



Biblioteca Central
Fac. Cs. Exactas
U.N.L.P.



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE QUÍMICA**

TESIS DOCTORAL

Formas generalizadas de la entropía

Alejandro M. Mesón

*TESIS
Nº 1028*

Director: Dr. Fernando Vericat

2000

DONACION.....

A.....

Fecha *21-05-04*

Inv. B.....Inv.....B. *S.F. 120*



Biblioteca Central
Fac. Cs. Exactas
UNLP

Esta Tesis para optar al grado de Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, ha sido parcialmente realizada en el Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB-CONICET-UNLP) y el Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas (GAMEFI) de la Facultad de Ingeniería (UNLP) en los cuales el autor tiene su lugar de trabajo y el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas (UNLP) donde se desempeña como docente. La misma fue dirigida por el Dr. Fernando Vericat con el asesoramiento científico, por la Facultad de Ciencias Exactas, del Dr. J. Raúl Grigera.

Indice

1	Introducción	3
2	Familias de entropías dependientes de un parámetro	7
2.1	Introducción	7
2.2	Definiciones previas y notación	8
2.3	Entropía de Kolmogorov-Tsallis	10
2.4	Teoremas de isomorfismo y otras propiedades	12
2.5	El caso ergódico	16
2.6	Cotas para la entropía generalizada	22
2.6.1	Cubrimientos. Conjuntos generantes y separados	23
2.6.2	Generadores	25
2.6.3	Resultados principales sobre las cotas	26
3	Entropías por acciones de grupos	30
3.1	Introducción	30
3.2	Entropía medida de secuencias	30
3.3	Cotas	32
3.4	Otra clase de entropía asociada a acciones de grupos	36
4	Entropías funcionales	38
4.1	Introducción	38
4.2	Definiciones previas y notación	39
4.3	Resultados	41
5	Apéndice I: Entropías de correlación	45
6	Apéndice II: Flujos	49



Biblioteca Central
Fac. Cs. Exactas
U.N.L.P.

1111-
57124

PREFACIO

Uno de los caminos transitados frecuentemente en Matemática consiste en llevar a distintos niveles de abstracción conceptos presentados en la misma Matemática, en otras disciplinas, y cuya definición ha sido dada inicialmente para casos concretos. También lo es la búsqueda de invariantes que resulten útiles para separar determinados objetos en clases. En este espíritu, el presente trabajo, se basa en la consideración del concepto de entropía como un importante invariante en el contexto de sistemas dinámicos y en su extensión en distintas direcciones.

La entropía de la cual partiremos es la introducida por Kolmogorov en los cincuenta como una generalización a sistemas dinámicos abstractos, de aquella presentada por Shannon en su teoría de la información, la cual ya estaba implícita en los trabajos pioneros de Boltzmann.

La primera de las generalizaciones que consideraremos consiste en la introducción de familias 1-paramétricas de entropías que contienen a la forma clásica de Kolmogorov-Shannon como un miembro. La idea consiste en llevar a un contexto abstracto, en el sentido de Kolmogorov, la familia de entropías introducida hace relativamente poco tiempo por C. Tsallis. Esta última está definida en el mismo nivel de abstracción que la entropía de Shannon, y la contiene como caso particular.

La entropía de Tsallis ha dado lugar a numerosos trabajos relacionados con diversas ramas de la Física y otras ciencias. De acuerdo con su formulación, a las familias del tipo de las que se considerarán en este trabajo las denominaremos como "entropías de Kolmogorov-Tsallis". De éstas nos interesarán fundamentalmente sus propiedades de invarianza y la determinación de cotas.

De la formalización matemática involucrada en la generalización *á la Kolmogorov* surge uno de nuestros principales resultados: En el caso en que el sistema es ergódico las nuevas familias de entropías no contienen sustancialmente nueva información. Sin embargo no creemos que esto vaya en desmedro de las aplicaciones que se han difundido especialmente en la literatura física ya que como se verá, el proceso involucrado en nuestra definición no permite identificar información particular, mientras que en los trabajos como los mencionados se utiliza lo que en realidad es una cantidad de información muy específica.

Otra dirección en la cual puede extenderse la entropía clásica, de Kolmogorov-Shannon, tiene que ver con implementar los dinámicos por la acción de un grupo, en lugar de hacerlo por medio de transformaciones usuales en el espacio fase. Aquí se ha considerado primero la versión medida de entropías geométricas y topológicas introducidas previamente y la comparación con éstas.

Por último se han tratado las llamadas "entropías funcionales", en estas la extensión está formulada en el sentido de dar los dinámicos por transformaciones que actúan sobre funciones las cuales constituyen una partición de la unidad, en lugar de particiones conjuntistas como en el caso clásico.

La Plata, mayo 2000

Alejandro Mesón

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría Ergódica constituye una importante rama de la Matemática con estrechas conexiones con otras disciplinas. Su principal objetivo es el estudio de propiedades cualitativas de acciones de grupos sobre distintos tipos de espacios (espacios de medida, espacios topológicos, variedades, etc.).

El origen de la palabra ergódico (*ergon* = trabajo, *odos* = camino) se remonta a los trabajos de Boltzmann acerca de la descripción de la acción de un grupo uno-paramétrico de transformaciones sobre las variedades de energía, $H = cte$, de Hamiltonianos de interés en Mecánica Estadística. Tales variedades son invariantes por cada transformación debido a que la derivada del Hamiltoniano H , a lo largo de cada curva solución, respecto del tiempo t anula.

Los primeros resultados notables fueron obtenidos para *espacios de medida* (X, \mathcal{B}, μ) donde X es un conjunto (espacio fase), \mathcal{B} es una σ -álgebra sobre X , y μ es una medida sobre \mathcal{B} que es preservada por una transformación en el espacio fase. Cronológicamente esto ocurrió en la década de 1930, que es de cuando datan los célebres teoremas de Birkhoff y von Neumann. Más adelante se consideraron estructuras tales como espacios topológicos con una aplicación continua (o un homeomorfismo) o variedades con una aplicación diferenciable (o un difeomorfismo).

Las acciones más frecuentemente consideradas en un principio fueron las llamadas *discretas* donde el grupo que actúa es el de los enteros, o *continuas* donde lo hace el grupo de los reales. Una estructura como las mencionadas anteriormente juntamente con una transformación en el espacio fase, con características especiales según la estructura considerada, es lo que se denomina un *sistema dinámico*, aunque como se suele hacer en estos casos, por abuso, se le llama así directamente a la transformación. En este sentido los problemas que históricamente presentaron mayor interés son aquéllos relacionados con el estudio del comportamiento de las órbitas discretas de sistemas dinámicos.

Un concepto importante en Teoría Ergódica, debida fundamentalmente a sus propiedades de invarianza, es el de *entropía*. Este surge a fines de la década de 1940, introducido por Shannon en su trabajo sobre Teoría de la Comunicación como el número positivo:

$$H_1 = - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i \quad (1.1)$$

Las cantidades p_0, p_1, \dots, p_{k-1} involucradas se interpretan como componentes de un vector de probabilidad obtenido a partir de un experimento repetido independientemente un número infinito de veces. El significado del subíndice en H_1 , será clarificado durante el desarrollo del presente trabajo.

Hacia fines de la década siguiente Kolmogorov extiende el concepto anterior a un nivel más abstracto considerando espacios de medida (X, \mathcal{B}, μ) . La entropía de Kolmogorov involucra el promedio de la medida de sucesivas

particiones del espacio fase por *nombres de longitud n*. Estas medidas se corresponden, en el contexto de teoría de Shannon, con el promedio de la estimación de la cantidad de información obtenida de la repetición de un dado experimento a lo largo de un cierto período. La entropía de Shannon es recuperada a partir de la de Kolmogorov en el caso particular en el que el espacio fase es el conjunto de secuencias infinitas o bi-infinitas $\{x_i\}$, con $x_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, con una probabilidad p_{x_i} asignada a cada elemento de la secuencia y siendo la medida considerada en la estructura la medida producto.

Al mismo nivel de abstracción que el de Shannon se han introducido familias dependientes de un parámetro q que contienen a la mencionada entropía de Shannon como un miembro particular. Entre éstas merecen mencionarse como las más difundidas las llamadas *entropía de Renyi* y de *Tsallis*. Esta última apareció a fines de la década de 1980, motivada esencialmente por problemas relacionados con fractales. Explícitamente su definición, asociada a un vector de probabilidad $(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ es

$$H_q = \frac{1 - \sum_{i=0}^{k-1} p_i^q}{q-1} \quad (1.2)$$

Uno de nuestros principales objetivos consiste en llevar a un contexto abstracto esta definición, en la forma hecha por Kolmogorov con la entropía de Shannon.

La Teoría Ergódica, como comentamos al principio, se relaciona con diversas disciplinas particularmente con la Física. En un lenguaje más acorde con Física Estadística podemos hablar de un espacio fase X el cual consiste en una colección de estados posibles de un sistema físico. Las sucesivas iteraciones de una transformación T entre estados (órbitas) describen la evolución temporal del sistema. Cuando el sistema se encuentra en equilibrio es posible establecer una medida μ sobre X bien definida, la cual es preservada por la transformación. En la mayoría de los ejemplos físicos la σ -álgebra \mathcal{B} se toma como la más pequeña tal que los observables (funciones definidas sobre X y a valores reales o complejos) son medibles. En estos casos μ es definida como una medida de probabilidad T -invariante de manera tal que $\mu(E)$ puede interpretarse como la estimación de la probabilidad de que un instante dado el sistema se encuentre en un estado x perteneciente a E .

En este contexto, el teorema ergódico dice esencialmente que si la medida (o la transformación) cumplen con determinados requisitos que la definen como *ergódica*, entonces la frecuencia de visitas de las órbitas de un estado inicial x a un conjunto $E \subset X$ es $\mu(E)$. Es común entonces escuchar en el ambiente físico definir a un sistema como ergódico si "pasa por todos los puntos" o "cubre todo el espacio fase".

Con otro tipo de estructura es posible la definición de entropías no medidas. La *entropía topológica* hace su aparición hacia 1965 en el trabajo de Adler, Kongheim y McAndrew. En este caso la estructura es un par (X, T) donde X un espacio topológico compacto y $T : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo. La entropía topológica involucra el promedio de crecimiento del cardinal de subcubrimientos finitos de cubrimientos obtenidos en forma sucesiva por un

proceso similar al de realizar la partición "por nombres" en el caso de espacios de medida. Algo más tarde, a principios de la década de 1970, Rufus Bowen presenta una definición equivalente usando conjuntos (n, ε) -separados y (n, ε) -generantes, y que está basada en la ε -capacidad de Kolmogorov. Esta definición tiene como espacio fase un espacio métrico no necesariamente compacto, aunque sin esta condición la entropía podría depender de la métrica. En el presente trabajo aparecerá una generalización de estas entropías al intentar obtener cotas para la entropía en medida generalizada.

La obtención de *simbólicos dinámicos* asociados a un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ o a un flujo $\Phi = \{\varphi_t : M \rightarrow M / t \in \mathbf{R}\}$ ocupa un lugar sumamente destacado en la teoría. Este proceso llamado "discretización" consiste en encontrar una secuencia $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, $x_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, de modo que hay una conjugación (o semiconjugación) topológica entre el llamado conjunto básico Λ de M y el conjunto de secuencias como las descritas arriba, equipado con la topología producto discreta. Esto fue realizado inicialmente por Smale y continuado por Bowen.

Entropías topológicas y geométricas asociadas a acciones de grupos aparecen a mediados de la década de 1980, introducidas por Gromov, Ghys, Langevin, Walzak, Biś y otros. En estos casos se consideran a los dinámicos dados a partir de acciones de un grupo sobre un espacio métrico.

Otro tipo de entropías son las *entropías funcionales*. Aquí la novedad es considerar, en lugar de las clásicas particiones conjuntistas, particiones de la unidad. En este caso los dinámicos están dados sobre espacios funcionales y la entropía de una partición se calcula en términos de la traza de una función de la matriz densidad, asociada a la partición, al estilo de la entropía de von-Neumann.

El presente trabajo se enmarca en el contexto descrito anteriormente. El mismo consta de tres capítulos, cada uno de ellos dedicado a una forma particular de generalizar la entropía.

En el próximo capítulo se consideran familias dependientes de un parámetro y se muestran resultados acerca de su invarianza y otras propiedades. Se pondrá especial énfasis en analizar si los miembros de la familia proveen nueva información. La respuesta en el caso ergódico es negativa. Esta afirmación, como veremos, no contradice los resultados de la literatura física siempre y cuando la entropía usada en la misma sea interpretada adecuadamente. También se obtienen cotas de la entropía respecto al conjunto de medidas invariantes; de esta manera aparecerá lo que llamaremos entropía topológica generalizada, de la cual se hacen varias consideraciones en distintas subsecciones.

En el capítulo 3 se introducen entropías asociadas a secuencias de palabras en un grupo que actúa sobre un espacio de medida, allí se relacionan estas entropías con las asociadas a acciones de grupos sobre un espacio métrico.

Finalmente, el capítulo 4 estará dedicado a considerar entropías funcionales usando particiones de la unidad y dinámicos determinados por acciones de grupos. Resultados relacionados con flujos serán presentados en un apéndice.

En la figura 1 se muestra un diagrama de las distintas generalizaciones y se especifica a qué capítulo del presente trabajo corresponden.

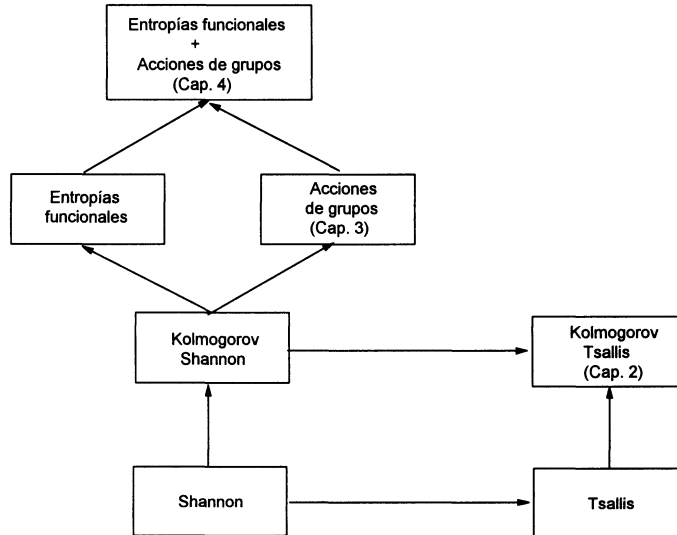


Figura 1-1

La numeración de los resultados (teoremas, proposiciones, etc) seguirá la siguiente convención:

nro de capítulo.nro de sección.nro de subsección.caracter para el orden

El caracter para el orden será una letra : a, b, \dots si el resultado es debido a otros autores y un número 1, 2, ... si es originado en este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer, en primer lugar, y fundamentalmente, al Dr. Fernando Vericat quién dirigió este trabajo y me brindó su atinado consejo. A Augusto Melgarejo, Manu Carlevaro, Luis Pugnioni, Danilo Renzi y el Vasco Zarragoicoechea por su inapreciable asistencia técnica para la preparación y presentación de este manuscrito. Al Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos (IFLYSIB), lugar donde se realizó este trabajo. Al International Centre for Theoretical Physics "Abdus Salam" de Trieste por haberme invitado a participar de diversos eventos científicos, al Centro Brasileiro das Pesquisas Físicas por su hospitalidad y a la Facultad de Ingeniería de La Plata por su apoyo económico para la asistencia a reuniones científicas.

2. FAMILIAS DE ENTROPÍAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

2.1 Introducción

Como se expresó en el capítulo anterior, el concepto de entropía fue introducido por Shannon en su "Teoría Matemática de la Comunicación" como una medida de la cantidad de información[49] y luego extendido a sistemas dinámicos abstractos por Kolmogorov.[31]. Además recordemos que en el mismo nivel de abstracción, que el considerado por Shannon pueden introducirse familias de entropías dependientes de un parámetro q que contienen a la mencionada entropía de Shannon como un caso particular, más precisamente cuando $q \rightarrow 1$. Como lo mencionamos, dos de los ejemplos más conocidos fueron presentados por Renyi[45] y más recientemente por C. Tsallis[57]. Estas generalizaciones encuentran una gran cantidad de aplicaciones en varias ramas de la ciencia y la tecnología p. ej [40][7][43][2][32][17].

En este capítulo extenderemos (definición 2.3.1) a un contexto abstracto, en el ya mencionado sentido de Kolmogorov, a la entropía de Tsallis. De esta forma relevantes resultados de Sinai, Ornstein y Melshakin[50][39][36] resultarán consecuentemente extendidos. Debemos señalar que en un espíritu similar, D. Ruelle extendió la entropía de Renyi para el valor particular $q = 2$ [48].

Nuestro interés, como dijimos, estará dirigido principalmente a una formulación más abstracta de las familias introducidas por Tsallis y a puntualizar el verdadero rol que cumplen sus miembros en cuanto al aporte de nueva información con respecto a la entropía clásica .

Los teoremas de isomorfismo de la sección 2.4 y un teorema de Sinai (para la entropía clásica) nos llevará a deducir que en ciertas condiciones, fundamentalmente la ergodicidad, no hay aporte sustancial de nueva información (teorema 2.5.2). Sin embargo por las razones expresadas en el prefacio y en el capítulo 1 creemos que esta afirmación no invalida lo realizado en el ámbito de la Física y otras disciplinas. Esto será desarrollado específicamente en la sección 2.5.

En la sección 2.2 se introducirá la notación y se presentarán las definiciones básicas necesarias para el resto del capítulo. La sección 2.3 será dedicada a definir nuestra generalización, al "estilo Kolmogorov", de la entropía de Tsallis. Luego de discutir las propiedades de isomorfismo de la familia introducida, en la siguiente sección se obtendrán cotas para la misma, de las cuales surgirá naturalmente lo que llamamos entropía topológica generalizada. En las subsecciones en la que esta sección está dividida se presentarán diversos resultados relacionados con esta familia de entropías.

2.2 Definiciones previas y notación

La idea matemática de transformaciones que preservan la medida generaliza, de alguna manera, el concepto físico de sistema dinámico. Recordemos que, físicamente, un sistema dinámico es entendido como una colección de partículas o estados sujetos a una ley que determina la evolución temporal y de manera que el teorema de Liouville se verifica. Además recordemos que las condiciones de equilibrio se interpretan, matemáticamente, como la existencia de una medida invariante la cual es la probabilidad de que un estado pertenezca a un cierto subespacio del espacio fase en un instante dado.

Desde un punto de vista matemático un sistema dinámico, o más precisamente un sistema dinámico que preserve la medida, es un cuádruple $\mathcal{S} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$, donde X es un conjunto (espacio fase), \mathcal{B} una σ -álgebra, μ una medida de probabilidad sobre \mathcal{B} y T una aplicación del conjunto subyacente X a él mismo, la cual es medible y preserva la medida μ , esto es: *para cualquier* $B \in \mathcal{B}$, $T^{-1}B \in \mathcal{B}$ y $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$.

Ejemplo 2.2.a: *Sistemas de Markov:*

Sea A una matriz de $k \times k$ con coeficientes 0 ó 1, anotamos $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. El espacio fase es el conjunto:

$$\Sigma_A = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} : x_i \in \Omega, \forall i \in \mathbf{Z}, A_{x_i, x_{i+1}} = 1 \right\}.$$

La matriz A indica que secuencias están permitidas, y es a veces llamada matriz de transferencia o de adyacencia.

A partir de la matriz de transferencia A se pueden definir un vector de probabilidad $p = (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ y una matriz estocástica $E = (E_{i,j})_{i,j=0,\dots,k-1}$ (o sea $\sum_j E_{i,j} = 1$) tal que $\sum_i p_i E_{i,j} = p_j$. Esto se hace de la siguiente manera:

Sea $(q_0, q_1, \dots, q_{k-1})$ un autovector positivo de A y $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ un autovector positivo de A^T (la traspuesta de A), normalizados de modo que $\sum q_i v_i = 1$. Por el teorema de Perron-Frobenius[22] la matriz A tiene un autovalor positivo e tal que $e > |e_i|$ donde e_i es cualquier otro autovalor de A . Este autovalor es también, claro está, maximal para A^T . Luego hacemos $E_{i,j} = \frac{A_{i,j} v_i}{e v_j}$, y esta matriz cumple las condiciones $\sum_j E_{i,j} = 1$ y $\sum_i p_i E_{i,j} = p_j$, con $p_i = q_i v_i$.

