a\omega(\tilde{X}_b, \tilde{X}_c) + \tilde{X}_b\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_c) - \tilde{X}_c\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b)$$

$$+\omega([\tilde{X}_a, \tilde{X}_b], \tilde{X}_c) - \omega([\tilde{X}_a, \tilde{X}_c], \tilde{X}_b) + \omega([\tilde{X}_b, \tilde{X}_c], \tilde{X}_a)$$

$$= d\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b, \tilde{X}_c)$$

y $d\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b, \tilde{X}_c) = 0$ ya que ω es cerrada. □

Observación. 3.2 *Si la acción se simpléctica, la evaluación de este 2-cociclo en cualquier punto $m \in M$ es un 2-cociclo a valores en $\mathbb{R}$ y su clase de cohomología como tal es independiente del punto m elegido (ver, por ejemplo, [1]).*

A continuación, probaremos que la familia $\{J_a\}_{a \in Lie(G)}$ obtenida en la construcción de Cariñena e Ibort realiza una extensión de $Lie(G)$ asociada a un cociclo cohomólogo al cociclo canónico Ω.

Teorema. 3.3 . *Bajo las mismas hipótesis del teorema 2.44 se obtiene:*

$$\{J_a, J_b\} - J_{[a,b]} = \Omega(b, a) + (\delta J)(a, b)$$

Demostración.

$$\{J_a, J_b\} \;=\; \omega(XJ_a, XJ_b) - \omega(\tilde{X}_a, \Delta X_b) - \omega(\Delta X_a, \tilde{X}_b)$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) + \omega(\Delta X_b, \tilde{X}_a) - \omega(\Delta X_a, \tilde{X}_b) \\
&= \omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) + \Delta\omega(\tilde{X}_b, \tilde{X}_a) - \Delta\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) \\
&= \omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - 2\Delta\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b)
\end{aligned}
$$

Por otro lado se tiene:

$$
\begin{aligned}
(\delta J)(a,b) &= a \cdot J_b - b \cdot J_a - J_{[a,b]} = -L_{\tilde{X}_a} J_b + L_{\tilde{X}_b} J_a - J_{[a,b]} \\
&= -dJ_b(\tilde{X}_a) + dJ_a(\tilde{X}_b) - J_{[a,b]} \\
&= -\omega^i(\tilde{X}_b, \tilde{X}_a) + \omega^i(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - J_{[a,b]} \\
&= 2\omega^i(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - J_{[a,b]}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
J_{[a,b]} = 2\omega^i(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - (\delta J)(a,b).
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\{J_a, J_b\} - J_{[a,b]} &= \omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - 2\Delta\omega(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) - 2\omega^i(\tilde{X}_a, \tilde{X}_b) + (\delta J)(a,b) \\
&= \Omega(b,a) + (\delta J)(a,b)
\end{aligned}
$$

□

Así ,vemos que podemos prescindir de la ecuación del descenso para construir y caracterizar la extensión de $Lie(G)$ a que da lugar la acción de G. La relación con tal ecuación está precisada en la siguiente proposición.

Proposición. 3.4 *Podemos construir la ecuación del descenso de modo que $h(a,b) = \Omega(b,a)$ sea una elección admisible.*

Demostración.

Si partimos de $\alpha_a = -i_{\Delta X_a} - dJ_a$ $\forall a \in Lie(G)$, resulta

$$\begin{aligned} d\alpha_a &= d(-i_{\Delta X_a} - dJ_a) = -di_{\Delta X_a}\omega = -di_{\tilde{X}_a}\Delta\omega \\ &= -L_{\tilde{X}_a}\Delta\omega = -L_{\tilde{X}_a}\omega = \omega_a \end{aligned}$$

Si consideramos $\alpha'_a = -i_{\Delta X_a}$ como en la prueba del teorema 3.3, obtenemos:

$$d\{J_a, J_b\} - dJ_{[a,b]} = (\delta\alpha')(a,b)$$

Combinando estas dos igualdades llegamos a:

$$d\Omega(b,a) + d(\delta J)(a,b) = (\delta\alpha')(a,b)$$

y entonces, $d\Omega(b,a) = (\delta\alpha)(a,b)$ como queríamos. □

Observación. 3.5 *Si bien es evidente, conviene señalar que, a diferencia del caso de cocadenas a valores en $\mathbb{R}$, $J_{[a,b]}$ no es un coborde cuando las cocadenas toman valores en $C^\infty(M)$.*

Observación. 3.6 *En nuestro marco simpléctico, con las hipótesis ya descriptas, el tipo de extensión asociada a la acción de G resulta:*

- *trivial, si $\omega = d\theta$ y la acción de G preserva el potencial θ (ver por ejemplo [1]).*

  Para verlo en nuestro marco, si suponemos que la acción preserva el potencial θ, tenemos la siguiente situación:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega^{0,1} & \xrightarrow{d} & \Omega^{0,2} \\
 & & \theta & & \omega \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow \\
\Omega^{1,0} & \xrightarrow{d} & \Omega^{1,1} & \xrightarrow{d} & \Omega^{1,2} \\
\beta & & 0 & & 0 \\
\delta\downarrow & & & & \\
\Omega^{2,0} & & & & \\
\mathrm{h} & & & &
\end{array}
$$

  Como en el caso simpléctico en general que ya se describió en la observación 2.43, $dh = 0$. Es decir, h toma valores en las funciones constantes sobre M.

  Ahora bien, como $d\beta = 0$ tenemos que β también toma valores en las funciones constantes sobre M y entonces h resulta un 2-cociclo trivial ya que:

$$h(a,b) = (\delta\beta)(a,b) = a \cdot \beta_b - b \cdot \beta_a - \beta_{[a,b]} = -\beta_{[a,b]}$$

- *central, si la acción preserva sólo ω (es decir, no preserva θ).*

  En el caso de una acción simpléctica en general, ya se comentó en la observación 2.43 que el 2-cociclo h resulta tomar valores en las funciones constantes sobre M y así da lugar a una extensión central ya que la acción del álgebra $Lie(G)$ es trivial sobre las funciones constantes.

- *en genreal no central, si la acción no es simpléctica.*

  Como ya dijimos, si tomamos como punto de partida una acción que no es simpléctica, $\Omega(b,a)$ resulta ser un 2-cociclo a valores en $C^\infty(M)$ que da lugar a una extensión que en general, resulta ser no central.

