UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tesis Doctoral

EL GRUPO DE WEYL Y LA ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DE LA ORBITA DE SIMILARIDAD DE UNA ESPERANZA CONDICIONAL

MARTIN ARGERAMI

1998

Director: Dr. Demetrio Stojanoff

Codirector: Dr. Oscar Barraza

A mis padres.
A Romina.

Agradecimientos

Deseo agradecer especialmente a Demetrio Stojanoff, por haberme dado la oportunidad de trabajar con él y haber dedicado tantas horas, con tanta paciencia, a formarme. A Gustavo Corach, por haberme iniciado en la investigación, y haberme apoyado en diversas oportunidades, y a Esteban Andruchow, por muchos consejos valiosos que me fueron de gran ayuda.

También quiero agradecerle a Alejandro Varela por haberme permitido utilizar material de su tesis doctoral, lo que me ayudó en gran medida a preparar los capítulos introductorios.

Un lugar muy importante en mis agradecimientos lo ocupa el Departamento de Matemática como un todo, ya que es el lugar en el que recibí mi formación de grado, y luego el lugar donde he desarrollado mi trabajo de investigación, que no hubiera sido posible sin el apoyo e incentivo recibido en ese entorno.

A mis padres, por todo lo que me dieron y cómo se brindaron y me apoyaron siempre en todo lo que hice.

Finalmente, quiero agradecer a la persona que más me importa en el mundo: Romina, la compañera de mi vida, sin la cual muchas cosas no tendrían sentido para mí. A ella, junto con mis padres, está dedicada esta tesis.

Contents

Chapter 1

Introducción

1.1 Un poco de historia: álgebras de von Neumann y teoría del índice

Respondiendo a necesidades generadas por el nacimiento de la mecánica cuántica en la década de 1920, J. von Neumann publicó entre 1936 y 1944, junto con F. J. Murray, cuatro trabajos fundamentales llamados "On rings of operators" ([MvN-1, MvN-2, vN-3, MvN-4]), que sentaron la base de lo que más adelante (a instancias de Dixmier, en la década de 1950) se llamó la teoría de álgebras de von Neumann .

Un álgebra de von Neumann es una *-subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ (los operadores acotados en un espacio de Hilbert H) que es cerrada con la topología débil de operadores. Un clásico teorema de von Neumann, el "Teorema del Doble Conmutante" (2.1.1), prueba que se puede caracterizar a las álgebras de von Neumann como las *-subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ que son iguales a su doble conmutante.

Con mucha frecuencia se estudian ciertas álgebras particulares, llamadas *factores*, que son aquellas cuyo centro es trivial ($A \cap A' = \mathbb{C}$), ya que pueden ser tratadas de un modo más sencillo, y von Neumann mismo probó que toda álgebra de von Neumann puede ser descompuesta como una "integral directa" de factores.

Von Neumann realizó una clasificación de los factores en tipos I, II y III, según tengan proyecciones minimales, finitas o todas infinitas. Para esto desarrolló una "teoría de comparación de proyectores" (Sección 2.2).

Una clase de factores muy fáciles de manipular son aquellos pueden ser aproximados por una sucesión creciente de subálgebras de dimensión finita (y por ende de tipo I_n, $n < \infty$). A estos factores se los llama *hiperfinitos* o AFD ("almost finite dimensional"). Los factores hiperfinitos de tipo I se clasifican sin dificultad. En el último trabajo ([MvN-4]) aparece la demostración de la unicidad del factor II_1 hiperfinito.

La clasificación de los factores AFD de tipo III quedó como problema abierto hasta 1973. Ya en 1967, Powers probó que, a diferencia del caso II_1, hay infinitos factores de tipo III AFD no isomorfos. Finalmente A. Connes, en 1973 ([C]), realizó una clasificación más fina que la de von Neumann, en la que los factores AFD de tipo III se subdividen en clases III_λ, $0 \leq \lambda \leq 1$. Para estos resultados fue vital la teoría de las álgebras modulares de Tomita, publicada por M. Takesaki ([TT], ver sección 2.5), que permitió por primera vez el estudio en detalle de los factores de tipo III. Esta clasificación le mereció al Dr. Connes la medalla Fields.

El caso II_∞ fue resuelto por el mismo Connes en 1976, y el caso III_1, el último, fue resuelto por Haagerup en 1985, basado en resultados previos de Connes.

Luego en la década de 1980, surgió la "teoría del índice". En 1983, V. Jones publicó un trabajo ([J1]) en el que definía un invariante para inclusiones $N \subseteq M$ de factores de tipo II_1, conocido desde entonces como el *índice de Jones*, $[M : N]$. Este índice presenta notables similitudes con el índice de subgrupos en sus propiedades e incluso, si N es un factor II_1 y $H \subset G$ son grupos de automorfismos de N y $(G : H)$ es el índice de H como subgrupo de G, entonces

$$[N \rtimes G : N \rtimes H] = (G : H).$$

Lo más llamativo del trabajo de Jones es que probó que el conjunto de valores posibles del índice es

$$\{4\cos^2\frac{\pi}{n} : \ n \geq 3\} \cup [4, \infty]$$

y construyó explícitamente ejemplos que realizan todos los valores.

La aplicación de algunas de las herramientas utilizadas por Jones para probar las restricciones de los valores del índice fueron utilizadas por él mismo y por otros para construir invariantes para la teoría de nudos que lo condujeron a recibir la medalla Fields.

Este trabajo dejó gran cantidad de problemas abiertos relacionados con las inclusiones de factores, y desde entonces se han sucedido los trabajos avanzando sobre estos problemas (Jones, Popa, Ocneanu, Kosaki, Watatani, Havet, Jollisant, Wassermann, Bisch, Hiai, Izumi, Kawahigashi, Longo, entre los más destacados). En 1985, H. Kosaki extendió la definición del índice a factores arbitrarios, y luego Watatani ([W]) por una parte, para álgebras C*, y Baillet, Denizeau y Havet ([BDH]) por la otra para álgebras de von Neumann, extendieron la definición a álgebras arbitrarias (no factores), basándose en gran medida en el trabajo de Pinsmer y Popa ([PP]). Es también interesante una definición alternativa del índice en el caso de factores infinitos debida a Longo ([L1]), basada en la relación de la teoría de inclusiones de factores con la Mecánica Estadística. Esta teoría de Longo se presenta y se extiende en la sección 3.3.

1.2 Geometría Diferencial en Algebras de Operadores

A mediados de la década de 1980, se inició una fructífera colaboración entre H. Porta y L. Recht, a quienes pronto se les sumó G. Corach, en la que atacaron una aproximación a la teoría de álgebras de operadores desde el punto de vista de la geometría diferencial. Más tarde se fueron uniendo a este proyecto varios investigadores, como D. Stojanoff, E. Andruchow, A. Maestripieri, A. Varela. Se obtuvieron resultados de caracterización, en función de la estructura geométrica, de propiedades algebraicas de álgebras de von Neumann y C* (ver, por ejemplo, [ACS]), y aún se continúan hallando diversas generalizaciones y aplicaciones. De esa línea participa este trabajo.

Este desarrollo geométrico alcanzó una cúspide en los trabajos [MR] y [ACS], ya que en ellos se unificó, por una parte, la teoría de Espacios Homogéneos Reductivos de dimensión infinita, y por la otra gran parte de los ejemplos previos (citados en la introducción y la bibliografía de [ACS]) como casos particulares de un ejemplo más general (el espacio de representaciones de un álgebra de von Neumann o C* sobre un espacio de Hilbert fijo). A partir de ese momento, la tarea se concentró, y se concentra aún, en la obtención de aplicaciones de la teoría, en base a extenderla a otros contextos (por ejemplo, la relación entre la estructura geométrica y los invariantes de la topología algebraica) y profundizando la relación entre los conceptos geométricos y los puramente algebraicos de la teoría clásica.

1.3 Contexto del trabajo

Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , y $E : M \to N$ una esperanza condicional (para la definición, ver Sección 3.1). Sea G_M el grupo de invertibles y $\mathcal{U}_M$ el de unitarios del álgebra M. Consideremos la acción L de G_M sobre la esperanza E dada por

$$L_g(E) = gE(g^{-1} \cdot g)g^{-1}.$$

Llamamos I_E a la isotropía de la acción,

$$I_E = \{g :\in G_M : L_g(E) = E\}.$$

En [AS2], [ALRS] y [LR] se relacionaron algunos problemas de la teoría de espacios homogéneos reductivos con la teoría del índice de esperanzas condicionales ([BDH], [Ha], [FK]).

Las órbitas unitaria y de similaridad

$$\mathcal{O}_E = \{L_u(E) : u \in \mathcal{U}_M\}$$

y

$$\tilde{\mathcal{O}}_E = \{L_g(E) : g \in G_M\}$$

de una esperanza condicional han sido consideradas ya en los trabajos [AS2, LR], donde se define su estructura de variedad diferenciable. Pero en ambos casos fijando hipótesis restrictivas sobre el conmutante relativo $N' \cap M$; en el caso de [AS2] se supuso que $N' \cap M \subseteq N$, y en el caso de [LR], se tomó una hipótesis infinitesimal sobre las derivaciones del álgebra, que se puede probar que es equivalente a la hipótesis de Andruchow y Stojanoff sobre el conmutante relativo. Consideremos el proyector de Jones e asociado a E (Definición 3.2.3). Es un proyector autoadjunto en el álgebra M_1 (Definición 3.2.6), la extensión de M por N y E. Utilizando la hipótesis antes mencionada, se prueba en [AS2] que la órbita unitaria

$$\mathcal{U}_M(e) = \{ueu^* : u \in \mathcal{U}_M\} \subseteq M_1$$

es un revestimiento de la órbita unitaria $\mathcal{O}_E$. En este trabajo removemos dicha hipótesis y mostramos que aún así se puede construir una estructura diferenciable de espacio homogéneo para la órbita (Sección 6.1), y en cierto modo caracterizar el caso en que la órbita admite una estructura reductiva (Sección 6.3). Probamos además que se conserva la estructura de revestimiento (sección 6.2). La fibra de este revestimiento es un grupo discreto, que llamamos el grupo de Weyl $W(E)$ de la esperanza E. El estudio de este grupo de Weyl es el tema principal de esta tesis.

A continuación presentaremos la teoría previa a la definición del grupo de Weyl. Denotemos por $\mathcal{N}_E$ el grupo

$$\mathcal{N}_E = \{ \ u \in \mathcal{U}_M \ : \ E(uxu^*) = uE(x)u^*, x \in M \ \},$$

llamado el *normalizador* de E. El grupo $\mathcal{N}_E$ ha sido estudiado, entre otros autores, por A. Connes ([C]) y H. Kosaki ([Ko2]) en relación con inclusiones de productos semidirectos.

El interés geométrico por las órbitas unitarias y de similaridad de una esperanza condicional nace de que en ellas se pueden modelar espacios homogéneos reductivos. El grupo de isotropía para la acción L en E es el grupo $\{u \in \mathcal{U}_M : L_u(E) = E\}$, que es exactamente el normalizador $\mathcal{N}_E$. En el caso general la órbita $\mathcal{U}_M(e)$ es un fibrado sobre la órbita $\mathcal{O}_E$ de E via la fórmula

$$(ueu^*) \ m \ (ueu^*) = L_u E(m)(ueu^*) \quad \text{para} \quad m \in M \ \text{ y } \ u \in \mathcal{U}_N,$$

que da lugar a la aplicación $\Psi : \mathcal{U}_M(e) \to \mathcal{O}_E$ dada por $\Psi(ueu^*) = L_u(E)$. En [AS2] se prueba que la órbita $\mathcal{U}_M(e)$ es una subvariedad de la órbita completa de e en M_1, si y sólo si el índice de E es finito (ver la definición de índice en la Sección 3.2).

En esta tesis caracterizamos las componentes conexas del grupo $\mathcal{N}_E$ y del grupo de los proyectores de Jones para E:

$$\mathcal{P}(E) = \{ueu^* : u \in \mathcal{N}_E\},$$

en términos de los elementos unitarios del centralizador de E ([CD], [Ha]):

$$M_E = \{x \in N' \cap M \ : \ E(xm) = E(mx) \ \text{ para todo } \ m \in M\}.$$

En efecto, la componente conexa de 1 en $\mathcal{N}_E$ es el grupo

$$H_E = \mathcal{U}_N \cdot \mathcal{U}_{M_E} = \{vw : v \in \mathcal{U}_N \ \text{ y } \ w \in \mathcal{U}_{M_E}\},$$

y la componente conexa de e en $\mathcal{P}(E)$ es la subórbita de $\mathcal{U}_M(e)$ definida por la acción de H_E:

$$\mathcal{U}_{H_E}(e) = \{ueu^* : u \in H_E\}$$

(Proposición 5.1.6 y Teorema 5.1.21). Además, $\mathcal{U}_{H_E}(e)$ es un subgrupo normal de $\mathcal{P}(E)$.

Ahora estamos en condiciones de definir el grupo de Weyl de la esperanza condicional E:

$$W(E) = \mathcal{P}(E)/\mathcal{U}_{H_E}(e) \simeq \mathcal{N}_E/H_E. \tag{1.3.1}$$

El grupo de Weyl $W(E)$ de E nos brinda valiosa información sobre la relación entre $\mathcal{U}_N$ y $\mathcal{N}_E$, que es necesaria para poder estudiar la geometría de la órbita $\mathcal{O}_E$. En particular, el paso clave para definir la estructura diferenciable de $\mathcal{O}_E$ es verificar que el grupo H_E (y por lo tanto $\mathcal{N}_E$) es un subgrupo de Lie de $\mathcal{U}_M$ (Proposición 6.1.3).

Como ya hemos mencionado, puede construirse también un revestimiento sobre $\mathcal{O}_E$ con fibras $W(E)$ sin la hipótesis $N' \cap M \subseteq N$ (Sección 6.2). En el caso en que M es un factor, el revestimiento es universal y, en consecuencia, el grupo fundamental de la órbita $\mathcal{O}_E$ es el grupo de Weyl. Esta última conclusión es muy reciente y por eso se incluye sólo a título informativo [AAS].

El grupo de Weyl $W(E)$ no es bueno como invariante en cuanto a clasificar las inclusiones $N \subseteq M$. Por ejemplo, $W(E)$ es trivial cuando N y M son factores II_1 con $\mathrm{Ind}E < 4$ (Ejemplo 5.2.6).

Sin embargo, en el caso de índice finito, la construcción báscia iterada (Sección 3.2.2) produce una torre de álgebras

$$N \subseteq M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

con esperanzas condicionales de índice finito $E_n \in E(M_n, M_{n-1})$, para $n \geq 1$. Considerando $F_n \in E(M_n, N)$ dada por $F_n = E \circ E_1 \circ \ldots \circ E_n$, obtenemos una torre de grupo de Weyl finitos (Proposición 5.1.9)

$$W(E) = W(F_0) \subseteq W(F_1) \subseteq W(F_2) \subseteq \ldots \subseteq W(F_n) \subseteq \ldots$$

que sí creemos que puede ser un rico invariante para la inclusión $N \subseteq M$ y la esperanza E. Las inclusiones $N \subseteq M_n$ no verifican en general que $N' \cap M_n \subseteq N$. Entonces, para estudiar la torre de grupos necesitamos conocer las propiedades del grupo de Weyl para inclusiones $N \subseteq M$ que no verifican que $N' \cap M \subseteq N$, que es el caso que consideramos en nuestro trabajo. La aplicación de los resultados de este trabajo en cuanto a estudiar la torre de grupos de Weyl no figura en esta tesis por ser aún materia de trabajo.

Cuando M es el producto semidirecto de N por un grupo propiamente exterior de automorfismos G, entonces $G \subseteq W(E)$. Los dos grupos son isomorfos cuando G es finito y N es un factor.

Si $\text{Ind}E < \infty$ y $\dim(\mathcal{Z}(N)) < \infty$ entonces $W(E)$ es finito (Teorema 5.1.28). Además, si N es un factor mostramos (Teorema 5.1.29) que, si $|W(E)|$ denota el orden de $W(E)$, entonces

$$|W(E)| \leq \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(\text{Ind}_{BDH}(E))\} = \|\text{Ind}_{BDH}(E)^{-1}\|^{-1},$$

donde $\text{Ind}_{BDH}(E)$ es el índice de E a valores operadores definido en la Sección 3.2. También obtenemos cotas óptimas para $|W(E)|$ en términos de $\text{Ind}E$ y $\dim(\mathcal{Z}(N))$ (Teorema 5.1.32).

Se calculan el grupo de Weyl y el normalizador $\mathcal{N}_E$ de E en varios ejemplos de esperanzas condicionales E. Mencionamos brevemente algunos de ellos:

1. (Ejemplo 5.2.5) Sea $\mathcal{R}$ un factor, y consideremos la inclusión

$$N = \mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}^{n\times n} = M,$$

donde la esperanza condicional E actúa por "compresión a la diagonal". Entonces $W(E)$ es el grupo $\mathcal{S}_n$ de permutaciones de n elementos.

2. (Ejemplo 5.2.2) Sea N un factor y consideremos ahora la inclusión

$$N \subseteq M = N^{n\times n},$$

con la esperanza condicional dada por la "traza a valores operadores". Entonces $W(E)$ consiste de un único elemento y el normalizador de E puede ser descripto como

$$\mathcal{N}_E = \{(n.a_{ij})_{ij} \;:\; n \in \mathcal{U}_N \;\text{ y }\; (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n} \;\text{ es unitario}\}.$$

3. (Ejemplo 5.2.3) Tomemos un álgebra de von Neumann N y un grupo discreto G de automorfismos exteriores y libres de N, y consideremos el producto semidirecto $M = N \times G$, con la esperanza condicional canónica. Entonces $G \subseteq W(E)$. En general $W(E)$ es más grande que G, inclusive cuando G es finito. Sin embargo, cuando G es finito y N es un factor, tenemos que $G \simeq W(E)$.

4. (Ejemplo 5.2.6) Sean $N \subseteq M$ factores II_1 y $E \in E(M, N)$ con $\mathrm{Ind}E < 4$. Entonces

   (a) Si el grafo principal no es de tipos A_3 ni D_4, entonces $W(E)$ es trivial.

   (b) Si $\mathrm{Ind}E = 2$ y el grafo principal es de tipo A_3, entonces $W(E) = \mathbb{Z}_2$.

   (c) Si $\mathrm{Ind}E = 3$ y el grafo principal es de tipo D_4, entonces $W(E) = \mathbb{Z}_3$.

5. (Sección 5.3) Si L es el álgebra de von Neumann generada por N y $\mathcal{N}_E$, entonces el grupo de Weyl de la esperanza E restringida a L coincide con el grupo de Weyl de E. Sin embargo, el grupo de Weyl de la esperanza E_L que "descompone" a E como $E = E|_L \circ E_L$, puede no ser trivial.

6. (Sección 5.4) Si M es un factor, G es un grupo propiamente exterior de automorfismos de M, y $N = M^G$, el álgebra fija por G, con E_G la esperanza condicional canónica, entonces el grupo de Weyl $W(E_G)$ es isomorfo a $\hat{G}$, el grupo dual de G.

Para culminar, hacemos una breve síntesis del contenido de los capítulos. En los capítulos 2 y 4 se introducen los aspectos y resultados necesarios de las teorías de Algebras de von Neumann y Subvariedades Diferenciables en Espacios de Banach respectivamente. En el capítulo 3 se introduce la teoría del índice de Jones y se hace hincapié en la extensión de dicha teoría a factores propiamente infinitos y semifinitos de R. Longo ([L1]), que puede probarse equivalente a la teoría clásica (Teorema 3.3.19). Se muestra asimismo un ejemplo en que la teoría mencionada no se aplica (Ejemplo 3.3.20).

En el capítulo 5 se desarrolla el estudio del grupo de Weyl (en gran parte publicado en [ArS]), se prueba que el grupo es el mismo tanto para la órbita de similaridad como para la unitaria, se presenta el álgebra intermedia L y se la caracteriza; se analiza en particular el caso en que N es la subálgebra fija de M por la acción de un grupo de automorfismos propiamente exteriores.

En el capítulo 6 se estudia la estructura diferenciable de la órbita de similaridad de una esperanza condicional. En este capítulo se incluyen algunos resultados que son materia de trabajo al momento de escribir esto y que aparecerán publicados en [AAS]. Los aportes originales de esta tesis están contenidos en estos dos últimos capítulos, y en la Sección 3.3.

Chapter 2

Algebras de von Neumann y Teoría Modular

En este capítulo introduciremos algunos conceptos generales de álgebras de von Neumann y teoría modular de Tomita–Takesaki que son necesarios para la comprensión del trabajo. Omitiremos las pruebas de la mayoría de los resultados, ya que se encuentran en la bibliografía. Las principales referencias clásicas en las que se puede encontrar el material al que nos referimos son los libros de J. Dixmier, "von Neumann Algebras" ([D]), de R.V. Kadison y J.R. Ringrose, "Fundamentals of the theory of operator algebras", Vol. I, II ([KR]), y de V.S. Sunder, "An invitation to von Neumann algebras" ([Sun]). Para la exposición se ha seguido mayormente a V. Jones ([J2]).

2.1 Topologías en $\mathcal{B}(H)$, álgebras de von Neumann, factores

Todo el contenido de este capítulo ha sido escrito pensando en el lector a quien no le son familiares las álgebras de von Neumann, con el objeto de intentar familiarizarlo con las construcciones y teoremas clásicos del área. Es por esto que trataremos de ser especialmente didácticos en la exposición. Para el lector experto, servirá simplemente como referencia de los resultados que se utilizarán.

Para llegar a definir el concepto de álgebra de von Neumann, nos es necesario considerar, dado un espacio de Hilbert complejo H, tres topologías en $\mathcal{B}(H)$ (donde $\mathcal{B}(H)$ denota la *-álgebra de todos los operadores lineales y acotados en H). Sea $x \in H$. Definimos, en primer lugar, la *topología de la norma*, dada por:

$$\|x\| = \sup_{\xi \in H} \frac{\|x\xi\|}{\|\xi\|}.$$

En dimensión finita, x es una matriz cuadrada, y $\|x\|^2$ puede ser calculado como el mayor autovalor de x^*x. Esto también vale en dimensión infinita si reemplazamos “mayor autovalor” por “radio espectral”, donde el radio espectral de un operador a es

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda - a \text{ no es invertible}\}.$$

Si consideramos el caso $H = L^2([0,1])$, el álgebra $L^\infty([0,1])$ actúa en H por multiplicación punto a punto y la norma de $f \in L^\infty$ es el supremo esencial de $|f|$. Entonces las funciones continuas $C([0,1])$ forman una subálgebra cerrada en norma de $L^\infty([0,1])$ en H (esto vale en general para cualquier espacio compacto y cualquier medida, ponemos $[0,1]$ sólo por claridad).

La *topología fuerte* en $\mathcal{B}(H)$ es aquella definida por las seminormas $x \mapsto \|x\xi\|$ cuando ξ recorre H. Entonces una sucesión (o una red, si hace falta) x_n converge a x si y sólo si $x_n\xi$ converge a $x\xi$ en H para todo $\xi \in H$. La topología fuerte es mucho más débil que la de la norma. De hecho se puede ver, en el ejemplo de $L^\infty([0,1])$ y $C([0,1])$ actuando en $L^2([0,1])$, que $C([0,1])$ es densa en $L^\infty([0,1])$ en la topología fuerte. Para ver una sucesión que converge en la topología fuerte pero no en norma, tomemos x_n la función característica de $[0,1/n]$ vista como elemento de $L^\infty([0,1])$. Entonces x_n tiende a cero en la topología fuerte, pero $\|x_n\| = 1$ para todo n.

La *topología débil* en $\mathcal{B}(H)$ es aquella definida por las seminormas $x \mapsto |\langle x\xi, \eta\rangle|$ cuando ξ y η recorren H. La desigualdad de Cauchy-Schwartz muestra que la topología fuerte es más fuerte que la débil (y de ahí los nombres). De hecho la topología débil lo es tanto que la bola unitaria de $\mathcal{B}(H)$ es débilmente compacta, lo que con frecuencia es muy útil. Para ver un ejemplo de sucesión que converge en la topología débil pero no en la fuerte, consideremos en $\ell^2(\mathbb{N})$ el operador “shift”

$$S((x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Se puede comprobar mediante cálculos directos que la sucesión $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil pero no en la fuerte, porque $\|S^n\xi\| = \|\xi\|$ y además $\langle S^n\xi, \eta\rangle \to 0$ para todo $\xi, \eta \in H$.

La interacción entre estas tres topologías es básica en el ámbito de las álgebras de von Neumann.

Ahora probaremos una versión simplificada del teorema del doble conmutante de von Neumann [MvN-1], que como se verá, tiene mucho que ver con la definición de álgebra de von Neumann . Utilizaremos la siguiente notación standard: si $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ y $\mathrm{alg}(S)$ es el álgebra generada por S, entonces

$$S' = \{x \in \mathcal{B}(H) : xs = sx \text{ para todo } s \in S\}$$

es el *conmutante* de S, y $S'' = (S')'$.

Teorema 2.1.1 (del doble conmutante) Sea S un subconjunto de $\mathcal{B}(H)$ con las siguientes propiedades:

1. Si $x \in S$ entonces $x^* \in S$.

2. $1 \in S$ (1 es el operador identidad en $\mathcal{B}(H)$)

Entonces $\mathrm{alg}(S)$ es fuertemente (y por tanto débilmente) densa en S''.

Demostración. En primer lugar, es elemental verificar que $\mathrm{alg}(S) \subseteq S''$. Ahora supongamos que $y \in S''$. Lo que debemos probar es que para cualquier conjunto finito $\xi_1, \ldots, \xi_n$ en H, hay un elemento x de $\mathrm{alg}(S)$ con $x\xi_i$ arbitrariamente cerca de $y\xi_i$ para todo i. Supongamos inicialmente que sólo queremos aproximar un vector $y\xi$. El truco es el siguiente: sea V la clausura del subespacio vectorial $\mathrm{alg}(S)\xi$ y sea p el operador que es la proyección ortogonal sobre V. Claramente $aV \subseteq V$ para todo $a \in S$, de manera que por la propiedad 1, $ap = pa$. Entonces $yp = py$, ya que $p \in S'$ e $y \in S''$. Por tanto, $yV \subseteq V$. Pero por la propiedad 2, $\xi \in V$, de manera que $y\xi \in \overline{\mathrm{alg}(S)\xi}$, que es precisamente lo que queríamos probar.

El caso general de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ implica otro truco que es usado frecuentemente: consideremos a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ como un vector en el espacio de Hilbert $\oplus_{i=1}^n H$. Entonces $\mathrm{alg}(S_i)$ e y actúan diagonalmente en $\oplus_{i=1}^n H$ y podemos, luego de algunos cálculos de matrices, ver cómo se comportan los conmutantes ante las "amplificaciones" de H, y repetir el argumento previo con ξ reemplazado por $\oplus_{i=1}^n \xi_i$ para concluir la prueba. $\square$

Este teorema muestra que dos nociones, una analítica (clausura en la topología fuerte) y otra algebraica (ser igual al doble conmutante de un conjunto), coinciden para *-subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ que contienen al 1. Nótese también que el teorema muestra que "fuertemente cerrada" y "débilmente cerrada" son lo mismo para una *-subálgebra de $\mathcal{B}(H)$.

Definición 2.1.2 Un álgebra autoadjunta ($M^* = M$) de $\mathcal{B}(H)$ se llama de *von Neumann* si satisface $M = M''$.

Ejemplos 2.1.3 De álgebras de von Neumann

i) El álgebra $\mathcal{B}(H)$ misma es cerrada, y por tanto es un álgebra de von Neumann .

ii) El álgebra $L^\infty([0,1])$ actuando en $L^2([0,1])$ es su propio conmutante, por lo que claramente es un álgebra de von Neumann . Es un ejemplo además de álgebra de von Neumann *abeliana maximal*.

iii) Si G es un grupo y $g \mapsto u_g$ es una representación unitaria de G, entonces el conmutante $\{u_g\}'$ es un álgebra de von Neumann .

iv) Si H es de dimensión finita, se verifica que un álgebra de von Neumann M es simplemente una suma directa de álgebras de matrices correspondientes a una cierta descomposición ortogonal $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_k$.

v) Si M en H y N en K son álgebras de von Neumann, hay nociones naturales de suma directa $M \oplus N$ en $H \oplus K$, y producto tensorial $M \otimes N$ en $H \otimes K$.

Observación 2.1.4 Mencionaremos algunos hechos importantes acerca de las álgebras de von Neumann.

1. Un álgebra de von Neumann M está generada por sus proyectores, ya que contiene a los proyectores espectrales de cualquier elemento autoadjunto.

2. Las álgebras de von Neumann abelianas son conocidas de modo completo. Además de $L^\infty([0,1])$ tenemos $\ell^\infty(I\!N)$ actuando en $\ell^2(I\!N)$ y las reducciones y combinaciones entre ambas. En un Hilbert separable no hay más estructura que esa en las álgebras de von

Neumann abelianas. Von Neumann probó el hecho de que las álgebras de von Neumann abelianas están generadas por un único operador autoadjunto.

3. Las álgebras de von Neumann pueden ser caracterizadas en abstracto (o sea sin hacer referencia al espacio de Hilbert) como aquellas álgebras C* que son dual de un espacio de Banach (ver 2.3.4).

El centro $\mathcal{Z}(M)$ de un álgebra de von Neumann es abeliano. Entonces, por lo que hemos dicho, lo conocemos completamente. En dimensión finita será una suma directa de copias de $\mathbb{C}$, una por cada sumando de la descomposición. En general, usando el teorema espectral, von Neumann definió ([MvN-2]), en el caso separable, una noción de "integral directa" de espacios de Hilbert $\int_X^{\oplus} H(\lambda)d\mu(\lambda)$ de manera que, por ejemplo, para $L^\infty([0,1])$ en $L^2([0,1])$ la correspondiente descomposición de $L^2([0,1])$ sería $\int_{[0,1]}^{\oplus} H(\lambda)dx(\lambda)$ donde $H(\lambda) \equiv \mathbb{C}$. El álgebra M respeta esta descomposición, y se llega a una noción de integral directa de álgebras de von Neumann: $M = \int_X^{\oplus} M(\lambda)d\lambda$ en $\int_X^{\oplus} H(\lambda)d\lambda$, siendo la descomposición completa esencialmente única. Los individuos $M(\lambda)$ tienen centro trivial (esto se puede intuir estudiando el caso finito dimensional). Entonces toda álgebra de von Neumann es una integral directa de álgebras de von Neumann de centro trivial, lo que hace que las álgebras de von Neumann de centro trivial sean especialmente interesantes.

Definición 2.1.5 Un álgebra de von Neumann M cuyo centro consiste de múltiplos escalares de la identidad es llamada un *factor*.

Como ejemplos de factores, citemos el más elemental, que es el mismo $\mathcal{B}(H)$. Se puede ver con facilidad además que todo factor de dimensión finita siempre será de la forma $\mathcal{B}(H) \otimes \mathbb{C}$ en $H \otimes K$. Esto explica el nombre "factor": los factores se corresponden a factorizaciones mediante producto tensorial del espacio de Hilbert. El hecho notable, descubierto por Murray y von Neumann en sus trabajos [MvN-1, MvN-2, MvN-4] es que no todos los factores son de este tipo, y que no es demasiado difícil construir ejemplos.

Veamos brevemente cuál fue el ejemplo no trivial construido por Murray y von Neumann. Sea Γ un grupo discreto tal que todas sus clases de conjugación salvo la de la identidad son infinitas (por ejemplo, el grupo libre en dos generadores). A estos grupos se los llama i.c.c., por "infinite conjugacy classes". Consideremos $\ell^2(\Gamma)$ el espacio de Hilbert cuya base está indexada por Γ, sea $\gamma \mapsto u_\gamma$ la representación regular a izquierda de Γ, es decir, consideremos al grupo Γ representado en $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ como operadores u_γ, donde actuar con u_γ es multiplicar los índices por γ (o sea, $u_\gamma(\{\lambda_g\}_{g\in\Gamma}) = \{\lambda_{\gamma g}\}_{g\in\Gamma}$).

Vistos como matrices en $\ell^2(\Gamma)$, con respecto a la base canónica indexada por $\gamma \in \Gamma$, los u_γ, y por ende todas las combinaciones lineales de los $\{u_\gamma\}$, son de la forma $x_{\gamma,\nu} = f(\gamma^{-1}\nu)$ para alguna función de soporte finito en Γ, es decir que son matrices con todas las diagonales constantes. Lo mismo vale para límites débiles de tales operadores salvo que f ya no será de soporte finito. Aplicando uno de tales operadores al elemento de la base correspondiente a la identidad vemos que $f \in \ell^2$. En efecto, imaginemos por comodidad que el vector correspondiente a la identidad es el vector $v_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$; entonces

$$(x_{\gamma,\nu}) \cdot v_1 = (f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots),$$

y como este vector tiene que estar en $\ell^2(\Gamma)$, debe ser

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)^2 = \|(x_{\gamma,\nu}) \cdot v_1\| < \infty.$$

Es por tanto conveniente y preciso escribir a los elementos de $M = \{u_\gamma\}''$ como sumas

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) u_\gamma,$$

donde $f \in \ell^2$ (aunque no todas las funciones de ℓ^2 definen elementos de M). No prestaremos atención al sentido de convergencia de la suma para simplificar ideas. En cualquier caso, para que $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)u_\gamma$ esté en el centro de M, debe conmutar con u_ν para todo $\nu \in \Gamma$, lo que implica que $f(\nu\gamma\nu^{-1}) = f(\gamma)$, es decir que f es constante en las clases de conjugación. Pero f está en ℓ^2 y todas las clases de conjugación no triviales son infinitas, de manera que si f fuera no nula en un elemento no trivial, no podría estar en ℓ^2. Entonces el soporte de f es la identidad, lo que implica que el centro de M es trivial, o sea que M es un factor. Lo llamaremos $\mathrm{vN}(\Gamma)$.