La medida queda definida del siguiente modo: cada punto $\{x_i\}$ tiene medida $P(\{x_i\}) = p_{x_i}$. Consideramos los "cilindros elementales"

$C_{\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m}^{-m, \dots, m} = \{x \in \Sigma_A : x_i = \alpha_i : i = -m, \dots, m\}$, cuya medida se define como:

$$\mu(C) = p_{\alpha_{-m}} E_{\alpha_{-m}, \alpha_{-m+1}} \dots E_{\alpha_{m-1}, \alpha_m}.$$

Pueden considerarse cilindros más generales:

$C_{\alpha_0, \dots, \alpha_l}^{a_0, \dots, a_l} = \{x \in \Sigma_A : x_{a_i} = \alpha_i : i = 0, \dots, l, \{a_0, \dots, a_l\} \subset \Omega\}$, y se define en forma análoga la medida sobre esta clase más general.

Llamamos \mathcal{B} a la σ -álgebra generada por la semi-álgebra de cilindros. Por el teorema de extensión de Kolmogororov (ver por ej. [42] o[46]) hay una única medida de probabilidad en (Σ_A, \mathcal{B}) que sobre los cilindros coincide con μ .

La transformación es el desplazamiento $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$, dado por $\sigma x = x'$, donde $x'_i = x_{i+1}$. La estructura dinámica conocida como sistema de Markov es entonces el cuádruple $(\Sigma_A, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$.

Ejemplo 2.2.b: *Esquemas de Bernoulli*

Consideramos un vector de probabilidad $p = (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$, o sea $\sum p_i = 1$. El espacio fase es

$$BS(p) = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} : x_i \in \Omega, \forall i \in \mathbf{Z} \right\} \equiv \prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1, 2, \dots, k-1\}. \quad (2.1)$$

Se asigna, como antes, a cada punto $\{x_i\}$ la probabilidad p_{x_i} y al cilindro $C_{\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m}^{-m, \dots, -m} = \{x : x_i = \alpha_i : i = -m, \dots, m\}$ la medida

$$\mu(C) = P(\{a_{-m}\}) \dots P(\{a_m\}) = p_{\alpha_{-m}} \dots p_{\alpha_m}.$$

La transformación es el desplazamiento σ del ejemplo anterior.

Este sistema dinámico podría ser considerado como un caso especial de sistemas de Markov. Específicamente aquél en el que la matriz de transferencia tiene todos sus coeficientes iguales a 1, siendo la matriz estocástica dada por $E_{i,j} = p_j$.

Ejemplo 2.2.c: *Rotaciones en el círculo unitario:*

Sea $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Un sistema dinámico quedará definido por la siguiente estructura: S^1 como espacio fase, la transformación es la rotación

$$R_a : S^1 \rightarrow S^1 \text{ con } R_a(z) = az; \quad a = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R}$$

la σ -álgebra de Borel y la medida de Lebesgue normalizada.

Ejemplo 2.2.d: *Rotaciones en un toro:*

Tomamos como espacio fase el toro m -dimensional $\mathcal{T}^m \equiv \mathbf{R}^m / \mathbf{Z}^m$, esto es el espacio cociente formado identificado a aquellas m -uplas de números reales en las cuales todas sus componentes difieren en un entero. Como se sabe, este espacio cociente es topológicamente equivante al producto cartesiano de m -copias de S^1 . Consideramos entonces a \mathcal{T}^m como espacio fase y como transformación una rotación en \mathcal{T}^m , la cual por lo anterior puede darse por

$$R = (R_1, \dots, R_m) \text{ con } R_j(z) = a_j z; \quad a_j = e^{i\varphi_j}, \varphi_j \in \mathbf{R}$$

La σ -álgebra será la generada por producto de Borelianos en S^1 , y la medida se tomará como la medida de Lebesgue producto.

Finalizamos esta sección recordando el concepto de factor:

Definición 2.2.e: Un sistema dinámico $\mathcal{S}' = (X', \mathcal{B}', \mu', T')$ es un *factor* del sistema dinámico $\mathcal{S} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$, si existe una aplicación medible suryectiva $f : X \rightarrow X'$, tal que:

- i) para cualquier $B' \in \mathcal{B}'$, $\mu(f^{-1}B') = \mu'(B')$
- ii) para cualquier x , $f(Tx) = T'(fx)$.

2.3 Entropía de Kolmogorov-Tsallis

La generalización de Kolmogorov de la entropía de Shannon (1.1) se define midiendo inicialmente la cantidad de información disponible H_1 , asociada a una partición de X . Si $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$, es tal que $\bigcup_{i=0}^{k-1} A_i = X$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$, entonces

$$H_1(\mathcal{A}) = - \sum_{i=0}^{k-1} \mu(A_i) \log \mu(A_i). \quad (2.2)$$

Aquí $\mu(A_i)$ se interpreta como la probabilidad de que un punto aleatorio se encuentre en A_i . Luego se calcula el promedio de ésta cantidad de información cuando el experimento se repite infinitamente. Finalmente se involucra a toda la información disponible. En un lenguaje más matemático esto se interpreta como el hecho de tomar el supremo sobre todas las particiones por conjuntos medibles.

A continuación siguiendo este proceso definiremos una familia de entropías que será el objeto central de estudio en todo este capítulo.

Para generalizar la entropía de Tsallis (Ec.1.2) de acuerdo con el procedimiento anterior, comenzamos reemplazando "probabilidades p_i por medidas $\mu(A_i)$ "

$$H_q(\mathcal{A}) = (q-1)^{-1} \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} [\mu(A_i)]^q \right) \quad (2.3)$$

donde q es un número real. El caso $q = 1$, será impuesto por continuidad, y resulta entonces la expresión (2.2).

Para definir la entropía asociada a una transformación T usaremos la terminología de ref. [30]. Dado $x \in X$, consideramos los siguientes puntos en su órbita: $x, Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x$, puesto que \mathcal{A} es una partición, para cada uno de esos puntos hay un único miembro de \mathcal{A} al cual pertenece. Podemos entonces asociar a cada punto x una cuerda $\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$, la cual llamaremos el nombre de x de longitud n ; la asignación es hecha según la prescripción $T^i x \in A_{\ell_i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Consecuentemente se puede obtener de \mathcal{A} una nueva partición:

$$\mathcal{A}^n = \{A^n(\ell) : A^n(\ell) \text{ es el conjunto de puntos con el mismo nombre } \ell \text{ de longitud } n\}.$$

Definición 2.3.1: La entropía media generalizada, asociada a una transformación T que preserva una medida μ es:

$$h_q(T) = (q-1)^{-1} \left[1 - \exp(\tilde{h}_q(T)) \right] \quad (2.4)$$

donde:

$$\tilde{h}_q(T) = \sup_{\mathcal{A}} \tilde{h}_q(\mathcal{A}, T) \quad (2.5)$$

y:

$$\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \log [1 + (1 - q) H_q(\mathcal{A}^n)] \} \quad (2.6)$$

donde para $H_q(\mathcal{A}^n)$ se toma en 2.3 la suma extendida sobre todos los nombres de longitud n .

Observación 1: En el caso clásico

$$h_1(T) = \lim_{q \rightarrow 1} h_q(T), \quad (2.7)$$

la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_1(\mathcal{A}^n)$ puede asegurarse aplicando el siguiente resultado de Análisis: sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, entonces $\left(\frac{1}{n} a_n\right)$ converge. Ahora hacemos $a_n = H_1(\mathcal{A}^n)$, entonces, por la subaditividad de H_1 ([8],[58]), se tiene que $H_1(\mathcal{A}^{n+m}) \leq H_1(\mathcal{A}^n) + H_1(\mathcal{A}^m)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_1(\mathcal{A}^n)$ existe. En el caso generalizado tal existencia no puede garantizarse de allí que se tome el límite superior en la Ec.2.6.

Observación 2: Para el caso particular de los esquemas de Bernoulli

$BS(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$, consideramos como partición el "generador canónico" $\mathcal{G} = \{G_i\}$, con $G_i = \{x = (x_l)_{l \in \mathbb{Z}} : x_0 = i\}$ para $0 \leq i \leq k-1$. O sea cada G_i será el cilindro C_i^0 , cuya medida es p_i . La partición \mathcal{G}^n por nombres de longitud n , estará formada en consecuencia por cilindros $C_{\alpha_{-m}, \dots, \alpha_m}^{-m, \dots, m}$. Luego

$$\mu(\mathcal{G}^n) = p_{\alpha_{-m}} \dots p_{\alpha_m}$$

Ahora efectuando los correspondientes cálculos:

$$\left[\tilde{h}_q(\mathcal{G}, \sigma) \right]_{BS(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})} = \log \sum_{i=0}^{k-1} p_i^q \quad (2.8)$$

la cual conduce a la entropía de Tsallis [57] para q arbitrario y donde σ es el desplazamiento definido en el Ejemplo 2.2.b.

Luego:

$$[h_q(\mathcal{G}, \sigma)]_{BS(p)} \equiv H_q(p) = (q-1)^{-1} \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} p_i^q \right], \quad (2.9)$$

y recobramos la expresión de Shannon[49]

$$H_1(p) = - \sum_{i=0}^{k-1} p_i \log(p_i) \quad (2.10)$$

con $q \rightarrow 1$.

Observación 3: Es válido (Teorema de Kolmogorov-Sinai) que $H_1(p) \equiv h_1(\mathcal{G}, \sigma) = h_1(\sigma)$. Sin embargo, para q arbitrario $H_q(p)$ no coincide necesariamente con $h_q(\sigma)$, debido a que no puede asegurarse que el supremo sea alcanzado en el generador \mathcal{G} .

Observación 4: Si $p_i = \frac{1}{k}$ (caso equiprobable), $i = 0, 1, \dots, k-1$, entonces la ecuación 2.8 resulta $\left[\tilde{h}_q(\mathcal{G}, \sigma) \right]_{BS(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})} = \log k^{1-q}$. En particular para el caso clásico de la observación anterior se deduce que $h_1(\sigma) = \log k$.

2.4 Teoremas de isomorfismo y otras propiedades

Teorema 2.4.1: Sea $\mathcal{S}' = (X', \mathcal{B}', \mu', T')$ un factor (def. 2.2.e) del sistema dinámico $\mathcal{S} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$, entonces $h_q(T) \leq h_q(T')$ para $q > 1$ y $h_q(T) \geq h_q(T')$ para $q < 1$.

Demostración: Sea $\mathcal{A}' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_{k-1}\}$ una partición por conjuntos medibles de X' . Sea $f : X \rightarrow X'$ una función como en la definición 2.2.e y denotemos $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{A}')$. Sea y un punto de X' con nombre $\ell' = (\ell'_0, \ell'_1, \dots, \ell'_{n-1})$ respecto a (\mathcal{A}', T') , o sea $(T')^i y \in A'_{\ell'_i}, i = 0, 1, \dots, n-1$. Si x es punto de X tal que $y = f(x)$, entonces $f(T^i x) = (T')^i y$, en consecuencia $T^i x \in f^{-1}(A'_{\ell'_i}) = A_{\ell'_i}$, o sea que el nombre de x respecto (\mathcal{A}, T) es también $\ell' = (\ell'_0, \ell'_1, \dots, \ell'_{n-1})$. De lo anterior se deduce que si \mathcal{A}^n y $(\mathcal{A}')^n$ son las particiones por nombres de longitud n , obtenidas a partir de $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ entonces

$$\mathcal{A}^n = f^{-1}((\mathcal{A}')^n).$$

Luego:

$$\mu'((\mathcal{A}')^n) = \mu'(f^{-1}(\mathcal{A}')^n) = \mu(\mathcal{A}^n)$$

y en consecuencia $\tilde{h}_q(\mathcal{A}', T') = \tilde{h}_q(f^{-1}(\mathcal{A}'), T)$.

Tenemos entonces:

$$\tilde{h}_q(T') = \sup_{\mathcal{A}'} \{\tilde{h}_q(\mathcal{A}', T')\} = \sup_{\mathcal{A}'} \{\tilde{h}_q(f^{-1}(\mathcal{A}'), T)\} \leq \tilde{h}_q(T)$$

Esto implica que

$$h_q(T) \leq h_q(T') \text{ si } q > 1$$

y

$$h_q(T) \geq h_q(T') \text{ si } q < 1$$

Si los sistemas son *isomorfos*, esto es si la función f es biyectiva, entonces se tendrá una igualdad En [37] el teorema anterior se demostró bajo está hipótesis, con una línea de razonamiento similar.

Dos sistemas \mathcal{S} y \mathcal{S}' son *débilmente isomorfos*, si \mathcal{S} es un factor de \mathcal{S}' y \mathcal{S}' es un factor de \mathcal{S} . Por lo tanto se alcanza la igualdad con una condición menos fuerte que la de isomorfismo. Decimos entonces que la entropía generalizada resulta un *invariante por isomorfismo débil*.

En general, se dice que una propiedad P relativa a dos sistemas dinámicos \mathcal{S} y \mathcal{S}' es un *invariante completo (débilmente completo)* de tales sistemas si se verifica: \mathcal{S} y \mathcal{S}' comparten la propiedad P si y sólo si \mathcal{S} y \mathcal{S}' son isomorfos (débilmente isomorfos).

Con posterioridad a la publicación del teorema anterior en [37], Takens y Verbitski en ref.[56], probaron un teorema similar para la entropía de Renyi.

Para la entropía original de Kolmogorov, teoremas de isomorfismo habían sido probados en refs. [50],[39],[29]

Proposición 2.4.2: Para cualquier entero $m \geq 2$ es válido:

$$h_q(T^m) = (q-1)^{-1} \left[1 - \exp\left(m\tilde{h}_q(T)\right) \right] \text{ para todo } q.$$

Demostración: Escribimos $\tilde{H}_q(\mathcal{A}) = 1 + (1-q)H_q(\mathcal{A})$. Recordemos que una partición \mathcal{A} es un refinamiento de una partición \mathcal{C} , si todo elemento de \mathcal{C} es unión de elementos de \mathcal{A} . Si $q < 1$, entonces $\tilde{H}_q(\mathcal{A}) \geq \tilde{H}_q(\mathcal{C})$, mientras que para $q > 1$ resulta $\tilde{H}_q(\mathcal{A}) \leq \tilde{H}_q(\mathcal{C})$.

Veamos la demostración para $q > 1$. Consideramos una partición \mathcal{A} , y sea \mathcal{A}^m la partición por nombres de longitud m obtenida de \mathcal{A} y de la transformación T . Tenemos $\tilde{H}_q((\mathcal{A}^m)^n) = 1 + (1-q)H_q((\mathcal{A}^m)^n)$ donde ahora $(\mathcal{A}^m)^n$ es la partición con nombres de longitud n obtenida de la partición \mathcal{A}^m y de la transformación T^m . Luego

$$\begin{aligned} \tilde{h}_q(\mathcal{A}^m, T^m) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q((\mathcal{A}^m)^n) \right] \right\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{mn} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^{mn}) \right] \right\} \geq m \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \tilde{H}_q(\mathcal{A}^s) = m\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T) \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde \mathcal{A}^{mn} es la partición con nombres de longitud mn construida de la partición dada inicialmente y de la transformación T .

Luego tomando el supremo sobre particiones finitas:

$$\tilde{h}_q(T^m) \geq m\tilde{h}_q(T).$$

Para la otra desigualdad:

Si $l \in \mathbb{N}$ entonces una partición por nombres de longitud l , respecto a (\mathcal{A}, T) involucra a las órbitas $x, Tx, \dots, T^{l-1}x$, para cada punto x . Una partición por nombres de longitud n , con respecto a (\mathcal{A}^m, T^m) involucra a las órbitas $x, T^m x, \dots, (T^m)^{n-1}x$. En consecuencia si $l = mn, mn+1, \dots, mn+m$, entonces \mathcal{A}^l es un refinamiento de $(\mathcal{A}^m)^n$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q((\mathcal{A}^m)^n) \right] \right\} &\leq \frac{1}{n} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\} = \frac{l}{n} \frac{1}{l} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\} \leq \\ &\frac{mn+m}{n} \frac{1}{l} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\} \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\frac{1}{n} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^{mn}) \right] \right\} \leq m \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{l} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\},$$

de manera entonces que:

$$\sup_{j \geq n} \frac{1}{j} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^{mj}) \right] \right\} \leq m \sup_{j \geq n} \left(1 + \frac{1}{j} \right) \sup_{l=mn, mn+1, \dots, mn+n} \frac{1}{l} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\}.$$

En consecuencia:

$$\tilde{h}_q(T^m) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q((\mathcal{A}^m)^n) \right] \right\} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{j \geq n} \frac{1}{j} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^{mj}) \right] \right\} \leq$$

$$m \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \left\{ \log \left[\tilde{H}_q(\mathcal{A}^l) \right] \right\}.$$

Finalmente:

$$\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T^m) \leq m\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T),$$

para cualquier partición finita \mathcal{A} .

Para $q > 1$ la demostración es similar, teniendo en cuenta la inversión de las desigualdades anteriores. ■

Proposición 2.4.3: $h_q(T_1 \times T_2) = (q - 1)^{-1} \left[1 - \exp(\tilde{h}_q(T_1)) \exp(\tilde{h}_q(T_2)) \right]$.
Donde el producto de transformaciones está definido en la forma usual.

Demostración: Consideramos dos sistemas dinámicos: $S_1 = (X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1, T_1)$, $S_2 = (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2, T_2)$ y definimos su " producto ":

$$S_1 \times S_2 = (X_1 \times X_2, \mathcal{B}, \mu, T_1 \times T_2),$$

donde \mathcal{B} es la σ -álgebra generada por rectángulos $A_{1i} \times A_{2j}$ con $A_{\alpha k} \in \mathcal{B}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) y con μ la medida producto : $\mu(A_{1i} \times A_{2j}) = \mu_1(A_{1i}) \cdot \mu_2(A_{2j})$. Sean \mathcal{A}' y \mathcal{A}'' particiones de X_1 y X_2 , respectivamente, y sea \mathcal{A} the partición producto \mathcal{A}' y \mathcal{A}'' . Luego

$$\tilde{H}_q(\mathcal{A}^{(n,m)}) = \sum_{\ell', \ell''} [\mu_1((\mathcal{A}')^n(\ell')) \cdot \mu_2((\mathcal{A}'')^m(\ell''))]^q, \text{ donde la suma está}$$

extendida sobre los nombres ℓ' y ℓ'' , de longitud n y m para T_1 and T_2 , respectivamente. Como la σ -álgebra considerada es la generada por los rectángulos tenemos:

$$\tilde{h}_q(T_1 \times T_2) = \sup \left\{ \tilde{h}_q(\mathcal{A}, T_1 \times T_2) : \mathcal{A} = \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'', \mathcal{A}' \text{ partición de } X_1 \right. \\ \left. \mathcal{A}'' \text{ partición de } X_2 \right\}.$$

Luego:

$$\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T_1 \times T_2) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\ell'} [\mu_1((\mathcal{A}')^n(\ell'))]^q \right) + \\ \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left(\sum_{\ell''} [\mu_2((\mathcal{A}'')^m(\ell''))]^q \right),$$

y por lo tanto:

$$\tilde{h}_q(\mathcal{A}, T_1 \times T_2) = \tilde{h}_q(\mathcal{A}', T_1) + \tilde{h}_q(\mathcal{A}'', T_2).$$

Como esto es válido para cualquier partición por rectángulos, tenemos:

$$\tilde{h}_q(T_1 \times T_2) = \tilde{h}_q(T_1) + \tilde{h}_q(T_2).$$

o sea:

$$h_q(T_1 \times T_2) = (q - 1)^{-1} \left[1 - \exp(\tilde{h}_q(T_1)) \exp(\tilde{h}_q(T_2)) \right] \quad (2.13) \quad \blacksquare$$

A continuación presentamos algunos cálculos que generalizan resultados para el caso clásico [8],

[58]:

Ejemplo 2.4.4: $h_q(id : X \rightarrow X) = 0$

Dada una partición \mathcal{A} , si \mathcal{A}^n es la partición por nombres de longitud n con respecto a (\mathcal{A}, id) , entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}^n$ para todo natural n . En consecuencia $\tilde{h}_q(id) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log [\tilde{H}_q(\mathcal{A}^n)] = 0$, puesto que por lo anterior $\tilde{H}_q(\mathcal{A}^n)$ es constante con respecto a n . Luego $h_q(\mathcal{A}) = 0$, para cualquier partición \mathcal{A} y por lo tanto $h_q(id) = 0$. ■

Ejemplo 2.4.5: Entropía generalizada de rotaciones en el círculo unitario.