Observación. 3.7 *Es claro que la manera de definir los momentos correspondientes a alguna forma invariante no influye en la extensión que se construye.*

Supongamos que tenemos dos aplicaciones momento para la acción de G sobre la variedad simpléctica (M,ω^i) dadas por:

$$\mathcal{J} : M \longrightarrow Lie(G)^* \;\; y \;\; \mathcal{H} : M \longrightarrow Lie(G)^*$$

Los cociclos definidos a partir de estas elecciones de momentos son:

$$C_{\mathcal{J}}(a,b) = (\delta\mathcal{J})(a,b) - \Omega(b,a) \;\; y \;\; C_{\mathcal{H}}(a,b) = (\delta\mathcal{H})(a,b) - \Omega(b,a)$$

Luego, se ve claramente que estos dos cociclos son cohomólogos y por lo tanto dan lugar a extensiones equivalentes de $Lie(G)$.

Observación. 3.8 *Supongamos que existen dos particiones para la forma ω como las que venimos considerando*

$$\omega = \omega_1^i + \Delta\omega_1 \;\; y \;\; \omega = \omega_2^i + \Delta\omega_2$$

Sean $\mathcal{J}_1 : M \longrightarrow Lie(G)^*$ y $\mathcal{J}_2 : M \longrightarrow Lie(G)^*$ dos aplicaciones momento para la acción de G sobre las variedades simplécticas (M,ω_1^i) y (M,ω_2^i) respectivamente.

Las extensiones asociadas están representadas por los cociclos

$$C_{\mathcal{J}_1}(a,b) = (\delta\mathcal{J}_1)(a,b) - \Omega(b,a) \;\; y \;\; C_{\mathcal{J}_2}(a,b) = (\delta\mathcal{J}_2)(a,b) - \Omega(b,a)$$

que claramente son cohomólogos.

3.2 El término de Schwinger

Veremos cómo el análisis de extensiones de álgebras de Lie en el marco de la mecánica clásica que hemos venido considerando permite caracterizar **a priori**, en un sentido que será aclarado en lo que sigue, los "términos de Schwinger" de las teorías cuánticas anómalas.

En particular, discutiremos el ejemplo del término de Schwinger de los conmutadores a igual tiempo de los "vínculos de la ley de Gauss" en una teoría de Yang Mills en cuatro dimensiones acoplada a fermiones de Weyl por corresponder a una extensión no central.

Una anomalía cuántica es la pérdida de una simetría del modelo clásico en su formulación cuántica. Algunas de ellas, como por ejemplo la anomalía de la corriente axial, representan fenómenos físicos y deben estar incluidas en la teoría correspondiente. En otros casos, como por ejemplo el de la anomalía de gauge, la teoría debe posibilitar su cancelación, dado que, de lo contrario, no es físicamente correcta. La presencia de anomalías modifica el álgebra de corrientes mediante la aparición de los llamados términos de Schwinger(ver por ejemplo [11]).

En la teoría que vamos a considerar, la familia de funciones denominadas vínculos de la ley de Gauss por analogía con el vínculo que establece la divergencia nula del campo eléctrico en el electromagnetismo (ley de Gauss) da lugar, al calcular sus conmutadores cuánticos, a extensiones del álgebra de corrientes, en virtud de la aparición de un 2-cociclo sobre el álgebra de gauge a valores en un espacio de funciones.

Para describir la teoría de Yang Mill, tomemos un fibrado principal trivial P sobre la variedad S^4, con la que modelaremos el espacio tiempo de 4 dimensiones, con grupo de estructura $G = SU(n)$. Nos restringimos al caso de fibrado trivial porque la no trivialidad de P no generaría consecuencias significativas para lo que estamos estudiando. El grupo de transformaciones de gauge $\mathcal{G}$, esto es el grupo de automorfismos del fibrado P que presevan la identidad en la base, puede ser identificado con el grupo de aplicaciones de S^4 en G, $Map(S^4, G)$ que valen la identidad en un punto fijo p_0. Luego, el álgebra de Lie de $\mathcal{G}$ puede identificarse con el espacio de aplicaciones $Map(S^4, \mathrm{g})$, que valen 0 en p_0, siendo g el álgebra de Lie del grupo G.

Sea $\mathcal{A}$ el espacio contráctil de las conexiones sobre P que está identificado

con el espacio de las 1-formas sobre M que toman valores en $Lie(G)$. Un elemento $A \in \mathcal{A}$ puede escribirse como $A_\mu = A_\mu^a T_\mu^a$ donde $\mu = 0, ..., 3$ y $\{T^a\}_a$ una base del álgebra de Lie $\mathbf{g}$. La curvatura asociada es
$F = dA = F_{\mu\nu}\, dx_\mu \wedge dx_\nu$ donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$

$\mathcal{G}$ actúa sobre $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:

$$g \cdot A = A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

El lagrangiano de la teoría pura de Yang Mills $\mathcal{L}_{YM} : T\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{\epsilon^2} tr F_{\mu\nu}^2$$

y es invariante por la acción de $\mathcal{G}$.

Los llamados vínculos de la ley de Gauss son las funciones $J_0^a : T\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, con a los índices de $\mathbf{g}$, dadas por

$$J_0^a = \partial_\mu E^\mu + [A_\mu, F^{0\mu}]^a,$$

y son momentos asociados a la acción de $\mathcal{G}$. Sus conmutadores cuánticos a tiempo constante, representan el "álgebra de corrientes":

$$[J_0^a(x), J_0^b(y)] \quad = \quad -C_c^{ab} J_0^c(y)\delta(x-y) \tag{3.1}$$

con C_c^{ab} las constantes del álgebra $\mathbf{g}$ (ver por ejemplo [11]).