Se puede ver rápidamente que este factor no es isomorfo a ningún $\mathcal{B}(H)$ obervando que la función lineal $\mathrm{tr}(\sum f(\gamma)u_\gamma) = f(1)$ tiene la propiedad $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ y no es idénticamente cero. Es un hecho standard que no existe función con esa propiedad en $\mathcal{B}(H)$ a menos que $\dim H < \infty$.

2.1.6 Productos semidirectos

Este ejemplo anterior es un ejemplo de una construcción muy general llamada *producto semidirecto*:

Definición 2.1.7 Sea N un álgebra de von Neumann representada en un espacio de Hilbert H y sea Γ un grupo discreto de automorfismos de N representados como unitarios $\{u_\gamma\}$ en $\mathcal{B}(H)$. Entonces el *producto semidirecto* $N \rtimes \Gamma$ es el álgebra de von Neumann que actúa en $(H \otimes \ell^2(\Gamma))$ generada por los unitarios $u_\gamma = u_\gamma \otimes l_g$ y los elementos de N representados en $(H \otimes \ell^2(\Gamma))$ por $x \mapsto x \otimes \mathrm{id}$.

Todos los elementos de $N \rtimes \Gamma$ pueden ser representados como sumas

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma u_\gamma,$$

con $x_\gamma \in N$, y además $u_\gamma x u_\gamma^{-1} = \gamma(x)$ (la acción de γ en x) para $x \in N$.

Proposición 2.1.8 Las siguientes condiciones alcanzan para que $N \rtimes \Gamma$ sea un factor:

1. La acción de Γ es *libre*, es decir $xy = y\gamma(x)$ para todo $x \in N$ implica $y = 0$ ó $\gamma = 1$.

2. El álgebra M^Γ de puntos fijos para Γ es un factor.

Los productos semidirectos pueden también ser formados por grupos continuos (localmente compactos), pero son más difíciles de tratar algebraicamente, y no serán necesarios en el desarrollo de este trabajo.

2.1.9 La construcción GNS

La *Construcción G.N.S.* provee una forma elemental pero muy útil de pasar de una *-álgebra que no es necesariamente completa a un álgebra de von Neumann . Los datos necesarios son una *-álgebra A y un funcional lineal $\varphi : A \mapsto \mathbb{C}$ con $\varphi(a^*a) \geq 0$. Uno entonces forma un espacio de Hilbert definiendo el producto escalar con núcleo no necesariamente trivial en A dado por $\langle a, b\rangle = \varphi(b^*a)$. El espacio de Hilbert H_φ es entonces la completación del cociente de A por el núcleo de esta forma. En casos favorables (por ejemplo si A es un álgebra C*), A

actuará en H_φ por multiplicación a izquierda. Esta representación de A se llama representación GNS (por Guelfand-Naimark-Segal). El álgebra de von Neumann generada por la imagen de A puede ser pensada como una completación de A con respecto a φ. En general es difícil decir si una completación GNS es un factor o no. Hay casos en que A tiene centro trivial pero su completación no.

Todo operador sobre un espacio de Hilbert puede ser descompuesto como el producto de un operador positivo y una isometría parcial. A esta descomposición se la llama *descomposición polar*, por analogía con la descomposición de un número complejo λ como $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$. Una propiedad muy importante que tienen las álgebras de von Neumann es que a todos sus elementos se les puede realizar la descomposición polar dentro del álgebra:

Teorema 2.1.10 (Descomposición Polar) Si M es un álgebra de von Neumann y $x \in M$, entonces vale que

i) si $x = u|x|$ es la descomposición polar de x, entonces $|x|, u \in M$.

ii) si x es normal entonces $e_x(F) \in M$ para cada conjunto de Borel $F \subset \sigma(x)$ ($\sigma(x)$ = espectro de x, y e_x es la medida espectral de x).

Un resultado importante de R. Kadison tiene que ver con los automorfismos de un álgebra de von Neumann :

Teorema 2.1.11 ([KR, 10.5.73]) Sea α un automorfismo de un álgebra de von Neumann , con $\|\alpha - \iota\| < 2$, donde ι es la identidad de M. Entonces α es un automorfismo interior de M, es decir, existe un unitario $u \in M$ tal que $\alpha(x) = uxu^*$ para todo $x \in M$.

Culminamos la sección con el Teorema de Densidad de Kaplansky, que es una herramienta técnica que utilizaremos en algunas demostraciones.

Teorema 2.1.12 (de Densidad de Kaplansky) Sea $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ una *-álgebra. Entonces la clausura débil de la bola de radio 1 coincide con la bola de radio 1 de la clausura débil de M, es decir

$$(M)_1^{-w} = (M^{-w})_1.$$

2.2 Comparación de proyecciones y Clasificación de factores

La herramienta que utilizaron Murray y von Neumann para clasificar los factores fue la teoría de comparación de proyecciones que desarrollaron ellos mismos. Esta teoría ha seguido siendo de gran aplicación en muchos desarrolles posteriores. Dada un álgebra de von Neumann M, llamaremos $\mathcal{P}(M)$ al conjunto

$$\mathcal{P}(M) = \{p \in M : p^2 = p \text{ y } p^* = p\} \tag{2.2.1}$$

de proyecciones ortogonales de M.

Definición 2.2.1 ([MvN-1]) Sean $p, q \in \mathcal{P}(M)$.

a) Decimos que p y q son equivalentes, y lo notamos $p \sim q$, si existe una isometría parcial $u \in M$ tal que $u^*u = p$ y $uu^* = q$.

b) Decimos que q es mayor que p, y lo notamos $p \preceq q$, si existe $p_1 \in \mathcal{P}(M)$ tal que $p \sim p_1 \leq q$.

Se verifica que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(M)$ y que la validez de $p \preceq q$ se mantiene si se reemplaza p y q por proyecciones equivalentes. Además, $\preceq$ es una relación de orden.

El punto importante es que el la isometría parcial u debe estar en M, de manera que la noción de comparación depende fuertemente en M. Si $M = \mathcal{B}(H)$, entonces dos proyecciones son equivalentes si y sólo si sus imágenes tienen la misma dimensión. A raiz de esto surgió la idea de que las clases de equivalencia de proyecciones constituyen una noción abstracta de dimensión para un factor arbitrario. El primer resultado que confirma esto es el siguiente:

Teorema 2.2.2 Si M es un factor y p, q son proyecciones en M entonces $p \preceq q$ ó $q \preceq p$.

Definición 2.2.3 Una proyección $p \in \mathcal{P}(M)$ se dice *finita* si para todo $p_0 \in P(M)$ que cumpla $p \sim p_0 \leq p$ resulta $p_0 = p$. En caso contrario, p se dice *infinita*. Si p es infinita y no tiene subproyecciones finitas, entonces decimos que p es *propiamente infinita*.

En el caso particular en que $M = \mathcal{B}(H)$, la noción de proyección finita o infinita coincide con que su rango sea respectivamente un subespacio de dimensión finita o infinita.

El orden de las proyecciones respeta el comportamiento que uno esperaría intuitivamente (en el sentido de la teoría de conjuntos) respecto de la finitud o infinitud:

Proposición 2.2.4 Sean $p, q \in \mathcal{P}(M)$. Si $p \preceq q$ y q es finito, entonces p es finito.

En particular si existe p infinito, resulta 1 $(= Id_H)$ infinito.

Notemos que la forma en que hemos definido el concepto de proyección infinita es en realidad análoga a lo que se hace en teoría de conjuntos, es decir que una proyección es infinita si es equivalente a una subproyección propia. Esto permite ir más lejos, y elegir la subproyección equivalente de manera que "divida" a la proyección en dos nuevas proyecciones equivalentes, y equivalentes a su vez a la proyección original:

Proposición 2.2.5 ("Halving") Sea p una proyección propiamente infinita en un álgebra de von Neumann M. Entonces existe una subproyección q de p en M tal que $q \sim p - q \sim p$.

Definición 2.2.6 Un álgebra de von Neumann M se dice *finita, infinita, propiamente infinita* si $1 \in M$ es una proyección respectivamente finita, infinita o propiamente infinita.

Observación 2.2.7 Una aplicación repetida de la Proposición 2.2.5 permite mostrar que si M es un álgebra de von Neumann propiamente infinita, entonces existe una sucesión $\{p_n\}$ de proyecciones ortogonales, todas equivalentes a 1, con $\sum p_n = 1$.

La siguiente Proposición expresa que un álgebra de von Neumann siempre puede mirarse como los "bloques" diagonales de una matriz de 2×2, donde cada bloque es finito o propiamente infinito.

Proposición 2.2.8 Sea M un álgebra de von Neumann. Entonces existe una proyección p perteneciente al centro de M, tal que pM es un álgebra propiamente infinita y $(1 - p)M$ es un álgebra finita.

Definición 2.2.9 Se dice que $p \in \mathcal{P}(M)$ es *minimal* si $p \neq 0$ y si $q \in P(M)$, $q \leq p$ implica $q = 0$, o $q = p$.

Finalmente estamos en condiciones de enunciar la clasificación de los factores de Murray y von Neumann:

Definición 2.2.10 Un factor M se dice de tipo I, II o III si satisface las respectivas propiedades:

1. Tipo I: hay proyecciones minimales.

   (a) Tipo I_n, $n < \infty$: hay n proyecciones minimales equivalentes que suman 1.

   (b) Tipo I_∞: hay infinitas proyecciones minimales equivalentes que suman 1.

2. Tipo II_1: no hay proyecciones minimales y toda proyección es finita.

3. Tipo II_∞: no hay proyecciones minimales y hay tanto proyecciones finitas como infinitas.

4. Tipo III: no hay proyecciones finitas no nulas.

La clasificación puede extenderse a álgebras de von Neumann arbitrarias. Omitiremos el enunciado de esta clasificación para evitar detalles engorrosos, y porque en realidad la propiedad que utilizaremos con referencia al tipo de un álgebra es la existencia o no de estados y pesos traciales, de acuerdo con lo expresado en 2.3.10.

Un teorema importante de Murray y von Neumann dice que toda álgebra de von Neumann admite proyecciones P_{I_n} $(n \in I\!N), P_{I_\infty}, P_{II_1}, P_{II_\infty}, P_{III}$ centrales, ortogonales dos a dos, que suman 1 y tales que $P_k M$ es de tipo k para cada uno de los proyectores mencionados.

Se verifica que si un factor M tiene una traza tr (ver Definición 2.3.3)con $\mathrm{tr}(x^*x) > 0$ para $x \neq 0$, entonces M es finito dimensional o de tipo II_1. También son hechos conocidos que si el factor M es de tipo I entonces es de la forma $\mathcal{B}(H) \otimes \mathrm{id}$ en $H \otimes K$, y que todo factor II_∞ es un producto tensorial de un factor II_1 y un factor infinito de tipo I.

En base a la idea de que la comparación de proyecciones proporciona una noción de dimensión, Murray y von Neumann mostraron en [MvN-1] que si M es un factor entonces hay esencialmente una única "función de dimensión" $d : \mathcal{P}(M) \mapsto [0, \infty]$ que cumple

1. $d(0) = 0$,

2. $d(\sum_{i=0}^{\infty} p_i) = \sum_{i=0}^{\infty} d(p_i)$ si $p_i \perp p_j$ para $i \neq j$,

3. $d(p) = d(q)$ si $p \simeq q$.

Proposición 2.2.11 La función de dimensión d cumple que $d(p) = d(q) \Rightarrow p \simeq q$ y además siempre puede ser normalizada de manera que su rango sea el siguiente:

1. Tipo I: $I\!N \cup \{\infty\}$ posible;

2. Tipo II$_1$: $[0,1]$ (todo el intervalo)

3. Tipo II$_\infty$: $[0,\infty]$.

4. Tipo III: $\{0,1\}$.

2.3 Funcionales y pesos

En esta sección, como antes, M denotará un álgebra de von Neumann. Llamaremos M_+ al conjunto de elementos positivos de M. Los funcionales de un álgebra de von Neumann se comenzaron a estudiar originalmente porque se los puede ver como la generalización de la noción de integral. Los pesos serían desde este punto de vista las integrales "impropias", es decir el caso en que la masa total del espacio es infinita.

Definición 2.3.1 Dada un funcional lineal ϕ sobre M, diremos que es

i) *positiva*, si $\phi(x^*x) \geq 0$.

ii) un *estado*, si es positiva y además $\phi(1) = 1$.

Definición 2.3.2 Un *peso* en un álgebra de von Neumann M es una función $\phi : M_+ \longrightarrow [0,\infty]$, tal que $\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)$ si $x, y \in M_+$ y $\lambda \in [0,\infty)$ con la convención que $\lambda + \infty = \infty$ y $\lambda.\infty = \infty$ si $\lambda > 0$, mientras que $0.\infty = 0$.

Definición 2.3.3 Un funcional lineal (o un peso) ϕ se dice

i) *fiel*, si $0 \neq x \in M_+ \Rightarrow \phi(x) > 0$.

ii) *normal*, si cada vez que $x_i \nearrow x \in M$ en la topología fuerte para $x_i \in M_+$, resulta $\phi(x) = \sup_i \phi(x_i)$.

iii) *tracial* o *traza*, si $\phi(x^*x) = \phi(xx^*), \forall x \in M$ (equivalente a que $\phi(xy) = \phi(yx), \forall x, y \in M$ en el caso en que ϕ es un funcional).

iv) Un peso se dice *finito* si $\phi(x) < \infty$ para todo $x \in M_+$.

Observación 2.3.4 Los funcionales normales de un álgebra de von Neumann M, que notaremos con M_*, forman un espacio de Banach con la norma usual. Se puede probar que $(M_*)^* = M$ (como dual de espacio de Banach). Esto justifica el nombre de *predual* de M para el espacio M_*. Esta propiedad de tener un predual único permite caracterizar a las álgebras de von Neumann en abstracto, es decir sin tener que recurrir a una representación.

Proposición 2.3.5 Para un peso ϕ en M es equivalente:

i) ser finito,

ii) $\phi(1) < \infty$,

iii) que exista un funcional positivo φ en M tal que $\varphi|_{M_+} = \phi$.

Para un peso ϕ en M, como no está definido en toda el álgebra, es útil definir los siguientes espacios asociados:

$$\mathcal{D}_\phi = \{x \in M_+ : \phi(x) < \infty\}; \tag{2.3.2}$$

$$\mathcal{N}_\phi = \{x \in M : \phi(x^*x) < \infty\}; \tag{2.3.3}$$

$$\mathcal{M}_\phi = \mathcal{N}_\phi^* \mathcal{N}_\phi = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i : x_i, y_i \in \mathcal{N}_\phi, n = 1, 2, ... \right\}. \tag{2.3.4}$$

Donde no haya confusión posible, el subíndice ϕ será omitido.

Proposición 2.3.6 Los conjuntos $\mathcal{D}_\phi$, $\mathcal{N}_\phi$ y $\mathcal{M}_\phi$ definidos arriba satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{D}$ es un cono positivo hereditario; es decir,

(a) $x, y \in \mathcal{D}$ y $\lambda \in [0, \infty) \Rightarrow \lambda x + y \in \mathcal{D}$;

(b) $x \in \mathcal{D}, z \in M_+, z \leq x \Rightarrow z \in \mathcal{D}$.

b) $\mathcal{N}$ es un ideal a izquierda de M;

c) $\mathcal{M}$ es una subálgebra autoadjunta de M (aunque no necesariamente $1 \in \mathcal{M}$, ni es cerrada para alguna topología particular);

d) $\mathcal{D} = \mathcal{M}_+ = M_+ \cap \mathcal{M}$, y cada elemento de $\mathcal{M}$ es una combinación lineal de cuatro elementos de $\mathcal{D}$;

e) $x, z \in \mathcal{N}$, $y \in M \Rightarrow x^* y z \in \mathcal{M}$;

f) existe una única funcional lineal φ en $\mathcal{M}$ tal que $\varphi|_{\mathcal{M}_+} = \phi$.

Definición 2.3.7 Un peso ϕ en M se dice *semifinito* si $\mathcal{M}_\phi$ es débilmente denso en M.

Semifinitud para un peso significa que hay "suficientes" elementos donde es finito. Puede probarse que para toda álgebra de von Neumann existe un peso normal, fiel y semifinito [CD].

Proposición 2.3.8 Las siguientes condiciones son equivalentes para un peso ϕ:

i) ϕ es semifinito

ii) $1 = \sup\{e \in \mathcal{P}(M) : \phi(e) < \infty\}$

iii) existe una red creciente $\{x_i\}$ en $\mathcal{D}$ tal que $||x_i|| < 1$ para todo i y $x_i \nearrow 1$.

El siguiente resultado, que caracteriza la "normalidad" de un peso, es debido a Haagerup [H2].

Proposición 2.3.9 Para un peso ϕ en M, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) ϕ es normal;

ii) existe una red monótona creciente $\{\psi_i : i \in I\}$ de funcionales normales positivas tales que $\psi_i(x) \nearrow \phi(x)$ para todo $x \in M_+$;

iii) existe una familia $\{\psi_i : i \in J\}$ de funcionales positivas normales tales que $\phi(x) = \sum_{i \in J} \psi_i(x)$ para todo $x \in M_+$ (donde la suma se interpreta como el límite de la red de sumas finitas);

La existencia de un peso semifinito tracial está relacionada con la clasificación de las álgebras de von Neumann.

Definición 2.3.10 Un álgebra de von Neumann se dice

1. *semifinita*, si existe un peso fiel, normal, semifinito y tracial;
2. *finita*, si existe un estado fiel, normal y tracial.
3. *infinita*, si no hay ningún peso fiel, normal, semifinito y tracial.

Las álgebras de von Neumann semifinitas son todas las de tipo I y II. Las finitas son las de tipo I_n, $n < \infty$, y II_1. En este último caso el hecho no trivial, pero ya probado por Murray y von Neumann, es la existencia de un estado tracial en toda álgebra finita (tomando como definición de finita el hecho de que no hay proyecciones infinitas, como en la Definición 2.2.3).

2.4 Forma standard de un álgebra de von Neumann

Se prueba en [MvN-2] que todo factor II_1 tiene una única traza normalizada que extiende a su función de dimensión. Un factor II_1 M, considerado como una *-álgebra compleja abstracta, posee una única traza tr que es un estado para el que se puede hacer la construcción GNS (2.1). El espacio de Hilbert resultante se denota $L^2(M, \mathrm{tr})$ o a veces simplemente $L^2(M)$. La razón para esta notación es que si M fuera $L^\infty(X, \mu)$ para algún espacio de probabilidad razonable (X, μ) y si $\mathrm{tr}(f)$ es $\int_X f d\mu$ entonces $L^2(M)$ sería el espacio de Hilbert $L^2(X, \mu)$.

Las propiedades de continuidad de tr son tales que el álgebra de operadores en $L^2(M)$ definida por multiplicación a izquierda por M es ya débilmente cerrada de manera que M actúa en $L^2(M)$ como un álgebra de von Neumann . Esta acción define una representación de M en $\mathcal{B}(L^2(M))$, que es llamada la *forma standard* o *Representación Standard* de M. Como $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$, la multiplicación a derecha por elementos de M también se extiende para dar operadores acotados en $L^2(M)$ dando una acción del álgebra de von Neumann opuesta M^{opp} en $L^2(M)$. La situación es completamente simétrica y $M' = M^{\mathrm{opp}}$. Es importante notar que la simetría entre las operaciones a izquierda y derecha de M está implementada por una isometría antilineal

$$J : L^2(M) \to L^2(M)$$

que es simplemente la extensión a $L^2(M)$ de la aplicación $x \mapsto x^*$ definida en M. Es un cálculo sencillo que si $\xi \in L^2(M)$ entonces $\xi x = Jx^*J\xi$, de manera que $JMJ = M'$. Como comentaremos enseguida, la extensión de esta idea condujo a la muy fructífera teoría de Tomita-Takesaki, que comentamos en la sección 2.5.

Para un álgebra de von Neumann general, con un estado fiel y normal dado, llamaremos *representación standard* a una representación con un vector cíclico y separante que realiza al estado, es decir, esencialmente la construcción GNS para ese estado (ver 2.1).

Llamaremos *cono standard de M* al conjunto [DL]:

$$P_\Omega(M) = \{J_M a J_M a\Omega, a \in M\}^-$$

La teoría de Tomita-Takesaki (sección 2.5) puso el foco de interés en álgebras de von Neumann representadas en forma standard; en particular, asigna una estructura fundamental al par formando por un álgebra de von Neumann R y un vector cíclico y separante Ω para R, llamda estructura modular. La estructura modular consiste de un grupo uniparamétrico de automorfismos de R y una involución antiunitaria J, que intercambia R con su conmutante R'. Esta estructura se enriqueció más con el estudio, a principios de la década de 1970, de los conos standard ([A, C2, H1])

En [H1] está probado el siguiente resultado:

Proposición 2.4.1 Dado un estado ϕ en un álgebra de von Neumann M, hay un vector $\xi \in P_\Omega(M)$ que representa a ϕ, es decir

$$\phi = \langle \cdot \xi, \xi \rangle. \tag{2.4.5}$$

En [DL] se hace un estudio detallado de las inclusiones $N \subseteq M$ de álgebras de von Neumann que son "split", es decir tales que existe un factor F de tipo I tal que $N \subseteq F \subseteq M$. Esto permite descomponer la inclusión en

$$(N \subseteq M) \simeq ((N \cap F)' \otimes F \subseteq (M \cap F)' \otimes F).$$

En particular, se obtiene el siguiente resultado, basado en un teorema de Dixmier y Marechal:

Proposición 2.4.2 ([DL, Teorema 1.2]) Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann propiamente infinitas, y sea H el espacio de Hilbert proveniente de la construcción GNS para un estado fiel y normal de M. Entonces existe un vector $\Omega \in H$ tal que es cíclico y separante a la vez, tanto para M como para N.

2.5 Teoría Modular de Tomita–Takesaki

En esta sección daremos un pantallazo de la Teoría Modular. Para explicar su necesidad, comenzaremos hablando brevemente de los factores de tipo III. En su momento, Murray y von Neumann los consideraron patológicos, y durante mucho tiempo se resolvían problemas excluyendo el caso de tipo III. El problema técnico que uno se encuentra para tratar con estos factores es que si se considera la construcción GNS para un estado fiel $\varphi : M \to \mathbb{C}$ para un factor M de tipo III (φ débilmente continuo), la aplicación $* : M \to M$, que sería una isometría si φ fuera una traza, no se extiende a un operador acotado en la completación H_φ de M. Fue Tomita el primero que utilizó el operador no acotado S definido por $*$. Uno necesita extender su dominio de manera que sea un operador cerrado para entonces poder considerar su descomposición polar $S = J\Delta^{1/2}$, donde Δ es un operador positivo y J es una isometría antilineal. Lo que notó Tomita y luego probó Takesaki fue que J puede ser usado en lugar de $*$. En particular, $JMJ = M'$. Pero también vale que $\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M$, $t \in \mathbb{R}$, de manera que se obtiene un grupo uniparamétrico de automorfismos σ_t^φ, el *grupo modular*, directamente del estado φ. Connes mostró en [C] que los grupos modulares de dos estados distintos difieren en un automorfismo interior, de manera que el grupo $T(M) = \{t | \sigma_t^\varphi \text{ es interior}\}$ es un invariante de M. Otro invariante, $S(M)$, definido por Connes como la intersección de los espectros de los Δ obtenidos por la descomposición polar para las diferentes representaciones, menos el cero, es necesariamente un grupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{R}^+$ y por lo tanto uno puede clasificar los factores de tipo III en III_λ, $\lambda \in [0, 1]$, por:

1. III_0: $S(M) = \{1\}$;

2. $\mathrm{III}_\lambda, 0 < \lambda < 1$: $S(M) = \{\lambda^n : n \in I\!R\}$;

3. III_1: $S(M) = I\!R^+$.

Para obtener ejemplos de esto, se puede mirar el producto tensorial infinito $\bigotimes_{i=1}^\infty M_2(\mathbb{C})$ y considerar en él el estado φ_λ, $0 < \lambda < 1$, dado por

$$\varphi_\lambda(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots) = \prod_{j=1}^n \text{traza}\left(\frac{1}{1+\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x_j\right).$$

Las álgebras de von Neumann que se obtienen de la construcción GNS para los estados φ_λ son conocidas como los *factores de Powers* R_λ. Powers probó que son factores de tipo III no isomorfos dos a dos. Los operadores Δ y J pueden manejarse en cálculos de dimensión finita y se puede probar que los factores son de tipo III_λ (Connes). El grupo modular es simplemente conjugar por $\bigoplus_{j=1}^\infty \exp(i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix})$. La importancia original de estos factores fue que fue la primera construcción que producía una familia de factores no isomorfos dos a dos. La clasificación de Connes mostró que eran exactamente los posibles factores de tipo III hiperfinitos.

Una forma alternativa de construir los factores III_λ es tomar un automorfismo α de un factor M de tipo II_∞, escalar la traza por λ, y formar el producto semidirecto $M \rtimes \mathbb{Z}$ via α. Connes probó que todos los factores III_λ, $0 < \lambda < 1$ se producen de esta manera, y los III_0 también cambiando M por un álgebra (no factor) II_∞ con α actuando de forma ergódica en su centro.

No existe tal descomposición discreta para factores de tipo III_1, pero Takesaki probó que todo factor III_1 es de la forma $M \rtimes I\!R$, donde M es un factor II_∞ y $I\!R$ actúa de manera de escalar la traza de forma no trivial.

Ahora desarrollaremos brevemente la parte técnica de la teoría modular, sin llegar mucho más lejos que las definiciones y enunciando, en esta sección y la siguiente, los teoremas que nos serán necesarios. Para los detalles, referirse al libro [TT], o al capítulo 9 de [KR]. En [Sun] se puede encontrar una introducción un poco más intuitiva, simplificando un poco las demostraciones en base a realizarlas con funcionales y no con pesos.

Sea M un álgebra de von Neumann actuando en H y sea ξ un vector cíclico y separante para M.

Proposición 2.5.1 Sean S_0 y F_0 los operadores anti–lineales, con dominios $M\xi$ y $M'\xi$ respectivamente, definidos unívocamente por $S_0(x\xi) = x^*\xi$, $F_0(x'\xi) = x'^*\xi$. Entonces S_0 y F_0 son operadores densamente definidos y clausurables. Sus clausuras, que se notarán S y F respectivamente, verifican $S = F^* = F_0^*$ y $F = S^* = S_0^*$.

Como mencionamos antes, el problema que uno se encuentra en el caso infinito es que el operador $*$ ya no es isométrico en $L^2(M)$, y por lo tanto la idea es reemplazarlo con J.

Proposición 2.5.2 Sea $S = J\Delta^{1/2}$ la descomposición polar del operador cerrado S. Entonces,

1. J es un operador autoadjunto antiunitario y Δ es un operador autoadjunto positivo inversible en el sentido de operadores no acotados (Δ es uno a uno);

2. $F = J\Delta^{1/2}$ es la descomposición polar de F; más aún, $\Delta = FS$ y $\Delta^{-1} = SF$;

3. $J\Delta J = \Delta^{-1}$; más generalmente, si f es cualquier función Boreliana en $[0, \infty)$ (posiblemente no acotada pero finita), entonces $Jf(\Delta)J = \overline{f}(\Delta^{-1})$; en particular $J\Delta^{it}J = \Delta^{it}$ para todo $t \in I\!R$.

Teorema 2.5.3 (Tomita–Takesaki) Con las notaciones de las proposiciones previas, valen los siguientes enunciados:

1. $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$ para todo $t \in I\!R$;

2. $JMJ = M'$.

Supongamos que M es un álgebra de von Neumann cualquiera, y que ϕ es un funcional fiel, positivo y normal en M con el triple de GNS $(H_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$. Entonces ξ_ϕ es un vector cíclico y separante para $\pi_\phi(M)$. Notaremos de aquí en más S_ϕ, F_ϕ, J_ϕ a los operadores que resultan, en este caso, de las consideraciones del teorema de Tomita–Takesaki.

Definición 2.5.4 Con las notaciones de más arriba, llamaremos la *conjugación modular* al operador J_ϕ, y *operador modular* a Δ_ϕ asociados al par (M, ϕ).

Denotaremos con $\{\sigma_t^\phi : t \in I\!R\}$ al grupo uniparamétrico fuertemente continuo de $*$-automorfismos de M definido por

$$\sigma_t^\phi(x) = \pi_\phi^{-1}(\Delta_\phi^{it}\pi_\phi(x)\Delta_\phi^{-it}).$$

A este grupo se lo denomina *grupo modular de automorfismos* o simplemente *grupo modular* asociado a la funcional positiva ϕ.

Veremos en lo que resta de la sección una de las principales aplicaciones de la teoría modular, de entre tantas que tiene: el Teorema de Radon-Nikodym de Pedersen y Takesaki (Teorema 2.5.8). El hecho notable es que la diferencia con el teorema de Radon-Nikodym en el caso abeliano, es precisamente la aparición del grupo modular.

Dado un peso fiel, normal y semifinito ϕ sobre M, se define el *centralizador* de M respecto de ϕ como el conjunto:

$$M^{\phi} = \{x \in M : \sigma_t^{\phi}(x) = x, \ \forall t\}$$

La siguiente proposición, de [PT], muestra por qué a M^{ϕ} se lo llama "centralizador":

Proposición 2.5.5 (Pedersen–Takesaki) Sea ϕ un funcional fiel y normal sobre M. Sea $x \in M$. Una condición necesaria y suficiente para que x pertenezca a M^{ϕ} es que $\phi(xy) = \phi(yx)$ para todo $y \in M$. En particular $Z(M) \subset M^{\phi}$.

Cuando se tienen operadores no acotados sobre un espacio de Hilbert, obviamente éstos no pueden estar en un álgebra de von Neumann, pero sí pueden estar sus "partes truncadas". En este caso se dice que el operador está "afiliado" al álgebra. Definamos esto con precisión:

Definición 2.5.6 Un operador cerrado A se dice *afiliado* a M, si $a'A \subseteq Aa'$ para todo $a' \in M'$. Es decir, si $\xi \in \mathrm{dom}(A)$ y $a' \in M'$, entonces $a'\xi \in \mathrm{dom}(A)$ y $Aa'\xi = a'A\xi$.

Observemos que para operadores acotados (usando el teorema del doble conmutante 2.1.1) las nociones de "pertenecer a M" y "estar afiliado a M" coinciden.

Definición 2.5.7 Dado un operador positivo y autoadjunto h, posiblemente no acotado, $\psi(h\cdot)$ es el peso definido por el límite cuando $\varepsilon \to 0$ de la red creciente $\{\psi(h_\varepsilon\cdot) : \varepsilon > 0\}$ (dirigida de manera que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow \psi(h_{\varepsilon_1}\cdot) \leq \psi(h_{\varepsilon_2}\cdot)$) de los pesos normales semifinitos en M definidos por $(\psi(h_\varepsilon\cdot))(x) = \psi(h_\varepsilon^{1/2} x h_\varepsilon^{1/2})$, donde $h_\varepsilon = h(1+\varepsilon h)^{-1}$.

Teorema 2.5.8 (de Radon-Nikodym de Pedersen-Takesaki) Sea ϕ un peso fiel, normal y semifinito en M. Sea ψ un peso normal y semifinito en M tal que $\psi \circ \sigma_t^\phi = \psi$ para todo t. Entonces existe un único operador positivo autoadjunto h (posiblemente no acotado), afiliado a M^ϕ, tal que $\psi = \phi(h\cdot)$.

Chapter 3

Teoría del Indice

En este capítulo desarrollaremos la Teoría del Indice, iniciada por V. Jones en 1983 [J1]. Como se dijo en la Introducción, esta teoría ha tenido muy ricas y variadas consecuencias, y aplicaciones a diversos campos de la matemática y de la física.

En la primera Sección definiremos y comentaremos la noción de esperanza condicional, que juega un rol central en el tema. En la Sección 3.2 daremos un panorama general de la teoría del Indice de Jones incorporando los desarrollos posteriores de varios autores. En la Sección 3.3 desarrollaremos la extensión de la teoría de R. Longo que ha sido expuesta en [A]. Se prueba que la definición del índice de Longo puede extenderse más allá del caso en que las álgebras son factores, y se prueban algunas propiedades del índice generalizado, análogas a las de la Sección 3.2.

3.1 Esperanzas Condicionales

El nombre de "esperanza condicional" proviene de la Teoría de Probabilidades. Para ver la relación con las álgebras de von Neumann, comenzaremos exponiendo la noción de esperanza condicional de la Teoría de Probabilidades, pero utilizando el lenguaje de las álgebras de von Neumann desarrollado en el capítulo 2. Lo que caracteriza al caso clásico es que las álgebras de von Neumann involucradas son abelianas.

Sea $M = L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$, con μ una medida de probabilidad. Sea M_0 una subálgebra de M. Del hecho, ya mencionado en 2.1.4, de que M está generada por sus proyecciones (que son las funciones características) se sigue el hecho de que $M_0 = L^\infty(X, \mathcal{F}_0, \mu)$, donde $\mathcal{F}_0$ es la σ-subálgebra de $\mathcal{F}$ que consiste en los conjuntos de $\mathcal{F}$ tales su función característica es una proyección de M_0. Una esperanza condicional en el sentido clásico es una aplicación lineal $E : M \to M_0$ que cumple:

1. Dado $x \in M$, $x \geq 0$ implica $E(x) \geq 0$;
2. E es una proyección de norma 1;
3. E es normal, en el sentido de que respeta límites monótonos;
4. $\phi \circ E = \phi$, donde ϕ es el estado fiel y normal definido por $\phi(f) = \int f \, d\mu$ para $f \in M$.

