

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática



GRAFOS CORDALES: ÁRBOLES CLIQUE Y REPRESENTACIONES CANÓNICAS

Autor:

Silvia Beatríz Tondato

Director:

Dr. Marisa Gutierrez

Co-Director:

Dr. Jayme L. Szwarcfiter

Tesis para obtener el título de
DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Junio de 2009

A Bebe, que desde su llegada colmo mi vida de alegría.

A mis viejos a quienes les debo todo.

A mi abuelo Juan, Cuánto hubieras disfrutado esto!

Te echo de menos.

Agradecimientos:

A Lía Oubiña, por plantar la semilla de la Teoría de grafos en La Plata.

A Marisa y Jayme, no tengo palabras para expresar la enorme gratitud que siento hacia ustedes por su generosidad, su paciencia, su inestimable ayuda sin la cual esto no hubiera sido posible.

A los docentes que me formaron y aquellos con los cuales he trabajado, de quienes espero haber aprendido aunque sea un poco.

Al grupo de Teoría de grafos de La Plata, Patricia incluida, no sólo por haber elegido los grafos sino también por ser buena gente.

A Queko y Dani, por estar cerca a pesar de la distancia.

A mis abuelos, tíos, primos y amigos, quienes siempre me han apoyado, están ahí, me quieren y eso es lo único que importa.

A Yesi, por hacerme reír con sus ocurrencias y a pesar de hacerme renegar: Amigos para siempre B.E!

A Claudia y a las chicas que ya se mudaron, Poi y Laura, por hacer grato los momentos compartidos en la oficina.

A mis compañeritos de inglés y a las profesoras, a quienes tengo que agradecerles por hacer divertidas las clases y el aprendizaje de un idioma tan feo.

Al programa de Becas de la Universidad Nacional de La Plata, sin el cuál esto nunca hubiera sucedido.

A la Fundación Antorchas, que me permitió asistir a congresos y pasar una breve estadía en Brasil.

A Brandsen, mi oasis propio, el lugar más maravilloso donde una persona puede vivir.

Índice general

1. Introducción	1
2. Definiciones y Resultados Básicos	5
2.1. Grafos	5
2.2. Grafos de intersección	8
2.3. Familias	10
2.4. Operadores	12
2.5. Cordales, UV, DV, RDV e Intervalos	14
2.5.1. Construyendo familias separadoras de subárboles	17
2.5.2. Caracterizaciones por Prohibidos	24
2.6. Representaciones canónicas.	30
3. Subgrafos inducidos y construcción de árboles clique	33
3.1. Contracción	33
3.2. Poda	38
3.3. Injerto	40
3.3.1. Injerto simple	40
3.3.2. Invarianza de cubridores	41

3.3.3. Injerto compuesto	42
4. k-asteroidales y representaciones canónicas	44
4.1. Caminos en G versus caminos en T	45
4.2. k -asteroidales en G versus hojas de T	55
4.3. k -asteroidal en G versus subfamilias asteroidales de F	58
4.4. Grafos de Intervalos	62
4.4.1. Teorema de Lekkerkerker-Boland	62
4.4.2. Prohibidos minimales	66
5. Follaje de un grafo cordal	79
5.1. Follaje de subgrafos	79
5.2. Cotas del follaje	85
6. Grafos no UV minimales	90
6.1. Preliminares	91
6.2. Grafos no UV minimales con falsos gemelos	96
7. Grafos no UV minimales con simpliciales esenciales	108
7.1. Estudio de a -aristas	111
7.2. Construyendo UV-árboles clique	126
7.3. Grafo Π	129
7.4. Caminos en Π	139
7.5. Resultados Principales	158
8. Grafos no UV minimales sin simpliciales esenciales	169
8.1. Simpliciales no esenciales, grafos compactos y supercompactos	169

8.2. Grafos compactos no UV.	175
8.3. Construcción de prohibidos compactos	179
9. Conclusiones	226

Capítulo 1

Introducción

Dada una familia finita $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, se llama *grafo de intersección* de \mathcal{F} al grafo con I como conjunto de vértices y tal que $i \neq j$ son adyacentes si y sólo si $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Si un grafo es isomorfo al grafo de intersección de \mathcal{F} , se dice que la familia \mathcal{F} es una *representación* del grafo.

Se llama *completo* de un grafo a un conjunto de vértices adyacentes entre sí; si un completo es maximal con respecto a la inclusión, se dice que es un *clique* del grafo. Si G es un grafo se llama $\mathcal{C}(G)$ a la *familia de cliques* de G y $\mathcal{DC}(G)$ a la familia dual de ésta, es decir, $\mathcal{DC}(G) = (C_v)_{v \in V(G)}$ donde C_v es el conjunto de cliques de G a los cuales v pertenece. Es fácil verificar que cualquier grafo G es el grafo de intersección de $\mathcal{DC}(G)$.

Dado un grafo G , el *grafo clique* de G , notado $K(G)$ es el grafo de intersección de la familia de los cliques de G .

Los *grafos cordales* fueron definidos como aquellos que no poseen ciclos inducidos de 4 vértices o más. Gavril [6] probó que para todo grafo cordal, existe un árbol generador T de $K(G)$ tal que $\mathcal{DC}(G) = (C_v)_{v \in V(G)}$ es una

familia tal que cada C_v induce un subárbol de T . A los árboles cumpliendo con esta propiedad se los llama *árboles clique* de G y al par formado por un árbol clique y la familia $DC(G)$, *representación canónica* de G .

Los *grafos de intervalos*, que fueron originalmente definidos como los grafos de intersección de una familia de intervalos de la recta real, pueden definirse como los grafos cordales que poseen algún árbol clique que es un camino.

Naturalmente, entre la clase de los grafos cordales y la de los grafos de intervalos, se han definido distintas clases especificando condiciones sobre el árbol clique y sobre los subárboles que induce la familia $DC(G)$ sobre dicho árbol. Algunas clases específicas son:

- Grafos **UV**: grafos cordales para los cuales existe un árbol clique T tal que cada C_v induce un camino de T .
- Grafos **DV**: grafos cordales para los cuales existe un árbol clique T , orientable, de modo que cada C_v induce un camino dirigido de T .
- Grafos **RDV**: grafos cordales que poseen un árbol clique T , orientable y enraizado, tal que cada C_v induce un camino dirigido de T .

Como ocurre bajo ciertas condiciones, algunas clases de grafos de intersección pueden caracterizarse a partir del operador clique valuado [1, 9, 10]. Esto es, la posibilidad de representar a un grafo G como grafo de intersección de ciertas familias de conjuntos, es una información inherente al grafo clique valuado de G y al dual de la familia de cliques de G .

Si G es un grafo, se define el grafo clique valuado, $K_v(G)$, como $K(G)$,

valuando sus aristas con el número de vértices en la intersección de sus cliques extremos.

McKee [17] prueba que si T es un árbol generador de peso máximo de $K_v(G)$, la familia dual de cliques de G es una familia de subárboles de T . Más aún que todo *árbol clique* de G es un árbol generador de peso máximo de $K_v(G)$.

Los grafos cordales y sus subclasses han recibido mucha atención pues aparecen como modelos naturales en muchos problemas de la vida real [2, 3, 4, 22]. Por otro lado, almacenar y acceder a la información estructurada en un grafo, puede realizarse con más eficiencia si éste es un grafo de intersección de familias con buenas propiedades [21]. Es por este motivo que el estudio de las representaciones canónicas y los árboles clique de los grafos cordales resultan de importancia.

En esta Tesis se estudian los subgrafos del grafo y su relación con los subárboles de sus árbol clique. Se muestra como es posible obtener todos los árboles clique de un grafo cordal a partir de árboles clique de sus subgrafos [12].

Se estudia como los caminos en un grafo cordal se manifiestan en cualquiera de sus árboles clique. Se estudian las triplas asteroidales y en general las k -asteroidales.

Una clase de grafos es cerrada por subgrafos inducidos si todo subgrafo inducido de uno de la clase está en la clase. Se sabe que una clase de grafos, cerrada por subgrafos inducidos puede ser caracterizada por **subgrafos prohibidos**. Una clase \mathcal{F} de grafos se dice que admite una caracterización por subgrafos prohibidos (o prohibidos minimales) si existe una clase

$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \{H : H \text{ no pertenece a } \mathcal{F}, H - v \in \mathcal{F} \text{ para todo } v \in V(H)\}$, tal que $G \in \mathcal{F}$ si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido a ningún miembro de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

Todas las clases mencionadas son naturalmente cerradas por subgrafos inducidos con lo cual todas pueden ser caracterizadas por subgrafos prohibidos. Los grafos prohibidos para los grafos cordales son naturalmente los ciclos de longitud mayor o igual a 4.

Los grafos prohibidos para los grafos de intervalos, fueron construidos por Lekkerkerker-Boland [14] a partir de una caracterización que establece, que un grafo cordal es de intervalos si y sólo si no posee triplas asteroidales.

Utilizando las herramientas desarrolladas sobre árboles clique se obtiene una nueva prueba del resultado de Lekkerkerker y Boland y se construyen los grafos prohibidos de la clase de los grafos de intervalos.

Se estudia el follaje de un grafo cordal, esto es, el mínimo número de hojas de sus árboles clique. Se obtienen nuevas cotas inferiores y superiores.

Finalmente se obtienen todos los grafos prohibidos de la clase UV dividiendo estos resultados en tres partes. Aquellos que poseen falsos gemelos, esto es, vértices no adyacentes pero con los mismos vecinos. Posteriormente se generalizan estos resultados a los grafos que poseen simpliciales esenciales, es decir, simpliciales cuyos vecinanzas cerradas son cortes del grafo. Finalmente se estudian los grafos que no poseen este tipo de simpliciales a los cuales se los llama compactos. Algunos resultados preliminares aparecen en [11, 12, 13].

Capítulo 2

Definiciones y Resultados

Básicos

2.1. Grafos

Un *grafo* simple G es un par de conjuntos, notados usualmente $V(G)$ y $E(G)$. Siendo $V(G)$ un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vértices* del grafo y $E(G)$ subconjunto de $[V(G)]^2$, conjuntos binarios de $V(G)$, cuyos elementos se llaman *aristas* de G . Una arista $\{u, v\}$ de G usualmente se nota uv , se dice que u y v son *adyacentes*, que u y v *inciden* en la arista. Todos los grafos tratados aquí son grafos simples.

Si G_1 y G_2 son grafos, la **unión** es el grafo denotado por $G_1 \cup G_2$ cuyo *unión* conjunto de vértices es la unión de $V(G_1)$ con $V(G_2)$ y cuyo conjunto de aristas es

la unión de $E(G_1)$ con $E(G_2)$.

Se dice **grado** de un vértice v al número de aristas que inciden en v . *grado*

Un vértice de un grafo G se dice *pendiente* si su grado es uno. *pendiente*

Se dirá *entorno* de un vértice v y se notará $N(v)$, al conjunto de vértices de G adyacentes a v , el *entorno cerrado* de v es el conjunto $N(v) \cup \{v\}$, notado por $N[v]$. *entorno cerrado*

Dados v, w con $v, w \in V(G)$ se dirá que v *domina* a w si $N[v] \supseteq N[w]$. *domina*

Un *completo* de un grafo G es un conjunto de vértices adyacentes de a pares. *completo*

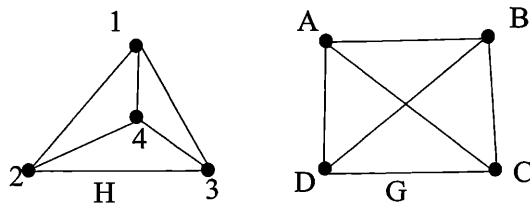
Un *clique* de G es un conjunto de vértices de G completo maximal, respecto de la inclusión. *clique*

Se notará $C(G)$ a la familia de cliques de G , si $v \in V(G)$, $C_v = \{C \in C(G), v \in C\}$. Si $uv \in E(G)$ se notará $C_{uv} = \{C \in C(G), u, v \in C\}$.

Un vértice v de G se dice *simplicial* si $N[v]$ es un clique. Luego es claro que v está sólo en ese clique al que, haciendo un abuso de notación, llamaremos C_v . *simplicial*

Se dice que dos grafos G, H son *isomorfos* si existe una biyección $a : V(G) \mapsto V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $a(u)a(v) \in E(H)$. Más claramente dos grafos son isomorfos cuando sólo difieren en los nombres de los vértices. En este trabajo no distinguiremos entre grafos isomorfos. *isomorfos*

Una *clase de grafos* es un conjunto de grafos cerrado por isomorfismos. La siguiente figura muestra un ejemplo de grafos isomorfos. *clase de grafos*

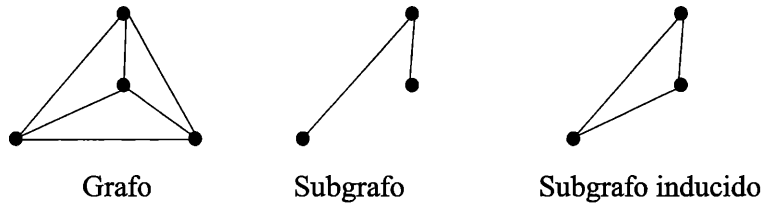


Grafos isomorfos

Notaremos **Grafos** a la clase de todos los grafos.

Un grafo H es **subgrafo** de un grafo G cuando $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$. Se notará $H \leq G$.

Un grafo H se dice **subgrafo inducido** de un grafo G cuando es subgrafo y $E(H) = E(G) \cap [V(H)]^2$. Se notará $H \subseteq G$. Si V' es subconjunto de $V(G)$, el **subgrafo de G inducido por V'** , notado $G[V']$, es el subgrafo inducido de G cuyos conjunto de vértices es V' . En la siguiente figura dado un grafo se muestra un ejemplo de un subgrafo inducido y de un subgrafo no inducido del mencionado grafo.



Con el concepto de subgrafo, un subconjunto C de $V(G)$ es un clique de G si $G[C]$ es un subgrafo completo maximal de G .

Un **camino** P en un grafo G , es una sucesión de diferentes vértices de G , $((u_i)_{i \in \{0, \dots, k\}})$, tales que para cada $i, i = 0, \dots, k - 1$, $u_i u_{i+1} \in E(G)$, esas aristas son denominadas aristas del camino P . Es claro que todo camino P_{uv} entre $u, v \in V(G)$ contiene un camino minimal, considerando la inclusión en el conjunto de vértices. Si k es mayor a 2 y $u_0 = u_k$ se dice que P es un **ciclo**.

La **sección** $P[u_i, u_j]$ de P es la subsucesión $\{u_i, u_{i+1}, \dots, u_j\}$ de terminos vértices consecutivos de P .

Un grafo G es **conexo**, si para todo par de vértices u, v del grafo G existe un camino entre u y v .

Una **componente conexa** de un grafo G , es un subgrafo conexo maximal de G . *componente conexa*

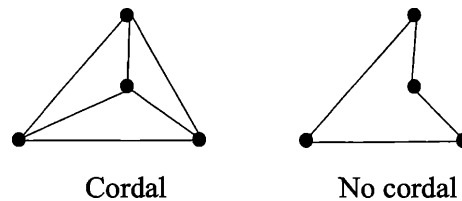
Un grafo G es **disconexo** si no es conexo. *disconexo*

Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos, a los vértices pendientes de los árboles también se los denomina **hojas**. *árbol*
hojas

Una **k estrella** es un árbol con $k + 1$ vértices donde un vértice es adyacente a todo otro vértice del árbol. *k estrella*

Un grafo **direccionado** o digrafo D es un par de conjuntos; $V(D)$ un conjunto finito no vacío y $E(D)$ un conjunto de pares ordenados de $V(D)$ llamados aristas o arcos. *direccionado*

Un grafo G es **Cordal**, si no contiene ciclos inducidos con 4 o más vértices. En la siguiente figura se puede observar un grafo cordal y un grafo que no es cordal. *Cordal*



Resulta claro que cualquier subgrafo inducido de un grafo cordal también es cordal.

Todos los grafos aquí tratados son *Cordales*.

2.2. Grafos de intersección

Si F es una familia finita de conjuntos no vacíos, el grafo de intersección de la familia es quien representa la relación de intersección entre los conjuntos

de dicha familia. La siguiente figura muestra una familia de conjuntos y el grafo de intersección de dicha familia.



El problema de caracterizar grafos de intersección de familias de conjuntos con alguna topología, es interesante desde el punto de vista teórico y frecuentemente tiene aplicaciones en el mundo real.

Dado un grafo H , que tiene determinadas características, es interesante caracterizar a los grafos de intersección de familia de subgrafos de H que poseen una estructura específica.

En este caso, una **representación de un grafo** G es dada por el par (H, F) donde los elementos de F son subgrafos de H . *representación de un grafo*

Por ejemplo, los grafos *Cordales* fueron caracterizados en 1974 por Gavril [6] como grafos de intersección de familias de subárboles de un árbol.

Los grafos de *Intervalos* son grafos de intersección de familias de caminos de un camino.

Para clarificar al lector, recordaremos definiciones básicas sobre familias y la relación entre familias y grafos a través de operadores que serán usados en nuestro trabajo. Un estudio exhaustivo, del comportamiento de familias y operadores entre familias y grafos fue desarrollado en [10].

2.3. Familias

Una **familia** es un par (\mathbf{I}, \mathbf{F}) con I un conjunto finito no vacío y F una aplicación que asigna a cada $i \in I$ un conjunto no vacío finito que se notará F_i .

A cada F_i se lo denominará, **miembro** de la familia y a los elementos de $\bigcup_{i \in I} F_i$ **elementos** de la familia. De ahora en más cuando nos referimos a familias usaremos la siguiente notación $F = (F_i)_{i \in I}$.

Se dirá que dos familias $F = (F_i)_{i \in I}$ y $A = (A_j)_{j \in J}$ son **isomorfas** si existen 2 biyecciones $a : I \rightarrow J$ y $b : \bigcup_{i \in I} F_i \rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j$ tales que $b(F_i) = A_{a(i)}$ para todo $i \in I$. Más claramente, a cada miembro de la familia F le corresponde un único miembro de la familia A . En este trabajo no distinguiremos entre familias isomorfas. Una clase de familias es un subconjunto de familias cerradas por isomorfismo que notaremos **Familias**.

Se dirá que $F' = (F'_j)_{j \in J}$ es una **subfamilia** de $F = (F_i)_{i \in I}$ si para cada $j \in J$ existe un único $i \in I$ tal que $F_i = F'_j$.

Una familia se dice **separadora** si para cada $u \in \bigcup_{i \in I} F_i$ resulta $\bigcap_{i: u \in F_i} F_i = \{u\}$ (Figura 2.1).

Una familia se dice **intersectante** si para cada par F_i, F_j de la familia $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Si para cada subfamilia intersectante $F' = (F'_j)_{j \in I' \subset I}$ de $F = (F_i)_{i \in I}$ resulta que $\bigcap_{i \in I'} F_i \neq \emptyset$ se dirá que F' es **Helly** (Figura 2.1).

Una familia $(F_i)_{i \in I}$ es **reducida** cuando $i \neq j$ entonces $F_i \not\subseteq F_j$ para todo par $i, j \in I$.

Una familia $F = (F_i)_{i \in I}$ se dice **conforme** si para todo $i, j, k \in I$ existe $l \in I$ tal que $(F_i \cap F_j) \cup (F_j \cap F_k) \cup (F_i \cap F_k) \subseteq F_l$ (Figura 2.1).

Dado T un árbol, se dirá que la familia $F = (F_i)_{i \in I}$ es un **cubrimiento**

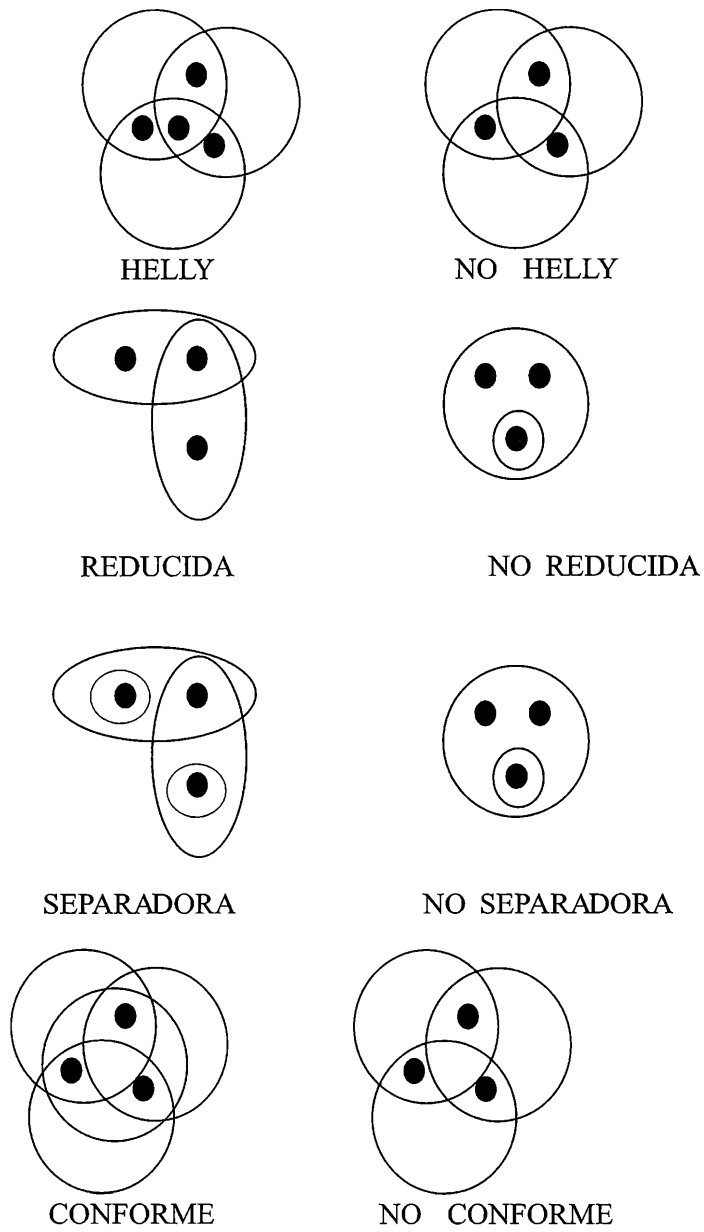
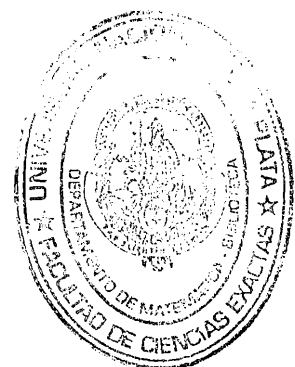


Figura 2.1: Familias



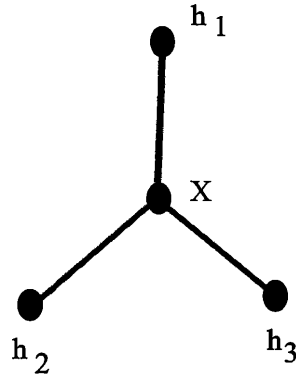


Figura 2.2: $F_1 = \{h_1, x, h_2\}$, $F_2 = \{h_2, x, h_3\}$

de T si $\bigcup_{i \in I} F_i \subseteq V(T)$, y para cada arista uv de T existe algún F_i tal que $u, v \in F_i$ (Figura 2.2).

2.4. Operadores

Se definirá el *operador de intersección* de una familia a una aplicación que asigna a cada familia F un grafo, notado $L(F)$, $V(L(F)) = I$ y $E(L(F)) = \{ij | i \neq j \text{ y } F_i \cap F_j \neq \emptyset\}$. Figura 2.3

operador de intersección

Se definirá el *operador familia de cliques* de un grafo a una aplicación que asigna a cada grafo G la familia de sus cliques, $C(G) = (F_i)_{i \in I}$ donde I es el conjunto de todos los cliques de G y $F_i = i$ para todo $i \in I$. Figura 2.3

operador familia de cliques

Se define el *operador dual* de una familia, a una aplicación que asigna a cada familia $F = (F_i)_{i \in I}$ una familia notado $D(F)$, $D(F) = (A_j)_{j \in J}$ donde $J = \bigcup_{i \in I} F_i$ y $A_j = \{i \in I | j \in F_i\}$. Figura 2.3

operador dual

Se define el *operador 2 sección* de una familia, a una aplicación que asigna a cada familia $F = (F_i)_{i \in I}$, un grafo notado $S(F)$ cuyos vértices son

operador 2 sección

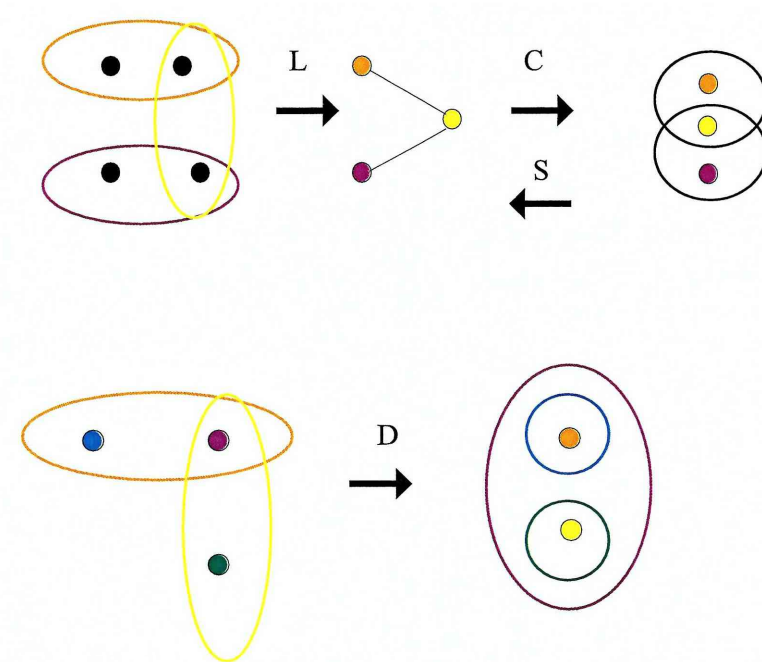


Figura 2.3: Operadores: L, C, D, S

los elementos de la familia F y dos vértices son adyacentes si pertenecen al mismo miembro de la familia (Figura 2.3).

Teorema 2.4.1 F una familia.

1. F es conforme si y sólo si $D(F)$ es Helly.
2. F es separadora si y sólo si $D(F)$ es reducida.

Teorema 2.4.2 1. $DD=I$ (la identidad de familias),

2. $SC=I$ (la identidad de grafos),

3. $L=SD$, $S=LD$, $CS=I$ para familias conformes y reducidas.

4. $CL = D$ para familias Helly y separadoras.

El siguiente resultado corolario del anterior asegura que la única familia Helly y separadora cuya intersección es el grafo G debe ser la familia dual de sus cliques.

Corolario 2.4.1 Si F es una familia Helly y separadora tal que $L(F) = G$ entonces $F = DC(G)$.

Demostración: Si $L(F) = G$ entonces $CL(F) = C(G)$ y $DCL(F) = DC(G)$ pero $CL = D$ para familias Helly y separadoras, con lo cual $DD(F) = DC(G)$. De aquí $F = DC(G)$. \square

El **operador clique**, notado por K , asigna a cada grafo G , un grafo que se notará $K(G)$ y se dirá **grafo clique** de G , cuyos vértices son los cliques de G y dos cliques son adyacentes si y sólo si su intersección es no vacía.

El operador clique resulta ser la composición de los operadores L y C esto es $K = LC$.

El **operador clique valuado**, notado por K_v , asigna a cada grafo G su grafo clique junto con una valuación de las aristas del grafo clique, dada por el cardinal de la intersección de los cliques incidentes en la arista. A el grafo $K_v(G)$ también lo denominaremos **grafo clique valuado** de G (Figura 2.4).

2.5. Cordales, UV, DV, RDV e Intervalos

La clase de grafos cordales fue caracterizada en 1974 por Gavril [6] como los grafos de intersección de subárboles en un árbol, siempre considerando la

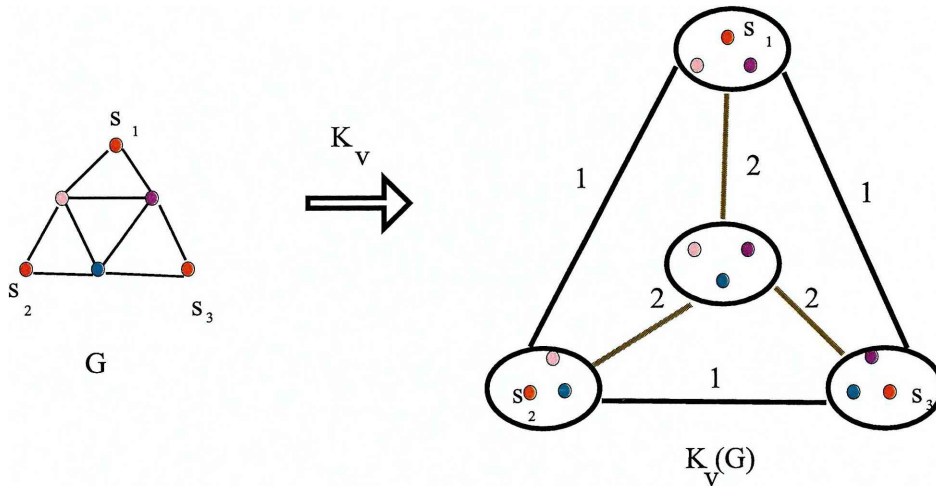


Figura 2.4: Operador K_v

intersección de sus conjuntos de vértices.

Posteriormente, Gavril [6] y Monma y Wei [19], definieron subclases de los grafos cordales de una forma muy natural.

Un grafo G es **UV**(undirected vertex), si es el grafo de intersección de una familia de caminos en un árbol. Dado un árbol T y una familia de caminos F cuya intersección es G , el par (T, F) es llamado una **representación UV** de G . Claramente, la familia de caminos F en un árbol es una familia de subárboles de ese árbol, con lo cual G es *cordal*, pero no todo grafo cordal es *UV* (Figura 2.5). La notación *UV* fue introducida por Monma y Wei [19], en 1986, antes de esto, los grafos *UV* se denominaban grafos de caminos no direccionados.

Un grafo G es **DV**(directed vertex), si es el grafo de intersección de caminos dirigidos en un árbol dirigido. Dado un árbol dirigido T y una familia de caminos dirigidos F de T cuya intersección es G , el par (T, F) es

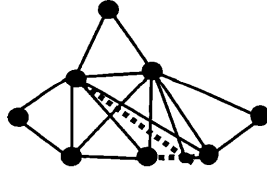


Figura 2.5: Cordal no UV

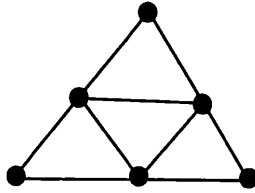


Figura 2.6: UV no DV

llamado una **representación DV** de G . Es claro que si no se consideran las direcciones de aristas de T y de los caminos F , una representación DV es también una representación UV para el mismo grafo; pero no todo grafo UV es DV (Figura 2.6). Los grafos DV fueron considerados por primera vez por Momna y Wei [19], en 1986.

Un grafo G es **RDV** (rooted directed vertex), si es el grafo de intersección **RDV** de caminos dirigidos en un árbol dirigido enraizado. Si T es un árbol dirigido enraizado y F una familia de caminos dirigidos de T cuya intersección es G , el par (T, F) es llamado representación RDV de G . Claramente, una **representación RDV** es una representación DV , además si no se considera las direcciones en las aristas de T y de los caminos F , una representación RDV es también una representación UV del mismo grafo. Pero no todo grafo DV es RDV (Figura 2.7). La notación RDV fue introducida por Momna y Wei [19] en 1986, antes de eso, los grafos RDV eran llamados grafos de

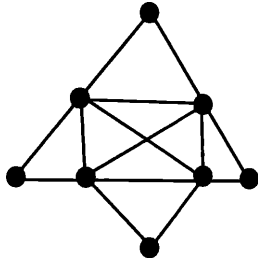


Figura 2.7: DV no RDV

caminos direccionados.

Los grafos de *Intervalos*, originalmente definidos como grafos de intersección de familias de intervalos de la recta real, son los grafos de intersección de caminos en un árbol que es un camino. Naturalmente es posible dirigir y enraizar un árbol que es un camino, de manera que los caminos sean dirigidos, resulta evidente que la representación de *Intervalos* es una representación *RDV* del mismo grafo. Pero no todo grafo *RDV* es de *Intervalos*.

Luego es claro que $Intervalos \subset RDV \subset DV \subset UV$ (Figura 2.8).

2.5.1. Construyendo familias separadoras de subárboles

Es sabido que si F es una familia de subárboles de un árbol entonces F es una familia *Helly* y por ende las familias que representan grafos *UV*, *DV* y *RDV* son *Helly*.

Si F es una familia de subárboles de un árbol T cuya intersección es el grafo G , es posible aplicar un procedimiento natural para conseguir una familia F' de subárboles de un árbol T' de modo de minimizar la cantidad de

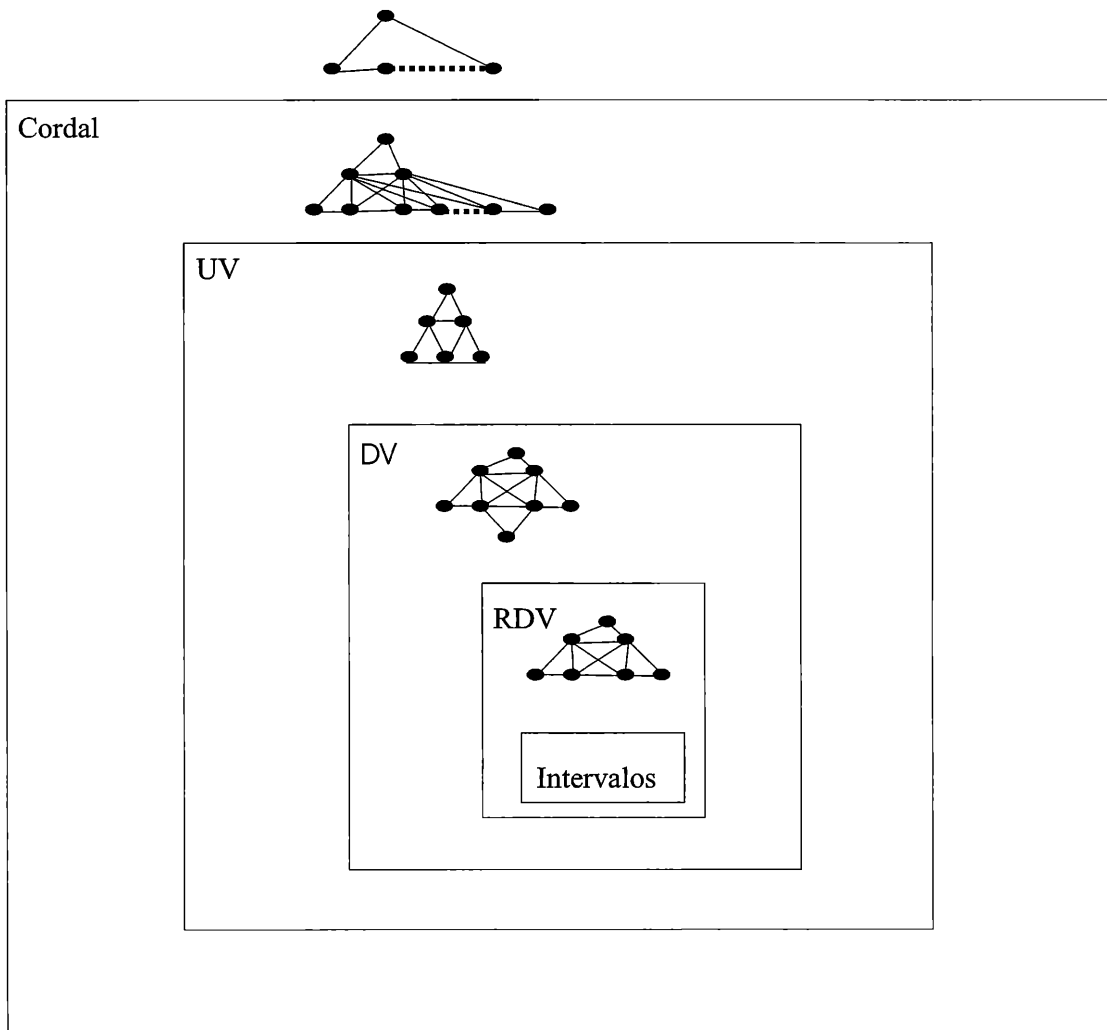


Figura 2.8: Relación entre clases

vértices del árbol, en este contexto y asumiendo las definiciones del párrafo anterior se trata de construir un árbol y una familia de subárboles separadora que siga representando al mismo grafo G . Más formalmente,

Sea $(T, (F_v)_{v \in V(G)})$ un árbol T y una familia de subárboles de T cuya intersección es el grafo G .

Si $xy \in E(T)$ y $\{v \in V(G); x \in F_v\} \subseteq \{v \in V(G); y \in F_v\}$ entonces se definen T' y $(F'_v)_{v \in V(G)}$ de la siguiente manera:

- T' es el árbol obtenido por contracción de la arista xy en T en el vértice y
- para cada $v \in V(G)$:
 - Si $x \in F_v$ luego $y \in F_v$ entonces F'_v es obtenida por contracción de la arista xy en F_v en el vértice y .
 - Si $x \notin F_v$ entonces $F'_v = F_v$.

Se dice brevemente que (T', F') es obtenida por *contracción de xy* de (T, F) . En la Figura 2.9 puede observarse un ejemplo del proceso antes descrito.

Teorema 2.5.1 *Si (T', F') es obtenida por contracción de xy en (T, F) entonces el grafo de intersección de F' es el mismo que el de F .*

Demostración: Los únicos miembros de la familia F que fueron modificados son los que poseen a x , pero por la hipótesis, todos ellos también tienen a y . Luego las intersecciones de ambas familias se mantienen invariantes. \square

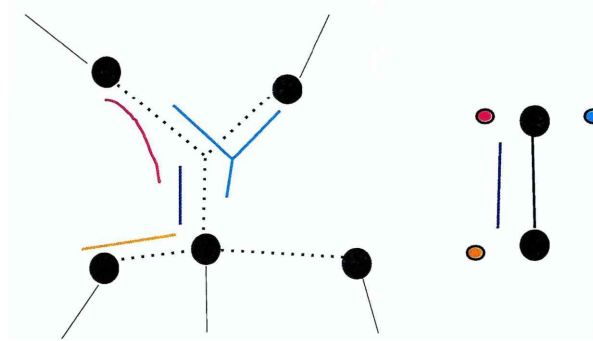


Figura 2.9: Ejemplo proceso contracción

Si $(T, (F_v)_{v \in V(G)})$ es una familia Helly cuya intersección es el grafo G pero $(F_v)_{v \in V(G)}$ no es separadora entonces existe un $x \in \bigcup_{v \in V(G)} F_v$ tal que $\bigcap_{x \in F_v} F_v$ no es sólo x , pero es un subárbol L de T , luego aplicando reiteradamente el procedimiento descrito anteriormente sobre las aristas de L , se obtiene una familia de subárboles de un árbol la cual es Helly y separadora cuya intersección es el grafo G .

La Figura 2.10, muestra un ejemplo de lo antes expuesto.

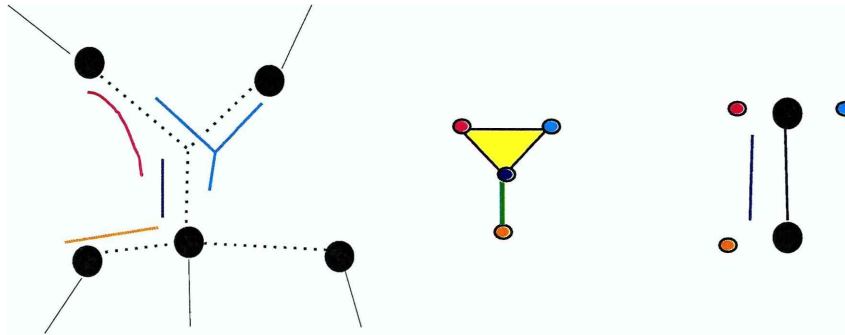


Figura 2.10: Dos representaciones del mismo grafo

Decimos entonces que la familia Helly y separadora es obtenida por *con-*

tracción.

Se obtiene como consecuencia que los árboles y las familias de subárboles pueden restringirse a subárboles del grafo clique.

El resultado fue probado por Gavril y enunciado como sigue:

Teorema 2.5.2 (Gavril) *Un grafo G es Cordal si y sólo si existe un árbol T tal que $V(T)$ es el conjunto de cliques de G y para cada vértice v , C_v induce un subárbol de T .*

Si T es un árbol cumpliendo las condiciones del Teorema de Gavril se llama **árbol clique** o **característico** de G . Es claro que todo árbol clique de G es un árbol generador de $K(G)$ ó de $K_v(G)$. árbol clique

Si T es un árbol clique de G , para cada $v \in V(G)$ se tiene que C_v induce un subárbol de T que será destacado en las figuras como un subárbol "paralelo" a T (Figura 2.11).

Esta caracterización es conocida como Teorema del árbol clique que fue probado por Gavril [6, 7, 8] para las clases *Cordal, UV, RDV* y por Monma y Wei [19] para la clase *DV*.

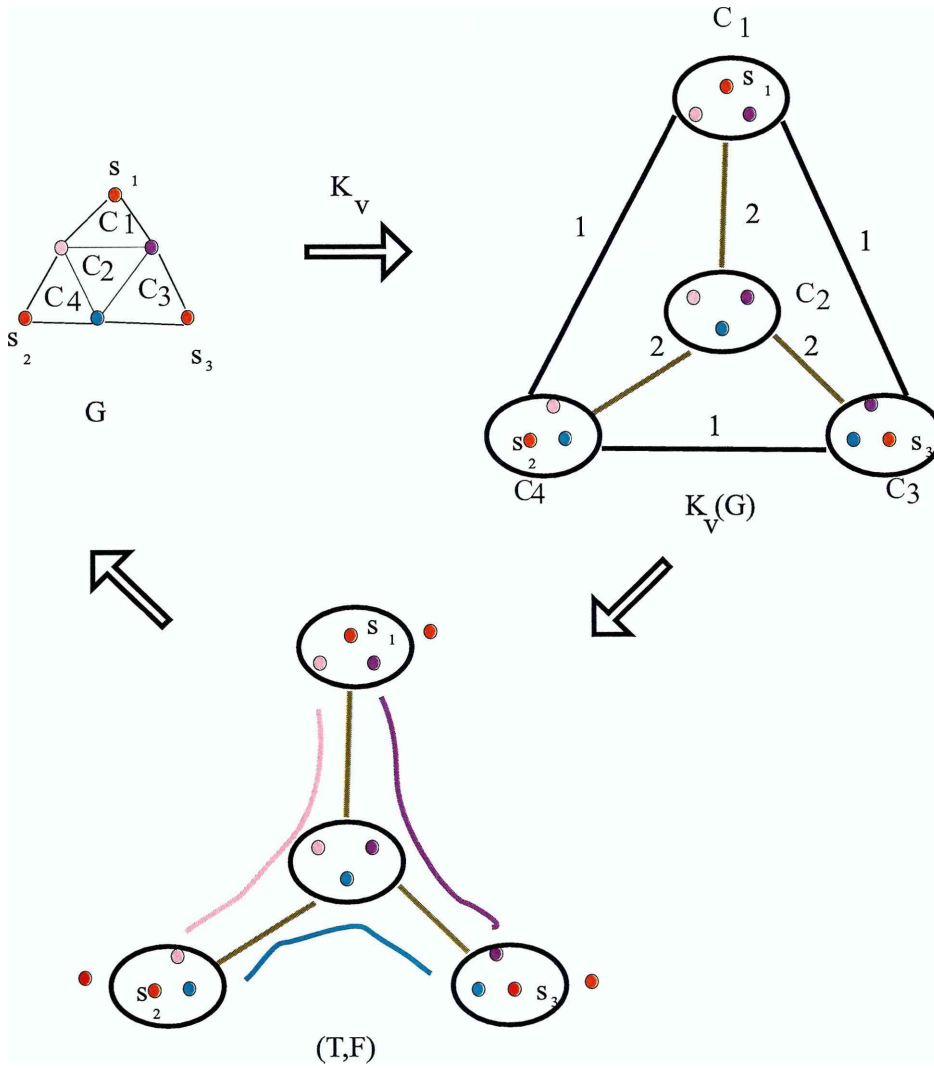


Figura 2.11: Representación de G

- Teorema 2.5.3 (Monma and Wei)**
1. $G \in RDV$ si y sólo si existe un árbol T dirigido y enraizado, tal que $V(T) = C(G)$ y para todo v vértice de G , C_v induce un camino dirigido de T .
 2. $G \in DV$ si y sólo si existe un árbol T dirigido, tal que $V(T) = C(G)$ y para todo v vértice de G , C_v induce un camino dirigido en T .
 3. $G \in UV$ si y sólo si existe un árbol T , tal que $V(T) = C(G)$ y para todo v vértice de G , C_v induce un camino en T .
 4. $G \in Cordal$ si y sólo si existe un árbol T , tal que $V(T) = C(G)$ y para todo v vértice de G , C_v induce un subárbol en T .

Esto será de gran utilidad en las secciones próximas para el estudio de dichas clases a través de sus representaciones.

Una clase \mathcal{F} de grafos se dice *hereditaria* si y sólo si es cerrada por subgrafos inducidos por vértices. Esto es si G es un grafo de \mathcal{F} y v es un vértice de G resulta $G - v$ ser un grafo de \mathcal{F} .

Se sabe que las clases hereditarias admiten una **caracterización por subgrafos prohibidos**, es decir existe una clase $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \{H : H \text{ no pertenece a } \mathcal{F}, H - v \in \mathcal{F} \text{ para todo } v \in V(H)\}$, tal que $G \in \mathcal{F}$ si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido a ningún miembro de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

Como las clases de grafos *Cordales*, *UV*, *DV*, *RDV*, *Intervalos*, son hereditarias, admiten una caracterización por subgrafos prohibidos.

2.5.2. Caracterizaciones por Prohibidos

Las clases de *Intervalos* y *DV* han sido caracterizadas por subgrafos prohibidos. Más específicamente, Lekekerker y Boland [14] probaron que un grafo G no es de *Intervalos* si y sólo si tiene una 3-asteroidal, a partir de esto, construyen grafos minimales que tienen una y sólo una 3-asteroidal.

De esto, resultó que G es grafo de *Intervalos* si y sólo si no contiene como subgrafos inducidos a los de la Figura 2.12.