Consideremos ahora el caso de una teoría de Yang Mills acoplada a fermiones de Weyl. Su lagrangiano está definido como

$$\mathcal{L} : T\mathcal{A} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R} \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{\epsilon^2} tr(F^2) + \bar{\psi} i \mathcal{D}_A \psi$$

siendo $\mathcal{W}$ el espacio de los fermiones de Weyl y $\mathcal{D}_A$ el operador de Dirac covariante asociado a A. Es decir, $\mathcal{D}_A = \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu$ con $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu$

La acción de $\mathcal{G}$ sobre los fermiones está dada por

$$\psi \rightarrow \psi^g = g^{-1}\psi \quad \text{y} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}^g = \bar{\psi} g$$

La integración funcional de esta teoría en las variables fermiónicas da como resultado una teor´ ia con un lagrangiano efectivo $\mathcal{L}_E$ que se escribe como

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{WZ},$$

donde $\mathcal{L}_{WZ}$, el lagrangiano de Wess Zumino, no es invariante por la acción del grupo de gauge. Su variación es precisamente la anomalía y está dada por

$$\mathcal{L}_{WZ}[A^g] = exp(i\alpha_1(A;g))\mathcal{L}_{WZ}[A].$$

Es inmediato ver que $\alpha_1(A;g)$ es un 1-cociclo sobre $\mathcal{G}$ a valores en $C^\infty(T\mathcal{A})$.

Para la definición y propiedades de la integración funcional ver por ejemplo [11] o [13].

Se muestra en [10] y también en [11], que el conmutador cuántico a tiempo constante de las funciones J_0^a ya no representa el álgebra de corrientes sino que da lugar a un término de Schwinger:

$$[J_0^a(x), J_0^b(y)] \quad = \quad -C^{abc}J_0^c(y)\delta(x-y) + \mathcal{U}(A,x,y) \tag{3.2}$$

siendo

$$\mathcal{U}(A,x,y) \quad = \quad \delta(x-y)\cdot H(A) \tag{3.3}$$

donde $H(A) = \frac{1}{24\pi}\int_{S^3} tr(A[da,db])$.

Para poder llevar a cabo el análisis de este término en nuestro contexto, dado que los conmutadores son calculados a tiempo constante, partiremos de una teoría de Yang - Mills en 3 dimensiones.

Si consideramos en $T\mathcal{A}$ la forma ω_E, pull back de la forma canónica sobre $T^*\mathcal{A}$ por $\mathcal{L}_E$, podemos escribir

$$\omega_E = \omega_{YM} + \omega_{WZ}$$

Los conmutadores de los operadores cuánticamente asociados a los J_0^a en la teoría pura de Yang - Mills dan una representación del álgebra de Lie

$(\{J_0^a\},\omega_{YM})$ en la que los puntos de M son considerados como parámetros, i.e. el álgebra de corrientes.

De modo análogo, estos conmutadores para la teoría acoplada a fermiones de Weyl dan una realización de $(\{J_0^a\},\omega_E)$.

Puede probarse que con la acción de $\mathcal{G}$, las hipótesis del teorema 3.2 se verifican para $\omega^i = \omega_{YM}$ y $\Delta\omega = \omega_{WZ}$.

Así ,$(\{J_0^a\},\omega_E)$ es una extensión de $Lie(\mathcal{G})$ correspondiente a un 2-cociclo cohomólogo al 2-cociclo canónico definido en la sección 3.1. En consecuencia, $H(A)$ deberá ser cohomólogo al representante cuántico del mencionado cociclo canónico.

Resultados análogos pueden ser obtenidos para la misma teoría en dos dimensiones, caso en el que la extensión de $Lie(G)$ resulta central (álgebra de Kac - Moody), dado que el cociclo asociado toma valores en las funciones constantes y en teorías conformes en dos dimensiones en las que se obtienen extensiones centrales de $Lie(Diff^+(S^1))$ (álgebra de Virasoro).

Estos ejemplos serán considerados con otra finalidad en la siguiente sección.

3.3 El caso (TQ,ω_L).

En esta sección vamos a considerar el caso particular en el cual la variedad simpléctica (M,ω) de dimensión finita es el espacio de velocidades de una variedad diferenciable Q; es decir, $M = TQ$ y $\omega = \omega_L$ es el pullback por la transformada de Legendre de la estructura simpléctica canónica sobre el espacio de configuración T^*Q.

A partir de la acción de un grupo de Lie G sobre Q, vamos a considerar las acciones de este grupo sobre TQ y T^*Q obtenidas levantando de manera canónica la acción sobre la base.

Se establecerán condiciones suficientes sobre un lagrangiano L no invariante por la acción de un grupo G, para poder construir extensiones no centrales de $Lie(G)$ a partir de (TQ,ω_L) de la manera descripta en el capítulo anterior.

Como en las secciones anteriores supondremos que ω_L puede escribirse como suma de una forma simpléctica invariante por la acción de G y otra forma cerrada $\Delta\omega_L$ y consideraremos momentos J_a de la acción con respecto a ω_L^i y los campos $\Delta X_a = \tilde{X}_a - X_{J_a}$.

Vamos a establecer condiciones suficientes sobre L que garanticen que dada una partición de este tipo, se verifica la condición

$$\omega_L(\Delta X_a, \Delta X_b) = 0 \;\; \forall\; a \text{ y } b \in Lie(G).$$

De ahora en más, vamos a considerar $(\mathrm{q}^i, \dot{\mathrm{q}}^i)_i$, coordenadas canónicas para la forma ω_L^i.

Lema. 3.9 *Supongamos que la partición de ω_L como suma de ω_L^i y $\Delta\omega$ está dada por*

$$\omega_L = d\mathrm{q}^i \wedge d\dot{\mathrm{q}}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathrm{q}^i\, \partial \dot{\mathrm{q}}^j} d\mathrm{q}^i \wedge d\mathrm{q}^j$$

Entonces,

$$X_{J_a} = \tilde{X}_a - \left[\frac{\partial J_a}{\partial \dot{\mathrm{q}}^j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i\, \partial \mathrm{q}^j} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{\mathrm{q}}^j} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathrm{q}}^j \partial \mathrm{q}^i}\right] \frac{\partial}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i}$$

Demostración.