Consideramos el sistema dinámico del ejemplo 2.2.c: $R_a : S^1 \rightarrow S^1$ con $R_a(z) = az$, $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Debemos distinguir dos casos:

Caso I: a es una raíz de la unidad, o sea $a = e^{2\pi i/r}$ para algún entero positivo r . Como $(R_a)^r \equiv id_{S^1}$, por el ejemplo 2.4.4 tenemos que $\tilde{h}_q((R_a)^r) = 0$ para todo q , y por la proposición 2.4.2 $r\tilde{h}_q(R_a) = 0$ y entonces $\tilde{h}_q(R_a) = 0$ para todo q .

Caso II: a no es una raíz de la unidad. Vamos a considerar una familia de particiones $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbf{N}}$, en la cual cada miembro es una partición del círculo unitario por k intervalos iguales. O sea que si \mathcal{A}_k^n es la partición por nombres de longitud n respecto (\mathcal{A}_k, R_a) y $N(\mathcal{A}_k^n)$ es el número de conjuntos en esta, se tiene $N(\mathcal{A}_k^n) \leq nk$.

Sea $\phi_q(x) = x^q$, $q > 1$; luego por un simple argumento de convexidad:

$$\phi_q\left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \phi_q(x_i), \text{ con } \lambda_i > 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = 1.$$

Si $\lambda_i = 1/k$, $x_i = \mu(I_i^k)$, donde I_i^k es cada intervalo de la partición \mathcal{A}_k , se tiene:

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} \mu(I_i^k)\right)^q \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} (\mu(I_i^k))^q$$

y por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{k}\right)^q \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} (\mu(I_i^k))^q,$$

pués $\sum_{i=0}^{k-1} \mu(I_i^k) = 1$, para cada k . Consecuentemente, si $\tilde{H}_q(\mathcal{A}) = 1 + (1 - q) H_q(\mathcal{A})$, entonces

$$\tilde{H}_q(\mu, \mathcal{A}_k) = \sum_{i=0}^{k-1} (\mu(I_i^k))^q \geq k^{1-q} \quad (2.14)$$

y finalmente:

$$\tilde{H}_q(\mu, \mathcal{A}_k^n) \geq (N(\mathcal{A}_k^n))^{1-q} \geq (nk)^{1-q}. \quad (2.15)$$

$$\tilde{h}_q(\mathcal{A}_k, R_a, \mu) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log H_q(\mu, \mathcal{A}_k^n) \geq (1 - q) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n + k) = 0.$$

Como, por la definición 2.6, $\tilde{h}_q(\mathcal{A}_k, R_a, \mu) \leq 0$ para $q > 1$, se tendrá obviamente que $\tilde{h}_q(\mathcal{A}_k, R_a, \mu) = 0$. Luego $0 \geq \tilde{h}_q(R_a, \mu) \geq \tilde{h}_q(\mathcal{A}_k, R_a, \mu) = 0$, con lo cual $\tilde{h}_q(R_a, \mu) = 0$ y en consecuencia $h_q(R_a, \mu) = 0$, para $q > 1$.

Ejemplo 2.4.6: Consideremos una rotación en un toro (ej. 2.2.d):
 $R : \mathcal{T}^m \rightarrow \mathcal{T}^m$

$$\left(\mathcal{T}^m \equiv \mathbf{R}^m / \mathbf{Z}^m \text{ o } \mathcal{T}^m \equiv S^1 \times \dots \times S^1 \right),$$

donde $R = (R_1, \dots, R_m)$ con $R_j(z) = a_j z$.

En el caso en que $a_j = e^{2\pi i / r_j}$ para algún entero positivo r_j , $j = 1, 2, \dots, m$, por la proposición 2.4.3 y el ejemplo 2.4.5 tenemos que $\tilde{h}_q(R) = \sum_j \tilde{h}_q(R_j) = 0$.

O sea $h_q(R) = 0$.

Si para algunos j , a_j es raíz de la unidad y para otros no, entonces para estos últimos la entropía de las correspondientes funciones coordenadas se anula. Para los otros las funciones coordenadas serán transformaciones ergódicas de S^1 y luego se realiza un análisis como en *caso II* del ejemplo anterior.

2.5 El caso ergódico

En vista de los resultados de la sección anterior, cabe preguntarse si lo enunciado en el teorema 2.4.1 no es debido al hecho de que en realidad los miembros de la familia de entropías no contienen sustancial nueva información con respecto a la involucrada en $h_1(T, \mu)$. Para este caso clásico la entropía es un invariante completo por isomorfismos para esquemas de Bernoulli. Recordemos que esto último significa que dos esquemas de Bernoulli tienen la misma entropía si y sólo si son isomorfos[39].

En este capítulo se considerará una situación más general: se tienen dos sistemas dinámicos, uno de los cuales es un esquema de Bernoulli (y por lo tanto ergódico [42] ó [28]), pero el otro es un sistema ergódico conjugado a un espacio de Lebesgue (los cuales serán llamados directamente espacios de Lebesgue). Antes de avanzar recordemos la definición de ergodicidad:

Definición 2.5.a: Un sistema dinámico $\mathcal{S} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ es *ergódico* si los conjuntos medibles B con $T^{-1}(B) = B$ satisfacen $\mu(B) = 0$ ó $\mu(X - B) = 0$.

Alternativamente se dice que que la medida μ es *T-ergódica*.

Una condición equivalente es que si una función medible $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ verifica que $f(Tx) = f(x)$, μ a.e entonces es constante μ -a.e.

Una condición más fuerte que la ergodicidad es la de "mixing".

Definición 2.5.b: Se dice que un sistema dinámico (o directamente la transformación) es *débilmente mixing* si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \mu(T^{-i}(A) \cap B) - \mu(A) \mu(B) \right| = 0,$$

para cada par de conjuntos medibles A, B . Se dice que el sistema (o la transformación) es *fuertemente mixing* si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \mu(B).$$

Que la condición de fuertemente mixing implica la ergodicidad se ve de la siguiente manera: si B es un conjunto medible T -invariante entonces, para todo n , $\mu(T^{-n}(B) \cap (X - B)) = 0$. Luego $\mu(B)\mu(X - B) = 0$ y en consecuencia T es ergódica.

Para la situación planteada al comienzo se tiene el siguiente teorema debido a Ya Sinai:

Teorema 2.5.c[51]: Sean $T : X \rightarrow X$, y un esquema de Bernoulli $BS(p)$ con $h_1(T) \geq [h_1]_{BS(p)}$ y T ergódica, entonces $BS(p)$ es un factor de T .

Observación: Vamos a identificar al sistema dinámico con la transformación que preserva la medida considerada en la estructura. En consecuencia cuando digamos que una transformación es isomorfa o es un factor de otra, esto significará que los sistemas dinámicos, como estructura, lo son. Consideraremos como otra hipótesis adicional que el espacio (X, μ) sea "numerable", esto es que $L^2(X, \mu)$, estructurado como espacio de Hilbert, tenga un subconjunto denso numerable.

Definición 2.5.d: Un sistema dinámico es un *automorfismo de Bernoulli* si es isomorfo a un esquema de Bernoulli.

El teorema 2.5.c, el teorema 2.4.1 y la siguiente proposición nos servirán de base para obtener una respuesta a lo planteado al principio de esta sección con respecto a la redundancia de la familia de entropías.

Proposición 2.5.1: Sea $\mathcal{S} = (X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un espacio de Lebesgue con T ergódica, y tal que $h_1(T) \geq \log K$, para algún entero $K > 1$. Entonces para $q > 1$:

$$h_q(T) \leq \frac{1 - K^{1-q}}{q - 1}$$

Demostración: Sea T ergódica con $h_1(T) \geq \log K$, para algún entero $K > 1$. El miembro derecho de la desigualdad es la entropía clásica del esquema de Bernoulli $BS(p)$, con $p = \left(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K}\right)$ (ver observación 4 debajo de la ecuación 2.10).

Por el teorema 2.5.c $BS\left(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K}\right)$ es un factor de T y entonces por el teorema 2.3.2 tendremos:

$$\tilde{h}_q(T) \geq [\tilde{h}_q]_{BS(p)} \geq [\tilde{h}_q, \mathcal{G}]_{BS(p)} = \log K^{1-q}.$$

La última igualdad resulta también de lo puntualizado en la observación 4.

De manera que

$$h_q(T) \leq \frac{1 - K^{1-q}}{q - 1}, \text{ si } q > 1.$$

Ahora estaríamos en condiciones de responder negativamente a la pregunta de si la familia de entropías h_q contiene nueva información:

Teorema 2.5.2: Sea $\mathcal{S} = (X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un espacio de Lebesgue con T ergódica y $h_1(T) > 0$. Entonces:

$$h_q(T) = \begin{cases} \Psi_q(h_1) & \text{si } q > 1 \\ \infty & \text{si } q < 1 \end{cases}$$

donde Ψ_q es una cierta función.

Demostración:

I) Caso $q < 1$

Vamos a necesitar el siguiente resultado que aparece en [56], y cuya demostración presentamos aquí por completitud:

Lema: Sea h un número real tal que $0 \leq -t \log t < h < \infty$, con $t \in [0, 1]$. Entonces existe un número natural m y un vector $p = (p_0, \dots, p_{m-1})$, de modo que se verifica:

$$i) \sum_{i=0}^{m-1} p_i = t$$

$$ii) - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i = h$$

Demostración del lema: Sea \bar{h} un número tal $0 < \bar{h} < \infty$. La aplicación $p = (p_0, \dots, p_{m-1}) \mapsto - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i$ es una función continua en el simple $\Delta = \{p = (p_0, \dots, p_{m-1}) : p_i > 0, \sum p_i = 1\}$, y que toma valores en $[0, \log m)$ ([58]-[28]). Luego para m suficientemente grande existe un vector de probabilidad $\bar{p} = (\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_{m-1}) \in \Delta$ tal que

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \bar{p}_i \log \bar{p}_i = \bar{h}.$$

Si en particular $\bar{h} = \frac{h}{t} + \log t > 0$, consideramos $p_i = t\bar{p}_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. En consecuencia

$$\sum_{i=0}^{m-1} p_i = t, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \log p_i &= - \sum_{i=0}^{m-1} t\bar{p}_i \log t\bar{p}_i = -t \sum_{i=0}^{m-1} \bar{p}_i (\log \bar{p}_i + \log t) = \\ &= -t \sum_{i=0}^{m-1} \bar{p}_i \log \bar{p}_i - t \log t = t\bar{h} - t \log t = h. \end{aligned}$$

Con lo que queda probado el resultado.

A continuación determinaremos un vector de probabilidad p que reúna ciertas condiciones específicas. Sea $0 < q < 1$, $n \in \mathbf{N}$, definimos $p_i = n^{-\frac{1+q}{2q}}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Tenemos entonces que

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i = n \times n^{-\frac{1+q}{2q}} = n^{\frac{q-1}{2q}} \rightarrow 0, \text{ con } n \rightarrow \infty$$

y

$$- \sum_{i=0}^{n-1} p_i \log p_i = \frac{1+q}{2q} n^{\frac{q-1}{2q}} \log n \rightarrow 0, \text{ con } n \rightarrow \infty.$$

Sean

$$t = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1 - n^{\frac{q-1}{2q}},$$

$$\bar{h} = h_1(T) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \log p_i = h_1(T) - \frac{1+q}{2q} n^{\frac{q-1}{2q}}$$

Usamos ahora el lema (notar que $\bar{h} > -t \log t$, para n suficientemente grande) y en virtud de éste existe un número natural m y un vector (w_0, \dots, w_{m-1}) con $\sum w_i = t$ y $-\sum w_i \log w_i = \bar{h}$. Definimos:

$p = (p_0, \dots, p_{n-1}, p_n, \dots, p_{n+m-1})$, donde $p_i = n^{-\frac{1+q}{2q}}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$
 $p_n = w_0, \dots, p_{n+m-1} = w_{m-1}$.

Luego:

$$\sum_{i=0}^{n+m-1} p_i = 1 \text{ y } - \sum_{i=0}^{n+m-1} p_i \log p_i = h_1(T).$$

Tenemos entonces determinado un esquema de Bernoulli $BS(p)$ con entropía clásica igual a $h_1(T)$. Entonces por el teorema 2.4.c $BS(p)$ es un factor de T y luego por el teorema 2.3.2 se tiene $h_q(T) \geq [h_q]_{BS(p)}$. Por otra parte, como $\sum_{i=0}^{m-1} p_i^q \geq \sum_{i=0}^{n-1} p_i^q = n^{\frac{q-1}{2q}}$ y con \mathcal{G} el generador canónico, se tiene

$$[\tilde{h}_q(\mathcal{G})]_{BS(p_0, \dots, p_{n-1})} = \log \left(\sum p_i^q \right) = \log \left(n^{\frac{q-1}{2q}} \right),$$

finalmente obtenemos:

$$h_q(T) \geq [h_q]_{BS(p)} \geq \frac{1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i^q}{q-1} = \frac{1 - n^{\frac{q-1}{2q}}}{q-1}.$$

Con lo cual como n puede tomarse arbitrariamente grande se tendrá $h_q(T) = \infty$, para $q < 1$.

Si q es negativo, entonces $q < q_0$ con $0 < q_0 < 1$, y como $h_q > h_{q_0}$ el teorema vale también en este caso.

II) Caso $q > 1$

Vamos a considerar primero la situación particular en que, para cualquier $m \geq 2$, T^m es ergódica y $h_1(T^m) > 0$. Para cada $x > 0$, elegimos un número negativo $M_q = M_q(x)$ con la siguiente propiedad: para cualquier $y > 0$, $x \geq y$ si y sólo si $M_q x \geq (1-q)y$.

Si en particular $x = h_1(T) > 0$, y K es un entero tal que $K > 1$, se tiene que $h_1(T) \geq \log K$ si y sólo si $M_q h_1(T) \geq (1-q) \log K$. Por otra parte $h_1(T) \geq \log K$ implica que $BS\left(\frac{1}{K}, \dots, \frac{1}{K}\right)$ es un factor de T (teorema de Sinai), y consecuentemente $\tilde{h}_q(T) \geq (1-q) \log K$ (c.f. prop. 2.5.1).

Tenemos además que $h_1(T) \geq \frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q}$, si $q > 1$, lo cual se deduce de las definiciones. En consecuencia $M_q h_1(T) \geq \tilde{h}_q(T)$, o sea:

$$\frac{M_q h_1(T)}{1-q} \leq \frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q}$$

Supongamos que fuera

$$\frac{M_q h_1(T)}{1-q} < \frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q},$$

aplicando en particular a T^m tenemos, usando prop. 2.4.2:

$$\frac{\tilde{h}_q(T^m)}{1-q} - \frac{M_q h_1(T^m)}{1-q} = m \left(\frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q} - \frac{M_q h_1(T)}{1-q} \right) \rightarrow +\infty, \text{ con } m \rightarrow +\infty.$$

Luego para un m suficientemente grande existirá un entero $K > 1$, tal que

$$\frac{M_q h_1(T^m)}{1-q} < \log K < \frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q}.$$

Entonces tendríamos una contradicción con la proposición 2.5.1 aplicada a T^m . Recordar que se está suponiendo que todas las iteraciones de T son ergódicas.

En consecuencia si T es ergódica y T^m es ergódica, $m \geq 2$, se tiene que $M_q h_1(T) = \tilde{h}_q(T)$

Pasemos ahora a la situación general. Vimos que dada una transformación ergódica T con $h_1(T) > 0$, existe un esquema de Bernoulli con entropía clásica igual a $h_1(T)$ ([58]-[28]). Esto también será válido para sistemas dinámicos isomorfos a esquemas de Bernoulli, los cuales, como vimos, reciben el nombre de *automorfismos de Bernoulli* (lo de automorfismo alude al hecho de ser transformaciones invertibles). Entonces si T ergódica con $h_1(T) > 0$, existe un automorfismo de Bernoulli S con $h_1(T) = h_1(S)$. Luego por el teorema de Sinai (teor. 2.5.c) S resulta ser un factor de T , o sea $\tilde{h}_q(T) \geq \tilde{h}_q(S)$. Para cada transformación T hay asociado un operador $\mathcal{L}_T : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$, definido por $\mathcal{L}_T[f](x) = f(Tx)$. Se dice que este operador tiene espectro discreto si hay una base ortonormal numerable de autofunciones. Por un teorema de Rohlin si $T : X \rightarrow X$ es un automorfismo de Bernoulli, con X numerable, el operador asociado \mathcal{L}_T tiene espectro discreto (ver por ej. [58], pág. 109). Puede probarse ([58], pág. 66) que si \mathcal{L}_T tiene espectro discreto entonces T es fuertemente mixing (ver def 2.5.b). Lo que se prueba en realidad es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{L}_T^n f, g) = (f, 1)(1, g),$$

donde (\cdot, \cdot) denota el producto usual en $L^2(X, \mu)$. La definición 2.5.b es obtenida con $f = I_A$, $g = I_B$ (I_A, I_B son las funciones características de A, B respectivamente).

De manera entonces que el automorfismo de Bernoulli S , mencionado en el párrafo anterior es mixing y se prueba que S^m es ergódica para todo $m \geq 1$ [21].

Recordemos que $h_1(T) \geq \frac{\tilde{h}_q(T)}{1-q}$, si $q > 1$. En consecuencia:

$$M_q h_1(T) \geq \tilde{h}_q(T) \geq \tilde{h}_q(S) = M_q h_1(S) = M_q h_1(T).$$

Así queda probado este caso para cualquier transformación ergódica. ■

Un teorema similar para el caso de la entropía de Renyi fue probado en ref.[56]

Para el caso clásico se demuestra la completitud, ver a continuación del teorema 2.4.1, en el caso particular de esquemas de Bernoulli:

Teorema 2.5.e (Ornstein[39]): Dos esquemas de Bernoulli $BS(p), BS(p')$ son isomorfos si y sólo si tienen igual entropía (clásica).

Hay clases de isomorfismos más restrictivos, por ejemplo los llamado isomorfismos finitarios. Recordemos su definición:

Definición 2.5.f: Un isomorfismo f entre dos esquemas de Bernoulli es *finitario* si dado un elemento x en el espacio fase X (ver 2.1), hay dos enteros $n_1 \leq n_2$, tal que para cualquier otro $x' \in X$ que verifica $x' [n_1, n_2] = x [n_1, n_2]$, las coordenadas cero $[f(x)]_0$, $[f(x')]_0$ y $[f^{-1}(x)]_0$, $[f^{-1}(x')]_0$ son iguales respectivamente. Con $x [n_1, n_2]$ denotamos la palabra $x_{n_1}x_{n_1+1}\dots x_{n_2-1}x_{n_2}$. Keane y Smorodinski demostraron el teorema 2.5.e para isomorfismos initarios[29].

El teorema de Keane y Smorodinski puede generalizarse para el caso que nos conduce a la entropía de Tsallis, que hemos denotado $H_q(p)$ (ver Ec.(2.9)):

Teorema 2.5.3: Dos esquemas de Bernoulli $BS(p), BS(p')$ con $H_q(p) = H_q(p')$ son isomorfos finitariamente.

Demostración: Sean $p = (p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$ y $p' = (p'_0, p'_1, \dots, p'_{l-1})$ (con $k \geq 3; l \geq 3$) y para los cuales $H_q(p) = H_q(p')$. Podemos determinar un tercer vector de probabilidad $r = (r_0, r_1, \dots, r_{m-1})$ con la misma entropía y con $r_0 = p_i$, $r_1 = p'_j$ para ciertos i, j . Para esto puede asumirse sin pérdida de generalidad que los vectores están ordenados como: $p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_{k-1}$ y $p'_0 \geq p'_1 \geq \dots \geq p'_{l-1}$ con $p_{k-1} \geq p'_{l-1}$. Consideramos un triple auxiliar $r' = (p_0, p'_{l-1}, 1 - (p_0 + p'_{l-1}))$, de modo que $H_q(r') \leq H_q(p) = H_q(p')$, para cualquier q . Luego puede modificarse la la entropía hasta alcanzar el valor $H_q(r) = H_q(p)$; esto puede hacerse mediante particiones sucesivas del vector auxiliar:

$$r' \rightarrow r'' = (p_0, p'_{l-1}, r_3, 1 - (p_0 + p'_{l-1} + r_3)) \rightarrow \dots \rightarrow r.$$

Si tenemos dos vectores de probabilidad p y p' con todas las componentes distintas se considera el vector auxiliar r y se define el isomorfismo de $BS(p)$ a $BS(r)$, y de $BS(r)$ a $BS(p)$ y dado que la composición de isomorfismos finitarios es finitario[29] podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $p_0 = p'_0$, ya . En realidad lo que se puede asumir es que alguna de las componentes sean iguales, sino se reordena.