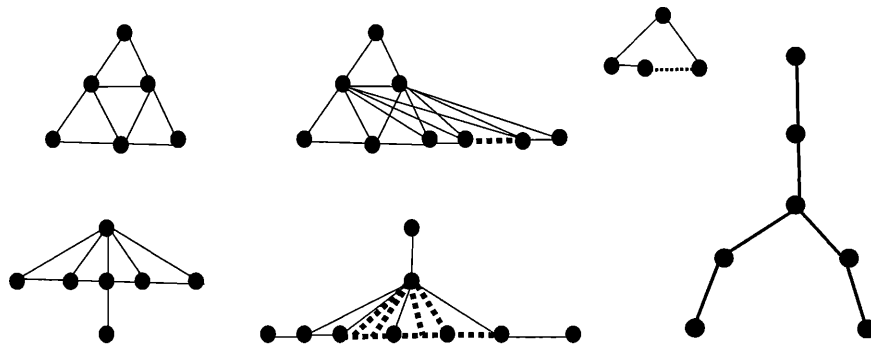


Figura 2.12: Prohibidos de Intervalos

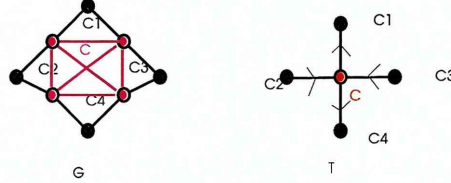
Por otra lado, Monma y Wei presentaron un algoritmo de reconocimiento para las clases *RDV*, *DV*, *UV* y *Cordal*. Este algoritmo consiste en separar un grafo, en subgrafos, por medio de los denominados "clique separadores"; chequear la forma de los "átomos" resultantes y finalmente verificar si cada etapa de la separación es válida. Más claramente, la idea de descomponer el grafo en subgrafos, generar los átomos y buscar caracterizaciones de los átomos en cada clase.

Recordemos algunas definiciones presentadas por Monma y Wei.

Un clique C es *separador* de G , grafo conexo, si $G - C$ no es conexo y un *separador*

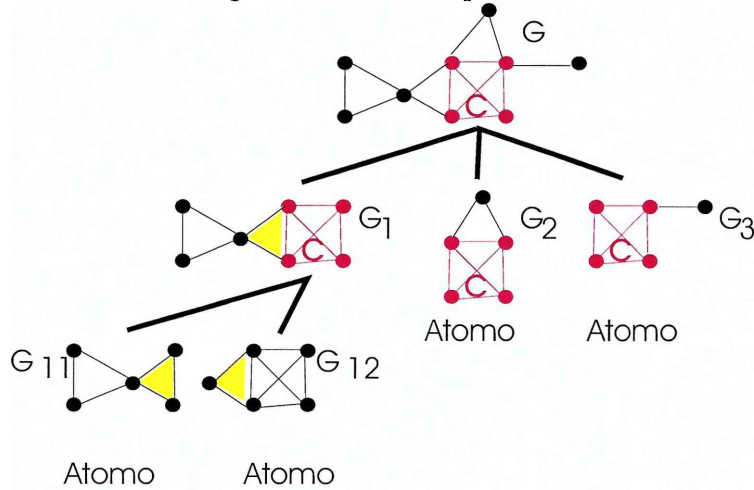
átomo es un grafo conexo sin cliques separadores. Por ejemplo en la Figura **átomo** 2.13, puede observarse que C es un átomo del grafo G .

Figura 2.13: G grafo DV y su único árbol clique.



Si C es un clique separador de G los vértices de $G - C$ quedan particionados en conjuntos V_1, V_2, \dots, V_s . Es claro que si $G_i = G[V_i \cup C]$, $i = 1, \dots, s$; el proceso de descomposición puede aplicarse recursivamente sobre cada G_i . Esta descomposición se representa por un árbol cuya raíz es G , cada vértice interno es un clique separador de G y cada hoja un átomo de G . Por ejemplo ver Figura 2.14.

Figura 2.14: Descomposición



Si C es un clique que separa a G en grafos $G_i = G[V_i \cup C]$, y $v \in C$ se dice que G_i es *vecino* de v si y sólo si existe un vértice de V_i adyacente a v . *vecino*

Si C es un clique separador de G , se dicen *relevantes*, a los cliques de G distintos a C que se intersectan con C . *relevantes*

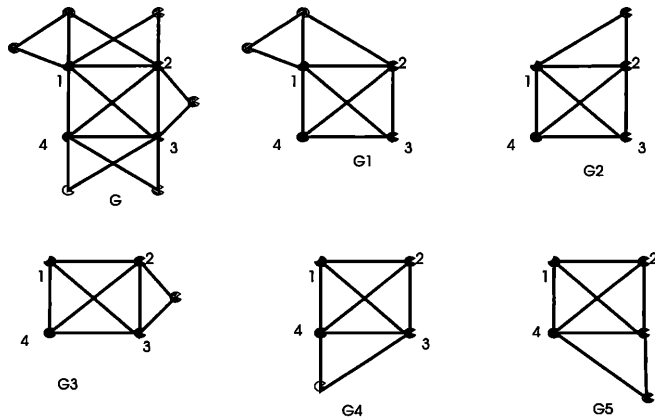
Recordemos que dos cliques relevantes C_1, C_2 de G se dicen *no atachados* si $C_1 \cap C \cap C_2 = \emptyset$ y *atachados* en caso contrario; se dice que C_1 *domina* a C_2 si $C_1 \cap C \supseteq C_2 \cap C$ (respectivamente se dice que C_1 *domina propiamente* a C_2 si la contención es estricta); C_1 y C_2 se dicen *congruentes* si son atachados y $C_1 \cap C = C_2 \cap C$; C_1, C_2 se denominan *antipodales* si son atachados y no se dominan entre sí. *no atachados*
atachados
domina
domina propiamente
congruentes
antipodales

Respectivamente se dice que dos grafos separados por un clique separador C de G ; G_1, G_2 son no atachados si para cada par de cliques C_1 clique de G_1, C_2 clique de G_2 son no atachados; caso contrario se dirá que son atachados. Se dice que G_1 domina a G_2 si son atachados y cada clique C_1 de G_1 domina a todos los cliques C_2 de G_2 o C_1 y C no son atachados (respectivamente G_1 domina propiamente a G_2 si G_1 domina a G_2 pero G_2 no domina a G_1).

Se dice que G_1, G_2 son congruentes si G_1 domina a G_2 y G_2 domina a G_1 , en este caso, C_1 es congruente con C_2 para todo C_1 clique de G_1 y todo C_2 clique de G_2 . Por último, se dice que G_1 y G_2 son antipodales si son atachados y no se dominan entre sí.

Presentamos un ejemplo que clarifica dichos conceptos, ver Figura 2.15, en esa figura G_3 y G_i son antipodales para todo $i \in \{1, 2, 4, 5\}$, G_4 y G_5 son congruentes, G_2 domina propiamente a G_1 y G_i, G_j son no atachados para $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{4, 5\}$.

Figura 2.15: Ejemplo de separación de G en G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 por $C = \{1, 2, 3, 4\}$.



A partir de separar un grafo G por grafos G_i , Monma y Wei [19] definen el grafo de los antipodales cuyos vértices son los G_i y G_i, G_j son adyacentes para $i \neq j$ si y sólo si G_i y G_j son antipodales. Luego de estudiar el comportamiento de los grafos antipodales, Monma y Wei enuncian y prueban el Teorema separador para caracterizar a las clases RDV , DV , UV y $Cordal$. Más aún, describen a partir de este teorema un algoritmo de reconocimiento para las clases que construye un árbol clique. El teorema no caracteriza de manera única un árbol clique.

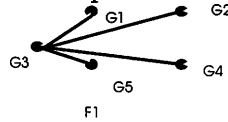
Teorema 2.5.4 (Teorema Separador de Monma y Wei) *Sea C clique separador de un grafo $G=(V,E)$ en subgrafos $G_i = G(C, V_i)$, $1 \leq i \leq s$, $s \geq 2$.*

1. G es DV si y sólo si cada G_i es DV , y cada G_i puede ser 2 coloreado tal que pares no antipodales tienen el mismo color.

2. G es UV si y sólo si cada G_i es UV , y cada G_i puede ser 2 coloreado tal que pares no antipodales tienen el mismo color y para cada $v \in C$, el conjunto de subgrafos vecinos a v es 2 coloreable.
3. G es $Cordal$ si y sólo si cada G_i es $Cordal$.
4. G es RDV si y sólo si cada G_i es RDV , y cada G_i es 2 coloreable tal que pares no antipodales tienen el mismo color, y que en un color cada subgrafo tiene un RDV árbol clique enraizado en C y que en el otro color no hay subgrafos disjuntos y cada subgrafo (con una posible excepción) tiene un RDV árbol clique enraizado en un clique relevante. El subgrafo excepción, si existe, es dominado por todo otro subgrafo del mismo color y tiene un RDV árbol clique en el cual el nodo C tiene grado de salida 0.

En particular para testear si un grafo es DV , verifican si cada G_i es DV y si el grafo de los antipodales es 2 coloreable, por ejemplo ver Figura 2.16.

Figura 2.16: Grafo de antipodales de G de la Figura 2.15



Como ya se mencionó anteriormente, Panda [20] caracterizó a la clase DV por subgrafos prohibidos, para ello se basó en la caracterización de Monma y Wei. La técnica empleada por Panda, para construir la familia de prohibidos, consiste en buscar condiciones para saber cuando el grafo de los antipodales no es 2 coloreable, así construye la familia de grafos prohibidos para la clase DV .

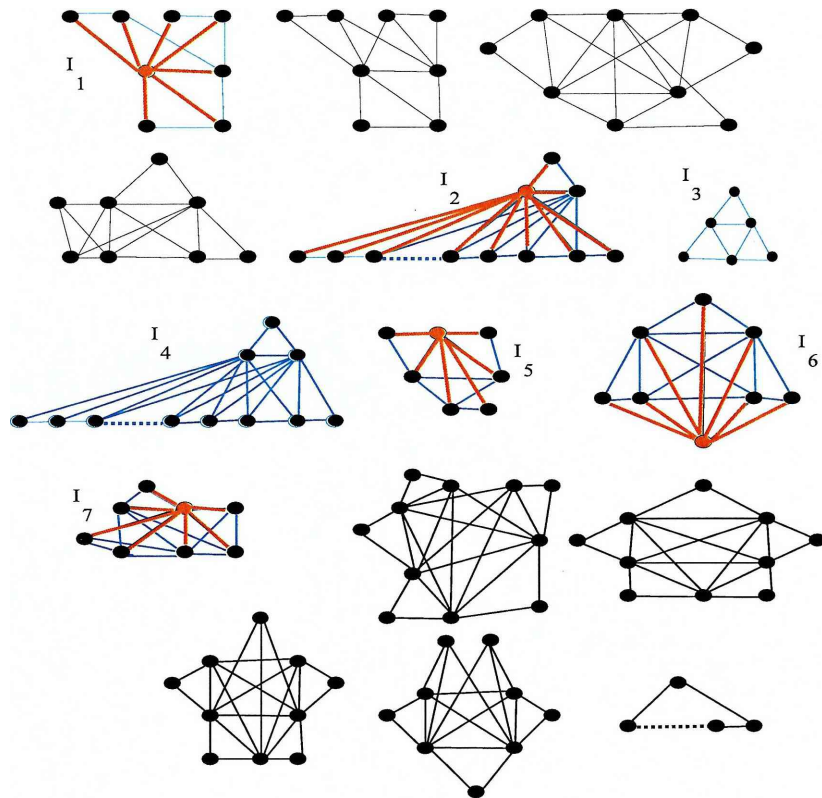


Figura 2.17: Prohibidos DV

Teorema 2.5.5 (Panda) G es DV si y sólo si no tiene como subgrafos inducidos a los de la Figura 2.17

Observar que en la figura anterior aparecen los prohibidos de intervalos (en celeste). Más claramente, I_3 e I_4 son prohibidos de intervalos; I_1, I_2, I_5, I_6, I_7 son prohibidos de intervalos con la adición de un vértice universal (en rojo).

2.6. Representaciones canónicas.

En 1999 McKee [17], relaciona los árboles cliques de un grafo cordal con los árboles generadores de peso máximo de $K_v(G)$.

Lema 2.6.1 (McKee) *G grafo Cordal. T es un árbol clique de G si y sólo si $|V(G)| = \sum_{Q \in V(T)} |Q| - \sum_{QQ^* \in E(T)} |Q \cap Q^*|$ siendo $Q, Q^* \in V(T)$ y $QQ^* \in E(T)$.*

Observar que $\sum_{QQ^* \in E(T)} |Q \cap Q^*|$ es el peso del árbol T como árbol generador de $K_v(G)$. McKee prueba que $|V(G)|$ acota superiormente a la $\sum_{Q \in V(T')} |Q| - \sum_{QQ^* \in E(T')} |Q \cap Q^*|$, siendo T' un árbol generador cualquiera y obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1 (McKee) *Un grafo G es Cordal si y sólo si algún árbol de peso máximo de $K_v(G)$ es árbol clique. Más aún, todo árbol de peso máximo de $K_v(G)$ es árbol clique.*

Por otro lado, como ya vimos, las subclases de grafos *Cordales*, en las que estamos interesados, tienen un vínculo con los árboles cliques a través del Teorema del árbol clique (Teorema 2.5.3).

Luego por los resultados de Mckee se puede obtener el siguiente Teorema.

- Teorema 2.6.2** 1. $G \in RDV$ si y sólo si existe un árbol T enraizado, generador de $K_v(G)$ y de peso máximo, para todo v vértice de G , C_v induce un camino dirigido en T .
2. $G \in DV$ si y sólo si existe un árbol T generador de $K_v(G)$ y de peso máximo, para todo v vértice de G , C_v induce un camino dirigido en T .
3. $G \in UV$ si y sólo si existe un árbol T generador de $K_v(G)$ y de peso máximo, para todo v vértice de G , C_v induce un camino en T .
4. $G \in Cordal$ si y sólo si existe un árbol T generador de $K_v(G)$ y de peso máximo, para todo v vértice de G , C_v induce un subárbol en T

A un árbol T cumpliendo 1), 2), 3) o 4 se lo llamará respectivamente RDV -árbol clique, DV -árbol clique, UV -árbol clique o árbol clique respectivamente.

Luego si un grafo $Cordal$ es o no de *Intervalos*, RDV , DV , UV se restringe al estudio de los árboles generadores maximales de K_v y las familias C_v respectivas.

Al par $(T, (C_v)_{v \in V(G)})$ siendo T un árbol clique se lo denomina **representación canónica** de G .

*representación
canónica*

Observar que en todo T árbol clique de G , las hojas de T deben ser cliques del grafo que poseen un vértice simplicial de G .

El siguiente resultado será de utilidad cuando estudiemos representaciones canónicas de subgrafos de un grafo.

Teorema 2.6.3 *T un árbol, F una familia de subárboles Helly y separadora de T tal que toda arista de T pertenece a un miembro de la familia. Entonces el grafo de intersección de F es un grafo cordal G y (T, F) es una representación canónica de G .*

Demostración: Es claro que $G = L(F)$ es un grafo cordal, como F es Helly y separadora, por el Corolario 2.4.1, $F = DC(G) = (C_v)_{v \in V(G)}$. Luego T es un árbol cuyos vértices son los cliques de G . Además si AB es una arista de T , existe por hipótesis un miembro F_v de la familia F que tiene a A y a B . Es claro que $v \in A \cap B$. Luego AB resulta una arista de $K(G)$ con lo cual (T, F) resulta una representación canónica de G . \square

Capítulo 3

Subgrafos inducidos y construcción de árboles clique

Como ya fue mencionado previamente, los subgrafos inducidos de un grafo cordal son grafos cordales. En este capítulo analizaremos si existen vínculos entre los árboles cliques del grafo menor y los árboles cliques del grafo dado. En la Figura 3.1 podemos observar como ejemplo un grafo G cordal, un subgrafo inducido G' , $K(G')$ no es un subgrafo inducido de $K(G)$. Más aún, el árbol clique de G' que es una cadena, no es un subárbol inducido de el único árbol clique de G .

3.1. Contracción

Una operación que permite obtener un árbol clique de cualquier subgrafo conexo de un grafo cordal a partir de un árbol clique del grafo total es la contracción. Claro que el árbol obtenido no será necesariamente un subárbol

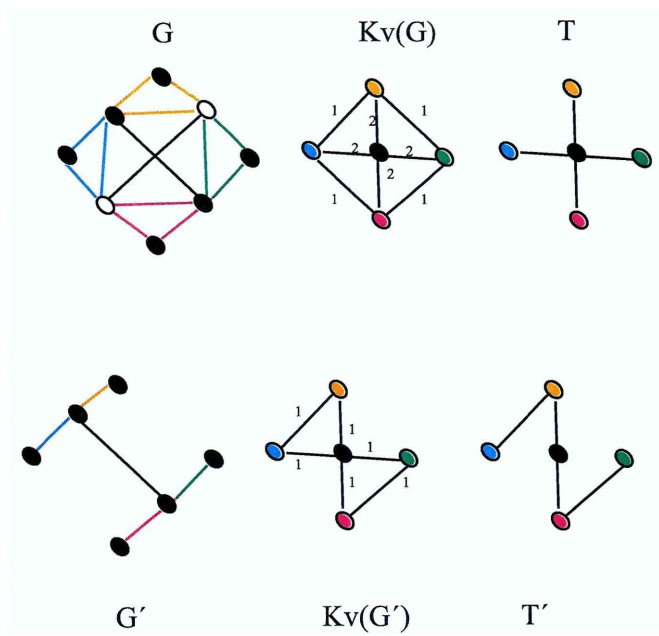


Figura 3.1: $G, G', K_v(G), K_v(G')$

del total.

Sea G un grafo cordal y w un vértice de G tal que $G - w$ es conexo. Si $(T, F) = (C_v)_{v \in V(G)}$ es una representación canónica de G entonces es claro que $(T, (C_v)_{v \in V(G-w)})$ es una representación de $G - w$ como grafo de intersección de subárboles de T . Naturalmente la nueva familia $F - F_w = (C_v)_{v \in V(G-w)}$ es Helly pero podría haber perdido la propiedad de ser separadora de los vértices de T . La Figura 3.2 muestra el caso en que la familia $F - F_w$ no es separadora de vértices de T .

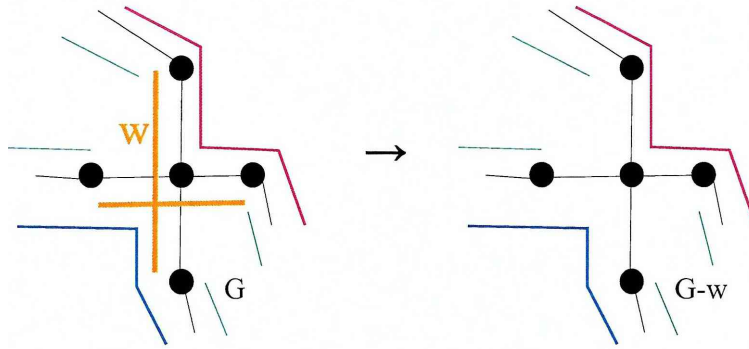


Figura 3.2: Representación de G y $G-w$

Utilizando el procedimiento descrito en 2.5.1 a T y a la familia $F - F_w$ se puede conseguir un nuevo árbol T' y una nueva familia F' de subárboles de T' Helly separadora y que represente al grafo $G - w$. La Figura 3.3 ejemplifica el procedimiento descrito en 2.5.1 aplicado a T y a la familia $F - F_w$ y se obtiene así, un árbol T' y una familia separadora F' que representa a $G - w$.

Es decir (T', F') será una representación canónica de $G - w$ obtenida por contracción de (T, F) .

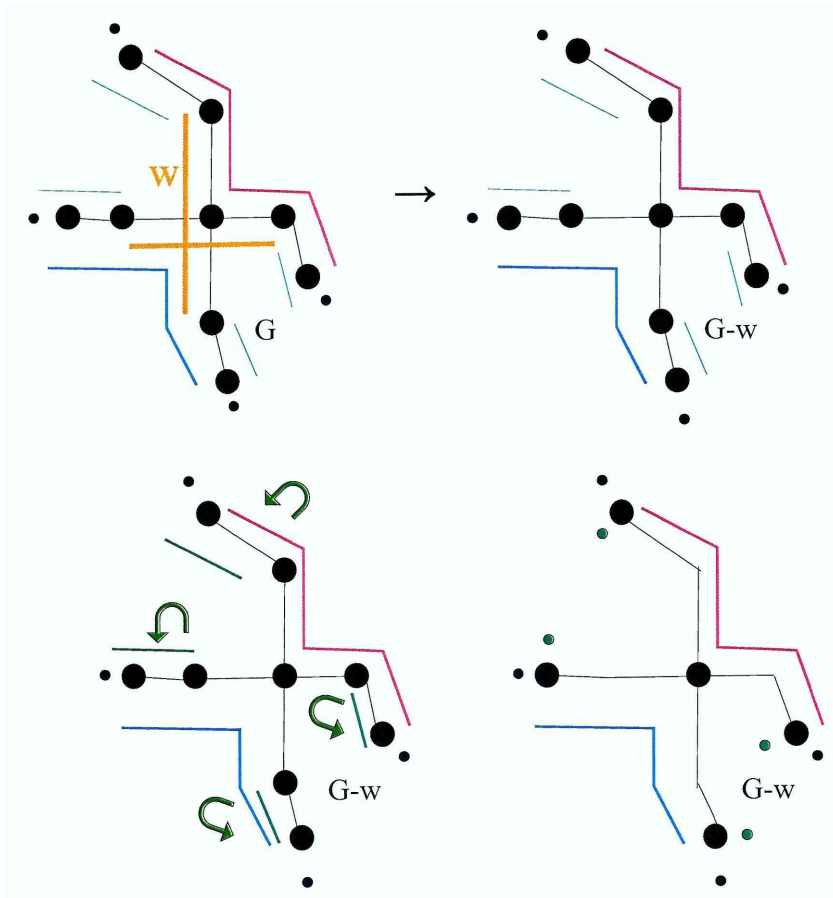


Figura 3.3: Representación canónica obtenida por contracción

La Figura 3.4 muestra un caso particular en el cual w es un vértice simplicial.

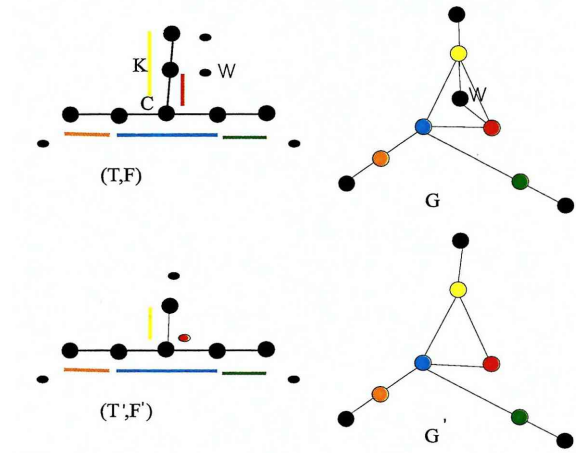


Figura 3.4: Técnica contracción

Por último en la Figura 3.5 se muestra un ejemplo en el cual w es simplicial y la contracción deja invariante al árbol.

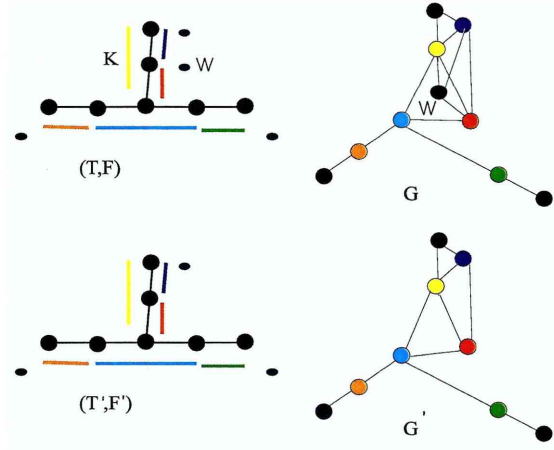


Figura 3.5: Técnica contracción

3.2. Poda

Existe una forma simple de obtener subgrafos inducidos de un grafo cordal tal que cada árbol clique del subgrafo es un subárbol de algún árbol clique del grafo.

Teorema 3.2.1 Sean G un grafo cordal, T un árbol clique de G y T_0 un subárbol de T . Si G_0 es el subgrafo de G inducido por todos los vértices de G pertenecientes a cliques de $V(T_0)$ entonces:

- T_0 es un árbol clique de G_0 .
- $(T_0, (C_v \cap V(T_0))_{v \in V(G_0)})$ es una representación canónica de G_0 .

Demostración: Los vértices de G_0 son exactamente los vértices v de G tales que $C_v \cap V(T_0) \neq \emptyset$. Además, dado que $(C_v)_{v \in V(G)}$ es separadora, la

familia $(C_v \cap V(T_0))_{v \in V(G_0)}$ es también separadora. Por otro lado, dado que $(C_v)_{v \in V(G)}$ es una familia de subárboles de T , $(C_v \cap V(T_0))_{v \in V(G_0)}$ es una familia de subárboles de T_0 , luego es Helly y es claro que cubre las aristas de T_0 . Claramente la intersección de dicha familia es G_0 .

Luego por el Teorema 2.6.3, $(T_0, (C_v \cap V(T_0))_{v \in V(G_0)})$ es una representación canónica de G_0 y T_0 es un árbol clique de G_0 . □

Se dirá que T_0 se obtiene de T por *poda* y se llamará G_{T_0} al subgrafo G_0 . *poda*

En la Figura 3.6 se muestra un caso particular en que T_0 es obtenido de T borrando un vértice pendiente.

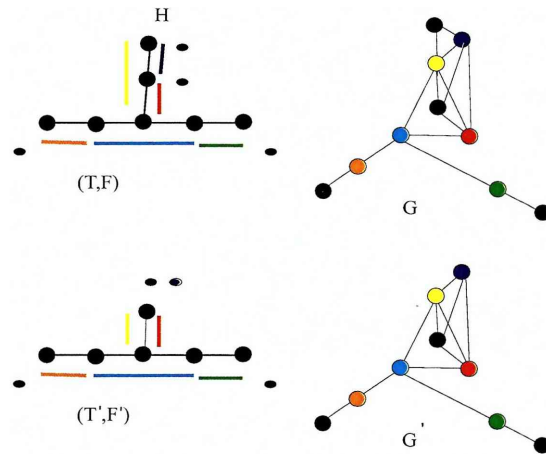


Figura 3.6: Técnica-poda

Observar que la poda es una sucesión de contracciones considerando los vértices simpliciales de los cliques que son hojas de los árboles obtenidos en cada paso.

3.3. Injerto

Sea T un árbol clique de un grafo G . Notaremos $T[C, C']$, el *camino inducido* en T , entre C y C' , cliques de G .

3.3.1. Injerto simple

La Figura 3.7 ejemplifica la técnica de injerto simple.

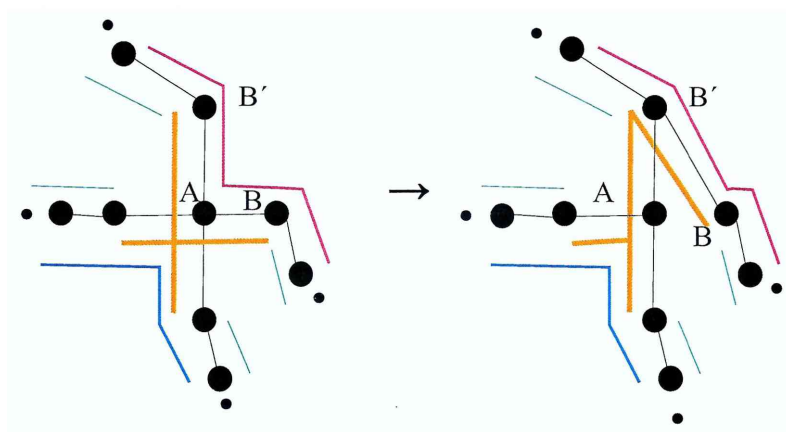


Figura 3.7: Injerto simple

Teorema 3.3.1 Sea G un grafo cordal, T un árbol clique de G y AB una arista de T . Si B' es otro vértice de T tal que $A \in T[B, B']$, $A \cap B \subseteq B'$ entonces $T' = T - AB \cup BB'$ es un árbol clique de G .

Demostración: Observar que $A \cap B \subseteq B \cap B'$, además como $A \in T[B, B']$, $T \cup BB'$ tiene un ciclo que contine a AB entonces $T' = T - AB \cup BB'$ es un árbol generador de $K(G)$. Pero T es un árbol de peso máximo de $K_v(G)$ con lo cual $|A \cap B| = |B \cap B'|$ y T' tiene el mismo peso de T . Por el Teorema

2.6.1, T' es un árbol clique. □

3.3.2. Invarianza de cubridores

Si G es un grafo cordal, T un árbol clique de G y $e = AB$ es una arista de T , llamamos *cubridores de e* , notado $cub(e)$ al conjunto de vértices v de G tal que C_v cubre a la arista e . Más formalmente, $cub(e) = A \cap B$. *cubridores de e*

La familia de cubridores de las aristas de cualquier árbol clique de G es invariante, como se prueba en los siguientes resultados.

Teorema 3.3.2 *Si G es un grafo cordal, T un árbol clique de G y $e \in E(T)$ entonces para todo árbol clique \tilde{T} de G existe $\tilde{e} \in E(\tilde{T})$ tal que $cub(e) = cub(\tilde{e})$.*

Demostración:

Como T y \tilde{T} son árboles de peso máximo de $K_v(G)$ existe una secuencia de árboles de peso máximo: T_1, \dots, T_k con $T_1 = T$ y $T_k = \tilde{T}$ tal que $T_i = T_{i-1} - e_{i-1} \cup \widetilde{e_{i-1}}$ para ciertas aristas e_1, \dots, e_k y $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ para $i = 2, \dots, k$. Luego basta comprobar que el Teorema vale entre T_{i-1} y T_i .

Por ser T_i un árbol clique de G todos los vértices que cubren e_{i-1} tienen que haber cubierto $\widetilde{e_{i-1}}$ y recíprocamente. □

Corolario 3.3.1 *Sea G un grafo cordal, T y \tilde{T} árboles clique de G . Entonces $(cub(e))_{e \in E(T)} = (cub(e))_{e \in E(\tilde{T})}$.*

Sean T, \tilde{T} árboles clique de un grafo G , $e \in E(T)$, $\tilde{e} \in E(\tilde{T})$, se dirá que e y \tilde{e} son *aristas equivalentes* si $cub_T(e) = cub_{\tilde{T}}(\tilde{e})$, es decir si e y \tilde{e} tienen el mismo conjunto de cubridores.

aristas equivalentes

3.3.3. Injerto compuesto

Sea G un grafo cordal, T un árbol clique de G y T_0 un subárbol de T . Sean T_1, T_2, \dots, T_k las componentes conexas no triviales de $T - E(T_0)$ y A_1, A_2, \dots, A_k vértices de T_0 , tales que $V(T_0) \cap V(T_i) = \{A_i\}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Luego $T = \bigcup_{i=0, \dots, k} T_i$. La Figura 3.8 ejemplifica la técnica de injerto compuesto.

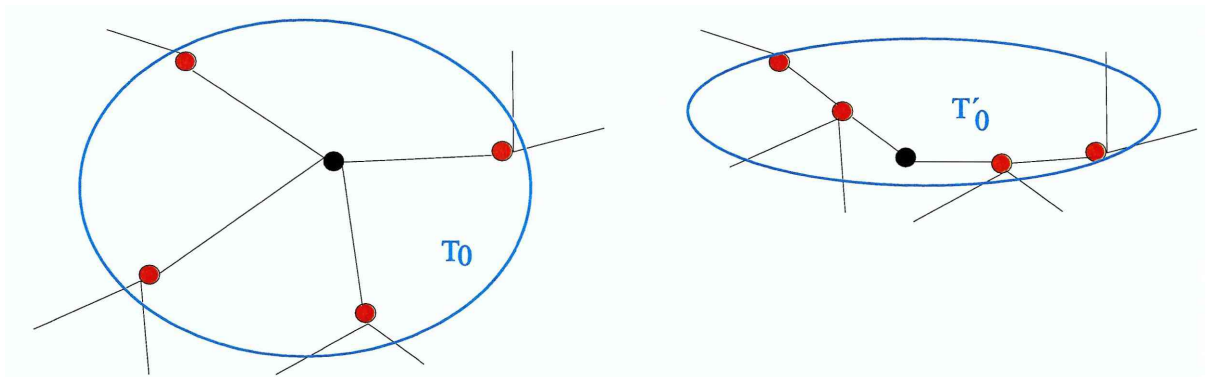


Figura 3.8: Injerto compuesto

Teorema 3.3.3 Si T'_0 es otro árbol clique de G_{T_0} entonces la unión $T'_0 \cup \bigcup_{i=1, \dots, k} T_i$ es un árbol clique de G .

Demostración: Como $T = \bigcup_{i=0, \dots, k} T_i$ y $V(T_0) = V(T'_0)$ se tiene que $T'_0 \cup \bigcup_{i=1, \dots, k} T_i$ es un árbol cuyos vértices son los cliques de G . Además como el peso de T_0 y de T'_0 son iguales, dado que ambos son árboles clique de G_{T_0} se

tiene que el peso de $T'_0 \cup \bigcup_{i=1, \dots, k} T_i$ es el peso de T y por el Teorema 2.6.1, $T'_0 \cup \bigcup_{i=1, \dots, k} T_i$ es un árbol clique de G . \square

Se dirá que $T - T_0 = \bigcup_{i=1, \dots, k} T_i$.

Corolario 3.3.2 *Todo árbol clique de G_{T_0} es un subárbol de algún árbol clique de G .*

Capítulo 4

k-asteroidales y representaciones canónicas

Como ya se ha mencionado, un grafo cordal G es un grafo de *Intervalos* si y sólo si alguna representación de G tiene un árbol que es un camino, es decir tiene exactamente 2 vértices pendientes. Este resultado, fue probado independientemente por Fulkerson y Gross [5], que caracterizan a los grafos Cordales que son grafos de Intervalos por la propiedad de poseer un orden en sus cliques, de manera que en la matriz cliques versus vértices aparecen sus unos consecutivos.

La idea original de este capítulo fue inspirada en la caracterización de los grafos de intervalos presentada por Lekkerkerker y Boland [14]. En dicha caracterización, prueban que los grafos de intervalos son los grafos cordales que no tienen 3-asteroidales. Por este motivo, pensamos que existirían vínculos entre la cantidad de hojas de cada árbol clique de un grafo y la existencia de 3-asteroidales y en general k -asteroidales. Para arribar a los resultados que

se presentan a continuación, tuvimos que estudiar en profundidad la relación entre los caminos en un grafo y los caminos en los árboles cliques. Además, la relación entre conjuntos asteroidales y caminos en un árbol clique. Algunos de estos resultados aparecen en Lin-McKee-West en [16].

Finalmente, se dará una prueba del Teorema de Lekkerkerker y Boland y se construirán la familia de prohibidos minimales de la clase de los grafos de Intervalos utilizando las herramientas y resultados obtenidos.

4.1. Caminos en G versus caminos en T

Analizamos en esta sección la relación que existe entre los caminos definidos en un grafo cordal conexo G y los caminos de cualquiera de sus árboles clique.

Sea (T, F) una representación canónica de un grafo cordal G , notaremos por T_v el subárbol de T inducido por C_v . Recordar que $T[C, C']$, es el camino inducido en T , entre C y C' , cliques de G .

Se dirá que la arista uv de G **participa** en $T[C, C']$ si existe un vértice C^* de $T[C, C']$ tal que $u, v \in C^*$. En la Figura 4.1, bc participa en $T[C, C']$, siendo $C = \{abe\}$ y $C' = C^* = \{bce\}$. Si u es un vértice de G , se dirá que u **participa** en $T[C, C']$ si existe un vértice C^* de $T[C, C']$ tal que $u \in C^*$. En la Figura 4.1, b participa en $T[C, C']$ siendo C, C', C^* como antes.

Una 3-upla de vértices distintos de G ; s_1, s_2, s_3 se dice **3-asteroidal o tripla asteroidal** si existen 3 caminos P_{ij} , entre s_i y s_j , para cada $i, j = 1, \dots, 3$; $j > i$ con $P_{ij} \cap N[s_l] = \emptyset$ para $l \neq i, j$. Es claro que s_i, s_j no son vértices adyacentes, para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Una k -upla de vértices distintos de G ; s_1, s_2, \dots, s_k se dice **k -asteroidal** si

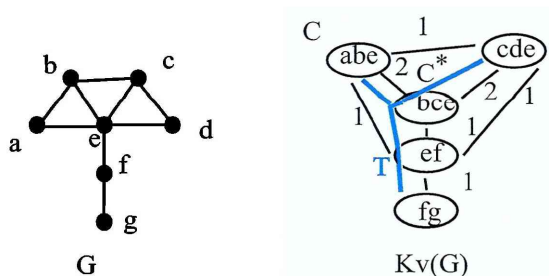


Figura 4.1: b participa

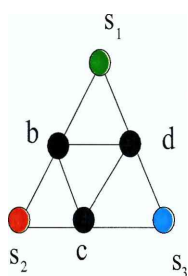


Figura 4.2: s_1, s_2, s_3 es una 3-asteroidal

cualquier terna de vértices s_i, s_j, s_l forman una tripla. En la Figura 4.2 podemos observar un grafo G y s_1, s_2, s_3 una 3-asteroidal de G , siendo s_1, s_2, s_3 vértices de G y los caminos $P_{12} = s_1, b, s_2$, $P_{13} = s_1, c, s_3$, $P_{23} = s_2, d, s_3$.

Ahora presentaremos resultados que trasladan adyacencias en G a T . Comencemos analizando el caso en que $uv \in E(G)$ siendo $u, v \in V(G)$.

Proposición 4.1.1 G es un grafo cordal, T un árbol clique de G y $uv \in E(G)$. Si $C \in C_u$, $C' \in C_v$ entonces uv participa in $T[C, C']$

Demostración: Dada $uv \in E(G)$, existe un clique H de G tal que $u, v \in H$ ($H \in C_u \cup C_v$). Como T_v y T_u son subárboles de T en caso que v no está en C y u no está en C' entonces C' no está en $T[C, H]$ y C no está en $T[C', H]$.

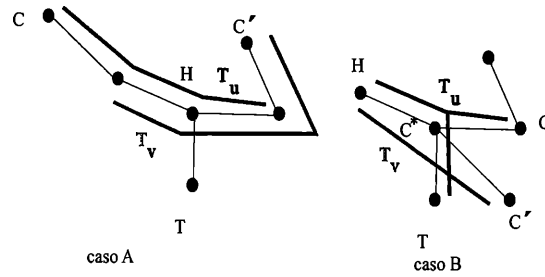


Figura 4.3: Caso a y b

Por esto, la posición en T de C, C' y H es como en la Figura 4.3.

En el caso a) la proposición queda probada tomando H como un clique que tiene a u y v ; en el caso b) existe un clique $C^* \in T[C, H] \cap T[C', H] \cap T[C, C']$. Como T_u, T_v son subárboles de T ; $C, H \in C_u$ (C' no está en C_u) y $C', H \in C_v$ (C no está en C_v), $u, v \in C^*$. Luego uv participa en $T[C, C']$. \square

Ahora analizaremos que sucede para el caso en que u y v no son vértices adyacentes en el grafo G .

Primero, presentamos algunas definiciones.

Dado un camino minimal $P_{uv} : u = u_0, \dots, u_n = v$, una subfamilia de cliques de G , $(C_i)_{i=0, \dots, n-1}$, con u_i, u_{i+1} en C_i para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, es llamada *subfamilia de cliques asociada con P_{uv}* .

*subfamilia
de cliques
asociada*

Es claro que una subfamilia de cliques asociada con P_{uv} no es única, por ejemplo, para el grafo de la Figura 4.1, si $P_{bf} : b, e, f$, $C = (\{abe\}, \{ef\})$ y $F = (\{bce\}, \{ef\})$ son subfamilias de cliques asociadas con P_{bf} .

Lema 4.1.1 G es un grafo cordal, T un árbol clique de G , P_{uv} es un camino minimal entre $u, v \in V(G)$ y $(C_i)_{i=0, \dots, n-1}$ es una subfamilia de cliques asocia-

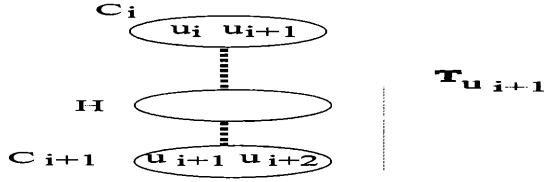


Figura 4.4: $T_{u_{i+1}}$ es un subárbol de T

da con P_{uv} . Luego $u_k u_{k+1}$ no participa en $T[C_i, C_{i+1}]$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $k \neq i, i+1$.

Demostración: Supongamos que existe $H \in C(G)$, $\{u_k, u_{k+1}\} \subset H$ tal que $H \in T[C_i, C_{i+1}]$. Como $T_{u_{i+1}}$ es un subárbol de T , $u_{i+1} \in H$ (Figura 4.4). Luego $\{u_k, u_{k+1}, u_{i+1}\}$ induce un completo de G , lo que contradice la minimalidad de P_{uv} . \square

En la Figura 4.1, puede observarse un ejemplo del Lema 4.1.1, si $P_{bg} : b, e, f, g$ y $C = (\{abe\}, \{ef\}, \{fg\})$, fg no participa en $T[\{abe\}, \{ef\}]$.

Por el lema anterior podemos deducir que para $k \neq i, i+1$, C_k no está en $T[C_i, C_{i+1}]$.

Observar que si P_{uv} es un camino minimal en G entre u y v ; $(C_i)_{i \in I}$ es una subfamilia de cliques asociada con P_{uv} , entonces $T[C_{i-2}, C_{i-1}] \cap T[C_{i-1}, C_i] \cap T[C_i, C_{i+1}] = \emptyset$. Es claro que si $C \in T[C_{i-2}, C_{i-1}] \cap T[C_{i-1}, C_i] \cap T[C_i, C_{i+1}]$ entonces $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\} \subset C$. En la Figura 4.5 se muestra esta situación. Por esto $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\}$ induce un completo en G contradiciendo que P_{uv} es un camino minimal. En lo que sigue, probaremos que dado un camino minimal P_{uv} entre u y v en G , $C \in C_u$, $C' \in C_v$, todos los vértices en P_{uv} participan en $T[C, C']$.

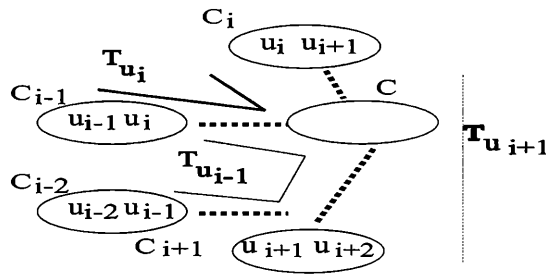


Figura 4.5:

Primero, es necesario probar una serie de lemas, entre ellos, uno sobre árboles.

Lema 4.1.2 Sea T un árbol; $v, w, x, y \in V(T)$. Entonces $T[x, y] \cap T[v, w] \neq \emptyset$ o existen $a, b \in V(T)$ tales que $T[x, y] \cap T[a, b] = \{b\}$ y $T[v, w] \cap T[a, b] = \{a\}$.

Demostración: supongamos que $T[x, y] \cap T[v, w] = \emptyset$. Como T es conexo, existe en T un camino entre v y x . Sea a el último vértice en el camino dirigido de v a x tal que $a \in T[v, w]$ y b el primer vértice en el camino dirigido de y a w tal que $b \in T[x, y]$. Es claro que $T[v, w] \cap T[a, b] = \{a\}$ y $T[a, b] \cap T[x, y] = \{b\}$. Luego el lema ha sido probado. \square

Teorema 4.1.1 G es un grafo cordal, T un árbol clique de G , $P_{uv} = (u_i)_{i=0, \dots, n}$ un camino minimal, y sean $C \in C_{u_0}$, $C' \in C_{u_n}$. Entonces u_{n-1} participa en $T[C, C']$.

Demostración: Probaremos que u_{n-1} participa en $T[C, C']$.

Es claro que es verdadero si $n = 1$, pues u_0 participa en $T[C, C']$.

Estudiamos el caso $n > 1$. Supongamos que u_{n-1} no participa en $T[C, C']$.

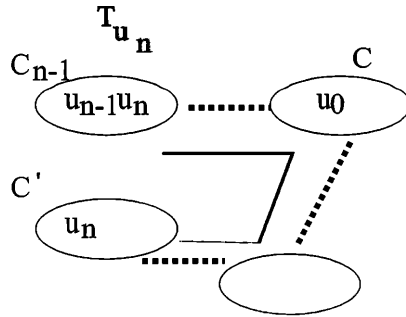


Figura 4.6: u_0u_n no es una arista de G

Como $u_{n-1}u_n \in E(G)$, existe C_{n-1} clique de G tal que $u_{n-1}, u_n \in C_{n-1}$.

Como u_{n-1} no participa en $T[C, C']$, C_{n-1} no está en $T[C, C']$.

Ahora, veamos la posición en T de C, C', C_{n-1} .

Probaremos que: i) C no está en $T[C_{n-1}, C']$.

ii) C' no está en $T[C_{n-1}, C]$.

i) Es verdad pues u_0u_n no es una arista de G (Figura 4.6).

ii) Analizaremos: iia) $u_{n-1}u_0$ es una arista de G .

iib) $u_{n-1}u_0$ no es una arista de G .

iia) Como $u_{n-1} \in C_{n-1}$ y $u_0 \in C$ por la Proposición 7.1.1, existe C^* clique de G que tiene a u_{n-1} y u_0 , además $C^* \in T[C, C_{n-1}]$. Es claro que C^* no está en $T[C, C']$ pues u_{n-1} no participa en $T[C, C']$. Por lo tanto $C^* \in T[C', C_{n-1}]$ y $u_n \in C^*$. Más aún, (T, F) es una representación canónica, y u_0 está en C^* entonces $u_nu_0 \in E(G)$, contradiciendo que P_{uv} es minimal. (Figura 4.7)

iib) Si $u_{n-1}u_0$ no es arista de G , existe u_{n-2} vértice de P_{uv} con $u_{n-2}u_{n-1}$ una arista de G . Más aún, existe C_{n-2} un clique de G que tiene a u_{n-2} y u_{n-1} . Como u_{n-1} no participa en $T[C, C']$, C_{n-2} no es vértice de $T[C, C']$. Además $T[C, C'] \cap T[C_{n-1}, C_{n-2}] = \emptyset$ (Figura 4.8). Por el Lema 4.1.2, existen a, b tal

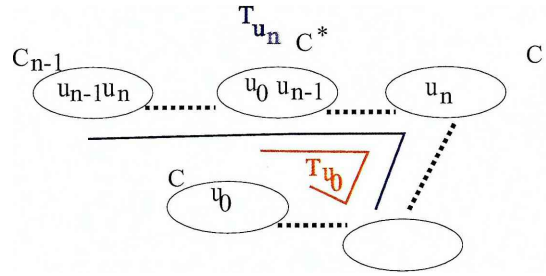


Figura 4.7: $u_0 \in C^*$

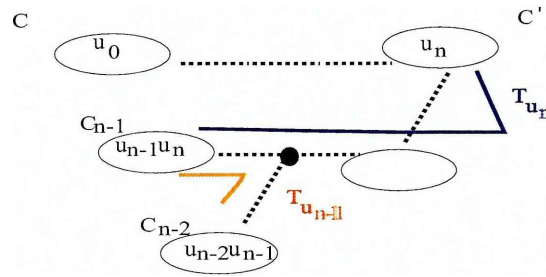


Figura 4.8: $T[C, C'] \cap T[C_{n-1}, C_{n-2}] = \emptyset$

que $T[C, C'] \cap T[a, b] = \{a\}$ y $T[C_{n-1}, C_{n-2}] \cap T[a, b] = \{b\}$. Observar que en este caso $a = C'$ y b puede ser C_{n-1} (Figura 4.9). Como antes, analizamos 2 situaciones: iib1) si u_0u_{n-2} es una arista de G , por Proposición 7.1.1, existe C^* clique de G tal que tienen a u_0 y u_{n-2} tal que $C^* \in T[C, C_{n-2}]$. Como (T, F) es una representación canónica, $u_{n-2}u_n$ es una arista de G o u_0u_n es una arista de G contradiciendo la minimalidad de P_{uv} .

iib2) Si u_0u_{n-2} no es arista de G , existe u_{n-3} vértice de P_{uv} con $u_{n-3}u_{n-2}$ una arista de G . Más aún, existe C_{n-3} un clique de G que tiene u_{n-3} y u_{n-2} . Analizamos la posición en T de C_{n-3} .