Notemos que ϕ es un estado fiel y normal en M, de manera que $\phi_0 = \phi|_{M_0}$ es un estado fiel y normal de M_0. Si $H_0 = L^2(X, \mathcal{F}_0, \mu)$ y $H = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ son las representaciones GNS de M_0 y M con estados ϕ_0 y ϕ respectivamente, con vector cíclico Ω correspondiente a la función constante 1, se ve que el espacio H_0 puede verse como un subespacio del espacio H. Se deduce de las cuatro propiedades mencionadas que

$$P_{H_0}(x\Omega) = E(x)\Omega, \text{ para todo } x \in M,$$

donde $P_{H_0} : H \to H_0$ es el proyector ortogonal sobre H_0.

La noción de esperanza condicional generaliza esta construcción al caso no abeliano. Las esperanzas condicionales han jugado un papel central en la teoría de las álgebras de von Neumann desde la década de 1950, y su importancia y utilidad se acrecentó con los trabajos de Takesaki y Connes a principios de la década de 1970, para luego en la década de 1980 convertirse en uno de los conceptos centrales de la teoría del índice.

Definición 3.1.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann . Una proyección $E : M \to N$ que cumple:

1. $E \geq 0$; es decir, $x \in M_+ \Rightarrow E(x) \in N_+$;
2. $E(nxm) = nE(x)m$, si $x \in M$, $n, m \in N$;
3. $(Ex)^*(Ex) \leq E(x^*x)$, para todo $x \in M$.

es una *esperanza condicional* de M en N. Además,

1. Una esperanza condicional E se dice *normal* si $E(\sup_i x_i) = \sup_i E(x_i)$, para toda red creciente $\{x_i\}_{i\in I} \subset M$.

2. Una esperanza condicional E se dice *fiel* si $E(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$ para todo $x \in M$.

3. Dado un peso fiel, normal y semifinito ϕ en M, una esperanza condicional E se dice *ϕ–compatible* si $\phi \circ E = \phi$ (es decir, $\phi(E(x)) = \phi(x),\ \forall x \in M_+$).

Notación 3.1.2 Notaremos con $E(M, N)$ al conjunto de las esperanzas condicionales fieles y normales de M en N. En ocasiones, notaremos también$N \overset{E}{\subseteq} M$ a una inclusión de álgebras de von Neumann $N \subseteq M$ con una esperanza condicional $E : M \to N$.

Ejemplos 3.1.3 Mostraremos aquí algunos ejemplos elementales de esperanzas condicionales:

1. Cualquier estado φ de un álgebra de von Neumann M es una esperanza condicional $\varphi : M \to \mathbb{C}$;

2. Si $M = M_n(\mathbb{C})$, $N = \mathbb{C}^n$ visto como las matrices diagonales, y $p_1, \ldots, p_n$ son los proyectores minimales de N, entonces $E : M \to N$ dada por $E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x p_i$, es una esperanza condicional;

3. Si G es un grupo compacto de automorfismos de un álgebra de von Neumann M,
$$E(x) = \int_G \alpha_g(x)\, dg,$$
donde dg es la medida de Haar, es una esperanza condicional.

Finalmente enunciaremos dos resultados clásicos sobre esperanzas condicionales. El primero, debido a Tomiyama, es una caracterización de las esperanzas condicionales como proyectores de norma 1. El segundo, de M. Takesaki, es una de las herramientas más útiles para probar la existencia de esperanzas condicionales, y significa una nueva e importante aparición de la teoría modular.

Proposición 3.1.4 (Tomiyama) Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann . Si $E : M \to N$ es una proyección de norma 1, entonces es una esperanza condicional.

Teorema 3.1.5 (Takesaki) Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , y sea ϕ un peso fiel y normal en M. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. existe una esperanza condicional $E : M \to N$, que es ϕ-compatible;

2. $\sigma_t^{\phi}(N) \subseteq N$ para todo $t \in I\!R$, y ϕ es semifinito en N;

3. $\sigma_t^{\phi}(n) = \sigma_t^{\phi_N}(n)$ para todo $n \in N$ y $t \in I\!R$, donde σ^{ϕ_N} es el grupo modular de automorfismos de N correspondiente al peso fiel y normal ϕ_N en N dado por $\phi_N = \phi|_N$.

Notemos, como consecuencia del Teorema de Takesaki, que como en un álgebra de von Neumann finita M siempre hay un estado tracial, entonces dada una subálgebra cualquiera siempre hay una esperanza condicional fiel y normal que conmuta con la traza. En efecto, es inmediato que se verifica la condición 2 del Teorema de Takesaki, porque la traza, siendo un estado, es finita en toda subálgebra; en cuanto al grupo modular, por el Teorema 2.5.5 se ve que es trivial.

3.2 Indice para inclusiones de Algebras de Von Neumann

En esta sección estableceremos la teoría básica del Indice incluyendo, además de los resulados originales de V. Jones, las contribuciones, entre otros, de Pinsmer y Popa, Kosaki, Baillet, Denizeau y Havet.

3.2.1 Definición y Propiedades

Se asumirá que todas las álgebras de von Neumann consideradas son numerablemente descomponibles, es decir, que todas tienen estados normales fieles. Esto es equivalente a tener una representación fiel sobre un espacio de Hilbert separable.

Definición 3.2.1 Sea $N \subseteq M$ una inclusión de álgebras de von Neumann con una esperanza condicional $E : M \to N$. El *índice (probabilístico, o débil)* de E, notado Ind$E$, se define como el número

$$\mathrm{Ind}E = (\sup\{c \geq 0 : E(x) \geq cx, \forall x \in M_+\})^{-1}.$$

Si el supremo es cero, diremos que el índice de E es infinito. Diremos que la inclusión $N \subseteq M$ tiene *Indice finito* si existe una esperanza condicional fiel y normal $E : M \to N$ tal que $\mathrm{Ind}E < \infty$.

Esta definición no es la original de V. Jones, ya que su definición se basaba fuertemente en las propiedades de los factores II_1 de Murray y von Neumann, en particular la existencia de trazas. Pimsner y Popa [PP] probaron que esa definición es equivalente a la expresada en 3.2.1, con la ventaja de que su definición depende únicamente de la esperanza condicional, lo que permite utilizarla en contextos más amplios.

Proposición 3.2.2 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$ con $\mathrm{Ind}E < \infty$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. E es fiel y normal.

2. Si $p \in \mathcal{P}(N)$, entonces $E(p)p$ es invertible en pNp (porque $E(p)p \geq (\mathrm{Ind}E)p$).

3. Si $p \in \mathcal{P}(N)$ y $E_0 : pMp \to pNp$ es $E_0 = E|_{pMp}$ entonces $\mathrm{Ind}E_0 \leq \mathrm{Ind}E$. Si $p \in \mathcal{P}(N' \cap M)$ y $E_p : pMp \to pNp$ se define como $E_p(x) = E(x)(E(p)p)^{-1}$ para $x \in pMp$, entonces

$$\mathrm{Ind}E_p \leq (\mathrm{Ind}E)\|E(p)\| \leq \mathrm{Ind}E.$$

4. Si $\mathrm{Ind}E < \infty$ entonces los proyectores centrales canónicos atómicos, difusos y de tipos I, II y III de N y M coinciden [J1, P2]. Además, N es finita si y sólo si M es finita.

5. $\mathcal{Z}(N)$ es atómico (respectivamente, finito dimensional) si y sólo si $\mathcal{Z}(M)$ es atómico (respectivamente, finito dimensional).

6. Si N, M son factores, entonces $\dim N' \cap M \leq (\mathrm{Ind}E)^2$.

7. Si $Q \overset{F}{\subseteq} P$ es otra inclusión de álgebras de von Neumann tal que $Q \subseteq N$, $P \subseteq M$ y $F = E|_P$, entonces $\mathrm{Ind}F \leq \mathrm{Ind}E$.

8. Si $N \overset{E}{\subseteq} P \overset{F}{\subseteq} M$, entonces $\mathrm{Ind}E \circ F \leq \mathrm{Ind}E \cdot \mathrm{Ind}F$.

3.2.2 La construcción Básica de Jones

Sea $N \subseteq M$ una inclusión de álgebras de von Neumann, φ un estado fiel y normal de M, y $E : M \to N$ una esperanza condicional φ-compatible, fiel y normal. Consideremos $M \subseteq \mathcal{B}(H)$, con H la representación standard de M para φ, y definamos:

Definición 3.2.3 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E \in E(M, N)$ y φ un estado fiel y normal de N. Llamaremos también φ al estado de M dado por $\varphi \circ E$. Si $H = L^2(M, \varphi)$ es la representación standard para M con vector ξ_φ (ver 2.4), el *proyector de Jones* asociado a la esperanza E es el operador $e \in \mathcal{B}(H)$ que cumple, para todo $x \in M$,

$$e(x\xi_\varphi) = E(x)\xi_\varphi.$$

Observación 3.2.4 Es elemental verificar que efectivamente e es acotado, autoadjunto e idempotente. Otra forma equivalente de definir e, que de hecho es la que usa V. Jones en [J1], es definirlo como el proyector ortogonal de $L^2(M, \varphi)$ sobre el subespacio $[N\xi_\varphi]$ (que puede verse como $L^2(N, \varphi)$).

Dado un subconjunto K del espacio de Hilbert H, utilizaremos la notación $\overline{\mathrm{sp}}(K)$ para indicar el subespacio lineal cerrado generado por K.

Proposición 3.2.5 (Jones) El proyector de Jones cumple las siguientes propiedades:

1. $exe = E(x)e, \forall x \in M$,

2. $\overline{\mathrm{sp}} MeH = H$.

3. $\{e\}' \cap M = N$,

4. Si J_φ denota la conjugación modular para la representación standard respecto de φ, entonces $J_\varphi e J_\varphi = e$.

El paso que "abrió las puertas" en el trabajo original de V. Jones [J1] fue la observación de que el proyector de Jones permite generar una nueva álgebra más grande, y que la nueva inclusión conserva el índice. Así se genera una torre de álgebras, y en el estudio de esta torre se basan la gran mayoría de los resultados profundos sobre el índice.

Definición 3.2.6 Sean N, M, H y e como en la Definición 3.2.3. Se llama la *extensión* de M por e y se nota $\langle M, e\rangle$, al álgebra de von Neumann generada por M y e en $\mathcal{B}(H)$. Esta álgebra es llamada también la *construcción básica* para $N \overset{E}{\subseteq} M$. La *torre de álgebras* es la sucesión de álgebras

$$N \subseteq M \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots,$$

donde M_{i+1} es la construccón básica para la inclusión $M_{i-1} \subseteq M_i$.

Proposición 3.2.7 La Construcción Básica cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle M, e\rangle = \overline{\mathrm{sp}}^w\{xey : x, y \in M\}$.

2. $N \ni x \mapsto xe \in e\langle M, e\rangle e$ es un isomorfismo.

3. $\langle M, e\rangle = J_\varphi N' J_\varphi$.

4. $\mathcal{Z}(N) \ni z \mapsto J_\varphi z^* J_\varphi \in \mathcal{Z}(\langle M, e\rangle)$ es un isomorfismo y de hecho $J_\varphi z^* J_\varphi$ es el único elemento $z' \in \mathcal{Z}(\langle M, e\rangle)$ tal que $z'e = ze$.

Un resultado esencial en la construcción básica es poder obtener una nueva esperanza condicional $E_1 : \langle M, e\rangle \to M$, para así estar en condiciones de iterarla infinitamente. En el caso de factores II_1 la existencia de este esperanza proviene de que es posible extender la traza de M a $\langle M, e\rangle$, pero ya en el caso general de factores esto es imposible por carecerse de traza, y entonces la existencia debió probarse de otros modos. Kosaki [Ko1] utilizó la teoría de pesos a valores operadores de U. Haagerup para probarlo (ver, por ejemplo, [St, §11 y §12]). La idea utilizada en [BDH], más sencilla, se basa en la aplicación positiva de $M-M$ bimódulo

$$E^{-1} : \sum_i x_i e y_i \mapsto \sum_i x_i y_i, \tag{3.2.1}$$

definida para sumas finitas $\sum_i x_i e y_i$ de la *-subálgebra densa $\sum MeM$ de $\langle M, e\rangle$ en M, que define por continuidad un peso a valores operadores de $\langle M, e\rangle$ en M que se nota E^{-1}. El gran paso es probar que si el índice (en el sentido en que se lo haya definido) es finito, entonces el peso a valores operadores E^{-1} es finito (o sea, $E^{-1}(1) \in M$), de manera que puede normalizarse para que sea una esperanza condicional, y el índice fuerte resulta ser $E^{-1}(e)$ (ver Corolario 3.2.12).

3.2.3 Bases Ortonormales

En su profundo trabajo sobre el índice de factores II_1 y su relación con la entropía de Connes, Pinsmer y Popa [PP] mostraron que la condición de índice finito implica la existencia de una suerte de base ortonormal para M como N-módulo, considerando el "producto escalar" (a valores operadores)

$$\langle x, y\rangle_N = E(y^*x),$$

y donde el índice de Jones aparece como la "cantidad" de elementos de la base. Esto sugirió a varios autores [BDH, W] utilizar las bases ortonormales de módulos para definir el índice en el caso no factorial.

Con más precisión:

Definición 3.2.8 Una familia de elementos $\{m_j\}_j \subseteq M$ que cumple las condiciones:

1. $E(m_i^* m_j) = \delta_{ij} f_j \in \mathcal{P}(N), \forall i, j$
2. $(\sum_j m_j(eH)) = H$

se llama una *base ortonormal* de $N \overset{E}{\subseteq} M$.

Proposición 3.2.9 Dada una base ortonormal $\{m_j\}$ de M, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\{m_j e m_j^*\}_j$ es un sistema ortogonal de proyecciones (es decir, $\{m_j e\}$ son isometrías parciales y $\{m_j eH\}$ son subespacios de Hilbert de H ortogonales dos a dos).
2. $\sum m_j e m_j^* = 1$.
3. $\sum m_j e(m_j^* \xi) = \xi, \forall \xi \in H$; en particular $\sum m_j E(m_j^* x) = x, \forall x \in M$, esta última convergencia en la topología débil de operadores.

Se puede probar que $\sum_j m_j m_j^*$ es un operador acotado (es decir, las sumas finitas están uniformemente acotadas) si y sólo si E^{-1} está definida en todos lados, esto es que $E^{-1}(1)$ es un operador acotado, en cuyo caso $E^{-1}(1) = \sum_j m'_j m'^*_j$ para cualquier base ortonormal $\{m'_j\}_j$.

El hecho de que $E^{-1}(1)$ coincide con $\sum m_j m_j^*$ para inclusiones de factores arbitrarios está implícito en [Ko1] y aparece explícitamente en [BDH] para álgebras de von Neumann arbitrarias. También se hace notar en [BDH] que $\sum m_j m_j^* \in \mathcal{Z}(M)$.

Por lo dicho precedentemente, en [BDH] y [W] se hace la siguiente definición:

Definición 3.2.10 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , $E \in E(M, N)$. Definimos el Indice (fuerte) de la esperanza E como el operador

$$\mathrm{Ind}_{BDH}(E) = E^{-1}(1).$$

En el caso de factores II_1 y esperanzas que preservan la traza, se prueba en [PP] que el índice probabilístico coincide con el índice de Jones $(= \sum_j m_j m_j^*)$. Para inclusiones arbitrarias de álgebras de von Neumann el estudio de la relación entre $\mathrm{Ind}E$ y $\sum m_j m_j^* = E^{-1}(1)$ fue iniciado en [BDH] y continuado en [L1], [Jol], etc. Después de varios años de coexistencia de las nociones de índice débil y de índice fuerte se probó que ambas nociones de índice finito coinciden:

Teorema 3.2.11 (Popa, BDH, Jolissant) $\mathrm{Ind}(N \overset{E}{\subseteq} M) < \infty$ si y sólo si $N \overset{E}{\subseteq} M$ tiene una base ortonormal $\{m_j\}_j$ tal que $\sum m_j m_j^*$ $(= E^{-1}(1))$ es un operador acotado, y en ese caso $\mathrm{Ind}E \le \|\sum_j m_j m_j^*\| \le (\mathrm{Ind}E)^2$. Más precisamente, si $\mathrm{Ind}E < \infty$ o $\sum m_j m_j^*$ es un operador acotado, entonces:

a) Si N es débilmente estable (es decir, $\forall n \ge 1, \exists Q \subseteq N, Q \simeq M_{n\times n}(\mathbb{C})$) entonces

$$\mathrm{Ind}E = \|\sum m_j m_j^*\|$$

b) Si N es propiamente infinita, entonces existe $m \in M$ tal que $x = mE(m^*x)$, $\forall x \in M$, es decir que el conjunto de un elemento $\{m\}$ es una base ortonormal de $N \overset{E}{\subseteq} M$. Además, m puede ser elegido de manera que $E(m^*m) = 1$.

c) En general, $\sum m_j m_j^* \le (\mathrm{Ind}E)^2$.

Corolario 3.2.12 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y sea $E : M \to N$ una esperanza condicional con $\mathrm{Ind}E < \infty$, y M_1 la construcción básica para $N \overset{E}{\subseteq} M$. Entonces

1. Existe $E_1 \in E(M_1, M)$ tal que $E_1(e) = (\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1}$.

2. $\mathrm{Ind}_{BDH}(E)_1 = E(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))$.

3. Si $\dim(\mathcal{Z}(N)) < \infty$ entonces $\dim(N' \cap M_1) < \infty$.

Demostración. En primer lugar tomemos el peso a valores operadores E^{-1}. Por el Teorema 3.2.11, sabemos que E tiene índice fuerte finito, es decir que existe una base ortonormal $\{m_i\}$ en M. Por 2 de la Proposición 3.2.9, tenemos que $\sum m_i e m_i^* = 1$. Aplicando el peso a valores operadores E^{-1} a dicha igualdad, tenemos:

$$E^{-1}(1) = \sum m_i m_i^* = \mathrm{Ind}_{BDH}(E).$$

Notemos que, como puede elegirse una base ortonormal tal que $m_1 = 1$, siempre vale que $\mathrm{Ind}_{BDH}(E) \geq 1$, o sea que es invertible. Esto nos permite definir

$$E_1(x) = (\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1} E^{-1}(x),$$

para todo $x \in M_1$. Se puede verificar que E_1 es una esperanza condicional, con lo que queda probado 1. Para ver 2, notemos que $\{m_j e(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{1/2}\}$ es una base ortonormal para M_1, de manera que $\mathrm{Ind} E_1 = E(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))$. Para probar 3, como E_1 tiene índice fuerte finito, por el Teorema 3.2.11) sabemos que tiene índice débil finito. Entonces, por 7 de 3.2.2, $E \circ E_1$ tiene ídice débil finito. Si a esta esperanza la restringimos a $N' \cap M_1$, tenemos una esperanza $E \circ E_1 : N' \cap M_1 \to \mathcal{Z}(N)$, que tiene índice finito por 6 3.2.2. Ahora, por 3 de 3.2.2, si $\dim \mathcal{Z}(N) < \infty$, debe ser $\dim N' \cap M_1 < \infty$. □

3.3 La teoría de Longo y su extensión

En su trabajo sobre la teoría del índice de Jones para inclusiones de factores ([L1]), R. Longo ha desarrollado definición de índice diferente e interesante, junto con técnicas que son aprovechadas al máximo cuando los factores son propiamente infinitos y a la vez semifinitos, es decir de tipos I_∞ ó II_∞. En esta sección desarrollaremos una teoría análoga a la de Longo, eliminando la condición de que las álgebras sean factores.

En el Teorema 3.3.19 muestra la equivalencia de la nueva noción de índice finito con las anteriores. Esto está relacionado con el hecho de que la construcción básica y rl túnel sean "intercambiables", es decir que la construcción básica del túnel sea la inclusión original, y viceversa. Esto no tiene por qué suceder necesariamente, ver el ejemplo 3.3.20. Esta extensión de la teoría de R. Longo está publicada en [A]. Una aplicación de esta equivalencia aparece en la prueba del Teorema 5.1.27, que utilizaremos en la sección 5.4 para caracterizar el grupo de Weyl de la esperanza condicional sobre el álgebra fija por la acción de un grupo propiamente exterior de automorfismos.

Si bien varios de los resultados (de hecho, casi todo el contenido de la subsección 3.3.2) parecen ser redundantes con los de la sección 3.2, tienen como hipótesis que el índice es finito en el sentido de Longo, y son utilizados en el nuevo contexto como pasos previos para probar la equivalencia con las definiciones anteriores del 'i ndice Hacemos notar aquí que si bien los resultados son llamativos, las hipótesis son bastante restrictivas (ver 3.3.20).

3.3.1 Notación y preliminares

Asumamos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ son álgebras de von Neumann propiamente infinitas y semifinitas, con predual separable. Como $\mathcal{A}$ es semifinita, existe una traza semifinita fiel y normal τ en $\mathcal{A}$ (Definición 2.3.10).

Supongamos además que tenemos una esperanza condicional $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, fiel y normal, tal que $\tau \cdot E = \tau$. El Teorema de Takesaki (3.1.5) asegura que τ es también semifinita en $\mathcal{B}$.

Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son propiamente infinitas, por la Proposición 2.4.2, podemos considerar $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ donde hay un vector conjuntamente cíclico y separante $\Omega \in \mathcal{H}$ para ambas. Llamaremos

$$\varphi =< \cdot \Omega, \Omega >\in \mathcal{A}_*, \tag{3.3.2}$$

y

$$\phi = \varphi \cdot E \in \mathcal{A}_*^+. \tag{3.3.3}$$

Por la Proposición 2.4.1, existe un vector $\xi \in \mathcal{P}_\Omega(\mathcal{A})$ tal que

$$\phi = \langle \cdot \xi, \xi \rangle. \tag{3.3.4}$$

En [L0, L1], R. Longo introduce el "endomorfismo canónico" de $\mathcal{A}$, notado γ, de la siguiente manera:

$$\gamma(x) = J_{\mathcal{B}}\, J_{\mathcal{A}}\, x\, J_{\mathcal{A}}\, J_{\mathcal{B}} \qquad x \in \mathcal{A}, \tag{3.3.5}$$

donde $J_{\mathcal{A}}$ y $J_{\mathcal{B}}$ son las conjugaciones modulares de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente con respecto a Ω.

V. Jones hizo notar que se puede definir $\mathrm{Ind}E$ como la derivada de Radon-Nikodym del peso tracial $\tau \cdot \gamma$ con respecto a τ, en el sentido de Pedersen y Takesaki (Teorema 2.5.8). Esta derivada, que en el caso factor es un escalar que coincide con el índice de Jones, resulta ser, como en el caso del índice fuerte, un operador central e invertible, e incluso eventualmente no acotado.

Para nuestra nueva definición del índice deberemos asumir que $\tau \cdot \gamma$ es semifinito. Al final del capítulo veremos que esta condición está implicada por la finitud del índice en el sentido débil de la Definición 3.2.1, de manera que la suposición estará justificada.

Si $\tau \cdot \gamma$ no es semifinito, diremos que el índice es infinito.

Como τ y $\tau \cdot \gamma$ son pesos normales y τ es también tracial y semifinita, podemos aplicar el Teorema de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki (2.5.8) para obtener un único operador $h_{\mathcal{A}}$, invertible, autoadjunto y positivo, afiliado al centro de $\mathcal{A}$ (porque ambos pesos son traciales), tal que

$$\tau(\gamma(x)) = \tau(h_{\mathcal{A}} x). \tag{3.3.6}$$

Antes que nada, debemos asegurarnos de que el operador $h_{\mathcal{A}}$ está bien definido:

Lema 3.3.1 El operador $h_{\mathcal{A}}$ de la ecuación 3.3.6 no depende del vector bicíclico elegido.

Demostración. Dados dos vectores bicíclicos, se puede encontrar un unitario en $\mathcal{B}$ que conjuga los endomorfismos canónicos ([L0, Teorema 1.1]). Sean Ω y η dos vectores bicíclicos, y $u \in \mathcal{B}$ un unitario que conjuga los respectivos endomorfismos canónicos γ_Ω y γ_η. Entonces, como τ es una traza,

$$\tau(\gamma_\Omega(x)) = \tau(u\gamma_\eta(x)u^*) = \tau(\gamma_\eta(x)),$$

y por la unicidad del Teorema de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki (2.5.8), el operador $h_{\mathcal{A}}$ es único. □

El Lema 3.3.1 da sentido a la siguiente definición:

Definición 3.3.2 Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ álgebras de von Neumann propiamente infinitas, τ una traza semifinita en M y γ el endomorfismo canónico. Sea $h_{\mathcal{A}}$ el operador definido por la ecuación 3.3.6.

1. Si el operador $h_{\mathcal{A}}$ es acotado, diremos que la esperanza E tiene índice finito, y llamaremos al operador $\mathrm{Ind}_L E = h_{\mathcal{A}}$ el *índice* (en el sentido de Longo) de la esperanza E. Si $h_{\mathcal{A}}$ es no acotado, diremos que E tiene índice infinito.

2. El proyector de Jones asociado a E es el proyector p dado por

$$p = [\mathcal{B}\xi] \in \mathcal{B}', \tag{3.3.7}$$

donde ξ es el vector definido en 3.3.4 que representa al estado ϕ de 3.3.3.

Observación 3.3.3 Notemos que esta es exactamente la misma definición que se dio en 3.2.3, ya que el estado ϕ verifica que $\phi \circ E = \phi$.

Como el estado ϕ definido en la ecuación 3.3.3 es normal y fiel, el vector ξ es separante para $\mathcal{B}$, y entonces el homomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B} &\to \mathcal{B}p \\ x &\mapsto xp \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

es un isomorfismo, como en 2 de 3.2.7.

El proyector de Jones que hemos definido nos permite realizar la construcción básica de manera análoga a la de la sección 3.2.2.

Definición 3.3.4 Llamaremos M a la extensión de $\mathcal{A}$ por E.

Proposición 3.3.5 El endomorfismo canónico γ cumple que $\mathcal{B} = \gamma(M)$.

Demostración. En primer lugar, se verifica que las involuciones antiunitarias $J_{\mathcal{A}}^{\Omega}$ y $J_{\mathcal{A}}^{\xi}$ correspondientes a los vectores bicíclicos Ω y ξ coinciden, por estar ξ en el cono de Ω. Podemos entonces hablar de $J_{\mathcal{A}}$, $J_{\mathcal{B}}$, etc., sin hacer referencia al vector cíclico y separante al que corresponden.

Esto significa en particular que el endomorfismo canónico γ depende de la representación pero no del vector elegido. Ahora podemos escribir, utilizando 3 de la Proposición 3.2.7,

$$\gamma(M) = J_{\mathcal{B}} J_{\mathcal{A}} M J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{B}} = J_{\mathcal{B}} J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} \mathcal{B}' J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{B}} = J_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' J_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}.$$

□

En M podemos construir una extensión $\tilde{\tau}$ de la traza τ de M de la siguiente manera: como $J_M = J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{B}} J_{\mathcal{A}}$, el endomorfismo canónico γ de $\mathcal{A}$ es también el endomorfismo canónico de M. Como el operador $h_{\mathcal{A}}$ es invertible, positivo y afiliado al centro de $\mathcal{A}$ definimos, para $x \in M_+$,

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1} x)), \tag{3.3.9}$$

en el sentido de la Definición 2.5.7.

Proposición 3.3.6 Si $\mathrm{Ind}_L E < \infty$, entonces el peso $\tilde{\tau}$ definido en la ecuación 3.3.9 es una traza fiel, normal y semifinita en M que extiende a τ, y $\tilde{\tau} \cdot \gamma$ es también una traza semifinita.

Demostración. Consideremos dos elementos $x, y \in M$. Entonces tenemos

$$\tilde{\tau}(xy) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1} xy) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1})\gamma(x)\gamma(y)).$$

Como $h_{\mathcal{A}}^{-1}$ es central en $\mathcal{A}$ y τ es una traza,

$$\tilde{\tau}(xy) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1})\gamma(y)\gamma(x)) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1} yx) = \tilde{\tau}(yx),$$

probando que $\tilde{\tau}$ es una traza. También debemos probar que extiende a τ: dado $x \in \mathcal{A}_+$,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(x) &= \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1} x)) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1} x)) = \\ &\quad \text{(usando que } \tau \cdot \gamma = \tau(h_{\mathcal{A}} \cdot)) \\ &= \tau(h_{\mathcal{A}} h_{\mathcal{A}}^{-1} x) = \tau(x). \end{aligned}$$

Tenemos por tanto que $\tilde{\tau}$ extiende a τ.

Además, se verifica que $\tilde{\tau}$ es semifinita en M, porque τ es semifinita en $\mathcal{B}$, y que $\tilde{\tau} \cdot \gamma$ es también semifinita, notemos simplemente que el subespacio denso donde es finita es $\gamma^{-1}(\mathcal{M}_\tau)$, el subespacio débilmente denso de $\mathcal{B}$ donde τ es finita (ver Ecuación 2.3.4). Nos resta ver que $\tilde{\tau}$ es fiel y normal. Sea $x \in M_+$, con $\tilde{\tau}(x) = 0$. Entonces

$$0 = \tilde{\tau}(x) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1/2} x h_{\mathcal{A}}^{-1/2})).$$

Como γ es un isomorfismo, y τ es fiel, entonces $h_{\mathcal{A}}^{-1/2} x h_{\mathcal{A}}^{-1/2} = 0$, lo que implica que $x = 0$, al ser $h_{\mathcal{A}}$ invertible. La normalidad de $\tilde{\tau}$ se desprende de que τ es normal, γ es normal, y multiplicar por un operador acotado fijo también es normal. □

Corolario 3.3.7 Existe una nueva esperanza condicional fiel y normal

$$E_{\mathcal{A}} : M \to \mathcal{A} \tag{3.3.10}$$

que conmuta con $\tilde{\tau}$, y un operador positivo invertible h_M del centro de M análogo al $h_{\mathcal{A}}$ anterior.

Demostración. Como $\tilde{\tau}$ es una traza fiel, normal y semifinita de M y $\tilde{\tau}|_M = \tau$ es semifinita existe, por el Teorema de Takesaki (3.1.5), una esperanza condicional fiel y normal en las condiciones señaladas en el enunciado. □

Tiene, por lo tanto, sentido definir el índice $\mathrm{Ind}_L E_{\mathcal{A}}$, y este proceso puede interarse indefinidamente, dando lugar a la Torre de Algebras.

Como veremos en el Corolario 3.3.13, la esperanza $E_{\mathcal{A}}$ coincide con la esperanza E_1 del Lema 3.2.12.

3.3.2 Propiedades de $\mathrm{Ind}_L E$

Cuando $\mathcal{A}$ es un factor, el índice es un escalar, y es el mismo en todos los niveles de la torre, porque $\mathrm{Ind}_L E$ está en el centro de todas las álgebras de la torre. Cuando el Indice pasa a ser un operador, esto ya no tiene por qué suceder en principio. Sin embargo, la propiedad de que el índice es el mismo en todos los "niveles" sigue valiendo. El siguiente Teorema establece una relación entre diferentes índices de inclusiones en la torre. Brevemente, se prueba que la esperanza E "baja" el índice un nivel.

Proposición 3.3.8 Si E tiene índice finito , entonces la esperanza E_0 definida en la ecuación 3.3.15 tiene índice finito y

$$\mathrm{Ind}_L E_0 = E(\mathrm{Ind}_L E).$$

Demostración. Alcanza con ver que si $x \in \mathcal{B}$,

$$\tau(E(h_{\mathcal{A}})x) = \tau(E(h_{\mathcal{A}}x)) = \tau(h_{\mathcal{A}}x) = \tau(\gamma(x)),$$

y notar que E lleva elementos del centro de $\mathcal{A}$ en elementos del centro de $\mathcal{B}$. Por el Teorema de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki (2.5.8) $h_{\mathcal{B}}$ es único, de manera que $E(h_{\mathcal{A}}) = h_{\mathcal{B}}$. □

El siguiente resultado justifica que es posible construir la torre de Jones de la inclusión preservando las principales propiedades: se muestra que índice finito en un nivel implica índice finito en todos los niveles de la torre.

Proposición 3.3.9 Si E tiene índice finito, entonces la esperanza $E_{\mathcal{A}}$ definida en la ecuación 3.3.10 tiene índice finito, y además $\|\mathrm{Ind}_L E_{\mathcal{A}}\| \leq \|\mathrm{Ind}_L E\|$.

Demostración. Mostraremos que $\tilde{\tau} \cdot \gamma \leq \|h_{\mathcal{A}}\|\tilde{\tau}$, y esto implica que h_M es acotado con norma menor que $\|h_{\mathcal{A}}\|$ por la primera parte de la demostración del Teorema 5.12 de [PT].

Dado $x \in M$, como $h_{\mathcal{A}}$ es acotado,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\tau} \cdot \gamma)(x) &= \tau(\gamma(x)) \\
&= \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}(h_{\mathcal{A}}^{-1}x))) \\
&\leq \|h_{\mathcal{A}}\|\tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1}x)) \\
&= \|h_{\mathcal{A}}\|\tilde{\tau}(x).
\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que $\|h_M\| \leq \|h_{\mathcal{A}}\|$, pero también tenemos, por la Proposición 3.3.8, que

$$\|h_{\mathcal{A}}\| = \|E_{\mathcal{A}}(h_M)\| \leq \|h_M\|,$$

lo que prueba la igualdad. □

Considerando a las álgebras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}p$ representadas en $\mathcal{H}$ y $p\mathcal{H}$ respectivamente, podemos aplicar el Teorema de Implementación Unitaria ([KR, 7.2.9]) al isomorfismo $\Phi(x) = xp$ de la ecuación 2 de la Proposición 3.2.7, para obtener un operador unitario $V : \mathcal{H} \to p\mathcal{H}$ tal que

$$\Phi(x) = VxV^*. \tag{3.3.11}$$

Este operador V puede verse como una isometría parcial de $\mathcal{H}$ que cumple

$$VxV^* = xp,\ x \in \mathcal{B}, \tag{3.3.12}$$

y $V^*V = 1$. Además, como $pV = V$, cumple

$$Vx = VxV^*V = xpV = xV,\ \text{para todo } x \in \mathcal{B}, \tag{3.3.13}$$

de manera que $V \in \mathcal{B}'$.