Ahora usamos la técnica de codificación Keane y Smorodinski para construir el isomorfismo finitario en el caso mencionado. Damos a continuación una somera idea de como esta técnica es utilizada para este fin. Por simplicidad ilustraremos el procedimiento en un caso particular. Sean $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ y $p' = (p'_0, p'_1, p'_2)$ con $p_0 = p'_0$. Sea x una secuencia bi-infinita en el alfabeto $\{0, 1, 2, 3\}$ de $BS(p)$. El símbolo 0, correspondiente a las componentes que coinciden es lo que se llama un "marcador". Tenemos que asignar a x una secuencia bi-infinita y en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ de $BS(p')$. El primer paso es colocar en cada lugar en el que aparece un 0 en x un 0 en y . Entre cada par de marcadores en x aparecerá una cuerda de longitud ℓ , en símbolos 1, 2, 3. Luego a cada tal cuerda habrá que asignarle otra de longitud ℓ en los símbolos 1, 2. Pensemos ahora que tenemos una tabla en cuya columna izquierda están todas las secuencias de longitud ℓ en los símbolos 1, 2, 3 y en la derecha todas las cuerdas de longitud ℓ en los símbolos 1, 2 o peovisoriamente un símbolo especial e . Esto para cada longitud ℓ posible entre dos marcadores. A continuación consideramos una subdivisión del intervalo real $[0, 1]$ en subintervalos de longitud $3^{-\ell}$ y otra en subintervalos de longitud $2^{-\ell}$. Damos entonces a cada intervalo los nombres de tales secuencias. Si uno de los intervalos de longitud $3^{-\ell}$, o sea los de la columna izquierda de la tabla está contenido en uno de

los de la derecha, o sea de longitud $2^{-\ell}$, este será el asignado y copiado en y . Si ocurre lo contrario se asigna provisionalmente el símbolo e . Se continúa de esta manera examinando las secuencias entre dos marcadores y se copian las que correspondan según el criterio prescrito. Se analizan ahora las secuencias entre dos marcadores seguidos 00, concatenamos tales secuencias y vemos sino fueron asignadas en algunas de las tablas anteriores, si no lo correspondió e se copia. Se continúa luego analizando los triples marcadores 000, etc.

De esta manera definimos $f : BS(p) \rightarrow BS(p')$ por $y = f(x)$. Observemos que si μ y μ' son las medidas de probabilidad consideradas en la estructura de los esquemas de Bernoulli en la sec. 2.2, por construcción se tiene $\mu'(f(A)) = \mu(A)$, es decir, esta transformación preserva las medidas.

Observación: Para $k = 2$ (o $l = 2$) aunque la demostración es esencialmente la misma, debe tratarse por separado y se llega al mismo resultado. Para esto se debe realizar una conveniente elección de las componente del vector auxiliar r .

■

Conclusión: En el caso ergódico la entropía generalizada extendida a un contexto abstracto a partir de la entropía de Tsallis (sec. 2.2), no aporta información sustancial con respecto a $h_1(T)$. La cantidad que aparece en la literatura física y que hemos denotado por H_q , corresponde a una partición particular (el generador canónico) dando lugar, consecuentemente, a una información igualmente particular.

La generalización en el sentido de Kolmogorov hacia un contexto más abstracto requiere la consideración de toda la información, o sea en lenguaje más matemático tomar todas las particiones del espacio fase por conjuntos medibles de la σ -álgebra de la estructura. De esta forma se tiene la situación expresada en el teorema 2.5.2.

Una familia de entropías más adecuada en el sentido de aportar nueva información se logra evitando el uso de particiones. Una posibilidad es utilizar un enfoque por integrales de correlación en un espacio metrizable, como es sugerido en [56]. En el apéndice I daremos una descripción con cierto detalle.

2.6 Cotas para la entropía generalizada

Esta sección, dividida en varias subsecciones, estará dedicada fundamentalmente a la obtención de cotas para la familia de entropías definida anteriormente. Estas cotas dependerán del parámetro, pero serán uniformes respecto a la medida. Algunas definiciones que presentaremos aquí son realmente básicas en la teoría, aún así creemos útil explicitarlas, principalmente para establecer la notación y la terminología.

2.6.1 Cubrimientos. Conjuntos generantes y separados

Veremos ahora a un sistema dinámico como un par (X, T) , donde X es un espacio topológico compacto y $T : X \rightarrow X$ un afunción continua. Sea $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento por abiertos de X , llamaremos $N(\mathcal{U})$ al número de conjuntos en un subcubrimiento finito de \mathcal{U} con la menor cardinalidad, o sea

$$N(\mathcal{U}) = \min \{k : (U_{\alpha_i})_{i=1,2,\dots,k} \text{ es un subcubrimiento finito de } \mathcal{U}.\}$$

A partir de \mathcal{U} obtenemos un nuevo cubrimiento:

$$\mathcal{U}^n = \{U_{\alpha_{i_0}} \cap T^{-1}(U_{\alpha_{i_1}}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(U_{\alpha_{i_{n-1}}}) : U_{\alpha_{i_j}} \in \mathcal{U}\}.$$

Definición 2.6.1.1: Para cualquier cubrimiento \mathcal{U} y $q \neq 1$ arbitrario, la cantidda de información es:

$$K_q(\mathcal{U}) = (q-1)^{-1} [1 - (N(\mathcal{U}))^{1-q}]. \quad (2.16)$$

Definimos entonces

$$k_q(T) = (q-1)^{-1} [1 - \exp(\tilde{k}_q(T))] \quad (2.17)$$

donde

$$\tilde{k}_q(T) = \sup \{\tilde{k}_q(\mathcal{U}, T) : \mathcal{U} \text{ es un cubrimiento de } X\} \quad (2.18)$$

y

$$\tilde{k}_q(\mathcal{U}, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{\log [1 + (1-q) K_q(\mathcal{U}^n)]\}. \quad (2.19)$$

Observación: para $q = 1$ tenemos $K_1(\mathcal{U}) = \lim_{q \rightarrow 1} K_q(\mathcal{U}) = \log N(\mathcal{U})$;

$k_1(\mathcal{U}, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{\log [K_1(\mathcal{U}^n)]\}$ y $k_1(T) = \sup \{k_1(\mathcal{U}, T) : \mathcal{U} \text{ es un cubrimientc}\}$ que es la entropía topológica de Adler, Konghein y Mc. Andrew[1].

Definición 2.6.1.a: Sea (X, d) metrizable compacto. Un subconjunto Y de X es (n, ε) -generante con respecto a T , si para cada $x \in X$, hay un elemento $y \in Y$ tal que $d_n(x, y) < \varepsilon$. Aquí $n \in \mathbf{Z}^+$, $\varepsilon > 0$ y d_n la conocida métrica

$$d_n(x, y) = \max \{d(T^i(x), T^i(y)) : i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Llamaremos $\alpha_{n,\varepsilon} = \min \{Card(Y) : Y \text{ es } (n, \varepsilon) - \text{generante respecto de } T\}$. Para $q \neq 1$, tenemos

Definición 2.6.1.2:

$$K'_{q;n,\varepsilon} = (q-1)^{-1} [1 - \alpha_{n,\varepsilon}^{1-q}]. \quad (2.20)$$

Luego anotamos:

$$k'_q(T) = (q-1)^{-1} [1 - \exp(\tilde{k}'_q(T))] \quad (2.21)$$

con

$$\widetilde{k}'_q(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widetilde{k}'_{q;\epsilon} \quad (2.22)$$

donde:

$$\widetilde{k}'_{q;\epsilon} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log \left[1 + (1 - q) K'_{q;n,\epsilon} \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Observación 1: Para $q = 1$ tomamos el límite en la misma forma que antes y se tiene la entropía clásica de Bowen $h'_1(T)$ [14].

Observación 2: Si X no fuera compacto, definimos para un subconjunto compacto K de X ,

$$\widetilde{k}'_{q;\epsilon;K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log \left[1 + (1 - q) K'_{q;n,\epsilon,K} \right] \right\}. \quad (2.24)$$

donde $K'_{q;n,\epsilon,K}$ se define de la misma manera que Ec. 2.20, pero usando conjuntos (n, ϵ) -generantes para K y luego estableciendo:

$$\widetilde{k}'_q(T) = \sup_{K \text{ compacto}} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widetilde{k}'_{q;\epsilon} \right\} \quad (2.25)$$

Una definición dual es dada usando lo que se llaman conjuntos (n, ϵ) -separados.

Definición 2.6.1.b: Un subconjunto Y de X es (n, ϵ) -separado respecto de T , si para cada $x, y \in Y$, con $x \neq y$, $d_n(x, y) > \epsilon$.

Ahora llamamos:

$$\beta_{n,\epsilon} = \max \{ \text{Card}(Y) : Y \text{ es } (n, \epsilon) \text{-separado respecto de } T \},$$

Para $q \neq 1$ obtenemos la definición dual a 2.6.1.2.

$$K'_{q;n,\epsilon} = (q - 1)^{-1} \left[1 - \beta_{n,\epsilon}^{1-q} \right]. \quad (2.26)$$

Luego ecuaciones duales a (2.20-2.23) y las observaciones 1 and 2 se obtienen cambiando $\alpha_{n,\epsilon}$ por $\beta_{n,\epsilon}$.

En este contexto de dinámicos topológicos los esquemas de Bernoulli se definen como en las entropías de correlación del apéndice I. El espacio fase es:

$$X = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} : x_i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}, \forall i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

La topología es la que tiene por base a conjuntos de la forma:

$$C(I) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} : x_i = s_i, i = l, \dots, m, l < m \right\}$$

la cual es inducida por la métrica

$$d_{BS}(x, y) = 2^{-|n|},$$

donde $n = \min \{ |i| : x_i \neq y_i \}$.

Según vimos, en el ejemplo 2.2.b, los esquemas de Bernoulli pueden ser vistos casos especiales de los llamados sistemas de Markov. En este caso el espacio fase es:

$$\Sigma_A = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} : x_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, A = (A_{ij}) \right. \\ \left. A_{ij} \in \{0, 1\} \text{ y } A_{x_i, x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

La topología es la misma que para el caso de Bernoulli. Recordemos del ejemplo 2.2.a, que a partir a cada sistema de Markov Σ_A se le asocian un vector de probabilidad p y una matriz estocástica P de modo que la medida de cada cilindro se define a partir del par (p, P) . Ahora podríamos calcular las entropías de correlación para sistemas de Markov, con respecto a la medida $\mu_{p,P}$, y en forma similar a lo hecho antes ver que estas entropías conciden con las obtenidas para el generador canónico \mathcal{G} .

2.6.2 Generadores

A lo largo de este trabajo hemos venido mencionado el término "generador canónico" para aludir a una partición especial del espacio fase de esquemas de Bernoulli o más generalmente de sistemas de Markov. Vamos a recordar aquí su definición general:

Definición 2.6.2.a: Sea $\mathcal{G} = \{G_0, G_1, \dots, G_{k-1}\}$ una partición del espacio X . Dada una transformación invertible $T : X \rightarrow X$, \mathcal{G} es un *generador* para T si para $x, y \in X$ ($x \neq y$), x e y tienen distintos nombres bi-infinitos respecto a (\mathcal{G}, T) . El nombre bi-infinito de un punto x respecto a (\mathcal{G}, T) es la cuerda $\{i_l\}_{l \in \mathbf{Z}}$ con $T^l x \in G_{i_l}$.

Definición 2.6.2.b: Esta es una definición que no hace uso de la estructura topológica. En el cocontexto de topológicos dinámicos se da la siguiente correspondiente definición:

Sea X un espacio métrico compacto, $T : X \rightarrow X$ un homeomorfismo. La partición $\mathcal{G} = \{G_0, G_1, \dots, G_{k-1}\}$ es un *generador* para T si para cualquier cuerda bi-infinita $\{i_l\}_{l \in \mathbf{Z}}$ con $i_l \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, el conjunto

$$\left\{ \bigcap_{l \in \mathbf{Z}} T^{-l} (\overline{G_{i_l}}) : G_{i_l} \in \mathcal{G} \right\}$$

contiene a lo sumo un punto de X (\overline{A} = clausura de A).

Recordemos que en el caso de esquemas de Bernoulli ya utilizamos, para el caso de medida, el generador $\mathcal{G} = \{G_i\}$, con $G_i = \{x : x_0 = i\}$ para $0 \leq i \leq k-1$. Esta partición efectivamente verifica la primera definición ya que el nombre bi-infinito de un elemento x respecto a (\mathcal{G}, T) es el mismo x . Para el caso de la cantidad k_q , introducida en la sección anterior, tenemos: $N(\mathcal{G}^n) = k^n$

y

$$\tilde{k}_q(\mathcal{G}, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \log [k^{n(1-q)}] \right\} = \log [k^{1-q}] \quad (2.27)$$

o sea:

$$k_q(\mathcal{G}, \sigma) = \frac{1 - k^{1-q}}{q - 1} \quad (2.28)$$

2.6.3 Resultados principales sobre las cotas

El primer resultado concierne al caso especial de esquemas de Bernoulli:

Proposición 2.6.3.1: Consideremos el sistema dinámico $BS(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$. Sea σ el desplazamiento de Bernoulli y μ una medida σ -invariante. Entonces:

$$h_q(\mu, \sigma) \leq \frac{1 - k^{1-q}}{q - 1} \text{ para } q > 1$$

Demostración: Inicialmente usamos un argumento similar al realizado en el ejemplo 2.4.5. Recordemos que si $\phi_q(x) = x^q$, $q > 1$, entonces:

$$\phi_q \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \phi_q(x_i), \text{ con } \lambda_i > 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = 1. \quad (2.29)$$

Para una partición $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ se tiene

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} \mu(A_i) \right)^q \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} (\mu(A_i))^q$$

(si $\lambda_i = 1/k$ y $x_i = \mu(A_i)$).

Luego $\left(\frac{1}{k}\right)^q \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} (\mu(A_i))^q$, en consecuencia:

$$H_q(\mu, \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{k-1} (\mu(A_i))^q \geq k^{1-q} \quad (2.30)$$

y finalmente:

$$H_q(\mu, \mathcal{A}^n) \geq (N(\mathcal{A}^n))^{1-q}. \quad (2.31)$$

Recordemos que en el caso específico del ejemplo 2.4.5 el número de elementos de la partición tenía crecimiento lineal.

Consideramos como antes el generador canónico

$$\mathcal{G} = \{G_i : i = 0, 1, \dots, k-1\}, G_i = \{x : x_0 = i\}.$$

luego para $q > 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_q(\mu, \sigma) &\geq \tilde{h}_q(\mu, \sigma, \mathcal{G}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \log [H_q(\mu, \mathcal{G}^n, \sigma)] \} \geq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ \log [N(\mathcal{G}^n, \sigma)]^{1-q} \}, \end{aligned}$$

por Ec. (2.27):

$$\tilde{k}_q(\mathcal{G}, \sigma) = \log(k^{1-q})$$

Consecuentemente si $q > 1$:

$$h_q(\mu, \sigma) \leq \frac{1 - k^{1-q}}{q - 1} \quad (2.32)$$

Los esquemas de Bernoulli son ergódicos, con lo que podríamos apelar al teorema 2.5.2 y por medio de la dependencia con la entropía clásica obtener una cota en función de la entropía topológica. Sin embargo aquí hemos dado una prueba alternativa, sin usar el teorema de Sinai. Por otra parte, el método usado servirá como base para el próximo teorema. ■

A continuación extendemos, a sistemas dinámicos más generales, la proposición anterior.

Teorema 2.6.3.2: Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $T : X \rightarrow X$ continua y μ una medida T -invariante. Luego:

$$h_q(\mu, T) \leq (q-1)^{-1} \left\{ 1 - \exp\left(\widetilde{k}'_q(T)\right) \right\} \text{ para } q > 1.$$

Demostración: Seguimos los lineamientos generales de Bowen[14]. Comenzamos considerando un cubrimiento de (X, d) , $\mathcal{U}_\varepsilon = \{U_0, U_1, \dots, U_{l-1}\}$, por conjuntos de diámetro menor que ε y tal que cada punto de X está en a lo sumo $s+1$ miembros de \mathcal{U}_ε , para algún entero positivo s .

Sea $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A_0, A_1, \dots, A_{l-1}\}$ una partición de X , con $\overline{A}_i \subset U_i$. Para cada $x \in X$, elegimos un entorno V_x de x , de manera que V_x tenga intersección no vacía con a lo sumo a $s+1$ miembros de \mathcal{A}_ε . Luego $(V_x)_x$ es un cubrimiento de (X, d) , y sea $\mathcal{V} = \{V_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,m}$ un subcubrimiento finito de $(V_x)_x$.

Sea δ un número de Lebesgue para \mathcal{V} y R_n un conjunto (n, δ) -generante de X para T . Luego si $z \in R_n$, existe un miembro $V_i(z)$ de \mathcal{V} , tal que $B_\delta(T^i(z)) \subset V_i(z)$, para $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Llamamos H_n al conjunto de cuerdas $(j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$, tal que para $z \in R_n$, $A_{j_i} \cap V_i(z) \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Ahora bien, si x tiene nombre $(j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$, respecto a $(\mathcal{A}_\varepsilon, T)$, y elegimos $z \in R_n$ de manera que $d(T^i(x), T^i(z)) \leq \delta$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, se tiene $T^i(x) \in V_i(z) \cap A_{j_i}$, y luego $(j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ pertenece a H_n . Sea

$$J_n = \{(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}) : \text{hay algún } x \text{ con nombre } (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})\},$$

en consecuencia $J_n \subset H_n$.

Por construcción $V_i(z)$ puede intersecar a lo sumo $s+1$ miembros de \mathcal{A}_ε , luego:

$$\text{Card}(H_n) \leq (s+1)^n \text{Card}(R_n)$$

y en particular para el conjunto (n, δ) -generante de mínima cardinalidad:

$$\text{Card}(J_n) \leq (s+1)^n \alpha_{n,\delta}$$

Teniendo en cuenta que

$$\text{Card}(J_n) = \text{Card}\{(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}) : \text{hay algún } x \text{ con nombre } (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})\},$$

se tiene que $\text{Card}(J_n) = N(\mathcal{A}_\varepsilon^n)$.

Luego procediendo forma análoga a la proposición anterior obtenemos:

$$H_q(\mu, \mathcal{A}_\varepsilon^n) \geq (\text{Card}(J_n))^{1-q}. \text{ De manera entonces que para } q > 1:$$

$$H_q(\mu, \mathcal{A}_\varepsilon^n) \geq (\alpha_{n,\delta})^{1-q} (s+1)^{n(1-q)}$$

y consecuentemente, con $\varepsilon \rightarrow 0$, y teniendo además en cuenta que

$$(1 - q) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_{n,\delta} \geq \widetilde{k}'_q(T), \text{ si } q > 1$$

:

$$\widetilde{h}_q(\mu, T) \geq \widetilde{k}'_q(T) + [\log(s + 1)](1 - q).$$

Para eliminar la constante sumada a $\widetilde{k}'_q(T)$, usamos en la expresión anterior T^m en lugar de T . En la parte de medida usamos la propiedad demostrada en la proposición 2.4.2. Para la parte topológica también es válida tal propiedad[14]. Luego la desigualdad anterior queda:

$$m\widetilde{h}_q(\mu, T) \geq m\widetilde{k}'_q(T) + C, \text{ o sea}$$

$$\widetilde{h}_q(\mu, T) \geq \widetilde{k}'_q(T) + \frac{C}{m}$$

y como m puede tomarse arbitrariamente grande:

$$h_q(\mu, T) \leq (q - 1)^{-1} \left\{ 1 - \exp\left(-\widetilde{k}'_q(T)\right) \right\} \quad \text{para } q > 1.$$

■

El teorema precedente generaliza el resultado de Bowen para el caso clásico[14].

La cota obtenida puede pensarse como una generalización de la entropía topológica en una de sus definiciones (la de Bowen). Adoptaremos el término q -entropía topológica para las familias k_q y k'_q , las cuales generalizan, en el mismo sentido que en 2.2, la entropía topológica en sus respectivas definiciones[1],[14] Puesto que k_q y k'_q dependen directamente del caso clásico. De las Ecs (2.16-2.19) y (2.20-2.23), resulta inmediatamente:

$$\begin{aligned} \widetilde{k}'_q(T) &= (1 - q) h'_1(T) \\ \widetilde{k}_q(T) &= (1 - q) h_1(T) \end{aligned}$$

con lo cual vemos que no hay aporte de nueva información esencial. Aquí $h'_1(T)$ y $h_1(T)$ son las entropías de Bowen y Adler, Konghein y Mc. Andrew (ver definiciones 2.6.1.a y 2.6.1.b). No obstante ésta es la cota que resulta naturalmente del enfoque variacional realizado.