Busquemos la expresión de $X_{J_a} = A_i \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}^i} + B_i \frac{\partial}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i}$

Tenemos que

$$dJ_a = \frac{\partial J_a}{\partial \mathrm{q}^i\; {}^d\mathrm{q}^i} + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i} d\dot{\mathrm{q}}^i$$

y por otro lado,

$$i_{X_{J_a}} \omega_L(\cdot) = (d\mathrm{q}^i \wedge d\dot{\mathrm{q}}^i)(X_{J_a}, \cdot) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i \partial \mathrm{q}^j} dq^i \wedge d\mathrm{q}^j(X_{J_a}, \cdot)$$

$$= d\mathrm{q}^i\,(X_{J_a}) d\dot{\mathrm{q}}^i(.) - d\mathrm{q}^i\,(.) d\dot{\mathrm{q}}^i(X_{J_a}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i \partial \mathrm{q}^j}[d\mathrm{q}^i\,(X_{J_a}) d\mathrm{q}^j(.) - d\mathrm{q}^i\,(.) d\mathrm{q}^j(X_{J_a})]$$

$$= A_i d\dot{\mathrm{q}}^i - B_i d\mathrm{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathrm{q}}^i \partial \mathrm{q}^j}[A_i d\mathrm{q}^j - A_j d\mathrm{q}^i]$$

Entonces llegamos a que:

$$A_i = \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \;\; \text{y}$$

$$B_i = -\frac{\partial J_a}{\partial q^i} + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}[-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}]$$

Por lo tanto,

$$X_{J_a} = \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial q^i} + [-\frac{\partial J_a}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}]\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

$$= \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial J_a}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

$$= \tilde{X}_a - [\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}]\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

□

Proposición. 3.10 *Si* $(q^i, \dot{q}^i)_i$ *son coordenadas canónicas para* ω_L^i *sobre* TQ *y se verifica que* $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^i} = 1 \;\forall i = 1, \ldots, n$ *y* $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} = 0 \;\forall\, i$ *y* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *tales que* $i \neq j$ *entonces se tiene que* $\omega_L(\Delta X_a, \Delta X_b) = 0 \;\; \forall\, a$ *y* $b \in Lie(G)$.

Demostración.

La expresión de ω_L en el sistema de coordenadas con que venimos trabajando es la siguiente:

$$\omega_L = dq^i \wedge d\dot{q}^i + (\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^i} - 1)\, dq^i \wedge d\dot{q}^i$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j} dq^i \wedge dq^j$$

Si suponemos que
$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^i} = 1 \ \ \forall\, i = 1, ..., n$ y $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^j} = 0 \ \forall\, i$ y $j \in \{1, ..., n\}$ tales que $i \neq j$,

$$\omega_L = dq^i \wedge d\dot{q}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j} dq^i \wedge dq^j$$

Como $\tilde{X}_a$ es el hamiltoniano del momento J_a con respecto a ω_L^i se escribe de la siguiente manera

$$\tilde{X}_a = \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial J_a}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

y como X_{J_a} es el hamiltoniano del momento J_a con respecto a la forma ω_L, por el lema anterior tenemos:

$$X_{J_a} = \tilde{X}_a - [\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}]\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

Luego,

$$\Delta X_a = [-\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}]\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

Entonces, es claro que $\omega_L(\Delta X_a, \Delta X_b) = 0$ ya que los campos ΔX_a sólo tienen componentes no nulas en las direcciones tangentes dadas por $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$. □

Veamos ahora cuál es la expresión del cociclo asociado a la correspondiente extensión de $Lie(G)$.

Corolario. 3.11 *El cociclo canónico $\Omega(b, a)$ a valores en $C^\infty(TQ)$ está dado por*

$$\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_b}{\partial q^i} - \frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_a}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial q^j}[\frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^j}]$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\Omega(b,a) &= \omega_L(\tilde{X}_b,\tilde{X}_a) \\
&= (dq^i \wedge d\dot{q}^i)(\tilde{X}_b,\tilde{X}_a) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}(dq^i \wedge dq^j)(\tilde{X}_b,\tilde{X}_a) \\
&= dq^i(\tilde{X}_b)d\dot{q}^i(\tilde{X}_a) - dq^i(\tilde{X}_a)d\dot{q}^i(\tilde{X}_b) \\
&+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}[dq^i(\tilde{X}_b)dq^i(\tilde{X}_a) - dq^i(\tilde{X}_a)dq^j(\tilde{X}_b)) \\
&= -\frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_a}{\partial q^i} + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_b}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}[\frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial J_b}{\partial \dot{q}^j}]
\end{aligned}
$$

□

Existencia de una partición de ω_L

En muchos ejemplos de interés el lagrangiano hiperregular L se puede escribir como suma de un lagrangiano también hiperregular invariante L^i y otro término ΔL que registra la variación de L.

Es decir, $L = L^i + \Delta L$ tal que $L_{\tilde{X}_a} L^i = 0$ y $L_{\tilde{X}_a}\Delta L = L_{\tilde{X}_a} L \;\; \forall\, a \in Lie(G)$.

En este caso, ω_L admite una partición como la que se describió ya que

$$
\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}(dq^i \wedge dq^j) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j
$$

$$
= \frac{\partial^2 L^i}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}(dq^i \wedge dq^j) + \frac{\partial^2 L^i}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j
$$

$$
+ \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial \dot{q}^i\, \partial q^j}(dq^i \wedge dq^j) + \frac{\partial^2 \Delta L}{\partial \dot{q}^i\, \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j
$$

$$= \omega_{L^i} + \omega_{\Delta L}$$

y ω_{L^i} es invariante porque L^i lo es.

Observación. 3.12 *La función $\Delta L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ puede considerarse como una 1-forma $\tilde{\Delta L}$ sobre Q. Entonces, $\omega_{\Delta L} = \pi^*(d(\tilde{\Delta L}))$ siendo $\pi : TQ \longrightarrow Q$ la proyección canónica.*

Un ejemplo sencillo

Vamos a considerar el grupo $G = \mathbb{R}^2$ actuando por traslaciones sobre $Q = \mathbb{R}^2$, y la estructura simpléctica canónica sobre $\mathbb{R}^4$, el fibrado tangente TQ. La acción de $\mathbb{R}^2$ inducida sobre TQ está dada por el levantamiento de traslaciones sobre la base.

Sean $(q^i, p_i)_i$ coordenadas canónicas sobre $\mathbb{R}^4 = T^*Q$ y sean $(q^i, \dot{q}^i)_i$ coordenadas canónicas sobre $\mathbb{R}^4 = TQ$.