El siguiente Teorema es una herramienta técnica necesaria para probar la Proposición 3.3.11, pero a su vez es un interesante resultado en cuanto a establecer la relación entre la esperanza condicional E y el endomorfismo canónico.

Teorema 3.3.10 Con las notaciones anteriores, dado $x \in \mathcal{A}$, se cumplen las siguientes igualdades:

1. $E(x) = V^*xV$;

2. $E(x) = J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{B}}\gamma(x)J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}}$.

Demostración. Si $x \in \mathcal{A}$, recordando que vimos en la discusión previa que $V \in \mathcal{B}'$,

$$E(x) = V^*VE(x) = V^*E(x)V = V^*E(x)pV = V^*pxpV = V^*xV.$$

Ahora utilizaremos el hecho, deducible usando con sutileza la teoría modular, de que

$$J_{\mathcal{A}}VJ_{\mathcal{B}} = V$$

(ver, por ejemplo, la demostración de la Proposición 5.1 de [L1]). Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} E(x) &= V^*xV = J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{A}}xJ_{\mathcal{A}}VJ_{\mathcal{B}} \\ &= J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{B}}J_{\mathcal{B}}J_{\mathcal{A}}xJ_{\mathcal{A}}J_{\mathcal{B}}J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}} \\ &= J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{B}}\gamma(x)J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

$\square$

En la teoría usual del Indice de Jones para inclusiones de factores, se cumple la relación expresada en 1 del Corolario 3.2.12, que con la notación de esta sección sería

$$E_{\mathcal{A}}(p) = \mathrm{Ind}_L E^{-1},$$

donde $\mathrm{Ind}_L E$ es en ese contexto un número real mayor que 1. La Proposición siguiente es la generalización de ese resultado a nuestro caso.

Proposición 3.3.11 Si E tiene índice finito, entonces

$$(\mathrm{Ind}_L E)E_{\mathcal{A}}(p) = 1.$$

Demostración. Como $V \in \mathcal{B}'$, $J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$, de manera que si $x \in \mathcal{A}$ tenemos, por el Teorema 3.3.10,

$$\begin{aligned} \tau(E(x)) &= \tau(J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{B}}\gamma(x)J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}}) = \\ &= \tau(J_{\mathcal{B}}VJ_{\mathcal{B}}J_{\mathcal{B}}V^*J_{\mathcal{B}}\gamma(x)) \qquad (3.3.14) \\ &= \tau(J_{\mathcal{B}}pJ_{\mathcal{B}}\gamma(x)) = \tau(\gamma(px)), \end{aligned}$$

porque $p = J_{\mathcal{A}}pJ_{\mathcal{A}}$. Ahora, $\gamma(xp) \in \mathcal{B}$, por la Proposición 3.3.5, de manera que podemos escribir, usando la ecuación 3.3.14,

$$\tau(x) = \tau(E(x)) = \tilde{\tau}(\gamma(px)) = \tilde{\tau}(h_M px) = \tilde{\tau}(E_{\mathcal{A}}(h_M px)) = \tau(E_{\mathcal{A}}(h_M p)x).$$

Tenemos entonces, como $E_{\mathcal{A}}(h_M p) \in \mathcal{A}$ y $\tau((1 - E_{\mathcal{A}}(h_M p))x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$, que

$$E_{\mathcal{A}}(h_M p) = 1.$$

Para ver la segunda afirmación, sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\tau(E_{\mathcal{A}}(p)x) = \tau(E_{\mathcal{A}}(px)) = \tilde{\tau}(px) = \tau(\gamma(h_{\mathcal{A}}^{-1}px)) = \tau(\gamma(pxh_{\mathcal{A}}^{-1})) = \tau(E(xh_{\mathcal{A}}^{-1}) = \tau(h_{\mathcal{A}}^{-1}x),$$

lo que prueba que $E_{\mathcal{A}}(p) = h_{\mathcal{A}}^{-1}$. $\square$

Si $(\tau \cdot \gamma)|_{\mathcal{A}}$ es semifinita, tenemos también que $\tau|_{\gamma(\mathcal{A})}$ es semifinita, y por el Teorema de Takesaki (3.1.5) hay una esperanza condicional fiel y normal

$$E_0 : \mathcal{B} \to \gamma(\mathcal{A}) \qquad (3.3.15)$$

que conmuta con τ; en particular podemos repetir la construcción anterior para obtener un proyector

$$e \in \mathcal{A}, \text{ con } \mathcal{A} =< \mathcal{B}, e >, \, exe = E_0(x)e, x \in \mathcal{B}. \tag{3.3.16}$$

Notemos que por el argumento anterior, el endomorfismo canónico γ nos permite construir de manera canónica un túnel para la inclusión tal que las propiedades de la inclusión original se preservan.

La construcción del "túnel" nos permite probar:

Corolario 3.3.12 Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ álgebras de von Neumann propiamente infinitas y semifinitas, $E \in E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, con E de índice finito en el sentido de Longo. Entonces valen las desigualdades

$$x \leq (\mathrm{Ind}_L E)\, E(x), \tag{3.3.17}$$

y

$$x \leq \|\mathrm{Ind}_L E\|\, E(x), \tag{3.3.18}$$

para todo $x \in \mathcal{A}_+$.

Demostración. Aplicando la Proposición 3.3.11 a la construcción hacia abajo que hicimos en la discusión precedente, tenemos que

$$1 = (\mathrm{Ind}_L E)\, E(e),$$

y como $\mathrm{Ind}_L E \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, estamos en condiciones de reproducir (!' a pesar de que el índice no es un escalar !) la demostración de la Proposición 2.1 de [PP], para obtener

$$x \leq (\mathrm{Ind}_L E)\, E(x).$$

Para ver la segunda desigualdad, notemos simplemente que, como $E(p) \geq 0$,

$$1 = (\mathrm{Ind}_L E)\, E(p) = E(p)^{1/2} (\mathrm{Ind}_L E)\, E(p)^{1/2} \leq \|\mathrm{Ind}_L E\|\, E(p),$$

y de nuevo se puede proceder como antes. □

Corolario 3.3.13 La esperanza $E_{\mathcal{A}}$ definida en 3.3.7 coincide con la esperanza E_1 del Lema 3.2.12.

Demostración. Por la Proposición 3.3.11,

$$E_{\mathcal{A}}(p) = (\mathrm{Ind}_L E)^{-1} = \mathrm{Ind}_{BDH}(E)^{-1},$$

y entonces se hace obvio de la definición de E_1 (ver la ecuación 3.2.1) la igualdad entre las esperanzas. $\square$

Si bien la Proposición siguiente está establecida en [AS2] para el caso en que la inclusión tiene índice débil finito, nos es necesario ver que sigue valiendo para en la sección siguiente usarla en la demostración de que los diferentes índices coinciden. Es por esto que incluímos aquí la versión para el caso de índice finito en el sentido de Longo. La herramienta esencial será la desigualdad 3.3.17. Como índice fuerte finito implica índice débil finito, la demostración de [AS2] vale para los dos casos "convencionales", de manera que sólo explicitamos la demostración para el caso de índice de Longo finito.

Proposición 3.3.14 Si E tiene índice finito (en cualquier sentido), entonces $Mp = \mathcal{A}p$.

Demostración. El conjunto $K = \{a_0 + \sum_i a_i p b_i : \ a_i, b_i \in \mathcal{A}\}$ es débilmente denso en M. Dado $x \in M$, tenemos una red $\{x_\alpha\}_\alpha \subseteq M_0$ tal que $x_\alpha \to x$ con la topología débil de operadores. Es trivial entonces que $x_\alpha p \to xp$. Para cada elemento x_α existe un $a_\alpha \in \mathcal{A}$ con $a_\alpha p = x_\alpha p$ (usando que $pyp = E(y)p$ para todo y de $\mathcal{A}$). Por el Teorema de Densidad de Kaplansky (2.1.12), podemos asumir que la red $\{x_\alpha\}_\alpha$ es acotada, esto es $\|x_\alpha\| \le c, \ c \in I\!R$, para todo α. Entonces podemos escribir, como $x \mapsto xp$ es isomorfismo (ecuación 3.3.8), y usando el Corolario 3.3.12,

$$\begin{aligned} \|a_\alpha\| &= \|a_\alpha^* a_\alpha\|^{1/2} \le (\mathrm{Ind}_L E)^{1/2} \|p a_\alpha^* a_\alpha p\|^{1/2} \\ &= (\mathrm{Ind}_L E)^{1/2} \|a_\alpha p\| = (\mathrm{Ind}_L E)^{1/2} \|x_\alpha p\|, \end{aligned}$$

de manera que $\{a_\alpha\}$ es acotada. Eligiendo una subred de $\{a_\alpha\}$ que converja a un $a \in \mathcal{A}$, tenemos claramente que $ap = xp$. $\square$

3.3.3 Relación entre $\mathrm{Ind}_L E$ y las definiciones anteriores del índice

El objetivo principal de esta sección es mostrar que las diversas nociones de índice finito que hemos mencionado son equivalentes. Este hecho es importante, entre otras cosas, porque hemos logrado caracterizar algunas propiedades en función de la finitud de alguno de los índices, y será interesante tener el dato de que siguen valiendo esas propiedades si podemos mostrar que alguno de los otros índices es finito.

Estamos interesados en comparar los siguientes números:

$$\lambda_1 = \max\{\lambda : E(x) \geq \lambda x,\ x \in \mathcal{A}_+\}$$

$$\lambda_2 = \max\{\lambda : \|E(x)\| \geq \lambda\|x\|,\ x \in \mathcal{A}_+\}$$

que en el caso de factores finitos son definiciones equivalentes del Indice de Jones (más precisamente, de la inversa del índice: [PP], sección 2), con el índice fuerte (ver Definición 3.2.10) y el índice de Longo (ver Definición 3.3.2).

El Lema siguiente, también de Baillet, Denizeau y Havet, prueba que siempre vale $\lambda_1 = \lambda_2$. Reproducimos aquí la demostración más que nada por razones estéticas.

Lema 3.3.15 ([BDH]) Para todo positivo $x \in M$ y $\lambda > 0$, $\|E(x)\| \geq \lambda\|x\|$ si y sólo si $E(x) \geq \lambda x$.

Demostración. La recíproca es clara. Para ver la ida, sea $y \in M^+$, $\lambda > 0$ y supongamos que

$$\|E(x)\| \geq \lambda\|x\|.$$

Para cada $n \in I\!N$, sea $b_n = (E(y*y) + 1/n)^{-1/2}$. Entonces

$$\begin{aligned} b_n y^* y b_n &\leq \|b_n y^* y b_n\| \leq \|y^* y\| \|b_n^{-2}\| \leq \\ &\leq \lambda^{-1}\|E(y^* y)\| \|(E(y^* y) + 1/n)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}, \end{aligned}$$

y podemos escribir

$$y^* y \leq \lambda^{-1}(E(y^* y) + 1/n) \text{ para todo } n \in I\!N$$

y

$$\lambda y^* y \leq E(y^* y)$$

$\square$

Lema 3.3.16 Si $\lambda_1 > 0$, o si E tiene índice finito, entonces

$$M = \{apb : \ a, b \in \mathcal{A}\}.$$

Demostración. Llamemos

$$M_0 = \{apb : \ a, b \in \mathcal{A}\} \subseteq M.$$

Es trivial que M_0 es una *-subálgebra, ya que $pxp = E(x)p$. Por Proposición 3.3.14, alcanza entonces con mostrar que $1 \in \bar{M}_0$, y en el contexto en que estamos trabajando se cumple que $1 \in M_0$. En efecto, recordemos que $V \in \mathcal{B}'$, de manera que $V_0 = J_{\mathcal{A}} V J_{\mathcal{A}}$ es una isometría de M (porque $M = J_{\mathcal{A}} \mathcal{B} J_{\mathcal{A}}$) que cumple:

$$V_0^* V_0 = J_{\mathcal{A}} V^* J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} V J_{\mathcal{A}} = J_{\mathcal{A}} V^* V J_{\mathcal{A}} = 1 \tag{3.3.19}$$

$$V_0 V_0^* = J_{\mathcal{A}} V J_{\mathcal{A}} J_{\mathcal{A}} V^* J_{\mathcal{A}} = J_{\mathcal{A}} p J_{\mathcal{A}} = p. \tag{3.3.20}$$

Luego, $1 = V_0^* p V_0$, y por la Proposición 3.3.14 vale que $Mp = \mathcal{A}p$, de manera que existe $m \in \mathcal{A}$ con $V_0^* p = mp$, y $1 = mpm^* \in M_0$. □

El siguiente Teorema es el paso esencial para mostrar la equivalencia de las definiciones de Indice.

Teorema 3.3.17 Si E tiene índice finito, entonces $\mathrm{Ind}_L E$ coincide con el índice de Baillet, Denizeau y Havet. Recíprocamente, si la esperanza E tiene índice finito en el sentido de [BDH], entonces E tiene índice finito.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\mathrm{Ind}_L E < \infty$. Entonces, tomando m del Lema 3.3.16, se ve fácilmente que (m, m^*) es una base ortonormal para $\mathcal{A}$, porque si $x \in \mathcal{A}_+$,

$$\begin{aligned} xp &= mpm^*xp = mE(m^*x)p \\ px &= pxmpm^* = pE(xm)m^* \end{aligned}$$

Como E es fiel, podemos deducir que $x = mE(m^*x) = E(xm)m^*$ para todo $x \in \mathcal{A}_+$ y, por linealidad, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, por la Proposición 3.3.11, y como $mpm^* = 1$,

$$mm^* = mh_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{A}}(p) m^* = h_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{A}}(mpm^*) = h_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{A}}(1) = h_{\mathcal{A}},$$

de manera que tenemos que $h_{\mathcal{A}}$ es el índice de E en el sentido fuerte.

Para ver la recíproca, sea $\{m_i\}_i$ una base ortonormal para $\mathcal{A}$. Mostraremos que $\sum m_i m_i^*$ es la derivada de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki de $\tau \cdot \gamma$ respecto de τ. Tenemos, para $x \in \mathcal{A}$, y utilizando la ecuación 3.3.14 y 2' de la Proposición 3.2.9,

$$\begin{aligned}
\tau(\sum m_i m_i^* x) &= \sum \tau(m_i^* x m_i) \\
&= \sum \tau(E(m_i^* x m_i)) \\
&= \sum \tau(\gamma(p m_i^* x m_i)) \\
&= \sum \tau(\gamma(m_i p m_i^*)\gamma(x)) \\
&= \tau(\gamma(\sum m_i p m_i^*)\gamma(x)) \\
&= \tau(\gamma(x)).
\end{aligned}$$

y la unicidad del Teorema de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki (2.5.8) implica que

$$\mathrm{Ind}_L E = \mathrm{Ind}_{BDH}(E).$$

□

Proposición 3.3.18 Si $\lambda_1 > 0$, entonces E tiene índice finito.

Demostración. Tomamos nuevamente m de la demostración del Lema 3.3.16. Sabemos que mm^* pertenece al centro de $\mathcal{A}$ porque (m, m^*) es una base ortonormal. Procediendo nuevamente como en la demostración de 3.3.17, tenemos, para $x \in \mathcal{A}$,

$$\tau(mm^* x) = \tau(\gamma(x)).$$

Una vez más, por la unicidad en el Teorema 2.5.8, tiene que ser $h_{\mathcal{A}} = mm^*$, de manera que $h_{\mathcal{A}}$ es acotado. □

En el siguiente Teorema resumimos lo anterior en el hecho de que todas las definiciones de índice finito son equivalentes para álgebras propiamente infinitas y semifinitas:

Teorema 3.3.19 Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ álgebras de von Neumann propiamente infinitas y semifinitas, $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una esperanza condicional fiel y normal que conmuta con una traza τ semifinita en $\mathcal{A}$. Entonces son equivalentes:

(i) E tiene índice débil finito.

(ii) $\lambda_2 > 0$.

(iii) E tiene índice finito.

(iv) E tiene índice fuertemente finito en el sentido de Baillet, Denizeau y Havet.

(v) $Mp = \mathcal{A}p$.

Además, si se cumplen las condiciones precedentes, entonces

$$\mathrm{Ind}_L E = \mathrm{Ind}_{BDH}(E).$$

Demostración. En el Lema 3.3.15 vimos que (i) $\iff$ (ii). En la Proposición 3.3.18 probamos que (i)$\Rightarrow$(iii). Por el Teorema 3.3.17, (iii) y (iv) son equivalentes y vale la igualdad entre los índices. Por la Proposición 3.3.12, (iii) implica (i). Finalmente, en [AS2] se prueba que (v) $\iff$ (i), como ya dijimos al enunciar la Proposición 3.3.14. $\square$

Culminamos la sección con el ejemplo, ya mencionado previamente, de que el índice fuerte puede no ser igual al índice de la contrucción básica.

Ejemplo 3.3.20 ([BDH, 3.7.(iii)]) Sea N un álgebra de von Neumann , sea $\mu \in (-1, 1)$, y sea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in N \right\},$$

con la esperanza condicional

$$E_\mu \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \mu b & 0 \\ 0 & a + \mu b \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos la siguiente base ortonormal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = \frac{1}{(1-\mu^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \right\}.$$

El índice fuerte se calcula mediante $\mathrm{Ind}_{BDH}(E_\mu) = 1 + mm^*$, es decir

$$\mathrm{Ind}_{BDH}(E_\mu) = \frac{2}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

El proyector de Jones es

$$e = \left(\begin{array}{cc} \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{2} & \mu/2 \\ \mu/2 & \frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{2} \end{array} \right).$$

Notemos asimismo que el índice de la construcción básica es, al ser $\{m_i e(\mathrm{Ind}_L E)^{1/2}\}$ una base ortonormal (ver demostración del Corolario 3.2.12),

$$\sum_i m_i E(\mathrm{Ind}_L E) e m_i^*.$$

En este caso, como se verifica que

$$E(\mathrm{Ind}_{BDH}(E_\mu)) = 2,$$

el índice de la construcción básica es 2. Al ser el índice un escalar, si se puede construir el túnel (lo que es seguro, por ejemplo, en el caso propiamente infinito), el índice será también 2, diferente del índice original.

Chapter 4

Subvariedades diferenciables en espacios de Banach

Enunciaremos aquí las definiciones y propiedades de las subvariedades diferenciables de espacios de Banach, órbitas por la acción de un grupo y Espacios Homogéneos Reductivos que necesitaremos en los capítulos 5 y 6.

Como las subvariedades están sumergidas en una variedad que es un espacio de Banach, los espacios tangentes se identificarán con subespacios lineales cerrados y complementados del espacio de Banach.

Las principales referencias para las definiciones y propiedades geométricas a las que referimos son los libros de S. Lang, "Differential Manifolds" [L], y de A. R. Larotonda "Notas sobre Variedades Diferenciales" [La]. Para la definición de la estructura de espacio homogéneo reductivo y, en particular, para el cálculo de los invariantes geométricos, se ha seguido a [MR].

4.1 Definiciones básicas

A lo largo de todo el capítulo, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ denotarán espacios de Banach complejos. $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ será, en ese caso, el espacio de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{E}$.

Notemos que el uso de espacios de Banach surge naturalmente al no requerir que las variedades diferenciables sean de dimensión finita. Esto hace que no haya una necesariamente estructura Riemmaniana.

Diremos que un subespacio complejo S de un espacio de Banach $\mathcal{E}$ es *complementado* si es cerrado y existe otro subespacio complejo y cerrado $T \subset \mathcal{E}$ tal que $S \oplus T = \mathcal{E}$. Notemos que es equivalente ser complementado a ser igual al rango de un proyector $p \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Definición 4.1.1 Sean $X \subset \mathcal{E}$, $Y \subset \mathcal{F}$ subvariedades analíticas y $f : X \longrightarrow Y$ analítica. Decimos que f es una *sumersión* si para cada $x \in X$ se verifica que:

1. Ker df_x es un subespacio complementado de $\mathcal{E}$.

2. $df_x : TX_x \longrightarrow TY_{f(x)}$ es suryectiva.

Enunciamos propiedades básicas de las sumersiones:

Teorema 4.1.2 Sean $X \subset \mathcal{E}$, $Y \subset \mathcal{F}$ subvariedades, y $f : X \longrightarrow Y$ una sumersión. Entonces se verifica:

1. para cada $x \in X$, $f^{-1}(f(x))$ es una subvariedad de X

2. para cada $x \in X$ existe un entorno U de $f(x)$ en Y y una aplicación $g_U : U \longrightarrow X$ tal que $f \circ g_U = id_U$.

La aplicación g_U es lo que se llama una *sección local* (ver definición 4.2.8).

Dada una función $f : M \to \mathbb{C}$ y un campo vectorial X en M, X actúa sobre f de la siguente manera:

$$Xf : M \to \mathbb{C} \text{ es la función (si existe)}$$

$$(Xf)_x = \frac{d}{dt} f(x(t))|_0,$$

donde $x(t)$ es una curva diferenciable adaptada a X_x, esto es, $x(0) = x$, $\dot{x}(0) = X_x$

4.2 Geometría sobre órbitas definidas por la acción de un grupo

Sea $G \subset \mathcal{E}$ un grupo topológico, que a su vez es subvariedad analítica de $\mathcal{E}$. Decimos que G es un *grupo de Lie-Banach analítico* si las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} G \times G \longrightarrow G & , & (x, x') \mapsto x \cdot x' \\ G \longrightarrow G & , & x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

son analíticas.

Ejemplos 4.2.1 (de grupos de Lie-Banach)

Mencionamos aquí los dos grupos que aparecen más naturalmente en un álgebra C*:

i) Si A es un álgebra de Banach, el grupo G_A de elementos invertibles de A es un grupo de Lie-Banach analítico. Es claro además que $T(G_A)_1 \cong A$, ya que G_A es abierto en A.

ii) Si A es un álgebra C*, el grupo U_A de elementos unitarios de A, es un grupo de Lie-Banach de clase C^∞. Para ello, observar que la aplicación exponencial de $A_{ah} = \{a \in A : a^* = -a\}$ en U_A define un difeomorfismo local de clase C^∞ (por cálculo funcional y Teorema de Stone), con lo cual $T(U_A)_1 \cong A_{ah}$.

Por lo dicho en el item i) del ejemplo anterior, a lo largo de todo el trabajo identificaremos sistemáticamente al tangente en el 1 del grupo de invertibles del álgebra con el álgebra misma.

Sea $G \subset \mathcal{E}$ un grupo de Lie-Banach y $X \subseteq \mathcal{F}$ una subvariedad, ambos analíticos, decimos que G *actúa a izquierda* sobre X si existe una aplicación (que llamaremos *acción*) analítica

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g * x, \end{array}$$

para $g \in G$, $x \in X$ que verifica

$$g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x, \quad \text{y} \quad 1 * x = x$$

para $g_i \in G$, $x \in X$.

La acción definida es *transitiva* si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $x = g * y$.

A la aplicación

$$x \longmapsto g * x$$

la notaremos con L_g, de manera que $L_g : X \longrightarrow X$ será la aplicación definida por

$$L_g(x) = g * x.$$

Definición 4.2.2 Sea G un grupo que actúa transitivamente sobre una subvariedad X (de manera analítica ó C$^\infty$). Si existe $x_0 \in X$ tal que

$$\pi_{x_0} : G \longrightarrow X \quad , \quad \pi_{x_0}(g) = L_g(x_0) = g * x_0$$

es una sumersión, decimos entonces que X es un *espacio homogéneo de Banach bajo la acción de* G

Si $\pi_{x_0} : G \longrightarrow X$, dada por

$$\pi_{x_0}(g) = L_g(x_0) = g * x_0, \tag{4.2.1}$$

es una sumersión, entonces también lo es π_x para cualquier $x \in X$, porque G actúa transitivamente. En particular resulta, por 1 del Teorema 4.1.2, que el subgrupo $I_x = \{g \in G : \pi_x(g) = x\} \subset G$ es una subvariedad de $\mathcal{E}$, es decir, es un subgrupo de Lie-Banach de G.

Definición 4.2.3 Sea G un grupo que actúa transitivamente sobre una subvariedad X. Al subgrupo

$$I_x\{g \in G : \pi_x(g) = x \text{ para todo } x \in X\}$$

se lo llama *grupo de isotropía de* x.

4.2.4 Operaciones con campos vectoriales:

i) Dados V y W campos vectoriales diferenciables de $M \to \mathcal{E}$, notaremos con VW a la aplicación de M en $\mathcal{E}$ dada por $VW_x = \frac{d}{dt}W(v(t))|_0$, donde $v(t)$ es una curva integral diferenciable de V con $v(0) = x$.

ii) Dados V y W como en i), llamaremos $[V, W]$ a la aplicación de M en $\mathcal{E}$ dada por $[V, W]_x = VW_x - WV_x$.

   Es un hecho bien conocido que en tal caso, $[V, W]$ es un campo vectorial diferenciable.

Dado un grupo de Lie G, los campos vectoriales *invariantes* (a izquierda), son los campos vectoriales A tales que

$$A(x) = (dL_x)_1 (A(1)) \quad , \quad \forall x \in G$$

La aplicación $A \mapsto A(1)$ define un isomorfismo de espacios vectoriales entre el espacio vectorial de los campos invariantes a izquierda de G y el tangente a G en su identidad $T_1(G)$.

Teorema 4.2.5 Si A y B son dos campos invariantes, entonces $[A,B]$ también es invariante.

Definición 4.2.6 Al conjunto de todos los campos invariantes, con el producto $[\cdot,\cdot]$ se lo denomina el *álgebra de Lie* del grupo G. Recordemos que este conjunto es un espacio vectorial isomorfo a $T_1(G)$, como ya hemos mencionado. En algunos casos, notaremos al álgebra de Lie de G por $L(G)$.

Ejemplo 4.2.7 Las álgebras de Lie de G_A y U_A son isomorfas a A y A_{ah} respectivamente (ver 4.2.1), y el corchete $[a,b]$ es el conmutador

$$[a,b] = ab - ba.$$

Sea ahora G un grupo de Lie-Banach analítico, que actúa sobre un espacio de Banach complejo $\mathcal{E}$. Fijemos $x_0 \in \mathcal{E}$ y llamemos $Q = \pi_{x_0}(G)$ a la *órbita de* x_0. Mencionaremos ahora condiciones que la acción debe satisfacer para que la órbita Q sea una subvariedad de $\mathcal{E}$ y, más aún, para que sea un espacio homogéneo de Banach bajo la acción de G.

Definición 4.2.8 Con las notaciones precedentes, sea U un abierto en Q y $s : U \longrightarrow G$ una función continua. Si se verifica que $\pi_{x_0} \circ s(x) = x$ para todo $x \in U$, se dice que s es una *sección local* de π_{x_0}.

Teorema 4.2.9 Con las notaciones precedentes $\pi_{x_0} : G \longrightarrow Q$ es abierta si y sólo si para cada $x \in Q$ existen secciones locales continuas $s : U \longrightarrow G$, con U un entorno de x (U abierto en Q).

Ejemplos 4.2.10 (de espacios homogéneos)

i) Si A es un álgebra C* y p un idempotente de A, entonces la órbita de similaridad de p, $S(p) = \{gpg^{-1} : g \in G_A\}$ es un espacio homogéneo de Banach analítico [CPR],[R].

ii) Si p además es autoadjunto ($p^* = p$), entonces la órbita unitaria $U(p) = \{upu^* : u \in U_A\}$ es un espacio homogéneo de Banach de clase C^∞ [CPR].

4.3 Espacios Homogéneos Reductivos y Grupos de Lie

Definición 4.3.1 Dado un espacio homogéneo Q bajo la acción de un grupo de Lie-Banach G, se dice que Q admite una *estructura reductiva* si

1. Para cada $x_0 \in Q$ existe un subespacio cerrado $\mathcal{H}^{x_0} \subset L(G)$, invariante por automorfismos internos de I_{x_0}, tal que
$$\mathcal{H}^{x_0} \oplus L(I_{x_0}) = L(G)$$
2. La distribución $x \mapsto \mathcal{H}^x$ es analítica. Esto significa que la aplicación
$$Q \ni x \longmapsto P_{\mathcal{H}^x} \in \mathcal{B}(L(G))$$
es analítica.

La existencia de una estructura reductiva para un espacio homogéneo dado es un hecho bastante restrictivo, como se ve en los siguientes ejemplos:

Ejemplos 4.3.2 *(de espacios homogéneos con estructura reductiva)*

i) Las órbitas de similaridad de operadores en un espacio de Hilbert admiten una estructura reductiva si y sólo si el operador es normal y tiene espectro finito [AS1].

ii) Si Q es el espacio de representaciones de una C* álgebra fija sobre un espacio de Hilbert también fijo, la existencia de una estructura reductiva en Q implica que el álgebra C* es nuclear [ACS].

iii) Si Q es el espacio de representaciones de un álgebra de von Neumann fija sobre un espacio de Hilbert también fijo, entonces Q admite una estructura reductiva si y sólo si el álgebra de von Neumann es inyectiva [ACS].

Para culminar esta sección estableceremos algunas definiciones y teoremas sobre espacios homogéneos reductivos, en particular dos teoremas clásicos de teoría de Grupos de Lie que usaremos más adelante. Para las demostraciones, ver por ejemplo [La].

Un subgrupo H de un grupo de Lie G se dice *subgrupo regular* si es también un grupo de Lie y si T_1H es complementado en T_1G.

Teorema 4.3.3 Sea G un grupo de Lie, $H \subseteq G$ subgrupo tal que existen conjuntos abiertos U, V con $0 \in U$, $1 \in V$ y $T_1(G) = X \oplus Y$ (como suma directa de espacios de Banach) tales que se cumple

1. $\exp : U \to V$ es un difeomorfismo.

2. $H \cap V = \exp(X \cap U)$.

Entonces H es un subgrupo regular de G y $T_1(H) = X$.

Teorema 4.3.4 Sea G un grupo de Lie, $H \subseteq G$ subgrupo regular. Entonces

1. G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que $G \to G/H$ es una sumersión.

2. $G \to G/H$ da a G/H una estructura de espacio homogéneo reductivo.

3. La acción $G \times G/H \to G/H$ es C^∞.

Teorema 4.3.5 Si H es un subgrupo de un grupo de Lie G y la componente conexa H_1 de 1 en H es un subgrupo regular de G, entonces H es un subgrupo regular de G si y sólo si H_1 es abierto en G

4.4 Invariantes geométricos

Sea G un grupo de Lie que actúa sobre un espacio de Banach $\mathcal{E}$, $x_0 \in \mathcal{E}$, y Q la órbita de x_0 por G. Si Q es un espacio homogéneo de Banach bajo la acción de G con una estructura reductiva, ésta induce una conexión lineal ∇ en el fibrado tangente a Q. En esta sección entraremos en los detalles de cómo se obtiene. Antes deberemos establecer las definiciones necesarias.

Notaremos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de campos vectoriales analíticos sobre M. Una *conexión lineal* en la subvariedad M es una regla ∇ que asigna a cada $Y \in \mathcal{X}(M)$ una aplicación lineal ∇_Y de $\mathcal{X}(M)$ en si mismo, y que satisface las siguientes condiciones, si $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ y si $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

i) $\nabla_{fY+gZ} = f\nabla_Y + g\nabla_Z$

ii) $\nabla_Y(fZ) = f\nabla_Y(Z) + (Yf)Z$

Si $Y \in \mathcal{X}(M)$, a la aplicación ∇_Y la denominaremos la *derivada covariante* con respecto a Y. Es un hecho bien conocido que el valor de $\nabla_Y Z$ en x, depende solamente del valor de Y_x.

Sea $\lambda : [\alpha, \beta] \longrightarrow M$ una curva C^2. Por la observación precedente tiene sentido considerar la derivada $\nabla_{(\frac{d\lambda}{dt})(t)}$ (extendiendo a la curva diferenciable de vectores tangentes $\frac{d}{dt}\lambda(t)$, a un campo vectorial diferenciable en M). Diremos que el campo Y es *paralelo a lo largo de la curva* λ si se verifica que

$$\left(\nabla_{(\frac{d\lambda}{dt})(t)} Y\right)_{\lambda(t)} = 0 \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Diremos que λ es una *geodésica* de la conexión lineal ∇, si para cada $t_0 \in [\alpha, \beta]$,

$$\left(\nabla_{(\frac{d\lambda}{dt})(t)} Y\right)_{\lambda(t_0)} = 0,$$

donde Y es un campo vectorial en un entorno de $\lambda(t_0)$ en M, que "extiende" a $\frac{d}{dt}\lambda(t)$, o sea $Y_{\lambda(t)} = \frac{d}{dt}\lambda(t)$ en dicho entorno.

Definición 4.4.1 Dados campos vectoriales diferenciables $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, llamaremos *torsión de* X *e* Y al campo vectorial $T(X,Y) \in \mathcal{X}(M)$,

$$T(X,Y)_x = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X,Y]_x.$$

Es inmediato verificar que $T(X,Y)_x$ depende sólo de los valores de X_x y Y_x.

Llamaremos *tensor de curvatura* en X, Y y Z al nuevo campo $R(X,Y)Z \in \mathcal{X}(M)$, dado por

$$\{R(X,Y)Z\}_x = [\nabla_X(\nabla_Y Z)]_x - [\nabla_Y(\nabla_X Z)]_x - \left(\nabla_{[X,Y]} Z\right)_x.$$

Es inmediato también que R es $C^\infty(M, \mathbb{C})$ tri–lineal en $\mathcal{X}(M)$.

Veamos entonces ahora cómo la existencia de una estructura reductiva induce una conexión lineal ∇. Trabajaremos directamente con el caso en que el grupo que actúa es G_M, el grupo de invertibles de una C*-álgebra M, ya que ese es el caso que se estudia en este trabajo. Se puede repetir la construcción, con modificaciones obvias, en el caso de que el grupo es $\mathcal{U}_M$, los unitarios de M.