Finalizamos con una relación entre la q -entropía en medida y la entropía clásica, considerando un valor especial del parámetro.

Proposición 2.6.3.3 : $h_2(\mu, T) \leq h_1(\mu, T) + 1.$

Demostración : Sea $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ una partición del espacio fase , y sea \mathcal{A}^n la partición por nombres asociada, definida en la forma usual. Tenemos:

$$\log \left(\sum \mu(A^n)^2 \right) \geq \sum \mu(A^n) \log \mu(A^n),$$

donde recordemos que la suma está extendida sobre todos los nombres de longitud n . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum \mu(A^n)^2 \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \mu(A^n) \log \mu(A^n)$$

y

$$\exp(\tilde{h}_2(\mu, T)) \geq -h_1.$$

En consecuencia:

$$h_2(\mu, T) \leq h_1(\mu, T) + 1 \quad (2.33)$$

Observación: En [47] D. Ruelle considera el caso $q = 2$, pero para la entropía de Renyi. ■

3. ENTROPÍAS POR ACCIONES DE GRUPOS

3.1 Introducción

De acuerdo a lo puntualizado en el capítulo 1, la entropía de Kolmogorov-Shannon puede generalizarse para dar lugar, además de las familias presentadas en el capítulo anterior, a otras entropías cuya novedad reside en el hecho de que los dinámicos están dados esencialmente por palabras en los generadores del grupo. En este sentido han sido tratadas ampliamente entropías topológicas y geométricas asociadas con acciones de grupos por Gromov, Ghys, Biś, Langevin y Walczak. [26], [11], [12], [24], [33].

En este capítulo consideraremos secuencias $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$, donde cada w_i es una palabra en i letras. Estas secuencias pueden interpretarse como caminos en el grafo de Cayley del grupo. Una entropía topológica asociada a tales secuencias, o más precisamente a clases de ellas, fué presentada por A. Biś [11] en dos definiciones equivalentes. Aquí introduciremos la contraparte "en medida" de la entropía de Biś.

3.2 Entropía medida de secuencias

Sea Γ a un grupo finitamente generado el cual actúa sobre un espacio de medida (X, μ) y sea S un conjunto de generadores de Γ . Consideramos una secuencia $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$, cada w_i es una palabra en i elementos de S ; o sea $w_0 = e$, $w_1 \in S$, ..., $w_i = s_1 s_2 \dots s_i$, con $s_1, s_2, \dots, s_i \in S$. Recordemos que el grafo de Cayley asociado al par (Γ, S) consiste en un grafo cuyos vértices son los elementos de Γ y hay una arista entre los vértices γ y γ' si y sólo si $\gamma\gamma'^{-1} \in S$. Podemos interpretar a las secuencias como caminos en el grafo de Cayley de la siguiente manera: si $\gamma = s_1 s_2 \dots s_n$ es una palabra en n generadores, le corresponde el camino uniendo los vértices $e, s_1, \dots, s_1 s_2 \dots s_n$. Luego una entropía medida podría asignarse a caminos en el mencionado grafo.

En el contexto de este capítulo un sistema dinámico se entenderá como un cuádruple $\mathcal{S} = (X, \Gamma, \Omega, \mu)$.

Para definir la entropía medida asociada un sistema dinámico comenzamos considerando una partición finita $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ de X ; si x es un elemento de X le asignamos una cuerda $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ en la siguiente forma: $x \in A_{\ell_0}$, $w_1 x \in A_{\ell_1}$, ..., $w_{n-1} x \in A_{\ell_{n-1}}$. Esta cuerda será llamada el " nombre " de x de longitud n respecto (Ω, \mathcal{A}) . Sea \mathcal{A}^n la partición obtenida de \mathcal{A} cuyos

miembros son conjuntos de puntos con el mismo nombre respecto (Ω, \mathcal{A}) . La "cantidad de información" $H(\mathcal{A})$ se define como:

$$H(\mathcal{A}, \mu) = - \sum_{i=0}^{k-1} \mu(A_i) \log \mu(A_i). \quad (3.1)$$

Cuando los dinámicos entran en juego se define la entropía de la partición como:

$$h(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n, \mu) \quad (3.2)$$

y la entropía asociada a la secuencia Ω y la medida:

$$h(\Omega, \mu) = \sup_{\mathcal{A}} h(\Omega, \mathcal{A}, \mu). \quad (3.3)$$

Observación 1: Aquí se puede asegurar la existencia del límite en la Eq(51), por un argumento similar de subaditividad al hecho en el caso clásico (c.f. observación debajo de la definición 2.3.1)

Observación 2: Aunque S no es escrito explícitamente en la estructura a la cual se asocia la entropía, debe entenderse que esta depende también del conjunto de generadores del grupo. Podría tomarse el ínfimo de las entropía obtenidas sobre todos los conjuntos finitos de generadores, como lo hace Friedland para el caso topológico.

Observación 3: La entropía clásica es obtenida en el siguiente situación particular: el grupo acción es el grupo cíclico generado por una transformación invertible $T : X \rightarrow X$, y $w_i = T^i$.

A continuación puntualizamos en que sentido entenderemos que una medida de probabilidad sobre X es invariante con respecto a la acción del grupo Γ . Esto generalizará la definición, clásica, de transformación que preserva la medida.

Definición 3.2.1: Una medida μ es *invariante por la acción del grupo* Γ (o simplemente es Γ -*invariante*) si $\mu(s^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo generador s y donde $s^{-1}(A) = \{x : sx \in A\}$.

Ahora establecemos en qué sentido dos sistemas dinámicos serán considerados equivalentes en el contexto de este capítulo.

Definición 3.2.2: Sean (Γ, S) , (Γ', S') acciones sobre los espacios de medida (X, μ) y (X', μ') respectivamente. Diremos (Γ', S') es un *factor* de (Γ, S) si hay una función medible suryectiva $\varphi : X \rightarrow X'$ tal que:

i) $\varphi(sx) = s' \varphi(x)$ para cada par de generadores s, s' de Γ y Γ' respectivamente.

ii) $\mu'(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$, para todo conjunto medible A .

Definición 3.2.3: Un sistema dinámico $\mathcal{S}' = (X', \Gamma', \Omega', \mu')$ es un *factor* del sistema dinámico $\mathcal{S} = (X, \Gamma, \Omega, \mu)$ si los elementos de las secuencias Ω' son palabras, en generadores de los correspondientes grupos estructura, que dan lugar una acción (Γ', S') que es un factor de la acción (Γ, S) , determinada por elementos de la secuencia Ω .

Proposición 3.2.4: Si $\mathcal{S}' = (X', \Gamma', \Omega', \mu')$ es un factor de $\mathcal{S} = (X, \Gamma, \Omega, \mu)$, entonces $h(\Omega, \mu) \geq h(\Omega', \mu')$.

Demostración: Sea $\mathcal{A}' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_{k-1}\}$ una partición por conjuntos medibles de X' . Si $\varphi : X \rightarrow X'$ es la función suryectiva de la definición, entonces sea $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(\mathcal{A}')$. Tomemos un punto y de X' , su nombre de longitud n , respecto a (Ω', \mathcal{A}') será una cuerda $\ell' = (\ell'_0, \ell'_1, \dots, \ell'_{n-1})$, de modo que sea $w'_i y \in A'_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Si x es punto de X tal que $y = \varphi(x)$ y con nombre $\ell = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ con respecto a (Ω, \mathcal{A}) se tendrá: $\varphi(w_i x) = \varphi(s_1 s_2 \dots s_i x) = s'_1 s'_2 \dots s'_i \varphi(x)$, ($s'_1, s'_2, \dots, s'_i \in S'$, el conjunto de generadores de Γ'). De lo anterior se deduce que si \mathcal{A}^n y $(\mathcal{A}')^n$ son las particiones por nombres de longitud n , es válido $\mathcal{A}^n = \varphi^{-1}((\mathcal{A}')^n)$. Luego:

$$\mu'((\mathcal{A}')^n) = \mu(\varphi^{-1}((\mathcal{A}')^n)) = \mu(\mathcal{A}^n).$$

y

$$h(\Omega', \mu', \mathcal{A}') = h(\Omega, \mu, \varphi^{-1}(\mathcal{A}'))$$

Tenemos entonces:

$$h(\Omega', \mu') = \sup_{\mathcal{A}'} \{h(\Omega', \mu', \mathcal{A}')\} = \sup_{\mathcal{A}'} \{h(\Omega, \mu, \varphi^{-1}(\mathcal{A}'))\} \leq h(\Omega, \mu).$$

■

Analogamente a lo hecho para la generalización del cap. 2, diremos que dos sistemas dinámicos \mathcal{S} y \mathcal{S}' son *débilmente isomorfos* si \mathcal{S} es un factor de \mathcal{S}' y \mathcal{S}' es un factor de \mathcal{S} . También como antes se tendrá una igualdad en la proposición anterior. Dos sistemas serán *isomorfos* si las correspondientes acciones son conjugadas por una biyección medible.

3.3 Cotas

Comenzamos con la definición de entropía condicional, la cual se dará en una forma bastante similar a la de Kolmogorov-Shannon. Sea $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ y $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots, B_{l-1}\}$ dos particiones finitas del espacio fase X , la entropía de \mathcal{A} condicionada a \mathcal{B} , la cual será denotada por $H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$ es definida como:

$$H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = H(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - H(\mathcal{B}), \text{ donde}$$

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j : A_i \in \mathcal{A} \text{ y } B_j \in \mathcal{B}\}$$

Lema 3.3.1: $h(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \leq h(\Omega, \mathcal{B}, \mu) + H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$

Demostración: Como H es análoga al caso clásico, se tiene la siguiente desigualdad [28]

$$H(\mathcal{A}^n) \leq H(\mathcal{A}^n \vee \mathcal{B}^n) = H(\mathcal{B}^n) + H(\mathcal{A}^n | \mathcal{B}^n).$$

Además

$$H(\mathcal{A}^n | \mathcal{B}^n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} H(w_i^{-1}(\mathcal{A}) | w_i^{-1}(\mathcal{B})) = nH(\mathcal{A} | \mathcal{B}); \text{ entonces}$$

$H(\mathcal{A}^n) \leq H(\mathcal{A}^n | \mathcal{B}^n) + H(\mathcal{B}^n) \leq H(\mathcal{B}^n) + nH(\mathcal{A} | \mathcal{B})$, y pasando al $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ obtenemos: $h(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \leq h(\Omega, \mathcal{B}, \mu) + H(\mathcal{A} | \mathcal{B})$. ■

A continuación trataremos de establecer un "medio" principio variacional entre la entropía medida y la entropía topológica definida en [11]. Esta última está asociada a un sistema dinámico el cual se entiende en este caso como un triple (X, Γ, Ω) , donde el espacio fase X es un espacio métrico compacto. Según Biś, dos secuencias $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$ y $\Omega' = (w'_i)_{i=0}^{\infty}$ son equivalentes si existe una constante $C > 0$, tal que para cada x, y en el espacio fase se cumple:

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\max \{d(w_i x, w_i y) : i = 0, 1, \dots, n-1\}}{\max \{d(w'_i x, w'_i y) : i = 0, 1, \dots, n-1\}} \leq C.$$

Las clases de equivalencia para esta relación son llamadas "direcciones topológicas". La siguiente métrica en X es considerada para cualquier secuencia que representa una dirección topológica:

$$d_n^\Omega(x, y) = \max \{d(w_i x, w_i y) : i = 0, 1, \dots, n-1\}$$

Definición 3.3.a: Un conjunto $E \subset X$ es (n, ε) -separado si para $x, y \in E$ ($x \neq y$) $d_n^\Omega(x, y) > \varepsilon$. Llamamos

$$\beta_{n, \varepsilon} = \max \{\text{card} E : E \text{ es } (n, \varepsilon) \text{-separado}\},$$

y tenemos la siguiente:

Definición 3.3.b: La entropía topológica de Biś [11], para secuencias Ω que representan la misma dirección, es definida por:

$$h(\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_{n, \varepsilon} \quad (3.4)$$

En su artículo, Biś prueba que la definición de esta entropía topológica no depende del representante en la clase de direcciones.

Una definición dual está dada por medio de conjuntos "generantes": un conjunto $E \subset X$ es (n, ε) -generante si para cada $x \in X$ existe un $y \in E$, tal que $d_n^\Omega(x, y) \leq \varepsilon$. Si

$$\alpha_{n, \varepsilon} = \min \{\text{card} E : E \text{ es } (n, \varepsilon) \text{-generante}\}$$

entonces, se puede definir equivalentemente a la entropía topológica de secuencias:

$$h(\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_{n, \varepsilon}. \quad (3.5)$$

Otra definición equivalente, como en la entropía topológica clásica, se tiene usando cubrimientos de X : sea $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un cubrimiento por abiertos de X , llamamos:

$$N(\mathcal{U}) = \min \{\text{card}(U_{\alpha_i}) : (U_{\alpha_i}) \text{ es un subcubrimiento finito de } \mathcal{U}\}$$

.Sea :

$$\mathcal{U}^n = \{U_{\alpha_{j_0}} \cap w_1^{-1}(U_{\alpha_{j_1}}) \cap \dots \cap w_{n-1}^{-1}(U_{\alpha_{j_{n-1}}}) : U_{\alpha_{j_i}} \in \mathcal{U}\},$$

Definición 3.3.c: La entropía para una secuencia Ω y un cubrimiento \mathcal{U} se define como:

$$h(\Omega, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{U}^n). \quad (3.6)$$

y la entropía topológica es:

$$h(\Omega) = \sup_{\mathcal{U}} h(\Omega, \mathcal{U}) \quad (3.7)$$

Teorema 3.3.2: Sea el sistema dinámico (X, Γ, Ω) con X un espacio métrico compacto. Para cada medida μ , Γ -invariante, y para cualquier secuencia $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$, que representa una dirección topológica, la entropía medida asociada al sistema dinámico (X, Γ, Ω, μ) está acotada superiormente por la entropía topológica asociada al sistema dinámico (X, Γ, Ω) .

Demostración: Consideremos una partición finita $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de X y medida μ . Una medida μ definida sobre los borelianos de un espacio topológico compacto es *regular*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier boreliano B , existen un compacto $K \subset X$ y un abierto $U \subset X$ tal que $K \subset B \subset U$ y $\mu(U - K) < \varepsilon$. Si X es metrizable entonces toda medida de Borel de probabilidad es regular. Este es un resultado standard (ver p.ej. [46]).

Como aquí estamos considerando un espacio metrizable compacto, la medida μ será regular. En particular para ε suficientemente pequeño, pueden elegirse conjuntos compactos B_1, B_2, \dots, B_k de modo que $A_j \supset B_j$ y $\mu(A_j - B_j) < \varepsilon$, $j = 1, 2, \dots, k$. Sea $B_0 = X - \bigcup_{j=1}^k B_j$. Luego $\mathcal{C} = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_k\}$ es una partición de X además $\mu(B_0) < k\varepsilon$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los conjuntos tienen medida estrictamente positiva, si por ej. se tuviera que en una partición $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, ocurre que $\mu(A_i) > 0$, $1 \leq i < r$, y $\mu(A_i) = 0$, $r < i \leq k$, entonces se considera la partición

$$\{A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_r \cup A_{r+1} \cup \dots \cup A_k\},$$

esto no altera los cálculos que se realizarán más abajo.

$$\begin{aligned} H(\mathcal{A} | \mathcal{C}) &= H(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) - H(\mathcal{C}) = - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \log \left(\frac{\mu(A_j \cap B_i) \mu(B_i)}{\mu(B_i)} \right) + \\ &\sum_{i=0}^{k-1} \mu(B_i) \log \mu(B_i) = \\ &- \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \log \left(\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \right) - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \log \mu(B_i) + \\ &\sum_{i=0}^k \mu(B_i) \log \mu(B_i) = \\ &- \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \log \left(\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \right) - \sum_{i=0}^k \log \mu(B_i) \left(\sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \right) + \\ &\sum_{i=0}^k \mu(B_i) \log \mu(B_i) = - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(A_j \cap B_i) \log \left(\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \right). \end{aligned}$$

Ahora escribimos:

$$H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = - \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^k \mu(B_i) \frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \log \left(\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} \right),$$

para $i \neq 0$ se tiene $\frac{\mu(A_j \cap B_i)}{\mu(B_i)} = \delta_{i,j}$, o sea que la expresión anterior se reduce a:

$$H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) = -\mu(B_0) \sum_{j=1}^k \frac{\mu(A_j \cap B_0)}{\mu(B_0)} \log \mu \left(\frac{A_j \cap B_0}{\mu(B_0)} \right).$$

Si $\phi(x) = -x \log x$, entonces $\sum_{j=1}^k \phi \left(\frac{\mu(A_j \cap B_0)}{\mu(B_0)} \right) \leq \log k$, además como $\mu(B_0) < k\varepsilon$, tenemos que $H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) < 1$ si $\varepsilon < \frac{1}{\log k}$

Sea $\mathcal{U} = \{B_0 \cup B_1, \dots, B_0 \cup B_k\}$ un cubrimiento de X y sea μ Γ -invariante; ahora:

$$H(\Omega, \mathcal{B}^n, \mu) \leq \log N(\mathcal{B}^n) \leq \log(N(\mathcal{U}^n) \times 2^n).$$

En consecuencia, por el lema 3.3.2:

$$h(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \leq h(\Omega, \mathcal{B}, \mu) + H(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \leq h(\Omega) + \log 2 + 1.$$

Tenemos entonces:

$h(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \leq h(\Omega) + C$, el cual sería, excepto por la constante, el resultado deseado.

Denotamos por $\Omega^{(m)}$ a la secuencia $(w_0, w_m, w_{2m}, \dots)$, con $m > 1$; afirmamos que:

$$h(\Omega^{(m)}, \mu) \geq mh(\Omega, \mu) \text{ y } h(\Omega^{(m)}) \leq mh(\Omega).$$

Para probar la desigualdad correspondiente a la entropía medida consideramos una partición finita de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ y denotamos por $(\mathcal{A}^m)^n$ a la partición por nombres de longitud n respecto $(\mathcal{A}^m, \Omega^{(m)})$ y por \mathcal{A}^{mn} a la partición por nombres de longitud mn respecto (\mathcal{A}, Ω) ; luego tendremos:

$$h(\Omega^{(m)}, \mu) \geq h(\mathcal{A}^m, \Omega^{(m)}, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H((\mathcal{A}^m)^n, \mu) =$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{mn} H(\mathcal{A}^{mn}, \mu) = mh(\mathcal{A}, \Omega, \mu)$, y el resultado sigue tomado el supremo sobre particiones finitas.

Para la entropía topológica: Sea E un conjunto (mn, ε) -generante respecto Ω de cardinalidad mínima, o sea que si $x \in E$ existe un $y \in X$ tal que $d(w_i x, w_i y) \leq \varepsilon$, $i = 0, 1, \dots, mn - 1$. Este conjunto es también (n, ε) -generante respecto $\Omega^{(m)}$, luego $\alpha_{n, \varepsilon, \Omega^{(m)}} \leq \alpha_{mn, \varepsilon, \Omega}$ y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_{n, \varepsilon, \Omega^{(m)}} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{kn} \log \alpha_{mn, \varepsilon, \Omega}.$$

Consecuentemente $h(\Omega^{(m)}) \leq mh(\Omega)$.

Ahora:

$$mh(\Omega, \mu) \leq h(\Omega^{(m)}, \mu) \leq mh(\Omega) + C \text{ y entonces } h(\Omega, \mu) \leq h(\Omega) + C/m.$$

Puesto que m puede ser tomado arbitrariamente grande tenemos: $h(\Omega, \mu) \leq h(\Omega)$.

Finalizamos esta sección buscando una relación con la entropía clásica: consideramos una transformación $T : X \rightarrow X$, con X un espacio de medida y un grupo acción Γ generado por $S = \{T, T^2, \dots, T^k\}$ donde k es un entero positivo fijo. Tomamos ahora una sucesión creciente de enteros positivos $\{m_i\}$ tal que $k = \sup \{m_{i+1} - m_i\}$ y definimos la secuencia $\Omega = (w_i)$ por $w_i = T^{m_i}$. Sea $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{l-1}\}$ una partición finita de X , la partición por nombres de

longitud n respecto (Ω, \mathcal{A}) involucra las órbitas $x, w_1x, \dots, w_{n-1}x$, mientras que la partición por nombres de longitud kn respecto (\mathcal{A}, T) involucra a su vez las órbitas $x, Tx, \dots, T^{kn-1}x$. Denotamos por H^* y h^* la cantidad de información y la entropía clásica de la función T respectivamente.