Consideremos $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido de la siguiente manera:

$$L(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = \frac{1}{2}((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2) + (q^1)^2 \dot{q}^2$$

Es claro que $L^i = \frac{1}{2}((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2)$ y que $\Delta L = (q^1)^2 \dot{q}^2$.

Como $p_1 = L_{\dot{q}^1} = \dot{q}^1$ y $p_2 = L_{\dot{q}^2} = \dot{q}^2 + (q^1)^2$, la transforma de Legendre $FL : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ está dada por:

$$FL(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = (q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^1 + (q^1)^2)$$

En este sistema de coordenadas tenemos que $\omega = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2$ y

$$\omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial q^2} dq^1 \wedge dq^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial q^1 \partial \dot{q}^2} dq^1 \wedge d\dot{q}^2$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial q^1} dq^1 \wedge d\dot{q}^1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^1} dq^2 \wedge d\dot{q}^1$$

$$+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} dq^1 \wedge d\dot{q}^1 + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^2} dq^2 \wedge d\dot{q}^2$$

Luego, $\omega_L = dq^1 \wedge d\dot{q}^1 + dq^2 \wedge d\dot{q}^2 - 2q^1 dq^1 \wedge dq^2$

Ahora vamos a definir los momentos respecto de ω_L^i, para lo cual vamos a describir los generadores infinitesimales de la acción sobre TQ.

Sea $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Por como actúa $\mathbb{R}^2$ sobre TQ tenemos que

$$\tilde{X}_a = (a_1, a_2, 0, 0) = a_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + a_2 \frac{\partial}{\partial q^2}.$$

Buscamos entonces aplicaciones $J_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $dJ_a = i_{\tilde{X}_a} \omega_L^i$.

$$i_{\tilde{X}_a} \omega_L^i = a_1 d\dot{q}^1 + a_2 d\dot{q}^2 \text{ y } dJ_a = \frac{\partial J_a}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial J_a}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^1} d\dot{q}^1 + \frac{\partial J_a}{\partial \dot{q}^2} d\dot{q}^2,$$

Luego, una posible elección para los momentos es la siguiente:

$$J_a = a_1 \dot{q}^1 + a_2 \dot{q}^2$$

El hamiltoniano de J_a respecto de la estructura simpléctica ω_L está dado por

$$X_{J_a} = \tilde{X}_a - 2q^1 a_2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} - 2q^1 a_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2}$$

Luego,

$$\Delta X_a = -2q^1 (a_2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1} + a_1 \frac{\partial}{\partial \dot{q}^2})$$

Por lo tanto, es evidente que $\omega_L(\Delta X_a, \Delta X_b) =)$ $\forall$ a y $b \in Lie(G)$.

Veamos cual es el cociclo canónico con el que se puede definir una extensión de $Lie(G)$.

Dados $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega(b, a) = \omega_L(\tilde{X}_b, \tilde{X}_a) = -2q_1 a_1 b_2 + 2q^1 b_1 a_2$$

Entonces,

$$\Omega((1,0),(0,1)) = -2q^1.$$

Observemos que si bien el cociclo toma valores en las funciones infinitamente diferenciables sobre TQ, en este caso, resulta ser una función que sólo depende de una de las coordenadas de la base.

4 Órbitas coadjuntas de extensión central pura

En este capítulo vamos a estudiar las órbitas coadjuntas de extensión central pura.

Es sabido que, dado un grupo de Lie G, el método de la órbita coadjunta permite contruir acciones invariantes por la acción de G (ver por ejemplo [3]). Sin embargo, cuando se considera la extensión central de un grupo, sólo las acciones construídas sobre órbitas de extensión central pura resultan de interés físico.

En atención a ésto, estudiaremos las propiedades simplécticas que las caracterizan.

Intentaremos dar una explicación del por qué de la relevancia de éstas órbitas en teorías físicas.

Como ejemplos, consideraremos los casos particularmente interesantes del grupo de loops y el grupo de Virasoro.

4.1 La estructura simpléctica en las órbitas coadjuntas de extensión central pura

Sea G un grupo de Lie y sea Ω un 2-cociclo sobre $Lie(G)$ a valores en $\mathbb{R}$. Consideremos la extensión central $\widetilde{Lie}(G)$ de $Lie(G)$ asociada a este cociclo.

Ω define una 2-forma diferencial ω sobre G que es cerrada etωr´ldinvariante a izquierda dada por

$$\omega_g(X,Y) = \Omega(TL_{g^{-1}}X, TL_{g^{-1}}Y) \;\; \forall\, g \in G \;\text{ y }\; \forall\; X \text{ e } Y \in T_gG$$

ω es invariante a izquierda por construcción y de la condición de que Ω es un 2-cociclo sobre $Lie(G)$ se desprende que ω es cerrada. Luego, (G,ω) es una variedad presimpléctica.

Si $\mathcal{D}$ a un subgrupo conexo de G asociado con el álgebra $Lie(G)$ cocientada por las direcciones degeneradas de ω, ω está bien definida sobre $G/\mathcal{D}$ y $(G/\mathcal{D},\omega)$ es una variedad simpléctica.

Veremos que las órbitas coadjuntas de extensión central pura están íntimamente relacionadas con esta variedad simpléctica.

Recordemos que (ver por ejemplo [6]):

- La acción adjunta de G sobre $\tilde{Lie(G)}$ está dada por:

$$g \cdot (\xi, a) = Ad_g(\xi, a) = (Ad_g\xi, < g^{-1}g', \xi >)$$

  donde $\xi \in Lie(G)$, $a \in \mathbb{R}$ y $g^{-1}g'$ está considerado como un elemento de $\tilde{Lie(G)}^*$ vía alguna identificación de $Lie(G)$ con un subespacio denso de su dual.