Si $\pi_q : G_M \longrightarrow Q$, es la función definida por $\pi_q(g) = L_g(q)$, entonces su diferencial en 1, $d(\pi_q)_1 : T_1 G_M \cong M \longrightarrow T_q Q$, tiene como núcleo a $L(I_q)$ (el álgebra de Lie de la isotropía I_q). Entonces, resulta $M = L(I_q) \oplus \mathcal{H}^q$, con $\mathcal{H}^q$ isomorfo a $T_q Q$ a través de $d(\pi_q)_1|_{\mathcal{H}^q}$. A la inversa de este isomorfismo la notaremos con

$$K_q : T_q Q \longrightarrow \mathcal{H}^q \subseteq M. \tag{4.4.2}$$

Esta función K_q tiene la propiedad interesante de tener su imagen en M, lo que permite calcular fórmulas concretas para las geodésicas, curvatura y torsión de la conexión ∇ definida por la estructura reductiva, aún en el caso de no conocer la estructura en el espacio tangente a la variedad, que será en parte la situación con la que nos encontraremos al estudiar la órbita de similaridad de una esperanza condicional en el Capítulo 6.

Si $(Ad(g))(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in G_M$, y $q \in Q$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G_M \arrow[r, "Ad(g)"] \arrow[d, "\pi_q"'] & G_M \arrow[d, "\pi_{L_g(q)}"] \\ Q \arrow[r, "L_g"] & Q \end{tikzcd} \tag{4.4.3}$$

Hemos dicho que si Q tiene estructura reductiva entonces se tiene una distribución de subespacios $q \mapsto \mathcal{H}^q$, para $q \in Q$, que verifica 4.3.1, 1) y 2).

Para producir una conexión para cada $\pi_q : G_M \longrightarrow Q$ con estos subespacios, construimos una distribución suave de *espacios horizontales* $\mathcal{H}$ como sigue: si $g \in G_M$ se define

$$\mathcal{H}^q_g = g\mathcal{H}^q = \{a \in M : \quad a = gh \quad \text{para algún } h \in \mathcal{H}^q\}$$

A los elementos de $\mathcal{H}^q_g$ los llamaremos *vectores horizontales* en $g \in G_M$ (para π_q). La distribución $\mathcal{H}$ en G_M está dada por estos espacios horizontales $\mathcal{H}_g = \mathcal{H}^q_g = g\mathcal{H}^q$ para $g \in G_M$. Estos espacios cumplen con las propiedades:

(i) $\mathcal{H}$ es una distribución suave en G_M (esto significa que $g \mapsto P_{\mathcal{H}^q_g}$ es analítica)

(ii) $gM = T_g\left(G_M\right) = g\mathcal{I}_q \oplus \mathcal{H}_g^q$, $\forall g \in G_M$.

(iii) $\mathcal{H}_{ga}^q = \left(\mathcal{H}_g^q\right) a$, $\forall a \in I_q, g \in G_M$.

La existencia de tales subespacios $\mathcal{H}_g^q$ es equivalente a la de aplicaciones

$$K_q : T_qQ \longrightarrow M \ (= T_1G_M)$$

determinadas por las dos propiedades siguientes:

(I) $d\left(\pi_q\right)_1 \circ K_q : T_qQ \longrightarrow T_qQ$ es la identidad.

(II) $d\left(Ad(g)\right)_1 = Ad(g) : M \longrightarrow M$ deja invariante al subespacio $\mathcal{H}^q = K_q(T_qQ) \subseteq M$, $\forall g \in I_q$, es decir

$$Ad(g)\left(\mathcal{H}^q\right) = \mathcal{H}^q \quad , \quad \forall g \in I_q$$

(es la *propiedad de invariancia* de K_q respecto del subgrupo de isotropía I_q).

Si $p \in Q$ es tal que $p = L_gq$, se verifica que

$$K_p = d\left(Ad(g)\right)_1 \circ K_q \circ \left[d\left(L_g\right)_1\right]^{-1}$$

La invariancia de K_q respecto de I_q hace que la igualdad anterior sea independiente del $g \in G_M$ tal que $p = L_g(q)$.

También se puede ver que (para $p = L_gq$) vale que:

$$Ad(g)\left(\mathcal{H}^q\right) = \mathcal{H}^{L_gq} = \mathcal{H}^p$$

Para construir la conexión lineal ∇ en TQ introducimos la ecuación de transporte cuyas soluciones dan las "levantadas horizontales" a G_M de curvas en Q (para π_q).

Sea $\gamma(t)$ una curva suave en Q, con $\gamma(0) = q$ y $t \in I$ (I un intervalo alrededor del cero). A la ecuación diferencial

$$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}(t)\right)\ \Gamma(t) \tag{4.4.4}$$

la llamaremos la *ecuación de transporte* para $\gamma(t)$, y a la solución $\Gamma(t)$ con condición inicial $\Gamma(0) = 1 \in G_{\mathcal{A}}$, la *levantada horizontal* de $\gamma(t)$ (para π_q). Estos nombres se justifican porque se puede probar que vale, $\forall t \in I$, que

$$\pi_q\left(\Gamma(t)\right) = \gamma(t)$$

$$\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}^q_{\Gamma(t)}$$

Sea ahora $Y \in \mathcal{X}(Q)$, $X \in T_qQ$. Para definir $\left(\nabla_X Y\right)_q$, diremos cuánto vale $K_q\left(\left(\nabla_X Y\right)_q\right) \in M$ y entonces será $\left(\nabla_X Y\right)_q = d\left(\pi_q\right)_1 \circ K_q\left(\left(\nabla_X Y\right)_q\right)$.

Definición 4.4.2 Con las notaciones anteriores la conexión ∇ se define por

$$K_q\left(\left(\nabla_X Y\right)_q\right) = \frac{d}{dt}\left\{K_q\left[d\left(L_{\Gamma(t)}\right)_q^{-1} Y\left(\gamma(t)\right)\right]\right\}\Big|_{t=0} \tag{4.4.5}$$

La aplicación $d\left(L_{\Gamma(t)}\right)_q$ es el *transporte paralelo* a lo largo de $\Gamma(t)$. El "traer" vectores de forma parelela desde el espacio tangente en $\gamma(t)$ al espacio tangente en $\gamma(0)$ nos permite restarlos para así poder derivar.

Decimos que $\delta : [\alpha, \beta] \longrightarrow Q$ de clase C^2 es geodésica si

$$\frac{d}{dt}\left\{d\left(L_{\Gamma(t)}\right)_q^{-1}\left(\dot{\gamma}(t)\right)\right\}\Big|_{t=0} \equiv 0 \tag{4.4.6}$$

Esto significa que definimos las geodésicas como las curvas cuyos vectores tangentes son paralelos.

Como en nuestro contexto tenemos la estructura geométrica caracterizada, se puede obtener explícitamente la fórmula para las geodésicas. En concreto, la geodésica $\delta(t)$ que cumple $\delta(0) = q \in Q$ y $\dot{\delta}(0) = X \in T_qQ$ está dada por la fórmula

$$\delta(t) = L_{\exp(tK_q(X))}\; q \tag{4.4.7}$$

Los isomorfismos K_q definen una familia de proyecciones que nos permiten expresar de modo concreto las fórmulas para el tensor de curvatura y el de torsión de la conexión ∇.

Si abreviamos con $\Pi_q = K_q \circ d\left(\pi_q\right)_1 : M \longrightarrow M$, resulta que $\Pi_q \in P(\mathcal{A})$, y si $X, Y \in T_qQ$, entonces

$$K_q\left(T\left(X, Y\right)(q)\right) = -\Pi_q\left(\left[K_q(X), K_q(Y)\right]\right) \tag{4.4.8}$$

y si $X, Y, Z \in T_qQ$

$$K_q\left(R\left(X, Y\right) Z\ (q)\right) = \left[K_q(Z), \left(Id - \Pi_q\right)\left[K_q(X), K_q(Y)\right]\right] \tag{4.4.9}$$

(para más detalles, ver [MR]).

Chapter 5

El Grupo de Weyl

Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, y $E \in E(M, N)$ una esperanza condicional fiel y normal. En este capítulo estudiaremos el grupo de Weyl, un grupo discreto asociado a la esperanza $E : M \to N$. Este grupo muestra la relación entre el grupo unitario de N y el normalizador $\mathcal{N}_E$ de E (ya estudiado por A. Connes [C]). El normalizador es interesante además para nosotros pues es precisamente la isotropía de la acción del grupo unitario $\mathcal{U}_M$ de M en E. Asimismo veremos en el próximo capítulo que este grupo aparece como la fibra de un revestimiento natural de la órbita de similaridad de la esperanza condicional E.

Inicialmente el grupo de Weyl aparecerá a partir de la órbita unitaria de la esperanza condicional. En la sección 5.5 mostraremos que la órbita de similaridad produce el mismo grupo de Weyl.

5.1 El caso unitario

Sea M un álgebra de von Neumann. Denotemos por $\mathcal{U}_M$ al grupo unitario de M, G_M el grupo de sus elementos invertibles y $\mathcal{Z}(M)$ el centro de M. Llamaremos por $E(M)$ al conjunto de las esperanzas condicionales normales definidas de M sobre sus subálgebras. Usaremos, para abreviar, la notación $N^{\mathbf{c}} = N' \cap M$. Consideremos la acción $L : \mathcal{U}_M \times E(M) \to E(M)$, dada por

$$L_u E = Ad_u \circ E \circ Ad_{u^*} \ , \qquad \text{para } E \in E(M) \ \text{ y } \ u \in \mathcal{U}_M,$$

donde Ad_u denota al automorfismo interior de M inducido por u. Para cada $E \in E(M)$, denotemos por

$$\mathcal{O}_E = \{L_u E : u \in \mathcal{U}_M\} \tag{5.1.1}$$

a la órbita de E por esta acción. Para poder estudiar las propiedades geométricas de las órbitas $\mathcal{O}_E$, consideramos, para cada $E \in E(M)$, la aplicación

$$\pi_E : \mathcal{U}_M \to E(M) \ , \quad \text{dada por} \quad \pi_E(u) = L_u E \ , \quad u \in \mathcal{U}_M,$$

como en 4.2.1.

Estamos interesados en caracterizar la isotropía de esta acción. Sea $N \subseteq M$ una subálgebra de von Neumann de M.

Definición 5.1.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$. Denotamos por $\mathcal{N}_E$ al grupo

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E &= \{ \ u \in \mathcal{U}_M \ : \ \pi_E(u) = E \ \} \\ &= \{ \ u \in \mathcal{U}_M \ : \ E(uxu^*) = uE(x)u^*, x \in M \ \}, \end{aligned}$$

llamado el *normalizador* de E.

El grupo $\mathcal{N}_E$ ha sido estudiado, entre otros autores, por A. Connes ([C]) y H. Kosaki ([Ko2]) en relación con inclusiones de productos semidirectos de álgebras de von Neumann.

Es claro que $\mathcal{U}_N$ está contenido en $\mathcal{N}_E$. En algunos casos (Ejemplo 5.2.6) estos dos grupos coinciden. Por otra parte, si $u \in \mathcal{N}_E$, entonces $uNu^* = N$. En efecto, esto se puede ver fácilmente usando que para todo $v \in \mathcal{U}_M$, la imagen de $L_v(E)$ es vNv^*. La recíproca de esta propiedad es válida sólo cuando $N' \cap M \subseteq N$ ([C, 1.5.5]).

Notemos que el grupo de isotropía para la acción L en E es el normalizador $\mathcal{N}_E$. Consideramos el proyector de Jones e asociado con E (ver 3.2.3). Es un proyector autoadjunto en el álgebra M_1, la extensión de M por E. La órbita

$$\mathcal{U}_M(e) = \{ueu^* : u \in \mathcal{U}_M\}$$

es un fibrado sobre la órbita $\mathcal{O}_E$, via la fórmula

$$(ueu^*) \ m \ (ueu^*) = L_u E(m)(ueu^*) \quad \text{para} \quad m \in M \ \text{ and } \ u \in \mathcal{U}_N,$$

que da lugar a la aplicación $\psi : \mathcal{U}_M(e) \to \mathcal{O}_E$ dada por $\psi(ueu^*) = L_u(E)$. Nótese [AS2] que $\mathcal{U}_M(e)$ es una subvariedad de la órbita completa de e en M_1, si y sólo si el índice de E es finito (según cualquiera de las definiciones, como probamos en la sección 3.3).

En el caso en que también $N' \cap M \subseteq N$, la aplicación ψ define un revestimiento ([AS2]). Por lo tanto la fibra de E es en ese caso un espacio discreto denotado por

$$\mathcal{P}(E) = \{ueu^* \ : u \in \mathcal{N}_E\} \subseteq \mathcal{U}_M(e),$$

cuya definición y propiedades establecemos en 5.1.12 y lo siguiente.

En este capítulo removeremos la hipótesis de $N' \cap M \subseteq N$, y, como veremos, este hecho da lugar a la aparición del grupo de Weyl de la esperanza en toda su magnitud.

Comencemos con la tarea de caracterizar $\mathcal{N}_E$. Consideremos la aplicación

$$Ad|_N : \mathcal{N}_E \to Aut(N),$$

donde, $Ad(u)$ es la aplicación $Ad_u(x) = uxu^*$.

Para estudiar la relación entre $\mathcal{U}_N$ y $\mathcal{N}_E$, consideramos la composición de $Ad|_N$ con la proyección canónica de $Aut(N)$ sobre el grupo cociente $Out(N) = Aut(N)/Inn(N)$, donde $Inn(N)$ es el grupo de automorfismos interiores de N:

Definición 5.1.2 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Denotemos por $\rho_E : \mathcal{N}_E \to Out(N)$ al homomorfismo de grupos dado por

$$\rho_E(u) = [Ad_u] = Ad_u \ \cdot \ Inn(N) \ , \qquad \text{para} \ \ u \in \mathcal{N}_E.$$

Ahora estamos en condiciones de definir el grupo de Weyl de E:

Definición 5.1.3 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Denotamos por $W(E)$ al grupo $\rho_E(\mathcal{N}_E)$ y lo llamamos el **grupo de Weyl** de la esperanza E. Consideramos en $W(E)$ la topología discreta.

Observación 5.1.4 Por el Teorema 2.1.11, si consideramos en $Aut(N)$ la topología de la norma (como operadores lineales en N), entonces la topología cociente inducida en $Out(N)$ es discreta. Por lo tanto la aplicación ρ_E de (5.1.2) es continua cuando se considera en $\mathcal{N}_E$ la topología de la norma.

Definición 5.1.5 Denotemos por

$$M_E = \{\ x \in N' \cap M\ :\ E(xm) = E(mx) \text{ para todo } \ m \in M\ \},$$

llamado el *centralizador* de E en la literatura ([CD] o [Ha]). El centralizador M_E es un álgebra de von Neumann, ya que E es normal. Denotemos H_E al grupo

$$H_E = \mathcal{U}_N \cdot \mathcal{U}_{M_E} = \{vw : v \in \mathcal{U}_N \ \text{ y } \ w \in \mathcal{U}_{M_E}\}. \tag{5.1.2}$$

Se prueba de modo directo que H_E es conexo, ya que $\mathcal{U}_{M_E}$ es el grupo unitario del álgebra de von Neumann M_E. También H_E es un subgrupo cerrado (en norma) de $\mathcal{N}_E$.

Proposición 5.1.6 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E \in E(M, N)$ y ρ_E como en la Definición 5.1.2. Entonces $\mathrm{Ker}(\rho_E) = H_E$, y ρ_E induce el isomorfismo

$$\Phi : \mathcal{N}_E/H_E \to W(E),$$

que es un homeomorfismo cuando se considera en $\mathcal{N}_E/H_E$ la topología cociente inducida por la norma de $\mathcal{N}_E$.

Además, la componente conexa de $\mathcal{N}_E$ en cualquier $u \in \mathcal{N}_E$ es exactamente $u \cdot H_E$. La distancia entre diferentes componentes conexas es mayor o igual que 1.

Demostración. Sea $u \in \mathrm{Ker}(\rho_E)$. Entonces existe $v \in \mathcal{U}_N$ tal que $Ad_u|_N = Ad_v$. Luego $uv^* \in N^{\mathbf{c}} \cap \mathcal{N}_E$. Es elemental verificar que $N^{\mathbf{c}} \cap \mathcal{N}_E = \mathcal{U}_{M_E}$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(\rho_E) \subseteq H_E$, y esto implica la igualdad, ya que la otra inclusión es clara.

Esto prueba que Φ es un isomorfismo de grupos. Si $u,\ v \in \mathcal{N}_E$, entonces

$$\|Ad_u|_N - Ad_v|_N\| \le \|\delta_{u^*v}\| \le 2\|1 - u^*v\| = 2\|u - v\|,$$

donde δ_{u^*v} denota la derivación interior de M dada por $\delta_{u^*v}(x) = xu^*v - u^*vx$, para $x \in M$. Por el Teorema 2.1.11 si dos automorfismos de N están a distancia (en norma) menor que 2, entonces sus imágenes en $Out(N)$ coinciden. Podemos deducir que si $\rho_E(u) \neq \rho_E(v)$ entonces $\|u - v\| \ge 1$. Usando que el grupo H_E es conexo, tenemos que cada conjunto $u \cdot H_E$ is abierto, cerrado y conexo, y la prueba está completa. □

Observación 5.1.7 Para caracterizar $\mathcal{N}_E$, es suficiente conocer $\mathcal{U}_N$, $\mathcal{U}_{M_E}$ y $W(E)$. Por otra parte, el grupo $W(E)$ es un invariante para la esperanza condicional E.

Además, la caracterización de la componente conexa de 1 en $\mathcal{N}_E$ como el grupo H_E es importante para estudiar las propiedades geométricas de la órbita $\mathcal{O}_E$, en particular la existencia de estructuras reductivas [AS3]. Este estudio se realiza en el Capítulo 6.

La siguiente la Proposición muestra que si "sumamos inclusiones", obtenemos la suma de sus grupos de Weyl. Usaremos este resultado más adelante para obtener cotas para el orden del grupo de Weyl.

Proposición 5.1.8 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$. Supongamos que $p_1, \ldots, p_n$ son proyecciones ortogonales en $\mathcal{Z}(N) \cap \mathcal{Z}(M)$ tales que $\sum_i p_i = 1$. Sea $E_i : p_i M \to p_i N$ dada por $E_i = E|_{p_i M}$. Entonces $E_i \in E(p_i M, p_i N)$ para todo $1 \leq i \leq n$ y

$$W(E) \simeq \oplus_{i=1}^n W(E_i).$$

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente: ya que para $1 \leq i \leq n$, $p_i \in \mathcal{Z}(N) \cap \mathcal{Z}(M)$, todos los elementos de M son "diagonales" con respecto a las proyecciones p_i. Entonces veremos que

$$\mathcal{N}_E \simeq \oplus_{i=1}^n \mathcal{N}_{E_i} \quad \text{y} \quad H_E \simeq \oplus_{i=1}^n H_{E_i}$$

donde el isomorfismo es simplemente tomar las entradas diagonales de los unitarios considerados en **ambos casos**. Utilizando estos hechos, nuestra afirmación se sigue por teoría elemental de grupos.

Cálculos sencillos muestran que para todo $1 \leq i \leq n$,

$$E_i \in E(p_i M, p_i N) \quad , \quad \mathcal{N}_{E_i} = p_i \mathcal{N}_E \quad \text{y} \quad H_{E_i} = p_i H_E.$$

Para estas afirmaciones necesitan ser probados muchos hechos ($p_i(N' \cap M) = (p_i N)' \cap p_i M$, $p_i M_E = (p_i M)_{E_i}$, etc). pero todos son evidentes usando que todos los p_i están en $\mathcal{Z}(N) \cap \mathcal{Z}(M)$ y entonces $E(m) = \sum_i E_i(p_i m)$, para todo $m \in M$. Esto muestra que la aplicación

$$\mathcal{N}_E \ni u \mapsto \oplus_i p_i u \in \oplus_{i=1}^n \mathcal{N}_{E_i}$$

está bien definida y lleva H_E en $\oplus_{i=1}^n H_{E_i}$. Si $u_1 \oplus \ldots \oplus u_n \in \oplus_i \mathcal{N}_{E_i}$, entonces $u = \sum_i u_i \in \mathcal{U}_M$ y, para $m \in M$,

$$E(umu^*) = \sum_i E_i(p_i umu^*) = \sum_i E_i(u_i p_i m u_i^*) = \sum_i u_i E_i(p_i m) u_i^* = uE(m)u^*,$$

y $u \in \mathcal{N}_E$, probando la suryectividad. La inyectividad es también clara, ya que si $p_i u = p_i v$ para todo i, entonces $u = v$. Finalmente, la Suryectividad al nivel de H_E se prueba del mismo modo. □

Proposición 5.1.9 Sean $N \subseteq L \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E_0 \in E(M, L)$, $E \in E(L, N)$ y $F = E \circ E_0 \in E(M, N)$. Entonces

$$\mathcal{N}_E = \mathcal{N}_F \cap L \quad \text{y} \qquad H_E = H_F \cap L$$

y por lo tanto

$$W(E) \subseteq W(F),$$

donde la inclusión significa que $W(E)$ es naturalmente isomorfo a un subgrupo de $W(F)$.

Demostración. Como $F|_L = E$, entonces $\mathcal{N}_F \cap L \subseteq \mathcal{N}_E$ y $H_F \cap L \subseteq H_E$. Por otra parte, sea $u \in \mathcal{N}_E$, y $m \in M$. Entonces $u \in L$ y

$$F(umu^*) = E(uE_0(m)u^*) = uE(E_0(m))u^* = uF(m)u^*,$$

de manera que $u \in \mathcal{N}_F$. De modo similar se muestra que $L_E = M_F \cap L$. Por lo tanto $H_E = H_F \cap L = H_F \cap \mathcal{N}_E$. Finalmente, la inclusión $\mathcal{N}_E \to \mathcal{N}_F$ induce el isomorfismo natural

$$W(E) \simeq \mathcal{N}_E / H_E = \mathcal{N}_E / (H_F \cap \mathcal{N}_E) \to \mathcal{N}_F / H_F \simeq W(F).$$

□

Observación 5.1.10 Sean $N \subseteq M$ factores II_1 y $E \in E(M, N)$ de índice finito. En los ejemplos más interesantes la información que uno obtiene de $W(E)$ sobre esta inclusión es pobre. Por ejemplo, $W(E)$ es trivial si $\mathrm{Ind}E < 4$ (Ejemplo 5.2.6). Pero la construcción básica iterada produce una torre de factores

$$N \subseteq M \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

y una sucesión de esperanzas condicionales $E_n \in E(M_n, M_{n-1})$, donde podemos redefinir $M = M_0$, $N = M_{-1}$ y $E = E_0$ para tener una notación coherente. Estas esperanzas verifican que $\mathrm{Ind}E_n = \mathrm{Ind}E$ para todo $n \in I\!N$.

Consideremos $F_n \in E(M_n, M_{-1})$ dada por $F_n = E_0 \circ E_1 \circ \ldots \circ E_n$. Entonces $\mathrm{Ind}F_n = (\mathrm{Ind}E)^{n+1} < \infty$. Notemos que $F_{n+1} = F_n \circ E_{n+1}$. Por lo tanto, usando la Proposición (5.1.9), obtenemos una torre de grupos de Weyl

$$W(E) = W(F_0) \subseteq W(F_1) \subseteq W(F_2) \subseteq \ldots \subseteq W(F_n) \subseteq \ldots$$

que parece ser un rico invariante para la inclusión original $N \subseteq M$ y la esperanza E.

Notemos que las inclusiones $N \subseteq M_n$ verifican que $N' \cap M_n \neq \mathbb{C}$. Entonces, para estudiar la torre de grupos, uno necesita conocer las propiedades del grupo de Weyl para inclusiones no irreducibles o, en general, inclusiones $N \subseteq M$ que no verifican que $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$. Este estudio de la torre de grupos de Weyl aún no ha sido realizado en profundidad al momento de escribir este trabajo.

Observación 5.1.11 Sean $N \subseteq M \subseteq B(H)$ álgebras de von Neumann donde H es un espacio de Hilbert separable y sea $F \in E(M, N)$. Denotemos por

$$L = \{N \cup \mathcal{N}_F\}''.$$

Claramente $N \subseteq L \subseteq M$ y podemos considerar $E = F|_L \in E(L, N)$. Entonces existe $E_0 \in E(M, L)$ tal que $F = E \circ E_0$ y usando la Proposición 5.1.9 se deduce que

$$W(E) \subseteq W(F).$$

Sería razonable suponer, ya que el grupo de Weyl completo está "contenido" en L, que $W(E_0)$ es trivial. Sin embargo esto no es cierto, como puede verse fácilmente mirando el álgebra fija de un factor M por un grupo finito de automorfismos exteriores. Esta idea está desarrollada en la sección 5.4. Para más propiedades de esta álgebra intermedia L, ver la sección 5.3.

5.1.1 El grupo $\mathcal{P}(E)$

Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Asumimos la existencia de un estado fiel y normal (fijo) ϕ en N, y consideramos el estado fiel y normal $\varphi = \phi \circ E$ en M.

Consideremos a M y N con su representación GNS dada por el estado φ, actuando en el espacio de Hilbert $L^2(M,\varphi)$. Recordemos de la sección 3.2.2 que el proyector de Jones e es el proyector ortogonal con rango $L^2(N,\psi)$ considerado como subespacio de $L^2(M,\varphi)$. También consideramos la construcción Básica para e, el álgebra $M_1 = \{M, e\}''$.

Denotemos por

$$\mathcal{U}_M(e) = \{ueu^* : u \in \mathcal{U}_M\},$$

la órbita de e bajo la acción de $\mathcal{U}_M$ por conjugación. Se prueba en [AS2] que $\mathcal{U}_M(e)$ es una subvariedad de la órbita unitaria completa de e en M_1, si y sólo si el índice de E es finito.

Consideremos la aplicación

$$\pi_e : \mathcal{U}_M \to \mathcal{U}_M(e) \tag{5.1.3}$$

dada por $\pi_e(u) = ueu^*$, para $u \in \mathcal{U}_M$. La órbita $\mathcal{U}_M(e)$ es un fibrado sobre la órbita $\mathcal{O}_E$ de E via la aplicación

$$\psi : \mathcal{U}_M(e) \to \mathcal{O}_E$$

definida como sigue: dado $u \in \mathcal{U}_M$ y $p = ueu^* \in \mathcal{U}_M(e)$ definimos

$$\psi(p) = L_u E$$

En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_M \arrow[r, "\pi_e"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & \mathcal{U}_M(e) \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathcal{O}_E \end{tikzcd} \tag{5.1.4}$$

Definición 5.1.12 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Denotemos por $\mathcal{P}(E)$ al conjunto

$$\mathcal{P}(E) = \{ueu^* : u \in \mathcal{N}_E\}.$$

Este conjunto es la fibra de la fibración ψ del diagrama 5.1.4 sobre $\mathcal{O}_E$.

Observación 5.1.13 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Entonces

1. El grupo $\mathcal{U}_N$ es un subgrupo normal de $\mathcal{N}_E$. También la aplicación $\pi_e|_{\mathcal{N}_E} : \mathcal{N}_E \to \mathcal{P}(E)$, es suryectiva y verifica que dados $u, v \in \mathcal{N}_E$, $\pi_e(u) = \pi_e(v)$ si y sólo si $uv^* \in \mathcal{U}_N$. Entonces π_e induce en $\mathcal{P}(E)$ una estructura de grupo. En efecto, el producto está definido por

$$\pi_e(u) \cdot \pi_e(v) = \pi_e(uv), \tag{5.1.5}$$

para $u, v \in \mathcal{N}_E$. Notemos que como grupo

$$\mathcal{P}(E) \ \simeq \ \mathcal{N}_E/\mathcal{U}_N. \tag{5.1.6}$$

En el caso de que E tenga índice finito se prueba en [AS2] que la aplicación π_e tiene secciones locales, de manera que este isomorfismo es también un homeomorfismo cuando se considera $\mathcal{U}_M(e)$ con la topología de la norma en M_1 y $\mathcal{N}_E/\mathcal{U}_N$ con la topología inducida por la topología de la norma de $\mathcal{N}_E$.

2. Como $e \in N' \cap M_1$ y para $u \in \mathcal{N}_E$, $uNu^* = N$ y $uN'u^* = N'$, podemos deducir que

$$\mathcal{P}(E) \ \subseteq \ N' \cap M_1. \tag{5.1.7}$$

3. Si $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$, entonces

$$\mathcal{P}(E) \simeq W(E). \tag{5.1.8}$$

En efecto, como $M_E \subseteq N^{\mathbf{c}} \subseteq N$, tenemos $H_E = \mathcal{U}_N$ y debe ser $\mathcal{P}(E) = W(E)$ por (1) y la Proposición 5.1.6.

4. Ya que $\mathcal{U}_N$ es un subgrupo normal de H_E, tenemos que

$$W(E) \simeq \mathcal{N}_E/H_E \simeq \frac{\mathcal{N}_E/\mathcal{U}_N}{H_E/\mathcal{U}_N} \simeq \mathcal{P}(E)/(H_E/\mathcal{U}_N), \tag{5.1.9}$$

donde miramos a $H_E/\mathcal{U}_N$ como un subgrupo de $\mathcal{P}(E)$, identificándolo con la órbita $\{ueu^* : u \in H_E\}$. En otras palabras, el grupo de Weyl $W(E)$ es siempre un cociente de la fibra $\mathcal{P}(E)$. En el caso de índice finito veremos $H_E/\mathcal{U}_N$ visto como la órbita, es exactamente la componente conexa de e en $\mathcal{P}(E)$. Por lo tanto el grupo $W(E)$ puede ser identificado en este caso con el conjunto de componentes conexas de la fibra $\mathcal{P}(E)$.

Sean $p \in \mathcal{P}(E)$ y $u \in \mathcal{N}_E$ tal que $p = ueu^*$. Entonces $pe = uE(u^*)e$. Para estudiar las propiedades de pe necesitamos el siguiente Lema:

Lema 5.1.14 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E \in E(M,N)$ y $u \in \mathcal{N}_E$. Entonces

1. $uE(u^*) \in M_E$.

2. $uE(u^*) = E(u^*)u$.

3. $E(u)E(u^*) \in \mathcal{Z}(N)$.

4. Si $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$, entonces $uE(u^*)$ es una proyección en $\mathcal{Z}(N)$ y

$$uE(u^*) = E(u^*)u = E(u)E(u^*) = E(u^*)E(u) = u^*E(u) = E(u)u^*$$

Demostración. Sea $b \in N$. Entonces

$$uE(u^*)be = ueu^*be = ue(u^*bu)u^*e.$$

Como $u^*Nu = N$ y $e \in N'$, tenemos

$$uE(u^*)be = u(u^*bu)eu^*e = buE(u^*)e,$$

de manera que $uE(u^*) \in N^{\mathbf{c}}$. Para probar (2), notemos que

$$uE(u^*) = uE(u^*)u^*u = E(uu^*u^*)u = E(u^*)u.$$

(3) es obvio ya que $E(N^{\mathbf{c}}) = N' \cap N = \mathcal{Z}(N)$. Probemos (1). Si $x \in M$, usando (2) y (3), tenemos

$$\begin{aligned} E(uE(u^*)x) &= E(E(u^*)ux) = E(u^*)E(ux) = E(u^*)uE(xu)u^* \\ &= E(xu)E(u^*) = E(xuE(u^*)). \end{aligned}$$

Para ver (4), notemos que en el caso $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$ tenemos $uE(u^*) \in N$, luego se tiene que $E(uE(u^*)) = uE(u^*)$, y la afirmación se sigue de las propiedades anteriores. $\square$

Observación 5.1.15 El Item 4 en el Lema precedente está enunciado y probado en el trabajo de Connes [C], donde también se prueba que si $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$ y $u \in \mathcal{U}_M$, entonces $uNu^* = N$ implica que $u \in \mathcal{N}_E$.

5.1.2 El caso de Indice finito

Ahora estudiaremos las propiedades de $\mathcal{P}(E)$ relacionadas con el índice. En la Proposición siguiente probamos que todas las proyecciones en $\mathcal{P}(E)$ se comportan como el proyector de Jones:

Proposición 5.1.16 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$. Sea $p \in \mathcal{P}(E)$, entonces

1. Si reemplazamos e por p, se satisfacen las propiedades 1 a 4 de 3.2.5:
   (a) $pxp = E(x)p, \forall x \in M$,
   (b) $\overline{\text{sp}} MpH = H$.
   (c) $\{p\}' \cap M = N$,
   (d) Si J_φ denota la conjugación modular para la representación standard respecto de φ, entonces $J_\varphi p J_\varphi = p$.
2. Si $\text{Ind}E < \infty$ entonces $\|x\| \leq (\text{Ind}E)^{1/2} \|xp\|$ para cada $x \in M$.

Demostración. 1) Si $p = wew^*$ y $w \in \mathcal{N}_E$, entonces

$$\begin{aligned} pxp &= wew^*xwew^* = wE(w^*xw)ew^* = \\ &= ww^*E(x)wew^* = E(x)p \end{aligned}$$

Sea $\alpha : N \to eM_1e$ el isomorfismo de 3.2.7.2, dado por $\alpha(x) = xe$ para $x \in N$. Pongamos $p = wew^*$ con $w \in \mathcal{N}_E$. Entonces para $x \in N$,

$$xp = xwew^* = w(w^*xwe)w^* = Ad(w) \circ \alpha \circ Ad(w^*)(x),$$

donde $Ad(w)(a) = waw^*$. Notemos que $Ad(w)(eM_1e) = pM_1p$. Las demás propiedades de p son claras.

Para 2), usando que $xp \mapsto x$ es un isomorfismo para $x \in N$ (2 de 3.2.7), y por ende es isométrico, tenemos:

$$\begin{aligned} \|xp\|^2 &= \|px^*xp\| = \|E(x^*x)p\| = \|E(x^*x)\| \\ &\geq (\text{Ind}E)^{-1}\|x^*x\| = (\text{Ind}E)^{-1}\|x\|^2 \end{aligned}$$

Definición 5.1.17 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Denotemos por

$$M^E = \{x \in M : E(xa) = E(ax), \forall a \in M\},$$

al **álgebra fija** de la esperanza E. Notemos que, como E is normal, M^E es una subálgebra de von Neumann de M.