$T[C, C'] \cap T[C_{n-2}, C_{n-3}] = \emptyset$ y $T[C_{n-1}, C'] \cap T[C_{n-2}, C_{n-3}] = \emptyset$, pues u_nu_{n-2} no es una arista de G . Como antes, debemos analizar los casos en que u_0u_{n-3}

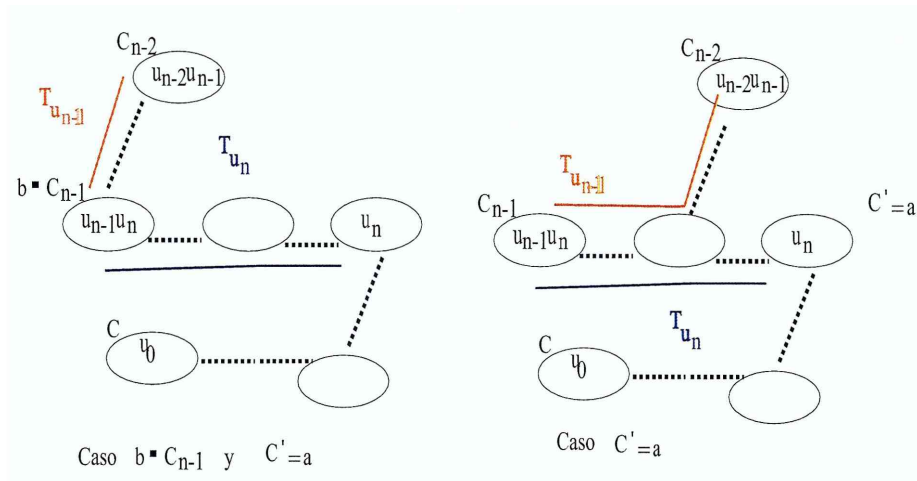


Figura 4.9: $C' = a, C_{n-1} = b$

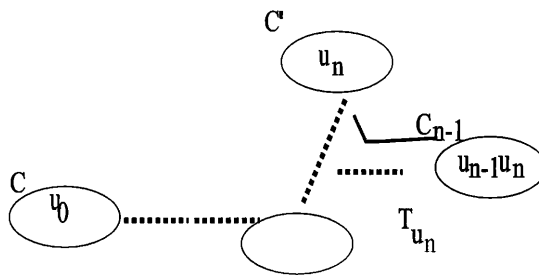


Figura 4.10: Posición en T de C, C' y C_{n-1}

es o no una arista de G . El análisis de esos casos conduce a contradecir la minimalidad de P_{uv} . Por lo tanto C' no está en $T[C_{n-1}, C]$. La posición en T de C, C' y C_{n-1} es como muestra la Figura 4.10.

Como antes, se analizarán 2 situaciones: si u_0u_{n-1} es o no una arista de G .

1) u_0u_{n-1} es una arista de G , como el caso iia) existe C^* clique de G el cual tiene a u_{n-1} y u_0 tal que C^* no está en $T[C, C']$ pues u_{n-1} no participa en

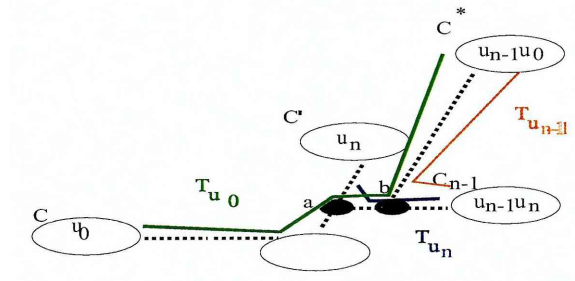


Figura 4.11: a tiene a u_n y u_0

$T[C, C']$. Más aún $T[C, C'] \cap T[C_{n-1}, C^*] = \emptyset$ por Lema 4.1.2, existen a y b tal que $T[C, C'] \cap T[a, b] = \{a\}$ y $T[C_{n-1}, C^*] \cap T[a, b] = \{b\}$. Como (T, F) es una representación canónica, es claro que a tiene a u_n y u_0 contradice la minimalidad de P_{uv} (Figura 4.11). 2) Idem iib). \square

Como una consecuencia de este teorema, dado un camino minimal P_{uv} en G , una subfamilia asociada con P_{uv} , $(C_i)_{i \in I}$, $C \in C_u$, $C' \in C_v$ y $T[C, C']$; si $C_i \in T[C, C']$ resulta que u_{i-1} participa en $T[C, C']$. En la Figura 4.12, puede observarse un ejemplo que muestra la necesidad de que en la hipótesis del Teorema el camino sea minimal. En la figura vemos un grafo G , su grafo clique valuado $K_v(G)$ y un árbol clique T de G . Es claro que u_1 no participa en $T[C, C']$ pues u_2 participa en $T[C, C']$.

Corolario 4.1.1 G es un grafo cordal, T un árbol clique de G y $P_{uv} = (u_i)_{i=0, \dots, n}$ es un camino minimal. Dado $C \in C_u$, $C' \in C_v$, u_i participa en $T[C, C']$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración: Supongamos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que u_i no participa en $T[C, C']$. Aplicando el Teorema anterior y dado que las secciones de

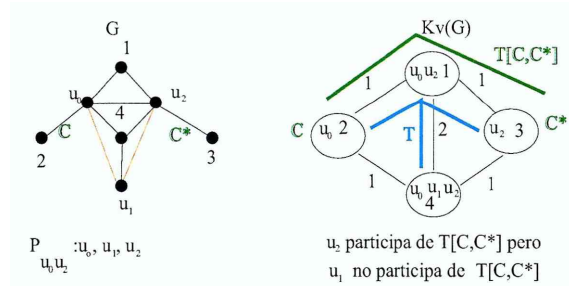


Figura 4.12: u_1 no participa en $T[C, C']$

un camino minimal son caminos minimales, $u_{i+1} u_{i+2}, \dots, u_n$ no participa en $T[C, C']$, contradiciendo que $u_n \in C'$. \square

Corolario 4.1.2 G es un grafo cordal, T un árbol clique de G , P_{uv} es un camino minimal, y $C \in C_u, C' \in C_v$. Si $H \in T[C, C']$ y $x \in H$ entonces $x \in N[u_i]$ para algún $i \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración: Sea i el último índice tal que u_i participa en $T[C, H]$. Si $i = n$ entonces $u_n \in H$ y $x \in N[u_n]$. Si $i \neq n$ entonces u_{i+1} participa en $T[H, C']$, pues todos los vértices en P_{uv} participan en $T[C, C']$. Como $u_i u_{i+1} \in E(G)$ por la Proposición 7.1.1 $u_i u_{i+1}$ participa en $T[C, C']$, luego existe $H^* \in T[C, C']$ tal que $u_i u_{i+1} \in H^*$. Como u_{i+1} no participa en $T[C, C']$, $H^* \in T[H, C']$ entonces $u_i \in H$ y $x \in N[u_i]$. \square

Resulta de interés, dados $u, x, v \in V(G)$, $C \in C_u$ y $C' \in C_v$ analizar la relación que existe entre un camino P_{uv} de G , que no pasa por el entorno de x y el camino entre C y C' en T árbol.

Por el Corolario 4.1.2, es claro que si P_{uv} es un camino minimal, $u \in C$,

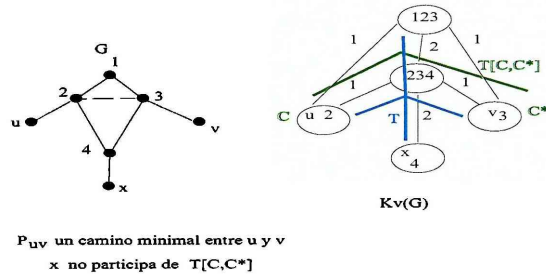


Figura 4.13: Ejemplo del Teorema 4.1.2

$v \in C'$ y $P_{uv} \cap N[x] = \emptyset$ para algún $x \in V(G)$ entonces x no participa en $T[C, C']$. Los resultados obtenidos nos permiten vincular los caminos en G con los caminos en T , árbol clique de G , y serán de utilidad en la siguiente sección.

4.2. k -asteroidales en G versus hojas de T .

Si G es un grafo cordal y (T, F) es una representación canónica de G , en esta sección se relacionarán las k -asteroidales de G y las hojas de T .

Sabemos que si G es un grafo cordal con una 3-asteroidal entonces T tiene al menos 3 hojas.

Recíprocamente, si G es un grafo cordal y todos los árboles de G tienen al menos 3 hojas, entonces G no es un grafo de intervalos y por lo tanto G debe tener una 3-asteroidal. Se presentarán algunos resultados que nos permitirán generalizar este hecho.

Observar que s_1, \dots, s_k es una k -asteroidal en el grafo G , y si C, C' son cliques de G tales que $C \in C_{s_i}, C' \in C_{s_j}$ para algún $i, j \in \{1, \dots, k\}$; del

Corolario 4.1.2 y la definición de k -asteroidal, s_l no participa en $T[C, C']$ para $l \neq i, j$.

Por otro lado, se probará en el siguiente lema que CC' no es arista de T .

Lema 4.2.1 *G un grafo cordal, T un árbol clique de G y s_1, \dots, s_k una k -asteroidal de G . Para todo $C \in C_{s_i}; C' \in C_{s_j}$ con $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$, CC' no es una arista de T .*

Demostración: Sea s_l otro vértice de la k -asteroidal, siendo $l \neq i, j$, y H un clique de G que contiene a s_l . Si $CC' \in E(T)$ entonces como T es un árbol, $C \in T[H, C']$ o $C' \in T[H, C]$.

Supongamos que $C \in T[H, C']$. Como s_i, s_j, s_l son vértices de una k -asteroidal, existe un camino P_{lj} de s_l a s_j tal que $N[s_i] \cap P_{lj} = \emptyset$. Sin perder generalidad podemos suponer que el camino P_{lj} es minimal. Por el Corolario 4.1.2, como $C \in T[H, C']$ entonces s_j es adyacente a algún vértice del camino P_{lj} lo cual es una contradicción. Se procede análogamente en el otro caso, es decir $C' \in T[H, C]$, claramente se deduce entonces que CC' no es una arista de T con lo que el lema queda probado. \square

Lema 4.2.2 *G es un grafo cordal, T un árbol clique de G ; s_1, \dots, s_k es una k -asteroidal de G . Dados $C \in C_{s_i}$ y $C' \in C_{s_j}$:*

- Ningún s_l con $l \neq i, j$ participa de $T[C, C']$.
- existe $C^* \in T[C, C']$ tal que ningún s_l pertenece a C^* para $l \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración: Claramente, por el Corolario 4.1.2, s_l no participa en $T[C, C']$ para $l \neq i, j$.

Sean H_1 el último vértice de $T[C, C']$ conteniendo a s_i , y H_2 el primer vértice de $T[C, C']$ conteniendo a s_j . Por el Lema 4.2.1, H_1H_2 no es una arista de T . Luego existe $C^* \in T[H_1, H_2]$ que no contiene a s_i ni a s_j , por la elección de H_1 y H_2 . Como s_l para $l \neq i, j$ no participa de $T[C, C']$ es claro que s_l no está en C^* .

Por lo tanto s_l no pertenece a C^* para ningún $l \in \{1, \dots, k\}$ y así, el lema fue probado. \square

Lema 4.2.3 *G es un grafo cordal; T un árbol clique de G ; s_1, \dots, s_k es una k -asteroidal de G y C_i son cliques de G conteniendo a s_i para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Dado $l \in \{1, \dots, k\}$, existe $C^* \in \bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j]$ tal que C^* no contiene a s_j para $j \in \{1, \dots, k\}$.*

Demostración: Claramente $\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j] \neq \emptyset$, pues $C_l \in T[C_l, C_j]$ para todo j . Se probará que $|\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j]| > 1$.

Si $|\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j]| = 1$ entonces existen C_m y C_n con $m, n \neq l$, tales que $C_l \in T[C_m, C_n]$. Luego s_l participa en $T[C_m, C_n]$, contradiciendo el Corolario 4.1.2. Luego $|\bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j]| > 1$.

Ahora, sea $C^* \in \bigcap_{j \in \{1, \dots, k\} - \{l\}} T[C_l, C_j]$ cuya distancia en T a C_l es máxima. Claramente, existen $m, n \neq l$ tales que $C^* \in T[C_m, C_n]$. Por el Corolario 4.1.2, s_l no participa en $T[C_m, C_n]$, luego s_l no pertenece a C^* . Como $C^* \in T[C_l, C_m]$ para todo $m \neq l$, por el Corolario 4.1.2, s_j , para todo $j \neq l, m$, no participa en $T[C_l, C_m]$ por ello s_j no pertenece a C^* para $j \neq l$. Por lo tanto s_j no pertenece a C^* para todo j . \square

Observar que si s_1, s_2, s_3 es una 3-asteroidal de G , $C_i \in C_{s_i}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ por Lema 4.2.3, existen 2 caminos $T[C_1, C_2], T[C_1, C_3]$, no contenidos entre si, es decir $T[C_1, C_2] \not\subseteq T[C_1, C_3]$ y $T[C_1, C_3] \not\subseteq T[C_1, C_2]$ por ello T tiene al menos 3 hojas.

De los resultados previos podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 *G es un grafo cordal. Si G posee una k -asteroidal entonces en todo T árbol clique de G , T tiene al menos k hojas.*

Demostración: Sean s_1, \dots, s_k vértices de una k -asteroidal de G , y C_1, \dots, C_k cliques de G los cuales contienen a s_1, \dots, s_k respectivamente. La existencia de C^* dada por el Lema 4.2.3 asegura que existen $(k-1)$ caminos, no contenidos de a pares, esos caminos son $T[C_l, C_j]$ con $j \neq l$. Luego T tiene al menos k hojas. \square

La condición enunciada en el Teorema anterior, es suficiente pero no necesaria como puede verse en la Figura 4.14.

4.3. k -asteroidal en G versus subfamilias asteroidales de F

Sea (T, F) una representación canónica de un grafo cordal G . La existencia de una k -asteroidal en G , determina propiedades especiales en la familia F .

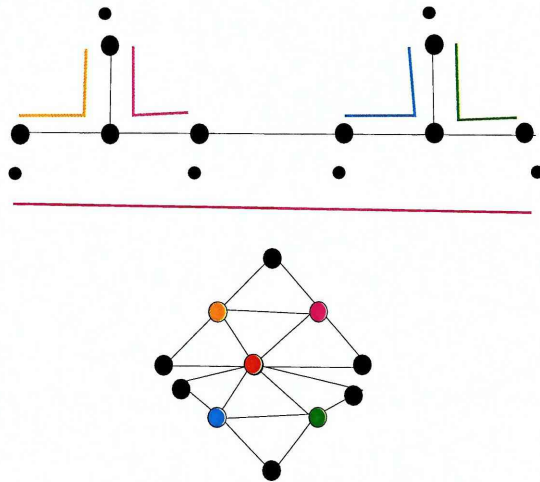


Figura 4.14: Grafo con árbol clique de 4 hojas, sin 4-asteroidal

Se dirá que una subfamilia F' de F cubre:

- una arista AB de T si existe un miembro de F' conteniendo a A y B
- un vértice A de T si existe un miembro de F' conteniendo a A .

Finalmente F' cubre $T[C, C']$ si cubre a todas sus aristas.

Lema 4.3.1 G es un grafo cordal con una k -asteroidal si y sólo si cada par (T, F) , representación canónica de G , verifica las siguientes condiciones:

1. T tiene al menos k hojas.
2. Existen C_1, \dots, C_k vértices de T y para toda terna i, j, l , existe un subfamilia F_{ijl} de F verificando:
 - a) F_{ijl} cubre $T[C_i, C_j]$.
 - b) F_{ijl} no cubre a C_l , para todo $l \neq i, j$.

Demostración: Primero, supongamos que G tiene una k -asteroidal, por el Teorema 4.2.1, T tiene al menos k hojas.

Sean s_1, \dots, s_k los vértices de una k -asteroidal de G , es claro entonces que existen P_{ijl} caminos minimales, entre s_i y s_j tales que los vecinos en G del vértice s_l no son vértices del camino P_{ijl} .

Se eligen C_1, \dots, C_k tales que $s_i \in C_i$ para $i = 1, \dots, k$. Sean $F_{ijl} = \{F_v, v \in P_{ijl}\}$. Es claro que F_{ijl} satisface la condición b). Cada vértice y cada arista de P_{ijl} participa de $T[C_i, C_j]$ pues P_{ijl} es un camino minimal (Corolario 4.1.1, Proposición 7.1.1). Dado que las aristas del camino participan de $T[C_i, C_j]$ es claro que F_{ijl} cubre las aristas de $T[C_i, C_j]$.

Veamos que vale la recíproca, supongamos que existen vértices de T y subfamilias de F que satisfacen a) y b).

Es claro que C_i no pertenece a $T[C_j, C_k]$ si $j, k \neq i$. Dado que F es una familia separadora, para cada C_i existe un miembro L_i de la familia F que cubre a C_i y a ninguna arista de $T[C_i, C_j]$ para todo $j \neq i$.

L_i representa un vértice de G , el cual denotamos con s_i .

Veamos que s_1, \dots, s_k es una k -asteroidal. Sea i, j, l una terna de vértices de $\{1, \dots, k\}$. Como la subfamilia F_{ijl} de F satisface a) y b), define en el grafo un camino entre s_i y s_j que no tiene vecinos de s_l pues $F_{i,j,l}$ no cubre a C_l . Por lo tanto, s_1, \dots, s_k es una k -asteroidal de G . \square

A una subfamilia de F que verifique el lema anterior la llamaremos **familia k -asteroidal** asociada a C_1, \dots, C_k .

Anteriormente fue probado que las técnicas de poda y contracción aplicadas a una representación canónica (T, F) , del grafo $L(F)$, produce un árbol

T' y una familia F' de modo que el par (T', F') resulta una representación canónica de un subgrafo inducido de $L(F)$.

En la siguiente proposición se presentan condiciones para efectuar una poda sin perder la familia k -asteroidal.

Proposición 4.3.1 *Sea (T, F) una representación canónica de G con C_1, \dots, C_k hojas de T , $F = (F_i)_{i \in I}$ es una familia k -asteroidal asociada a C_1, \dots, C_k , $T_0 = T - \{C_k\}$ y C'_k adyacente a C_k en T . $F' = (F_i \cap V(T_0))_{i \in I}$ es una familia asteroidal asociada a $C_1, \dots, C_{k-1}, C'_k$ si y sólo si no existe una arista en $\bigcup_{i,j \in \{1, \dots, k-1\}} T[C_i, C_j]$ cubierta sólo por los cubridores de C'_k .*

Demostración:

Si F' es una familia asteroidal asociada a $C_1, \dots, C_{k-1}, C'_k$ toda arista de $\bigcup_{i,j \in \{1, \dots, k-1\}} T[C_i, C_j]$ está cubierta por miembros de F' que no cubren a C'_k .

Recíprocamente, si i, j, l es una terna de $\{1, \dots, k\}$, como F es una familia k -asteroidal asociada a C_1, \dots, C_k existen miembros de la familia F que cubren $T[C_i, C_j]$ y no cubren C_l . Si $l = k$ es claro que C'_k no está en $T[C_i, C_j]$. Como ninguna arista de $T[C_i, C_j]$ está cubierta sólo por miembros de C'_k entonces pueden elegirse cubridores de $T[C_i, C_j]$ que no cubren C'_k . Luego existe F' subfamilia k -asteroidal asociada a C_1, \dots, C'_k . \square

La Figura 4.15 clarifica la proposición anterior.

De la proposición anterior puede deducirse lo siguiente para el caso de 3-asteroidales: (T, F) tiene una y sólo una 3-asteroidal con vértices en C_1, C_2, C_3 si y sólo si al menos 1 miembro de F_{ij} cubre al vecino en T de C_k .

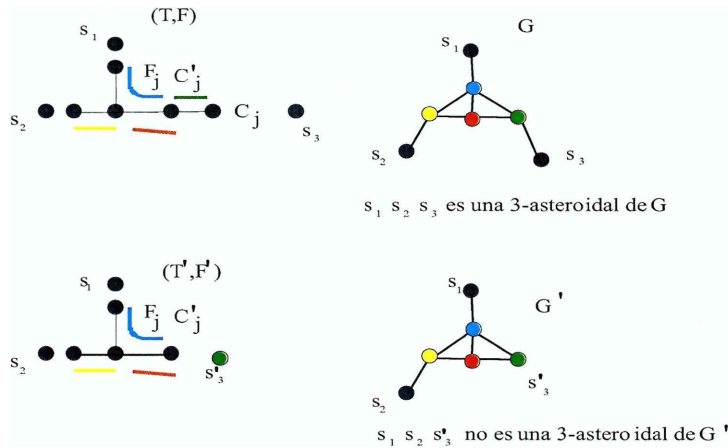


Figura 4.15:

4.4. Grafos de Intervalos

4.4.1. Teorema de Lekkerkerker-Boland

Por lo demostrado en las secciones previas es claro que si un grafo es de intervalos como posee un árbol clique con solo 2 hojas, es imposible que dicho grafo posea una tripla asteroidal. Como ya se ha mencionado en un histórico artículo Lekkerkerker y Boland probaron que esto caracteriza a los grafos de intervalos. Es decir que un grafo cordal es de intervalos si y sólo si no tiene triplas asteroidales. En lo que sigue se hará una demostración de ese resultado, usando representaciones canónicas. Se utilizarán para ello las técnicas de injerto simple y compuesto junto con la propiedad de invarianza de los cubridores.

Teorema 4.4.1 *G un grafo cordal es de intervalos si y sólo si no tiene triplas*

asteroidales.

Demostración: La condición de suficiencia ya fue explicitada. Se prueba entonces la condición necesaria, por inducción sobre el número de vértices de G .

Si G tiene 2 simpliciales entonces G es de intervalos porque cualquier árbol clique de G tendrá 2 hojas.

Supongamos que G tiene más de 2 simpliciales.

Si s_1, s_2, s_3 son tres simpliciales tal que $G - N[s_i]$ es conexo para $i = 1, 2, 3$ entonces G tiene una tripla; s_1, s_2, s_3 es una tripla de G .

Supongamos que hay un simplicial s tal que $G - N[s]$ es no conexo. Sea $G' = G - s$, como G no tiene triplas asteroidales, G' es cordal sin triplas, entonces por hipótesis inductiva, G' es de intervalos.

Sea T' un Intervalo-clique de G' (Figura 4.16). Sean H_1, H_2 sus hojas.

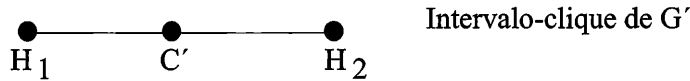


Figura 4.16:

Como s es simplicial en G , existe C' , clique de G' tal que $C' \subset N(s)$, como $G - N[s]$ es no conexo, existen aristas de T' cubiertas sólo por vecinos de s . Las denominamos s -aristas. Analizados 2 casos:

1. Si alguna s -arista es incidente en C' , sea $C'B$, se construye $T = T'[H_1, C'] \cup C'C_s \cup C_sB \cup T'[[B, H_2]]$ es un Intervalo-clique de G (Figura 4.17).
2. Si ninguna s -arista es incidente en C' . Sean A_1B_1 y A_2B_2 las s -aristas a ambos lados más cercanas a C' y A_1, A_2 los extremos más cercanos a C' (Figura 4.18).

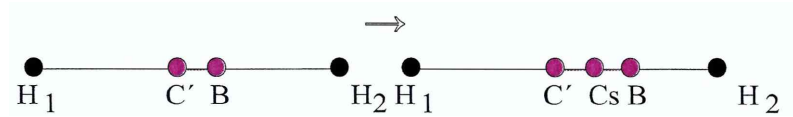


Figura 4.17:

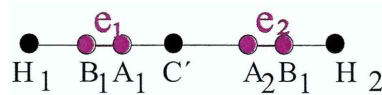


Figura 4.18:

Observar que podría existir sólo una, en ese caso tomar $A_1 = H_1$ o $A_2 = H_2$.

Observar que algún v_2 vecino de s no está en A_1 pues si así fuera A_1 es un clique de G' conteniendo a todos los vecinos de s y tiene una s -arista incidente en él, se sigue del caso anterior.

Por el mismo motivo, existe también algún y_1 vecino de s y no en A_2 .

Consideramos ahora $T'[A_1, A_2]$ que es un subárbol propio de T' , dado que alguna s -arista existe.

Sea $T_1 = T'[A_1, A_2] \cup C'C_s$ y $G_1 = G_{T_1}$.

- a) Si existiera un vértice de A_1 que no llega a A_2 , sea x_1 y un vértice de A_2 que no llega a A_1 , sea x_2 . Entonces existe una tripla en G_1 entre el separador de A_2 , que es simplicial, sea a_2 ; el separador de A_1 , que es simplicial, sea a_1 y s . Veamos esto: existen caminos $P_{sa_1} = s, y_1, x_1, a_1$ por no vecinos de a_2 ; $P_{sa_2} = s, y_2, x_2, a_2$ por no vecinos de a_1 ; $P_{a_1a_2}$ por no vecinos de s pues se han tomado las primeras s -aristas desde C' .

b) Supongamos que no vale lo expuesto en el caso anterior.

Por ello podemos suponer sin perder generalidad que todo vértice de A_2 llega a A_1 , en particular todo vértice que cubre e_2 llega a A_1 . Luego $B_2 \cap A_2 \subset A_1$.

Como los vértices que cubren e_2 son vecinos de s , si consideramos G_1 , todos los vértices son gemelos, es más son universales de G_1 (Figura 4.19).

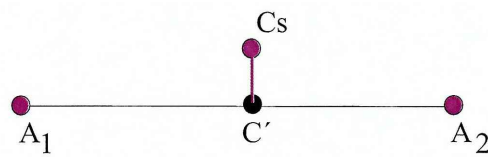


Figura 4.19:

Como G_1 es un subgrafo propio de G , es claro que G_1 no tiene triplas y por hipótesis inductiva existe T_1 un Intervalo-clique de G_1 . Los cliques C_s, C', A_1 y A_2 son vértices de T_1 . Dado que $G_1 - N[s]$ es conexo por el modo en que las s -aristas fueron elegidas, C_s es hoja de T_1 . Sea A'_2 la otra hoja (Figura 4.20).

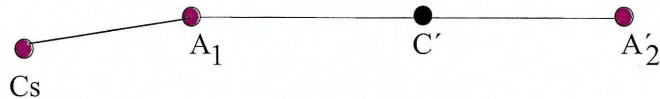


Figura 4.20:

Se construye entonces un árbol Intervalo-clique para G como sigue: $T = T'[H_1, B_1] \cup B_1 C_s \cup T_1 \cup A'_2 B_2 \cup T'[B_2, H_2]$. Veamos que T es un árbol clique de G . Para ello basta ver que $A_1 \cup B_1 \subset C_s$ que

vale pues e_1 está cubierta por vecinos de s y que $A_2 \cap B_2 \subset A'_2$ que vales pues e_2 está cubierta por universales de G_1 entonces están en todos sus cliques (Figura 4.21).

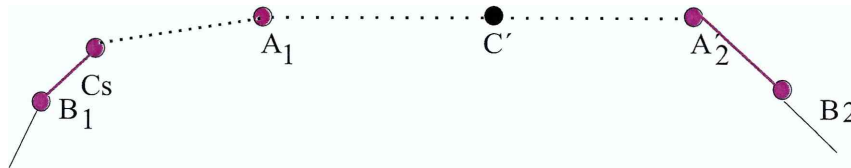


Figura 4.21:

□

4.4.2. Prohibidos minimales

Sabemos que si un grafo no es de intervalos todos sus árboles clique tienen 3 o más hojas, pero en el caso de grafos no de intervalos minimales con esta propiedad, existen árboles clique con características especiales. Se dice que G no es de intervalos *minimal*, si G no es de intervalos pero para cualquier vértice v de G resulta $G - v$ un grafo de intervalos.

Teorema 4.4.2 *Si G es un grafo cordal no de intervalos minimal entonces existe un árbol con 3 hojas y una de esas hojas es adyacente al vértice de grado 3.*

Demostración: Como G es un grafo cordal, existe al menos s_1 vértice simplicial de G . Por ser s_1 vértice simplicial, se sabe que está en un sólo clique, C_{s_1} . Además como G no es de intervalos minimal, s_1 no tiene gemelos en G ,

luego $C(G - s_1) = C(G) - C_{s_1}$.

Por otro lado, $N(s_1)$ es un completo de $G - s_1$, luego existe al menos un clique C de $G - s_1$ tal que $N(s_1) \subset C$.

Como G no es de intervalos minimal, es claro que $G - s_1$ es de intervalos, luego existe un árbol clique T' de $G - s_1$, siendo T' un camino. Es claro que $T = T' \cup CC_{s_1}$ es un árbol clique de G pues $N(s_1) \subset C$. Además, dado que G no es de intervalos C no puede ser hoja de T' luego T el árbol buscado. \square

Corolario 4.4.1 *Si G es un grafo cordal no de intervalos minimal entonces:*

1. *G tiene una única tripla asteroidal de vértices simpliciales.*
2. *G tiene exactamente 3 vértices simpliciales.*

Demostración: Como G no es de intervalos posee una tripla asteroidal, x, y, z . Sea T un árbol clique como el obtenido en el Teorema anterior y C_1 la hoja de T incidente en el vértice C de grado 3. Por los resultados obtenidos en las secciones anteriores, sabemos que uno de los vértices de la tripla debe ser el simplicial de C_1 y los otros dos vértices participan de $T - C_1$. Sea x tal que $C_x = C_1$. Si y no fuera un vértice simplicial entonces C_y será un camino no trivial de $T - C_1$, sea $A_y B_y$ una arista de dicho camino siendo A_y el vértice más próximo a C . Es claro que si T_1 es la componente conexa de $T - B_y$ que tiene a A_y , G_{T_1} tiene una tripla y es un subgrafo propio de G lo cual es un absurdo. Del mismo modo se prueba que z es simplicial. Además si el grafo G tuviera otro vértice simplicial w , $G - w$ también tendría una tripla pues w es irrelevante en los caminos entre vértices de la tripla. \square

Si G es un grafo cordal no de intervalos minimal admite un árbol clique como muestra la Figura 4.22.

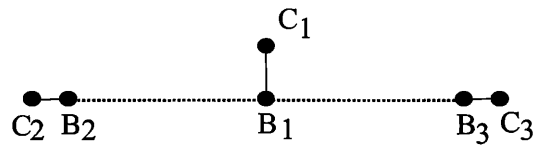


Figura 4.22:

Se dice que un vértice v de G es *casi-simplicial* si es vecino de un simplicial *casi-simplicial* y $|C_v| = 2$. Ver Figura 4.23

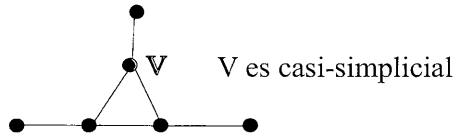


Figura 4.23: V es casi-simplicial

Corolario 4.4.2 Si G es un grafo cordal no de intervalos minimal y tiene un vértice v casi-simplicial. Entonces existe un árbol clique T de G , como el dado en el Teorema, tal que C_v incide en el vértice de grado 3 de T .

Demostración: Se obtiene de la demostración del Teorema considerando a s_1 como el simplicial de G vecino de v . □

En la construcción de prohibidos consideramos la siguiente notación: T un árbol clique de G como el de la Figura 4.22, siendo C_1, C_2, C_3 sus únicas hojas. Sean B_i vecinos en T de C_i para $i = 1, 2, 3$.

Analizamos los siguientes casos.

1. Existen 3 vértices v_1, v_2, v_3 casi-simplicales con $v_i \in C_i$ para $i = 1, 2, 3$.

a) Si $B_1 = B_2$ entonces $B_1 = B_3$.

Supongamos que $B_1 \neq B_3$, y sea X vértice de T , distinto de C_1 y C_2 , que adyacente a B_1 (Figura 4.24).

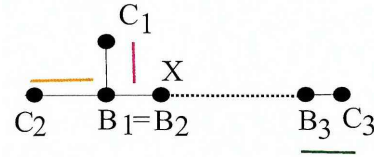


Figura 4.24:

Como existe una única tripla, todo cubridor de la arista XB_1 debe cubrir a C_1 o a C_2 . Veamos esto último, si existiera un vértice y cubriendo a XB_1 tal que y no está ni en C_1 ni en C_2 , al podar T y considerar el subárbol T' cuyas hojas son C_1, C_2, X resulta $G_{T'}$ un grafo cordal con una tripla. Más claramente sean a_1, a_2, x los simpliciales de $G_{T'}$, existen $P_{a_1, a_2} = a_1, v_1, v_2, a_2$ cuyos vértices no son vecinos de x , $P_{a_1, x} = a_1, v_1, y, x$ cuyos vértices no son vecinos de a_2 , $P_{x, a_2} = x, y, v_2, a_2$ cuyos vértices no son vecinos de a_1 , con lo cual a_1, a_2, x es una tripla de $G_{T'}$ contradiciendo así la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos (Figura 4.25).

Por ello, todo cubridor de XB_1 o bien está en C_1 o bien está en C_2 . Pero si todo cubridor de XB_1 llega a C_1 entonces por el Corolario 3.3.1, borrando de T la arista XB_1 y adicionando la arista XC_1 se tiene un Intervalo-árbol clique de G lo cual es un absurdo. Análogamente si todo cubridor de XB_1 llega a C_2 .

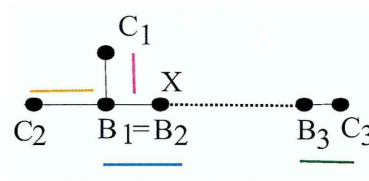


Figura 4.25:

Entonces existe un vértice y , cubridor de XB_1 que está en $C_1 - C_2$, y existe un vértice z que cubre a XB_1 que está en $C_2 - C_1$. Luego al podar T y considerar el subárbol T' cuyas hojas son C_1, C_2, X resulta $G_{T'}$ un grafo cordal con una tripla, contradiciendo así la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos. Más claramente sean a_1, a_2, x los simpliciales de $G_{T'}$, existen $P_{a_1, a_2} = a_1, v_1, v_2, a_2$ cuyos vértices no son vecinos de x , $P_{a_1, x} = a_1, y, x$ cuyos vértices no son vecinos de a_2 , $P_{x, a_2} = x, z, a_2$ cuyos vértices no son vecinos de a_1 , con lo cual a_1, a_2, x es una tripla de $G_{T'}$.

Luego $B_1 = B_3$, se tiene así, el prohibido de intervalos de la Figura 4.26:

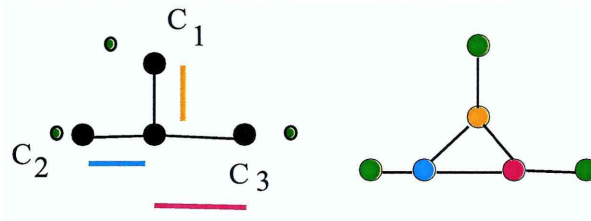


Figura 4.26:

b) Supongamos que $B_1 \neq B_2$. Por el análisis del caso anterior, $B_3 \neq B_1$ y $B_3 \neq B_2$.

Como existe una única tripla debe existir un cubrimiento de $T[B_2, B_3]$ que no cubre a C_1 . En lo que sigue se probará que para no contradecir la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos debe existir un único cubridor de $T[B_2, B_3]$ y se tiene así, al prohibido de intervalos de la Figura 4.27:

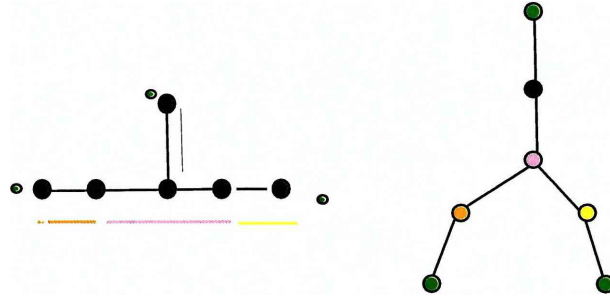


Figura 4.27:

Supongamos entonces que existen y_1, \dots, y_k vértices que cubren $T[B_2, B_3]$. Como no existen gemelos $F_{y_i} \not\subseteq F_{y_j}$ para todo $i \neq j$. Sin perder generalidad podemos suponer que $y_i y_{i+1} \in E(G)$ para $i = 1, \dots, k - 1$ y que $y_1 \in B_2, y_k \in B_k$. Más aún, como B_2 y B_k deben estar separados en T , podemos suponer que B_2 es uno de los extremos de y_1 y que B_3 es uno de los extremos de y_k .

Sea $i \in 1, \dots, k - 1$ tal que $y_i \in B_1$, si $i \neq 1, k$, consideramos y_{i-1} e y_{i+1} , sean A y B los extremos de y_{i-1} e y_{i+1} a mayor distancia de B_1 y a, b los respectivos separadores de A y B en dirección a las hojas. Observar que a o b podrían ser a_2 o a_3 . En caso que $a = a_2$, el grafo $G - v_2$ aún tiene a a_1, a_2, a_3 como tripla, lo cual contradice la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos. Por lo

anterior, podemos suponer que $a \neq a_2$ y $b \neq a_3$.

Podamos el árbol T y sea T' el subárbol de T cuyas hojas son C_1, A, B resulta $G_{T'}$ un grafo cordal con una tripla, contradiciendo así la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos. Más claramente sean a_1, a, b los simpliciales de $G_{T'}$, existen $P_{a_1, a} = a_1, v_1, y_i, y_{i-1}, a$ cuyos vértices no son vecinos de b , $P_{a_1, b} = a_1, y_i, y_{i+1}, b$ cuyos vértices no son vecinos de a , $P_{a, b} = a, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, b$ cuyos vértices no son vecinos de a_1 , con lo cual a_1, a, b es una tripla de $G_{T'}$.

Si $i = 1$ pero $i \neq k$, consideramos y_1, y_2 , sea B el extremo y_2 a mayor distancia de B_1 y b un separador B en dirección a las hojas. Observar que b podría ser a_3 ; además: a) si $B = C_3$ entonces $G - v_3$ tiene una tripla a_1, a_2, a_3 ; b) si $y_1 \in C_2$ entonces $G - v_1$ tiene una tripla a_1, a_2, a_3 ; contradiciendo la minimalidad como grafo cordal no de intervalos.

Podamos el árbol T y sea T' el subárbol de T cuyas hojas son C_1, C_2, B resulta $G_{T'}$ un grafo cordal con una tripla, contradiciendo así la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos. Más claramente sean a_1, a_2, b los simpliciales de $G_{T'}$, existen $P_{a_1, a_2} = a_1, v_1, y_1, v_2, a_2$ cuyos vértices no son vecinos de b , $P_{a_1, b} = a_1, v_1, y_2, b$ cuyos vértices no son vecinos de a_2 , $P_{a_2, b} = a_2, y_1, y_2, b$ cuyos vértices no son vecinos de a_1 , con lo cual a_1, a_2, b es una tripla de $G_{T'}$.

Si $i = k$ consideramos y_{k-1}, y_k y se procede como en el caso anterior llegando a una contradicción.

2. Existen 2 vértices casi-simpliciales, v_1, v_2 ; por el corolario 4.4.2 podemos asumir que C_1 incide en el vértice de grado 3 de T .

a) Si $B_1 = B_3$ entonces C_3 incide en B_1 . En caso que C_3 no incidiera en B_1 como G sólo tiene 3 simpliciales, B_3 debe estar separado en dirección a las hojas por un vértice no simplicial con lo cual existirían 3 vértices casi-simpliciales.

Luego C_3 incide en B_1 , como no hay 3 vértices casi-simpliciales los cubridores de B_1C_3 deben cubrir a C_1 o a C_2 .

G no es de intervalos luego existen x, y cubridores de B_1C_3 tal que $x \in C_1 - C_2$ e $y \in C_2 - C_1$. Se tiene entonces el prohibido de la Figura 4.28:

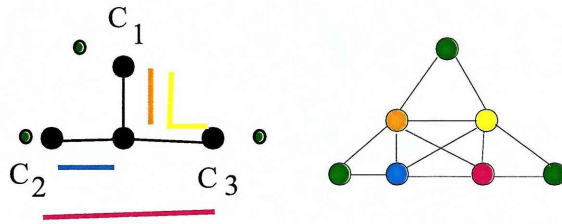


Figura 4.28:

b) Supongamos que $B_1 \neq B_2$. Como en el caso anterior C_3 debe incidir en B_1 o en B_2 . Para fijar ideas supongamos que incide en B_1 .

Como hay una tripla debe existir un cubrimiento de $T[C_1, C_3]$ que no cubre a C_2 .

1) Sea y un vértice de G que cubre a $T[C_3, B_1]$ y que es parte del cubrimiento que existe de $T[C_1, C_3]$ que no cubre a C_2 ,

si $y \in C_1$ entonces como existe una única tripla, y está en $B_2 - C_2$.

Por otro lado, debe existir un cubrimiento de $T[C_3, C_2]$ que no cubre a C_1 . Debido a esto y a la existencia de una única tripla, los cubridores de B_1C_3 deben estar en B_2 .

Si todo cubridor de C_3B_1 tiene por extremo a B_2 , existirían 2 cubrimientos distintos de C_1C_3 con lo cual se contradeciría la minimalidad de G como grafo cordal no de intervalos. Es fácil verificar que $G - y$ es un grafo con una tripla a_1, a_2, a_3 . Luego existe z cubridor de $T[C_3, B_1]$ tal que z no tiene a B_2 por extremo. Entonces debe tener a C_2 como extremo.

Por otro lado, por la existencia de la tripla, hay un cubrimiento de $T[B_1, B_2]$ por vértices que no cubren a C_3 .

Si existe un único vértice cubriendo a $T[B_1, B_2]$ en las condiciones antes mencionadas, no puede cubrir ni a C_1 ni a C_2 para no contradecir la minimalidad como grafo cordal no de intervalos. Más claramente, si w cubre $T[B_1, B_2]$ y $w \in C_1 \cap C_2$ entonces $G - \{v_1, v_2\}$ tiene a a_1, a_2, a_3 como una tripla.

Si w cubre $T[B_1, B_2]$ y $w \in C_1 - C_2$ o $w \in C_2 - C_1$ entonces $G - v_1$ o $G - v_2$ tiene a a_1, a_2, a_3 como tripla. Se tiene así, al prohibido de la Figura 4.29.

Si existe más de un cubridor de $T[B_1, B_2]$ en las condiciones antes mencionadas, sean y_1, \dots, y_k los vértices que cubren $T[B_1, B_2]$.

Para fijar ideas, supongamos que $y_1 \in B_1$ y $y_k \in B_2$. Como G no tiene gemelos $F_{y_i} \not\subseteq F_{y_j}$ para $i \neq j$. Observar que y_1 no

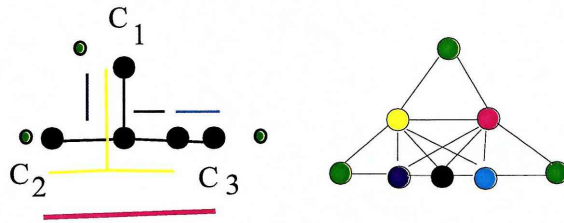


Figura 4.29:

está en C_3 pues si así fuese $G - y$ tiene una tripla siendo y el vértice claw de T . Además y_i no puede estar en C_2 pues si para algún i , $y_i \in C_2$ se tiene que $G - v_2$ tiene una tripla, a_1, a_2, a_3 . Claramente, se tiene el prohibido de intervalos de la Figura 4.30:

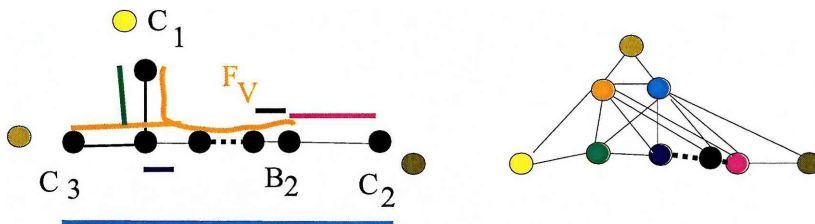


Figura 4.30:

2) y no está en C_1 . Recordar que y no está en C_2 . Podemos suponer que todo cubridor de $T[C_3, B_1]$ no cubre a C_1 pues el caso contrario fue analizado previamente.

Como hay sólo dos casi-simpliciales, B_1 no puede ser extremo de ningún cubridor de $T[C_3, B_1]$.

Si y no cubre a B_2 , sea X su extremo distinto de C_3 y sea z el separador de X en dirección a las hojas. Se sabe que existe

un cubrimiento de $T[C_1, C_2]$ que no cubre C_3 en particular existen y_1, \dots, y_k cubriendo $T[B_1, B_2]$ tal que y_i no está en C_3 ; podemos asumir que $y_1 \in B_1, y_k \in B_2$. Si $y_1 \in C_1$ como hay una y sólo una tripla en G $y_1 \in X$ pues caso contrario $G - v_1$ tiene una tripla pero si y_1 tiene a X por extremo $G - v_1$ también tiene una tripla. Luego X no es extremo de y_1 , sea X' adyacente a X , tal que XX' está cubierta por z , al podar T y considerar el árbol T' que tiene a X, C_1, C_3 como hojas se tiene que x, a_1, a_3 es una tripla de $G_{T'}$; por ello y_1 no está en C_1 . Luego y debe tener como extremo a B_2 .