Si $(\mathcal{A}^k)^n$ es la partición por nombres de longitud n respecto (\mathcal{A}^k, T^k) tenemos

$$h^*(\mathcal{A}^k, T^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H^*((\mathcal{A}^k)^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{kn} H^*(\mathcal{A}^{kn}) = kh^*(\mathcal{A}, T).$$

Por la elección de la secuencia (w_i) , se tiene que las órbitas para obtener una partición por nombres respecto (Ω, \mathcal{A}) es una subsecuencia de las órbitas respecto (\mathcal{A}, T) . Luego

$$h(\Omega, \mathcal{A}) \leq h^*(\mathcal{A}^k, T^k) = kh^*(\mathcal{A}, T) \quad (3.8)$$

o sea:

$$h(\Omega, \mu) \leq kh^*(T, \mu) \quad (3.9)$$

3.4 Otra clase de entropía asociada a acciones de grupos

Presentamos a continuación una clase algo distinta de entropía medida relacionada con la acción de grupos. Una entropía de similares características fue también introducida en [6]. Consideramos la misma estructura, o sea un espacio de medida (X, μ) y un grupo finitamente generado Γ actuando sobre éste. Denotamos por $B(n)$ y $S(n)$ la bola y la esfera de radio n respectivamente, en la métrica de palabras de Γ (ver apéndice). O sea:

$$B(n) = \{\gamma \in \Gamma : \ell(\gamma) \leq n\}$$

$$S(n) = \{\gamma \in \Gamma : \ell(\gamma) = n\}.$$

Si $x \in X$ entonces hay $\text{card } S(1)$ órbitas originadas por la acción de cada generador sobre ese punto. A partir de cada una de estas órbitas se puede comenzar nuevamente y repitiendo el proceso se determinan nuevas $\text{card } S(1)$ órbitas, etc. Ahora si \mathcal{A} es una partición finita de X cada una de esas "ramificaciones" registra una secuencia de índices (los nombres, como antes), y de este modo cada punto tiene asociados distintos nombres de acuerdo a la secuencia elegida. Identificamos los puntos con los mismos nombres de longitud n para cada camino considerado formando así la partición \mathcal{A}^n , y el trabajo sigue como antes:

$$H(\mathcal{A}, \mu) = - \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \log \mu(A_i) \quad (3.10)$$

$$h(\Gamma, \mathcal{A}, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}^n, \mu) \quad (3.11)$$

Definición 3.4.1: La entropía medida asociada a la acción del grupo Γ se define por:

$$h(\Gamma, \mu) = \sup_{\mathcal{A}} h(\Gamma, \mathcal{A}, \mu). \quad (3.12)$$

La versión topológica, debida a Ghys-Langevin-Walczak (abreviada como entropía h_{GLW}) fue presentada en ref.[24] para pseudo-grupos de homeomorfismos en un espacio métrico. Recordemos que en el sentido de éste artículo, E es (n, ϵ) -separado si para $x, y \in E$ ($x \neq y$) $d(\gamma x, \gamma y) > \epsilon$ para algún $\gamma \in B(n)$ y si $h(\Gamma, \epsilon)$ denota promedio de crecimiento de conjuntos (n, ϵ) -separados de máxima cardinalidad, entonces

Definición 3.4.a: La entropía- GLW se define como:

$$h_{GLW}(\Gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\Gamma, \epsilon)$$

Notemos que si $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$ es alguna secuencia de palabras registrada por las órbitas, entonces

$$h(\Omega, \mu) \geq h(\Gamma, \mu) \quad (3.13)$$

y en consecuencia:

$$h(\Gamma, \mu) \leq h(\Omega, \mu) \leq h(\Omega) \leq h_{GLW}(\Gamma)$$

la última igualdad fue observada en [11]; o sea que esta versión medida está acotada además por su versión topológica (la de Ghys-Langevin-Walczak).

Definición 3.4.2: El grupo Γ tiene una *acción expansiva* sobre X si existe una constante $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ ($x \neq y$) hay un entero positivo n con $d(\gamma x, \gamma y) > \delta$ para todo $\gamma \in B(n)$.

Sea $P_n(\Gamma) = \{x : \gamma x = x, \text{ para todo } \gamma \in S(n)\}$

Proposición 3.4.3: $h_{GLW}(\Gamma) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{card}P_n(\Gamma))$ si el grupo tiene una acción expansiva.

Demostración: Sea $x, y \in P_n(\Gamma)$ ($x \neq y$), o sea que $\gamma_n x = x$ y $\gamma_n y = y$, para $\gamma_n \in S(n)$. Si $d(\gamma_i x, \gamma_i y) \leq \delta$ para $\gamma_i \in S(i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ entonces $d(\gamma_i x, \gamma_i y) \leq \delta$ para todo natural i y en consecuencia $x = y$, debido a la expansividad. Luego $P_n(\Gamma)$ es un conjunto (n, δ) -separado en el sentido de [24], y en consecuencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\text{card}P_n(\Gamma)) \leq h_{GLW}(\Gamma, \delta) \leq h_{GLW}(\Gamma)$$

La segunda desigualdad se debe a que si $\epsilon_1 < \epsilon_2$ entonces $\beta_{n, \epsilon_1} > \beta_{n, \epsilon_2}$, donde $\beta_{n, \epsilon} = \text{máx} \{\text{card}E : E \text{ es } (n, \epsilon)\text{-separado}\}$. ■

4. ENTROPÍAS FUNCIONALES

4.1 Introducción

El concepto de entropía puede extenderse también en otra dirección: considerar ciertas "particiones de la unidad" en lugar de particiones por conjuntos. De esta forma los dinámicos estarán dados por acciones sobre espacios más generales. Trabajos en esta línea son los de las refs. [25],[33], en donde se consideran álgebras de funciones. Una presentación con enfoque más físico es debida a Alicki, Fannes y otros autores[3],[4],[5]. Esta última fue introducida en un contexto más general de C^* -álgebras o álgebras de von-Neumann, es decir un contexto más amplio que las citadas en primer término.

Recordemos que una C^* -álgebra es un espacio de Banach estructurado con una multiplicación y una conjugación que verifica ciertas propiedades con respecto a la norma dada por la estructura de espacio de Banach. Para más información se puede consultar, por ejemplo [10]

Como ya se ha comentado la entropía de Kolmogorov ha sido tradicionalmente considerada como un parámetro de orden sumamente adecuado para caracterizar el comportamiento caótico en sistemas dinámicos clásicos. Con el objeto de obtener parámetros de orden análogos para describir "caos cuántico", se han hecho diversos intentos para extender la entropía de Kolmogorov a sistemas cuánticos (esencialmente álgebras de operadores). Para hacer más fácil la comparación con sistemas clásicos la mayor parte de los trabajos usan el lenguaje más general de álgebra de observables en lugar del espacio de Hilbert usual de la Mecánica Cuántica. Dos extensiones importantes de la entropía clásica al caso no-conmutativo son debidos a Connes, Narnhofer y Thirring (entropía-*CNT*)[19], por un lado, y a Alicki, Fannes (entropía-*AF*). El punto de partida de estas dos generalizaciones es conceptualmente diferente. La primera trata de relacionar, tanto como sea posible, el caso no-conmutativo con el caso abeliano. La entropía-*AF*, por su parte tiene una definición más directa, la cual está basada principalmente en la entropía cuántica de von-Neumann. Involucra particiones de la unidad por elementos del álgebra y una matriz densidad asociada a tales particiones.

El objetivo fundamental de este capítulo es extender a secuencias de palabras la entropía de Alicki-Fannes. Si bien trataremos particularmente el llamado caso conmutativo, en el que se consideran dinámicos sobre espacios de funciones (entropía funcional), en la siguiente sección presentaremos la estructura y definición en forma general, esto es para C^* -álgebras uniales arbitrarias.

Los dos resultados principales de este capítulo son que la entropía funcional, que introduciremos, está acotada superiormente por la entropía de Bis y que esta última coincide con una entropía topológica funcional.

4.2 Definiciones previas y notación

En los llamados C^* -sistemas dinámicos se considera la siguiente estructura: una C^* -álgebra unital \mathcal{U} , un funcional $\omega : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, que se llama un "estado" sobre \mathcal{U} y un grupo finitamente generado Γ que actúa sobre el álgebra. Los estados satisfacen la siguiente condición de invarianza $\omega(sA) = \omega(A)$, para cualquier generador s de Γ y $A \in \mathcal{U}$. Esta condición generaliza la del capítulo anterior para medidas. Una *partición de la unidad* en \mathcal{U} es un conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{ A_0, A_1, \dots, A_{k-1} : \sum_{i=0}^{k-1} A_i^* A_i = \mathbf{1} \right\}.$$

Si $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ es una partición de la unidad en \mathcal{U} y ω es un estado, la *matriz densidad* $\rho = \rho(\mathcal{P}, \omega)$ es aquella con coeficientes $\rho_{i,j} = \omega(A_j^* A_i)$.

Ejemplo 4.2.a: Un C^* -sistema dinámico, que corresponde a un caso no-conmutativo, típico en Mecánica Cuántica de partículas, es el siguiente: sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable, $B(\mathcal{H})$ denota el espacio de operadores acotados lineales en \mathcal{H} . Los dinámicos están dados a partir de la acción del grupo sobre \mathcal{H} , mientras que los estados quedan determinados por matrices densidad ρ consideradas como elementos de $B(\mathcal{H})$. Concretamente: $\omega(X) = \langle X \rangle = \text{Tr}(\rho X)$, donde $X \in B(\mathcal{H})$ y la matriz densidad satisface: $\rho \geq 0$, $\text{Tr}(\rho) = 1$. Un estado es *puro* si no admite una descomposición convexa no trivial.

La generalización de la entropía clásica de Kolmogorov al caso no-conmutativo, fue realizada primeramente por Connes y Størmer[18], para automorfismos de álgebras de von-Neumann y con estados traciales. Más adelante Connes, Narnhofer y Thirring[19] realizaron la extensión ya mencionada (entropía-CNT) para endomorfismos de C^* -álgebras y cualquier clase de estados.

El que llamaremos caso conmutativo, corresponde a la siguiente estructura particular: $\mathcal{U} = L^\infty(X, \mu)$ (la cual es realmente un álgebra de von-Neumann), el estado puede darse por la representación $\omega_\mu(f) = \int_X f d\mu$. Consideremos un sistema dinámico (X, Γ, Ω, μ) como en el capítulo anterior, donde recordemos que $\Omega = (w_i)_{i=0}^\infty$ es una secuencia de palabras en los generadores del grupo. A partir de la acción del grupo sobre X se induce, para cada generador s , la transformación dinámica $\Phi_s : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, dada por

$$\Phi_s[f](x) = f(sx).$$

O sea que el caso conmutativo se deriva de un sistema dinámico clásico, de allí que este caso también pueda recibir el nombre de clásico.

Las transformaciones anteriores se extienden naturalmente a cada palabra en Ω :

$$\Phi_i[f](x) \equiv \Phi_{w_i}[f](x) = \Phi_{s_1 s_2 \dots s_i}[f](x) = f(s_1 s_2 \dots s_i x). \quad (4.1)$$

De esta manera que determinados los dinámicos en \mathcal{U} .

Una partición (finita) de la unidad será entonces un conjunto de "observables"

$$\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_{k-1} : f_i \in \mathcal{U}\} \text{ tal que } \sum_{i=0}^{k-1} f_i^* f_i = \mathbf{1},$$

con * la conjugación compleja usual.

A continuación presentamos la generalización de la entropía de Alicki-Fannes para secuencias de palabras. Comenzaremos por el caso conmutativo:

Si $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_{k-1} : f_i \in \mathcal{U}\}$ es una partición de la unidad se define la "cantidad de información" como:

$$H[\mathcal{F}] = \text{Tr}(\beta(\rho_{\mathcal{F}})) \quad (4.2)$$

($\beta(x) = -x \log x$). La matriz densidad $\rho_{\mathcal{F}}$, asociada a la partición \mathcal{F} tiene coeficientes $\rho_{i,j} = \mu(\overline{f_j} f_i) = \int \overline{f_j} f_i d\mu$.

El n -refinamiento \mathcal{F}^n de \mathcal{F} está dado por medio de los dinámicos como:

$$\mathcal{F}^n = \{\Phi_0[f_{j_0}] \Phi_1[f_{j_1}] \dots \Phi_{n-1}[f_{j_{n-1}}] : f_{j_i} \in \mathcal{F}\} \quad (4.3)$$

La entropía asociada a \mathcal{F} , Ω , μ se define como:

$$h[\mathcal{F}, \Omega, \mu] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H[\mathcal{F}^n] \quad (4.4)$$

Para asegurar la existencia del límite, se procede en forma análoga a como se hace en Teoría Ergódica clásica (observación debajo del definición 2.3.1). Otras propiedades que se usarán en el teorema 4.3.1 están demostradas en [3].

Definición 4.2.1: La *entropía funcional* asociada a la secuencia Ω y a la medida μ se define como:

$$h_{fnc}[\Omega, \mu] = \sup_{\mathcal{F}} h[\mathcal{F}, \Omega, \mu] \quad (4.5)$$

Debe observarse que la reducción al caso de la definición de entropía por particiones conjuntistas se tiene considerando como particiones de la unidad funciones características. El término entropía funcional se usará sólo en el caso conmutativo.

Para el caso no conmutativo la definición se da en forma completamente análoga:

Si $\mathcal{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ es una partición de la unidad en un álgebra unital \mathcal{U} y ω es un estado, la cantidad de información se define como en Ec. 4.2: $H[\mathcal{P}] = \text{Tr}(\beta(\rho))$. Recordemos que la matriz densidad es $\rho_{i,j} = \omega(A_j^* A_i)$. El n -refinamiento de la partición \mathcal{P} está dado por

$$\mathcal{P}^n = \{A_{j_0} (w_1 A_{j_1}) \dots (w_{n-1} A_{j_{n-1}}) : A_{j_i} \in \mathcal{P}\}.$$

Luego se define en forma similar al caso abeliano la entropía $h[\Omega, \mu]$.

Para el caso especial del sistema usado en Mecánica Cuántica de partículas, comentado en el ejemplo 4.2.a, la entropía asociada podría llamarse *entropía cuántica*.

De aquí en más nos restringiremos al caso conmutativo. Recordemos ahora la definición de entropía condicional para particiones de la unidad finitas \mathcal{F} y \mathcal{G} denotada como en el capítulo 3 por $H[\mathcal{F} | \mathcal{G}]$, su definición es:

$$H[\mathcal{F} | \mathcal{G}] = H[\mathcal{F} \vee \mathcal{G}] - H[\mathcal{G}], \quad (4.6)$$

donde $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \{f_i g_j : f_i \in \mathcal{F} \text{ y } g_j \in \mathcal{G}\}$. Nuevamente se nota que considerando funciones características de conjuntos de una partición se obtiene la definición de entropía condicional escrita en el capítulo anterior.

A continuación listamos propiedades que aparecen en [3] y que vamos a necesitar para la demostración del primero de los teoremas de la próxima sección:

- i) $H[\mathcal{F} \vee \mathcal{G}] \leq H[\mathcal{F}] + H[\mathcal{G}]$
- ii) $H[\mathcal{F}] \leq H[\mathcal{F} \vee \mathcal{G}]$
- iii) $H[\mathcal{F} \vee \mathcal{G} | \mathcal{K}] \leq H[\mathcal{F} | \mathcal{K}] + H[\mathcal{G} | \mathcal{K}]$

4.3 Resultados

Denotamos por $h_{top}(\Omega)$ a la entropía de Bís definida en el capítulo 3.

Teorema 4.3.1: Sea X un espacio métrico compacto, Γ un grupo finitamente generado que actúa sobre X y μ una medida Γ -invariante definida sobre los borelianos de X . Para cualquier secuencia de palabras en los generadores de del grupo $\Omega = (w_i)_{i=0}^{\infty}$, la entropía funcional $h_{fnc}[\Omega, \mu]$ está acotada superiormente por $h_{top}(\Omega)$.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\}$ una partición de la unidad por observables del sistema, escribimos:

$$\Phi_i[\mathcal{F}] = \{\Phi_i[f_0], \dots, \Phi_i[f_{k-1}]\},$$

donde $\Phi_i[f](x) = f(w_i x) = \mathcal{L}_i[f](x)$. Tenemos usando las propiedades listadas arriba:

$$\begin{aligned} H[\mathcal{F}^n] &\leq H[\mathcal{F}^n \vee \mathcal{G}^n] = H[\mathcal{G}^n] + H[\mathcal{F}^n | \mathcal{G}^n] \leq H[\mathcal{G}^n] + \\ &\sum_{i=0}^{n-1} H[\Phi_i[\mathcal{F}] | \Phi_i[\mathcal{G}]] = H[\mathcal{G}^n] + nH[\mathcal{F} | \mathcal{G}] \end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad surge de la propiedad ii), la igualdad siguiente es la definición de entropía condicional, la próxima desigualdad se deduce de iii) y la última igualdad de la definición de entropía.

Si en particular $\mathcal{G} = \mathcal{I} = \{I_{A_0}, \dots, I_{A_{k-1}}\}$ donde $\{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ es una partición por subconjuntos de X e I_A la función característica de A , tenemos:

$$H[\mathcal{F}^n] \leq H[\mathcal{I}^n] + H[\mathcal{F}^n | \mathcal{I}^n] = H[\mathcal{I}^n] + nH[\mathcal{F} | \mathcal{I}].$$

Para acotar el término $H[\mathcal{F} | \mathcal{I}]$ es conveniente reescribir la matriz densidad por medio una representación integral, esto es la matriz será la asociada al operador cuyo nucleo es

$$K_{\mathcal{F}}(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x) \overline{f_j(y)} \text{ para la partición de la unidad } \mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\}.$$

Consideramos entonces el operador integral con núcleo $K_{\mathcal{F}}$:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \int_X K_{\mathcal{F}}(x, y) d\mu. \quad (4.7)$$

El nucleo $K_{\mathcal{F}}$ es una función medible de X a las proyecciones ortogonales unidimensionales en el espacio de matrices de $k \times k$.

Vamos a anotar $S(\rho_{\mathcal{F}}) = \text{Tr}(\beta(\rho_{\mathcal{F}})) = H[\mathcal{F}]$, vale la siguiente desigualdad[59]:
 $S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \leq \sum_i \beta(\lambda_i) + \sum_i \lambda_i S(\rho_i)$, donde ρ_i son matrices densidad y $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$.

Entonces en nuestro caso:

$$H[\mathcal{F} | \mathcal{I}] = S(\rho_{\mathcal{F}} \vee \rho_{\mathcal{I}}) - S(\rho_{\mathcal{I}}) = S\left(\sum_i \mu_i \int_{A_i} \frac{1}{\mu_i} K_{\mathcal{F}} \vee \rho_{\mathcal{I}} d\mu\right) - \sum_i \beta(\mu_i), \text{ con } \mu_i = \mu(A_i).$$

Luego la expresión anterior está acotada por: $\sum_i \mu_i S\left(\int_{A_i} \frac{1}{\mu_i} K_{\mathcal{F}} \vee \rho_{\mathcal{I}} d\mu\right)$.
 Puede elegirse una adecuada partición $\{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ de manera tal que sobre cada A_i el núcleo K se mantenga suficientemente próximo a una proyección unidimensional en un subespacio de dimensión menor o igual que k . Luego por la continuidad de S como función sobre la matrices de $k \times k$ la expresión $S\left(\int_{A_i} \frac{1}{\mu_i} K_{\mathcal{F}} \vee \rho_{\mathcal{I}} d\mu\right)$ puede acotarse por un número ε suficientemente pequeño, independientemente del miembro de la partición considerado.