El nombre "álgebra fija" surge de la teoría modular para esperanzas condicionales (ver, por ejemplo, [St, §11]), donde hay un análogo de la Proposición 2.5.5.

Ejemplo 5.1.18 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Supongamos que M es finita y ϕ una traza en N tal que $\varphi = \phi \circ E$ es también una traza. Entonces la esperanza E is bicuadrada [Ha], esto es

$$M^E = N^{\mathbf{c}}, \quad \text{y entonces también} \quad M_E = N^{\mathbf{c}}.$$

Sin embargo ambas inclusiones entre M^E y $N^{\mathbf{c}}$ pueden ser falsas en ejemplos muy sencillos.

Demostración. Sean $x \in M^E$, $y, z \in M$, $b \in N$. Necesitamos probar que x conmuta con b. Tenemos

$$\varphi((xb - bx)y) = \varphi(xby) - \varphi(bxy).$$

pero

$$\varphi(bxy) = \varphi(E(bxy)) = \varphi(bE(xy)) = \varphi(bE(yx)) = \varphi(byx)$$

y entonces, usando que φ es una traza, obtenemos que $\varphi(byx) = \varphi(xby)$. Por lo tanto $\varphi((xb - bx)y) = 0$ para todo $y \in M$, y x pertenece a N'. Por otra parte, si $x \in N^{\mathbf{c}}$, tenemos

$$\varphi(E(xy - yx)z) = \varphi((xy - yx)E(z)) = \varphi(xyE(z)) - \varphi(yxE(z)).$$

Usando que $x \in N'$ y que φ es una traza, obtenemos $\varphi(E(xy - yx)z) = 0$ para todo $z \in M$, de manera que $E(xy) = E(yx)$ para cada $y \in M$, y entonces x pertenece a M^E. $\square$

Lema 5.1.19 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$ con Ind$E < \infty$. Si $p \in \mathcal{P}(E)$, $q = upu^*$ con $u \in \mathcal{N}_E$, y $\|p - q\| < (\mathrm{Ind}E)^{-1/2}$, entonces $uE(u^*)$ es invertible, y $q = vpv^*$ donde $v \in \mathcal{U}_{M_E}$.

Demostración. Utilizando 2 de 5.1.16,

$$\begin{aligned} \|1 - uE(u^*)\| &\leq (\mathrm{Ind}E)^{1/2}\|(1 - uE(u^*))p\| \\ &= (\mathrm{Ind}E)^{1/2}\|p - upu^*p\| \\ &= (\mathrm{Ind}E)^{1/2}\|(p - q)p\| \\ &\leq (\mathrm{Ind}E)^{1/2}\|p - q\| < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $uE(u^*) \in G_M$ y $E(u^*) \in G_N$. Ahora tomemos a v como la parte unitaria en la descomposición polar de $uE(u^*)$, $v = P_U(uE(u^*))$. Es claro por 1 del Lema 5.1.14 que v pertenece a $N^{\mathbf{c}}$. Veremos que v está también en M^E y que implementa a q.

Por la unicidad de la descomposición polar, tenemos que

$$v = uP_U(E(u^*)),$$

y $P_U(E(u^*))$ está en N, de manera que conmuta con e. Notemos que por el Lema 5.1.14, u conmuta con $E(u^*)$ y $E(u^*)$ es normal, luego u conmuta con $P_U(E(u^*))$. Ahora sea $x \in M$, entonces

$$\begin{aligned} E(vx) &= E(uP_U(E(u^*))x) = P_U(E(u^*))E(ux) \\ &= P_U(E(u^*))uE(xu)u^* = vE(xu)u^* = E(xu)u^*v \\ &= E(xu)P_U(E(u^*)) = E(xv), \end{aligned}$$

entonces $v \in M^E$. Ya que $E(u^*)$ es invertible, $P_U(E(u^*)) \in \mathcal{U}_N$. Por lo tanto $v \in \mathcal{U}_{M_E}$ y

$$q = upu^* = vP_U(E(u^*))^*pP_U(E(u^*))v^* = vpv^*$$

$\square$

Definición 5.1.20 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Notaremos con $\mathcal{P}(E)_p$ a la componente conexa de p en $\mathcal{P}(E)$.

Teorema 5.1.21 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Entonces $\mathrm{Ind}E < \infty$ implica

$$\mathcal{P}(E)_p = \mathcal{U}_{H_E}(p) := \{upu^* : u \in H_E\},$$

donde H_E es el subgrupo definido en la Ecuación 5.1.2, y la distancia entre diferentes componentes conexas de $\mathcal{P}(E)$ es mayor que $\mathrm{Ind}E^{-1/2}$.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{U}_{H_E}(p)$ es conexo, ya que H_E es conexo y la aplicación π_e de la ecuación 5.1.3 es continua. Luego es claro que $\mathcal{U}_{H_E}(p) \subseteq \mathcal{P}(E)_p$.

Para probar la otra inclusión, notemos que por Lema 5.1.19, $\mathcal{U}_{H_E}(p)$ es abierto en $\mathcal{P}(E)$. Pero como las órbitas de la acción de $\mathcal{U}_{H_E}$ en $\mathcal{P}(E)$ son todas abiertas y están a distancia mayor que $\mathrm{Ind}E^{-1/2}$, entonces $\mathcal{U}_{H_E}(p)$ es también cerrado en $\mathcal{P}(E)$. $\square$

A continuación estudiaremos varias propiedades del grupo $\mathcal{P}(E)$, en particular las relacionadas con el hecho de que está incluido en $N' \cap M_1$.

Proposición 5.1.22 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Supongamos $\mathrm{Ind}E < \infty$. Entonces N es un factor si y sólo si e es minimal en $N' \cap M_1$.

Demostración. Si N no es un factor, sea q una proyección no trivial en $\mathcal{Z}(N)$. Entonces qe es una subproyección propia de e en $N' \cap M_1$, lo que implica $q = 0$.

Supongamos ahora que N es un factor. Sea p una proyección en $N' \cap M_1$ con $p \leq e$. Entonces $pe = ep = p$. Como $\mathrm{Ind}E$ es finito, por Proposición 5.1.16 sabemos que $M_1 e = Me$. Por lo tanto existe $q \in M$ tal que $p = pe = qe$. Entonces,

$$E(q)e = eqe = epe = p = qe,$$

lo que prueba que $q \in N$. Además, q es también proyección:

$$q^2 e = (qe)^2 = p^2 = qe, \text{ de manera que } q^2 = q,$$

$$q^* e = (qe)^* = p^* = p = qe, \text{ de manera que } q^* = q.$$

Si $b \in N$,

$$qbe = qeb = pb = bp = bqe.$$

Por lo tanto $q \in \mathcal{Z}(N)$. Entonces, ya que N es un factor, q es un escalar; luego, $q = 0$ o $q = 1$ □

Proposición 5.1.23 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$. Supongamos que N es un factor. Entonces $pq = 0$ para cada par p, q de proyecciones que están en diferentes componentes conexas de $\mathcal{P}(E)$.

Demostración. Por conjugación unitaria podemos suponer que $q = e$. Ahora, asumiendo que $p = ueu^*$, tenemos

$$pe = ueu^*e = uE(u^*)e.$$

Si $pe \neq 0$, entonces $uE(u^*)$ es no nulo, luego $E(u^*) \neq 0$. Pero $E(u)E(u^*) \in \mathcal{Z}(N) = \mathbb{C}$, luego $E(u^*)$ y $uE(u^*)$ son invertibles. Procediendo como en la segunda parte de la prueba del Lema 5.1.19, tenemos que $p \in \mathcal{U}_{H_E}(e) = \mathcal{P}(E)_e$. □

El estudio de $\mathcal{P}(E)$ es más simple cuando se verifica que $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$ (por ejemplo para productos semidirectos razonables). El siguiente Teorema muestra que esto sucede si y sólo si $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$.

Teorema 5.1.24 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$. Entonces

1. Si $\mathrm{Ind}E < \infty$ y $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$, entonces $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$.

2. si $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$ entonces $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$.

Demostración. En primer lugar notemos que para la primera implicación es suficiente probar que $e \in \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$. En efecto, en ese caso, si $x \in N' \cap M_1$ y $u \in \mathcal{N}_E$, entonces

$$ueu^*x = ue(u^*xu)u^* = u(u^*xu)eu^* = xueu^*$$

ya que $uN'u^* = N'$. Para probar que $e \in \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$, mostraremos que es igual a su soporte central C_e en ese álgebra. Primero notemos que $(N' \cap M_1)e = (N^{\mathbf{c}})e$. En efecto, es evidente que

$$(N^{\mathbf{c}})_e \subseteq (N' \cap M_1)_e.$$

Para ver la otra inclusión, sea $x \in N' \cap M_1$. Como $\mathrm{Ind}E < \infty$, $M_1 e = Me$ (Proposición 3.3.14), luego existe $a \in M$ tal que $xe = ae$. Pero a está también en N', porque si $b \in N$,

$$abe = aeb = xeb = bxe = bae,$$

de manera que $a \in N'$, lo que prueba que $(N' \cap M_1)_e \subseteq (N^{\mathbf{c}})_e$, y por ende la igualdad. Entonces tenemos, como $N^{\mathbf{c}} \subseteq N$,

$$\begin{aligned} (C_e) &= [(N' \cap M_1)eL^2(M,\varphi)] = [(N^{\mathbf{c}})L^2(N,\psi)] \\ &\subseteq [NL^2(N,\psi)] = L^2(N,\psi) \\ &= R(e), \end{aligned}$$

probando por tanto que $C_e \leq e$, esto es $C_e = e$. Ahora supongamos que $N^{\mathbf{c}}$ no está contenido en N, luego hay un $a \in N^{\mathbf{c}}$ con $a \notin N$, es decir que $a - E(a)$ es no nulo. Si llamamos ξ al vector cíclico y separante para M en $L^2(M,\varphi)$, entonces el vector $(a - E(a))\xi$ pertenece a $R(C_e)$ pero no pertenece a $R(e)$, probando por tanto que e no puede ser igual a su soporte central, de manera que no es central. □

Corolario 5.1.25 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M,N)$. Entonces $e \in \mathcal{Z}(N' \cap M_1)$ si y sólo si $N^{\mathbf{c}} \in N$.

Observación 5.1.26 La parte (1) del Teorema (5.1.24) y la necesidad en la Proposición (5.1.22) figuran en [PP] para el caso de factores II_1, usando fuertemente la existencia de la traza.

Mostraremos ahora una caracterización del grupo $\mathcal{P}(E)$ en el caso de factores irreducibles. Este Teorema generaliza un teorema de [PP].

Teorema 5.1.27 Sea $N \subseteq M$ una inclusión irreducible de factores, con $\text{Ind}E < \infty$. Entonces

$$\mathcal{P}(E) = \{p \in \mathcal{P}(N' \cap M_1) : E_1(p) = (\text{Ind}E)^{-1}\}.$$

Demostración. Notemos en primer lugar que al pedir que M sea irreducible, forzamos a que N también sea irreducible, ya que $N' \cap M$ es isomorfo a $M' \cap M_1$ (son conjugados uno del otro a través de la conjugación modular de M). Esta condición fuerza, como es bien sabido [C], a que la esperanza condicional $E : M \to N$ sea única. Además, como M es un factor, el índice es un escalar $\text{Ind}E$.

Sea ahora $p \in N' \cap M_1$ un proyector con $E_1(p) = \lambda$, con $\lambda = (\text{Ind}E)^{-1}$. Entonces $p \simeq e$ en M_1 (en el sentido de la Definición 2.2.1. En efecto, lo probamos separando en los siguientes casos:

1. M es finito: en este caso tenemos una traza tr en M, y como E es única, debe ser la esperanza que conmuta con la traza, la traza se extiende a M_1 y también conmuta con la esperanza $E_1 : M_1 \to M$ (porque esta esperanza también es única). Entonces por hipótesis, p y e tienen la misma traza, y al estar en un factor, deben ser equivalentes.

2. M es de tipo III: la condición de índice finito hace que M_1 también sea de tipo III, de manera que todos los proyectores son equivalentes.

3. M es I_∞ ó II_∞: es bien sabido en este caso que N también es semifinito (4 de 3.2.2); es decir, que si bien no hay una traza, si hay pesos traciales fieles, normales y semifinitos tr_N y tr_M en N y M respectivamente. En particular, $\text{tr}_N \circ E$ es un peso fiel, normal y semifinito de M, y entonces por el Teorema de Radon-Nikodym de Pedersen y Takesaki (2.5.8), hay un operador h afiliado a $\mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}$ (es decir que h es un escalar) tal que

$$\text{tr}_N(E(x)) = \text{tr}_M(hx)$$

para todo $x \in M$. En particular, esto implica que tr_M es semifinita en N, y por el Teorema de Takesaki 3.1.5 existe una esperanza $E' \in E(M, N)$, fiel y normal, que cumple $\text{tr}_M = \text{tr}_M \circ E$. Como $N^{\mathbf{c}} = \mathbb{C}$, E es la única esperanza fiel y normal de M en N, por lo que $E' = E$, o sea que E conmuta con la traza. Ahora estamos en condiciones de aplicar la teoría de la sección 3.3, y por la Proposición 3.3.6, tr_M se extiende a una traza tr_{M_1} en M_1 y $\mathrm{tr}_{M_1} \circ E_1 = \mathrm{tr}_{M_1}$. Entonces, como $E_1(p) = E_1(e) = \lambda$, tenemos que

$$\mathrm{tr}_{M_1}(p) = \mathrm{tr}_{M_1}(e) = \infty,$$

y entonces debe ser $p \simeq 1$, $e \simeq 1$, y entonces $p \simeq e$.

Ahora, sabiendo que $p \simeq e$, tenemos una isometría parcial $v \in M_1$, con $v^*v = e$ y $vv^* = p$. Como $p = vev^*$, por 3.3.14 existe $m \in M$ tal que $p = mem^*$. Probaremos que $m \in \mathcal{N}_E$. En primer lugar, aplicando E_1, tenemos

$$\lambda = E_1(p) = E_1(mem^*) = \lambda mm^*,$$

lo que prueba que $mm^* = 1$. Esto implica que m es una isometría parcial, es decir que $m^*m \leq 1$. Por otra parte,

$$e = ev^*ve = em^*me = E(m^*m)e,$$

de donde deducimos que $E(m^*m) = 1$. Entonces $E(1 - m^*m) = 0$, y como $1 - m^*m \geq 0$ y E es fiel, deducimos que $m^*m = 1$, es decir que m es un unitario de M. Además, $mNm^* = N$, y bajo la condición de conmutante relativo trivial, esta condición implica que $m \in \mathcal{N}_E$ ([C]). □

5.1.3 ¿ Cuándo es $W(E)$ finito ?

La noción de índice está relacionada con el número de elementos en $W(E)$, como veremos. Es natural esperar que $W(E)$ sea finito si $\mathrm{Ind}E < \infty$. Pero veremos que el orden de $W(E)$ depende de $\mathrm{Ind}E$ y también de $\dim(\mathcal{Z}(N))$. En particular, mostraremos también que $W(E)$ puede ser infinito aún si $\mathrm{Ind}E < \infty$ (Ejemplo 5.2.1). En primer lugar estudiaremos el caso en que $\dim(\mathcal{Z}(N)) < \infty$.

Teorema 5.1.28 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann con $\dim(\mathcal{Z}(N)) < \infty$ y $E : M \to N$ una esperanza condicional con $\mathrm{Ind}E < \infty$. Entonces $W(E)$ es finito.

Demostración. Recordemos de la Proposición 5.1.13 que $\mathcal{P}(E) \subseteq N' \cap M_1$, que tiene dimensión finita por Corolario 3.2.12. Entonces la bola unitaria de $N' \cap M_1$ es compacta y no puede tener infinitos subconjuntos con una distancia fija positiva entre dos cualesquiera. Por lo tanto $\mathcal{P}(E)$ debe tener finitas componentes conexas (por Teorema 5.1.21) y $W(E)$ debe ser finito. $\square$

En lo que sigue estudiaremos cotas para el orden de $W(E)$, junto con algunos ejemplos.

Teorema 5.1.29 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann. Supongamos que N es un factor y $E : M \to N$ una esperanza condicional con índice finito. Entonces

$$|W(E)| \leq \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))\} = \|(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1}\|^{-1}.$$

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{N}_E$. Usando la Proposición 5.1.23 tenemos que $[u] = [v]$ en $W(E)$ si $E(u^*v) \neq 0$. Tomemos diferentes clases $[u_1], \ldots, [u_n]$ en $W(E)$ y consideremos $q_i = u_i e u_i^* \in \mathcal{P}(E)$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $E(u_i^* u_j) = 0$ si $i \neq j$ y $\{q_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una familia ortogonal de proyecciones en $\mathcal{P}(E)$. Consideremos la esperanza condicional E_1 del Corolario 3.2.12. Notemos que $\sum_{i=1}^n q_i \leq 1$, de manera que

$$1 \geq E_1(\sum_{i=1}^n q_i) = \sum_{i=1}^n E_1(q_i) = n(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1},$$

ya que $\mathrm{Ind}_{BDH}(E) \in \mathcal{Z}(M)$ y luego $E_1(p) = (\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1}$ para $p \in \mathcal{P}(E)$. Por lo tanto $n \leq \mathrm{Ind}_{BDH}(E)$ como operadores, lo que implica que n es menor que todos los elementos del espectro de $\mathrm{Ind}_{BDH}(E)$, de manera que $|W(E)| \leq \|(\mathrm{Ind}_{BDH}(E))^{-1}\|^{-1}$.

Observación 5.1.30 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E : M \to N$ una esperanza condicional con $\mathrm{Ind}E < \infty$. Entonces, por el Teorema 3.2.11,

$$\mathrm{Ind}E \leq \|\mathrm{Ind}_{BDH}(E)\| \leq (\mathrm{Ind}E)^2,$$

donde $[x]$ denota la parte entera de $x \in I\!R$. Esto nos da una estimación en términos del índice probabilístico para el orden de $W(E)$ cuando N es un factor.

El propósito principal de lo que sigue es mostrar que, en el caso de centro de dimensión finita e índice finito, se pueden encontrar cotas finas para el número de elementos de $W(E)$. Esto también mostrará algo de la estructura interna del grupo $W(E)$.

Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann. Sea $E \in E(M, N)$ una esperanza condicional con $\mathrm{Ind}E < \infty$, y $n = \dim \mathcal{Z}(N) < \infty$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones centrales minimales de N. Definamos el álgebra

$$M_0 = \mathcal{Z}(N)' \cap M.$$

Es inmediato verificar que $N \imath M_0 \imath M$. Consideremos las esperanzas condicionales $E_0 : M \to M_0$ y $F : M_0 \to N$ dadas por

$$E_0(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x p_i, \; x \in M \quad \text{y} \quad F = E|_{M_0}.$$

Se ve con claridad que ambas E_0 y F son fieles y normales, y que $E = F \circ E_0$.

El conjunto $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es estable por automorfismos de N, luego cada automorfismo de N induce una permutación de sus indices. Entonces, definamos

$$S : \mathcal{N}_E \to \mathcal{S}_n \tag{5.1.10}$$

mediante $S(u) = Adu|_{\{p_1,\ldots,p_n\}}$. Esto significa que $S(u) = \sigma$ si $up_iu^* = p_{\sigma(i)}$ para $0 \leq i \leq n$.

Observación 5.1.31 Tenemos, por la Proposición 5.1.9, que

$$\mathrm{Ker}S = \mathcal{N}_E \cap M_0 = \mathcal{N}_F$$

y

$$|\mathcal{N}_E / \mathrm{Ker}S| \leq n!$$

También es elemental verificar que $H_E = \mathcal{H}_F$, y entonces que

$$\mathrm{Ker}S/H_E = \mathcal{N}_F/H_E \simeq W(F).$$

Notemos que ambos $\mathcal{N}_F \subseteq \mathcal{N}_E$ y $W(F) \subseteq W(E)$ son subgrupos normales. Por teoría elemental de grupos,

$$\mathcal{N}_E/\mathcal{N}_F \simeq \frac{\mathcal{N}_E/H_E}{\mathcal{N}_F/H_E} \simeq W(E)/W(F).$$

Por lo tanto,

$$|W(E)| \leq n!|\mathrm{Ker}S/H_E| = n!|W(F)|. \tag{5.1.11}$$

Teorema 5.1.32 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $n = \dim \mathcal{Z}(N) < \infty$, y $E \in E(M, N)$ con $\mathrm{Ind}E < \infty$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones minimales de $\mathcal{Z}(N)$. Sea $M_0 = \mathcal{Z}(N)' \cap M$. Entonces

$$|W(E)| \leq n! \; |W(E|_{M_0})| \leq n! \; \Pi_{i=1}^{n} \|\mathrm{Ind}E_i^{-1}\|^{-1} \leq n! K^n,$$

donde $E_i = E|_{p_i M p_i}$ y $K = \sup_{1 \leq i \leq n} \|\mathrm{Ind}E_i^{-1}\|^{-1}$. Esta desigualdad es óptima, en el sentido de que hay ejemplos en los que se cumple la igualdad.

Demostración. La desigualdad se sigue fácilmente de 5.1.31 y la Proposición 5.1.8, sumado al hecho de que $p_i N$ es un factor (notemos que $\mathcal{Z}(N) \subseteq \mathcal{Z}(M_0)$ y entonces 5.1.8 se aplica). Mostraremos que se puede realizar la igualdad en el ejemplo 5.2.4. □

5.2 Ejemplos

En esta sección mencionamos algunos ejemplos elementales de inclusiones de álgebras de von Neumann en las cuales es fácil calcular el normalizador $\mathcal{N}_E$ y el grupo $W(E)$.

5.2.1 Un caso infinito

Aquí mostramos que, aún si $\mathrm{Ind}E < \infty$, el grupo $W(E)$ puede ser infinito. Sea A un álgebra de von Neumann abeliana de dimensión infinita y consideremos la inclusión $N = A \oplus A \subseteq M = A^{2\times 2}$ como matrices diagonales, con la esperanza $E : M \to N$ dada por

$$E(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sea p una proyección en A. Consideremos la matriz

$$u_p = \begin{pmatrix} p & (1-p) \\ (1-p) & p \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $u_p \in \mathcal{N}_E$. Como $N' \cap M = N$ sabemos por 5.1.13.3 que $H_E = \mathcal{U}_N$. Se verifica que si p y q son proyecciones en A, entonces $u_p u_q \in \mathcal{U}_N$ si y sólo si $p = q$. Por lo tanto las clases de p y q coinciden en $W(E)$ si y sólo si $p = q$. Como A tiene dimensión infinita, deducimos que $W(E)$ es infinito.

Notemos que este ejemplo puede ser visto como inclusión de productos semidirectos de álgebras. En efecto, la acción de $\mathbb{Z}_2$ en N dada por la permutación de las dos coordenadas produce un álgebra de producto semidirecto isomorfa a M. El unitario de M que implementa el automorfismo de permutación es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, asociada a $p = 0$.

5.2.2 La Traza

Sea N un factor y consideremos ahora la inclusión

$$N \subseteq M = N^{n \times n},$$

con la esperanza condicional dada por la "traza normalizada a valores operadores". Mostraremos que $W(E)$ consiste de un solo elemento, de manera que sabemos que el normalizador $\mathcal{N}_E$ es igual al grupo H_E. Notemos que $N^{\mathbf{c}}$ consiste de las matrices con entradas en $\mathbb{C}$. Además, ya que las entradas de las matrices de M y $N^{\mathbf{c}}$ conmutan y E es una traza, deducimos que $M_E = N^{\mathbf{c}}$ y

$$\mathcal{N}_E = H_E = \{(n.a_{ij})_{ij} \ : \ n \in \mathcal{U}_N \ \text{ y } \ (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n} \ \text{ es unitario}\}.$$

En efecto, N es un factor y, por la Proposición (5.1.23), tenemos que si $u \in \mathcal{N}_E$ y $[u] \neq 1$ en $W(E)$ entonces $E(u) = 0$. Sea A una matriz escalar unitaria en $N^{\mathbf{c}} = M_E$. Si $E(uA)$ fuera no nulo, sería $[uA] = 1$ y luego $[u] = 1$

En otras palabras, si $u \in \mathcal{N}_E$ y $[u] \neq 1$, entonces $E(uA) = 0$ para cada matriz unitaria a entradas escalares de A. Esto significa que

$$E(uA) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} u_{ik} A_{ki}) = 0.$$

Eligiendo la matriz A como la identidad y la identidad con el último signo cambiado, se ve que que $u_{nn} = 0$. Cambiando los demás signos podemos mostrar que toda la diagonal debe ser nula. Pero también podemos elegir como A las matrices de permutación de manera que cada entrada de u puede ser llevada a la diagonal y por lo tanto u debe ser 0, una contradicción. Por lo tanto $W(E)$ es el grupo trivial. □

5.2.3 Productos Semidirectos Discretos

Este ejemplo es el que principalmente justifica la introducción del grupo $W(E)$ ([C], [Ko2]). Tomemos un álgebra de von Neumann N y un grupo discreto G de automorfismos exteriores (y libres) de N, y consideremos el producto semidirecto $M = N \rtimes G$, con la esperanza condicional canónica. Entonces $G \subseteq W(E)$.

En general $W(E)$ es mayor que G, también cuando G es finito. En efecto, en el ejemplo 5.2.5, el álgebra M puede ser vista como un producto semidirecto de N por la acción de los enteros módulo n, pero en este caso $W(E) \simeq \mathcal{S}_n$ (ver también ejemplo 5.2.1). Sólo cuando G es finito y N es un factor, se tiene que $G \simeq W(E)$.

Para cada $g \in G$ denotemos por λ_g al unitario correspondiente en M. Es bien sabido [BDH] que el conjunto $(\lambda_g)_{g\in G}$ es una base ortonormal para $N \overset{E}{\subseteq} M$ (ver Definición 3.2.8) y

1. $\sum_{g\in G} \lambda_g^* e \lambda_g = 1$.

2. $E(\lambda_g^* \lambda_h) = \delta_{gh}$ para $g, h \in G$.

3. $|G| = \sum_{g\in G} \lambda_g \lambda_g^* = \text{Ind}E$.

También es bien sabido que $N^{\mathbf{c}} = \mathcal{Z}(N)$ y entonces $W(E) \simeq \mathcal{P}(E)$. En efecto, como $N^{\mathbf{c}} = \mathcal{Z}(N)$, $H_E = \mathcal{U}_N$. Denotemos por $\lambda : G \to \mathcal{U}_M$ la representación canónica de G en M. Entonces, ya que para todo $g \in G$, Ad_{λ_g} conmuta con E, tenemos que

$$\{\ \lambda_g\ \}_{g\in G}\ \subseteq\ \mathcal{N}_E.$$

Además, si $g,\ h \in G$ y $\lambda_g \lambda_h^* = \lambda_{gh^{-1}} \in H_E = \mathcal{U}_N$ entonces $gh^{-1} \in Inn(N)$ y debe ser $g = h$. Por lo tanto, la aplicación $\Phi : G \to W(E)$ dada por

$$\Phi(g) = [\lambda_g] = \lambda_g\ \cdot\ H_E\ , \qquad \text{para}\ \ g \in G,$$

es un homomorfismo inyectivo.

Si N es un factor, tenemos un conjunto de proyecciones $\{\lambda_g e \lambda_g^*\}_g \in \mathcal{P}(E)$, ortogonales de a pares (por 2.), con suma 1 (por 1.). Por 5.1.22 y 5.1.24, los elementos de $\mathcal{P}(E)$ son proyecciones minimales de $N' \cap M_1$ y son centrales. Entonces

$$W(E) \simeq \mathcal{P}(E) = \{\lambda_g e \lambda_g^*\}_{g\in G}.$$

Por lo tanto la aplicación $\rho : G \to W(E)$ dada por $\rho(g) = \lambda_g e \lambda_g^*$ define un isomorfismo natural. En este caso también

$$\mathrm{Ind}E = |G| = |W(E)|.$$

$\square$

5.2.4 La cota

Sea B un factor y G_0 un grupo finito de automorfismos exteriores de B. Sea $E_0 : B \rtimes G_0 \to B$ la esperanza canónica y sea $n \in I\!N$. Consideremos la inclusión

$$B^n \subseteq (B \rtimes G_0)^{n \times n}$$

con la esperanza E dada por $E((a_{i,j})_{i,j}) = \oplus_i E_0(a_{ii})$. entonces

$$|W(E)| = n!|G_0|^n.$$

En efecto, en este ejemplo la aplicación S de la ecuación 5.1.10 es suryectiva, porque se puede conseguir cada permutación del conjunto de proyecciones minimales diagonales (esto es, proyecciones minimales del centro de B^n) por matrices con entradas escalares, que pertenecen a $\mathcal{N}_E$. Usando el Ejemplo 5.2.3, sabemos que $\mathrm{Ind}E_i = |W(E_i)| = |G_0|$, porque cada inclusión

$$p_i B^n \overset{E_i}{\subseteq} p_i (B \rtimes G_0)^{n \times n} p_i$$

es una inclusión de factores isomorfos a

$$B \overset{E_0}{\subseteq} B \rtimes G_0$$

. La igualdad se sigue usando 5.1.31 y 5.1.8.

5.2.5 Proyección a la Diagonal

Sea $\mathcal{R}$ un factor, y consideremos la inclusión

$$N = \mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{R}^{n \times n} = M,$$

donde la esperanza condicional E actúa por "compresión a la diagonal". Entonces $W(E)$ es el grupo $\mathcal{S}_n$ de permutaciones de n elementos; de manera que tiene $n!$ elementos. Este hecho se ve aplicando el ejemplo 5.2.4 con $G = \{1\}$. $\square$

5.2.6 Inclusiones de factores II_1 con $\mathrm{Ind}E < 4$

Sean $N \subseteq M$ factores II_1 y $E \in E(M,N)$ con $\mathrm{Ind}E < 4$. Notemos que en este caso $N' \cap M = \mathbb{C}$ y $H_E = \mathcal{U}_N$. Entonces tenemos tres casos:

1. El grafo principal de la inclusión es el grafo de Coxeter A_3. Entonces $W(E) = \mathbb{Z}_2$.

2. El grafo principal de la inclusión es el grafo de Coxeter D_4. Entonces $W(E) = \mathbb{Z}_3$.

3. Ninguno de los otros dos. Entonces $W(E)$ es trivial, es decir que $\mathcal{N}_E = H_E = \mathcal{U}_N$.

Veamos cómo probar estas afirmaciones: teniendo en cuenta que N es un factor y que $N^{\mathbf{c}} = \mathbb{C} \subseteq N$ sabemos, por 5.1.13.3, que $W(E) = \mathcal{P}(E)$, y por la Proposición (5.1.23) sabemos también que sus elementos son proyecciones ortogonales. Analizando como de costumbre el grafo principal obtenido de la torre derivada (ver por ejemplo [GHJ]), sabemos que el centro de $N_1^{\mathbf{c}} := N' \cap M_1$ tiene dimensión dos o tres. Asumamos que es dos. Entonces, por Teorema 5.1.24, el centro de $N_1^{\mathbf{c}}$ consiste de elementos de la forma

$$\lambda e + \mu(1-e),$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ y e el proyector de Jones. Entonces, si $\mathcal{P}(E)$ no fuera trivial, debe existir $u \in \mathcal{N}_E$ con $1 - e = ueu^*$; luego

$$e + ueu^* = 1.$$

Usando la esperanza condicional $E_M : M_1 \to M$ dada por la construcción básica, tenemos que

$$1 = E_M(1) = E_M(e + ueu^*) = 2(\mathrm{Ind}E)^{-1},$$

de manera que

$$\mathrm{Ind}E = 2.$$

Por lo dicho, podemos separar naturalmente los tres casos mencionados:

1. Ind$E < 4$ **y Grafo Principal de tipo ni $\mathbf{A}_3$ ni $\mathbf{D}_4$:** Este es el caso considerado en la discusión anterior, de manera que tenemos probado que $W(E)$ es trivial.

2. Ind$E = 2$ **(Grafo Principal de tipo $\mathbf{A}_3$):** Es bien sabido en este caso, por el Teorema de Goldman, que
$$M = N \rtimes \mathbb{Z}_2,$$
y entonces, por Ejemplo 5.2.3, es $W(E) = \mathbb{Z}_2$.

3. Ind$E = 3$ **con Grafo Principal de tipo $\mathbf{D}_4$:** En este caso $\mathcal{Z}(N' \cap M_1)$ tiene tres proyecciones ortogonales, y por Ejemplo 5.2.3, esta es la situación cuando
$$M = N \times_\alpha \mathbb{Z}_3,$$
de manera que
$$W(E) = \mathbb{Z}_3.$$

5.3 El Algebra Producto Semidirecto Intermedia

Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , y $E : M \to M$ una esperanza condicional fiel y normal.

Los elementos de $W(E)$ nos permiten introducir un álgebra intermedia que se realiza como un producto semidirecto, al menos en el caso en que la aplicación canónica al grupo de Weyl tiene una sección local (Hipótesis 5.3.4), por ejemplo cuando $N \subseteq M$ son factores irreducibles y $N' \cap M_1 = \mathbb{C}^n$ ([Ko2]).

Definición 5.3.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$.

1. Llamamos L al álgebra de von Neumann generada por N y $\mathcal{N}_E$.

2. Llamamos F a la restricción de la esperanza condicional E a L.

El primer resultado es que podemos encontrar una esperanza condicional que "descomponga" a E:

Proposición 5.3.2 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , $E \in E(M, N)$. Entonces existe una esperanza condicional fiel y normal E_L tal que $E = F \circ E_L$.