Por otro lado, debe existir cubrimiento de $T[B_1, B_2]$ que no cubre a C_3 .

Si existe un único vértice o bien cubre C_1 o bien cubre a C_2 o bien no cubre ni a C_1 ni a C_2 .

Si cubre a C_1 entonces debe cubrir a C_2 caso contrario en $G - v_1$ existe tripla a_1, a_2, a_3 , se tiene entonces el prohibido de la Figura 4.31.

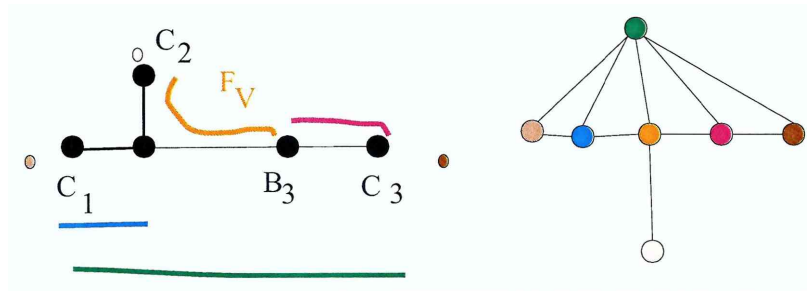


Figura 4.31:

El caso de que cubra a C_2 , debe cubrir a C_1 por el mismo

razonamiento anterior y se tiene el mismo prohibido.

Si no cubre ni a C_1 ni a C_2 , se tiene el siguiente prohibido,

Figura 4.32.

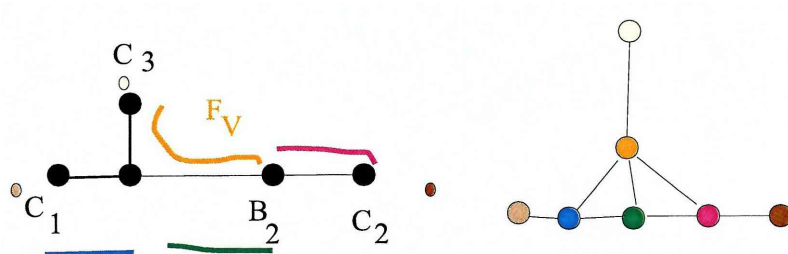


Figura 4.32:

Si existen más de un vértice cubriendo $T[B_1, B_2]$ y no cubriendo C_3 , sean y_1, \dots, y_k esos vértices con $y_1 \in B_1, y_k \in B_2$. Podemos asumir que y_i no está en $C_1 \cup C_2$ pues el caso contrario fue estudiado anteriormente.

Se tiene entonces a la familia de prohibidos de la Figura 4.33:

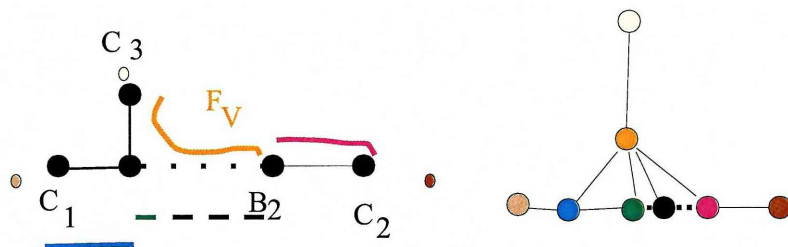


Figura 4.33:

3. Existe un sólo vértice casi-simplicial, v_1 . Claramente C_3 y C_2 inciden en B_1 . Como debe existir cubrimiento de $T[C_3, C_2]$ que no cubre a C_1 y no existe un casi-simplicial distinto de v_1 existe un $y \in (C_2 \cap C_3) - C_1$.

Por otro lado, debe existir un cubridor de C_2B_1 que no cubre C_3 pues caso contrario por el Corolario 3.3.1, G resulta un grafo de intervalos, como el único casi-simplicial es v_1 , nuevamente por el Corolario, existe $z \in (C_2 \cap C_1) - C_3$. Además debe existir un cubridor de B_1C_3 que no cubre C_2 luego existe $w \in (C_3 \cap C_1) - C_2$. Luego a_1, a_2, a_3 es una tripla de $G - v_1$ lo cual es un absurdo.

4. No existen vértices casi-simpliciales. En este caso $B_1 = B_2 = B_3$ y se tiene que G es la pirámide (Figura 4.34).

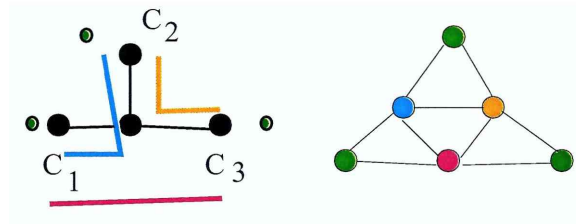


Figura 4.34:

Capítulo 5

Follaje de un grafo cordal

Naturalmente, parámetros de los árboles, como número de hojas, que denotamos l_n , definen parámetros de grafos cordales. Si G es un grafo cordal, el *follaje* de G es $l(G) = \min\{l_n(T) \mid T \text{ un árbol clique de } G\}$. Un árbol clique es llamado l -óptimo de G si $l_n(T) = l(G)$. Claramente grafos cordales conexos con follaje igual a 2 son exactamente grafos de intervalos conexos.

5.1. Follaje de subgrafos

Es fácil ver que el número de hojas de un grafo, puede incrementarse considerando subgrafos inducidos no conexos de un grafo conexo. En cambio, el siguiente resultado prueba que el parámetro decrece si consideramos subgrafos inducidos conexos.

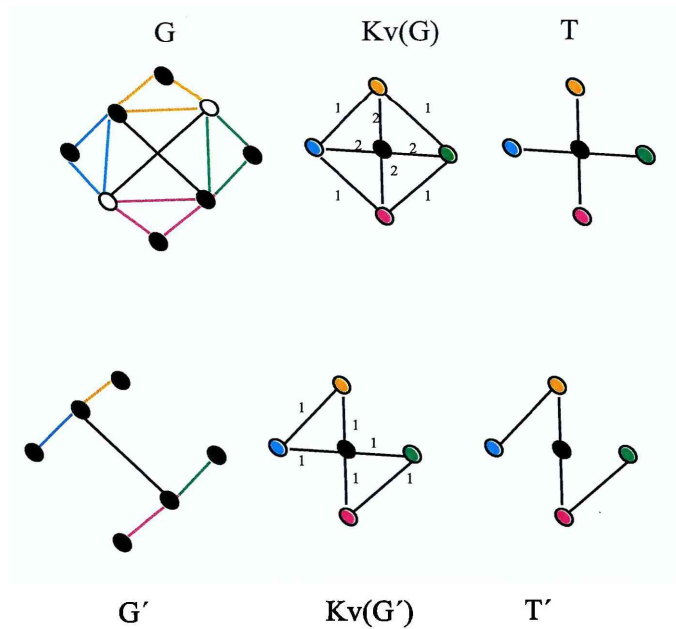


Figura 5.1:

Teorema 5.1.1 *Si G es un grafo cordal y G' es un subgrafo inducido de G conexo entonces $l(G') \leq l(G)$*

Demostración: Si T es un árbol clique l -óptimo de G y G' es un subgrafo conexo de G , G' puede obtenerse de G borrando vértices y una representación canónica de G' puede obtenerse de T contrayendo la representación 2.5.1. Luego el árbol clique de G' obtenido tendrá a lo sumo $l(G)$ hojas. Entonces $l(G') \leq l(G)$. □

En la Figura 5.1, $l(G') = 2$, $l(G) = 4$.

Observar que ningún árbol clique l -óptimo de G' es un subárbol del único árbol clique de G .

Se probará que si T es l -óptimo de G , alguno de sus subárboles lo son de los correspondientes subgrafos.

Si T es un árbol y t es un vértice de T , se dice t -camino de T a un camino t -camino de T desde t hacia una hoja de T .

Sea T un árbol clique de G . Dado P un t -camino de T , sea $F = \{x \in v(G) \mid C_x \cap P = T[A_x, B_x] \neq \emptyset\}$ y $x, y \in F$ se define una relación \leq como sigue: $x \leq y$ si y sólo si $A_x \in P[t, A_y]$. Así definida, resulta un orden total.

A partir de ese orden, se define un orden parcial Ψ , correspondiente al producto cartesiano de vértices, entre triplas asteroidales: sean x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3 dos triplas de G , P_1, P_2, P_3 t -caminos tales que $x_i, y_i \in P_i$ para $i = 1, 2, 3$ y $\beta_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta_2 = (y_1, y_2, y_3)$ vértices de Ψ .

- $\beta_1 \alpha \beta_2$ si y sólo si $x_i \leq y_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema 5.1.2 *Sea T un árbol clique de G y P un t -camino de T . Si β_1, β_2 son vértices no comparables de Ψ entonces existe una tripla β_3 tal que $\beta_1 \alpha \beta_3$ y $\beta_2 \alpha \beta_3$.*

Demostración: $\beta_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta_2 = (y_1, y_2, y_3)$ como no son comparables es claro que $x_i \not\leq y_i$ e $y_i \not\leq x_i$. Para fijar ideas supongamos que $x_1 \leq y_1$, $y_2 \leq x_2$ e $y_3 \leq x_3$, Figura 5.2.

Se probará que y_1, x_2, x_3 es una tripla de G . Como x_1, x_2, x_3 es una tripla asteroidal existen caminos L_1, L_2, L_3 en G tales que L_i es un camino entre x_i y x_{i+1} cuyos vértices no son vecinos de x_j para $i \in \{1, 2\}$, $j \neq i$ y L_3 es un camino entre x_1 y x_3 cuyos vértices no son vecinos de x_2 . Análogamente como y_1, y_2, y_3 es una tripla existen 3 caminos M_1, M_2, M_3 en G entre pares de vértices de la tripla. Con vértices de los caminos $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3$,

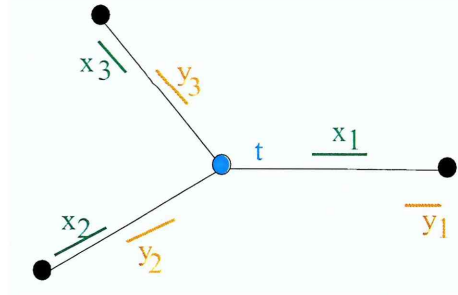


Figura 5.2: Posición de β_1, β_2 en T

se tienen 3 caminos N_1, N_2, N_3 los cuales nos permiten afirmar que y_1, x_2, x_3 es una tripla. Más claramente, con vértices de $M_1 \cup L_1$ se tiene un camino N_1 entre y_1, x_2 cuyos vértices no son vecinos de x_3 pues M_1 no tiene vecinos de y_3 y como $y_3 \leq x_3$ resulta que M_1 no tiene vecinos de x_3 ; además L_1 no tiene vecinos de x_3 . Con el mismo razonamiento se prueba que existen un camino N_2 , con vértices de $M_2 \cup L_2$, entre x_2 y x_3 por no vecinos de y_1 y un camino N_3 , con vértices de $M_3 \cup L_3$, entre y_1 y x_3 por no vecinos de x_2 . Sea $\beta_3 = (y_1, x_2, x_3)$, es claro que $\beta_1 \alpha \beta_3$ y $\beta_2 \alpha \beta_3$. \square

Corolario 5.1.1 *Existe supremo de triplas con el orden α .*

Teorema 5.1.3 *Sean G un grafo cordal, T un árbol clique de G l-óptimo, t un vértice de T de grado al menos 3 y P_1, P_2, P_3 ; 3 t -caminos de T tal que $V(P_i) \cap V(P_j) = \{t\}$. Entonces existen x_1, x_2, x_3 vértices de G tal que $V(P_i) \cap C_{x_i} \neq \emptyset$; t no está en C_{x_i} para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ y x_1, x_2, x_3 forma una tripla.*

Demostración: Si $T = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ vale pues T es l-óptimo y G no es de intervalos.

En caso que $T' = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \neq T$, si $G_{T'}$ no tiene triplas entonces existe T'' árbol clique de $G_{T'}$ con 2 hojas y claramente por el Teorema 3.3.3 $T'' \cup T - T'$ es un árbol clique de G con una hoja menos. \square

Corolario 5.1.2 Sean G un grafo cordal, T un árbol clique de G l -óptimo, t un vértice de T de grado al menos 3 y P_1, P_2, P_3 ; 3 t -caminos de T tal que $V(P_i) \cap V(P_j) = \{t\}$. Entonces $T' = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ es un árbol clique l -óptimo de $G_{T'}$.

Los siguientes muestran como pueden ubicarse las triplas mencionadas anteriormente.

Corolario 5.1.3 Sean G un grafo cordal, T un árbol clique de G l -óptimo, t un vértice de T de grado al menos 3 y P_1, P_2, P_3 ; 3 t -caminos de T tal que $V(P_i) \cap V(P_j) = \{t\}$. Entonces existe una tripla asteroidal $\{s_1, s_2, s_3\}$ de vértices simpliciales de G con $s_i \in P_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración:

Por el Teorema 5.1.3, existe una tripla asteroidal. Además por el Corolario 5.1.1, sea x_1, x_2, x_3 una 3-asteroidal de G supremo con el orden α .

Si x_1 no es un vértice simplicial de G , sea s_1 el primer vértice simplicial cuya representación en T es más próxima a C_1 en dirección a la hoja H_1 . Claramente $x_1 \preceq s_1$. Además por la ubicación de $C_{x_1}, C_{x_2}, C_{x_3}, C_{s_1}$ en T y como x_1, x_2, x_3 es una tripla de G , el camino entre x_2, x_3 que no toca la vecinanza de x_1 , no toca la vecinanza de s_1 .

Como s_1, x_2, x_3 no puede ser tripla por la elección de x_1, x_2, x_3 , o bien todo camino entre s_1, x_2 toca la vecinanza de x_3 o todo camino entre s_1, x_3 toca la vecinanza de x_2 .

Supongamos que todo camino entre s_1, x_2 toca la vecinanza de x_3 . Luego existe una arista $e = AB$ en $T[C_{s_1}, C_2]$ cubierta sólo por vecinos de x_3 pero como x_1, x_2, x_3 es una tripla AB está en $T[C_1, C_{s_1}]$. Por la elección de s_1 el grado de A , extremo de e más próximo a t , es mayor o igual a 3.

Como $A \cap B \subset C_3$ y $A \in T[C_3, B]$ por el Teorema 3.3.1, $T_1 = T - e \cup BC_3$ un árbol clique de G que además es l -óptimo.

Sean P'_1, P'_2, P'_3 caminos incidentes en C_3 , siendo $V(P'_1) = (V(P_1) - V(T[t, B])) \cup \{C_3, B\}$, $V(P'_2) = V(P_2) \cup V(T[t, C_3])$, $V(P'_3) = (V(P_3) - V(T[t, C_3])) \cup \{C_3\}$. Por el Teorema 5.1.3, existe x'_1, x'_2, x'_3 , 3-asteroidal de G alrededor de C_3 . Observar que x'_3 no está en C_3 , luego el primer clique desde C_3 hacia la hoja H_3 en T_1 que lo contiene está en $T[C_3, H_3]$, por ello $x'_3 \leq x_3$. Por otro lado, como x'_1, x'_2, x'_3 es tripla, debe ubicarse en T alrededor de un vértice de grado al menos 3, luego ningún clique que tenga a x'_2 puede ubicarse en $T[t, C_3]$.

Claramente por la elección de la tripla x_1, x_2, x_3 , si C'_2 es el primer clique que tiene a x'_2 desde t hacia H_2 , $C'_2 \in T[t, C_2]$. Por lo antes mencionado, $x'_2 \leq x_2$.

Si $\beta_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $\beta_2 = (x'_1, x'_2, x'_3)$ por el Teorema 5.1.2 existe β_3 tal que $\beta_1 \alpha \beta_3$ y $\beta_2 \alpha \beta_3$, contradiciendo así que x_1, x_2, x_3 es una 3-asteroidal supremo de G .

□

Ahora se probará que si T es un árbol l -óptimo y t un vértice de grado mayor o igual a 3, entonces existen t' y C siendo t' un vértice de grado al menos 3 siendo C vecino de t' en T' tal que C tiene un vértice de una tripla.

Teorema 5.1.4 Sean G un grafo cordal, T un árbol clique de G l -óptimo, t un vértice de T de grado al menos 3 y P_1, P_2, P_3 ; 3 t -caminos de T tal que $V(P_i) \cap V(P_j) = \{t\}$, x_1, x_2, x_3 una tripla sobre esos caminos tal que $D_T(C_{x_2}, t)$ es mínima. Entonces existe un árbol clique T' con C_{x_2} adyacente a un vértice de grado al menos 3 de T' .

Demostración: Supongamos que en T , C_{x_2} no es adyacente a un vértice de grado al menos 3. Luego existe $C \in P_2$ adyacente a t ; sea $T_1 = P_1 \cup P_3 \cup T[C, t]$. Claramente por la elección de x_2 , resulta que G_{T_1} es un grafo sin triplas. Luego G_{T_1} es un grafo de intervalos, por ello existe T'_1 un árbol clique de G_{T_1} que es un camino. Claramente por el Teorema 3.3.3 $T' = T - T_1 \cup T'_1$ es un árbol clique de G en el cual C es ahora vértice de grado al menos 3. Si C_{x_2} no fuese vecino en T' de C se procede recursivamente hasta obtener un árbol T' en las condiciones antes mencionadas. \square

5.2. Cotas del follaje

El follaje es un parámetro de los grafos cordales del cual poco se sabe, de hecho no se sabe cómo calcular el follaje eficientemente en un grafo cualquiera y mucho menos construir un árbol clique l -óptimo.

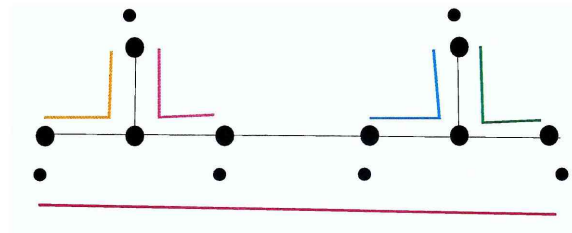
Cotas inferiores

En [16] se estudia este parámetro obteniendo la cota inferior dada por el conjunto asteroidal máximo. Es decir, si llamamos $a(G)$ al cardinal de un conjunto asteroidal de tamaño máximo entonces:

$$a(G) \leq l(G)$$

Esta cota también se deduce trivialmente del Lema 4.3.1.

El siguiente grafo muestra un ejemplo en el cual $l(G) = 4$ pero $a(G) = 3$.

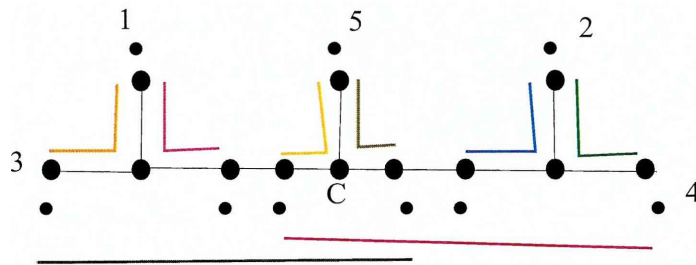


Árbol clique de un grafo G con $a(G)=3$ y $l(G)=4$

Teorema 5.2.1 G es un grafo cordal. Si existen v_1, \dots, v_k vértices de G y C un clique de G tal que en cualquier árbol l -óptimo de $G - v_k$, los v_i participan en distintos C -caminos y v_i, v_{i+1}, v_k es una tripla asteroidal de G , entonces $l(G) \geq k$.

Demostración: Supongamos que $l(G) = k - 1$ entonces si \tilde{T} es un árbol l -óptimo de G , v_k participa de un C -camino que tiene a v_i lo que contradice que v_i, v_{i+1}, v_k es una tripla asteroidal de G . \square

En la siguiente Figura se observa una representación de un grafo G con $a(G) = 3$, 5 vértices cumpliendo las condiciones del Teorema anterior.



1,2,3,4 son vértices de G , $a(G)=3, l(G)=5$.

Observar: 1,2,3 no es tripla; 1,2,4 no es tripla
 1,2,3,4 se ubican en distintos C-caminos de cualquier árbol clique de $G-5$ y 1,2,5; 2,3,5; 3,4,5 son triplas de G

Corolario 5.2.1 G es un grafo cordal. Si existen v_1, \dots, v_k vértices de G tales que v_1, \dots, v_{k-1} forman un conjunto asteroidal de $G-v_k$ y para todo i, v_i, v_{i+1}, v_k es una tripla asteroidal de G , entonces $l(G) \geq k$.

Un vértice a simplicial de G se dice *simplicial no esencial* si satisface que $G - N[a]$ es conexo. *simplicial no esencial*

Si G es un grafo cordal sin simpliciales esenciales, es decir, cuyos simpliciales son todos no esenciales se dirá que G es *compacto*. *compacto*

Observar que los grafos prohibidos para la clase de los grafos de intervalos son compactos.

Teorema 5.2.2 Si G es un grafo cordal compacto con k simpliciales:

1. En todo árbol clique T de G , C_a es hoja de T , siendo a simplicial de G .
2. $l(G) = k$ y todo árbol clique de G es l -óptimo.



3. Los k simpliciales de G forman una k -asteroidal.

Un resultado inmediato del Teorema es el siguiente.

Corolario 5.2.2 Si G' es un subgrafo cordal compacto con k simpliciales de un grafo cordal G , entonces $k \leq l(G)$.

Cotas superiores

Este tipo de cotas son obtenidas considerando subgrafos inducidos.

Teorema 5.2.3 G un grafo cordal. Si T es un árbol clique de G , C es un vértice interior de T y T_1, T_2 dos subárboles de T cuyos vértices se intersectan en C y cuya unión es T . Entonces $l(G) \leq l(G_{T_1}) + l(G_{T_2})$.

Demostración: Sean \tilde{T}_1 y \tilde{T}_2 árboles l -óptimos de G_{T_1} y de G_{T_2} respectivamente. Es claro que $\tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2$ es un árbol clique de G . Luego $l(G) \leq l(G_{T_1}) + l(G_{T_2})$.

□

Una arista e de T se dice *minimal* si su conjunto de cubridores es minimal respecto de la inclusión. Se dirá arista *minimal única* si además no hay otras aristas de T con sus mismos cubridores.

El siguiente lema es trivial.

Lema 5.2.1 Si T es un árbol clique de G y e es una arista minimal única pendiente de T . Entonces la arista equivalente a e es pendiente en todo árbol clique de G .

Teorema 5.2.4 *G un grafo cordal, T un árbol clique de G , e una arista minimal única de T ; T_1, T_2 las componentes conexas de $T - e$ y $\overline{T}_i = T_i \cup e$. Entonces $l(G) \leq l(G_{\overline{T}_1}) + l(G_{\overline{T}_2}) - 2$.*

Demostración: Sea \tilde{T} un árbol clique l-óptimo de G , claramente en \tilde{T} existe una única arista equivalente con e , sea \tilde{e} . Dado que en ambos árboles clique e y \tilde{e} respectivamente deben separar los mismos cliques de G , puede considerarse que si \tilde{T}_1 y \tilde{T}_2 son los subárboles de $\tilde{T} - \tilde{e}$, se tiene que los cliques de G que son vértices de T_i son los mismos que los de \tilde{T}_i . Luego ambos son árboles clique del mismo subgrafo de G .

Por otro lado, es claro que $ln(\tilde{T}) = ln(\tilde{T}_1 \cup \tilde{e}) + ln(\tilde{T}_2 \cup \tilde{e}) - 2$.

Veamos que $\tilde{T}_i \cup \tilde{e}$ es l-óptimo de $G_{\overline{T}_i}$.

Si H_i fuera un árbol l-óptimo de $G_{\overline{T}_i \cup \tilde{e}}$ por el Lema 5.2.1, la arista equivalente a \tilde{e} es pendiente de H_i . Luego si $ln(H_i) < ln(\tilde{T}_i \cup \tilde{e})$ entonces \tilde{T} no sería l-óptimo pues $H_i \cup \tilde{T}_j$ con $i \neq j$ sería un árbol clique de G con menos hojas que \tilde{T} .

□

Capítulo 6

Grafos no UV minimales

Un grafo G cordal es UV si para algún árbol clique T de G , $(C_v)_{v \in V(G)}$ es una familia de caminos de T . Se llama UV-árbol clique a cualquier árbol clique con esta propiedad.

Naturalmente, si un grafo G cordal no es UV para todo T árbol clique de G existe un vértice w tal que C_w no es un camino de T , en este caso se dice que w es un *claw* de T .

Un grafo G cordal es no UV **minimal** si no es UV pero para todo $v \in V(G)$, $G - v$ es un grafo UV .

Recientemente en [15] se presentó la familia completa de grafos no UV minimales.

Cuando se inició el estudio de grafos cordales no UV minimales, estos resultados aún no existían. Se consideraron grafos con exactamente una 3-asteroidal. Por la minimalidad, los vértices de la 3-asteroidal debían ser simpliciales y ubicarse sobre las hojas de cualquiera de sus árboles clique. Además es fácil ver que es suficiente considerar los árboles clique T con solo un vértice

de grado 3 y una hoja adyacente a él. Si algún vértice del grafo es vecino de los 3 formando la tripla, se obtiene un grafo prohibido de intervalos con un vértice universal. En caso contrario, un claw w de T sería adyacente a lo sumo a 2 vértices de la tripla. Entonces se procedió a analizar si existían o no otros árboles clique donde w fuera un camino. A partir de ese análisis se obtuvieron los prohibidos con exactamente una tripla asteroidal y follaje 3, luego partiendo de ellos se construyeron prohibidos con follaje impar. Posteriormente, con un análisis similar, se encontraron prohibidos con follaje 4 y a partir ellos se construyeron prohibidos con follaje par. La dificultad de este procedimiento fue probar que ellos eran los únicos prohibidos para la clase UV . Sin embargo, pudo observarse de la lista de prohibidos, el comportamiento de los vértices simpliciales. Esto permitió cambiar la estrategia desde el análisis de los simpliciales. Estos resultados son los que se describen en lo que sigue.

6.1. Preliminares

Se estudiarán los grafos no UV minimales, una característica de estos grafos es que deben ser 2-conexos. Si esto no fuese así, existiría un vértice x en G tal que $G - x$ tiene más de una componente conexa. Claramente en cualquier árbol clique de G , debe existir al menos un arista cubierta sólo por x . Sea T es un árbol clique de G , e una arista sólo por x a menor distancia de un hoja, T_1, T_2 las componentes conexas de $T - \{e\}$; como G no es UV minimal y G_{T_i} son subgrafos propios de G , resultan grafos UV y por ende existen \tilde{T}_i , UV -árbol clique de G_{T_i} , en los cuales x es un camino con X_1 uno de

sus extremos en T_1 , X_2 uno de sus extremos en T_2 . Claramente, $T_1 \cup X_1 X_2 \cup T_2$ es un UV -árbol clique de G , lo cual contradice la minimalidad de G como grafo cordal no UV .

Observar que los grafos DV también resultan 2-conexos, no así, los grafos RDV , como puede observarse en la Figura 6.1.

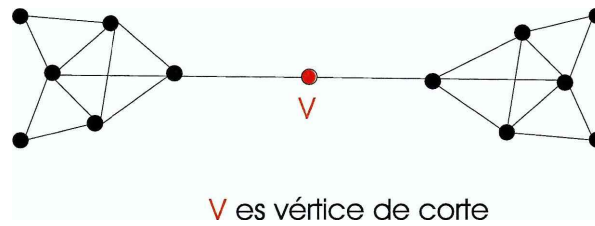


Figura 6.1:

Por otro lado, en los grafos no UV minimales, como siempre ocurre en los grafos cordales, los vértices simpliciales juegan un rol preponderante.

Recordemos que un vértice $s \in V(G)$ es **simplicial** si $N(s)$ es un clique de G . Además este es el único clique que contiene a s . Notamos C_s a dicho clique es decir $C_s = N[s]$.

Un vértice simplicial de un grafo cordal se dice **separador** si

$$|\bigcap_{v \in N(s)} C(v)| \neq 1$$

Es decir $N(s)$ está contenido en más de un clique de G (Figura 6.2).

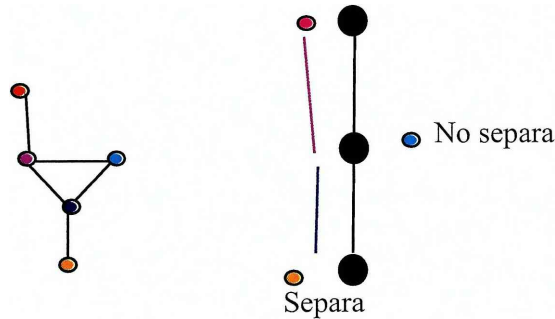


Figura 6.2: Separa y no separa

Lema 6.1.1 G un grafo cordal. s es un simplicial separador de G si y sólo si $C(G - s) = C(G) - C_s$.

Demostración:(\Rightarrow) Sea (T, F) una representación canónica de G luego $(T, F') = (F_v)_{v \neq s}$ es una representación de $G - s$. Dado que s es simplicial separador, el único vértice de T no separado por F' es el que representa a C_s . Luego si tomamos la representación canónica de (T', F') obtenida por contracción de (T, F') se tiene que todos los vértices de T' , o sea, los cliques de $G - s$, son los cliques de T excepto C_s . Luego $C(G - s) = C(G) - C_s$.

(\Leftarrow) Si s es un simplicial tal que $C(G - s) = C(G) - C_s$ entonces $N(s)$ es un completo que no es un clique de $G - s$ y $\bigcap_{v \in N(s)} C_v$ es un camino de T y de ahí, $N(s)$ está contenido en más de un clique de $G - s$. Luego está contenida en más de un clique de G , luego $|\bigcap_{v \in N(s)} C(v)| \neq 1$ y por ello s es separador. \square

En el siguiente teorema se probará que si un grafo es no UV minimal entonces todo simplicial es separador.

Teorema 6.1.1 *Si G un grafo cordal es no UV minimal, todo simplicial es separador.*

Demostración: Sea s un vértice simplicial de G y C_s el clique que lo contiene. Si s no fuese separador, en toda representación de G existirán un par de vértices F_a, F_b que separan C_s . Más aún, en toda representación de G , $F_a \cap F_b = \{C_s\}$. Por ese motivo, $G - s$ tiene los mismos cliques que G (Figura 6.3).

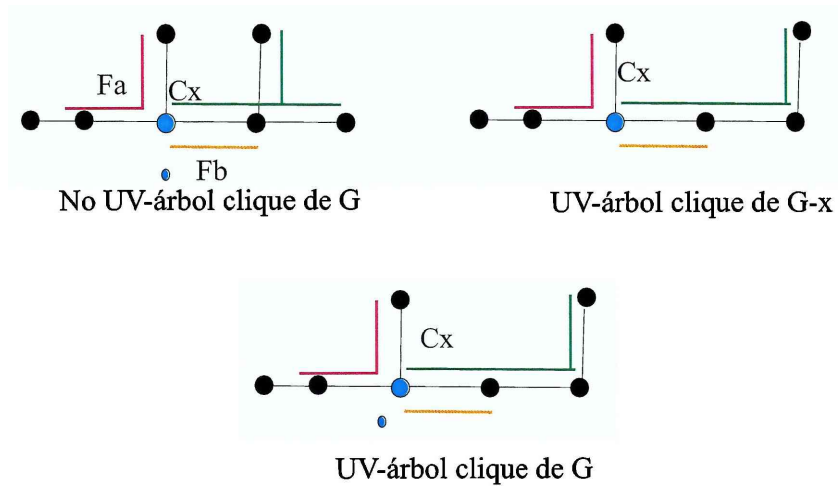


Figura 6.3:

Como $G - s$ es UV, existe (T, F') una representación UV, a partir de esa representación se construye una representación UV de G considerando el mismo árbol T y adicionando el miembro $F_s = \{C_s\}$ a la familia F' . \square

Dado un grafo G se dice que dos vértices x e y de G son **gemelos**, si $N[x] = N[y]$. Se dice que x e y son **falsos gemelos**, si x e y no son adyacentes y $N(x) = N(y)$ (Figura 6.4).

Claramente, si (T, F) es una representación canónica de G y x, y son vértices gemelos si y sólo si $F_x = F_y$.

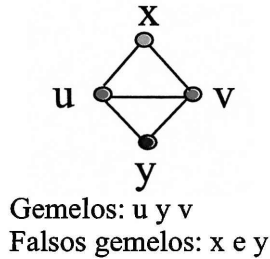


Figura 6.4: Gemelos, Falsos gemelos

En el siguiente lema se prueba que los grafos no UV minimales, no poseen vértices gemelos.

Lema 6.1.2 *Si G un grafo cordal es no UV minimal entonces G no tiene vértices gemelos.*

Demostración: Supongamos que G tiene vértices gemelos. Sean x e y vértices gemelos de G . Claramente $G - x$ tiene exactamente los mismos cliques de G . Por otro lado, como G no es UV minimal, $G - x$ es UV . Luego, existe un UV -árbol clique T' de $G - x$, donde los $(C_v)_{v \neq s}$ son caminos. Entonces, como $C_x = C_y$, se tiene que T' es también un UV -árbol clique de G (Figura 6.5).

□

De lo antes expuesto, resulta de interés el análisis de los grafos no UV minimales con falsos gemelos. En la siguiente sección, se estudiará este caso. Se observa que si un grafo es no UV minimal y posee falsos gemelos ellos son sólo 2 y son simpliciales esenciales del grafo.

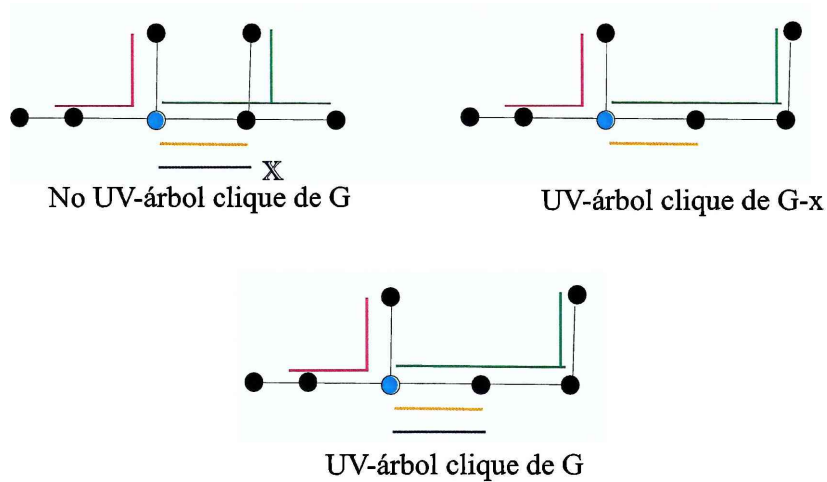


Figura 6.5:

Un vértice s , simplicial de un grafo G se dice *esencial* si $G - N[s]$ no es conexo. Posteriormente se estudian los grafos no UV minimales con simpliciales esenciales. Finalmente, se trata a los grafos cordales sin simpliciales esenciales llamados *compactos* y los grafos no UV minimales compactos. De este modo se completa el análisis y se obtiene toda la familia de prohibidos minimales para la clase UV .

6.2. Grafos no UV minimales con falsos gemelos

Los resultados de esta sección serán generalizados en el capítulo siguiente, sin embargo se ha decidido desarrollar los contenidos para ofrecer al lector la idea generadora de los siguientes. A la vez, dar la posibilidad de acceder a un análisis más simple que los desarrollados en capítulos finales.

Lo primero que se observa es que si un grafo cordal tiene falsos gemelos, éstos serán simpliciales.

Lema 6.2.1 *Si G es un grafo cordal, x e y son falsos gemelos de G entonces x e y son vértices simpliciales de G .*

Demostración: Sea (T, F) una representación canónica de G . Como x e y son falsos gemelos, $F_x \neq F_y$.

Supongamos que x no es un vértice simplicial de G . Luego x está en por lo menos 2 cliques, es decir $|F_x| \geq 2$.

Se sabe que F_x es un subárbol de T , denotaremos por C_1, \dots, C_k a las hojas de F_x en T . Por otro lado, F es una familia separadora, luego C_1, \dots, C_k son vértices de T , separados por miembros de F .

Sean F_{v_1}, \dots, F_{v_k} miembros de la familia F , que junto con F_x separan C_1, \dots, C_k respectivamente. Es claro que $v_1, \dots, v_k \in N(x)$. Como x e y son falsos gemelos resulta que $v_1, \dots, v_k \in N(y)$. Por este motivo, F_y tiene intersección no vacía con F_{v_i} , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Luego, por ser F_y un subárbol de T , es claro que $C_i \in F_y$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Claramente, $C_i \in F_y \cap F_x$, entonces $x \in N(y)$, contradiciendo que x e y son falsos gemelos. Por ello, x e y deben ser simpliciales. \square

Antes de continuar el análisis de los falsos gemelos se presentan las siguientes operaciones entre árboles.

Subdivisión: Si T' es un árbol y ab es una arista de T' , T es obtenido por *subdivisión de ab* si se reemplaza en T' a ab por el camino acb (Figura 6.6).

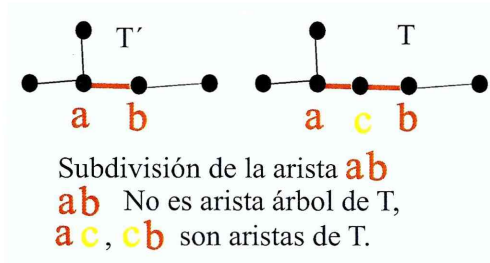


Figura 6.6: Subdivisión

Partición: Si T' es un árbol, $a \in V(T')$ y R_1, \dots, R_k son las ramas de T' incidentes en a , T es obtenida por *partición de a* en T' si $V(T) = V(T') \cup \{a'\}$, aa' es una arista de T , las ramas incidentes de T' en a son particionadas en 2 conjuntos disjuntos que serán las ramas de T' incidentes en a y a' respectivamente (Figura 6.7).

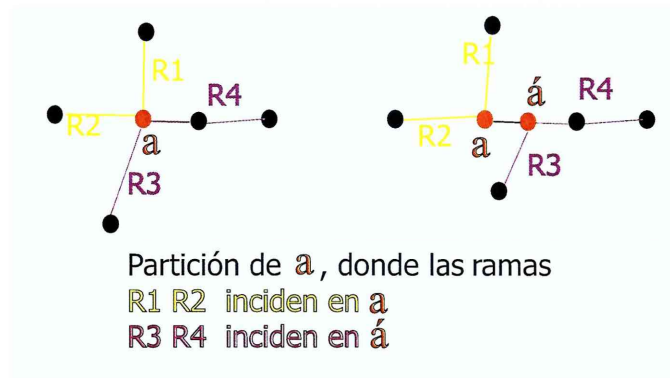


Figura 6.7: Partición

Estas operaciones definidas previamente servirán como herramienta para construir representaciones canónicas de grafos cordales en el caso en que estos posean falsos gemelos.

Más claramente, si G es un grafo cordal x, y falsos gemelos de G y (T', F') es una representación canónica de $G - x$, podemos obtener una representación

canónica de G subdividiendo una arista cualquiera incidente en C_y o particionando C_y :

(T, F) es obtenida de (T', F') **subdividiendo** la arista $C_y A$ de T' si:

- T es el árbol obtenido reemplazando $C_y A$ por el camino $C_y C_x A$
- $F = (F_v)_{v \in V(G)}$ siendo $F_v = F'_v$ si v no es vecino de y , $F_v = F'_v \cup \{C_x\}$ si v es vecino de y y $F_x = C_x$.

(T, F) es obtenida de (T', F') **particionando** el vértice C_y de T' Si:

- T es el árbol cuyos vértices son los vértices de T' y C_x , $C_x C_y$ es una arista de T , las ramas incidentes de T' en C_y son particionadas en ramas incidentes en C_y y C_x respectivamente.
- F está definida como antes, es decir, $F_v = F'_v$ si v no es vecino de y , $F_v = F'_v \cup \{C_x\}$ si v es vecino de y y $F_x = C_x$.

Ahora continuamos el análisis de los falsos gemelos donde se utilizarán las operaciones antes mencionadas.

Lema 6.2.2 G es un grafo cordal no UV minimal. Si W es un conjunto de vértices de G , falsos gemelos de a pares entonces $|W| = 2$.

Demostración: Supongamos que $|W| > 2$, y sean $x, y, z \in W$. Como $G - x$ es UV , existe (T, F) representación UV . Además los miembros de F son caminos de T , para todo $v \in V(G)$, $F_v = V(T[K_1, K_2])$ siendo K_1, K_2 vértices de T . Recordar que los vértices de T son los cliques de $G - x$; como x es simplicial de un grafo no UV minimal por el Teorema 6.1.1, $C(G - x) = C(G) - \{C_x\}$. Se construirá una representación UV de G .

Se construirá entonces un árbol y una familia de caminos por subdivisión de una arista incidente en C_y . Más claramente: si C incide en C_y

- $V(T') = V(T) \cup \{C_x\}$, $E(T') = E(T) - \{C_y C\} \cup \{C_y C_x, C_x C\}$. Observar que los vértices de T' son los cliques de G .
- $F' = (F'_v)_{v \in V(G)}$ definida:
 - $F'_v = F_v$ si v no es vecino de y ;
 - $F'_v = F_v \cup \{C_x\}$ si v es vecino de y ;
 - $F'_x = C_x$.

Claramente F' son caminos en T' . Luego G tiene una representación UV . \square

Teorema 6.2.1 Sean G un grafo cordal no UV minimal, x e y falsos gemelos de G . Si T es un UV -árbol clique de $G - x$ entonces:

1. C_y es un vértice de grado al menos 3 en T .
2. Existe al menos un vértice $v \in N(y)$ de G tal que C_y no es hoja de F_v en T .

Demostración: Por el Lema 6.2.1, x e y son simpliciales.

1) Supongamos que C_y tiene grado 2 en T , sean C y D los vértices de T adyacentes a C_y . Claramente, las aristas CC_y y DC_y de T , están cubiertas sólo por vecinos de y . Además, $F' = (F'_v)_{v \in V(G) - \{x\}}$ es una familia de caminos en T . Los vértices de T son los cliques de $G - x$; como x es simplicial por el Teorema 6.1.1, en particular los vértices de T también son cliques de G . Se

sabe que los vértices de T , están separados por miembros de F . En particular, C_y está separado por un miembro simplicial F_y .

Se construirá un árbol T' y una familia de subárboles F' por subdivisión de una arista incidente en C_y . Más claramente, consideramos C el vértice vecino a C_y en T luego $V(T') = V(T) \cup \{C_x\}$; $E(T') = E(T) - \{C_y C\} \cup \{C C_x\} \cup \{C_x C_y\}$ y $F' = (F'_v)_{v \in V(G)}$ siendo $F'_v = F_v$ si v no es vecino de y , si v es vecino de y $F'_v = F_v \cup \{C_x\}$ y $F'_x = C_x$ (Figura 6.8).

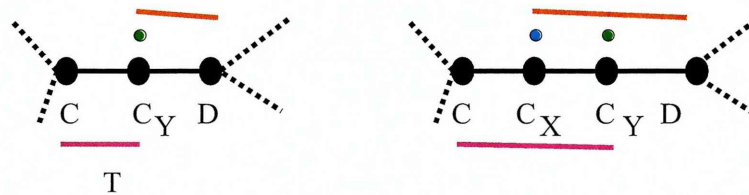


Figura 6.8:

Claramente los miembros de F' son caminos en T' , y G tiene una representación UV .

2) Si todos los $(F_w)_{w \in N(y)}$ tienen a C_y como hoja, se construirá un árbol T' y una familia de caminos F' como sigue:

- $V(T') = V(T) \cup \{C_x\}$; $E(T') = E(T) \cup \{C_x C_y\}$. Observar que los vértices de T' son los cliques de G .
- $F' = (F'_v)_{v \in V(G)}$ tal que:
 - $F'_x = C_x$;
 - $F'_v = F_v$ si v no es vecino de y
 - si v es vecino de y , $F'_v = F_v \cup \{C_x\}$.

Claramente los miembros de F' son caminos en T' , y G tiene una representación UV .

□

Sea T un árbol con k vértices tal que uno de sus vértices tiene grado $k - 2$ se dirá que T es un árbol *cometa* (Figura 6.9).

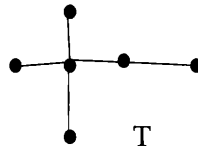
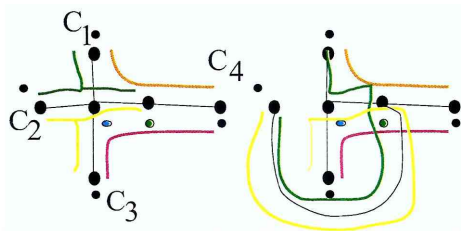


Figura 6.9: Cometa

Si (T, F) es una representación de un grafo cordal G con 2 falsos gemelos x e y , tal que T es un árbol cometa siendo sus vértices $C_1, \dots, C_{n-1}, C_x, C_y, C_n$, con C_y el vértice de grado n y C_1, \dots, C_{n-1}, C_x sus vecinos en T y $F = (F_v)_{v \in \{1, \dots, n-1, x, y\}}$ familia de subárboles tales que $F_i = \{C_x, C_y, C_i, C_{i+1}\}$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $F_n = \{C_x, C_y, C_1, C_n\}$, $F_x = C_x$ y $F_y = C_y$ se dice que G es un **cometa**.



(T,F) 2 representaciones de cometa una no UV otra UV.

Figura 6.10: Dos representaciones de un cometa

Claramente a partir de (T, F) puede obtenerse por contracción, una repre-

sentación (T', F) de $G - x$ en la cual T' es una árbol estrella, en este caso se dirá que $G - x$ es una **estrella** (Figura 6.11).

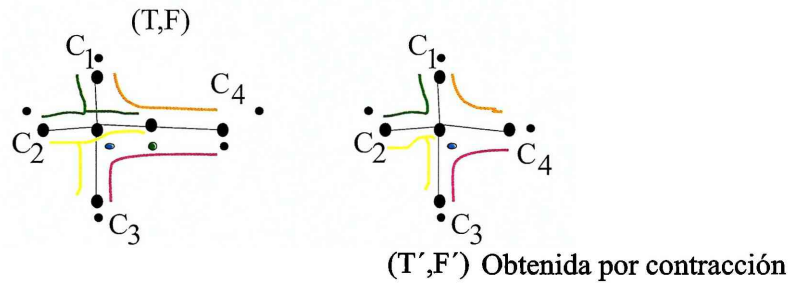


Figura 6.11:

Es fácil verificar que si el grado del vértice central de T es impar entonces G no es UV minimal. En ese caso se dirá que G es un **cometa impar**.