Sea $\Omega^{(m)} = (w_0, w_m, w_{2m}, \dots)$, $m > 1$; afirmamos que

$$h_{fnc}[\Omega^{(m)}, \mu] \geq m h_{fnc}[\Omega, \mu].$$

Llamamos $(\mathcal{F}^n)^m$ al m -refinamiento de \mathcal{F}^n

$$h(\Omega^{(m)}, \mu) \geq h(\mathcal{F}^m, \Omega^{(m)}, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H((\mathcal{F}^m)^n, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{mn} H(\mathcal{F}^{mn}, \mu) = m h(\mathcal{F}, \Omega, \mu), \text{ para obtener el resultado deseado tomando supremo sobre particiones finitas de la unidad.}$$

A partir de \mathcal{I} construimos el cubrimiento $\mathcal{O} = \{A_0 \cup A_1, \dots, A_0 \cup A_{l-1}\}$ donde A_0, A_1, \dots, A_{l-1} son los miembros de la partición definida arriba. Ahora:

$H[\mathcal{F}^n] \leq H[\mathcal{I}^n] + \varepsilon n \leq \log N(\mathcal{I}^n) + \varepsilon n \leq \log [N(\mathcal{O}^n) \times 2^n] + \varepsilon n$, y consecuentemente

$$h_{fnc}[\Omega, \mathcal{F}] \leq h_{top}(\Omega, \mathcal{O}) + C. \text{ Si consideramos } \Omega^{(m)} \text{ en lugar de } \Omega:$$

$h_{fnc}[\Omega^{(m)}, \mathcal{F}] \leq h_{top}(\Omega^{(m)}, \mathcal{O}) + C$, luego por la afirmación anterior y la propiedad de homogeneidad establecida en el capítulo 3.

$$m h_{fnc}[\Omega, \mathcal{F}] \leq m h_{top}(\Omega, \mathcal{O}) + C \text{ ó } h_{fnc}[\Omega, \mathcal{F}] \leq h_{top}(\Omega, \mathcal{O}) + \frac{C}{m} \leq h_{top}(\Omega) + \frac{C}{m}; \text{ y puesto que } m \text{ puede ser tomado arbitrariamente grande: } h_{fnc}[\Omega, \mu] \leq h_{top}(\Omega).$$

■

A continuación vamos a establecer una cota en términos de una entropía funcional topológica. Más precisamente vamos a mostrar que la entropía h_{top} coincide con una entropía definida por particiones funcionales. Consideramos un espacio métrico compacto X el cual admite una descomposición por ciertos conjuntos especiales, por ejemplo X podría ser un poliedro y los conjuntos ser simples o cubos standard que se intersecan a lo sumo en sus bordes. O sea $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$, con $X_{\alpha} \cap X_{\beta} \subset \partial(X_{\alpha} \cup X_{\beta})$ ($\partial A = cl A - int A$).

Consideramos una partición de la unidad $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$, donde las funciones f_α son contínuas en los interiores de los conjuntos de la descomposición. Denotamos $\overline{N}(\mathcal{F}) = \sum_\alpha \sup |f_\alpha|$. El n -refinamiento \mathcal{F}^n está dado por la Ec. 4.3.

Ahora definimos:

$$h_{top}^*[\mathcal{F}, \Omega] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \overline{N}(\mathcal{F}^n) \quad (4.8)$$

$$y: h_{top}^*[\Omega] = \sup_{\mathcal{F}} h_{top}^*[\Omega, \mathcal{F}].$$

Teorema 4.3.2: $h_{top}(\Omega) = h_{top}^*[\Omega]$.

Demostración: Sea \mathcal{P} una descomposición $\{X_\alpha\}_{\alpha=1,2,\dots,k}$, del tipo descrito más arriba. A partir de cada descomposición de esta clase puede determinarse un conjunto $\mathcal{S} = \{S_1^1, \dots, S_N^1, \dots, S_1^k, \dots, S_N^k\}$ de tal forma que cada S_j^α es un refinamiento del miembro X_α por conjuntos de la misma "naturaleza topológica" que los de la descomposición original, por ejemplo si cada X_α es un cubo standard también lo es cada S_j^α . Luego \mathcal{S} es un refinamiento de \mathcal{P} . Ahora tenemos para cada $\alpha, j: S_j^\alpha \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$, donde U_1, \dots, U_m son otros miembros de \mathcal{S} . Podemos construir un cubrimiento \mathcal{O} formado por estos entornos; luego:

$$\widehat{N}(\mathcal{S}^n) \leq N(\mathcal{O}^n) \times m^n,$$

donde $\widehat{N}(\mathcal{A})$ el el número de conjuntos no vacíos en \mathcal{A} .

Los dinámicos para las iteraciones son dadas por las palabras en la secuencia Ω , sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}$ una partición de la unidad en las condiciones de antes, hay una descomposición $\mathcal{P} = \{X_\alpha\}$ tal que oscilación de \mathcal{F} respecto a \mathcal{P} puede ser acotada en la forma:

$$\max_{\alpha, \beta} \left\{ \max_{X_\beta} |f_\alpha| - \min_{X_\beta} |f_\alpha| \right\} < \frac{\delta}{\text{card}\mathcal{F}} \quad (4.9)$$

con δ arbitrariamente pequeño.

Sea $g_{\alpha, \beta} = \sup_{X_\beta} \{|f_\alpha| \times I_{X_\beta}\}$ y $F_{\alpha, \beta} = \frac{g_{\alpha, \beta}}{\sqrt{\sum |g_{\alpha, \beta}|^2}}$; o sea $\mathcal{G} = \{F_{\alpha, \beta}\}$ es una

partición de la unidad. Tenemos para cada $x \in X_\beta: |f_\alpha(x)| \leq \sup_{X_\beta} \{|f_\alpha| \times I_{X_\beta}\} \leq$

$|f_\alpha(x)| + \frac{\delta}{\text{card}\mathcal{F}}$ y en consecuencia:

$$1 \leq \sum |g_{\alpha, \beta}|^2 \leq 1 + \varepsilon,$$

con $\varepsilon = \frac{\delta}{\text{card}\mathcal{F}} [2 \sum |f_\alpha| + \delta]$. Luego:

$$F_{\alpha, \beta} = \frac{g_{\alpha, \beta}}{\sqrt{\sum |g_{\alpha, \beta}|^2}} \geq \frac{g_{\alpha, \beta}}{\sqrt{1 + \varepsilon}}$$

y $\sum_\alpha F_{\alpha, \beta} = I_{X_\beta}$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} \overline{N}(\mathcal{G}) &= \widehat{N}(\mathcal{P}) \text{ y} \\ \sum_\alpha g_{\alpha, \beta} &\leq \sum_\alpha F_{\alpha, \beta} \times \sqrt{1 + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Luego:

$$\sum_{\alpha} \sup_{X_{\beta}} \{ |f_{\alpha}| \times I_{X_{\beta}} \} \leq I_{X_{\beta}} \times \sqrt{1 + \varepsilon}.$$

y

$$\overline{N}(\mathcal{F}) \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \times \widehat{N}(\mathcal{P}).$$

Ahora $\overline{N}(\mathcal{F}^n) \leq (1 + \varepsilon)^{n/2} \times \widehat{N}(\mathcal{S}^n) \leq (1 + \varepsilon)^{n/2} \times m^n \times N(\mathcal{O}^n)$.

Finalmente pasando a los correspondientes límites:

$$h_{top}^*[\Omega] \leq h_{top}(\Omega)$$

Para probar la otra desigualdad consideramos un cubrimiento \mathcal{O} de X con número de Lebesgue ε y tomamos una descomposición \mathcal{S} tal que $diam\mathcal{S} < \varepsilon$.
Luego:

$$N(\mathcal{O}^n) \leq N(\mathcal{S}^n), \quad (4.10)$$

pero podemos identificar una descomposición \mathcal{S} con una partición de la unidad dada por funciones características de los miembros de \mathcal{S} , ahora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{S}^n) \leq h_{top}^*[\Omega]$$

y

$$h_{top}(\Omega) \leq h_{top}^*[\Omega].$$

Este resultado generaliza el de Langevin y Walczak[33].

La generalización de los teoremas 4.3.1 y 4.3.2 al caso no-conmutativo podría ser un problema de interés. Para esto habría que considerar adecuadas entropías topológicas no-conmutativas. Un intento podría ser:

sea $\mathcal{P} = \left\{ A_0, A_1, \dots, A_{k-1} : \sum_{i=0}^{k-1} A_i^* A_i = 1 \right\}$ una partición de la unidad por

elementos de una C^* -álgebra unital. Sea $N(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{k-1} \|A_i\|$, consideramos el refinamiento \mathcal{P}^n dado por la acción de la transformación dinámica Φ como al principio de la sección 4.2, luego con el promedio de crecimiento de $N(\mathcal{P}^n)$ podría intentarse tener una cota superior para la entropía definida como en [3]. Sería además interesante relacionar esta entropía con la introducida por T. Hudetz[27].

5. APÉNDICE I: ENTROPÍAS DE CORRELACIÓN

Sea (X, d) un espacio métrico compacto en el cual además están dadas una medida de probabilidad μ y una aplicación continua $T : X \rightarrow X$. Consideramos la métrica: $d_n(x, y) = \max \{d(T^i(x)), T^i(y) : i = 0, 1, \dots, n-1\}$ y anotamos como $B_{\varepsilon, n}(x)$ a la bola de radio ε en la métrica d_n .

Definición 5.1: La entropía de correlación generalizada es:

$$h_q^{corr}(T) = \frac{1 - e^{\tilde{h}_q^{corr}(T)}}{q - 1},$$

donde

$$\tilde{h}_q^{corr}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{h}_{q, \varepsilon}^{corr}(T)$$

y con el promedio de cantidad de información definido como:

$$\tilde{h}_{q, \varepsilon}^{corr}(T) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_X \mu(B_{\varepsilon, n}(x))^{q-1} d\mu \right]$$

Deberíamos comprobar que la integral obtenida para $q = 1$ (esto es $q \rightarrow 1$) converge a la entropía clásica $h_1(T)$ (c.f.Ec. 2.7). Para esto se utiliza el siguiente resultado:

Teorema 5.a (Brin-Katok[9]): Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto (X, d) y sea μ una medida de Borel en X que es T -invariante. Si $h_1(T, \mu)$ es la entropía clásica de Kolmogorov, se definen en X las funciones:

$$\overline{h}_1(x, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_{\varepsilon, n}(x))$$

$$\underline{h}_1(x, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_{\varepsilon, n}(x)),$$

$\overline{h}_1(x, T)$, $\underline{h}_1(x, T)$ se llaman la entropía local superior e inferior respectivamente. Entonces:

i) La entropía local existe, o sea $\overline{h}_1(x, T) = \underline{h}_1(x, T) = h_1(x, T)$, para todo $x \in X$.

ii) $h_1(x)$ es una función T -invariante y $\int h_1(x) d\mu = h_1(T)$.

Observación: Si μ es ergódica entonces como $h_1(x, T) \circ T = h_1(x, T)$ (por ii)), se tendrá que $h_1(x, T) = cte = h_1(T)$.

Corolario 5.2: $\lim_{q \rightarrow 1} \tilde{h}_q^{corr}(T) = h_1(T)$

Demostración: El corolario sigue inmediatamente usando resultados básicos en Teoría de la Medida (Lema de Fatou, Teorema de convergencia monótona) y el teorema de Brin-Katok. ■

La invarianza quedará establecida en los siguientes términos:

Proposición 5.3: Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios metrizable compactos, consideramos transformaciones $T_1 : X_1 \rightarrow X_1$ y $T_2 : X_2 \rightarrow X_2$ y medidas μ_1 y μ_2 invariantes para tales transformaciones. Sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ una biyección medible tal que $f \circ T_1 = T_2 \circ f$ y $\mu_1(f^{-1}(A)) = \mu_2(A)$, para cualquier conjunto medible A . Si se verifica la siguiente condición para $x, y \in X_1$:

$$\frac{1}{K}d_1(x, y) \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Kd_1(x, y), \text{ para algún } K > 1,$$

entonces $h_q^{corr}(T_1) = h_q^{corr}(T_2)$.

Una aplicación f que verifica la doble desigualdad anterior se llama una función de *distorsión acotada*.

Demostración: Sean $x, y \in X_1$, $z = f(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}d_1(T_1^i x, T_1^i y) &\leq d_2(f(T_1^i x), f(T_1^i y)) \leq Kd_1(T_1^i x, T_1^i y) \\ i &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

llamamos:

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon, n}^1(x) &= \{y : \max \{d_1(T_1^i x, T_1^i y) : i = 0, 1, \dots, n-1\} < \varepsilon\} \\ B_{\varepsilon, n}^2(x') &= \{y' : \max \{d_2(T_2^i x', T_2^i y') : i = 0, 1, \dots, n-1\} < \varepsilon\} \end{aligned}$$

La condición de distorsión acotada es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}d_1(T_1^i x, T_1^i y) &\leq d_2(T_2^i(f(x)), T_2^i(f(y))) \leq Kd_1(T_1^i x, T_1^i y) \\ i &= 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

tenemos entonces que $B_{\varepsilon, n}^1(x) \subset f^{-1}(B_{K\varepsilon, n}^2(f(x)))$, o sea que

$$\mu_1(B_{\varepsilon, n}^1(x)) \leq \mu_1(f^{-1}(B_{K\varepsilon, n}^2(f(x)))) = \mu_2(B_{K\varepsilon, n}^2(f(x))),$$

Similarmente

$$\mu_2(B_{\varepsilon, n}^2(f(x))) \leq \mu_1(B_{K\varepsilon, n}^1(x)).$$

Consecuentemente para $q > 1$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_{X_1} \mu_1(B_{\varepsilon, n}^1(x))^{q-1} d\mu_1 \right] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_{X_2} \mu_2(B_{K\varepsilon, n}^2(z))^{q-1} d\mu_2 \right]$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_{X_2} \mu_2(B_{\varepsilon, n}^2(z))^{q-1} d\mu_2 \right] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_{X_1} \mu_1(B_{K\varepsilon, n}^1(x))^{q-1} d\mu_1 \right]$$

Para $q < 1$, se procede en forma análoga, invirtiendo las desigualdades.

Luego con $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos $h_q^{corr}(T_1) = h_q^{corr}(T_2)$ y finalmente $h_q^{corr}(T_1) = h_q^{corr}(T_2)$. ■

Las condiciones de invarianza relacionadas con la métrica imponen una restricción que no es tenida en cuenta en el teorema de Sinai, ya que éste sólo trata con espacios de medida. De allí que para tener nueva información debería trabajarse en un espacio con "más estructura".

La generalización realizada por Zanette[60] podría eventualmente ser considerada como una aproximación al enfoque anterior; la misma es obtenida considerando la función simple $\varphi_q(x) = \sum_i a_i I_{A_i}$, donde $a_i = \mu(A_i)^{q-1}$ y con $\{A_i\}$ una partición del espacio fase por conjuntos de diámetro ε .

Esquemas de Bernoulli: Veamos que ocurre con las entropías de correlación para esquemas de Bernoulli $BS(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$. Para esto consideramos una estructura topológica en estos sistemas dinámicos. Esta es la siguiente:

Sea $I = \{s_l, \dots, s_m\} \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$. La base para la topología está dada por los cilindros (c.f. ejemplo 2.2.b)

$$C(I) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} : x_i = s_i, i = l, \dots, m, l < m\}.$$

Esta es la topología producto de la topología discreta en $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Con ésta el desplazamiento $(\sigma x)_n = x_{n+1}$ es un homeomorfismo. Por otra parte el espacio es metrizable con:

$$d_{BS}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{x_n, y_n} 2^{-|n|}$$

o más directamente:

$$d_{BS}(x, y) = 2^{-|n|},$$

donde $n = \min\{|i| : x_i \neq y_i\}$.

Recordemos que la medida considerada es la medida producto de la medida puntual $\mu_p(\{i\}) = p_i$. Luego la medida de un cilindro $C(I)$ estará dada por $\mu(C(I)) = \prod_{i=l}^m p_{s_i}$. Para cada m , la bola $B_{2^{-m}, n}(x)$, en la métrica d_{BS}^n , respecto al desplazamiento σ , es precisamente el cilindro determinado por las coordenadas x_{-n}, \dots, x_{m-n+1} . Esto es

$$B_{2^{-m}, n}(x) = \{y : x_i = y_i : i = -n, \dots, m-n+1\}.$$

En consecuencia $\mu(B_{2^{-m}, n}(x)) = \prod_{i=-m}^{m-n+1} p_{x_i}$. Luego:

$$[\tilde{h}_q^{corr}]_{BS} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left[\int_X \mu(B_{2^{-m}, n}(x))^{q-1} d\mu \right] = \log \left(\sum p_i^q \right),$$

donde la última igualdad surge por cálculo directo. Luego

$$[h_q^{corr}]_{BS} = \frac{1 - \sum p_i^q}{q-1} = H_q(p_0, p_1, \dots, p_{k-1}).$$

Es decir, para esquemas de Bernoulli la entropía de correlación para la topología generada por los cilindros coincide con la obtenida, en el caso puramente medido, para el generador canónico \mathcal{G} . Esto es la entropía de Tsallis.

La entropía de correlación puede expresarse en términos de la "presión topológica". Llamemos

$$X = BS(0, 1, \dots, k-1) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} : x \in \{0, 1, \dots, k-1\}\},$$

equipado con la métrica d_{BS} . O sea el espacio de secuencias bi-infinitas pero sin tener asignadas, en principio, probabilidades, sino una estructura topológica. Sea $\Lambda = \{a_0, \dots, a_{k-1} : a_i \in \mathbf{R}\}$, definimos $f = f_\Lambda : X \rightarrow \mathbf{R}$ por $f(x) = a_{x_0}$. Consideramos ahora en X la medida definida como en el ejemplo 2.2.b con probabilidad puntual $p_i = \frac{e^{a_i}}{\sum_{j=0}^{k-1} e^{a_j}}$. Las entropías de correlación, con esta

medida, se calculan en forma totalmente análoga al caso anterior:

$$[\tilde{h}_q^{corr}]_X = \log \left(\sum p_i^q \right) = \log \left(\frac{\sum_{i=0}^{k-1} e^{qa_i}}{\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{a_j} \right)^q} \right) = \log \left(\sum_{i=0}^{k-1} e^{qa_i} \right) - \log \left[\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{a_j} \right)^q \right]$$

y

$$[h_q^{corr}]_X = \frac{1 - \left(\frac{\sum_{i=0}^{k-1} e^{qa_i}}{\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{a_j} \right)^q} \right)}{q - 1}$$

La expresión $\log \left(\sum_{i=0}^{k-1} e^{a_i} \right)$ es la "presión topológica" $P(f)$ asociada al observable $f(x) = a_{x_0}$ y al "estado de equilibrio" dado por la medida producto de las probabilidades puntuales p_i . Una excelente descripción de esta clase de temas, tanto desde el punto de Matemático como Físico, está realizada en una Teoría debida a D. Ruelle y conocida como "Formalismo Termodinámico" [48]. Luego podemos escribir la la entropía de correlación en términos de $P(f)$:

$$[h_q^{corr}]_X = \frac{1 - (P(qf) - qP(f))}{q - 1}.$$

Por el mencionado Formalismo Termodinámico la entropía de correlación, en este tipo de sistemas, es una función real analítica de q .

6. APÉNDICE II: FLUJOS

En general los problemas relacionados con flujos, especialmente con flujos hamiltonianos, son muy importantes en Sistemas Dinámicos. Con el objeto de que el lector no pierda el hilo conductor del texto, consideramos adecuado presentar en forma de apéndice algunos resultados laterales que tienen que ver con este tema.

Primeramente recordamos la definición de entropía topológica de flujos en variedades y realizamos algunos comentarios acerca de la fórmula de Manning para flujos geodésicos. Aunque, como se mencionó anteriormente, la dependencia de la entropía topológica generalizada con la entropía clásica es directa, conservaremos la notación paramétrica para que haya consistencia con el enmarcamiento general del trabajo. Las definiciones y demostraciones inherentes a Geometría Diferencial y a Topología, que no se expliciten aquí, pueden encontrarse en cualquier texto básico sobre estas materias. Sea Φ un flujo en una variedad compacta M , esto es una familia de transformaciones $\Phi = \{\varphi_t : M \rightarrow M / t \in \mathbf{R}\}$ tal que $\varphi_0 = id_M$ y $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$. Si se fija un punto $x \in M$ se tendrá una curva parametrizada C^∞ dada por $\{\varphi_t x / t \in \mathbf{R}\}$, esta curva se llama la *órbita* de x . Si sólo se considera al parámetro t (el "tiempo") variando en un cierto intervalo tendremos los que se llaman *segmentos de la órbita*. Una órbita γ de un punto x es *periódica o cerrada* si existe un intervalo $[0, \tau(\gamma)]$ tal que $\varphi_{\tau(\gamma)} x = x$. El número $\tau(\gamma)$ es el período (minimal) de γ .

La q -entropía topológica (usando conjuntos generantes o separados) de Φ se define como:

$$k'_q(\Phi) = k'_q(\varphi_{t=1})$$

Una definición alternativa es dada en la siguiente forma a partir de [15]:

Definición 6.a: Sean t y ε dos números reales estrictamente positivos. Un conjunto $Y \subset M$ es (t, ε) -*generante respecto a Φ* si para todo $y \in Y$ existe un $x \in M$ tal que $d(\varphi_s(x), \varphi_s(y)) < \varepsilon$ para $0 \leq s \leq t$.

Definición 6.b: Sean t y ε dos números reales estrictamente positivos. Un conjunto $Y \subset M$ es (t, ε) -*separado respecto a Φ* si para todo $x, y \in Y$, $x \neq y$ es $d(\varphi_s(x), \varphi_s(y)) > \varepsilon$, para algún $s \in [0, t]$.