Demostración. Sea ψ un estado fiel y normal de N, y sea $\varphi = \psi \circ E$, que es un estado fiel y normal de M. El grupo modular σ_t^φ fija a N, y también fija a $\mathcal{N}_E$. En efecto, si $u \in N_E$ y $x \in M$,

$$\begin{aligned}
\sigma_t^\varphi(u)E(x)\sigma_t^\varphi(u)^* &= \sigma_t^\varphi(u\sigma_{-t}^\varphi(E(x))u^*) \\
&= \sigma_t^\varphi(uE(\sigma_{-t}^\varphi(x))u^*) \\
&= \sigma_t^\varphi(E(u\sigma_{-t}^\varphi(x)u^*)) = E(\sigma_t^\varphi(u)x\sigma_t^\varphi(u)^*).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema de Takesaki 3.1.5, hay una única esperanza condicional fiel y normal $E_L : M \to L$ con $\varphi(x) = \varphi(E_L(x))$. Se sigue entonces que $E = F \circ E_L$. □

La esperanza F, como actúa desde L, tiene el mismo normalizador que E, y esto fuerza a que tenga el mismo grupo de Weyl:

Proposición 5.3.3 Sean $N \subseteq M$, N un factor irreducible, $E \in E(M, N)$, $L = (N \cup \mathcal{N}_E)''$, $F = E|_L$, y E_L la esperanza condicional obtenida en 5.3.2. Entonces $W(E) = W(F)$ y $\mathrm{Ind}F = |W(E)|$.

Demostración. Esto es una consecuencia de los siguientes hechos:

$$L_F = M_E \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_F = \mathcal{N}_E,$$

que son claros de las definiciones. □

A continuación establecemos como Hipótesis un resultado que se prueba en [Ko2] que vale para ciertos factores propiamente infinitos.

Hipótesis 5.3.4 (Kosaki) Es posible encontrar n representantes $u_1, \ldots, u_n$ de cada clase en $W(E)$, tales que forman un subgrupo de $\mathcal{U}_M$.

Proposición 5.3.5 Sean $N \subseteq M$ tales que cumplen la Hipótesis 5.3.4. Entonces existe una esperanza condicional fiel y normal $E_L : M \to L$ con $E = F \circ E_L$. Además, si $N' \cap M = \mathbb{C}$, entonces

$$E_L = \sum_{k=1}^{n} u_k E(u_k^* \cdot),$$

donde los unitarios u_i, $1 \le i \le n$ son los de la Hipótesis 5.3.4.

Demostración. La existencia de la esperanza se obtiene aplicando la Proposición 5.3.2. Como $N' \cap M = \mathbb{C}$, entonces $H_E = \mathcal{U}_N$ y $L = \{N, u_i\}''$. Los u_k forman un grupo y $u_k N u_k^* = N$, de manera que

$$L = \{\sum_{k=1}^{n} u_k x_k : x_k \in N \text{ para todo } k\}.$$

Obtenemos entonces

$$L = \sum_{k=1}^{n} u_k N,$$

y la suma puede considerarse una suma directa de subespacios de $L^2(M, \varphi)$. Entonces tenemos que

$$e_L = \sum_{k=1}^{n} u_k e_N u_k^*,$$

y

$$E_L = \sum_{k=1}^{n} u_k E(u_k^* \cdot\,). \tag{5.3.12}$$

□

Hemos probado el siguiente Teorema:

Teorema 5.3.6 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y $E \in E(M, N)$, tales que se cumple la hipótesis 5.3.4. Sea $L = (N \cup \mathcal{N}_E)''$ y $F = E|_L \in E(L, N)$. Si $N' \cap M = \mathbb{C}$ y $\mathrm{Ind}E < \infty$, entonces L es isomorfa al producto semidirecto de N por $W(E)$ por la acción de los unitarios de 5.3.4.

5.4 El álgebra fija por un grupo de automorfismos

Sea M un factor, y $G = \{\alpha_{g_1}, \ldots, \alpha_{g_n}\}$ un grupo finito de automorfismos propiamente exteriores de M. Sea $N = M^G$, y

$$E = \frac{1}{|G|} \sum \alpha_g(\cdot)$$

la esperanza canónica sobre N.

Se sabe por la teoría clásica que que $M_1 = M \rtimes G$ y $N' \cap M_1 = C^*[G]$ y, entonces, como M es factor y G es propiamente exterior, tenemos $M' \cap M_1 = \mathbb{C}$ [Sun].

Se ve en ese caso que $N' \cap M = \mathbb{C}$, ya que

$$N' \cap M = J_M(M_1 \cap M')J_M = J_M \mathbb{C} J_M = \mathbb{C}.$$

Del hecho de que $N' \cap M_1 = C^*[g]$ obtenemos que los α_g están representados como ciertos unitarios u_g en $N' \cap M_1$, y

$$E = \frac{1}{|G|} \sum u_g \cdot u_g^*.$$

Tenemos además que

$$e = \frac{1}{|G|} \sum u_g. \tag{5.4.13}$$

Consideremos L el álgebra intermedia, como en la sección 5.3. La correspondencia de Galois entre los subgrupos de G y las subálgebras de M que contienen a M^G [ILP] muestra que existe un subgrupo $H \subseteq G$ tal que

$$L = M^H. \tag{5.4.14}$$

El subgrupo H es un subgrupo normal de G. En efecto, cualquier elemento de G deja invariante (pero no necesariamente fija) al álgebra L (ver, por ejemplo, la demostración de la Proposición 5.4.2). Pero entonces al conjugar un elemento de H con cualquiera de G y aplicarlo a un $x \in L$, claramente x queda fijo, porque el elemento de H deja fija a la imagen del primer automorfismo y entonces este se cancela con su inverso.

Utilizaremos la notación $[G, G]$ para el grupo conmutador de G, es decir

$$[G, G] = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}.$$

Notemos que el dual $\hat{G}$ de G cumple

$$\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, S^1) \simeq \mathrm{Hom}(G/[G, G], S^1),$$

porque es evidente que si $\lambda \in \hat{G}$, entonces $[G, G] \subseteq \mathrm{Ker}\lambda$. Como $G/[G, G]$ es abeliano y finito,

$$\mathrm{Hom}(G/[G, G], S^1) \simeq G/[G, G],$$

es decir que

$$\hat{G} \simeq G/[G, G].$$

Observemos además, que al ser $L = M^H$, podemos considerar al grupo G/H actuando sobre L (porque es evidente que G deja invariante a $\mathcal{N}_E$), y que además

$$L^{G/H} = N.$$

Definición 5.4.1 Dado $v \in \mathcal{N}_E$, definimos

$$\lambda_g(v) = v^* \alpha_g(v).$$

El primer hecho interesante sobre estos $\lambda_g(v)$, es que son escalares:

Proposición 5.4.2 Para todo $v \in \mathcal{N}_E$, $g \in G$, tenemos que $\lambda_g(v) \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $x \in N$. Entonces

$$\alpha_g(vxv^*) = vxv^*,$$

porque el normalizador deja invariante a N. Pero

$$\alpha_g(vxv^*) = \alpha_g(v) x \alpha_g(v)^* = vxv^*,$$

lo que se puede escribir como

$$v^* \alpha_g(v) x = x v^* \alpha_g(v),$$

de manera que $\lambda_g(v) = v^* \alpha_g(v) \in N' \cap M = \mathbb{C}$.

Teorema 5.4.3 Sea M un factor, G un grupo de automorfismos propiamente exteriores, L el álgebra intermedia, y H un subgrupo de G tal que $L = M^H$. Entonces

(i) La aplicación

$$\begin{array}{rrl} \lambda: & \mathcal{N}_E \times G \to & S^1 \\ & v \times g \mapsto & \lambda_g(v) \end{array}$$

es un morfismo de grupos.

(ii) La aplicación

$$\begin{array}{rcl} W(E) & \to & \mathrm{Hom}(G, S^1) \\ [v] & \mapsto & \lambda(\cdot, v), \end{array}$$

está bien definida y es un isomorfismo, de manera que

$$W(E) \simeq G/[G, G].$$

(iii) $H = [G, G]$.

(iv) $W(E)$ es abeliano.

Demostración. Comencemos con (i). Para ver que es morfismo,

$$\lambda_g(vw) = w^* v^* \alpha_g(vw) = w^* v^* \alpha_g(v)\alpha_g(w) = w^* \lambda_g(v)\alpha_g(w) = \lambda_g(v)\lambda_g(w).$$

También

$$\lambda_{gh}(v) = v^* \alpha_{gh}(v) = v^* \alpha_g(\alpha_h(v)) = v^* \alpha_g(vv^* \alpha_h(v)) = \lambda_g(v)\lambda_h(v).$$

Veamos la buena definición en (ii): si $[v] = [w]$, como $N' \cap M = \mathbb{C}$, tenemos que $w = vb$, con $b \in \mathcal{U}_N$. Entonces

$$\lambda_g(w) = w^* \alpha_g(w) = b^* v^* \alpha_g(vb) = b^* \lambda_g(v) b = \lambda_g(v).$$

Ahora, si $\lambda(\cdot, v) = \lambda(\cdot, w)$, entonces $\lambda_g(v) = \lambda_g(w)$ para todo $g \in G$. Tenemos

$$\alpha_g(v)v^* = \alpha_g(w)w^*,$$

o sea

$$u_g v u_g^* v^* = u_g w u_g^* w^*.$$

Cancelando u_g,

$$v u_g^* v^* = w u_g^* w^* \text{ para todo } g \in G.$$

Sumando sobre g obtenemos, por la ecuación 5.4.13,

$$vev^* = wew^*,$$

lo que implica que $[v] = [w]$, es decir que $\lambda(\cdot, g)$ es un monomorfismo. Resta verificar que $W(E) \simeq G/[G, G]$. Por lo que ya hemos hecho, simplemente debemos probar que la aplicación

$$[v] \mapsto \lambda_v$$

es suryectiva. Dado $\sigma \in \hat{G}$, definamos

$$e_\sigma = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) u_g.$$

Este elemento e_σ está contenido en al álgebra de grupo de G, $C^*[G]$, que es exactamente $N' \cap M_1$. Se puede verificar además que

$$e_\sigma^2 = e_\sigma = e_\sigma^*,$$

y también

$$E_1(e_\sigma) = \frac{\sigma(1)}{|G|} = \frac{1}{|G|} = (\mathrm{Ind} E_G)^{-1}.$$

En esas condiciones, el Teorema 5.1.27 nos dice que $e_\sigma \in \mathcal{P}(E)$, y como M es un factor irreducible, $\mathcal{P}(E) = W(E)$. Luego, tenemos que $\hat{G}$ es isomorfo a un subgrupo de $W(E)$, y como ya sabíamos que $W(E) \subseteq \hat{G}$, debe ser $W(E) \simeq \hat{G}$.

Para ver (iii) tenemos, en primer lugar, que $[G, G] \subseteq H$. En efecto, si $\lambda \in G$, $v \in \mathcal{N}_E$ y $x \in N$, como $vxv^* \in N$, $\lambda(vxv^*) = vxv^*$, de manera que $v^*\lambda(v) \in \mathcal{Z}(N) = \mathbb{C}$. Un elemento de $[G, G]$ es de la forma $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, de manera que al aplicarlo a un $v \in \mathcal{N}_E$, tiene que dejarlo invariante, porque la constante se cancela con la que aparece por el inverso del automorfismo. Ahora, como $[G, G] \subseteq H$, debe ser $G/H \subseteq G/[G, G]$, de manera que G/H es abeliano. Pero por una parte, $W(E_{G/H}) = G/H$ (por ser G/H abeliano y aplicando (ii)), y por la otra, de la Proposición 5.3.3, $W(E_{G/H}) = W(E_G) \simeq G/[G, G]$. Entonces $G/[G, G]$ y G/H tienen el mismo cardinal, de donde $|H| = |[G, G]|$, y debe ser $H = [G, G]$. Finalmente, sabemos que $W(E)$ es abeliano porque $W(E) = W(E_{G/H})$. □

Ahora sabemos que $W(E)$ es abeliano, y entonces es un resultado clásico, al ser finito, que es "split", es decir que se cumple la Hipótesis 5.3.4. Entonces la esperanza E_L está dada, según la ecuación 5.3.12, por

$$E_L(x) = \sum_{k=1}^{|W(E)|} v_k E(v_k^* x).$$

donde $\{v_k\}_{k=1,\ldots,|W(E)|}$ son los representantes de $W(E)$ en $\mathcal{N}_E$ tales que forman un grupo. Como N es el álgebra fija, conocemos la forma de E, y podemos poner

$$E_L(x) = \sum_{k=1}^{|W(E)|} v_k E(v_k^* x) = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^{|W(E)|} \sum_{g \in G} v_k u_g v_k^* x u_g^*.$$

Ahora, $u_g v_k^* = \alpha_g(v_k^*) u_g = \lambda_g(v_k^*) v_k u_g$. Aplicando esto en la fórmula anterior,

$$E_L(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^{|W(E)|} \sum_{g \in G} v_k \lambda_g(v_k^*) v_k^* u_g x u_g^* = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{k=1}^{|W(E)|} \lambda_g(v_k^*) \right) \alpha_g(x).$$

Como vimos que λ_g es un morfismo, el conjunto $\{\lambda_g(v_k)\}_k$ es un subgrupo de S^1, de manera que su suma es o bien 0 ó bien $|W(E)|$.

En particular podemos verificar que H es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \{g \in G : \textstyle\sum_{k=1}^{|W(E)|} \lambda_g(v_k^*) \neq 0\} \\ &= \{g \in G : \lambda_g(v_k^*) = 1 \forall k\} \end{aligned}$$

Escribiendo

$$E_L(x) = \frac{|W(E)|}{|G|} \sum_{g \in H} \alpha_g(x),$$

y evaluando en 1, recuperamos el hecho de que

$$|H| = \frac{|G|}{|W(E)|}.$$

La utilización de estas igualdades sugiere de un modo más intuitivo el hecho de que el álgebra intermedia L es la subálgebra de M fija por H, $L = M^H$, ya que si $x \in L$, vale que $x = E_L(x)$, lo que implica $x \in M^H$; recíprocamente, si $x \in M^H$, entonces por definición de H, $E_L(x) = x$.
$\square$

5.5 El caso invertible

Ahora veremos que el desarrollo de la sección 5.1 puede extenderse al caso en que la acción sobre las esperanzas condicionales está dada ya no por los unitarios sino por el grupo G_M de los invertibles de M.

Consideramos entonces la acción

$$L_g : G_M \to \mathcal{B}(M)$$

dada por

$$L_g(E) = gE(g^{-1} \cdot g)g^{-1}.$$

Notemos que $L_g(E)$ no es necesariamente una esperanza condicional. De todos modos tenemos la órbita

$$\mathcal{O}_E = \{L_g(E) : g \in G_M\}. \tag{5.5.15}$$

El rol que antes jugaba el normalizador es ahora jugado por la isotropía de la acción

$$I_E = \{g \in G_M : L_g(E) = E\},$$

y consideraremos de manera análoga los conjuntos G_{M_E}, G_N, que son respectivamente los elementos invertibles de las álgebras M_E y N.

Definamos, de nuevo análogamente al caso unitario,

$$\mathcal{Z}_E = G_{M_E} \cdot G_N.$$

Podemos considerar una extensión de la aplicación ρ_E como

$$\rho_E : I_E \to \mathrm{GL}(\mathcal{B}(N)),$$

de manera que tenemos un nuevo grupo de Weyl, $W_1(E) = \rho_E(I_E)$, y hay un análogo para la Proposición 5.1.6:

Proposición 5.5.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E \in E(M, N)$ y ρ_E como en 5.1.2. Entonces $\mathrm{Ker}(\rho_E) = \mathcal{Z}_E$, y ρ_E induce el isomorfismo

$$\Phi : I_E/\mathcal{Z}_E \to W_1(E)$$

que es un homeomorfismo cuando se considera a $I_E/\mathcal{Z}_E$ con la topología cociente de la topología de la norma en I_E.

Además, la componente conexa de I_E en cualquier $u \in I_E$ es exactamente $u \cdot \mathcal{Z}_E$. La distancia entre diferentes componentes conexas es mayor que 0.

Demostración. La demostración es similar al caso unitario, excepto por la afirmación sobre la componente conexa, ya que en este caso la conjugación por invertibles no genera *-automorfismos de N. Entonces para probarlo mostraremos que $\mathcal{Z}_E$ es abierto, cerrado y conexo en I_E, lo que prueba que $\mathcal{Z}_E$ es la componente conexa de 1 en I_E. Esto se hace en la Proposición 5.5.4. □

Antes de probar la Proposición 5.5.4, necesitamos dos Lemas:

Lema 5.5.2 Si $g \in G_M$ y $\|g - 1\| < \varepsilon$, entonces

$$\|g^{-1} - 1\| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

En particular, si $\varepsilon < 1/2$, entonces

$$\|g^{-1} - 1\| < 2\varepsilon.$$

Demostración. Tenemos que

$$\|g^{-1} - 1\| = \|g^{-1}(1 - g)\| \leq \|g^{-1}\| \, \|g - 1\| < \varepsilon \|g^{-1}\|.$$

Como $\|g - 1\| < \varepsilon$, tenemos que $\sigma(g - 1)\imath B_\varepsilon$, y por lo tanto $\sigma(g)\imath 1 + B_\varepsilon$, donde σ denota el espectro del operador, y B_ε denota la bola de radio ε alrededor de 0. Entonces $\sigma(|g|)\imath 1 + B_\varepsilon$; para cada $\lambda \in \sigma(|g|)$ tenemos que $\lambda > 1 - \varepsilon$, y entonces $0 < \lambda^{-1} < (1 - \varepsilon)^{-1}$. Esto significa que $\sigma(|g|^{-1})\imath B_{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, por lo que

$$\||g|^{-1}\| < \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

y entonces el Lema se sigue, ya que $\|g^{-1}\| = \||g|^{-1}\|$. En efecto,

$$\||g|^{-1}\|^2 = \|(g^* g)^{-1/2}\|^2 = \|(g^* g)^{-1}\| = \|g^{-1}(g^{-1})^*\| = \|(g^{-1})^*\|^2 = \|g^{-1}\|^2$$

.

Para la última afirmación, observemos que si $\varepsilon < 1/2$, entonces $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon$. $\square$

Lema 5.5.3 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann, $E \in E(M, N)$. Entonces

1. Si $g \in I_E$, entonces $gE(g^{-1}) = E(g^{-1})g$.

2. Si $g \in I_E$ y $E(g^{-1}) \in G_N$, entonces $g \in \mathcal{Z}_E$.

3. $I_E \cap M^+ = \mathcal{Z}_E^+$.

Demostración. Si $g \in I_E$, entonces

$$gE(g^{-1}) = gE(g^{-1}g^{-1}g) = E(g^{-1})g,$$

lo que prueba 1.

Para ver 2, sea $b \in N$. Entonces

$$gE(g^{-1})b = gE(g^{-1}b) = gE(g^{-1}bg^{-1}g) = E(bg^{-1})g = bE(g^{-1})g,$$

de manera que $gE(g^{-1}) \in N^{\mathbf{c}}$. Utilizando esto, vemos que si $x \in M$,

$$\begin{aligned} E(gE(g^{-1})x) &= E(E(g^{-1})gx) \\ &= E(g^{-1})E(gx) \\ &= E(g^{-1})E(gxgg^{-1}) \ , \\ &= E(g^{-1})gE(xg)g^{-1} \\ &= E(xgE(g^{-1})) \end{aligned}$$

lo que prueba que $gE(g^{-1}) \in M_E$, y por lo tanto $gE(g^{-1}) \in \mathcal{Z}_E$, y $g \in \mathcal{Z}_E$.

Ahora, si $g \in I_E$ y $g > 0$, entonces $g^{-1} > 0$, y como E es fiel, $E(g^{-1}) > 0$, por lo que $E(g^{-1}) \in G_N$, y por 2, $g \in \mathcal{Z}_E$. □

Proposición 5.5.4 El grupo $\mathcal{Z}_E$ es abierto, cerrado y conexo en I_E.

Demostración. En primer lugar mostraremos que $\mathcal{Z}_E$ es abierto en 1. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $g \in I_E$ tal que $\|g - 1\| < \varepsilon < 1/2$. Entonces, por el Lema 5.5.2, tenemos que

$$\|g^{-1} - 1\| < 2\varepsilon,$$

y

$$\|E(g^{-1}) - 1\| < 2\varepsilon,$$

lo que implica que $E(g^{-1})$ es invertible. Entonces, por 5.5.3, $gE(g^{-1}) \in \mathcal{Z}_E$, y entonces, como $E(g^{-1}) \in G_N$, $g \in \mathcal{Z}_E$.

Si $h \in \mathcal{Z}_E$, por el párrafo anterior hay un entorno abierto V de 1 tal que $V \cap I_E \imath \mathcal{Z}_E$. Entonces hV es un entorno de h y, si $g \in hV$, entonces $h^{-1}g \in V$, y por tanto $h^{-1}g \in \mathcal{Z}_E$. Como $h \in \mathcal{Z}_E$, tenemos que $g \in \mathcal{Z}_E$, de manera que $\mathcal{Z}_E$ es abierto. Luego $g\mathcal{Z}_E$ es abierto para todo $g \in I_E$, y al poder obtener I_E como unión disjunta de conjuntos $g\mathcal{Z}_E$, todos abiertos, deben ser también cerrados.

Para ver que $\mathcal{Z}_E$ es conexo en I_E, supongamos que V y W son abiertos disjuntos de I_E con $V \cup W = \mathcal{Z}_E$. Si ambos V y W cortan a G_N, entonces uno de ellos debe ser vacío, porque G_N es conexo en I_E. Entonces, si ambos V y W son no vacíos, entonces debe ser $G_N \imath V$ y $G_M \imath W$ (o viceversa). Pero $G_{\mathcal{Z}(N)} \imath G_N \cap G_{M_E}$, de manera que $G_{\mathcal{Z}(N)} \imath V \cap W$, una contradicción, ya que $V \cap W = \phi$. □

En el siguiente teorema probaremos que ambos grupos de Weyl, el definido en el caso unitario, y el definido en el caso invertible, son el mismo. En primer lugar, necesitamos el siguiente lema técnico:

Lema 5.5.5 La estructura unitaria induce la estructura de similaridad, esto es, $H_E = \mathcal{N}_E \cap \mathcal{Z}_E$.

Demostración. Sea $w \in \mathcal{Z}_E \cap \mathcal{N}_E$. Entonces $w = mn$, con $m \in G_{M_E}, n \in G_N$. Usando la descomposición polar de m y n y el hecho de que conmutan, tenemos

$$w = |m|v_m|n|v_n = |m||n|v_m v_n = |mn|v_m v_n = |w|v_n v_m = v_n v_m,$$

donde $v_m \in \mathcal{U}_{M_E}, v_n \in \mathcal{U}_N$, de manera que $w \in H_E$. □

Proposición 5.5.6 El grupo de Weyl obtenido por la construcción unitaria y el grupo de Weyl obtenido por la construcción de similaridad (invertible) son homeomorfos, es decir

$$W_1(E) \simeq W(E).$$

Demostración. Sea $\varphi : W(E) \to W_1(E)$ dado por $\varphi([u]_{W(E)}) = [u]_{W_1(E)}$. Entonces φ está bien definido y es una biyección. En efecto, la buena definición está clara ya que $H_E \subseteq \mathcal{Z}_E$. Por el Lema 5.5.5, φ es inyectivo. Para ver que φ es sobre, sea $g \in I_E$. Debemos encontrar un unitario $u \in \mathcal{N}_E$ tal que

$$[g]_{W_1(E)} = [u]_{W_1(E)}.$$

Como $g \in I_E$, tenemos que $g^{*-1} \in I_E$ (adjuntando) y entonces $g^* \in I_E$ (reemplazando x por gxg^{-1} en la definición). Entonces $gg^* \in I_E$, y por el Lema 5.5.3, $gg^* \in \mathcal{Z}_E$. Por lo tanto existen $m \in M_E$, $n \in N$ con $gg^* = mn$. Usando nuevamente la descomposición polar para n, tenemos

$$gg^* = mn = |m||n|v_m v_n = |mn|v_m v_n = |gg^*|v_m v_n = gg^* v_m v_n,$$

lo que implica que $v_m v_n = 1$, de manera que podemos escribir $gg^* = |m|\,|n|$ con $|m| \in M_E^+$, $|n| \in N^+$. Entonces tenemos $|g^*| = |m|^{1/2}|n|^{1/2} \in \mathcal{Z}_E$, y por la descomposición polar de g hay un unitario $u \in \mathcal{U}_M$ con $g = u|g^*|$. Como $|g^*| \in \mathcal{Z}_E$ y $g \in I_E$, se sigue que $u \in \mathcal{U}_M \cap I_E = \mathcal{N}_E$, y $[g] = [u]$. □

Chapter 6

Geometría de la Orbita de similaridad de una Esperanza Condicional

Las órbitas unitaria y de similaridad $\mathcal{O}_E$ (definidas en 5.1.1 y 5.5.15 respectivamente) han aparecido en varios trabajos previos (ver, por ejemplo, [LR], [AS2]). En estos dos trabajos se muestran propiedades geométricas y topológicas de $\mathcal{O}_E$, pero en los dos casos se hacen suposiciones adicionales: en el caso de [LR] una hipótesis infinitesimal, y en el caso de [AS2] una hipótesis sobre el conmutante relativo. Ambas suposiciones son esencialmente la misma ($N^{\mathbf{c}} \subseteq N$, con las notaciones del Capítulo 5), y aparecen como necesarias en dichos trabajos porque fuerzan a que la estructura reductiva esté dada por la esperanza E.

Nuestro propósito es trabajar removiendo dicha hipótesis y probando que la órbita $\mathcal{O}_E$ tiene una estructura geométrica diferenciable sin ella. Esta estructura geométrica, en el caso en que $N' \cap M \not\subseteq N$, ya no está dada por E sino por otra proyección, que depende de ella. Se probará también que bajo ciertas condiciones $\mathcal{O}_E$ admite una estructura reductiva, y que esta estructura reductiva fuerza en cierto sentido al álgebra a ser finita. Más precisamente, en el Teorema 6.3.5 probamos que dada un álgebra de von Neumann M, la órbita de similaridad de toda esperanza E de M admite una estructura de espacio homogéneo reductivo si y sólo si M es finita.

Veremos también cómo se generaliza la estructura de revestimiento mostrada en [AS2], en la sección 6.2. Bajo la hipótesis de que M sea un factor, el revestimiento es universal, es decir que el grupo de Weyl es el grupo fundamental de la órbita $\mathcal{O}_E$. Como la fibra de este revestimiento es siempre el grupo de Weyl, aún en el caso no factor, es esperable obtener resultados significativos al aplicar esta construcción al cálculo del grupo fundamental de la órbita $\mathcal{O}_E$.

En la última sección calculamos explícitamente los invariantes geométricos de $\mathcal{O}_E$: curvatura, torsión, geodésicas, exponencial. Las aplicaciones de estos resultados son materia de trabajo al momento de escribir esta tesis.

6.1 Estructura Diferenciable

En la siguiente Proposición construiremos una esperanza condicional que será esencial en la construcción de espacios horizontales.

Proposición 6.1.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann y E una esperanza condicional fiel y normal. Fijemos un estado fiel y normal φ en N, y llamemos $\psi = \varphi \circ E$. Entonces existe una única esperanza condicional $F : M \to M_E$ tal que $EF = FE$ y $\psi \circ F = \psi$.

Demostración. Notemos en primer lugar que $\sigma_t^\psi(M_E) = M_E$ para cada $t \in I\!R$. Tomemos F como la única esperanza con $\psi \circ F = \psi$ obtenida por el Teorema de Takesaki (3.1.5). Es fácil ver que $E \circ F$ es una esperanza condicional de M sobre $\mathcal{Z}(N)$ y que $\psi \circ (E \circ F) = \psi$. Cuando hacemos la construcción GNS para ψ y obtenemos $L^2(M, \psi)$, las tres esperanzas condicionales $E, F, E \circ F$, dan lugar a tres proyecciones ortogonales e, f, g con $g = ef$. Como $g = g^*$, tenemos que $ef = fe$, de manera que $EF = FE$. □

Comenzando por la esperanza $F : M \to M_E$ de la Proposición 6.1.1, definimos una proyección

$$\Delta = 1 - (1 - E)(1 - F). \tag{6.1.1}$$

Es claramente una proyección, ya que E y F conmutan. Su imagen es $M_E + N$, como puede verse escribiendo a Δ de la siguiente manera:

$$\Delta = E + F - EF.$$

Notemos que la imagen también puede ser escrita como una suma directa:

$$\operatorname{Im} \Delta = M_E + N = (M_E \cap \operatorname{Ker} E) \oplus N.$$

Siendo E y F proyectores que conmutan, El núcleo de Δ depende de los núcleos de E y F de la siguiente manera:

$$\mathrm{Ker}\Delta = \mathrm{Ker}E \cap \mathrm{Ker}F.$$

Proposición 6.1.2 Sean $N, M, E, F, \varphi, \psi$ como en la Proposición 6.1.1. Sea $\varphi' = \varphi \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1}$. Entonces, si $E' = L_g E$, entonces la esperanza F' correspondiente para E' y φ', según la Proposición 6.1.1, es $L_g F$

Demostración. La imagen por E' es el álgebra (no necesariamente $*$) gNg^{-1}. Debemos hacer la construcción de acuerdo al Diagrama 4.4.3. Nuestro nuevo ψ' estará dado por

$$\psi' = \varphi' \circ E',$$

y entonces

$$\begin{aligned} \psi' &= \varphi \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \circ \mathrm{Ad}\ g \circ E \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \\ &= \varphi \circ E \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \\ &= \psi \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1}. \end{aligned}$$

Es claro que $L_g F$ proyecta sobre $M_{E'}$, y

$$\begin{aligned} \psi' \circ Ł_g F &= \varphi \circ E \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \circ Ł_g F \\ &= \psi \circ F \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \\ &= \psi \circ \mathrm{Ad}\ g^{-1} \\ &= \psi' \end{aligned}$$

□

Recordemos las siguientes definiciones de la Sección 5.5: La isotropía de la acción L es el grupo

$$I_E = \{g \in G_M : L_g(E) = E\};$$

la componente conexa de la identidad de la isotropía es el grupo

$$\mathcal{Z}_E = G_{M_E} \cdot G_N.$$

Proposición 6.1.3 Con las notaciones precedentes, $\mathcal{Z}_E$ es un subgrupo regular de G_M y $T_1\mathcal{Z}_E = (M_E \cap \mathrm{Ker}E) \oplus N$.

Demostración. Para poder usar el Teorema 4.3.3, necesitamos una descomposición

$$T_1 G_M = X \oplus Y$$

como espacio de Banach. Esta descomposición existe porque, como G_M es abierto en M, tenemos que $T_1 G_M = M$ y luego la proyección Δ introducida en la ecuación 6.1.1 nos da la descomposición deseada. Por brevedad, notaremos $X = M_E + N$.

Como exp es un difomorfismo local, podemos encontrar abiertos $0 \in U$ y $1 \in V$ tales que $\exp : U \to V$ es un difeomorfismo. Sea $x \in U \cap X$; entonces $x = a + b$ con $a \in M_E$, $b \in N$; luego (como a y b conmutan), tenemos $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ con $\exp(a) \in G_{M_E}$ y $\exp(b) \in G_N$, lo que muestra que $\exp(U \cap X)\imath V \cap \mathcal{Z}_E$. Si $y \in V \cap \mathcal{Z}_E$, entonces sea $0 < \delta < 1/2$. Reduciendo V si es necesario, podemos asumir que $\|y - 1\| < \delta$. Para ver que $\exp^{-1}(y) \in U$ debemos mostrar que y puede ser escrito como un producto de dos elementos en G_{M_E} y G_N respectivamente tales que ambos están cerca de 1, de manera que podemos asegurar que sus preimágenes por exp están cerca de 0 y entonces su suma está en U. Sean $g \in M_E, h \in N$ con $y = gh$. Notemos que $F(h)$ está en $G_{\mathcal{Z}(N)}$. En efecto, ya que $h \in N$, $F(h) \in \mathcal{Z}(N)$; para ver que es invertible, notemos que

$$\|gF(h) - 1\| = \|F(gh - 1)\| \leq \|gh - 1\| < \delta,$$

lo que implica que $gF(h)$ es invertible y luego $F(h)$ es invertible.

Podemos poner $y = gh = (gF(h))(F(h)^{-1}h)$. Entonces

$$\|gF(h) - 1\| < \delta$$

como antes y entonces, por el Lema 5.5.2,

$$\|F(h)^{-1}g^{-1} - 1\| < \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Notemos también que $\|gh - 1\| < \delta < 1$ implica $\|gh\| < 2$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|F(h)^{-1}h - 1\| &= \|F(h)^{-1}g^{-1}gh - 1\| \\
&\leq \|gh\|\|F(h)^{-1}g^{-1} - 1\| + \|gh - 1\| \\
&< \tfrac{2\delta}{1-\delta} + \delta \leq 5\delta.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera que $B(0, 2\varepsilon) \subseteq U$. Sea δ suficientemente pequeño para que

$$\exp^{-1}(B(1, 5\delta)) \subseteq B(0, \varepsilon).$$

Pongamos $V' = B(1, 5\delta)$, $U' = \exp^{-1}(V')$. Como $y \in V'$, $\exp^{-1}(y) \in U'$, y como $gF(h)$ y $F(h)^{-1}h$ están en V', sus preimágenes $a = \exp^{-1}(gF(h))$ y $b = \exp^{-1}(F(h)^{-1}h)$ están en U'. Como $a + b$ está en U por haber elegido el δ correcto, y teniendo en cuenta que exp es un difeomorfismo entre U y V,

$$a + b \in \exp^{-1}(V') = U'.$$

□

Corolario 6.1.4 El grupo de isotropía I_E es un subgrupo regular de G_M.