- Por derivación se obtiene la acción adjunta de $Lie(G)$ sobre $\tilde{Lie(G)}$:

$$\xi \cdot (\eta, a) = ad_\xi(\eta, a) = ([\xi, \eta], \Omega(\xi, \eta)) \ \forall \ \xi \text{ y } \eta \in Lie(G) \text{ y } \forall \ a \in \mathbb{R}$$

- Si identificamos $\tilde{Lie(G)}^*$ con $\tilde{Lie(G)} \oplus \mathbb{R}$, la acción coadjunta de G sobre $\tilde{Lie(G)}^*$ está definida de la siguiente manera:

$$g \cdot (\phi, a) = \tilde{Ad}_g^*(\phi, a) = (Ad_{g^{-1}}^*\phi + a\sigma(g), a)$$

  donde $\phi \in Lie(G)^*$, $a \in \mathbb{R}$ y $\sigma : G \to Lie(G)^*$ es el 1-cociclo sobre el grupo G que está dado por $< d\sigma(e)(\xi), \eta >= \Omega(\xi, \eta) \ \ \forall \ \xi$ y $\eta \in Lie(G)$.
  Denotaremos con $O^*_{(\phi,a)}$ a la órbita coadjunta de (ϕ, a)

- Diremos que un elemento de $\tilde{Lie(G)}^*$ es de extensión central pura si es de la forma $(0, a)$ con $a \neq 0$.

Supongamos que la acción coadjunta de G sobre $\tilde{Lie(G)}^*$ es propia, de modo que la órbita $O_{(\phi,a)}$ pueda ser identificada con la variedad cociente $G/E_{(\phi,a)}$, siendo $E_{(\phi,a)}$ el subgrupo de isotropía correspondiente al elemento (ϕ, a).

Recordemos que la estructura simpléctica canónica de la órbita $O^*_{(\phi,a)}$ está dada por la forma de Kirillov-Kostante-Souriau :
$\forall \ (\xi_1, c_1), (\xi_2, c_2) \in T_{(\Phi,\lambda)}O^*_{(\Phi,\lambda)}$

$$\Sigma_{(\Phi,\lambda)}((\xi_1, c_1), (\xi_2, c_2)) =$$

$$- < (\Phi, \lambda), ([\xi_1, \xi_2], \omega(\xi_1, \xi_2) >=$$

$$- < \Phi, [\xi_1, \xi_2] > + \lambda\omega(\xi_1, \xi_2)$$

En la proposición que sigue estableceremos la relación entre las órbitas de elementos de extensión central pura y la variedad simpléctica $(G/\mathcal{D}, \omega)$.

Proposición. 4.1 *Sea G un grupo de Lie y $\tilde{Lie}(G)$ una extensión central del álgebra $Lie(G)$ asociada al cociclo $\Omega \in H^2(Lie(G), \mathbb{R})$.*

Sea ω la 2-forma invariante a izquierda definida por Ω y $\mathcal{D}$ el conjunto de sus direcciones degeneradas sobre G. Entonces, las órbitas correspondientes a elementos de extensión central pura con la estructura de Kirilov-Kostant-Souriau son simplécticamente isomorfas a la variedad $(G/\mathcal{D}, \omega)$ vía

$$Ad^* : (G/\mathcal{D}, \omega) \to O^*_{(0,a)}.$$

Demostración.

Sea un elemento de extensión central pura $(0, a)$.

La estructura simpléctica sobre su órbita está dada por $\Sigma_{(0,a)}$ o, equivalentemente, por ω.

Como $\Sigma_{(0,a)}$ es no degenerada, es claro que el álgebra del subgrupo de isotropía $E_{(0,a)}$ está identificado con $\mathcal{D}$ y por lo tanto, la órbita $O^*_{(0,a)}$ puede ser identificada con la variedad $G/\mathcal{D}$.

Además, es obvio que esta identificación es a nivel simpléctico. □

Lo que haremos ahora es establecer una condición necesaria y suficiente para que estas órbitas coadjuntas de extensión central pura sean las únicas que tienen esta propiedad.

Sea $Lie'(G)$ el álgebra derivada de $Lie(G)$, es decir

$$Lie'(G) = \{[\xi, \eta] \ / \ \xi \ \text{ y } \ \eta \in Lie(G)\}$$

Proposición. 4.2 *Si dado $\phi \in Lie(G)^*$ se verifica que*

$$\phi|_{Lie'(G)} \equiv 0 \Rightarrow \phi \equiv 0$$

entonces las únicas órbitas coadjuntas de la acción de G sobre $Lie(G)^*$ que con la estructura de Kirillov-Kostant-Souriau se identifican a nivel simpléctico con la variedad $(G/\mathcal{D}, \omega)$ son las de extensión central pura.

Demostración.

Es evidente a partir de la expresión de la forma de Kirillov-Kostant-Souriau sobre la órbita en la extensión:

$$\Sigma_{(\phi,a)}((\xi_1, c_1), (\xi_2, c_2)) = - < \Phi, [\xi_1, \xi_2] > + \lambda\omega(\xi_1, \xi_2)$$

$\square$

Observación. 4.3 *Sea $(\phi, a) \in Lie(G)^*$ cualquier otro elemento que verifica la propiedad que su subgrupo de isotropía está identificado con $\mathcal{D}$ y que por lo tanto su órbita $O^*_{(\phi,a)}$ está identificada como variedad con la variedad cociente $G/\mathcal{D}$.*

La estructura de Kirillov-Kostant-Souriau sobre esta órbita no está dada por la forma ω pero sí por una forma inducida por un cociclo cohomólogo a Ω dado por

$$\Omega'(\xi, \eta) = - < \phi, [\xi, \eta] > + a\Omega(\xi, \eta).$$

En los casos de interés físico que estudiaremos después se verifica que si ϕ es constante entonces $E_{(\phi,a)} \sim \mathcal{D}$.

Observación. 4.4 *Es claro que la condición de la proposición 4.2 no siempre se verifica. Por ejemplo, es obvio que si G es abeliano, entonces $Lie'(G) = \{0\}$ y por lo tanto $\phi|_{Lie'(G)} = 0 \ \forall \ \phi \in Lie(G)^*$.*

A continuación vamos a considerar dos ejemplos de interés en física en los cuales la condición de la proposición 4.2 se verifica.

4.1.1 El grupo de loops LG

El primer ejemplo que consideraremos es el de el grupo de loops LG. Su álgebra de Lie está íntimamente relacionada con el álgebra de corrientes a tiempo fijo de teorías cuánticas anómalas en dos dimensiones (ver por ejemplo [12]).

Sea LG el espacio de las aplicaciones infinitamente diferenciables de S^1 en un grupo de Lie conexo y compacto G considerado como grupo con el producto punto a punto.