Sea $\alpha_{t,\varepsilon} = \min \{Card(Y) : Y \text{ es } (t, \varepsilon)\text{-generante respecto a } \Phi\}$ y escribimos para $q \neq 1$

$$\widetilde{k}'_q(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widetilde{k}'_{q,\varepsilon} \tag{6.1}$$

con

$$\widetilde{k}'_{q,\varepsilon} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \log \left[1 + (1 - q) K'_{q,t,\varepsilon} \right] \right\}. \tag{6.2}$$

donde $K'_{q,t,\varepsilon}$ se define como en la Ec. 2.20.

Análogamente con conjuntos separados: sea

$$\beta_{t,\varepsilon} = \max \{ \text{Card}(Y) : Y \text{ es } (t, \varepsilon) - \text{separado respecto a } \Phi \},$$

la definición es dada en forma dual como antes.

Sea M una variedad Riemanniana compacta y sea $S(M)$ su fibrado tangente unitario, o sea:

$$SM = \{ (p, v) \in T(M) / g_p(v, v) = 1 \}$$

donde g_p es la forma bilineal en $T_p(M)$ que da la estructura Riemanniana.

Estamos interesados particularmente en el flujo geodésico en SM , esto es $\varphi_t(p, v) = \dot{\gamma}_v(t)$, donde γ_v es la geodésica en M con $\gamma_v(0) = p$ y $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

Sea $x \in \tilde{M}$ (el revestimiento universal de M), denotamos por $\tilde{B}_R(x)$ a la bola en \tilde{M} respecto a la métrica \tilde{d} heredada de la estructura Riemanniana de M . Manning probó que la entropía topológica del flujo geodésico está acotada inferiormente por el promedio de crecimiento del volumen de una de estas bolas. Llamamos $V_{x,R}$ al volumen de la bola $\tilde{B}_R(x)$ se tiene entonces que

$$L = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log(V_{x,R})$$

existe y es independiente de x [34].

Siguiendo nuestra nomenclatura paramétrica, anotamos el resultado de Manning como:

$$k'_q(\Phi) \geq (q-1)^{-1} \{1 - \exp[(1-q)L]\} \text{ para } q \neq 1 \quad (6.3)$$

Además existen relaciones entre crecimiento del número de geodésicas cerradas y las curvaturas principales. Esto fue observado primeramente por Sinai[52]; luego Margulis[35] obtuvo un resultado más fuerte en el caso de curvatura constante.

A continuación presentamos una cota para la entropía en términos del promedio de crecimiento número de "palabras" en el grupo fundamental de M . Recordemos que si S es un conjunto de generadores para $\pi_1(M)$, una palabra es simplemente una secuencia $s_1.s_2\dots.s_{n_1}$ con $s_i \in S$.

Consideremos la acción de $\pi_1(M)$ en \tilde{M} , dada por automorfismos del revestimiento universal. Un subespacio compacto F de \tilde{M} es un *dominio fundamental* respecto a la acción mencionada si:

$$\bigcup_{\gamma \in \pi_1(M)} \gamma \bar{F} = \tilde{M}.$$

Sea:

$$S = \{ \gamma : \gamma \in \pi_1(M), \gamma F \cap F \neq \emptyset \},$$

S resulta ser un sistema de generadores para $\pi_1(M)$ [20]. Llamamos

$$B_{S,R} = \text{Card} \{ \gamma : \gamma \in \pi_1(M), \ell(\gamma) \leq R \}$$

donde $\ell(\gamma)$ es el mínimo n tal que γ es expresada como una palabra $\gamma = s_1 s_2 \dots s_n$ con $s_i \in S$.

Por un resultado de J. Milnor[38] el límite $W = W_S(\Gamma) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log(B_{S,R})$ existe. Además como se nota de la definición es independiente de la métrica Riemanniana en M .

Sea $\gamma \in \pi_1(M)$ con $\ell(\gamma) \leq \frac{R}{D}$ ($D = \text{diam}(F)$) entonces para cada $x \in F$ se tiene que $\tilde{d}(x, \gamma x) \leq R$. Luego $\gamma F \subset \tilde{B}_R(x)$. Se concluye de esto que $L \geq W$, y nuevamente usando nuestra acostumbrada notación paramétrica:

$$k'_q(\Phi) \geq (q-1)^{-1} \{1 - \exp[-(1-q)W]\} \quad (6.4)$$

La cota de Manning podría resultar trivial para espacio de curvatura constante cero. A continuación veremos como obtener una cota para la entropía topológica de flujos más generales que los geodésicos, y que aún en este caso particular no resulta trivial. Para esto vamos a introducir resultados que son análogos a los que fueron probados por Bowen para los llamados "difeomorfismos Axioma-A". Las demostraciones siguen cercanamente las líneas de ref. [16] y en consecuencia se podrían omitir los detalles. Recordamos algunas definiciones básicas:

El conjunto *no-errante* Ω de un flujo $\Phi = \{\varphi_t : M \rightarrow M\}$ está definido por:

$$\Omega = \{x \in M : \text{si, para un entorno } U \text{ de } x \text{ y } t > 0, \text{ existe un } t_0 > t,$$

$$\text{tal que } \varphi_{t_0}(U) \cap U \neq \emptyset\}. \quad (6.5)$$

Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto Φ -invariante, Λ es *hiperbólico* si el fibrado tangente admite una descomposición

$TM|_{\Lambda} = E^u \oplus E^0 \oplus E^s$, donde E^u, E^0, E^s son subespacios tales que:

$$\|D\varphi_t v\| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|v\|, v \in E^s, \|D\varphi_{-t} v\| \leq C_1 e^{-C_2 t} \|v\|, v \in E^u$$

para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ y donde $D\varphi_t$ es la aplicación diferencial usual.

Un flujo $\Phi = \{\varphi_t\}$ satisface el *Axioma-A de Smale* si el conjunto no-errante Ω puede escribirse como $\Omega = F \cup \Lambda$, de manera que:

i) F es el conjunto de puntos fijos de Φ , siendo F un conjunto finito e hiperbólico.

ii) El conjunto de órbitas periódicas del flujo es denso en Λ

iii) $F \cap \Lambda = \emptyset$.

Teorema 6.c (descomposición espectral de Smale[53]): Si el flujo $\Phi = \{\varphi_t\}$ satisface el Axioma-A, entonces el conjunto no-errante Ω puede escribirse como una unión disjunta $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$ de conjuntos cerrados invariantes tal que $\varphi_t|_{\Omega_i}$ es topológicamente transitivo, esto es si U, V son abiertos no vacíos, entonces $\varphi_{t_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ para algún $t_0 > 0$.

Recordemos además que un flujo $\Phi = \{\varphi_t\}$ es *expansivo* si para un $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$, de modo que $d(\varphi_t x, \varphi_t y) < \delta$ implica $y = \varphi_s x$, para algún s con $|s| < \varepsilon$. El número δ se llama la *constante de expansividad*.

Sea X uno de los miembros de la unión disjunta, un flujo se llama *C-denso* si para cada x la variedad inestable en x , definida por:

$$W^u(x) = \{y \in X : d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) \rightarrow 0 \text{ con } t \rightarrow -\infty\}$$

es densa en X .

Para flujos Axioma-A, expansivos y C -densos, Rufus Bowen probó los que llamó "teoremas de especificación para flujos"[15]. Estos dicen esencialmente que se puede prescribir la evolución de una órbita periódica para especificar un conjunto finito de segmentos órbita arbitrarios con una precisión fija, o sea para cualquier "tiempo" permitido, entre dos segmentos especificados se puede encontrar una órbita periódica que aproxima esta trayectoria. Estos teoremas son de gran importancia para estudiar la estructura topológica de conjuntos hiperbólicos así como el comportamiento mecánico-estadístico de los segmentos órbita. En base a estos resultados se pueden comparar el promedio de crecimiento del número de órbitas periódicas y el cardinal de conjuntos separados o generantes. Esto fue realizado por Bowen en ref.[16] para difeomorfismos. Siguiendo esa línea de razonamientos y usando los mencionados teoremas de especificación se pueden adaptar ciertos teoremas de difeomorfismos para flujos. En particular se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 6.1: Supongamos que para entero j , existe un punto w_j in X y un real t_j , tal que $\varphi_{t_j}(A) \cap B_\alpha(w) = \emptyset$, entonces $\beta_{t,\alpha,A} \leq K\beta_{t,\alpha}$, donde K es una constante y $\beta_{t,\alpha,A}$ es la máxima cardinalidad de los conjuntos (t, α) -separados de A . Aquí α es tal que $0 < \alpha < \frac{1}{2}\delta$, donde δ es la constante de expansividad.

En particular si A es un subconjunto cerrado estable de X , entonces $k'_q(\Phi|_A) < k'_q(\Phi)$; la restricción de Φ significa $\varphi_t|_A$ para todo t .

Ahora sí estamos en condiciones de dar una cota, para flujos como los descritos, en un caso particular. Este será el flujo asociado a un sistema hamiltoniano. En este caso la especificación estará dada por las "órbitas homoclínicas transversas". En consecuencia asumiremos la existencia de tales objetos.

Consideremos entonces el sistema hamiltoniano:

$$\dot{x} = X_H(x)$$

con

$x = (q(t), p(t)) \in R \subset \mathbf{R}^{2n}$ y $H = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$; X_H es el campo hamiltoniano. El flujo asociado se define por medio de las condiciones:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \dot{x} \\ \varphi_0(x) = x \end{cases} \quad (6.6)$$

Un punto x_0 en el espacio fase R es un *equilibrio hiperbólico* si $X_H(x_0) = 0$ y además si el sistema linealizado $\dot{y} = D_{x_0}X_H(y)$ es tal que $D_{x_0}X_H$ no tiene autovalores con parte real cero.

Si x_0 es un equilibrio hiperbólico entonces existen las variedades inestable y estable en x_0 , y están dadas por[54]:

$$\begin{aligned} W^u(x_0) &= \{x \in \mathbf{R}^{2n} : \varphi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ si } t \rightarrow +\infty\} \\ W^s(x_0) &= \{x \in \mathbf{R}^{2n} : \varphi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ si } t \rightarrow -\infty\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Una *órbita homoclínica* es una solución $x(t)$ del sistema hamiltoniano $\dot{x} = X_H(x)$ tal que $x(0) \in W^u(x_0) \cap W^s(x_0) - \{x_0\}$; o equivalentemente $x(t) \rightarrow x_0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$.

La órbita es llamada *transversal* si las variedades se intersecan transversalmente en x_0 .

Un teorema de especificación puede ser enunciado en este contexto de la siguiente forma[54]:

Para cada $\epsilon > 0$ existe un número N y una sucesión de enteros $(n_i)_{i \in I} \subset \mathbf{Z}$, tal que hay un punto $y = y(n_i)$ con $d(y, \sum x(t - n_i)) \leq \epsilon$, donde $n_{i+1} - n_i \geq N$ y $x(t)$ es una órbita homoclínica transversal.

Además hay una versión para flujos del teorema de Birkhoff -Smale, la cual es declarada de la siguiente manera[55]:

Para un conjunto $A \subset R$ (cerrado y estable para $\Phi = \{\varphi_t\}$ y $\emptyset \neq A \neq R$), $\varphi_{t=N} |_A$ es conjugado topológicamente a un esquema de Bernoulli de dos símbolos $BS(0, 1)$ (ver Sec. 2.2).

Luego para un flujo hamiltoniano Φ de modo que existen órbitas homoclínicas, y consecuentemente hay especificación, obtenemos:

Proposición 6.2: $k'_q(\Phi) > \frac{1 - 2^{(1-q)/N}}{q - 1}$, donde el número N es el dado por la versión anterior del teorema de especificación.

Demostración: $\widetilde{k}'_q(\varphi^N |_A) = [\widetilde{k}'_q]_{BS(0,1)} = (1 - q) \log 2$, luego

$\widetilde{k}'_q(\varphi) = \frac{1}{N} \widetilde{k}'_q(\varphi^N |_A) = (1 - q) \log 2 / N$, finalmente:

$$k'_q(\varphi) > \frac{1 - 2^{(1-q)/N}}{q - 1} \quad (6.8)$$

La existencia de órbitas homoclínicas resulta útil para obtener criterios de caos. Hay un interesante tratamiento de este problema el cual es esencialmente variacional y que consiste en encontrar puntos críticos de un funcional adecuado. Una importante contribución en este aspecto se debe a Bolotin[13], y el funcional utilizado es: $\int L(\dot{q}, q) dt$, donde L es el lagrangiano $L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 - V(q)$. Posteriormente han sido usadas variantes con condiciones periódicas. ■

Bibliografía

- [1] R.L. Adler, A.G. Konghein y M.H. Mc. Andrew, Topological Entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 309-319.
- [2] P. A. Alemany and D.H. Zanette, Fractal random walks from a variational formalism for Tsallis entropies, *Phys. Rev. E*, **49**, (1994)
- [3] R. Alicki and M. Fannes, Defining quantum dynamical entropy, *Lett. Math. Phys.*, **32**, (1994), 75-82.
- [4] R. Alicki, J. Andries, M. Fannes and P. Tuyls, An algebraic approach to the Kolmogorov-Sinai entropy, *Rev. Math. Phys*, **8** No. 2, (1996), 167-184.
- [5] R. Alicki, Quantum Mechanical tools in applications to classical dynamical systems, *Phys. Rev. Lett*, **81**, No. 10, (1998), 2040-2043.
- [6] F. Benatti, T. Hudetz and Andreas Knauf, Quantum chaos and dynamical entropy, *Commun. Math. Phys.*, **198**, (1998), 607-688.
- [7] B.M. Bhogosian, Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence Tsallis statistics, *Phys. Rev. E*, **53** (1996) , 4754-4763.
- [8] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, J. Wiley and Sons, 1965.
- [9] M. Brin and A. Katok, in *Geometric Dynamics* (Lecture Notes in Mathematics 1007), Springer (1983) 30-38.
- [10] O. Bratelli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vol I, II, Springer (1987).
- [11] A. Biś, Entropy of topological directions, *Ann. Faculté Sc. Toulouse*, Vol VI, No1 (1997), 59-75.
- [12] A. Biś and P. Walczak, Pseudo-orbits, pseudo leaves and geometric entropy of foliations, *Erg. Th and Dynam. Systems*, **18**, (1998), 1335-1348.
- [13] V. M. Bolotin, Libration motions of natural dynamical systems, *Moscow Univ. Math Bull* (1978) 49-53.
- [14] R. E. Bowen, Entropy for groups endomorphisms and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **153** (1971), 401-414.

- [15] R. E. Bowen, Periodic points for hyperbolic flows, *American Journal of Mathematics* , **94** (1972) 1-30.
- [16] R. E. Bowen, Periodic points and measures for Axiom-A diffeomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154**, (1971), 377-397.
- [17] S. A. Cannas, D. Stariolo and F. A. Tamarit, Learning dynamics of simple perceptrons with non extensive cost functions, *Network : Computation in neural sciences*, **7** , (1996) , 141.
- [18] A. Connes and E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von-Neumann algebras, *Acta Math*, **134**, (1975), 289-306.
- [19] A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring, Dynamical approximation of C^* -algebras and von-Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.*, **112**, (1987), 671-719.
- [20] K. Dinaburg, On the relations among various entropie characteristic of dynamical systems, *Math URSS, Izv*, **5**, (1971), 337-378.
- [21] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Priceton NJ (1981)
- [22] F. Gantmacher, *Application of the Theory of Matrices*, Interscience (1959).
- [23] E. Ghys y P. de la Harpe, *Sur les Groups Hiperboliques d 'après Mikhael Gromov*, (Progress in Math, vol 83, Birkhäser, Zurich, 1990).
- [24] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak, Entropie géométrique des feuilletages, *Acta Math*, **160**, (1988), 105-142.
- [25] Ghys, E., Langevin R. and Walczak P., Entropie et partitions de l' unité, *C.R. Acad. Sc. Paris*, **303**, (1986), 251-254.
- [26] M. Gromov, *Entropy, homology and semi-algebraic geometry*, Seminar Bourbaky (after Yomdin) , 1985-86 No. 663.
- [27] T. Hudetz, Topological entropy for appropriately aproximated C^* -algebras, *J. Math. Phys*, **35** (8), (1994), 4303-4333.
- [28] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press (1995).
- [29] M.S. Keane and M. Smorodinsky, Bernoulli schemes with the same entropie are finitarily isomorphic, *Ann. of Math.* **109**, (1979) 397-406 .
- [30] M.S. Keane, in *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, T. Bedford, M. Keane and C. Series, Eds., (Oxford University Press, Oxford, 1991).
- [31] A.N. Kolmogorov, A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces, *Dokl. Akad. Nauk.*, SSSR **119**, 861-864 (1958)

- [32] P. T. Landsberg, Self-organization, entropy and order, *Springer series in Synergetics*, **61**, Springer-Verlag (1994).
- [33] R.. Langevin and P. Walczak, Entropy, transverse entropy and partitions of the unity ,*Erg. Th and Dynam. Systems*, **14**, (1994) 551-563.
- [34] A. Manning, Topological entropy for geodesic flows, *Ann. Math.* **110** (1979), 567-573
- [35] G. Margulis, Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, *Func. Anal. Appl.* **3** (1969), p.p.89-90.
- [36] L.D. Melshalkin, A case of isomorphism of Bernoulli schemes, *Dokl. Akad. Nauk.*, SSSR **147**, (1962) 797-802.
- [37] A.M Mesón and F. Vericat, Invariant of dynamical systems: a generalized entropy. *J. Math. Phys.*, **37**, (1996), 4480-4483
- [38] J. Milnor, A note on the curvature and the fundamental group, *J. Diff. Geom.* **2** (1968), 1-7.
- [39] D. Ornstein, Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, , *Adv. in Math.* **4**, (1970) 337-345.
- [40] A.R. Plastino and A. Plastino, Tsallis' entropy, Ehrenfest theorem and information theory, *Phys. Lett. A* **174**, (1993) 384-388.
- [41] W. Parry and M. Pollicott, An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom-A flows, *Ann. Math.* **118** (1983) 573-591.
- [42] M. Pollicott and M. Jury, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, London Math. Soc. **40**, (1998).
- [43] A.K. Rajagopal, Dynamic linear response theory for a nonextensive system bsd opn the Tsallis prescription, *Phys. Rev. Lett.* **76**, (1996) 3469-3473 .
- [44] W. L. Reddy, Lifting expansive homeomorphism of symbolic flows, *Math. Systems Theory*, **2**, (1968), p.p. 91-92.
- [45] A. Rényi, *Probability Theory* ,North-Holland, (1970).
- [46] H. L. Royden, *Real Analysis*, Mc. Millan Pub., (1968).
- [47] D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors*, Notas preparadas por S. Isola, (Cambrige Univ. Press, London, 1987).
- [48] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading, Mass, (1978)
- [49] C.E. Shannon, *Bell System Tech. J.* **27**, (1948) 379-423.
- [50] Y. Sinai, On the concept of entropy of dynamical systems, *Dokl. Akad. Nauk.*, SSSR **124**, (1959) 768-771.

- [51] Y. Sinai, Weak isomorphism of transformation with invariant measure, *Sov. Math*, **3**, (1962),1725-1729.
- [52] Y. Sinai, The asymptotic behaviour of number of closed orbits on compact manifolds of negative curvature, *Transl. Am. Math. Soc.*, (2) ,**73**, 227-250.
- [53] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull A.M.S.* **73**,(1967), 747-817.
- [54] E. Seré, Looking for the Bernoulli shift, *Ann. Inst. Poincare*, **10** , (1993) 561-590.
- [55] E. Seré, en *Proceedings of the School and workshop on variational and local methods in the study of hamiltonian systems*, Eds. A. Ambrosetti and G. Dell 'Antonio (celebrado en el ICTP, Trieste), (1994).
- [56] Takens F. and Verbitski E., Generalized entropies: Rènyi and correlation integral approach, *Nonlinearity*, 771-782 (1998)
- [57] C. Tsallis, Possible generalizations of the Boltzmann-Gibbs statistical, *J. Statistical Phys.* **52**, (1988), 479-487.
- [58] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory* (Springer-Verlag, Berlin,1982)
- [59] A. Wherl, General, properties of the entropy, *Rev. Mod. Phys.*, **50**, (1978), 221-260.
- [60] D.H. Zanette, Generalized Kolmogorov entropy in the dynamics of multi-fractal generation, *Phys. A*, 223, (1996) 87-98



Biblioteca Central
 Fac. Cs. Exactas
 U.N.L.P.

122.
 57.129