Demostración. Ya sabemos que $\mathcal{Z}_E$ es un subgrupo regular y que es la componente conexa de 1 en I_E (5.5.1). Luego, por el Teorema 4.3.5, I_E es un subgrupo regular de G_M. □

En el siguiente Corolario establecemos el resultado de que la órbita de similaridad $\mathcal{O}_E$ puede ser dotada de una estructura diferenciable.

Corolario 6.1.5 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , $E \in E(M, N)$ una esperanza condicional fiel y normal. Entonces, para cada estado φ fiel y normal de N, la órbita $\mathcal{O}_E \simeq G_M/\mathcal{Z}_E$ puede ser dotada de una única estructura diferenciable tal que sea un espacio homogéneo (esto es, la aplicación $\pi_E : G_M \to \mathcal{O}_E$ es un fibrado principal con grupo de estructura I_E).

Demostración. por Corolario 6.1.4 y Teorema 4.3.4. □

Observación 6.1.6 En el caso general, la estructura de espacio homogéneo de la órbita $\mathcal{O}_E$ depende del estado φ. Veremos en la Proposición 6.3.2 que cuando el álgebra M es finita, la estructura es única para todo estado tracial.

6.2 Estructura de Revestimiento

En la situación ya descripta, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G_M \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & G_M/\mathcal{Z}_E = \mathcal{E}_E \arrow[d, "\Psi"] \\ & G_M/I_E = \mathcal{O}_E \end{tikzcd} \tag{6.2.2}$$

En el capítulo 6.3 veremos que la aplicación π_E es un fibrado principal y, más que eso, le da a $\mathcal{O}_E(= G_M/I_E)$ una estructura de Espacio Homogéneo Reductivo. En lo que sigue veremos que la aplicación Ψ es una aplicación de revestimiento, y que $G_M/\mathcal{Z}_E$ es un revestimiento para $\mathcal{O}_E$, con grupo de transformaciones de revestimiento $W(E)$. En particular, cuando N es un factor, el revestimiento es universal.

La aplicación Ψ lleva la clase de un elemento de $\mathcal{Z}_E$ a la clase del mismo elemento pero en I_E. En un primer Lema mostramos que Ψ es continua.

Lema 6.2.1 Con las notaciones del Diagrama 6.2.2, la aplicación Ψ es continua cuando se consideran $G_M/\mathcal{Z}_E$ y G_M/I_E con sus respectivas topologías cociente.

Demostración. Consideremos el Diagrama 6.2.2. Las aplicaciones π_0 y π_E son continuas por definición. Sea V un abierto en G_M/I_E. Entonces $\pi_E^{-1}(V)$ es abierto, y

$$\pi_E^{-1}(V) = \pi_0^{-1}(\Psi^{-1}(V));$$

luego, por definición de topología cociente, $\Psi^{-1}(V)$ es abierto, y luego Ψ es continua. $\square$

Notemos que el grupo de Weyl $W(E)$ tiene una acción natural en $\mathcal{E}_E$ dada por la multiplicación a derecha ($W(E)$ está incluido en $\mathcal{E}_E$). Esta acción está bien definida porque $\mathcal{Z}_E$ es un subgrupo normal de G_M.

Proposición 6.2.2 Con las notaciones precedentes, la fibra por Ψ de un elemento L_gE de la órbita $\mathcal{O}_E$ es precisamente la órbita del elemento $\pi_0(g)$ por $W(E)$

Demostración. Mirando la fibra:

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1}(L_g E) &= \Psi^{-1}(\pi_E(g)) \\
&= \{\pi_0(h) : h \in G_M \text{ y } \Psi(\pi_0(h)) = \pi_E(g)\} \\
&= \{\pi_0(h) : h \in G_M \text{ y } \pi_E(h) \in \pi_E^{-1}(g) = gI_E\} \\
&= \{h\mathcal{Z}_E : h \in G_M \text{ y } h \in gI_E\} \\
&= \{gv\mathcal{Z}_E : v \in I_E\} \\
&= \{\pi_0(g) \cdot v' : v' \in W(E)\}
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.3 Sea M un álgebra de von Neumann , $E \in E(M)$ una esperanza condicional fiel y normal sobre una subálgebra de von Neumann de M. Entonces la órbita de similaridad $\mathcal{O}_E$ de la esperanza es homeomorfa con $\mathcal{E}_E/W(E)$, cuando consideramos a ambos conjuntos con la topología cociente.

Demostración. Llamemos ρ a la suryección canónica de $\mathcal{E}_E$ sobre $\mathcal{E}_E/W(E)$. Consideremos la aplicación $\bar{\Psi}$ dada por $\bar{\Psi}(\rho(g)) = \Psi(g)$. Mostraremos que $\bar{\Psi}$ es el homeomorfismo buscado.

Es trivial verificar que $\bar{\Psi}$ está bien definida, y que es una biyección. Veamos la continuidad. Por el Lema 6.2.1, sabemos que $\bar{\Psi} \circ \rho = \Psi$ es contina. Sea V un abierto en $\mathcal{O}_E \simeq G_M/I_E$; por un argumento análogo a la demostración del Lema 6.2.1, se sigue que $\bar{\Psi}$ es continua. Ahora sea U un abierto en $\mathcal{E}_E/W(E)$. Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_M \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & \mathcal{E}_E = G_M/\mathcal{Z}_E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Psi"] & \mathcal{E}_E/W(E) \arrow[dl, "\bar{\Psi}"] \\
& \mathcal{O}_E = G_M/I_E &
\end{tikzcd} \tag{6.2.3}$$

y el hecho de que π_E es abierta, por ser una sumersión, es claro que $(\bar{\Psi}^{-1})^{-1}(U)$ es abierto en $\mathcal{O}_E$. □

Utilizaremos el siguiente resultado elemental de topología algebraica [G]:

Teorema 6.2.4 (Greenberg) Sea E un espacio topológico conexo y localmente conexo por arcos, y G un grupo de automorfismos de E que opera propiamente discontinuamente (esto es, para cada $e \in E$ existe un abierto $V \ni e$ tal que $V \cap gV = \phi$ para cada $g \in G$). Consideremos la aplicación canónica $p : E \to E/G$. Entonces E es un revestimiento para E/G con aplicación de revestimiento p y grupo de transformaciones de revestimiento G; y $p_*(\pi_1(E, e_0))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(E/G, p(e_0))$.

Ahora utilizamos el Teorema 6.2.4 para probar nuestro resultado:

Teorema 6.2.5 Sea M un álgebra de von Neumann , $E \in E(M)$ una esperanza condicional fiel y normal sobre una subálgebra de von Neumann de M. Entonces el espacio $\mathcal{E}_E$ es un revestimiento para la órbita de similaridad $\mathcal{O}_E$, con aplicación de revestimiento Ψ y grupo de transformaciones de revestimiento $W(E)$.

Demostración. Mostraremos que $W(E)$ opera propiamente discontinuamente en $\mathcal{E}_E$. Fijemos $g \in G_M$. Sea $\lambda = (8\|g\|\|g^{-1}\|\text{Ind}E^{1/2})^{-1}$ y consideremos el abierto

$$W_g = \{w \in G_M : \|w\| < 2\|g\|,\ \|w^{-1}\| < 2\|g^{-1}\| \ \text{ y } \ \|wew^{-1} - geg^{-1}\| < \lambda\}.$$

Usando que π_0 es abierta, podemos considerar el entorno abierto $V_g = \pi_0(W_g)$ de g en $\mathcal{E}_E$. Tenemos que probar que $V_g \cap V_g v\mathcal{Z}_E = \emptyset$ para todo $v \in I_E \setminus \mathcal{Z}_E$. En efecto, si $w \in W_g$ y también $wv\mathcal{Z}_E \in V_g$, para algún $v \in I_E \setminus \mathcal{Z}_E$, existe $z \in \mathcal{Z}_E$ tal que $\|wvze(wvz)^{-1} - geg^{-1}\| < \lambda$. Entonces, $\|wvzez^{-1}v^{-1}w^{-1} - wew^{-1}\| < 2\lambda$ y

$$\begin{aligned}
\|vzE(z^{-1}v^{-1}) - 1\| &\leq \text{Ind}E^{1/2}\|vzE(z^{-1}v^{-1})e - e\| \\
&\leq \text{Ind}E^{1/2}\|vze(z^{-1}v^{-1}) - e\| \\
&\leq \text{Ind}E^{1/2}\|w\|\,\|w^{-1}\|\,\|wvzez^{-1}v^{-1}w^{-1} - wew^{-1}\| \\
&< 2\lambda\text{Ind}E^{1/2}\|w\|\,\|w^{-1}\| \\
&< 8\lambda\text{Ind}E^{1/2}\|g\|\,\|g^{-1}\| = 1.
\end{aligned}$$

Luego $E(z^{-1}v^{-1}) \in G_M$ y, por 5.1.14, $v \in \mathcal{Z}_E$, una contradicción □

Corolario 6.2.6 El grupo de Weyl $W(E)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(\mathcal{O}_E)$.

Proposición 6.2.7 Se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\frac{\pi_1(\mathcal{O}_E)}{\Psi_*(\pi_1(\mathcal{E}_E))} \simeq W(E)$$

Demostración. por Proposición 6.2.2, sabemos que la fibra $\Psi^{-1}(E) = W(E)$, y el resultado se sigue de un teorema elemental de topología algebraica. $\square$

En el caso en que M es un factor, se prueba en [AAS] que $\pi_1(\mathcal{E}_E)$ es trivial, lo que implica

Teorema 6.2.8 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , $E \in E(M, N)$, y supongamos que M es un factor. Entonces, con las notaciones precedentes, $\mathcal{E}_E$ es el revestimiento universal para la órbita $\mathcal{O}_E$ y, en particular,

$$\pi_1(\mathcal{O}_E) \simeq W(E).$$

6.3 Estructura Reductiva

Ahora trabajaremos sobre las condiciones que nos permitirán encontrar una estructura reductiva en $\mathcal{O}_E$ y caracterizarla.

Si tenemos una estructura de espacio homogéneo reductivo para la órbita $\mathcal{O}_E$ bajo la acción de G_M, tenemos una descomposición

$$L(G_M) = L(I_E) \oplus \mathcal{K}_E.$$

El espacio "horizontal" $\mathcal{K}_E$ es la parte de la descomposición cuya existencia e invariancia por I_E nos permite asegurar la existencia de la estructura reductiva. Notemos que $L(G_M)$ puede ser identificada con M, porque G_M es abierto en M. Además, $L(I_E)$ puede ser visto como $T_1 I_E$, y también como $T_1(I_E)_1$ (donde $(I_E)_1$ es la componente conexa de I_E en 1). Hemos mostrado en la Proposición 5.5.1 que la componente conexa de I_E en 1 es $\mathcal{Z}_E$, Luego $T_1 I_E = T_1 \mathcal{Z}_E = L(\mathcal{Z}_E)$, y por Proposición 6.1.3, $L(\mathcal{Z}_E) = M_E + N$.

En resumen, la existencia de la estructura reductiva depende de poder encontrar un suplemento de $M_E + N$ en M, invariante por conjugación con elementos de I_E. Antes de desarrollar la idea central, precisamos el siguiente Lema técnico:

Lema 6.3.1 Sean $N \subseteq M$ álgebras de von Neumann , $E \in E(M, N)$ una esperanza condicional fiel y normal. Sea φ un estado tracial de N y sean ψ y F como en la Proposición 6.1.1. Entonces la isotropía I_E deja $\mathrm{Ker}F$ invariante por conjugación.

Demostración. Sean $y \in M_E$, $g \in I_E$ y $x \in \mathrm{Ker}F$. Como φ es tracial, por el Teorema de Radon Nikodym de Pedersen-Takesaki (2.5.8), existe $z \in \mathcal{Z}(N)$ tal que $\varphi(g \cdot g^{-1}) = \varphi(z\cdot)$. En particular, $z \in M_E$. Notemos también que $gM_Eg^{-1} = M_E$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\psi(F(gxg^{-1})y) &= \psi(F(gxg^{-1}y)) = \varphi(E(gxg^{-1}y)) = \varphi(gE(xg^{-1}yg)g^{-1}) \\ &= \varphi(E(xg^{-1}yg)z) = \varphi(E(xg^{-1}ygz)) = \psi(xg^{-1}ygz) = \\ &= \psi(F(xg^{-1}ygz)) = \psi(F(x)g^{-1}ygz) = 0,\end{aligned}$$

Luego $F(gxg^{-1}) = 0$. Por lo tanto I_E deja $\mathrm{Ker}F$ invariante. □

Proposición 6.3.2 Con las notaciones del Lema 6.3.1, la esperanza F es la misma para cualquier estado tracial de N.

Demostración. Sea φ un estado tracial de N. Como la esperanza F conmuta con φ, y lleva N en $\mathcal{Z}(N)$, es una traza central en N, que es única. □

La siguiente construcción nos permitirá probar el Teorema 6.3.5, resultado principal de esta sección. Como M es un álgebra de von Neumann, existe una proyección propiamente infinita $p \in \mathcal{Z}(M)$ tal que pM es propiamente infinita y $(1-p)M$ es finita (Proposición 2.2.8). Sea τ una traza numérica en $(1-p)M$. Como p es propiamente infinita, puede ser dividida, esto es, existe una proyección $q \in M$ tal que $q \sim p - q \sim p$ (Proposición 2.2.5). Usando esta proyección q, podemos identificar pM con $qMq \otimes M_2(\mathbb{C})$. Luego identificamos M con $(qMq) \otimes M_2(\mathbb{C}) \oplus (1-p)M$.

Sea N la subálgebra $(qMq \otimes 1) \oplus (1-p)\mathbb{C}$ de M. Consideremos la esperanza $E : M \to N$ dada por

$$E = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{tr}_2) \oplus \tau.$$

En matrices, esto puede verse como

$$E\left(\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \tau(x) \end{pmatrix}.$$

Cálculos elementales muestran que

$$N' \cap M = \mathcal{Z}(qMq) \otimes M_2(\mathbb{C}) \oplus (1-p)M$$

y que $M_E = N' \cap M$.

Si $\mathcal{O}_E$ admite una estructura de Espacio Homogéneo Reductivo, entonces existe una proyección lineal $\wp : M \to N + M_E$ con $\mathrm{Ker}(\wp)$ invariante por I_E. Cálculos muy sencillos muestran que, como $\mathcal{U}_N \subseteq I_E$,

$$\wp(uxu^*) = u\wp(x)u^* \text{ para cada } u \in \mathcal{U}_N.$$

Incluímos estos cálculos en el siguiente Lema:

Lema 6.3.3 Sean $B \subseteq A$ álgebras con $P : A \to B$ una proyección lineal tal que

$$g(\mathrm{Ker}P)g^{-1} = \mathrm{Ker}P \text{ y } gBg^{-1} = B, \text{ para cada } g \in G_A.$$

Entonces

$$p(gxg^{-1}) = gp(x)g^{-1} \text{ para todo } x \in A.$$

Demostración. Tenemos una descomposición $A = B \oplus \mathrm{Ker}P$. Sea $x \in A$. Entonces,

$$x = p(x) + (x - p(x)),$$

por lo que

$$gxg^{-1} = gp(x)g^{-1} + g(x - p(x))g^{-1}.$$

El segundo sumando en la última ecuación está en $\mathrm{Ker}P$ por la invariancia de $\mathrm{Ker}P$, y el primero está en B por la invariancia de B. Luego

$$p(gxg^{-1}) = gp(x)g^{-1} + p(g(x - p(x))g^{-1}) = gp(x)g^{-1}.$$

□

Como

$$N + M_E = \left\{ \begin{pmatrix} n & z_2 & 0 \\ z_3 & n + z_1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} : n \in qMq, z_i \in \mathcal{Z}(qMq), m \in M \right\}, \tag{6.3.4}$$

es claro que los elementos en las coordenadas 2,1 y 1,2 de la imagen de $\wp$ pertenecen a $\mathcal{Z}(qMq)$.

Definamos $\Im : qpMq \to \mathcal{Z}(qpMq)$ mediante

$$\Im(n) = \frac{1}{2}\left(\wp\begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{21} + \wp\begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12} \right),$$

donde $(\cdot)_{21}$ y $(\cdot)_{12}$ significan las coordenadas $2,1$ y $1,2$ de la matriz.

Notemos que como $N + M_E$ es una *-algebra, $\wp$ puede suponerse *-lineal. En efecto, si $\wp$ no es *-lineal, la remplazamos por

$$\wp'(x) = \frac{1}{2}(\wp(x) + \wp(x^*)^*), x \in M.$$

Este $\wp'$ también satisface

$$\wp'(uxu^*) = u\wp'(x)u^* \text{ para todo } u \in \mathcal{U}_N.$$

Ahora mostramos las propiedades de $\Im$ que necesitaremos:

Proposición 6.3.4 Sean $M, N, p, \wp, \Im$ como en la discusión precedente. Entonces se cumplen las siguiente propiedades:

1. $\Im : qMq \to \mathcal{Z}(qMq)$ es *-lineal;

2. $\Im^2 = \Im$;

3. $\Im$ es la identidad en $\mathcal{Z}(qMq)$;

4. si $u \in \mathcal{U}(qMq)$, entonces $\Im(unu^*) = \Im(n)$ para cada $n \in qMq$;

5. $\Im(xy) = \Im(yx)$ para cada $x, y \in qMq$.

Demostración.

1. Que la imagen de $\Im$ es $\mathcal{Z}(qMq)$ puede verse en la ecuación 6.3.4. La *-linealidad está clara ya que vimos que podemos asumir $\wp$ *-lineal.

2. Si $s \in \mathcal{Z}(qMq)$, entonces la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   claramente está en $N + M_E$ (ver ecuación 6.3.4). Luego la matriz es invariante a izquierda por $\wp$, y $\Im(s) = s$.

3. Se sigue del item anterior.

4. El unitario
$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
deja claramente a $N+M_E$ invariante, de manera que por el Lema 6.3.3 y sencillos cálculos, $\Im(unu^*) = u\Im(n)u^*$. Ahora el resultado se sigue, ya que $\Im(n)$ es central.

5. Vale por 4 ya que los unitarios de un álgebra de von Neumann generan toda el álgebra. □

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 6.3.5 Sea M un álgebra de von Neumann , $E \in E(M)$ una esperanza condicional fiel y normal sobre una subálgebra de von Neumann de M. Entonces la órbita $\mathcal{O}_E$ puede ser dotada de una estructura de Espacio homogéneo Reductivo bajo la acción de G_M para toda esperanza condicional fiel y normal E si y sólo si M es un álgebra de von Neumann finita.

Demostración. Si la órbita $\mathcal{O}_E$ admite una estructura de Espacio Homogéneo Reductivo, entonces tenemos una descomposición
$$L(G_M) = L(I_E) \oplus \mathcal{K}_E,$$
donde $\mathcal{K}_E$ es un subespacio lineal invariante por conjugación con elementos de I_E. Como hemos mencionado antes, $L(G_M)$ puede ser identificado con M, y $L(I_E)$ puede ser identificado con $M_E + N$.

Si M no fuera finita, por Proposición 6.3.4 y la discusión que le precede, podemos construir una aplicación lineal $\Im : pM \to p\mathcal{Z}(M)$, donde p es la mayor proyección en $\mathcal{Z}(M)$ tal que pM es propiamente infinita, y que satisface también que $(1-p)M$ es finita (Teorema 2.2.9). Sea q, como antes, la proyección que divide a p, o sea que $q \sim p - q \sim p$ (Teorema 2.2.5). A q también se le puede aplicar el "halving", ya que al ser equivalente a p es propiamente infinita; sea r una proyección con $q \sim q - r \sim r$. Estas proyecciones están en pM, y entonces, usando la "tracialidad" de $\Im$ (5 de 6.3.4),
$$\Im(q) = \Im(q - (q - r)) = \Im(q) - \Im(q - r) = \Im(q) - \Im(q) = 0. \qquad (6.3.5)$$

Recordemos que por la Proposición 6.3.4, $\Im(q) = q$, de manera que la ecuación 6.3.5 implica que $q = 0$, y esto a su vez implica que $p = 0$, ya que $p \sim q$. Luego M es un álgebra de von Neumann finita.

Recíprocamente, supongamos que M es finita. Entonces N es finita, de manera que tiene un estado tracial. Para tener una estructura reductiva, necesitamos construir una descomposición $L(G_M) = L(I_E) \oplus \mathcal{K}_E$, donde $\mathcal{K}_E$ es un subespacio lineal invariante por conjugación por elementos de I_E. Por la discusión que antecede a la Proposición 6.1.3, es claro que la proyección Δ definida allí nos da la descomposición deseada, esto es, $\mathcal{K}_E = \mathrm{Ker}\Delta$.

Ahora resta mostrar que I_E deja a $\mathcal{K}_E$ invariante, y que la distribución $E \mapsto \mathcal{K}_E$ es suave. La primera afirmación es claramente cierta, ya que $\mathcal{K}_E = \mathrm{Ker}F \cap \mathrm{Ker}E$, por lo que es suficiente mostrar que I_E deja a $\mathrm{Ker}E$ y $\mathrm{Ker}F$ invariante; pero sabemos que I_E deja a $\mathrm{Ker}F$ invariante por el Lema 6.3.1, y que deja a $\mathrm{Ker}E$ invariante es trivial. Para ver que la distribución es suave, notemos que la proyección sobre $\mathcal{K}_E$ es $(1-E)(1-F)$, y la aplicación $\eta : E \mapsto (1-E)(1-F)$ es analítica: consideremos el siguiente diagrama (análogo a 4.4.3)

$$\begin{array}{ccc} G_M & \xrightarrow{Ad} & Gl(\mathcal{B}(M)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_D} \\ \mathcal{O}_E & \xrightarrow{\eta} & S(D) \end{array}$$

donde $D = (1-E)(1-F)$, $\pi_D(\alpha) = \alpha \circ D \circ \alpha^{-1}$ y $S(D)$ es la órbita de D.

Este diagrama conmuta por la Proposición 6.1.2. Como sabemos que π_E tiene secciones locales analíticas por la primera parte de la demostración, la aplicación η es analítica. $\square$

6.4 Cálculo de los invariantes geométricos

En esta sección calcularemos explícitamente los invariantes geométricos de la órbita $\mathcal{O}_E$: tensor de curvatura, torsión y geodésicas. Para esto utilizaremos las fórmulas calculadas en la sección 4.4

Comenzaremos calculando la diferencial de la aplicación π_E. Recordemos que la diferencial en un punto, evaluada en un vector tangente se calcula derivando la función en el punto a lo largo de una curva que tiene como derivada en el punto al vector tangente elegido. Entonces, como ya hemos aclarado que identificamos al tangente al grupo G_M con el álgebra M, la diferencial $(d\pi_E)_E$ en $x \in M$ se calcula como

$$(d\pi_E)_E(x) = \frac{d}{dt}(\pi_E(\alpha(t)))|_{t=0},$$

donde α es una curva en G_M con $\alpha(0) = 1$, $\dot{\alpha}(0) = x$.

Tomemos por caso

$$\alpha(t) = e^{tx}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\pi_E(e^{tx})_{t=0} &= \tfrac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}e^{tx} \circ E \circ \mathrm{Ad}e^{tx}\right)|_{t=0} \\
&= \left((\mathrm{Ad}e^{tx})' \circ E \circ \mathrm{Ad}e^{tx} + \mathrm{Ad}e^{tx} \circ E \circ (\mathrm{Ad}e^{tx})'\right)|_{t=0} \\
&= \left((\mathrm{Ad}e^{tx})([x, E \circ \mathrm{Ad}e^{-tx}]) + \mathrm{Ad}e^{tx} \circ E \circ (\mathrm{Ad}e^{tx}([\cdot, x])\right)|_{t=0} \\
&= [x, E(\cdot)] - E([x, \cdot]).
\end{aligned}$$

Notemos que esto puede escribirse de forma más abreviada (y sugestiva) como

$$(d\pi_E)_E(x) = [\delta_x, E].$$

Si bien la teoría desarrollada en la sección 4.4 y su aplicación a la órbita de similaridad de la esperanza hecha en 6.3 ya nos garantizan que el núcleo de la diferencial $(d\pi_E)_E$ es el álgebra de Lie de la isotropía, es decir $N + M_E$ (ver discusión al comienzo de la sección 6.3), consideramos interesante recuperar este hecho directamente de los datos algebraicos:

Proposición 6.4.1 El núcleo $\mathrm{Ker}(d\pi_E)_E$ de la diferencial de π_E es el álgebra de Lie de la isotropía, es decir $N + M_E$.

Demostración. Es inmediato verificar que $N + M_E \subseteq \mathrm{Ker}(d\pi_E)_E$. En efecto, como $(d\pi_E)_E$ es claramente lineal, lo verificamos por separado: dado $z \in M$, tenemos

$$(d\pi_E)_E(y)(z) = (yE(z) - E(z)y) - (E(yz - zy)).$$

Ahora bien, si $y \in N$, entonces ambos miembros entre paréntesis son iguales, y por tanto la diferencia da 0. Si $y \in M_E$, entonces cada uno de los dos miembros entre paréntesis da 0.

Veamos ahora la recíproca: sea $x \in \mathrm{Ker}(d\pi_E)_E$. Entonces

$$xE(z) - E(z)x - E(xz - zx) = 0$$

para todo $z \in M$. Si $z \in N$, entonces tenemos

$$0 = xE(z) - E(z)x - E(xz - zx) = (x - E(x))z - z(x - E(x)), \tag{6.4.6}$$

de manera que $x - E(x) \in N' \cap M$. Si $z \in \mathrm{Ker}E$,

$$\begin{aligned} E((x - E(x))z) - E(z(x - E(x))) &= -E(zx - xz) = -E(zx - xz) + xE(z) - E(z)x \\ &= (d\pi_E)_E(x)(z) = 0. \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Sea ahora $z \in M$. Tenemos, combinando 6.4.6 y 6.4.7, y usando $M = N \oplus \mathrm{Ker}E$, que

$$E((x - E(x))z) - E(z(x - E(x))) = 0$$

para todo $\mathcal{Z} \in M$, o sea que $x - E(x) \in M^E$, de manera que $x \in N + M_E$, tal cual queríamos probar. □

El resto de los invariantes se obtiene por cálculo directo a partir de las fórmulas de la sección 4.4. Resumimos la discusión anterior y dichos cálculos en la siguiente proposición:

Proposición 6.4.2 Se tienen las siguientes igualdades:

1. $(d\pi_E)_E(x) = [x, E(\cdot)] + E([\cdot, x])$, para todo $x \in M$

2. $\mathrm{Ker}(d\pi_E)_E = N + M_E$

3. $T(V, W) = (d\pi_E)_E([K_E(V), K_E(W)])$

4. $R(V, W)Z = (d\pi_E)_E([K_E(Z), \Delta([K_E(V), K_E(W)]))$

5. Si $X \in T_E\mathcal{O}_E$, la geodésica γ por E con $\dot{\gamma}(0) = X$ es $\gamma(t) = L_{e^{tK_E(X)}}E$, y la aplicación exponencial es $\exp_E(X) = L_{e^{K_E(X)}}E$.

Notaciones

Index

Bibliography

[A] M. Argerami, *Jones Index theory for type II_∞ von Neumann algebras*, Revista de la Unión Matemática Argentina, en prensa.

[AAS] E. Andruchow, M. Argerami, D. Stojanoff, en preparación.

[ACS] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff, *A geometric characterization of nuclearity and injectivity*, J. Funct. Anal., 133 No. 2 (1995), 474-494.

[AFHV] Apostol, C.; Fialkow, L.A.; Herrero, D.A. and Voiculescu, D., *Approximation of Hilbert space operators*, Vol 2, Pitman, Boston, 1984.

[ALRS] E. Andruchow, A. R. Larotonda, L. Recht and D. Stojanoff; *Infinite dimensional homogeneous reductive spaces and finite index conditional expectations*, Illinois J. of Math 41-1 (1997), 54-76.

[ArS] M. Argerami, D. Stojanoff, *The Weyl group and the Normalizer of a Conditional Expectation*, Int. Eq. and Op. Theory, en prensa.

[A] H. Araki, *Some properties of modular conjugation operator of a von Neumann algebra and a non-conmutative Radon-Nikodym theorema with a chain rule*, Pacific J. of Math., 50 (1974), 309-354.

[AS1] E. Andruchow, D. Stojanoff, *Differentiable Structure of similarity orbits*, J. Op. Theory, 21 (1989), 349-366.

[AS2] E. Andruchow, D. Stojanoff, *Geometry of conditional expectations and finite index*, Int. Journal of Math. 5 (1994), 169-178.

[AS3] E. Andruchow, D. Stojanoff, *Conditional expectations with finite weak index*, preprint (1995).

[AV] E. Andruchow and A. Varela, *Geometry and the Jones projection of a state*, Integ. Eq. and Oper. Th., (por aparecer).

[BDH] J. Baillet, I. Denizeau, J.F. Havet, *Indice d'une Esperance Conditionelle*, Comp. Math 66(1988), 199-236.

[CD] Combes, Delaroche, *Groupe modulaire d'une esperance conditionnelle dans une algebre de von Neumann*, Bull. Soc. Math. France 103(1975), 385-426.

[C] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 6 (1973), 133-252.

[C2] A. Connes, *Caracterisation des espaces vectoriels ordonees soujacents aux algebres de von Neumann*, Ann. Inst. Fourier 24(1974), 121-155.

[CPR] G. Corach, H. Porta, L. Recht, *The Geometry of spaces of projections in C^* algebras*, Adv. in Math. 101 (1993), 59-77.

[D] J. Dixmier, *Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, París, 12a edición (1969).

[DL] S. Doplicher, R. Longo, *Standard and split inclusions of von Neumann algebras*, Inv. Math. 75 (1984), 493-536.

[FK] M. Frank, E. Kirchberg, *On conditional expectations of finite index*, preprint (1995), private communication.

[G] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, New York, 1967.

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, MSRI Publications, 14, Springer-Verlag, 1989.

[H1] U. Haagerup, *The standard form of a von Neumann algebra*, Math. Scand. 37 (1975), 271-283.

[H2] U. Haagerup, *Normal Weights in W^* algebras*, J. of Func. An. 19 (1975) 302-318.

[Ha] J.-F. Havet, *Esperance conditionelle minimale*, J. Oper. Th. 24 (1990), 33-55.

[Hi] F. L. Hiai, *Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor*, Publ. Res. Math. Sci., Kyoto Univ., 24(1988), 673-678.

[I] M. Izumi, *Goldman's type theorem for index 3*, preprint.

[ILP] M. Izumi, R. Longo, S. Popa, *A Galois correspondence for Compact Groups of Automorphisms of von Neumann Algebras with a Generalization to Kac Algebras*, preprint (1996).

[Jol] P. Jolissaint, *Index for pairs of finite von Neumann algebras*, Pacific J. Math., 146(1990), 46-70.

[J1] V.F.R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math., 72 (1983), 1-25.

[J2] V.F.R. Jones, *Subfactors and Knots*, AMS series CBMS Vol 80 (1991).

[KR] R. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, II, Academic Press, New York 1986.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol 2, Interscience Publ., New York, 1969.

[Ko1] H. Kosaki, *Extension of Jones theory on index to arbitrary factors*, J. Funct. Anal. 66 (1986), 123-140.

[Ko2] H. Kosaki, *Characterization of Crossed Product (Properly Infinite Case)*, Pacific J. of Math., 137(1989) No. 1, 159-167.

[L] S. Lang, *Differentiable Manifolds*, Addison–Wesley, Reading, Mass. 1972

[La] A. R. Larotonda, *Notas sobre variedades diferenciales, Notas de Geometría y Topología 1*, INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca (1980)

[LR] A. Larotonda, L. Recht, *La órbita de una esperanza condicional como espacio homogéneo reductivo regular*, Imp. Previas, Dpto Mat. FCEN-UBA, No 76 (1993).

[L0] R. Longo, *Simple injective subfactors*, Adv. Math. 63 (1987), 152-171.

[L1] R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields I and II*, Comm. Math. Phys. 126 (1989), 217-247, 130 (1990), 285-309.

[L3] R. Longo, *Minimal index and braided subfactors*, J. Funct. Anal. 109 (1992), 98-112.

[MR] L. Mata Lorenzo, L. Recht; *Infinite dimensional homogeneous reductive spaces*, Reporte 91-11, U.S.B., (1991).

[MvN-1] F.J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. Math. 37 (1936), 116-229.

[MvN-2] F.J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators II*, Trans. A.M.S. 41 (1937) 208-248.

[MvN-4] F.J. Murray, J. von Neumann, *On rings of operators IV*, Ann. Math. 44 (1943) 716-808.

[P] G.K. Pedersen, *C^*-Algebras and their automorphism groups*, Academic Press, New York, 1979.

[PT] G.K. Pedersen and M. Takesaki, *The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras*, Acta Math. 130 (1973), 53-87.

[PP] M. Pimsner, S. Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4ta serie, 19 (1986), 57-106.

[P1] S. Popa, *Classification of subfactors and their endomorphisms*, AMS series CBMS Vol 86 (1995).

[P2] S. Popa. *Classification of amenable subfactors of type II*, Acta Math. 172 (1994), 163-255.

[PR] H. Porta, L. Recht, *Conditional expectations and operator decomposition* (Preprint), 1992.

[R] I. Raeburn, *The relation between an abelian Banach Algebra and its Maximal Ideal Space*, J. Funct. Anal. 25 (1977) 366-390

[St] S. Stratila, *Modular theory in operator algebras*, Editura Academiei, Bucarest, 1981.

[Sun] V.S. Sunder, *An invitation to von Neumann algebras*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[T] M. Takesaki, *Conditional expectations in von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. 9 (1972), 306-321.

[TT] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Lecture Notes in Math. 128, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[U] H. Umegaki, *Conditional expectation in operator algebra III*, Kodai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51-64.

[vN-3] J. von Neumann, *On rings of operators III*, Ann. Math. 41 (1940) 94-161.

[W] S. Watatani, *Jones Index for C^* Algebras*, Memoirs AMS 83 N^o 424 (1990).