Su álgebra de Lie se puede identificar con el espacio $L\mathrm{g}$ (siendo g el álgebra de Lie del grupo G) considerado con el corchete también definido punto a punto. Es decir,

$$[\xi,\eta](\theta)=[\xi(\theta),\eta(\theta)] \quad \forall\, \xi,\eta \in L\mathrm{g} \;\text{ y }\; \forall\, \theta \in S^1.$$

Consideremos el 2-cociclo Ω sobre $L\mathrm{g}$ dado por:

$$\Omega(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \xi(\theta),\eta'(\theta) > d\theta$$

donde $<,>$ denota la forma de Killing sobre g .

Observación. 4.5 *Un hecho importante sobre este cociclo Ω es que es invariante por la acción del grupo de los difeomorfismos del círculo que preservan la orientación.*

La acción $Diff^+(S^1)$ sobre $L\mathrm{g}$ está definida como $(f,\xi) \to f^*\xi$ donde $(f^*\xi)(\theta)=\xi(f(\theta))$ y se puede verificar que

$$\forall\, \theta \in S^1 \quad \Omega(f^*\xi,f^*\eta)=\Omega(\xi,\eta) \quad \forall\, f \in Diff(S^1)^+.$$

También es importante notar que Ω es invariante bajo la conjugación de loops constantes; es decir, $\Omega(\xi,\eta)=\Omega(\gamma\cdot\xi,\gamma\cdot\eta)$ donde $\gamma\cdot\xi$ denota la acción adjunta de γ sobre ξ.

Observación. 4.6 *En el caso de que* g *sea un álgebra semisimple, todos los 2-cociclos invariantes sobre* Lg *a valores en* $\mathbb{R}$ *son de ésta forma;es decir, se definen a partir una una forma bilineal simétrica e invariante* $<,>$ *sobre* g .

Como ya dijimos Ω define una 2-forma cerrada e invariante a izquierda sobre LG. En la siguiente proposición caracterizaremos las direcciones degeneradas de ω.

Proposición. 4.7 *Las direcciones degeneradas de* ω *sobre* LG *corresponden al subgrupo de* G *formado por los loops constantes.*

En consecuencia, la variedad cociente $\Omega G = LG/G$ *admite a* ω *como estructura simpléctica.*

Demostración.

Es evidente que si ξ o η son constantes, $\omega(\xi,\eta) = 0$, y por lo que mencionamos antes sobre la invarianza de ω respecto de la conjugación por loops constantes, tenemos que ω define una 2-forma cerrada e invariante sobre la variedad cociente $\Omega G = LG/G$.

Por otro lado, si ξ es un elemento no nulo del espacio tangente a ΩG en la identidad, Ωg $= L$g /g , se puede obtener un elemento $\eta \in \Omega$g tal que $\omega(\xi,\eta) \neq 0$.

Tomando $\eta = \xi' \in \Omega$g , tenemos que

$$\Omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \xi'(\theta), \xi'(\theta) > d\theta \neq 0$$

Por lo tanto, el conjunto de direcciones degeneradas de ω sobre LG puede ser identificado con el subgrupo G de los loops constantes.

Luego, $(\Omega G, \omega)$ es una variedad simpléctica. □

Consideremos la extensión central $\tilde{L\text{g}}$ de Lg representada por este cociclo Ω y las acciones de LG sobre $\tilde{L\text{g}}$ y su dual. La identificación entre Lg y Lg * es la canónica entre un espacio vectorial y su dual.

Como ya vimos, la órbita coadjunta correspondiente a un elemento de extensión central pura $(0,a)$ está identificada con ΩG a nivel simpléctico.

La siguiente proposición nos garantiza además que se verifica la condición necesaria y suficiente para que éstas sean las únicas órbitas con esta propiedad.

Proposición. 4.8 *Las órbitas coadjuntas de extensión central pura son las únicas órbitas coadjuntas simplécticamente isomorfas a* $(\Omega G, \omega)$ *si bfg es semisimple.*

Demostración.

Como g es semisimple y el corchete en $L\mathrm{g}$ está definido punto a punto, el álgebra derivada de $L\mathrm{g}$ coincide con $L\mathrm{g}$ y por lo tanto la condición necesaria y suficiente establecida en la proposición 4.2 se verifica trivialmente. □

Ahora vamos a estudiar las órbitas coadjuntas para encontrar alguna caracterización de aquellos elementos $(\phi, a) \in \tilde{L\mathrm{g}}^*$ para los cuales $E_{(\phi,a)}$ es difeomorfo a $\mathcal{D}$.

La acción coadjunta de LG sobre $\tilde{L\mathrm{g}}^*$ está dada por:

$$\gamma \cdot (\phi, a) = (\gamma \cdot \phi + a\gamma^{-1}\gamma', a)$$

donde $\gamma \cdot \phi$ denota la acción coadjunta de LG sobre $L\mathrm{g}^*$ y $\gamma^{-1}\gamma' = \sigma(\gamma)$ se piensa como un elemento de $L\mathrm{g}^*$.

A cada elemento $(\phi, a) \in \tilde{L\mathrm{g}}^*$ con $a \neq 0$, se le puede asociar una única función $f : \mathbb{R} \to G$ que es solución de la ecuación diferencial $f'f^{-1} = -a^{-1}\phi$ con la condición inicial $f(0) = 1$. Estas funciones son útiles para describir los subgrupos de isotropía ya que se puede probar que

$$\gamma \in E_{(\phi,a)} \text{ si y sólo si } \gamma(\theta) = f(\theta)\gamma(0)f(\theta)^{-1}$$

siendo f la única función con las características mencionadas antes que está asociada a (ϕ, a).

Proposición. 4.9 *El subgrupo* $E_{(\phi,a)}$ *se identifica con* G *si y sólo si la* f *asociada a* (ϕ, a) *toma valores en el centro de* G.