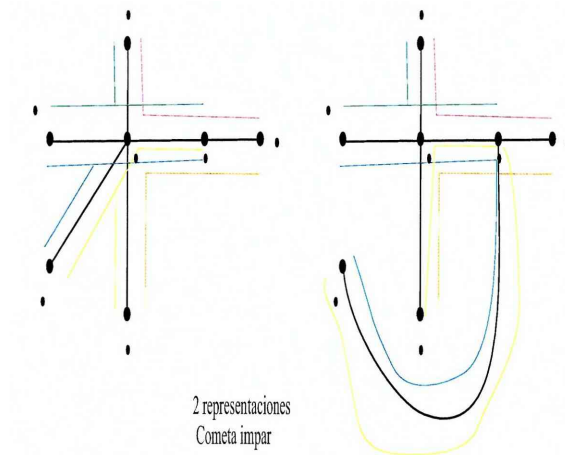


Figura 6.12:

Teorema 6.2.2 Si G es un cometa impar entonces G es un grafo cordal no UV minimal.

En el siguiente teorema se ve que son los únicos.

Teorema 6.2.3 G es un grafo cordal no UV minimal, que tiene x e y falsos gemelos. Si (T, F) es una representación UV de $G - x, y$ grado en T de C_y es n entonces

1. n es impar;
2. existe un orden de los vecinos de C_y en T , C_1, \dots, C_n tal que existe una familia de miembros de F ; F_1, \dots, F_n tales que $C_i C_{i+1} \in F_i$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $C_n C_1 \in F_n$.

Demostración: Sabemos por el Teorema 6.2.1 que C_y tiene grado mayor o igual a 3 en T y que existe al menos un miembro de F , F_i conteniendo a 2 vecinos de C_y (Figura 6.13).

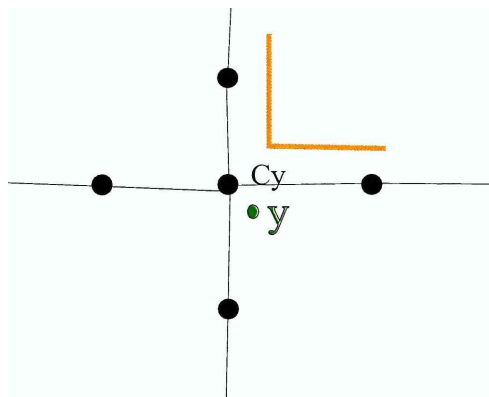


Figura 6.13:

Sea Π el grafo auxiliar de T definido por $V(\Pi) = N_T(C_y)$ siendo $CC' \in E(T)$ si y sólo si existe un F_i que contiene a C y C' (Figura 6.14).

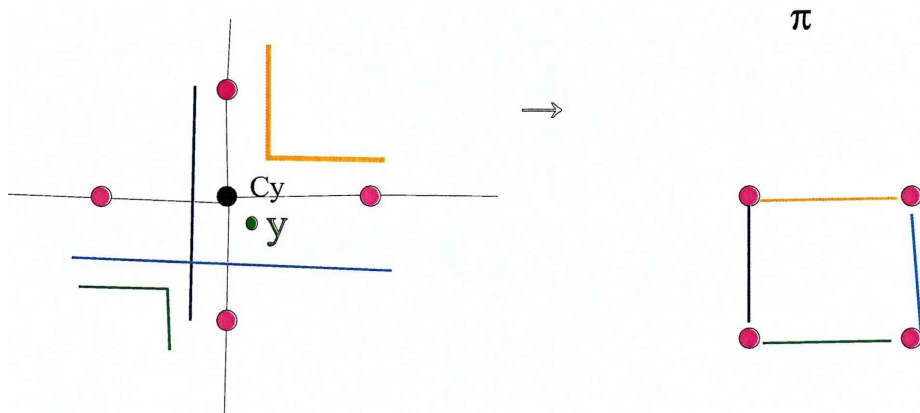


Figura 6.14:

Π es un grafo con n vértices y al menos 1 arista. Veámos que Π debe tener ciclos impares. Si no fuese así, Π sería un grafo bipartido entonces se podría construir una representación UV de G por partición de C_y . Más claramente, se construirá el árbol T' por partición de C_y del siguiente modo: sea A y B la bipartición de vértices de Π , las ramas de T incidentes en C_y que tiene vértices de A en T' se harán incidentes en C_y , en cambio las ramas incidentes en C_y que tienen vértices de B en T' se harán en C_x . Es fácil verificar que (T', F') es una representación UV de G , lo que contradeciría la hipótesis (Figura 6.15).

Luego Π tiene ciclos impares. Sea L el conjunto de vértices de Π induciendo el mayor ciclo impar de Π .

Si $|L| < n$, sea T' el subárbol de T inducido por $L \cup C_y$, es decir $T' = T[L \cup C_y]$ entonces $G_{T'}$, es una estrella impar y si T'' es obtenido subdividiendo C_y en

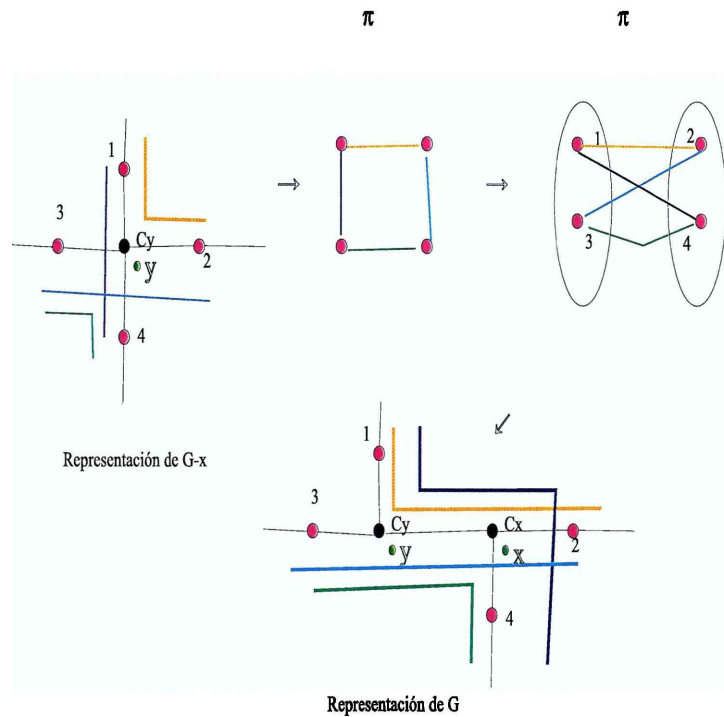


Figura 6.15:

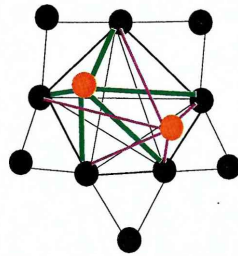
T' , adicionando el vértice C_x , $G_{T''}$ es un cometa impar, luego por el Teorema 6.2.2 no es un grafo UV , contradiciendo la minimalidad. Por ello $|L| = n$ y n es impar.

Sea C_1, \dots, C_n el orden de los vértices de C_y en T inducido por el ciclo L . Como C_1, C_n y $C_i C_{i+1}$ ($i \in \{1, \dots, n-1\}$) son adyacentes en Π existen miembros de la familia tales que $C C_1, C_n \in F_n$ y $C_i, C_{i+1} \in F_i$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

□

Corolario 6.2.1 G un grafo cordal con falsos gemelos. Entonces G es no

UV minimal si y sólo si G es un cometa impar.



Cometa impar de 5 vértices

Figura 6.16: Cometa Impar

Capítulo 7

Grafos no UV minimales con simpliciales esenciales

En el capítulo anterior se estudiaron los grafos minimales no UV con un par de vértices falsos gemelos. Ahora, se estudian los grafos minimales no UV con vértices simpliciales esenciales.

Recordemos que un vértice a , simplicial de un grafo G se dice esencial si $G - N[a]$ no es conexo (Figura 7.1).

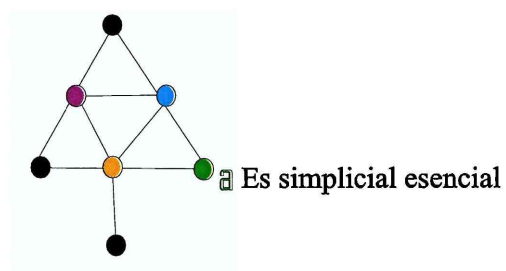


Figura 7.1: Simplicial esencial

De la propia definición de simplicial esencial se tiene el siguiente resultado.

Teorema 7.0.4 G un grafo cordal. a es un vértice simplicial esencial de G si y sólo si existe un árbol clique en el cual C_a es un vértice interior.

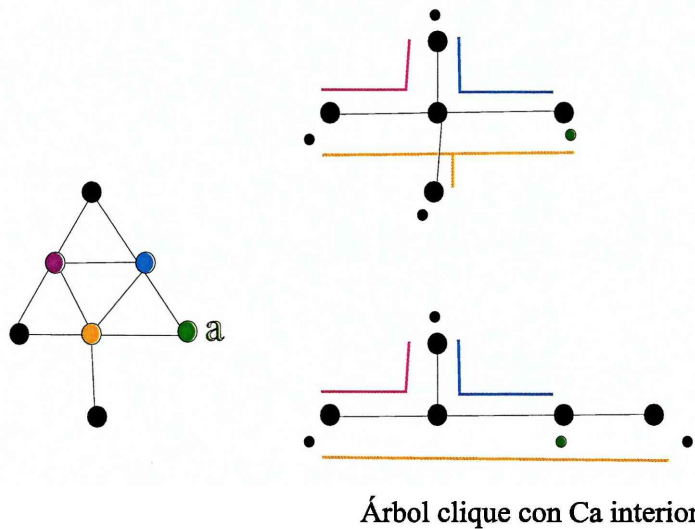


Figura 7.2:

Observar que los vértices falsos gemelos son simpliciales esenciales. Por esto último, en lo que sigue entre otros prohibidos se obtendrán los cometas impares.

Sea a un simplicial esencial de G , T' una representación UV de $G - a$ y $C' \in C(G - a)$ tal que $N(a) \subset C'$.

A un vértice v de G , v vecino de a cuya representación $F_v = T'[X, Y]$ tiene a X e Y en distintas componentes conexas de $T' - C'$ se le dirá *pasante* de C' en T' (Figura 7.3).

Recordar que dado T y H un hoja de T al camino de T entre $C \in V(T)$ y H se le dice C -camino.

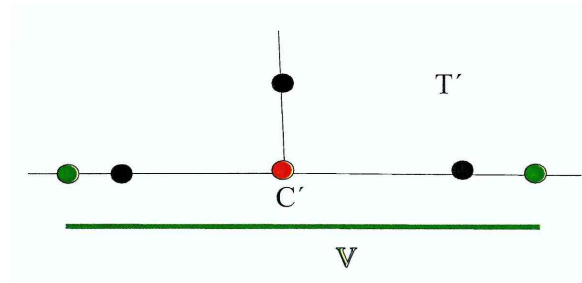


Figura 7.3: Pasante

Dado $C \in V(T)$, e_1, \dots, e_k las aristas de T incidentes en C , a R_i la componente conexa de $T - \{e_j | j \in \{1, \dots, k\} - \{i\}\}$ que tiene a C , se le dirá *rama*.

Una *a-arista* de T' es aquella cubierta sólo por vecinos de a (Figura 7.4).

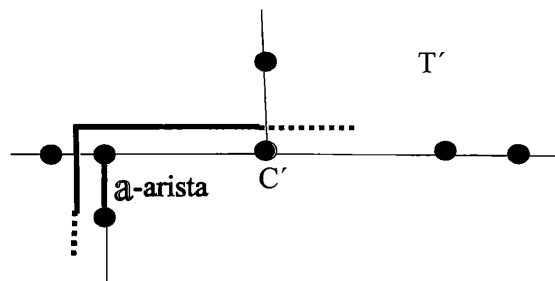


Figura 7.4: a-arista

El estudio de las *a*-aristas de T' y su relación con los pasantes de C' será fundamental en el estudio de los grafos no *UV* minimales. Se utilizarán para ello las técnicas de injerto simple y compuesto junto con la propiedad de invarianza de los cubridores.

7.1. Estudio de a -aristas

Dado T' se notará $A_i B_i$ a las a -aristas de T' siendo A_i el extremo de la a -arista más próximo a C' (Figura 7.5).

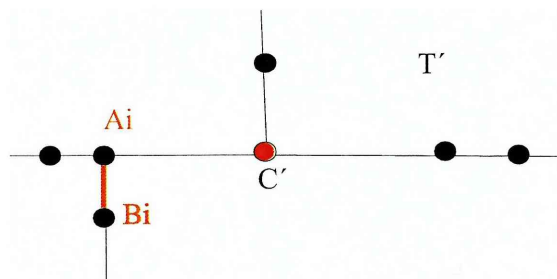


Figura 7.5:

Proposición 7.1.1 *G un grafo cordal no UV minimal, a un simplicial esencial, T' un UV -árbol clique $G - a$. Para toda arista a -arista de un C' camino de T' , a mínima distancia a C' , existe un pasante de C' en T' que la cubre.*

Demostración:

Como G no es UV , es claro que la arista $A_i B_i$ si bien está cubierta sólo por vecinos de a , no puede estar cubierta por todos los vecinos de a , además todos los vecinos de a no pueden estar en A_i , pues sería posible construir un UV -árbol clique de G a partir de T' . Más claramente, borrando la arista $A_i B_i$ de T' y adicionando $A_i C_a, C_a B_i$ (Figura 7.6).

Supongamos por el absurdo que ningún cubridor de $A_i B_i$ es pasante de C' en T' , luego todo cubridor de $A_i B_i$ es un camino de T' tal que uno de sus extremos es C' , ya que C' tiene a todos los vecinos de a .

Sea $s_i \in B_i$ separador de B_i en dirección a las hojas. Claramente $s_i \in B_i - A_i$.

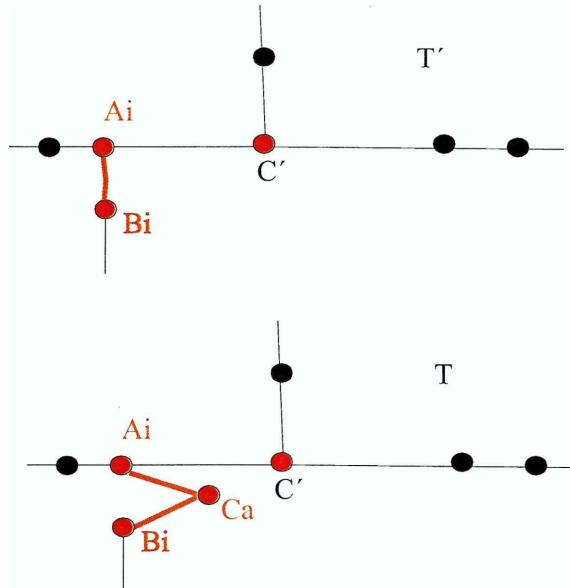


Figura 7.6:

- Observar que B_i no puede ser hoja de T' . Si lo fuera, $A_i B_i$ podría estar cubierta sólo por un vecino de a pues si existieran x, y vértices de $G - a$ vecinos de a tales F'_x, F'_y que cubren $A_i B_i$, es claro que $F'_x = F'_y = T'[C', B_i]$ por ello serían vértices gemelos de $G - a$.

Dado que $C(G) = C(G - a)$ y que $F_x = F'_x \cup \{C_a\}$, $F_y = F'_y \cup \{C_a\}$ entonces x e y serán vértices gemelos de G , lo cual resulta absurdo pues G es un grafo no UV minimal.

Pero entonces existirá sólo un vértice cubriendo $A_i B_i$, con lo cual, será un vértice de corte de G , que también es un absurdo porque los grafos no UV minimales son al menos 2-conexos. Luego B_i no es hoja de T' .

- Sea T'' el subárbol de T' más grande que tiene a C' y a B_i como hoja. T'' es un árbol clique de $G_{T''}$ subgrafo inducido de $G - a$. En lo que sigue se probará que $G_{T''} - N[s_i]$ es conexo.

1. Veamos esto último. Si no fuese conexo, existiría una arista e de T'' cubierta solo por vecinos de s_i . Claramente e no puede estar en la componente conexa de $T'' - C'$ que no tiene a B_i pues se supone que todos los cubridores de $A_i B_i$ tienen por extremo a C' . Además e no puede ser arista de $T''[B_i, C']$ pues $A_i B_i$ fue elegida como la más cercana a C' cubierta sólo por vecinos de a . Luego e tiene que estar en la misma componente conexa de $T'' - C'$ que tiene a B_i pero no en el camino $T'[A_i, C']$, pero como C' tiene a todos los vecinos de a , cualquier cubridor de e y de $A_i B_i$ tiene que estar en C' , resultaría que en (T', F') existiría un claw, que es un absurdo pues es una representación UV de $G - a$ (Figura 7.7).

- Es claro que si consideramos ahora el subgrafo de G , $G_1 = G[V(G_{T''}) \cup N[a]]$, este no es G pues B_i no es hoja de T' , luego resulta UV por minimalidad.

1. Veamos que $G_1 - N[s_i]$ es conexo. Supongamos que $G_1 - N[s_i]$ no es conexo, luego existen al menos 2 aristas en cualquier representación UV de G_1 cubierta solo por vecinos de s_i ; pero en T'' había una única arista cubierta solo por los vecinos de s_i y la única diferencia entre $G_{T''}$ y G_1 es que se ha agregado C_a y una arista XC_a donde X es algún vértice de T'' . Luego por la invarianza de los cubridores, la única arista cubierta por $N[s_i]$ de T_{G_1} es la

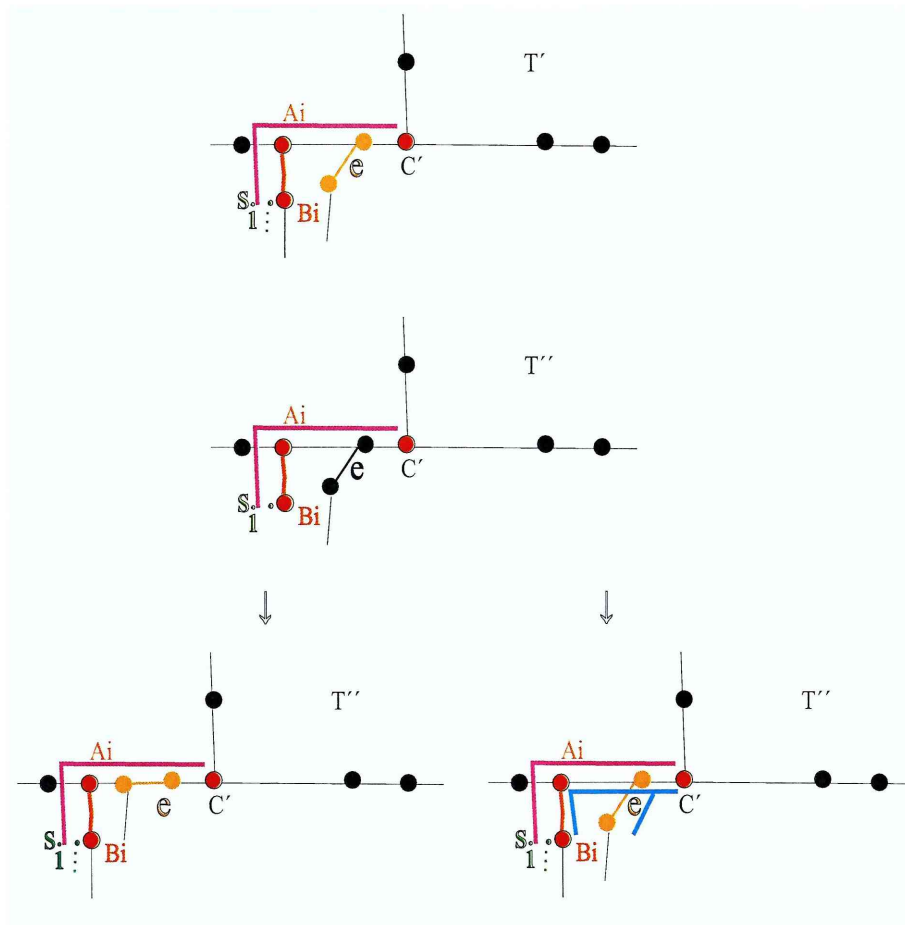


Figura 7.7:

arista $C_a X$. Pero quienes cubren a C_a son todos los vecinos de a y sabemos que $N_{G_1}[s_i] \subsetneq N_{G_1}[a]$, pues como fue aclarado al principio la arista $A_i B_i$ no puede ser cubierta por todos los vecinos de a (Figura 7.8).

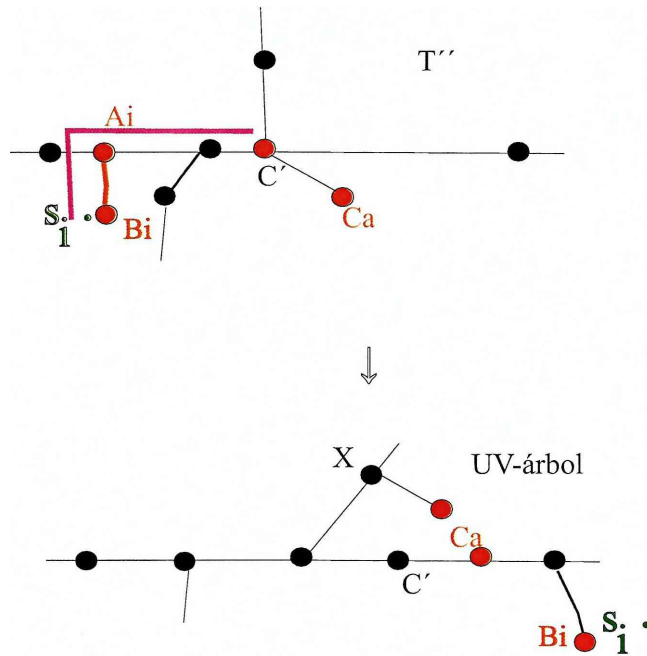


Figura 7.8:

- Ahora bien $G_1 - N[s_i]$ es conexo luego en toda representación de G_1 , B_i es hoja. En particular, existe un UV árbol clique. Luego, a partir de cualquier UV árbol clique de G_1 es posible construir un UV -árbol clique de G adicionando a dicho árbol clique, lo que se quitó a T' . Más claramente, si T_1 es un UV -árbol clique de G_1 y T_2 la componente conexa de $T' - A_i$ que tiene a B_i entonces $\bar{T} = T_1 \cup T_2$ es un UV -árbol

clique de G (Figura 7.9).

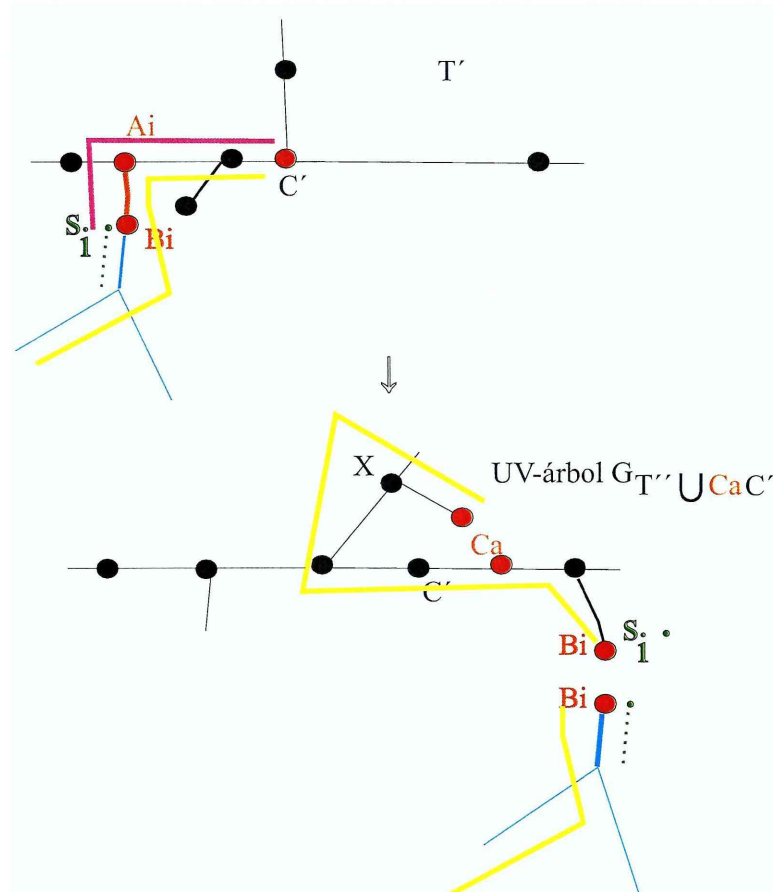


Figura 7.9:

□

Proposición 7.1.2 G grafo cordal, a un simplicial esencial, T' un UV-árbol clique de $G - a$, $N(a) \subset C'$ clique de $G - a$. Si G no es UV minimal entonces existen al menos 2 a -aristas.

Demostración:

Es claro que por ser a un simplicial esencial existen en cualquier árbol clique de G al menos 2 aristas cubiertas sólo por vecinos de a , es decir 2 a -aristas. Por ello, en T' debe existir al menos una arista, que denotamos e , cubierta sólo por vecinos de a , es decir e es a -arista.

Supongamos entonces que sólo existe esa a -arista en T' .

Sea T_1 la componente conexa de $T' - e$ que tiene a C' . Construimos T_2 a partir de T_1 adicionando la arista $C_a C'$ y sea G_2 el subgrafo inducido de G cuyo árbol clique es T_2 .

Como $G_2 \neq G$, por minimalidad existe un UV -árbol clique de G_2 . Además como T_2 tiene sólo una a -arista, es claro que a no es simplicial esencial de G_2 con lo cual en todo árbol clique C_a es hoja.

Sea \widehat{T}_2 un UV -árbol clique de G_2 . A partir de dicho árbol se construirá un UV -árbol clique de G como sigue (Figura 7.10):

Sean A_1 y B_1 los extremos de e siendo A_1 el de menor distancia a C' en T' y T_3 la componente conexa de $T' - A_1$ que tiene a B_1 . Observar que si X e Y inciden en B_1 en T_3 , no puede existir un vecino v de a con $v \in X \cap Y$, pues T' es un UV -árbol clique. Se construirá un árbol adicionado la rama T_3 a \widehat{T}_2 .

Más claramente, sea $T = T_3 \cup B_1 C_a \cup \widehat{T}_2$. Es fácil verificar que dicho árbol resulta un UV -árbol clique de G . Lo cual es un absurdo pues G no es UV minimal.

□

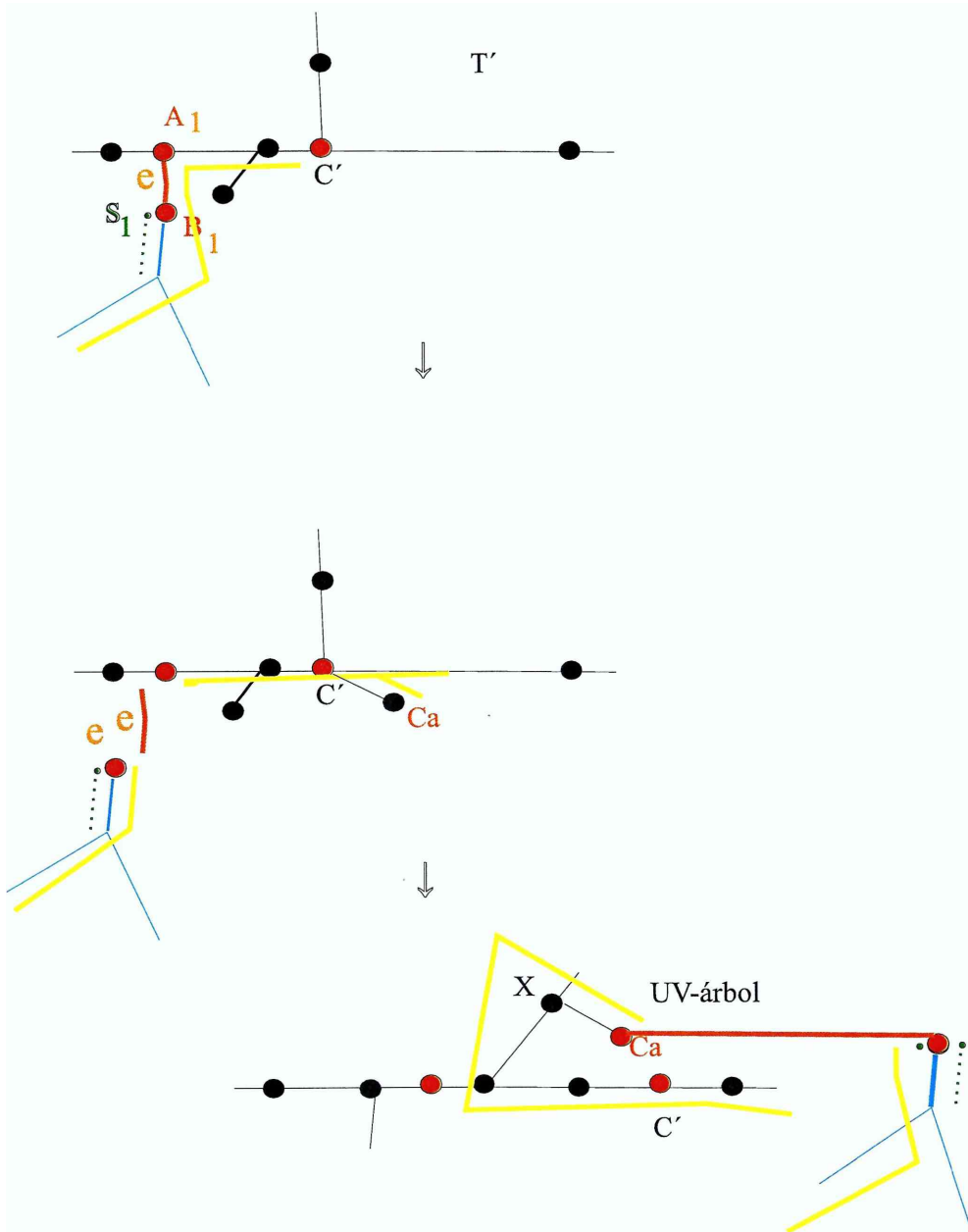


Figura 7.10:

En la proposición anterior probamos que al menos existen 2 a -aristas, es decir al menos 2 aristas cubiertas sólo por vecinos de a , en cualquier UV -árbol clique de $G - a$. Observar que si existen esas aristas en algún árbol clique deben existir en cualquier otro árbol clique aristas cubiertas exactamente por los mismo cubridores de esas aristas. Recordar que a esas aristas se las llama aristas equivalentes.

Proposición 7.1.3 *G grafo cordal, a un simplicial esencial, T' un UV -árbol clique de $G - a$, $N(a) \subset C'$ clique de $G - a$. Si G no es UV minimal entonces existen al menos 2 a -aristas en distintas ramas de T' .*

Demostración:

Supongamos por el absurdo que todas las a -aristas están en un misma rama de T' respecto de C' .

Sea R_1 la rama que incide en C' y tiene a dichas aristas. Consideremos los caminos de C' hacia las hojas de R_1 y sean P_1, \dots, P_r los caminos que tienen a -aristas cubiertas. Observar que R_1 podría tener más de r hojas. De cada uno de esos caminos elegir la a -arista que se encuentra a menor distancia de C' , sean e_1, \dots, e_l . Observar que l podría ser menor a r , más aún l podría ser 1 (Figura 7.11).

Por otro lado, como T' es un UV -árbol clique, es claro que no existe un vecino de a , cubriendo un par de aristas e_i, e_j con $i \neq j$, pues caso contrario existiría un claw.

Consideramos ahora la componente conexa T_1 de $T' - \{e_1, \dots, e_l\}$ que tiene a C' .

Construimos T_2 a partir de T_1 adicionando la arista $C_a C'$ y sea G_2 el subgrafo inducido de G cuyo árbol clique es T_2 .

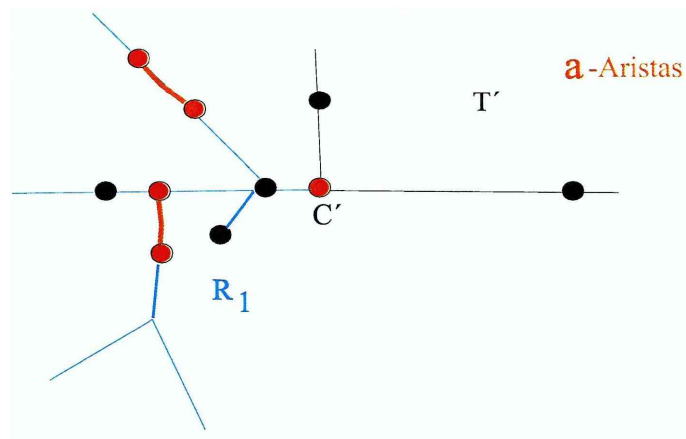


Figura 7.11:

Como $G_2 \neq G$, por minimalidad existe un UV -árbol clique de G_2 . Además como T_2 tiene sólo una a -arista, es claro que a no es simplicial esencial de G_2 con lo cual en todo árbol clique C_a es hoja.

Sea \widehat{T}_2 un UV -árbol clique de G_2 . A partir de dicho árbol se construye un UV -árbol clique de G como sigue (Figura 7.12):

Sea B_i el extremo de e_i más lejano a C' en T' y P_i^* la sección del camino P_i hacia las hojas, cuyo vértice inicial es B_i para $i = 1, \dots, l$.

Como se dijo antes, no existe un vecino de a cubriendo un par de aristas e_i, e_j con $i \neq j$, luego es fácil verificar que el árbol $T = \widehat{T}_2 \cup \bigcup_1^l (C_a B_i \cup P_i^*)$ es un UV -árbol clique de G .

□

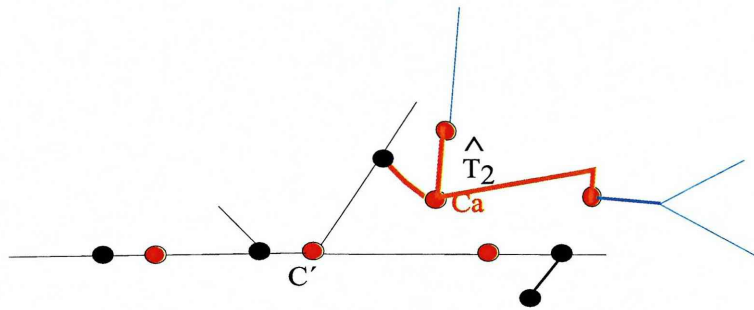
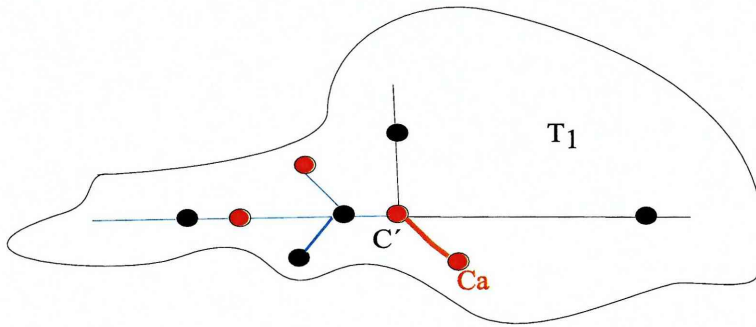
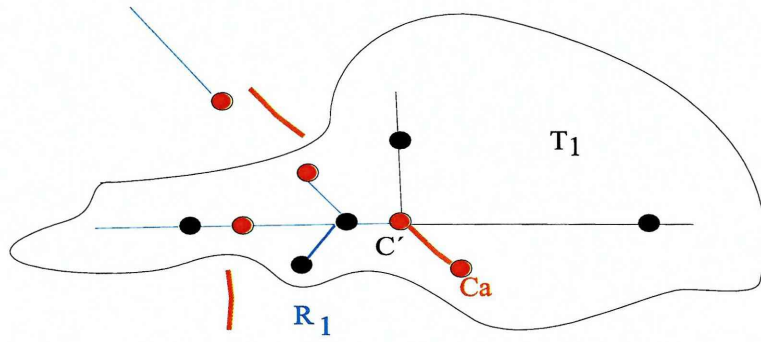


Figura 7.12:

Proposición 7.1.4 *G grafo cordal, a un simplicial esencial, T' un UV -árbol clique de $G - a$, $N(a) \subset C'$ clique de $G - a$. Si G no es UV minimal entonces para cada a -arista e existe otra a -arista e' y v vecino de a tal que v cubre a e y a e' . Más aún, si e es la primera a -arista, en dirección a C' en una rama de T' entonces existe e' a -arista en otra rama de T' .*

Demostración:

Sean P_i , para $i = 1, \dots, r$, caminos dirigidos de C' hacia la hoja H_i de T , que tienen al menos una a -arista.

Si en P_i existieran dos a -aristas, como C' tiene a todos los vecinos de a es evidente que existe al menos un vecino de a cubriendo a dichas aristas.

Sean e_1, \dots, e_l las primeras a -aristas de cada uno de los caminos. Observar que l podría ser menor a r pues una arista podría estar en más de un camino.

Supongamos ahora que existe al menos una a -arista, digamos e_1 tal que para cualquier otra arista e_i para $i \neq 1$, e_1 y e_i no tienen un vecino de a cubriendo a ambas.

Sea T_1 la componente conexa de $T' - e_1$ que tiene a C' , T_2 construido a partir de T_1 adicionando la arista $C_a C'$ y G_2 el subgrafo inducido de G cuyo árbol clique es T_2 .

Sea \widehat{T}_2 un UV -árbol clique de G_2 . Observar que C_a podría no ser hoja de \widehat{T}_2 . Además, si a_1, \dots, a_k son las a -aristas de T_1 , el número de a -aristas en \widehat{T}_2 es $k + 1$. Sean b_1, \dots, b_{k+1} las a -aristas de \widehat{T}_2 . Dado que se ha supuesto que ninguna de las aristas e_2, \dots, e_l comparte un cubridor con e_1 , es claro que ninguna de las a -aristas de T_1 , a_1, \dots, a_k comparten un cubridor con e_1 , con lo cual sólo una de las a -aristas de \widehat{T}_2 , b_1, \dots, b_{k+1} comparten un cubridor con e_1 . La arista de \widehat{T}_2 que tiene a C_a como uno de sus extremos en \widehat{T}_2 , incluye

a todos los cubridores de e_1 .

Se construye T un UV -árbol clique de G : si B_1 es el extremo de e_1 en T' más lejano a C' y T_3 la componente conexa de $T' - e_1$ que tiene a B_1 , sea $T = T_3 \cup B_1 C_a \cup \widehat{T}_2$.

□

Proposición 7.1.5 *G grafo cordal no UV minimal, a un simplicial esencial, T' un UV -árbol clique de $G - a$, $N(a) \subset C'$ clique de $G - a$, P un C' -camino de T' sin a -aristas. Sea e la primera arista de P desde C' ; que no está en un C' -camino de T' con a -aristas. Si e está cubierta por un vecino de a entonces existen e' a -arista de T' en otra rama, distinta de la que tiene a e , y un vértice v vecino de a tal que v cubre a e y a e' .*

Demostración:

Supongamos por el absurdo que para e no existe ninguna a -arista e' con la cual comparta un cubridor vecino de a .

Sea T_1 la componente conexa de $T' - e$ que tiene a C' , T_3 la componente conexa de $T' - e$ que no tiene a C' .

T_2 construido a partir de T_1 adicionando la arista $C_a C'$ y G_2 el subgrafo inducido de G cuyo árbol clique es T_2 .

Sea \widehat{T}_2 un UV -árbol clique de G_2 . Observar que C_a podría no ser hoja de \widehat{T}_2 y que cada a -arista e' de T' , tiene una arista equivalente en \widehat{T}_2 .

Como los vecinos de a que cubren e en T' , no cubren otra arista e' , no pueden cubrir a las a -aristas equivalentes en \widehat{T}_2 , luego existe una única a -arista en \widehat{T}_2 que tiene a los cubridores de e . Más aún, esa arista, que notamos

e_1 tiene a todos los vecinos de a y es la a -arista de \widehat{T}_2 equivalente a la a -arista $C_a C'$ de T_2 . Observar que los cubridores de e_1 son los vértices de $C_a \cap C' = C_a - \{a\}$.

Luego existe una rama R_1 en \widehat{T}_2 respecto de C_a que tiene a C' y a e_1 . Más aún, si A_1 era el extremo de e más próximo a C' en T' , entonces A_1 está en R_1 . Veamos esto último, si A_1 no estuviera en R_1 , es claro que está en una componente conexa de $\widehat{T}_2 - e_1$, pero en T' el camino $T'[A_1, C']$ está cubierto por no vecinos de a . En particular, existirá un camino minimal entre el separador en dirección a las hojas de A_1 y el separador en dirección a las hojas de C' por no vecinos de a y por ser \widehat{T}_2 un árbol clique, los vértices de ese camino se ubican en $\widehat{T}_2[A_1, C']$ con lo cual la arista e_1 debería estar cubierta por al menos uno de esos vértices, que no es vecino de a y esto es un absurdo.

Sea B_1 el otro extremo de e en T' , en caso que R_1 tiene una y sólo una a -arista, que será e_1 , considerar el árbol clique $T_4 = R_1 \cup A_1 B_1 \cup T_3$ del grafo G_3 que es un subgrafo inducido de G . Observar que T_4 tiene una única a -arista. Por ello, en todo árbol clique de G_3 , C_a es hoja, en particular en $\overline{T_4}$ un UV -árbol clique. Luego $T = \widehat{T}_2 - R_1 \cup \overline{T_4}$ es un UV -árbol clique de G .

Si R_1 tiene más de una a -arista, es fácil verificar que C' y A_1 están en la misma componente conexa obtenida de R_1 borrando todas las a -aristas. Veamos esto: en T' el camino $T'[A_1, C']$ está cubierto por no vecinos de a . En particular, existirá un camino minimal entre un separador en dirección a las hojas de A_1 y un separador en dirección a las hojas de C' por no vecinos de a y si no estuvieran en la misma componente conexa de R_1 borrando las a -aristas, al menos un vértice del camino, debería cubrir una de las a -aristas

que fueron borradas, pero los vértices de ese camino no son vecinos de a y esto es un absurdo.

Sea $e_1 = C_a X$ la arista de R_1 cubierta por todos los vecinos de a . En el camino $\widehat{T}_2[C_a, A_1]$ existe sólo una a -arista, pues caso contrario, esa a -arista tiene una equivalente en T' y al menos un vecino de a que cubre $e = A_1 B_1$ debe cubrir esa arista por la posición que tienen ellas en $\widehat{T}_2[C_a, A_1]$ contradiciendo lo supuesto.

Sean b_1, \dots, b_k las a -aristas en la componente R_1 . Sea R la componente conexa de $R_1 - \{b_i \mid i = 1, \dots, k\}$ que tiene a C' . Una de dichas aristas es $C_a X$, para fijar ideas supongamos que $b_1 = C_a X$ y $b_i = C_i D_i$ con C_i más próximo a C_a que D_i .

Sea $T_5 = R \cup A_1 B_1 \cup T_3 \cup C_a X$, es un árbol clique de un subgrafo G_5 inducido de G . Luego, existe un UV -árbol clique de G_5 , en el cual C_a es hoja.

Para cada b_i con $i = 2, \dots, k$, los cubridores en R_1 de b_i son en R vértices gemelos de G_5 , con lo cual en el UV -árbol clique cada uno de esos vértices tienen los mismos extremos inicial y final, observar que uno de sus extremos es C_a . Sean X_2, \dots, X_k los otros extremos y Tr_2, \dots, Tr_k las componentes conexas de $R_1 - \{b_1, \dots, b_k\}$ que no tienen a X_2, \dots, X_k respectivamente. Se construye entonces un UV -árbol clique de G como sigue: $\widehat{T}_2 - R_1 \cup T_5 \cup \bigcup_2^r C_i X_i \cup \bigcup_2^r Tr_i$.

□

Se les dirá *apareadas* a las aristas que satisfacen las Proposiciones 7.1.4 *apareadas* y 7.1.5

7.2. Construyendo UV-árboles clique

En lo que sigue se mostrará una manera de construir a partir de T' , un árbol \tilde{T} que resultará árbol clique de un subgrafo inducido de G que tiene a todos los vecinos de a .

Sean e_1, \dots, e_l las a -aristas de T' , UV-árbol clique de $G - a$, más cercanas a C' . Como antes sea A_i el extremo de e_i más próximo a C' y B_i su otro extremo. Sea $T'' = T' - \{e_1, \dots, e_l\}$, y T_i el subárbol de T'' que tiene a B_i , T'_1 la componente conexa de T'' que tiene a C' y T'_1 con una arista más $C'C_a$, es decir $T'_1 \cup \{C'C_a\}$. Ahora, consideramos $\bar{G} = G_{T'_1 \cup \{C'C_a\}}$; observar que a es vértice simplicial de \bar{G} .

Es claro que \bar{G} es un subgrafo inducido de G , además $\bar{G} \neq G$ pues $T'' \neq T'$ con lo cual \bar{G} es UV. Además, $\bar{G} - N[a]$ es un grafo conexo pues $T'_1 \cup \{C'C_a\}$ es un árbol clique de \bar{G} que tiene una única arista $C'C_a$ cubierta solo por vecinos de a . Luego, en todo árbol clique de \bar{G} , C_a es hoja. En particular, sea \tilde{T} un UV-árbol clique de \bar{G} con C_a como hoja.

Proposición 7.2.1 1. \tilde{T} tiene todos los vértices de los C' -caminos sin a -aristas de T' y los B_i no son vértices de \tilde{T} .

2. Si existen e_i, e_j a -aristas incidentes en C' en T' y $\text{cub}(e_i) \cap \text{cub}(e_j) \neq \emptyset$ entonces $C_a C'$ es una arista de \tilde{T} .

3. $\tilde{T} \cup \bigcup_{i=1}^l C_a B_i \cup T_i$ es un árbol clique de G .

4. Si a_i son separadores de A_i en dirección a las hojas de T' y a_i, a_j, a con $i \neq j$ no es una tripla entonces $A_i \cap N(a) \subset A_j$ o $A_j \cap N(a) \subset A_i$.

5. Los vértices de $B_i \cap B_j$ son gemelos de $\bar{G} = G_{\tilde{T}}$.

Demostración:

1. Por la construcción de \tilde{T} .
2. Como $\text{cub}(e_i) \cap \text{cub}(e_j) \neq \emptyset$ existe $v \in N(a)$ cubriendo ambas aristas. Además, como e_i y e_j inciden en C' entonces en \overline{G} , v está solo en C' y C_a . Luego, en todo árbol clique de \overline{G} , $C'C_a$ debe ser arista. En particular, es arista de \tilde{T} .
3. Usando injerto simple y compuesto.
4. Supongamos que $N(a) \cap A_j \not\subseteq A_i$ y $N(a) \cap A_i \not\subseteq A_j$. Luego, existen $x \in N(a) \cap A_j - A_i$ e $y \in N(a) \cap A_i - A_j$.

Veamos que a_i, a_j, a es una tripla de G . Es claro que existen x_1, \dots, x_k vértices de $G - N[a]$ cubriendo $T'[A_i, A_j]$.

Luego, existe un camino P_{a_i, a_j} , entre a_i, a_j , cuyos vértices no están en $N[a]$.

Como $x \in N(a) \cap A_j - A_i$, existe un camino $P_{a_i, a} = a_i, x, a$ entre a_i, a que no toca la vecinanza de a_j .

Como $y \in N(a) \cap A_i - A_j$, existe un camino $P_{a_j, a} = a_j, y, a$ entre a_j, a que no toca la vecinanza de a_i .

Luego a_i, a_j, a es una tripla de G .

5. Todo vértice x de $B_i \cap B_j$ está representado por un camino $F'_x = V(T'_1[A_i, A_j])$ en T'_1 ; en \tilde{T} , x está representado por el subárbol, que en particular resulta un camino, $F'_x = V(\tilde{T}[X, C_a])$ con $A_i, A_j \in \tilde{T}[X, C_a]$.

Por ello, son vértices gemelos cuyas representaciones tienen extremos C_a y X .

□

Observar que el árbol clique de G obtenido en la Proposición 7.2.1, podría no ser un UV -árbol clique (Figura 7.13).

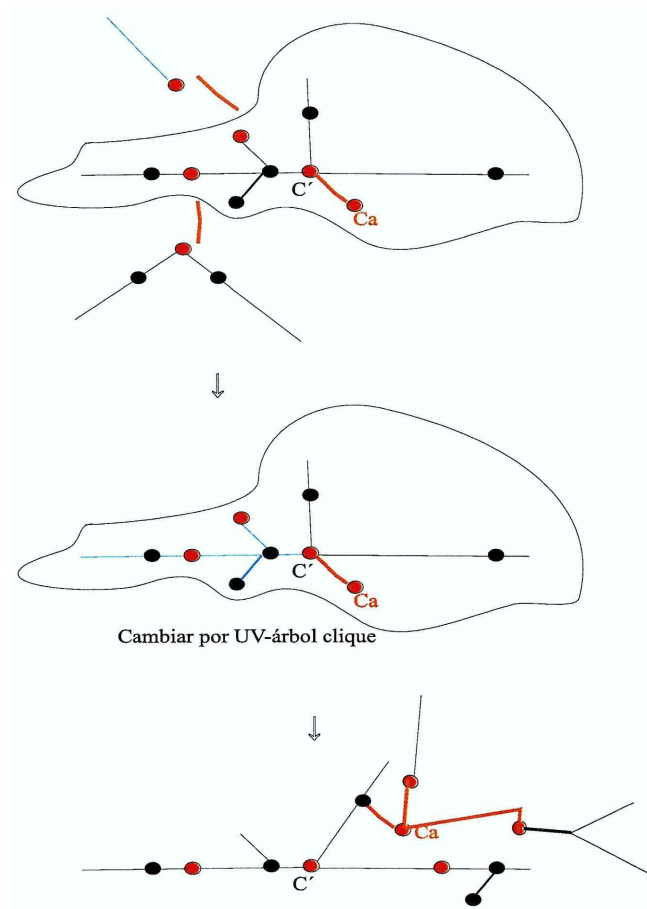


Figura 7.13: Construcción árbol clique

7.3. Grafo Π

Con el conocimiento previo dado en las Proposiciones 7.1.1 a 7.1.5, se construye un *grafo auxiliar* Π a partir del árbol clique T' :

grafo auxiliar Π

Para todo P C' -camino de T' (Figuras 7.14, 7.15):

1. Si P tiene una a -arista, se toma la a -arista que se encuentre a menor distancia de C' en T' .
2. Si P no tiene a -arista, se toma si existe una e , arista de P , cumpliendo:
 - a) e es la primera arista de P que no está en un C' -camino con a -arista,
 - b) e está cubierta por vecinos y no vecinos de a .

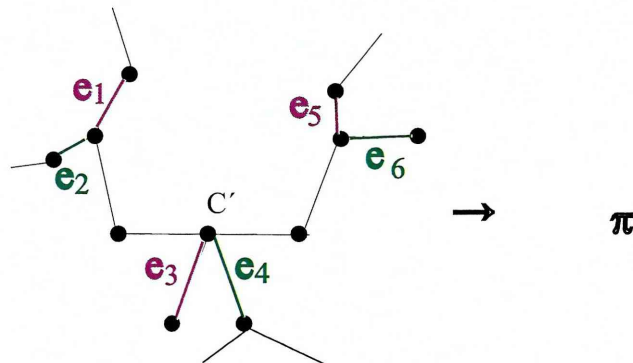


Figura 7.14: Construcción Π

Sean e_1, \dots, e_r las aristas de T' elegidas anteriormente.

$$V(\Pi) = \{e_i\}_{i=1, \dots, r};$$

$$E(\Pi) = \{e_i e_j, \text{ si existe } v \in V(G) \cap N(a); v \text{ cubre a } e_i \text{ y } e_j\}.$$

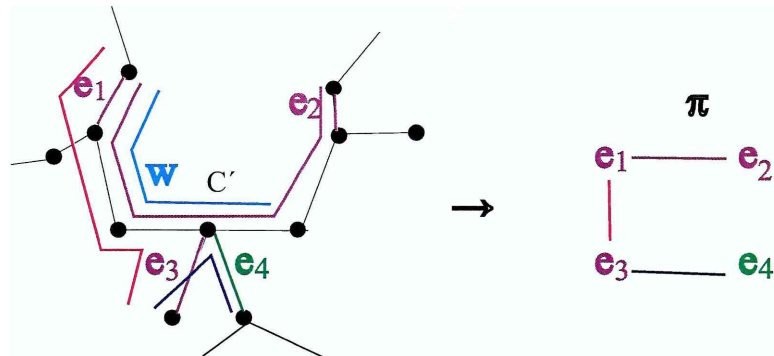


Figura 7.15: Construcción de Π

Procedemos a etiquetar algunos vértices de Π :

1. De los vértices e_i de Π que se corresponden a los definidos en 1, sólo se etiquetan con 2 aquellas que satisfacen: existe un w vértice de G , vecino de a cubriendo e_i y para todo otro vértice e_j de Π siendo e_j una a -arista apareada con e_i , es decir e_i, e_j dadas por la Proposición 7.1.4, w no cubre a ninguno de los extremos de e_j (Figura 7.16).
2. De los vértices e_i de Π que se corresponden a los definidos en 2 se etiquetan con 1.

Así, Π puede no tener etiquetas o tener etiquetas 1 o 2.

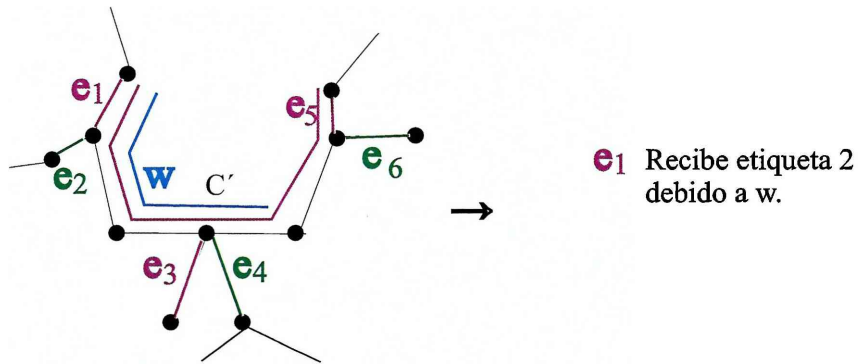


Figura 7.16: Etiquetación de Π

Proposición 7.3.1 *En Π existe al menos una arista.*

Demostración:

De las Proposiciones 7.1.3 y 7.1.4. □

Proposición 7.3.2 *Si Π tiene una arista cuyos vértices están etiquetados con 1 entonces existe un camino en Π que tiene a dicha arista en su interior o un ciclo de 3 vértices como subgrafo inducido.*

Demostración: De la Proposición 7.1.5. □

Proposición 7.3.3 *Si Π no es bipartido entonces*

- G tiene a un cometa impar (Figura 7.18) o a σ_{2k} (Figura 7.23) o a la pirámide de 6 vértices con un vértice universal (Figura 7.21) o a σ_{2k+1} como subgrafo inducido (Figura 7.20).

- G es no UV.

Demostración:

Como Π no es bipartido, es claro que existe un ciclo impar $Ciclo_{2k+1}$.

Sea $Ciclo_{2k+1} = e_1, \dots, e_{2k+1}e_1$, $e_i = A_iB_i$ con B_i el extremo más lejano de C' en T' . Consideramos $s_1, s_2, \dots, s_{2k+1}$ los separadores de B_1, \dots, B_{2k+1} en dirección a las hojas; v_i un cubridor de e_i y de e_{i+1} vecino de a , para $i = 1, \dots, 2k$ y v_{2k+1} cubridor de e_1 y e_{2k+1} también vecino de a .

Claramente, C' y C_a son cliques distintos de G luego existe $x \in C' - C_a$ o sea x no es vecino de a . Analizamos varias situaciones:

1. Supongamos primero que x no cubre a ningún e_i (Figura 7.17).

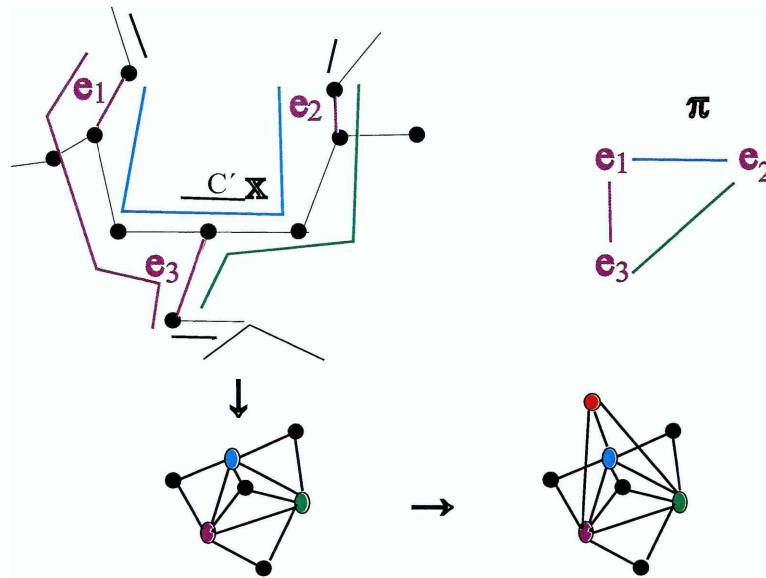


Figura 7.17:

Claramente $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, x\}$ es un completo; $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, a\}$ es un completo; $\{s_1, v_1, v_{2k+1}\}$ es un completo; $\{s_i, v_{i-1}, v_i\}$ es un completo para $i = 2, \dots, 2k + 1$.

Sea \tilde{G} el subgrafo de G inducido por los vértices $\{x, a, v_1, \dots, v_{2k+1}, s_1, \dots, s_{2k+1}\}$, claramente x y a resultan falsos gemelos de \tilde{G} . Más aún \tilde{G} es un cometa impar (Figura 7.18).

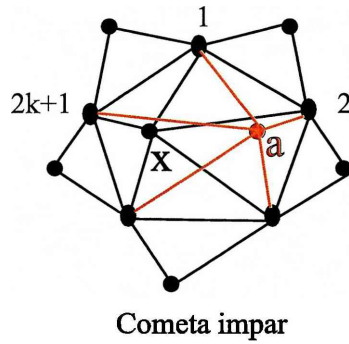


Figura 7.18:

2. Supongamos ahora que x cubre a uno y sólo uno de los e_i , para fijar ideas supongamos que x cubre a e_1 (Figura 7.19).

Claramente $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, x\}$ es un completo; $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, a\}$ es un completo; $\{s_1, v_1, v_{2k+1}, x\}$ es un completo; $\{s_i, v_{i-1}, v_i\}$ es un completo para $i = 2, \dots, 2k + 1$.

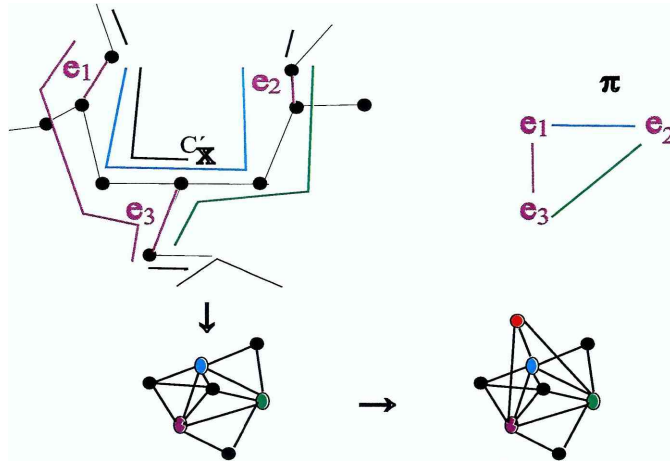


Figura 7.19:

Sea \tilde{G} el subgrafo de G inducido por los vértices $\{x, a, v_1, \dots, v_{2k+1}, s_1, \dots, s_{2k+1}\}$, en este caso x y a no son falsos gemelos de \tilde{G} (Figura 7.20).

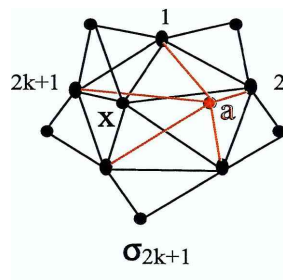


Figura 7.20:

3. Supongamos ahora que x cubre a exactamente 2 de los e_i , es claro que no puede estar en 3 de los e_i pues T' es un UV -árbol clique de $G - a$.

a) Si los e_i son consecutivos en el ciclo, para fijar ideas e_1, e_2 . Claramente $\{x, v_{2k+1}, v_3, a, s_1, s_2\}$ inducen la pirámide de 6 vértices y v_1 es adyacente a todos esos vértices con lo cual resulta un vértice universal de la pirámide (Figura 7.21).

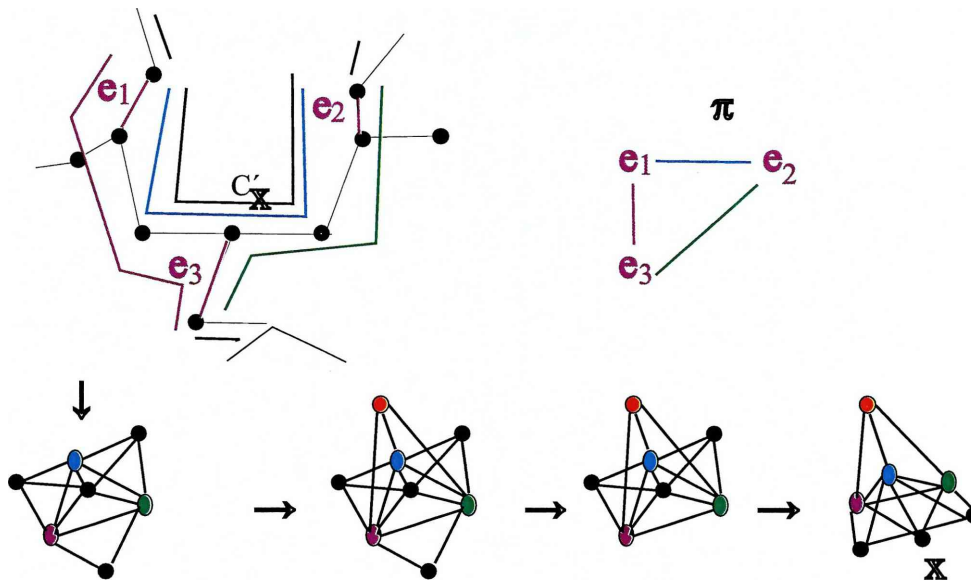


Figura 7.21:

b) Si los e_i no son consecutivos en el ciclo, dividen el ciclo en 2 caminos uno de longitud impar mayor o igual a 3, consideremos ese camino para fijar ideas e_1, \dots, e_{2k} .

Claramente $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, x\}$ es un completo; $\{v_1, \dots, v_{2k+1}, a\}$ es un completo; $\{s_1, v_1, x\}$ es un completo; $\{s_{2k}, x, v_{2k-1}\}$ es un com-

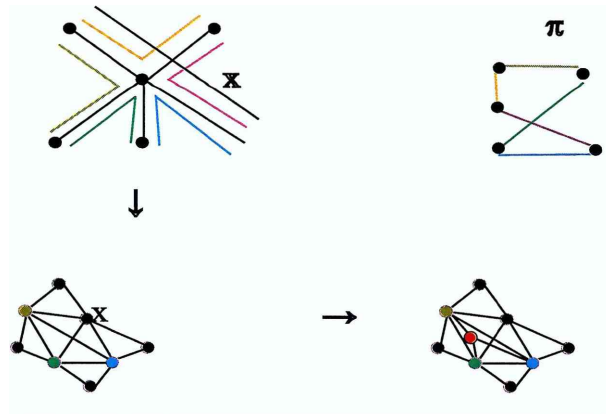


Figura 7.22:

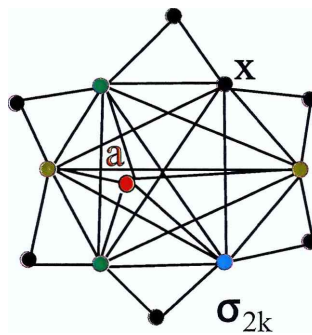


Figura 7.23:

pleto; $\{s_i, v_{i-1}, v_i\}$ es un completo para $i = 2, \dots, 2k - 1$ (Figura 7.23).

□

En la siguiente proposición, se probará que si Π es bipartido y existe una arista en Π cuyos extremos están ambos etiquetados con 1, G tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal.

Proposición 7.3.4 Π es bipartido y una arista de Π tiene sus vértices etiquetados con 1 entonces G tiene como subgrafo inducido a un prohibido de intervalos con un vértice universal.

Demostración:

Sea e_2e_3 la arista de Π cuyos extremos están etiquetados con 1. Por la Proposición 7.3.2 y por ser Π bipartido existe un camino que tiene a e_2e_3 como una de sus aristas interiores. Claramente dicho camino tiene por lo menos longitud 3.

Sin perder generalidad, sea $P = e_1, e_2, e_3, e_4$ un camino de Π y notamos A_i y B_i a los extremos de e_i siendo B_i el extremo más lejano a C' en T' (Figura 7.24).

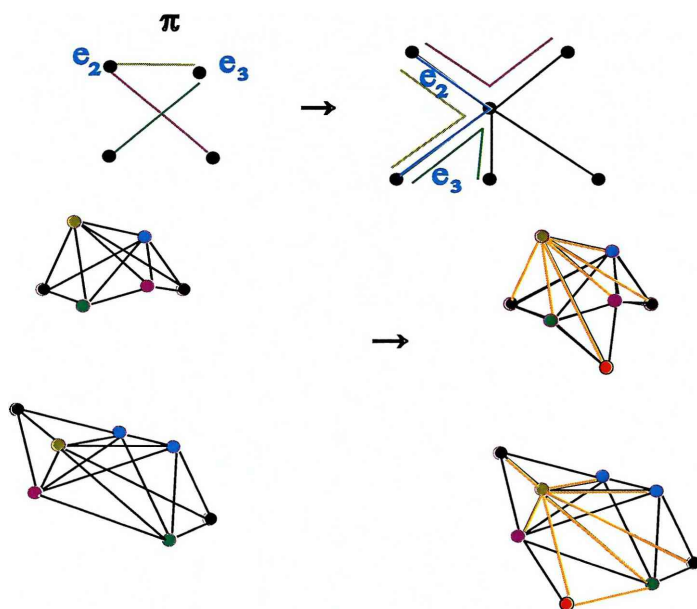


Figura 7.24:

Como $e_1e_2 \in E(\Pi)$ existe un vecino de a , v_1 que cubre a e_1 y a e_2 , en particular $v_1 \in B_1 \cap B_2 \cap N(a)$.

Análogamente, $e_2e_3 \in E(\Pi)$, existe un vecino de a , v_2 que cubre a e_2 y a e_3 , en particular $v_2 \in B_2 \cap B_3 \cap N(a)$; $e_3e_4 \in E(\Pi)$, existe un vecino de a , v_3 que cubre a e_3 y a e_4 , en particular $v_3 \in B_3 \cap B_4 \cap N(a)$.

Sean s_2, s_3 vértices separadores de B_2 y B_3 en dirección a las hojas de T' respectivamente.

Veamos que existe una tripla entre s_2, s_3 y a .

Claramente, v_1 no está en B_3 pues T' es un UV -árbol clique, por igual razón, v_3 no está en B_2 .

Se tiene entonces:

1. un camino entre a y s_2 que no toca la vecinanza de s_3 ; más claramente a, v_1, s_2 ;
2. un camino entre a y s_3 que no toca la vecinanza de s_2 , es decir, a, v_3, s_3 .

Además como e_2 y e_3 están etiquetados con 1, existen vértices no vecinos de a cubriendo el camino $T'[B_2, B_3]$. En particular, existe un camino entre s_2 y s_3 que no toca la vecinanza de a .

Luego s_2, s_3, a es una tripla de G .

Por otro lado, $v_2 \in B_2 \cap B_3 \cap N(a)$ con lo cual resulta un vértice universal para la tripla s_2, s_3, a .

Con lo cual G tiene como sugrafo a un prohibido de intervalos con un vértice universal. □

7.4. Caminos en Π

En la siguiente proposición se presentan los únicos casos que permiten construir, como se verá posterioremete, los prohibidos UV minimales que tienen vértices simpliciales esenciales.

Proposición 7.4.1 Π es bipartido.

1. Si existe $P = e_1, \dots, e_{2k}$, camino impar entre dos etiquetados con 1 (e_1, e_{2k} con etiquetas 1), e_i sin etiquetas para $1 < i < 2k$, las aristas de índice impar inciden en un mismo vértice de T' y las aristas de índice par inciden en el mismo vértice de T' entonces G tiene como subgrafo inducido a σ_{2k} (Figura 7.26) o β_{2k+1} (Figura 7.27) y G no es UV .
2. Si existe $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$, un camino par entre un etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2 (e_1 etiquetado con 1, e_{2k+1} etiquetado con 2), e_i sin etiquetas para $1 < i < 2k + 1$, e_{2k+1} inciden en el C' -camino en T' del cual fue elegida e_1 y las aristas de índice par inciden en el mismo vértice de T' entonces G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} (Figura 7.29) y G no es UV .

Demostración:

1. Sean B_i extremo de e_i en dirección a las hojas de T' para $i = 1, \dots, 2k$ y \bar{T} el subárbol inducido de $T = T' \cup \{C' C_a\}$ por $(B_i)_{i=1, \dots, 2k}$, C' y C_a . Veamos la Figura 7.25

Si s_1, s_2, \dots, s_{2k} son separadores de $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{2k-1}, B_{2k}$ serán vértices simpliciales de $G_{\bar{T}}$.

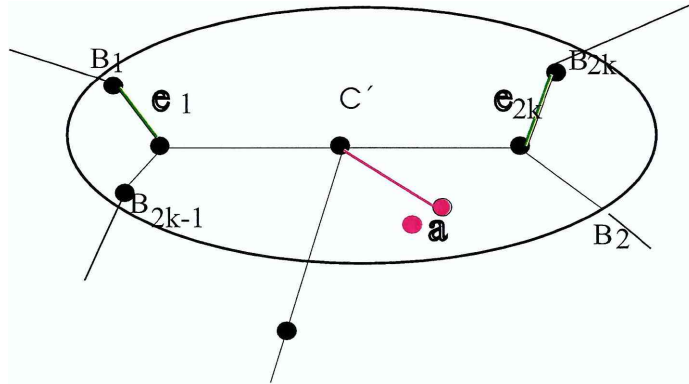


Figura 7.25:

Sean v_1 el cubridor de e_1 y e_2 vecino de a , v_2 el cubridor de e_2 y e_3 vecino de a , ..., v_{2k-1} el cubridor de e_{2k-1} y e_{2k} vecino de a . Claramente, $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$ inducen un K_{2k-1} .

Dado que e_1 tiene etiqueta 1, existe un vértice h_1 cubridor de e_1 que no es vecino de a y como también e_{2k} tiene etiqueta 1, existe un vértice h_{2k+1} cubridor de e_{2k} que no es vecino de a . Observar que h_1 y h_{2k} podrían ser el mismo vértice.

- $h_1 = h_{2k}$.

Claramente, $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, a\}$ induce un K_{2k} ; $\{v_i, v_{i+1}, s_{i+1}\}$ induce un K_3 para $i = 1, \dots, 2k-2$; $\{h_1, v_1, s_1\}$ induce un K_3 ; $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, h_1\}$ induce un K_{2k} .

En este caso, se dirá que el grafo inducido por $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, a, h_1, s_1, \dots, s_{2k}\}$ es un **semicometa par** y se notará σ_{2k} .

La Figura 7.26 corresponde a σ_4 .

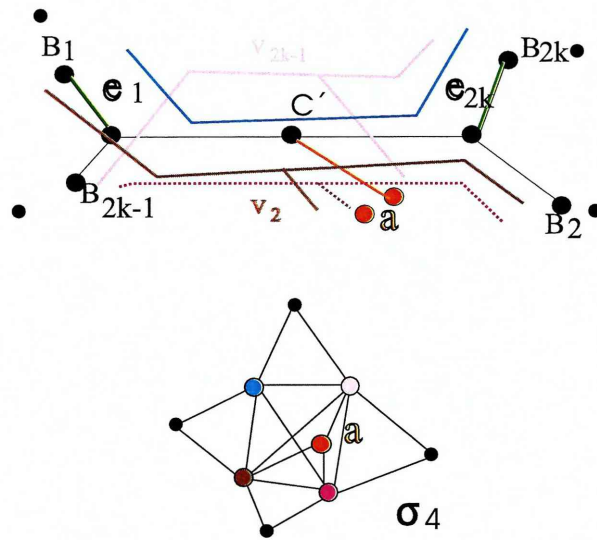


Figura 7.26:

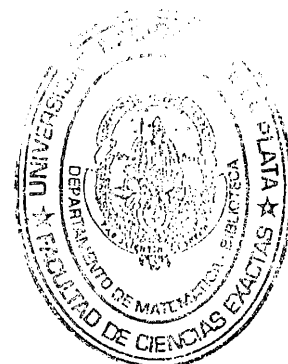
- $h_1 \neq h_{2k}$.

Sea $P = h_1, x_2, \dots, x_j, h_{2k}$ camino minimal de G que cubren el camino $T'[B_1, B_{2k}]$. Observar que P podría tener longitud 1.

Claramente, $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, a\}$ induce un K_{2k} ; $\{v_i, v_{i+1}, s_{i+1}\}$ induce un K_3 para $i = 1, \dots, 2k-2$; $\{h_1, v_1, s_1\}$ induce un K_3 ; $\{h_{2k}, v_{2k-1}, s_{2k}\}$ induce un K_3 ; $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, h_1, x_1\}$ induce un K_{2k+1} ; $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, x_{i-1}, x_i\}$ induce un K_{2k+1} para $i = 3, \dots, j$; $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, x_j, h_{2k}\}$ induce un K_{2k+1} .

En este caso, se dirá que el grafo inducido por $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, a, h_1, x_2, \dots, x_j, h_{2k}, s_1, \dots, s_{2k}\}$ es β_{2k+1} .

La siguiente figura corresponde a β_5 (Figura 7.27).



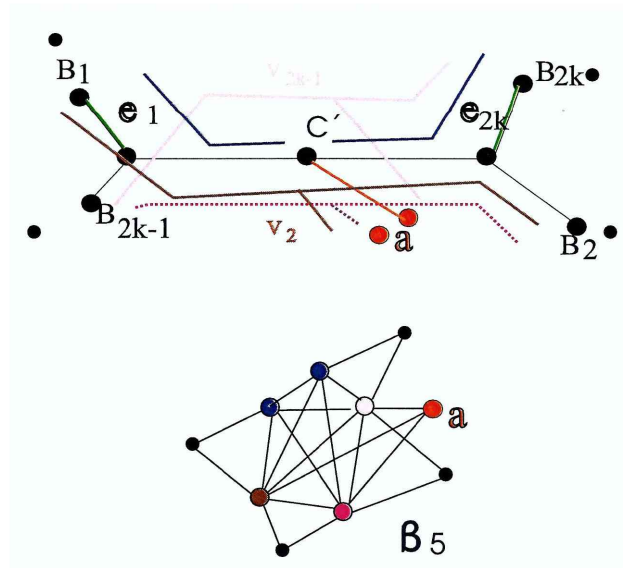


Figura 7.27:

2. Sea $X \in T'[e_1, C']$, basta con tomar X a distancia mínima de e_{2k+1} .

Sea A_2 el extremo de todas las aristas pares, es decir e_{2i} para $i = 1, \dots, k-1$ más próximo a C' en T' y x e a_2 separadores en dirección a las hojas de X e A_2 respectivamente. Observar que $A_2 \neq C'$ pues e_{2k+1} tiene etiqueta 2 (Figura 7.28).

Si x, a_2, a es una tripla entonces G tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal. Más específicamente, un pasante que cubre a e_1 y e_2 resulta el vértice universal.

Si no hay una tripla entre esos vértices entonces se tiene que todo cubridor de XC' cubre A_2 . Veamos esto:

- Si XC' no cubre A_2 existe un vértice $y \in X \cap C' - A_2$, además como e_{2k+1} tiene etiqueta 2, existe un vértice w vecino de a cubriendo

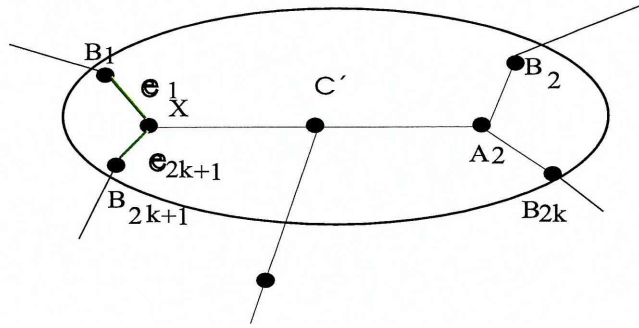


Figura 7.28:

e_{2k+1} y no cubriendo A_2 ; por ello existe un camino x, y, w, a entre x y a por no vecinos de a_2 ; también $T'[X, A_2]$ está cubierto por no vecinos de a con lo cual existe un camino entre x y a_2 por no vecinos de a ; ahora bien como e_{2i}, e_{2i+1} es arista de Π , existe un $v_{2i} \in N(a) - X$ cubriendo e_{2i}, e_{2i+1} , se tiene así un camino entre a_2 y a por no vecinos de x ; contradiciendo así que x, a_2, a no es una tripla.

Sea $v \in (X \cap A_2) - N(a)$.

Sean B_2, \dots, B_{2k+1} los extremos de e_2, \dots, e_{2k+1} a mayor distancia de C' en T' y s_2, \dots, s_{2k+1} sus separadores en dirección a las hojas de T' respectivamente.

Como $e_i e_{i+1} \in E(\Pi)$, sea v_i vecino de a cubridor de e_i y e_{i+1} para $i = 1, \dots, 2k$. Observar que $v_1 \in X \cap B_2 \cap N(a)$.

Por otro lado, e_{2k+1} tiene etiqueta 2, existe $w \in (N(a) \cap B_{2k-1}) - A_2$.

Claramente $\{v, v_1, \dots, v_{2k}, w\}$ es un completo; $\{a, v_1, \dots, v_{2k}, w\}$ es un completo; $\{v, v_1, x\}$ es un completo; $\{v, a_2, v_1, \dots, v_{2k}\}$ es un completo; $\{v_i, v_{i+1}, s_{i+1}\}$

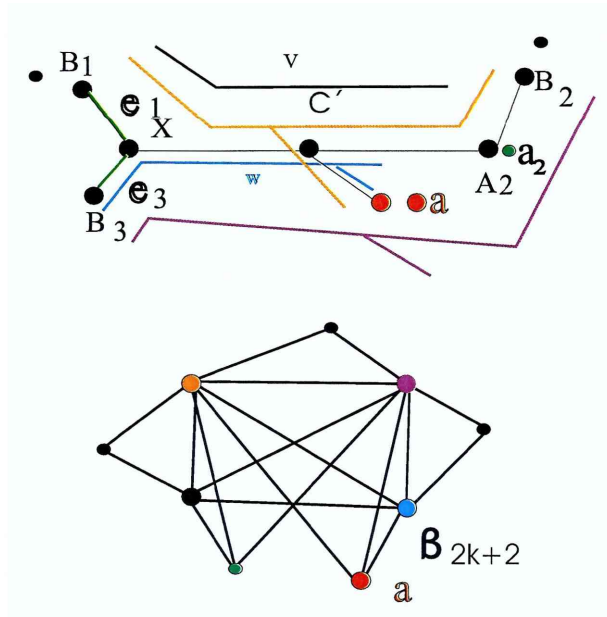


Figura 7.29:

es un completo para $i = 1, \dots, 2k - 1; \{s_{2k+1}, w, v_{2k}\}$. La siguiente Figura 7.29 corresponde a un camino de longitud 2.

Luego G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} .

□

En lo que sigue, se mostrará que en la proposición anterior, en caso que las aristas que definen a Π no inciden en un mismo vértice de T' , se reduce a casos ya estudiados.

Para ello, a partir de considerar T'_1 , la componente conexa obtenida del borrado de a -aristas de T' que tiene a C' , se construirá un grafo auxiliar Π^* . Con esto, se probará una modificación de Π lo que conducirá, entre

otras cosas, a que vértices de Π que no estaban etiquetados ahora resultan etiquetados en Π^* .

Observación 7.4.1 *Lo que asumiremos para facilitar los análisis posteriores es que el borrado de a -aristas no genera en los Π^* ciclos impares.*

Situaciones con e_i no incidiendo en el mismo vértice

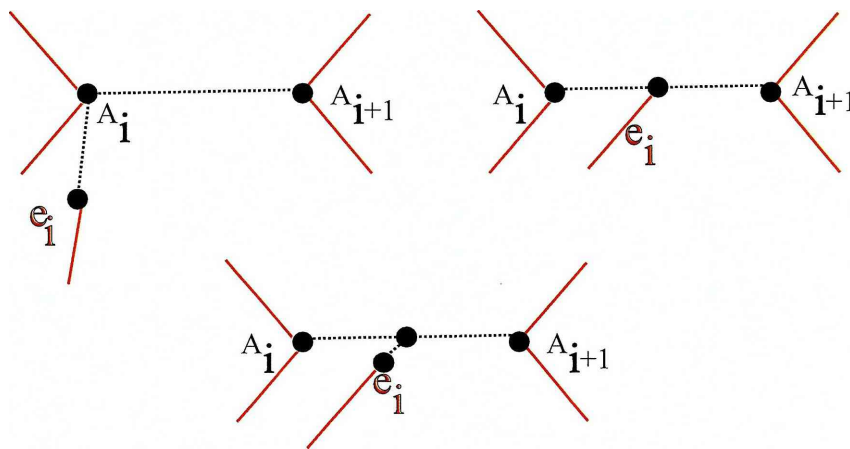


Figura 7.30:

1. Supongamos $P = e_1, \dots, e_{2k}$ con e_1 y e_{2k} con etiqueta 1.

Supongamos que e_i es la primera arista tal que e_{i+2} no incide en el mismo vértice de T' que e_{i-2l} para $l \geq 0$. Sin perder generalidad podemos asumir que i , se corresponde a un índice par, en caso contrario podemos considerar el camino $P' = e_{2k}, \dots, e_1$ y aplicar el mismo análisis que se propone a continuación. En lo que sigue se analizan 2 situaciones teniendo en cuenta cual es la posición en T' de e_{i+2}, e_{i+1}, e_i .

a) Si e_{i+1} incide en $T'[A_i, A_{i+1}]$ (recordar que A_i es extremo de e_i más próximo a C' en T'), consideramos la componente conexa de $T' - \{e_{i+2}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' a partir de dicha componente conexa se define el grafo auxiliar Π^* de la misma forma que Π fue definido, por La Observación 7.4.1, en Π^* no hay ciclos impares. Observar que existe $v \in N(a)$ cubridor de e_{i+1} y e_{i+2} , al borrar e_{i+2}, \dots, e_{2k} de T' resulta e_{i+1} etiquetado con 2, debido a la existencia de v , en T'_1 . Por ello, $P = e_1, \dots, e_{i+1}$ es un camino par entre e_1 etiquetado con 1 y e_{i+1} etiquetado con 2 en Π^* y puede así aplicarse la Proposición 7.4.1.

b) Si en cambio e_{i+1} no incide en $T'[A_i, A_{i+1}]$, consideramos la componente conexa T'_1 de $T' - \{e_{i+2}, e_{i+3}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' y sea $e_{i+2}^* \in T'[C', e_{i+2}]$ la primera arista incidente en $T'[A_i, A_{i+1}]$.

Observaremos que existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{i+1} y e_{i+2} , claramente por como fue elegida e_{i+2}^* , v cubre e_{i+1}, e_{i+2}^* ; además e_{i+2}^* está cubierta por no vecinos de a , de lo cual resulta que en T'_1 , e_{i+2}^* está cubierta por vecinos y no vecinos de a y tiene un a -arista con la cual comparte un vecino de a .

A partir de T'_1 se define el grafo auxiliar Π^* de la misma forma que Π fue definido, por la Observación 7.4.1 no hay ciclos impares, y $P = e_1, \dots, e_{i+1}, e_{i+2}^*$ es un camino impar entre e_1 y e_{i+2}^* ambos etiquetados con 1 y puede así aplicarse la Proposición 7.4.1.

2. Supongamos $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$ con e_1 etiquetado con 1 y e_{2k+1} con etiqueta 2.

Si e_{2k+1} no incide en el C' -camino en el cual fue elegida e_1 , se probará que G tiene una tripla con un vértice universal. Claramente por no incidir en el C' -camino, C' no es uno de los extremos de e_{2k+1} , sea A_{2k+1} uno de sus extremos, el más próximo a C' y a_{2k+1} un separador de A_{2k+1} en dirección a las hojas de T' .

Sea A_{2k} el vértice más próximo a C' que es extremo de e_{2k} como e_{2k+1} tiene etiqueta 2, es claro que $C' \neq A_{2k}$, más aún, existe w cubriendo e_{2k+1} tal que w no está en A_{2k} , y por ser Π bipartido w no cubre e_1 .

Sea a_{2k} un separador de A_{2k} en dirección a las hojas de T' .

Veamos que a, a_{2k}, a_{2k+1} es una tripla, como $e_1 e_2 \in E(\Pi)$ existe v_1 cubriendo e_1 y e_2 , en particular v_1 está en A_{2k} . Por otro lado, como T' es un UV -árbol clique, v_1 no puede estar en A_{2k+1} . Luego a, v_1, a_{2k} es un camino entre a y a_{2k} por no vecinos de a_{2k+1} .

Claramente, w no está en A_{2k} por ser el vértice que da la etiqueta a e_{2k+1} , con lo cual a, w, a_{2k+1} es un camino entre a y a_{2k+1} por no vecinos de a_{2k} .

Por otro lado, $T'[A_{2k}, A_{2k+1}]$ es un camino cubierto por no vecinos de a , motivo por el cual existe un camino entre a_{2k} y a_{2k+1} por no vecinos de a .

Luego a, a_{2k}, a_{2k+1} es una tripla.

Como $e_{2k} e_{2k+1} \in E(\Pi)$, existe $v_{2k} \in N(a)$ cubriendo dichas aristas. Luego $v_{2k} \in A_{2k} \cap A_{2k+1}$. Claramente v_{2k} resulta un vértice universal de la tripla.

Supongamos que las e_i , con i un índice par no inciden en el mismo vértice.

Sea e_{2i} la primera arista tal que e_{2i+2} no incide en el mismo vértice de T' que e_{2i-2l} para $l \geq 0$.

En lo que sigue, se analizan 2 situaciones teniendo en cuenta cual es la posición en T' de e_{2i+2} .

- a) Si e_{2i+2} incide en $T'[A_1, A_2]$ (recordar A_i extremo de e_i más próximo a C' en T'), consideramos la componente conexa T'_1 de $T' - \{e_{2i+2}, \dots, e_{2k+1}\}$ que tiene a C' a partir de dicha componente conexa se define el grafo auxiliar Π^* de la misma forma que Π fue definido, por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares.

Observar que existe $v \in N(a)$, cubriendo e_{2i+1} y e_{2i+2} , con lo cual al borrar de T' las aristas $e_{2i+1}, \dots, e_{2k+1}$ resulta que en T'_1 , e_{2i+1} está cubierto por v vecino de a que no está en ningún B_i siendo B_i extremo de e_i más lejano a C' en T' , para $i < 2i + 1$.

Claramente, $P = e_1, \dots, e_{2i+1}$ es un camino en Π^* par entre e_1 etiquetado con 1 y e_{2i+1} etiquetado con 2 (v es el vecino de a que le asigna la etiqueta 2 en Π^*) y puede así aplicarse la Proposición 7.4.1.

- b) Si en cambio e_{2i+2} no incide en $T'[A_1, A_2]$, consideramos la componente conexa T'_1 de $T' - \{e_{2i+2}, e_{2i+3}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' , sea $e_{2i+2}^* \in T'[C', e_{2i+2}]$ incidente en $T'[A_1, A_2]$.

Observaremos que existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{i+1} y e_{i+2} , claramente por como fue elegida e_{i+2}^* , v cubre e_{i+1}, e_{i+2}^* ; además e_{i+2}^*

está cubierta por no vecinos de a , de lo cual resulta que en T'_1 , e_{i+2}^* está cubierta por vecinos y no vecinos de a y tiene una a -arista con la cual comparte un vecino de a .

Se define a partir de T'_1 el grafo auxiliar Π^* de la misma forma que Π fue definido, por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares y $P = e_1, \dots, e_{2i+1}, e_{2i+2}^*$ es un camino impar entre e_1 y e_{2i+2}^* etiquetadas con 1 y puede así aplicarse la Proposición 7.4.1.

De lo anterior se tiene la siguiente proposición.

Proposición 7.4.2 Π es bipartido.

1. Si existe $P = e_1, \dots, e_{2k}$, camino impar entre dos etiquetados con 1 (e_1, e_{2k} con etiquetas 1), e_i sin etiquetas para $1 < i < 2k$ entonces G tiene como subgrafo inducido a σ_{2k} o β_{2k+1} y G no es UV.
2. Si existe $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$, un camino par entre un etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2 (e_1 etiquetado con 1, e_{2k+1} etiquetado con 2), e_i sin etiquetas para $1 < i < 2k + 1$ entonces G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} y G no es UV.

En las siguientes proposiciones, se estudian los casos de caminos de longitud mayor o igual a 1 entre etiquetados con 2.

Para fijar ideas, comenzaremos estudiando el caso en que en Π hay una arista cuyos extremos están ambos etiquetados con 2.

Proposición 7.4.3 Π es bipartido y tiene una arista con ambos vértices etiquetados con 2 entonces G tiene como subgrafo inducido a un prohibido de intervalos con un vértice universal.

Demostración:

Observar que dado que e_1 y e_2 tienen etiqueta 2 y $e_1e_2 \in E(\Pi)$, ni e_1 ni e_2 inciden en C' en T' .

Sean A_i los extremos de e_i más próximos a C' y a_i separadores en dirección a las hojas de T' de los vértices A_i . Veamos que a_1, a_2, a es una tripla.

Como e_1 tiene etiqueta 2, existe un $w_1 \in N(a) \cap A_1 - A_2$, luego a_1, w_1, a es un camino entre a_1 y a que no tiene vecinos de a_2 ; además e_2 tiene etiqueta 2, existe un $w_2 \in N(a) \cap A_2 - A_1$, luego a_2, w_2, a es un camino entre a_2 y a que no tiene vecinos de a_1 .

Por tener $T'[A_1, A_2]$ un cubrimiento por no vecinos de a , existe un camino entre a_1, a_2 que no toca la vecinanza de a . Luego a_1, a_2, a es una tripla.

Por otro lado $e_1e_2 \in E(\Pi)$ luego existe $v_1 \in N(a)$ un cubridor de e_1 y e_2 .

Claramente v_1 es un vértice universal para la tripla a_1, a_2, a .

□

En las siguientes proposiciones, se presentan resultados sobre caminos de longitud impar en Π entre dos vértices etiquetados con 2.

Proposición 7.4.4 *Π es bipartido, $P = e_1, \dots, e_{2k}$ un camino de Π entre dos vértices etiquetados con 2 tal que e_2, e_{2k} incide en A_2 , e_1, e_{2k-1} incide en A_1 y ningún vértice interior del camino tiene etiqueta entonces G tiene como subgrafo inducido a un prohibido de intervalos con un vértice universal.*

Demostración:

Como e_1 tiene etiqueta 2, es claro que $A_2 \neq A_1$. Más aún, $A_2 \neq C'$. Luego e_2, e_{2k} no inciden en C' .

Por otro lado, e_{2k} también tiene etiqueta 2, por ello e_{2k-1} no puede incidir en C' , luego $A_1 \neq C'$

Sean a_1, a_2 separadores de A_1 y A_2 respectivamente en dirección a las hojas de T' .

Se probará que a_1, a_2, a es una tripla y cualquier cubridor de e_i y e_{i+1} con $i = 1$ o $i = 2k - 1$ es un vértice universal para esa tripla.

Como $A_1 \neq A_2$, y el camino $T'[A_1, A_2]$ está cubierto por no vecinos de a , existe un camino entre a_1 y a_2 por no vecinos de a .

Como e_1 tiene etiqueta 2, existe $w_1 \in N(a)$ cubriendo e_1 y en particular no está en A_2 . Luego existe a_1, w_2, a camino entre a_1 y a por no vecinos de a_2 .

e_{2k} también tiene etiqueta 2, existe $w_2 \in N(a)$ tal que $w_2 \in N(a) - A_1$. Luego a_2, w_2, a es un camino entre a_2 y a por no vecinos de a_1 .

Por otro lado, existe $v_i \in N(a)$ cubridor de e_i y de e_{i+1} para $i = 1$ o $i = 2k - 1$, como e_1, e_{2k-1} y e_2, e_{2k} inciden respectivamente en A_1 y A_2 se tiene que $v_i \in A_1 \cap A_2$ para $i = 1$ o $i = 2k - 1$ es un vértice universal para la tripla a_1, a_2, a .

□

La siguiente proposición generaliza los casos en que existen caminos impares en Π entre dos vértices etiquetados con 2. Se probará entonces que G tiene como sugrafo a los obtenidos en las Proposiciones 7.4.2 y 7.4.4.