Demostración.

$$E_{(\Phi,\lambda)} = \{\gamma \in LG/\gamma(\theta) = f(\theta)\gamma(0)f(\theta)^{-1}\}$$

Luego, $f(\theta) \in Centro(G)\ \forall\ \theta \in S^1$ si sólo si $\gamma(\theta) = \gamma(0)\ \forall\ \theta \in S^1$. En otras palabras, f toma valores en el $Centro(G)$ si y sólo si $E_{(\Phi,\lambda)} = G$. □

Corolario. 4.10 *Si ϕ es constante, $E_{(\phi,a)} \sim G$ y entonces, $O^*_{(\phi,a)} \sim \Omega G$ y la estructura simpléctica de Kirillov-Kostant-Souriau sobre $O^*_{(\phi,a)}$ está representada por un 2-cociclo cohomólogo a Ω.*

4.1.2 El grupo de Virasoro

Ahora vamos a estudiar el grupo $G = Diff^+(S^1)$ de difeomorfismos de S^1 que preservan la orientación. Su álgebra de Lie, el espacio de los campos vectoriales sobre S^1, puede ser identificado con el espacio de funciones de variable real de período 1 con el corchete definido como $[u,v] = uv' - u'v$.

El álgebra de Virasoro, de gran importancia en teorías conformes en dos dimensiones, es la extensión central de $Lie(G)$ asociada al 2-cociclo Ω sobre $Lie(G)$ a valores en $\mathbb{R}$ dado por

$$\Omega(u,v) = \int_0^1 u'(x)v''(x)dx$$

Estudiemos el subgrupo $\mathcal{D}$ asociado a las direcciones degeneradas de la 2-forma ω sobre G.

Proposición. 4.11 *$\mathcal{D}$ se identifica con el subgrupo S^1 considerado como el subgrupo de $Diff^+(S^1)$ formado por las rotaciones rígidas sobre S^1.*

Demostración.

Es claro que el álgebra de Lie del subgrupo de rotaciones rígidas es

$$\{u \in Lie(G) \ / \ u \text{ es constante}\}$$

Si $u \in Lie(G)$ es constante es obvio que u es una dirección degenerada de la forma ω.

Supongamos que u no es constante y calculemos $\omega(u, u')$

$$\omega(u, u') = \int_0^1 u'(x)u'''(x)dx =$$

$$u'(x)u'(x)|_0^1 - \int_0^1 u''(x)u''(x)dx = -\int_0^1 u''(x)^2 dx \neq 0$$

dado que $u'' \neq 0$ porque u' no es constante debido a la periodicidad de u.

□

La identificación entre $\tilde{Lie(G)}$ y su dual para escribir las acciones adjunta y coadjunta está dada vía del producto interno sobre $\tilde{Lie(G)}$ dado por

$$< (u, a), (v, b) >= ab + \int_0^1 u(x)v(x)dx \quad \forall \ u, v \in Lie(G) \text{ y } \forall \ a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

Ya sabemos que las órbitas coadjuntas de extensión central pura se identifican simplécticamente con $(Diff^+(S^1)/S^1, \omega)$ vía Ad^*. Veremos que en este caso también se verifica que éstas son las únicas órbitas con esta particularidad.

Witten caracteriza las órbitas coadjuntas y establece lo siguiente:

Proposición. 4.12

$E_{(\phi,a)} \sim S^1$ si sólo si ϕ es constante tal que $\phi \neq \dfrac{-an}{48\pi} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

Así , pues, debemos buscar órbitas simplécticamente isomorfas a la variedad $(Diff^{+}(S^1)/S^1, \omega)$ sólo entre las de elementos de la forma (ϕ, a) con ϕ constante, ya que las otras no son difeomorfas con $Diff^{+}(S^1)/S^1$ como variedades diferenciales.

Proposición. 4.13 *$O^{*}_{(0,a)}$ son las únicas órbitas coadjuntas simplécticamente isomorfas con $(Diff^{+}(S^1)/S^1, \omega)$ vía Ad^{*}.*

Demostración.

Sea ϕ constante tal que $\phi \neq 0$. Vamos a encontrar un elemento del álgebra derivada de $Lie(G)$ en el cual ϕ no se anule.

Consideremos $u \in Lie(G)$ tal que u no es constante. Por lo tanto, $u' \neq 0$ y como la derivada de una función de período 1 también es de período 1, podemos calcular $< \phi, [u, u'] >$.

$$< \phi, [u, u'] > = -2\phi \int_0^1 u'(x)u'(x)dx = -2\phi < u', u' > \neq 0.$$

Entonces, $\Sigma_{(\phi,a)} \neq a\omega$. Es decir, $O^{*}_{(\phi,a)}$ no puede identificarse simplécticamente con $(Diff^{+}(S^1)/S^1, \omega)$. □

Bibliografía

[1] Abraham R. and Marsden J.E. "Foundations of Mechanics", Benjamim Cummings Reading, 1978.

[2] Cariñena J.F. and Ibort L.A. "Noncanonical groups of transformations, anomalies and cohomology", J.Math.Phys. 29 (3), 541-545, 1988.

[3] Delius G.W. and van Nieuwenhuizen P. "The method of coadjoint orbits: an algorithm for the construction of invariant actions", International Journal of Modern Phusics A, Volumen 5, Nro.20, 3943-3983, 1990.

[4] Inamoto T. "Symplectic structures in the chirally gauged Wess- Zumino-Witten model", Physical Review D, Volumen 45, Nro.4, 1276-1290, 1992.

[5] Mickelsson J. "Current Algebras and groups", Plenum Press. New York and London, 1989.

[6] Pressley A. and Segal G. "Loop groups", Oxford University Press, Oxford, 1988.

[7] Weinstein A. "Lectures on Symplectic manifolds", Conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics, Nro.29.

[8] Woodhouse N.M.J. "Geometric Quantization", Claredon Press Oxford, 1992.

[9] Fernández J. and Zuccalli M. "On Lie algebra extensions in a symplectic framework", J.Math.Phys. 38 (7), 1997.

[10] Alekseev A., Madaichik Y., Faddeev L.D.and Shatashvili S.L. "Derivation of Anomalous Commutador in the Functional Integral Formalism", Theor. and Math. Phys. 73, 1149 - 1151, 1987.

[11] Faddeev L.D. and Slavnov A.A. "Gauge fields, an introduction to quantum theory" (2nd. ed.), Addison - Wesley, 1986.

[12] De Azcárraga J.A. and Izquierdo J.M. "Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in Physics", Cambridge University Press, 1995.

[13] Glim J. and Jaffe, A. "Quantum Physics", Second Edition, Springer, 1987.