Proposición 7.4.5 *Π es bipartido, $P = e_1, \dots, e_{2k}$ un camino de Π entre dos vértices etiquetados con 2 y ningún vértice interior del camino tiene etiqueta entonces G tiene como subgrafo inducido a un prohibido de intervalos con*

un vértice universal o G tiene como subgrafo inducido a los obtenidos en la Proposición 7.4.2.

Demostración:

1. En primer lugar se probará que e_{2k} y e_{2k-2} inciden en el mismo vértice.

Supongamos que no, o bien e_{2k} incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$ o bien e_{2k} no incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$. Sean A_{2k-1}, A_{2k} , los extremos de e_{2k-1} y e_{2k} respectivamente, más próximos a C' en T' y a_{2k-1}, a_{2k} los separadores en dirección a las hojas de A_{2k-1} y A_{2k} .

a) Si e_{2k} no incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$, como e_{2k} tiene etiqueta 2, $A_{2k-1} \neq A_{2k}$. Más aún, $A_{2k-1} \neq C'$.

Se probará que a_{2k-1}, a_{2k}, a es una tirpla y que el cubridor de e_{2k-1} y e_{2k} es un vértice universal para la tripla.

Como $A_{2k-1} \neq A_{2k}$, y el camino $T'[A_{2k-1}, A_{2k}]$ está cubierto por no vecinos de a , existe un camino entre a_{2k-1} y a_{2k} por no vecinos de a .

Sea $v_{2k-2} \in N(a)$ cubridor de e_{2k-1} y e_{2k-2} , es claro que v_{2k-2} no está en A_{2k} pues e_{2k} no incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$. Luego existe el camino a_{2k-1}, v_{2k-2}, a entre a_{2k-1} y a por no vecinos de a_{2k-1} .

Como e_{2k} tiene etiqueta 2, existe $w_{2k} \in N(a)$ tal que $w_{2k} \in N(a) - A_{2k-1}$. Luego a_{2k}, w_{2k}, a es un camino entre a_{2k} y a por no vecinos de a_{2k-1} .

Por otro lado, existe v_{2k-1} cubridor de e_{2k-1} y de e_{2k} vecino de a , como e_{2k-1} y e_{2k} inciden respectivamente en A_1 y A_2 se tiene

que $v_{2k-1} \in A_1 \cap A_2$. Por ello, v_{2k-1} es un vértice universal para la tripla a_{2k-1}, a_{2k}, a . Luego G tiene como subgrafo inducido a un prohibido de intervalos con un vértice universal.

- b) Si e_{2k} incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$, claramente $A_{2k-1} \neq A_{2k}$ pues e_{2k} tiene etiqueta 2. Más aún, $A_{2k-1} \neq C'$. Observar que en este caso A_{2k} podría ser C' .

Sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_1, \dots, e_{2k-2}\}$ que tiene a C' y Π^* el grafo auxiliar definido para T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares.

Sea e_{2k-2}^* la primera arista que incide en $T'[e_{2k-1}, e_{2k-2}]$ y no está en $T'[e_{2k-1}, e_{2k}]$; por la elección de e_{2k-2}^* es claro que en T' está cubierta por vecinos y no vecinos de a , además como existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{2k-2} y e_{2k-1} en particular cubre e_{2k-2}^* . Luego, $P^* = e_{2k-2}^*, e_{2k-1}, e_{2k}$ es un camino par en Π^* entre vértices etiquetados con 1 y 2, por la Proposición 7.4.2, G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} .

Análogamente, e_1 y e_3 inciden en el mismo vértice.

2. Supongamos que e_2 y e_{2k} no inciden en el mismo vértice A_{2k} y que e_1, e_{2k-1} no inciden en el mismo vértice A_1 .

En este caso se analizarán dos situaciones:

- a) Primero que $A_1 = C' = A_{2k}$. Por la etiquetación de e_1 y e_{2k} con 2, se tiene que $A_{2k-1} \neq C'$ y $A_2 \neq C'$.

Si existe e_{2i+1} que no incide en $T'[C', A_{2k-1}]$, sin perder generalidad

supongamos que es el primer vértice de Π^* en esas condiciones, sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2i+1}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' , $e_{2i+1}^* \in E(T'[e_{2i+1}, C'])$ que no incide en $T'[C', A_{2k-1}]$; por la elección de e_{2k-2}^* es claro que en T' está cubierta por vecinos y no vecinos de a , además como existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{2i+1} y e_{2i} en particular cubre e_{2i+1}^* . Luego, se define Π^* a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares. Claramente en Π^* hay un camino $P = e_{2i+1}^*, e_{2i}, e_{2i-1}, \dots, e_1$ entre un etiquetado con 1 y otro con 2. Luego por la Proposición 7.4.2, G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} .

Si toda e_i con i par o impar incide en $T'[A_2, A_{2k-1}]$, podemos analizar 2 situaciones:

- 1) si existe i tal que e_{2i}, e_{2i+1} no inciden en C' entonces G tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal como subgrafo inducido. Veamos esto, sean A_{2i} y A_{2i+1} los extremos de e_{2i} y e_{2i+1} más próximos a C' en T' y a_{2i}, a_{2i+1} sus respectivos separadores en dirección a las hojas. Es fácil verificar que a_{2i}, a_{2i+1}, a es una tripla y el cubridor de e_{2i} y de e_{2i+1} es el vértice universal de la tripla. Más específicamente, como $T'[A_{2i}, A_{2i+1}]$ está cubierto por no vecinos de a existe un camino por no vecinos de a entre a_{2i} y a_{2i+1} ; por otro lado existen $v_{2k-1} \in N(a)$ cubriendo e_{2k-1}, e_{2k} , $v_1 \in N(a)$ cubriendo e_1, e_2 , claramente, existen el camino a, v_{2k-1}, a_{2i+1} entre a y a_{2i+1} que no toca la vecinanza de a_{2i} y el camino a, v_1, a_{2i} entre a y a_{2i} que no toca la vecinanza de a_{2i+1} pues T' es un

UV -árbol clique.

2) de lo expuesto en i) podemos asumir sin perder generalidad que existe i tal que e_{2i} no inciden en C' . Sea e_{2k-2l} el primer índice considerando el camino $e_{2k}, e_{2k-1}, \dots, e_1$ que no incide en C' , observar que k podría ser $l + 1$ y en ese caso la primera arista sería e_2 . Sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_1, \dots, e_{2k-2l}, e_{2k-1}, e_{2k}\}$ que tiene a C' , e_{2k-2l}^* la primera arista incidente en $T'[A_{2k-2l}, A_2]$ (siendo A_{2k-2l} extremo de e_{2k-2l} más próximo a C' en T'), e_{2k-1}^* la primera arista en $T'[C', A_{2k-1}]$ incidente en A_{2k-1} ; por la elección de e_{2k-2l}^* y e_{2k-1}^* es claro que en T' está cubierta por vecinos y no vecinos de a , además existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{2k-2} y e_{2k-1} en particular cubre e_{2k-1}^* y existe $v_1 \in N(a)$ cubriendo e_{2k-2l} y $e_{2k-2l+1}$ en particular cubre e_{2k-2l}^* . Luego, definimos Π^* , por la Observación 7.4.1 Π^* no tiene ciclos impares, se tiene un camino impar $e_{2k-2l}^*, \dots, e_{2k-1}^*$ en Π^* entre dos vértices etiquetados con 1. Luego G tiene como subgrafo inducido a uno de los obtenidos en la Proposición 7.4.2.

b) $A_1 \neq C'$ o $A_{2k} \neq C'$.

En este caso es claro que $A_1 \neq A_{2k}$.

Supongamos que e_2 no incide en A_{2k} o e_{2k-1} no incide en A_1 .

Para fijar ideas e_{2k-1} no incide en A_1 y sea e_{2i+1} la primera arista del camino e_1, \dots, e_{2k} que no incide en A_1 .

1) Si e_{2i+1} no incide en $T'[A_1, C']$ sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2i+1}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' , $e_{2i+1}^* \in T'[C', e_{2i+1}] -$

$T'[A_1, C']$; por la elección de e_{2i+1}^* es claro que en T' está cubierta por vecinos y no vecinos de a , además como existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{2i+1} y e_{2i} en particular cubre e_{2i+1}^* . Luego, definimos Π^* a partir de T'_1 . Por la Observación 7.4.1 Π^* no tiene ciclos impares, se tiene un camino par e_{2i+1}^*, \dots, e_1 en Π^* entre un vértice etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2. Luego G tiene como subgrafo inducido a uno de los obtenidos en la Proposición 7.4.2.

- 2) e_{2i+1} incide en $T'[A_1, C']$; sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2i+1}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C'

Observar que existe $v \in N(a)$, cubriendo e_{2i+1} y e_{2i} , con lo cual al borrar de T' las aristas e_{2i+1}, \dots, e_{2k} resulta que en T'_1 , e_{2i} está cubierto por v vecino de a que no está en ningún B_i siendo B_i extremo de e_i más lejano a C' en T' , para $i < 2i$.

Luego definimos Π^* , por la Observación 7.4.1 Π^* no tiene ciclos impares, se tiene un camino impar e_1, \dots, e_{2i} en Π^* entre dos vértices etiquetados con 2 (v es el vecino de a que da la etiqueta 2 a e_{2i}). Luego G tiene como subgrafo inducido a uno de los obtenidos en la Proposición 7.4.4.

□

Proposición 7.4.6 *Si Π tiene un camino $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$, entre dos etiquetados con 2, tal que para algún i , e_{2i+1} no incide en A_1 entonces G tiene como subgrafo inducido a los obtenidos en la Proposición 7.3.2.*

Demostración:

Sea e_{2i+1} la primera arista no incidente en A_1 y A_{2i+1} el extremo de e_{2i+1} más próximo a C' en T' .

Si e_{2i+1} no incide en $T'[A_1, A_2]$, luego sea e_{2i+1}^* la primera arista de $T'[e_{2i+1}, C'] - T'[A_1, A_2]$ se define T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2i+1}, \dots, e_{2k+1}\}$ que tiene a C' ; por la elección de e_{2i+1}^* es claro que en T' está cubierta por vecinos y no vecinos de a , además como existe $v \in N(a)$ cubriendo e_{2i+1} y e_{2i} en particular cubre e_{2i+1}^* .

Luego, sea Π^* el grafo definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 no tiene ciclos impares, sea $P = e_{2i+1}^*, e_{2i}, \dots, e_1$ es un camino par entre un vértice etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2. Luego por la Proposición 7.4.2, G tiene como subgrafo inducido a β_{2k+2} .

Si en cambio e_{2i+1} incide en $T'[A_1, A_2]$, se define T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2i+1}, \dots, e_{2k}\}$ que tiene a C' .

Observar que existe $v \in N(a)$, cubriendo e_{2i+1} y e_{2i} , con lo cual al borrar de T' las aristas $e_{2i+1}, \dots, e_{2k+1}$ resulta que en T'_1 , e_{2i} está cubierto por v vecino de a que no está en ningún B_i siendo B_i extremo de e_i más lejano a C' en T' , para $i < 2i$.

Luego sea Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 no tiene ciclos impares, sea $P = e_1, e_2, \dots, e_{2i}$ es un camino impar entre vértices etiquetados con 2 (v es el vecino de a que da la etiqueta 2 a e_{2i}). Luego por la Proposición 7.4.5, se tiene lo buscado.

□

7.5. Resultados Principales

Claramente al estudiar condiciones minimales podemos suponer entonces que todo camino entre dos vértices etiquetados con 2 tiene longitud par. Más aún, que todos vértices interiores del camino de índice impar inciden en el mismo vértice. Así resultan los vértices impares de caminos entre dos etiquetados con 2 de longitud par en un ramo.

También es claro que podemos asumir que no hay aristas cuyos extremos están etiquetados con 1.

Teorema 7.5.1 *G cordal con un simplicial esencial. Si G es no UV minimal entonces: O bien*

1. Π no es bipartido;
2. si Π es bipartido entonces existe un camino de longitud impar mayor a 1 en Π entre dos vértices etiquetados con 1; o bien existe un camino de longitud par en Π entre un vértice etiquetado con 1 y uno etiquetado con 2.

Demostración:

Supongamos que Π es bipartido (Figura 7.31), por la Proposición 7.3.1 Π tiene al menos una arista.

Sin perder generalidad podemos asumir que Π es conexo.

1. En Π no hay vértices etiquetados.

Si en $\Pi = (A, B)$ uno de los conjuntos de la bipartición tiene un único vértice entonces es posible construir un UV-árbol clique, lo que con-

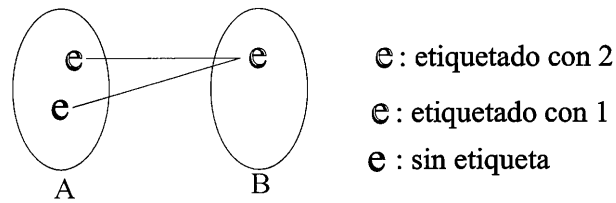


Figura 7.31:

traduce que G sea no UV . Veamos esto último, para fijar ideas supongamos que $|B| = 1$ y sea $e_1 \in B$. Notamos a los extremos de e_1 con A_1 y B_1 , siendo A_1 el más próximo a C' en T' . Sea $e_i = A_i B_i \in A$ y \tilde{T} el árbol obtenido en la Proposición 7.2.1 (Figura 7.32).

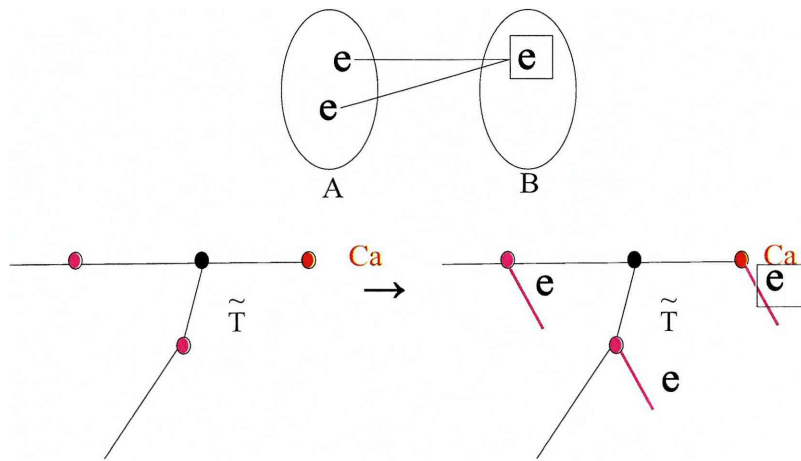


Figura 7.32:

Claramente, $x \in B_1 \cap B_i$ son vértices gemelos de $G_{\tilde{T}}$ por ello tienen los mismos extremos en \tilde{T} . Más aún, como los vértices de $B_1 \cap B_i$ son los cubridores de e_1 y e_i son vecinos de a con lo cual uno de sus extremos en \tilde{T} es C_a , notemos a su otros extremos con X_{1i} . Por otro lado, como

Π es conexo bipartido $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i, j \neq 1$. Se construye el árbol $T = \tilde{T} \cup B_1 C_a \cup T_1 \cup \bigcup_j (X_{1j} B_j \cup T_j)$ siendo T_j la rama de T' incidente en A_j que tiene a e_j . Es fácil verificar que T resulta un UV -árbol clique. Contradiciendo así que G no es UV .

Supongamos entonces que cada conjunto de la bipartición tiene al menos 2 vértices. Se probará entonces que o bien todos los vértices de A inciden en un mismo vértice de T' o todos los vértices de B inciden en un mismo vértice de T' (Figura 7.33).

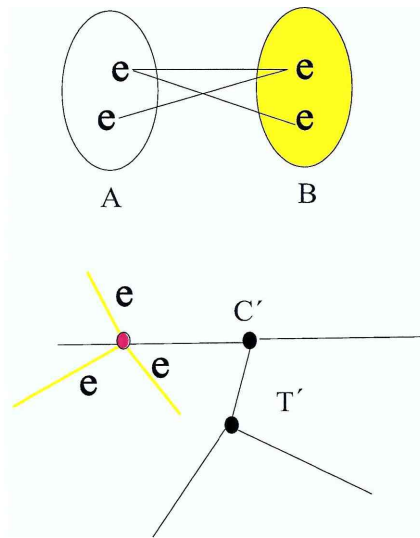


Figura 7.33:

Si existieran vértices de A que no inciden en el mismo vértice de T' y vértices de B que no inciden en el mismo vértice de T' sean e_1, e_{2k+1} los vértices de A y e_{2i}, e_{2j} los vértice de B cumpliendo lo antes mencionado. Para fijar ideas supongamos que e_1 y e_{2i} inciden en T' respectivamente

en A_1 y A_2 .

Claramente, los vértices de Π , $e_1, e_{2k+1}, e_{2i}, e_{2j}$ están en un recorrido W . Sin perder generalidad podemos asumir que todos los vértices de ese recorrido a excepción de e_{2k+1}, e_{2j} inciden en A_1 y A_2 respectivamente.

a) Ni e_{2k+1} ni e_{2j} inciden en $T'[A_1, A_2]$.

Consideramos el camino entre e_{2k+1}, e_{2j} , sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2k+1}, e_{2j}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares, sean $e_{2k+1}^* \in T'[e_{2k+1}, C']$, $e_{2j}^* \in T'[e_{2j}, C']$ las primeras aristas que inciden en $T'[A_1, A_2]$. Por la manera en la cual fueron elegidas las aristas e_{2k+1}^*, e_{2j}^* , están cubiertas no vecinos de a y por los vecinos de a que cubren a e_{2k+1}, e_{2j} .

Luego en Π^* existe un camino impar entre dos vértices etiquetados con 1, cuyos extremos inicial y final son e_{2k+1}^*, e_{2j}^* y los interiores del camino son los vértices del camino inducido por el recorrido W entre e_{2k+1}, e_{2j} , por la Proposición 7.4.2, se contradice la minimalidad de G como grafo no UV .

b) Sólo e_{2k+1} no incide en $T'[A_1, A_2]$, si $2j - 1 = 2k + 1$, sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2j}, e_{2k-1}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares. Observar que al borrar las aristas e_{2j}, e_{2k-1} , en T'_1 resultan e_{2k} y e_{2k+1} etiquetados con 2. Luego en Π^* existe un camino impar entre dos vértices etiquetados con 2, cuyos extremos inicial y final son e_{2k+1}, e_{2k} , por la Proposición 7.4.5, se contradice la minimalidad

de G como grafo no UV .

Si en cambio $2j - 1 \neq 2k + 1$ consideramos el camino entre e_{2j-1}, e_{2k+1} sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2j}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares, claramente al borrar en T' la arista e_{2j} en T'_1 resulta e_{2j-1} etiquetado con 2. Luego en Π^* existe un camino par entre dos vértices uno etiquetado con 1 y el otro con 2, cuyos extremos inicial y final son e_{2k+1}, e_{2j-1} y los interiores del camino son los vértices del camino inducido en el recorrido W entre e_{2k+1}, e_{2j-1} , por la Proposición 7.4.2, se contradice la minimalidad de G como grafo no UV .

c) e_{2k+1}, e_{2j} inciden en $T'[A_1, A_2]$

sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2k+1}, e_{2j}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares, claramente el borrado en T' de e_{2j} etiqueta en T'_1 a e_{2j-1}, e_{2j+1} con 2, análogamente el borrado de e_{2k+1} en T' etiqueta con 2 a e_{2k}, e_{2k+2} .

Luego en Π^* existe un camino impar entre dos vértices etiquetados con 2, es decir entre e_{2j-1}, e_{2k} , por la Proposición 7.4.5, se contradice la minimalidad de G como grafo no UV .

Luego todos los vértices de A o todos los vértices de B inciden en el mismo vértice de T' . Para fijar ideas supongamos que los vértices de B inciden todos en A_2 . Se construirá una representación UV de G (Figura 7.34).

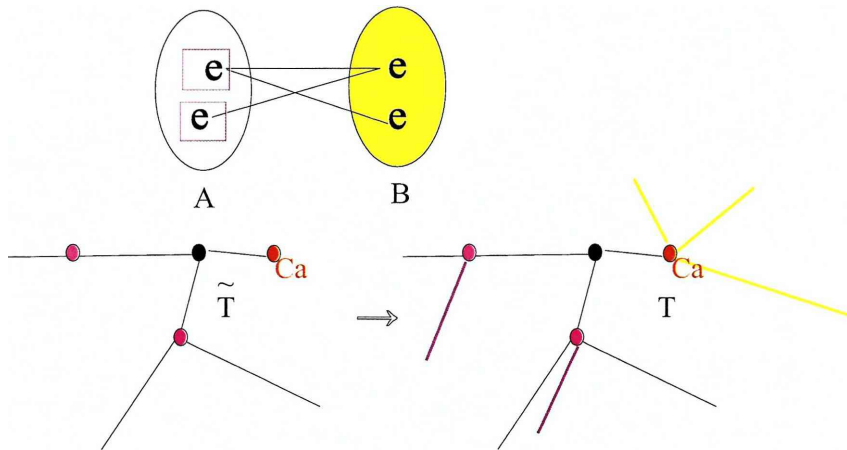


Figura 7.34:

Veamos esto último, sea $e_i = A_i B_i \in A$ y \tilde{T} el árbol obtenido en la Proposición 7.2.1. Claramente, $x \in B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son vértices gemelos de $G_{\tilde{T}}$ por ello tienen los mismo extremos en \tilde{T} . Más aún, como los vértices de $B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son los cubridores de e_{2i} y e_{2j+1} son vecinos de a con lo cual uno de sus extremos en \tilde{T} es C_a , notemos a su otros extremos con $X_{2i,2j+1}$. Por otro lado, como Π es conexo bipartido $B_{2i} \cap B_{2j} = \emptyset$, $B_{2i+1} \cap B_{2j+1} = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Se construye el árbol $T = \tilde{T} \cup \bigcup_i (C_a B_{2i} \cup T_{2i} \cup X_{2i,2i+1} B_{2i+1} \cup T_{2i+1})$ siendo T_j la rama de T' incidente en A_j que tiene a e_j . Es fácil verificar que T resulta un UV -árbol clique. Contradiciendo así que G no es UV .

2. En Π hay vértices etiquetados, si no existen etiquetados con 1, es claro que no puede haber caminos impares entre dos etiquetados con 2 pues en ese caso por la Proposición 7.4.5 se contradeciría la minimalidad de G como grafo no UV . Luego sólo pueden haber caminos pares entre

dos vértices etiquetados con 2, sea e_1 etiquetado con 2, sea $\Pi = (A, B)$ siendo $A = \{e \in \Pi | d_{T'}(e_1, e) \text{ es par}\}$, $B = \{e \in \Pi | d_{T'}(e_1, e) \text{ es impar}\}$. Numeraremos con índice impar a los vértices de A y con índice par a los vértices de B . Claramente todos los vértices con etiquetas 2 están en el mismo conjunto de la bipartición, más aún si P es un camino entre vértices etiquetados con 2, podemos asumir que todos los vértices de ese camino inciden en el mismo vértice de T' pues sino por la Proposición 7.4.6, se contradeciría la minimalidad de G . Más aún, todos los vértices de A deben incidir en el mismo vértice. Luego es posible construir un UV -árbol clique. Veamos esto último, sea $e_i = A_i B_i \in A$ y \tilde{T} el árbol obtenido en la Proposición 7.2.1. Claramente, $x \in B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son vértices gemelos de $G_{\tilde{T}}$ por ello tienen los mismo extremos en \tilde{T} . Más aún, como los vértices de $B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son los cubridores de e_{2i} y e_{2j+1} son vecinos de a con lo cual uno de sus extremo en \tilde{T} es C_a , notemos a su otros extremos con $X_{2i, 2j+1}$. Por otro lado, como Π es conexo bipartido $B_{2i} \cap B_{2j} = \emptyset$, $B_{2i+1} \cap B_{2j+1} = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Como los vértices de A tienen etiqueta 2, se adicionan todas las aristas $C_a B_{2i+1}$, se construye el árbol $T = \tilde{T} \cup \bigcup_i (C_a B_{2i+1} \cup T_{2i+1} \cup X_{2i, 2i+1} B_{2i+1} \cup T_{2i+1})$ siendo T_j la rama de T' incidente en A_j que tiene a e_j . Es fácil verificar que T resulta un UV -árbol clique. Contradiciendo así que G no es UV .

Supongamos que hay vértices etiquetados un 1, no puede haber caminos de longitud impar pues por la Proposición... se contradeciría lo asumido, sea sea e_1 etiquetado con 1, $A = \{e \in \Pi | d_{T'}(e_1, e) \text{ es par}\}$, $B = \{e \in \Pi | d_{T'}(e_1, e) \text{ es impar}\}$, $\Pi = (A, B)$.

Claramente todos los vértices con etiquetas 1 están en el mismo conjun-

to de la bipartición. Más aún, si hay vértices etiquetados con 2, están en el otro conjunto de la bipartición pues no existen caminos pares entre 1 y 2 por la Proposición 7.4.2. Se verá que todos los vértices de B inciden en el mismo vértice de T' caso contrario se contradecirá la minimalidad de G como grafo no UV . Posteriormente, conociendo que todos los vértices de B inciden en el mismo vértice en T' , se construirá un UV árbol clique de G contradiciendo que G no es UV .

Se notarán los vértices de A con índice impar y los vértices de B con índice par.

Sean e_{2i}, e_{2j} dos vértices de B que no inciden en el mismo vértice de T' .

Sea W un recorrido entre e_1 y e_{2j} que tiene a e_{2i} .

Sin perder generalidad, podemos asumir que a excepción de e_{2j} , todos los demás vértices del recorrido W inciden en A_2 .

Consideramos A_1 el extremo más próximo a C' de e_1 . Si e_{2j} no incide en $T'[A_1, A_2]$, consideramos el camino entre e_1, e_{2j} , sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2j}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares.

Sean $e_{2j}^* \in T'[e_{2i}, C']$ la primera arista que inciden en $T'[A_1, A_2]$. Luego en Π^* existe un camino impar entre dos vértices etiquetados con 1, cuyos extremos inicial y final son e_1, e_{2j}^* y los vértices interiores del camino son los vértices del camino inducido en el recorrido W entre e_1, e_{2j} , por la Proposición 7.4.2, se contradice la minimalidad de G como grafo no UV .

Si en cambio incide en $T'[A_1, A_2]$, consideramos el camino entre e_1, e_{2j-1} sea T'_1 la componente conexa de $T' - \{e_{2j}\}$ que tiene a C' , Π^* definido a partir de T'_1 , por la Observación 7.4.1 en Π^* no hay ciclos impares.

Claramente el borrado de e_{2j} en T' le asigna en T'_1 a e_{2j-1} etiqueta 2. Luego en Π^* existe un camino par entre dos vértices uno etiquetado con 1 y el otro con 2, cuyos extremos inicial y final son e_1, e_{2j-1} y los vértices interiores del camino inducido en el recorrido W entre e_1, e_{2j-1} , por la Proposición 7.4.2, se contradice la minimalidad de G como grafo no UV .

Se tiene entonces que todos los vértices de B inciden en A_2 , se contruye entonces una representación UV .

Veamos esto último, sea $e_i = A_i B_i \in A$ y \tilde{T} el árbol obtenido en la Proposición 7.2.1. Claramente, $x \in B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son vértices gemelos de $G_{\tilde{T}}$ por ello tienen los mismo extremos en \tilde{T} . Más aún, si e_{2i}, e_{j+1} son a -aristas, como los vértices de $B_{2i} \cap B_{2j+1}$ son los cubridores de e_{2i} y e_{2j+1} son vecinos de a con lo cual uno de sus extremo en \tilde{T} es C_a , notemos a su otros extremos con $X_{2i,2j+1}$. Por otro lado, como Π es conexo bipartido $B_{2i} \cap B_{2j} = \emptyset$, $B_{2i+1} \cap B_{2j+1} = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Como los vértices de A que tienen etiqueta 1, están en \tilde{T} sólo hay que adicionar a \tilde{T} todas los vértices de Π que no tienen etiqueta 1.

Por otro lado, los vértices etiquetados con 2, están en B . Más aún, todos los vértices de B están en un ramo y esos vértices deben ser adicionados a C_a . Sólo hay que adicionar a los vértices de A que no tienen etiqueta 1 y esos vértices son cubridores de a -aristas e_{2i+1}, e_{2j} .

Como los B_{2j} se adicionan a C_a , los B_{2i+1} son adicionados a $X_{2j,2i+1}$.
Luego a \tilde{T} se le adicionaran todas aristas $C_a B_{2i}$, se construye el árbol
 $T = \tilde{T} \cup \bigcup_i (C_a B_{2i} \cup T_{2i} \cup X_{2i,2i+1} B_{2i+1} \cup T_{2i+1})$ siendo T_j la rama de
 T' incidente en A_j que tiene a e_j . Es fácil verificar que T resulta un
 UV -árbol clique. Contradiciendo así que G no es UV .

□

Corolario 7.5.1 *G un grafo cordal con un simplicial esencial. Entonces G es no UV minimal si y sólo si es un cometa impar o es σ_1 o es β_1 (Figura 7.35).*

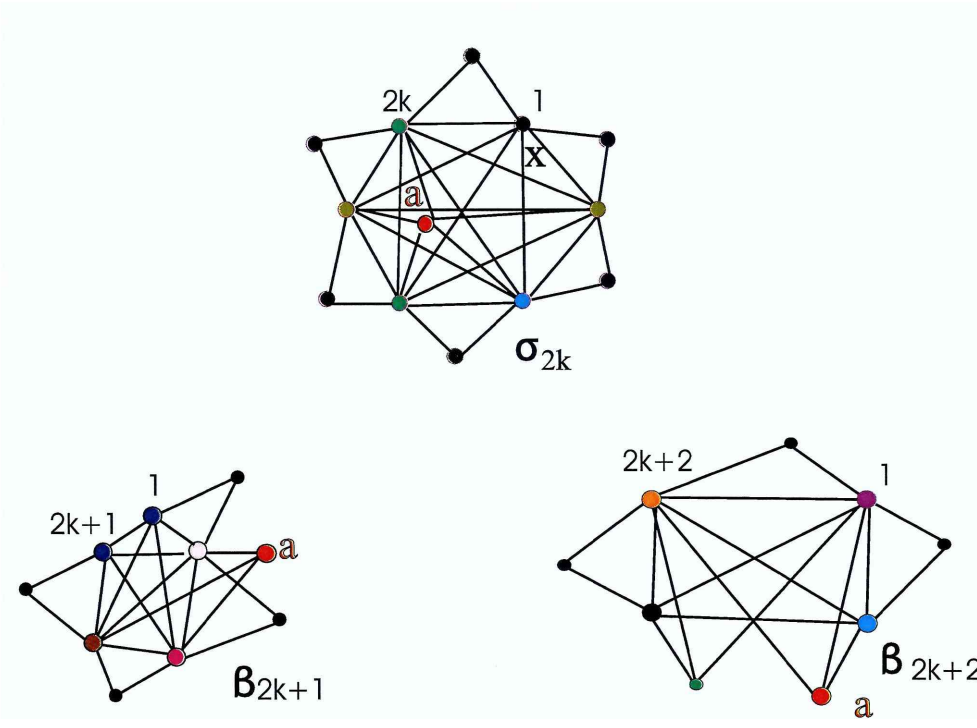
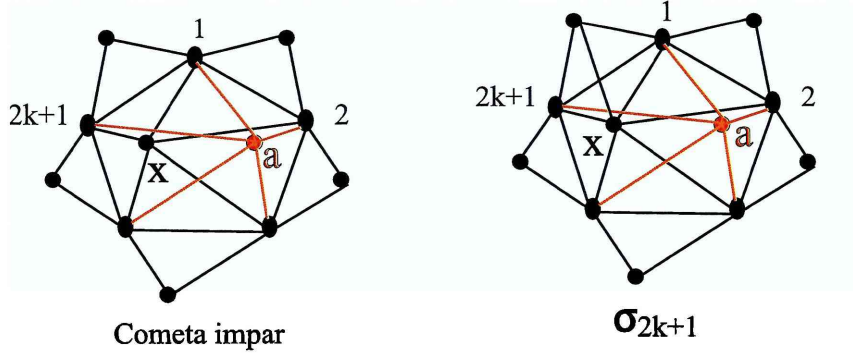


Figura 7.35: No UV con simpliciales esenciales

Capítulo 8

Grafos no UV minimales sin simpliciales esenciales

8.1. Simpliciales no esenciales, grafos compactos y supercompactos

Como ya mencionamos antes en un grafo cordal, distinguimos 2 tipos de vértices simpliciales; los simpliciales esenciales y los no esenciales.

Recordar que un vértice a simplicial de G se dice simplicial no esencial si satisface que $G - N[a]$ es conexo y que G es un grafo cordal compacto si todos sus simpliciales son no esenciales.

En el Capítulo 5 se estudio el follaje de los grafos compactos.

Observar que los únicos cliques de los grafos compactos que tienen simpliciales son hojas de todo árbol clique. Los otros cliques deben estar separados por otros vértices. Este hecho lleva a los siguientes resultados.

Proposición 8.1.1 *G un grafo cordal compacto, T un árbol clique de G , X vértice de T y e una arista de T cubierta sólo por elementos de X , entonces o bien e incide en X o bien el grado en T de X es al menos 3.*

Demostración:

Trivial

□

Proposición 8.1.2 *Si G es un grafo cordal compacto, T un árbol clique de G ,*

- 1. e, e' aristas de T tal con el mismo conjunto de cubridores entonces e, e' inciden en un vértice X de grado mayor o igual a 2,*
- 2. no hay 3 aristas cubiertas por los mismos cubridores.*

Demostración:

Trivial

□

Proposición 8.1.3 *G un grafo cordal compacto, T un árbol clique de G , C_a una hoja de T , $XC_a \in E(T)$. Si el grado en T de X es 2, existe un v vértice en G , vecino de a tal que $C_v = \{X, C_a\}$.*

Demostración:

Para separar X la única posibilidad es que exista un vértice de G como se enuncia.

□

Recordar que un vértice v de G es casi-simplicial si es vecino de un simplicial y $|C_v| = 2$ (Figura 8.1).

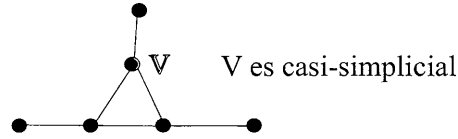


Figura 8.1: Casi-simplicial

Se dice que G es *supercompacto* si es compacto y no tiene casi-simpliciales *supercompacto* (Figura ??).

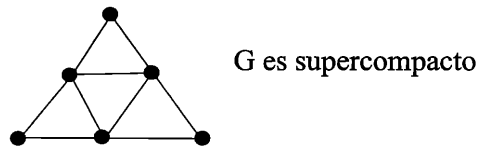


Figura 8.2: Supercompacto

Por la Proposición 8.1.3, si G es supercompacto entonces en todo árbol clique de G toda hoja es adyacente a un vértice de grado al menos 2.

La Figura 8.3 muestra un árbol clique de un grafo supercompacto.

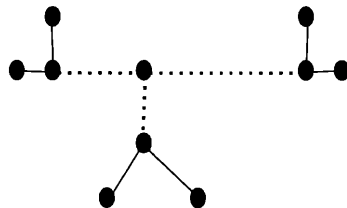


Figura 8.3:

Los resultados siguientes vinculan los grafos supercompactos con subclases de los cordales.

Teorema 8.1.1 Si G es UV supercompacto y T un UV-árbol clique de G :
 Para cada X vértice de T con $d_T(X) = k$, adyacente a $k - 1$ hojas:

1. existen 2 hojas C_{a_1}, C_{a_2} adyacentes a X , siendo a_1, a_2 simpliciales de G y v vértice de G tal que $C_v = \{C_{a_1}, C_{a_2}, X\}$
2. G tiene como subgrafo inducido a una estrella de a lo sumo k puntas.

Demostración: Como G es supercompacto, si T es un árbol clique ningún vértice de T adyacente a una hoja de T puede tener grado 2, pues por la Proposición 8.1.3 resultaría que G tiene un casi-simplicial lo cual es un absurdo.

1. Si X es adyacente a k hojas entonces T es $K_{1,k}$ y para separar X con caminos de T , debe existir un vértice como se enuncia (Figura 8.4).

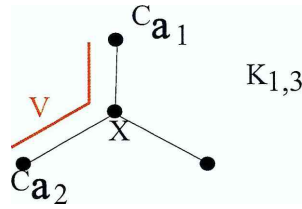


Figura 8.4:

Si X es adyacente a $k - 1$ hojas y a un vértice interno Y . Sea C_{a_1} hoja adyacente a X , como no existen vértices casi-simpliciales, todo cubridor de XC_{a_1} está en al menos 3 cliques. Si dicho cubridor estuviera en otra de las hojas, se tiene el vértice deseado. Si no, entonces para toda hoja C_{a_i} , todo cubridor de XC_{a_i} está en Y (Figura 8.5). Más claramente, $X \cap C_{a_i} \subset Y$ para cada C_{a_i} adyacente a X . Luego X no está separado lo cual es un absurdo.

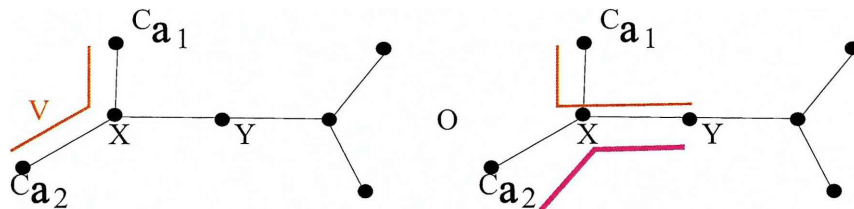


Figura 8.5:

2. Por el item anterior existen C_{a_1}, C_{a_2} hojas incidentes en X y v_0 tal que $C_{v_0} = \{C_{a_1}, C_{a_2}, X\}$.

Como $G - N[a_1]$ es conexo entonces existe un vértice v_1 que cubre $C_{a_1}X$ y no C_{a_2} . Además por ser G supercompacto $|C_{v_1}| > 2$.

Del mismo modo, $G - N[a_2]$ es conexo, luego existe un vértice v_2 que cubre $C_{a_2}X$ y no C_{a_1} . Como antes, por ser G supercompacto $|C_{v_2}| > 2$.

Si $|C_{v_1} \cap C_{v_2}| > 1$ entonces G tiene como subgrafo inducido a una estrella de 3 puntas.

Si en cambio $|C_{v_1} \cap C_{v_2}| = 1$, alguno de los 2 vértices, para fijar ideas v_2 , debe cubrir a una hoja C_{a_3} siendo a_3 simplicial de G .

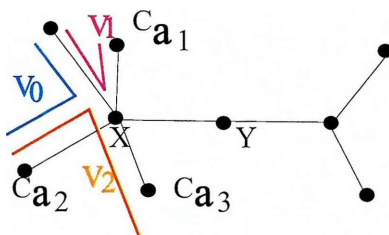


Figura 8.6:

Nuevamente como $G - N[a_3]$ es conexo, luego existe un vértice v_3

cubriendo $XC_{a_3} - C_{a_2}$, además $|C_{v_3}| > 2$.

Si $|C_{v_1} \cap C_{v_3}| > 1$ o $|C_{v_0} \cap C_{v_3}| > 1$ entonces G tiene como subgrafo inducido a una estrella de 4 puntas o a una estrella de 3 puntas.

Si en cambio $|C_{v_i} \cap C_{v_3}| = 1$ para $i = 0, 1$, alguno de los 2 vértices debe cubrir a una hoja.

Continando el razonamiento de manera recursiva se tiene que G tiene como inducida una estrella de a lo sumo k puntas.

□

Del teorema anterior se tiene el siguiente corolario que nos permite asegurar que los grafos supercompactos no son RDV .

Corolario 8.1.1 *Si G es cordal supercompacto entonces G no es RDV .*

Demostración: Si G no es UV , entonces no es RDV . Si G es UV por el Teorema 8.1.1 G tiene a una estrella como subgrafo inducido y no es RDV .

□

Volviendo al análisis de los grafos UV compactos, se obtiene de la Proposición 8.1.3 y del Teorema 8.1.1 el siguiente resultado.

Teorema 8.1.2 *Si G es un grafo compacto UV entonces o bien existe un simplicial a y un casi-simplicial v adyacente a a o bien existen a_1, a_2 simpliciales de G y v adyacente a a_1 y a a_2 con $|C_v| = 3$.*

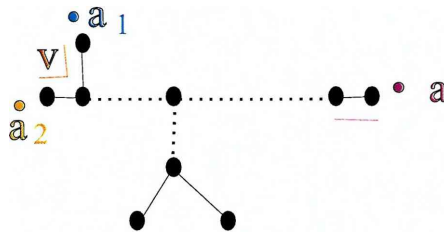


Figura 8.7:

8.2. Grafos compactos no UV.

Los grafos cordales no UV minimales compactos tienen una serie de propiedades especiales que se presentan en las siguientes proposiciones.

Proposición 8.2.1 *Si G es un grafo cordal compacto no UV minimal, a un simplicial de G y T' un UV árbol clique de $G - a$. Entonces T' tiene $l(G) - 1$ hojas.*

Demostración: Claramente en $G - a$ los simpliciales son los simpliciales de G y los vértices vecinos de a que estaban en sólo dos cliques de G .

Como G no es UV minimal no puede haber gemelos en G , con lo cual puede existir sólo un simplicial en $G - a$ distinto de los simpliciales de G . Luego T' tiene a lo sumo la misma cantidad de hojas que cualquier árbol clique de G .

Si T' tuviera el mismo número de hojas, es claro que existe un vértice C' de T' que tiene a todos los vecinos de a y es hoja de T' , luego $T' \cup C'a$ es un UV -árbol clique de G .

□



Proposición 8.2.2 *Si G es cordal compacto no UV minimal con k simpliciales entonces el conjunto de vértices simpliciales de G es el único conjunto asteroidal de tamaño k .*

Demostración:

Sea T un árbol clique de G . Como G es compacto y tiene k simpliciales todo árbol clique de G tiene exactamente k hojas. Si existiera otro conjunto asteroidal de tamaño k en G , sea x_1, \dots, x_k , considerar el subárbol T' de T que induce un grafo $G_{T'}$ cuyos simpliciales son x_1, \dots, x_k . Como $G \neq G_{T'}$ y G es no UV minimal resulta que $G_{T'}$ es UV . Además como G es compacto, $G_{T'}$ es compacto luego en todo árbol clique de $G_{T'}$; C_{x_i} son las hojas para $i = 1, \dots, k$. Luego a partir de un UV -árbol clique de $G_{T'}$ se construye un UV -árbol clique de G lo que resulta absurdo.

□

En lo que sigue, haciendo uso de los resultados del párrafo anterior, se probará que sólo basta estudiar los grafos no UV compactos que tienen un casi-simplicial.

Teorema 8.2.1 *Si G es cordal supercompacto y no es UV minimal, existen 2 simpliciales a_1 y a_2 de G y v vecino de ambos con $|C_v| = 3$.*

Demostración:

Si G tiene sólo tres simpliciales, como es compacto, todo árbol clique de G tiene 3 hojas. Dado que G es supercompacto, el único posible árbol clique de G es $K_{1,3}$ y como G no es UV , existe un claw que es un vértice universal u de G (Figura 8.8). Observar que también $G - u$ es supercompacto, pero

por minimalidad, $G - u$ es un grafo UV . Por el Teorema 8.1.2 y dado que G no tiene casi-simpliciales, se tiene el resultado buscado.

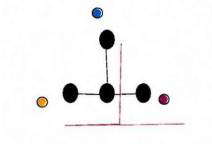


Figura 8.8:

Si G tiene más de 3 simpliciales, sea a uno de ellos. Como G no es UV minimal, se tiene que $G - a$ es UV .

Si $G - a$ no es supercompacto, existe un casi-simplicial v de $G - a$ vecino de algún simplicial de $G - a$, sea a_1 . Dado que G es supercompacto, no tiene casi simpliciales, luego v debe haber sido vecino de a en G . Con lo cual, conseguimos un vértice de G , vecino de 2 simpliciales de G ; $|C_v| = 3$ (Figura 8.9).

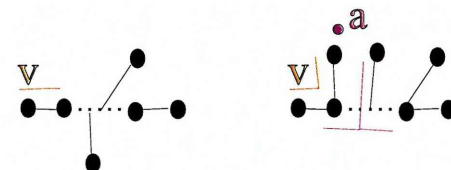


Figura 8.9:

Si en cambio, $G - a$ es supercompacto. Por el Teorema 8.1.2 se sabe que existe en $G - a$ un vértice v vecino de 2 simpliciales a_1 y a_2 con $|C_v| = 3$. Veamos que v , a_1 y a_2 son los vértices buscados. Primero observar que dado que G no tiene casi-simpliciales, tanto a_1 como a_2 también son simpliciales de G . Además si v fuera vecino de a (Figura 8.10), v sería vecino de 3 simpliciales

de G con lo cual G posee como subgrafo propio inducido a un prohibido de intervalos con un vértice universal, lo cual es absurdo, por minimalidad.

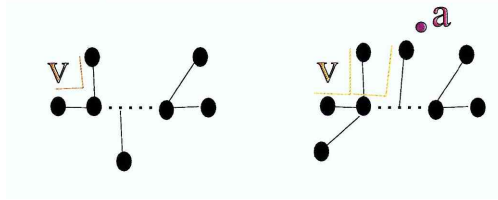


Figura 8.10:

□

Se contruirá, a partir de un grafo cordal supercompacto G , un grafo auxiliar G^* que tendrá un vértice casi-simplicial.

Sea G un grafo supercompacto no UV minimal, por el Teorema 8.2.1, existen a_1, a_2 vértices simpliciales de G , $v \in V(G)$ y $X \in C(G)$ tal que $C_v = \{C_{a_1}, X, C_{a_2}\}$. Se define un grafo G^* subdividiendo el vértice v (Figura 8.11). Más claramente, $V(G^*) = (V(G) - \{v\}) \cup \{v_1, v_2\}$, $N(v_1) = N(v) - \{a_2\}$ y $N(v_2) = N(v) - \{a_1\}$, notamos $C_{a_i}^*$ a los cliques de G^* que tienen a a_i , observar que $C_{a_1}^* = C_{a_1} \cup \{v_1\} - \{v\}$ y $C_{a_2}^* = C_{a_2} \cup \{v_2\} - \{v\}$. G^* es un grafo cordal compacto y v_i es casi-simplicial de G^* para $i = 1, 2$. Además, en todo árbol clique de G^* , los cliques $C_{a_1}^*$ y $C_{a_2}^*$ inciden en $X^* = (X - \{v\}) \cup \{v_1, v_2\}$.

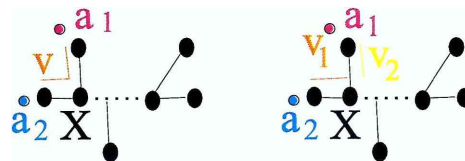


Figura 8.11:

Teorema 8.2.2 *G es cordal supercompacto no UV minimal. Entonces G^* no es UV y tiene un vértice casi-simplicial.*

Demostración: Si G^* fuese UV existiría T^* , UV -árbol clique de G^* , por lo observado anteriormente, $C_{a_1}^*, C_{a_2}^*$ son hojas de T^* incidiendo en X^* . Luego considerando al mismo árbol T^* y la familia dual de los cliques de G obtenida reemplazando $C_{v_1} \cup C_{v_2}$ por C_v se tiene un UV -árbol clique de G .

Es claro, por la construcción, que tanto v_1 como v_2 son casi-simpliciales de G^* . □

8.3. Construcción de prohibidos compactos

En el capítulo anterior, utilizamos un grafo auxiliar para construir los prohibidos con simplicial esencial. En este capítulo, continuaremos con la misma idea. Se utilizarán para ello las técnicas de injerto simple y compuesto junto con la propiedad de invarianza de los cubridores.

Sea G compacto no UV minimal. Como es compacto, G no tiene vértices simpliciales esenciales, pero por el Teorema 8.2.2, podemos suponer que tiene un vértice casi-simplicial. Llamamos s a dicho vértice y a a su vecino simplicial. Es decir, a un vértice simplicial de G tal que $G - a$ tiene un simplicial esencial s .

Como G es no UV minimal, $G - a$ es un grafo UV en el cual s es simplicial esencial, así los resultados del capítulo anterior serán relevantes.

Observar que G no puede tener vértices gemelos, luego $C(G-a) = C(G) - \{C_a\}$. Además, $C(G-a-s) = C(G) - \{C_a, C_s\}$.

Sea C' clique de $G-a-s$ tal que C' contiene a todos los vecinos de s excepto a , es decir $N_{G-a}(s) \subset C'$ y T'' un UV -árbol clique de $G-a-s$.

El grafo Π se construirá en este caso respecto de T'' y C' . Es claro que, como s es simplicial esencial de $G-a$, T'' tiene s -aristas.

A los efectos de construir un UV árbol clique de G a partir de T'' o ver cuando tal no existe, será necesario estudiar también las s -aristas cubiertas por vecinos de a .

Estudio de T'' : s -aristas, vértices pasantes

s-aristas

Proposición 8.3.1 *En T'' existe al menos una arista incidiendo en C' que no es una s -arista.*

Demostración:

Dado que C' es también un clique de G , y tiene a todos los vecinos de s excepto a , entonces existe $b \in C' - C_s$.

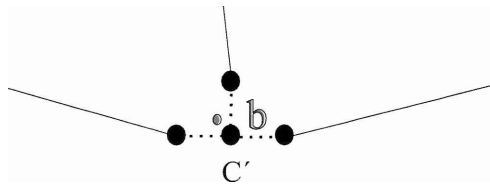


Figura 8.12:

Luego b sería un simplicial de $G-a-s$ (Figura 8.12), pero como no está en C_s ni en C_a en T'' , se tiene que b es simplicial esencial de G lo cual

es un absurdo pues G es compacto. □

Proposición 8.3.2 *En T'' existen C' -caminos sin s -aristas.*

Demostración: Si no fuera así, consideramos de cada C' -camino la primera s -arista, de todas ellas sea $e = AB$ una s -arista de T'' que está a mayor distancia de C' en T'' , por la Proposición 8.3.1, esa distancia es mayor estricta que 0 y sea A el extremo de e , más próximo a C' en T'' . Es claro que A debe estar separado por un vértice no simplicial de $G - a - s$ ya que los únicos posibles simpliciales esenciales que pueden haberse generado están en C' , por ello el grado de A es mayor a 2 en T'' . Luego si x es un separador de A en dirección a las hojas de T'' ; x debe cubrir al menos una arista e' incidente en A (Figura 8.13).

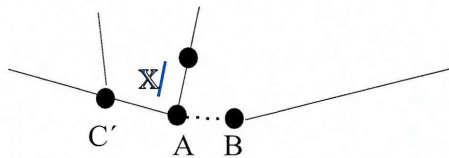


Figura 8.13:

Dado que e fue elegida como la primera arista a mayor distancia resulta que no hay otra s -arista sobre el C' -camino que tiene a e' y a A , lo cual es un absurdo. □

La siguiente proposición muestra las características de los C' -caminos sin s -aristas.

Proposición 8.3.3 *Toda arista de un C' -camino sin s -aristas está cubierta por un vecino de s .*

Demostración:

Supongamos que no vale y sea $e_1 = A_1B_1$ la primera arista de un C' -camino sin s -aristas no cubierta por un vecino de s . Observar que si A_1 es el extremo más próximo a C' entonces A_1 tiene a un vecino de s .

Sea T_1'' la componente conexa de $T'' - e_1$ que tiene a A_1 y e_2, \dots, e_k las s -aristas de T_1'' . Por T_2'' notaremos a la otra componente conexa (Figura 8.14).

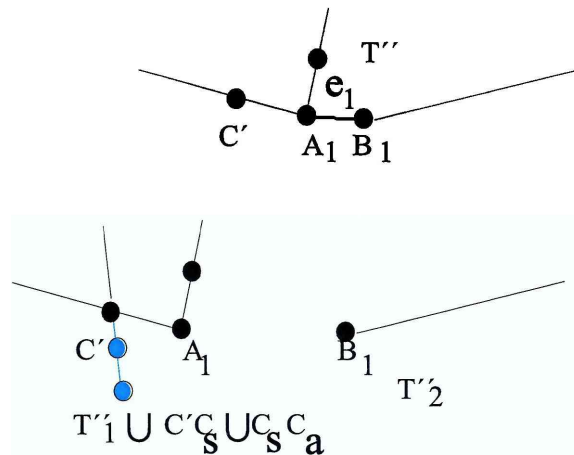


Figura 8.14:

Consideramos $T_1'' \cup C's \cup C'sC_a$, es un árbol clique de un subgrafo de G que es UV , sea T_1' un UV -árbol clique de ese subgrafo, claramente C_a es hoja pues G es compacto y C_s es incidente en C_a en T_1' , pues $|C_a \cap C_s| = 1$ (Figura 8.15).

Sean e_2^*, \dots, e_k^* las s -aristas de T_1' equivalentes a e_2, \dots, e_k respectivamente y $e^* = A^*B^*$ la arista equivalente a C_sC' , recordar que e^* está cubierta por

$N(s) - \{a\}$.

Es claro que C' y A_1 deben estar en la misma componente conexa de $T'_1 - \{e^*, e_2^*, \dots, e_k^*\}$.

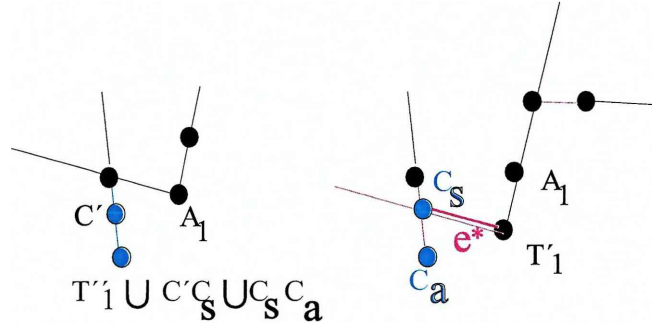


Figura 8.15:

Sean $\tilde{T}'_2, \tilde{T}'_1$ las componentes conexas de $T'_1 - \{e^*\}$ siendo \tilde{T}'_1 la que tiene a C' y A_1 , si en ese árbol clique no hay s -aristas consideramos el árbol clique $\tilde{T}'_1 \cup A_1 B_1 \cup T''_2 \cup e^*$, la única arista cubierta sólo por vecinos de s es e^* , luego si A_e es el extremo de e^* que está en \tilde{T}'_2 resulta que es hoja de cualquier árbol clique en particular de un UV -árbol clique T^* , se construye un UV -árbol clique de G así: $T^* \cup \tilde{T}'_2$.

Ahora analizamos el caso que en \tilde{T}'_1 existieran s -aristas, $e'_i = A'_i B'_i$, sea \tilde{T}'_3 la componente conexa de $\tilde{T}'_1 - \{s\}$ -aristas que tiene a C' y A_1 .

Como e^* está cubierta por todos los vecinos de s y $A_1 B_1$ no está cubierta por ningún vecino de s se tiene que en $G_{\tilde{T}'_3 \cup A_1 B_1 \cup T''_2 \cup e^*}$, todos los cubridores de e'_i son gemelos para cada i . Sea T^* un UV -árbol clique de $G_{\tilde{T}'_3 \cup A_1 B_1 \cup T''_2 \cup e^*}$.

Observar que dado que e^* es la única s -arista de $\tilde{T}'_3 \cup A_1 B_1 \cup T''_2 \cup e^*$ y G es compacto, A_e es hoja de T^* . Luego se deduce que para cada i fijo, los cubridores de e'_i se representan en T^* con los mismos extremos. Además

uno de esos extremos es A_e . Sea A_i el otro extremo en T^* , se construye el árbol clique $T^* \cup \tilde{T}'_2 \cup \bigcup_{i=2}^k (A_i B'_i \cup T_i^*)$, siendo T_i^* la componente conexa de $\tilde{T}'_1 - \{s\text{-aristas}\}$ que tiene a B'_i . Resulta un UV -árbol clique de G . Absurdo. \square

La proposición anterior se generaliza a todas las aristas de T'' .

Proposición 8.3.4 *Toda arista de T'' está cubierta por un vecino de s .*

Demostración:

Supongamos que hay al menos 1 arista de T'' no cubierta por un vecino de s .

De la proposición anterior sabemos que toda arista de un C' -camino sin s -aristas está cubierta por un vecino de s . Luego una arista no cubierta por un vecino de s debe ser arista de un C' -camino con s -aristas.

Sea P un C' camino con s -aristas y $e = A_1 B_1$ la primera arista de P no cubierta por vecinos de s .

Consideramos las componentes conexas T''_1 y T''_2 de $T'' - e$ siendo T''_1 la que tiene a A_1 .

Sea $T'_1 = T''_1 \cup C' C_s \cup C_s C_a$, T'_1 es un árbol clique de un subgrafo de G , luego existe \tilde{T}'_1 un UV -árbol clique en el cual C_a es hoja pues G es compacto.

Ahora consideramos $\tilde{T}'_1 - \{s\text{-aristas}\}$ y sea \tilde{T}_1 la componente conexa que tiene a A_1 .

Observar que A_1 y C' no están en la misma componente conexa pues no existen caminos por no vecinos de s entre vértices de A_1 y C' .

Sean e_1, \dots, e_l las s -aristas incidentes en \tilde{T}_1 y e_1 la más próxima a C' .

Para cada $i \neq 1$ los cubridores de e_i se dirigen hacia C' luego cubren a e_1 y resultan entonces vértices gemelos de $G_{\tilde{T}_1}$.

Sea $\tilde{T}_o = \tilde{T}_1 \cup B_1A_1 \cup T_2'' \cup e_1$ y sea X el extremo de e_1 que no está en \tilde{T}_1 . Claramente X es hoja de todo árbol clique de $G_{\tilde{T}_o}$, sea T_o un UV -árbol clique de $G_{\tilde{T}_o}$.

Observar que en $G_{\tilde{T}_o}$ para cada $i \neq 1$ los cubridores de e_i siguen siendo vértices gemelos pues la arista A_1B_1 no está cubierta por vecinos de s por hipótesis.

Luego puede construirse T un UV -árbol clique para $G_{T_o \cup \bigcup_{k=2}^l e_k \cup \bigcup_{k=2}^l T_k^*}$ siendo T_k^* los subárboles de \tilde{T}_1' que tienen a e_k y cuya intersección con \tilde{T}_1 es sólo un vértice para $k = 2, \dots, l$.

Ahora se construye un árbol a partir de T y \tilde{T}_2 observar que X es hoja de T y $T \cap \tilde{T}_2 = \{X\}$. Resulta $T \cup \tilde{T}_2$ un UV -árbol clique de G . \square

Proposición 8.3.5 *e, e' dos s -aristas que tienen los mismos cubridores. Entonces e y e' están en distintos C' -caminos.*

Demostración:

$T = T'' \cup C'C_s \cup C_sC_a$ es un árbol clique de G grafo compacto. Luego e y e' son aristas de G con el mismo conjunto de cubridores entonces por la Proposición 8.1.2, e, e' son incidentes en un vértice X de T y el grado de X es mayor o igual a 3. Si $X = C'$ queda probado.

Si $X \neq C'$ entonces como el grado de X en T'' es mayor o igual a 3 existe una arista e'' incidiendo en X pero por la Proposición 8.3.4, e'' está cubierta por un vecino v de s (Figura 8.16).

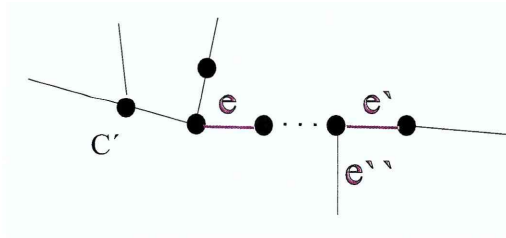


Figura 8.16:

Como C' tiene a todos los vecinos de s , se tiene que v cubre a e , luego como e y e' tienen los mismos cubridores, v resulta un claw de T'' , absurdo. \square

Proposición 8.3.6 Sean e y e' s -aristas de un C' -camino de T'' siendo e la más cercana a C' . Entonces existe un vecino de s que cubre a e y no a e' .

Demostración:

Aplicar la Proposición 8.3.5. \square

Proposición 8.3.7 Sean e y e' s -aristas de un C' -camino de T'' , siendo e la más cercana a C' , B el extremo de e' más lejano a C' , T_1'' el máximo subárbol de T'' que tiene a C' tal que B es hoja de T_1'' . Si b es separador de B en dirección a la hojas de T'' . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $G_{T_1''} - N[b]$ es conexo.
2. No existen s -aristas en T_1'' cubiertas sólo por los cubridores de e' .

Demostración: Trivial \square

Proposición 8.3.8 *En T'' no hay 2 aristas e, e' cuyos cubridores sean exactamente los vértices del conjunto $C' \cap C_s$.*

Demostración:

Supongamos que existen e y e' en T'' cuyo conjunto de cubridores es $C' \cap C_s$. Por la Proposición 8.3.5 ambas aristas deben incidir en C' . Ahora bien C' no puede estar separado por un vértice simplicial pues si así fuera ese vértice es vecino de s con lo cual debe estar en $C' \cap C_s$, lo que es un absurdo. Luego debe existir una arista e_1 incidiendo en C' tal que un separador de C' en dirección a las hojas cubre a e_1 . Por la Proposición 8.3.4, e_1 debe estar cubierta por un vecino v de s que en particular está en $C' \cap C_s$ y por ello cubre a e y a e' . Luego v es un claw de T'' lo cual es un absurdo.

□

Vértices pasantes por C'

Proposición 8.3.9 *Si T'' tiene al menos 2 s -aristas y e es s -arista no cubierta por vecinos de a entonces existe e' s -arista y $v \in N(s)$ cubriendo a e y a e' .*

Demostración:

Sea T''_1 la componente conexa de $T'' - e$ que tiene a C' y T''_2 la otra componente conexa que tienen al extremo de e más lejano a C' , notemos dicho extremo con B .

Observar que si e_1, \dots, e_r son s -aristas de T'' distintas de e , y alguna estuviera en T''_2 , el resultado quedaría probado.

Luego supongamos que todas las s -aristas están en T_1'' y que ninguna comparte un cubridor vecino de s con e .

Consideramos \tilde{T}_1' un UV -árbol clique de $G_{T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a}$. Claramente por ser G compacto C_a es hoja de \tilde{T}_1' , además $C_a C_s \in E(\tilde{T}_1')$.

Las aristas de \tilde{T}_1' incidentes en C_s están cubiertas por vecinos de s y sólo por vecinos de s . Además, por lo supuesto, la única arista cubierta sólo por vecinos de s que tiene a los cubridores de e es la equivalente a $C' C_s$.

Como por hipótesis e no está cubierta por vecinos de a , en \tilde{T}_1' los cubridores de e tienen un extremo común C_s . Luego es posible construir un UV -árbol clique de G como sigue: $\tilde{T}_1' \cup C_s B \cup T_2''$. \square

Proposición 8.3.10 *Sea e una arista de un C' -camino sin s -aristas entonces existe una s -arista e' y $v \in N(s)$ tal que v cubre a e y a e' .*

Demostración:

Supongamos que no vale la proposición. Sea $e = AB$ tal que para ninguna s -arista e_1, \dots, e_k , existe $v \in N(s)$ que cubra a e y e_i .

Sea T_1'' la componente conexa de $T'' - \{e\}$ que tiene a A y C' ; T_2'' la otra componente.

Consideremos un UV -árbol clique \tilde{T}_1' de $G_{T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a}$, claramente tiene a C_a como hoja.

Sea \tilde{e} la arista equivalente a $C' C_s$ y T_1 la componente conexa de $\tilde{T}_1' - \tilde{e}$ que tiene a C' y A y T_2 la otra componente. Si no existen s -aristas en T_1 , sea $T_1 \cup \tilde{e} \cup T_2''$, el extremo de \tilde{e} más lejano a C' es hoja de $T_1 \cup \tilde{e} \cup T_2''$, sea \tilde{B} ese extremo. Consideramos un UV -árbol clique T_o de $G_{T_1 \cup \tilde{e} \cup T_2''}$ y construimos un UV -árbol clique de G así: $T_o \cup T_2$.

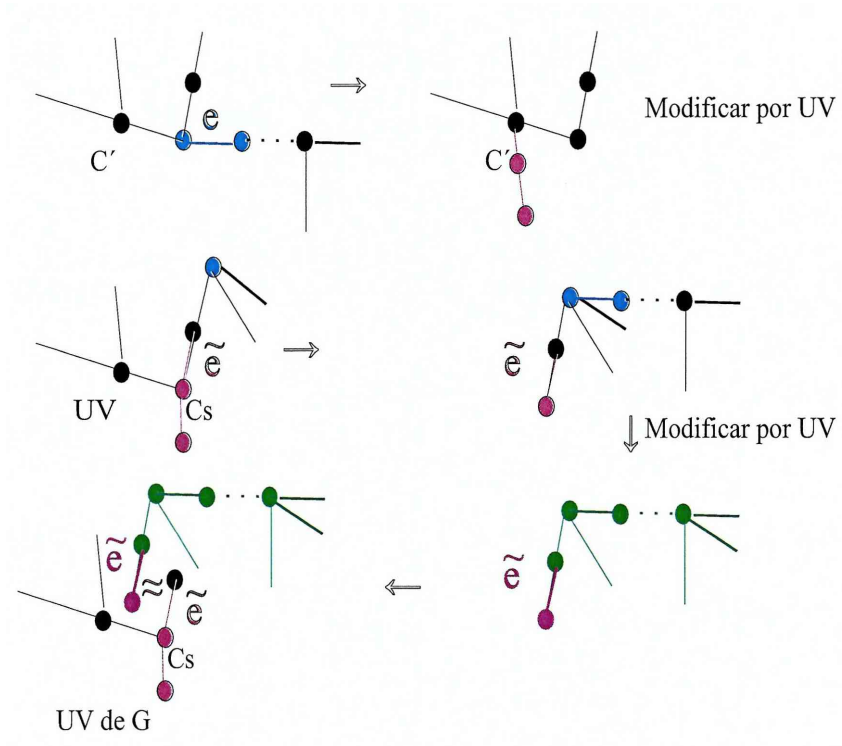


Figura 8.17:

Ahora analizamos el caso que en \tilde{T}'_1 existieran s -aristas, $e'_i = A'_i B'_i$, sea \tilde{T}'_3 la componente conexa de $\tilde{T}'_1 - \{s\text{-aristas}\}$ que tiene a C' y A .

Para cada i , los cubridores de e'_i no cubren a la arista AB por hipótesis, sea T^* un UV -árbol clique de $G_{\tilde{T}'_3 \cup AB \cup T''_2 \cup \tilde{e}}$.

Observar que dado que \tilde{e} es la única s -arista de $\tilde{T}'_3 \cup AB \cup T''_2 \cup \tilde{e}$ y G es compacto, \tilde{B} es hoja de T^* . Luego se deduce que para cada i fijo, los cubridores de e'_i se representan en T^* con los mismos extremos. Además uno de esos extremos es \tilde{B} . Sea A_i el otro extremo en T^* , se construye el árbol clique $T^* \cup T_2 \cup \bigcup_{i=2}^k (A_i B'_i \cup T_i^*)$, siendo T_i^* la componente conexa de $\tilde{T}'_1 - \{s\text{-aristas}\}$ que tiene a B'_i . Resulta un UV -árbol clique de G (Figura

8.17). Absurdo. □

Se dice que e es una *s-arista minimal* si para toda otra *s-arista* los cubridores no son comparables o el conjunto de cubridores de e está contenido en los cubridores de otra *s-arista*. *s-arista minimal*

Proposición 8.3.11 *Si e_1 es una s-arista minimal y no hay otra s-arista que tenga el mismo conjunto de cubridores que e_1 entonces e_1 es hoja de T'' .*

Demostración:

Supongamos que $e_1 = A_1B_1$ no es hoja de T'' . Luego sea T_1'' el mayor subárbol de T'' que tiene a e_1 como hoja y C' como vértice interior y sea T_2'' el otro subárbol tal que $T'' = T_1'' \cup T_2''$. Sea b_1 un simplicial separador de B_1 en T_1'' .

Por ser e_1 minimal es claro que $G_{T_1''} - N[b_1]$ es conexo, luego B_1 es hoja de cualquier árbol clique de $G_{T_1''}$.

Consideramos $T_1'' \cup C'C_s \cup C_sC_a$ por la Proposición 8.3.8 e_1 y $C'C_s$ no tienen los mismo cubridores. Por ello, $G_{T_1'' \cup C'C_s \cup C_sC_a} - N[b_1]$ es conexo, sea T_1 un *UV*-árbol clique de $G_{T_1'' \cup C'C_s \cup C_sC_a}$, claramente B_1 es hoja de T_1 y $T_1 \cup T_2''$ es un *UV*-árbol clique de G , lo cual es un absurdo. □

Proposición 8.3.12 *Si el conjunto de cubridores de dos s-aristas es el mismo, no pueden ser aristas pendientes de T'' .*

Demostración: Por la Proposición 8.3.5, las aristas están en distintos *C'*-caminos, si ambas fuesen aristas pendientes de T'' , sea B_1, B_2 la hojas de T''

que inciden en dichas aristas. Si b_1 y b_2 son simpliciales separadores de B_1, B_2 respectivamente es evidente que son vértices gemelos, lo cual es un absurdo.

□

Construcción y etiquetación de Π .

Si bien la construcción de Π es misma a la dada en el capítulo anterior, la recordamos aquí para facilidad del lector (Figura 8.18).

T'' un UV -árbol clique de $G - a - s$ y

C' un clique de $G - a - s$ conteniendo a $N(s)$ excepto a a .

Para todo P , C' -camino de T'' ,:

1. Si P tiene una s -arista, se toma la s -arista que se encuentre a menor distancia de C' en T'' .
2. Si P no tiene ninguna s -arista, se toma si existe una e arista de P cumpliendo:
 - a) e es la primera arista de P que no está en un C' -camino con s -aristas,
 - b) e está cubierta por vecinos y no vecinos de s .

Sean e_1, \dots, e_r las aristas de T'' elegidas anteriormente.

$V(\Pi) = \{e_i\}_{i=1, \dots, r}$;

$E(\Pi) = \{e_i e_j, \text{ si existe } v \in N(s); v \text{ cubre a } e_i \text{ y } e_j\}$.

Procedemos a etiquetar algunos vértices de Π :



- Los vértices e_i de Π definidos en 1, se etiquetan de la siguiente manera:
 - Si para cada e_j tal que $e_i e_j \in E(\Pi)$ existe un $w \in N(s)$ cubriendo e_i que no cubre a ninguno de los extremos de e_j entonces e_i se etiqueta con 2.
 - Si para cada e_j tal que $e_i e_j \in E(\Pi)$ existe un $w \in N(a)$ cubriendo e_i que cubre a sólo un extremo de e_j ; e_i se etiqueta con 2^* .
- Los vértices e_i de Π definidos en 2 se etiquetan con 1,

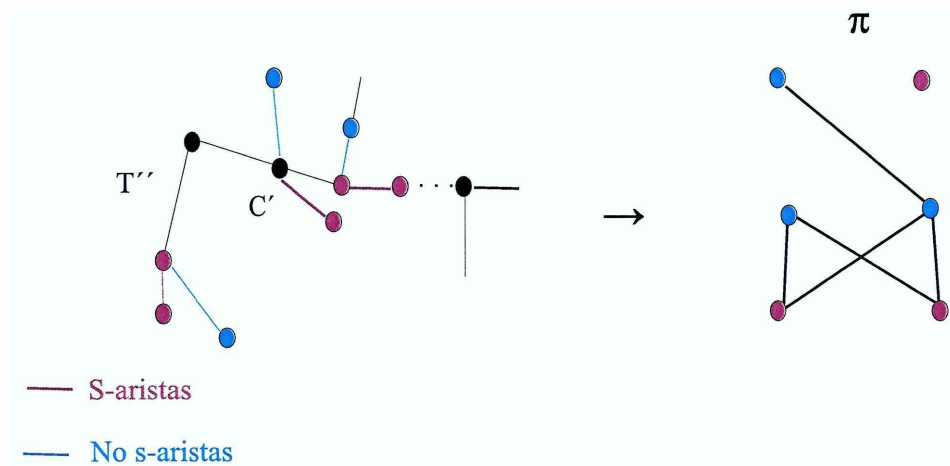


Figura 8.18:

La Proposición 8.3.10 nos garantiza que, como en el capítulo anterior, cada uno de los vértices etiquetados con 1, es adyacente a uno correspondiente a una s -arista.

Esto nos permite afirmar que si existe un camino de longitud 1 en Π entre dos vértices etiquetados con 1 entonces $G - a$ tiene a un prohibido UV , contradiciendo la minimalidad de G como grafo no UV .

Por otro lado, también por la minimalidad de G como grafo no UV podemos afirmar que no existen caminos impares, de longitud mayor a 1, entre dos vértices etiquetados con 1.

Veamos algunas propiedades de Π .

Proposición 8.3.13 *Si e_1 es una s -arista interna de T'' entonces en la componente conexa de Π que tiene a e_1 no hay otra s -arista.*

Demostración:

Supongamos que existe otra s -arista e_l en la misma componente conexa de Π que tiene a e_1 .

Sea P un camino de Π entre e_1 y e_l , analizamos varios casos.

1. $l \geq 3$. Sea T_1'' la componente conexa de $T'' - e_l$ que tiene a C' y T_2'' la otra componente.

Consideramos $T_1'' \cup C' \cup C_s \cup C_a$ y sea \tilde{T}_1 un UV -árbol clique de $G_{T_1'' \cup C' \cup C_s \cup C_a}$, $\tilde{e}_1 = \tilde{A}_1 \tilde{B}_1$ la arista de \tilde{T}_1 equivalente a e_1 . Claramente \tilde{e}_1 no puede ser arista pendiente de \tilde{T}_1 pues si lo fuera e_1 sería una arista pendiente de T'' lo cual es un absurdo.

Sea \tilde{T}_{11} el mayor subárbol de \tilde{T}_1 que tiene como hoja a \tilde{B}_1 y como vértice interior a C' y sea \tilde{T}_{12} tal que $\tilde{T}_{11} \cup \tilde{T}_{12} = \tilde{T}_1$. Notamos por \tilde{b}_1 un separador de \tilde{B}_1 en dirección a las hojas, clarametne \tilde{b}_1 es simplicial de \tilde{T}_{11} .

Si $G_{\tilde{T}_{11}} - N[\tilde{b}_1]$ es conexo, \tilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de G . Sea $\bar{T} = \tilde{T}_{11} \cup A_l B_l \cup T_2''$, e_1 y e_l no pueden compartir cubridores pues P es un camino y $l \geq 3$, por ello \tilde{B}_1 es hoja de todo árbol clique

de $G_{\overline{T}}$, sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\overline{T}}$, es fácil verificar que $T_0 \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

Si $G_{\overline{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ no es conexo, existen s -aristas de \widetilde{T}_{11} cuyo conjunto de cubridores está contenido en el conjunto de cubridores de \widetilde{e}_1 . Ninguna de esas s -aristas comparte cubridores con e_l pues P es un camino y $l \geq 3$.

Consideramos entonces $\Omega = \{\overline{e}_i = \overline{A_i B_i} | s\text{-aristas } \widetilde{T}_{11} \text{ cub}(\overline{e}_i) \subset \text{cub}(\widetilde{e}_1)\}$. Sean $\overline{T}_0, \overline{T}_1, \dots, \overline{T}_h$ las componentes conexas de $\widetilde{T}_{11} - \Omega$ siendo \overline{T}_0 la que tiene a C' . Observar que A_i es un vértice de \overline{T}_0 . Claramente \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de $G_{\overline{T}_0}$. Por otro lado, para cada $\overline{e}_i \in \Omega$, los cubridores de \overline{e}_i son gemelos en $G_{\overline{T}_0}$. Como las aristas de Ω no comparten cubridores con e_l , los cubridores de \overline{e}_i son gemelos en $G_{\overline{T}_0 \cup A_i B_i \cup T_2''}$. Sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\overline{T}_0 \cup A_i B_i \cup T_2''}$, observar que los cubridores de cada \overline{e}_i por ser gemelos tienen extremos \widetilde{B}_1, X_i . Es fácil verificar que $T = T_0 \cup \bigcup_i (X_i B_i \cup T_i) \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

2. $l = 2$

Por la Proposición 8.3.2, sabemos que en T'' existen C' -caminos sin s -aristas, además por la Proposición 8.3.4, cada arista de T'' está cubierta por un vecino de s , luego por la construcción de Π existe un vértice e_3 que tiene etiqueta 1.

Puden presentarse entonces las siguientes situaciones a analizar:

- a) $e_1 e_2 e_3$ sea un camino de Π .

Nuevamente, sea T_1'' la componente conexa de $T'' - e_3$ que tiene a C' y T_2'' la otra componente.

Consideramos $T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a$ y sea \widetilde{T}_1 un UV -árbol clique de $G_{T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a}$, $\widetilde{e}_1 = \widetilde{A}_1 \widetilde{B}_1$ la arista de \widetilde{T}_1 equivalente a e_1 . Claramente \widetilde{e}_1 no puede ser arista pendiente de \widetilde{T}_1 pues si lo fuera e_1 sería una arista pendiente de T'' lo cual es un absurdo.

Sea \widetilde{T}_{11} el mayor subárbol de \widetilde{T}_1 que tiene como hoja a \widetilde{B}_1 y como vértice interior a C' y sea \widetilde{T}_{12} tal que $\widetilde{T}_{11} \cup \widetilde{T}_{12} = \widetilde{T}_1$. Notamos por \widetilde{b}_1 un separador de \widetilde{B}_1 en dirección a las hojas, clarametne \widetilde{b}_1 es simplicial de \widetilde{T}_{11} .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ es conexo, \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de G . Sea $\overline{T} = \widetilde{T}_{11} \cup A_3 B_3 \cup T_2''$, e_1 y e_3 no pueden compartir cubridores pues caso contrario en Π existiría un ciclo impar e_1, e_2, e_3, e_1 , por ello \widetilde{B}_1 es hoja de todo árbol clique de $G_{\overline{T}}$, sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\overline{T}}$, es fácil verificar que $T_0 \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ no es conexo, existen s -aristas de \widetilde{T}_{11} cuyo conjunto de cubridores está contenido en el conjunto de cubridores de \widetilde{e}_1 . Ninguna de esas s -aristas comparte cubridores con e_3 pues nuevamente se tendría un ciclo impar en Π .

Consideramos entonces $\Omega = \{\overline{e}_i = \overline{A_i B_i} | s\text{-aristas } \widetilde{T}_{11} \text{ cub}(\overline{e}_i) \subset \text{cub}(\widetilde{e}_1)\}$. Sean $\overline{T}_0, \overline{T}_1, \dots, \overline{T}_h$ las componentes conexas de $\widetilde{T}_{11} - \Omega$ siendo \overline{T}_0 la que tiene a C' . Observar que A_3 es un vértice de \overline{T}_0 . Claramente \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de $G_{\overline{T}_0}$. Por otro lado, para cada $\overline{e}_i \in \Omega$, los cubridores de \overline{e}_i son gemelos

en $G_{\widetilde{T}_0}$. Como las aristas de Ω no comparten cubridores con e_l , los cubridores de \bar{e}_i son gemelos en $G_{\widetilde{T}_0 \cup A_3 B_3 \cup T_2''}$. Sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\widetilde{T}_0 \cup A_3 B_3 \cup T_2''}$, observar que los cubridores de cada \bar{e}_i por ser gemelos tienen extremos \widetilde{B}_1, X_i . Es fácil verificar que $T = T_0 \cup \bigcup_i (X_i B_i \cup T_i) \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

b) e_3, e_1, e_2 es un camino de Π .

Por lo estudiado en los casos previos es claro que no hay s -aristas e_4 tal que e_1, e_2, e_4 es un camino de Π pues puede aplicarse el razonamiento empleado en el caso $l = 3$, también no puede haber otro vértice e_4 con etiqueta 1 de Π tal que $e_1 e_2 e_4$ sea camino de Π pues es el caso anterior. Por ello, e_2 es una s -arista minimal con lo cual es arista pendiente de T'' .

Sea T_1'' la componente conexa de $T'' - e_3$ que tiene a C' y T_2'' la otra componente.

Consideramos $T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a$ y sea \widetilde{T}_1 un UV -árbol clique de $G_{T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a}$, $\tilde{e}_1 = \widetilde{A}_1 \widetilde{B}_1$ la arista de \widetilde{T}_1 equivalente a e_1 . Claramente \tilde{e}_1 no puede ser arista pendiente de \widetilde{T}_1 pues si lo fuera e_1 sería una arista pendiente de T'' lo cual es un absurdo. Observar que por lo que se mencionó al comienzo, la arista \tilde{e}_2 equivalente a e_2 es una arista pendiente de \widetilde{T}_1 .

Sea \widetilde{T}_{11} el mayor subárbol de \widetilde{T}_1 que tiene como hoja a \widetilde{B}_1 y como vértice interior a C' y sea \widetilde{T}_{12} tal que $\widetilde{T}_{11} \cup \widetilde{T}_{12} = \widetilde{T}_1$. Notamos por \tilde{b}_1 un separador de \widetilde{B}_1 en dirección a las hojas, claramente \tilde{b}_1 es simplicial de \widetilde{T}_{11} .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\tilde{b}_1]$ es conexo, \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique

de G . Sea $\bar{T} = \widetilde{T}_{11} \cup A_3 B_3 \cup T_2''$, como T_2'' no tiene s -aristas y e_3 no es s -arista \widetilde{B}_1 es hoja de todo árbol clique de $G_{\bar{T}}$, sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\bar{T}}$, es fácil verificar que $T_0 \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ no es conexo, existen s -aristas de \widetilde{T}_{11} cuyo conjunto de cubridores está contenido en el conjunto de cubridores de \widetilde{e}_1 .

Si alguna arista e compartiera cubridores con e_3 debe estar en un mismo C' -camino que tiene a e_1 caso contrario se tiene un ciclo impar en Π dado por e_3, e_1, e, e_3 .

Los vértices de T'' que están en \overline{T}_1'' subárbol de T'' que tiene a e_1 como arista pendiente y no tiene a C' se ubican en \widetilde{T}_{12} pues no pueden estar en la misma componente conexa que C' y se conectan con vértices de C' a través de una arista equivalente a e_1 .

Por ello ninguna arista e comparte cubridores con e_3 . Se sigue del razonamiento empleado cuando $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ es conexo.

c) e_3 no es adyacente ni a e_1 ni a e_2

sea T_1''' la componente conexa de $T''' - e_3$ que tiene a C' y T_2''' la otra componente.

Consideramos $T_1''' \cup C' C_s \cup C_s C_a$ y sea \widetilde{T}_1 un UV -árbol clique de $G_{T_1''' \cup C' C_s \cup C_s C_a}$, $\widetilde{e}_1 = \widetilde{A}_1 \widetilde{B}_1$ la arista de \widetilde{T}_1 equivalente a e_1 . Claramente \widetilde{e}_1 no puede ser arista pendiente de \widetilde{T}_1 pues si lo fuera e_1 sería una arista pendiente de T'' lo cual es un absurdo.

Sea \widetilde{T}_{11} el mayor subárbol de \widetilde{T}_1 que tiene como hoja a \widetilde{B}_1 y como vértice interior a C' y sea \widetilde{T}_{12} tal que $\widetilde{T}_{11} \cup \widetilde{T}_{12} = \widetilde{T}_1$. Notamos por \widetilde{b}_1 un separador de \widetilde{B}_1 en dirección a las hojas, clarametne \widetilde{b}_1 es

simplicial de \widetilde{T}_{11} .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ es conexo, \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de G . Sea $\overline{T} = \widetilde{T}_{11} \cup A_3 B_3 \cup T_2''$, como T_2'' no tiene s -aristas y e_3 no es s -arista \widetilde{B}_1 es hoja de todo árbol clique de $G_{\overline{T}}$, sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\overline{T}}$, es fácil verificar que $T_0 \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

Si $G_{\widetilde{T}_{11}} - N[\widetilde{b}_1]$ no es conexo, existen s -aristas de \widetilde{T}_{11} cuyo conjunto de cubridores está contenido en el conjunto de cubridores de \widetilde{e}_1 . Ninguna de esas s -aristas comparte cubridores con e_3 por lo supuesto.

Consideramos entonces $\Omega = \{\overline{e}_i = \overline{A_i B_i} | s\text{-aristas } \widetilde{T}_{11} \text{ cub}(\overline{e}_i) \subset \text{cub}(\widetilde{e}_1)\}$. Sean $\overline{T}_0, \overline{T}_1, \dots, \overline{T}_h$ las componentes conexas de $\widetilde{T}_{11} - \Omega$ siendo \overline{T}_0 la que tiene a C' . Observar que A_3 es un vértice de \overline{T}_0 . Claramente \widetilde{B}_1 es pendiente de cualquier árbol clique de $G_{\overline{T}_0}$. Por otro lado, para cada $\overline{e}_i \in \Omega$, los cubridores de \overline{e}_i son gemelos en $G_{\overline{T}_0}$. Como las aristas de Ω no comparten cubridores con e_i , los cubridores de \overline{e}_i son gemelos en $G_{\overline{T}_0 \cup A_3 B_3 \cup T_2''}$. Sea T_0 un UV -árbol clique de $G_{\overline{T}_0 \cup A_3 B_3 \cup T_2''}$, observar que los cubridores de cada \overline{e}_i por ser gemelos tienen extremos \widetilde{B}_1, X_i . Es fácil verificar que $T = T_0 \cup \bigcup_i (X_i B_i \cup T_i) \cup \widetilde{T}_{12}$ es un UV -árbol clique de G .

□

Como consecuencia de la Proposición anterior, se tiene el siguiente resultado

Proposición 8.3.14 *No hay dos s -aristas en un mismo C' camino de T'' .*

El grafo auxiliar Π que se construyó para $G-a-s$ difiere del construido en el capítulo anterior respecto de la etiquetación. En el estudio actual, además de las aristas cubiertas sólo por vecinos de s , deben también considerarse aquellas cubiertas por vecinos de a .

Estudio de vecinos de a

Observar que como G no es un grafo UV minimal, en ningún UV -árbol clique de $G-a$, C_s puede ser hoja. Tampoco puede ocurrir que todos los vecinos de a tengan a C_s como uno de sus extremos. En ambos casos podría construirse un UV -árbol clique de G .

Por otro lado, si un vecino v de a estuviera en 2 hojas de un UV -árbol clique de $G-a$, entonces v sería adyacente a 3 simpliciales de G . Dado que G es compacto, dichos simpliciales forman una tripla de G por el Corolario 5.2.2 y v es un vértice universal de la tripla por lo cual G tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal como subgrafo inducido.

Teorema 8.3.1 *G un grafo cordal con un vértice universal. G es no UV si y sólo si G tiene como subgrafo inducido a uno de los grafos de la Figura 8.3*

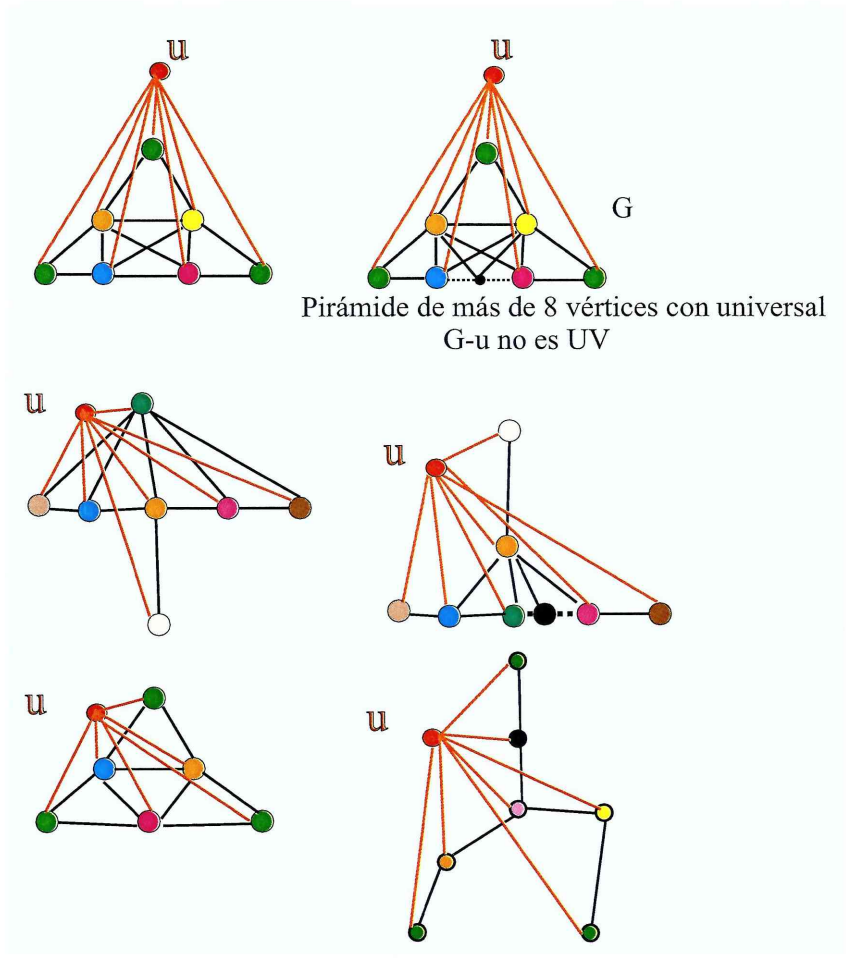


Figura 8.19: No UV con vértice universal

Podemos suponer entonces que no existe un vecino de a en 2 hojas de ningún UV -árbol clique de $G - a$. Dado que C_s no puede ser hoja de ningún UV -árbol clique de $G - a$, C' no puede ser hoja de T'' . Por esto, podemos asumir que no hay dos hojas de T'' cubiertas por un vecino de a .

Como en el capítulo anterior, dado que $G - a$ es un grafo UV es posible construir a partir del grafo auxiliar Π , un UV -árbol clique de $G - a$. Recordamos aquí, esa construcción.

Como en Π no existen caminos impares entre dos vértices etiquetados con 1, ni caminos pares entre un vértice etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2, ni caminos impares entre dos vértices etiquetados con 2, Π posee una bipartición (A, B) con todos los vértices etiquetados con 1 en A y todos los vértices etiquetados con 2 en B . Recordar que en el capítulo anterior se probó que los vértices de B son aristas de T'' que inciden en el mismo vértice A' .

Sea T_0 la componente conexa de $T'' - \{s\text{-aristas} : e_i = A_i B_i\}$ que tiene a C' y T_i las otras componentes. Consideramos \tilde{T} un UV -árbol clique de $G_{T_0 \cup C' \cup C_s}$. Claramente como $G_{\tilde{T}} - N[s]$ es conexo, C_s es hoja de \tilde{T} .

Para cada s -arista $e_i = A_i B_i$ de B , se une \tilde{T} al árbol T_i a través de la arista $C_s B_i$, es decir $\tilde{T} \cup C_s B_i \cup T_i$.

Para cada s -arista $e_i = A' B_i$ de A : si e_i es un vértice aislado de Π , se une \tilde{T} al árbol T_i a través de la arista $C_s B_i$, es decir $\tilde{T} \cup C_s B_i \cup T_i$. Si en cambio $e_i e_j$ es arista de Π , como se probó en el capítulo anterior los cubridores de e_i están contenidos en A' y resultan vértices gemelos en $G_{\tilde{T}}$ con extremos C_s y X_i en \tilde{T} , se une \tilde{T} al árbol T_i a través de la arista $X_i B_i$, es decir $\tilde{T} \cup X_i B_i \cup T_i$. Notemos por T_s a dicho árbol

En lo que sigue se verán propiedades de las aristas cubiertas por vecinos de a .

Proposición 8.3.15 *Existe una s -arista cubierta por un vecino de a .*

Demostración:

Supongamos que ningún vecino de a cubre a una s -arista.

Sea T_s un UV -árbol clique de $G - a$ construido anteriormente a partir de Π . Claramente C_s es un vértice interior de T_s y sólo una arista incidente en C_s tiene a todos los los vecinos de s , en particular esa arista tiene a todos los vecinos de a , el resto de las aristas incidentes son s -aristas de T'' que están en Π y por lo asumido no pueden estar cubiertas por vecinos de a , luego adicionando $C_s C_a$ se tiene un UV -árbol clique de G . \square

En la siguiente proposición se probará que no pueden existir dos s -aristas cubiertas por un mismo vecino de a .

Proposición 8.3.16 *Cada vecino de a cubre a lo sumo una y sólo una s -arista de T'' .*

Demostración:

Supongamos que existen e_1, e_2 s -aristas de T'' cubierta por $v \in N(a)$.

Por la Proposición 8.3.13, no pueden ser aristas internas de T'' . Luego son aristas pendientes de T'' con lo cual hay dos hojas de T'' cubiertas por un vecino de a .

\square

De la proposición anterior resulta claro que cada vecino de a cubre a una sola s -arista.

Proposición 8.3.17 *Sea e_1e_2 una arista de Π tal que existe un $v \in N(a)$ cubriendo a e_1 y e_2 . Luego o bien e_1 o bien e_2 es una s -arista de T'' . Más aún la s -arista es una arista pendiente de T'' .*

Demostración: Como en Π no hay caminos impares entre dos vértices etiquetados con 1, o bien e_1 o bien e_2 no tienen etiqueta 1. Supongamos que e_2 no tiene etiqueta 1. Luego e_2 es una s -arista de T'' . Por otro lado, por la Proposición 8.3.16, e_1 y e_2 no pueden ser s -aristas por ello e_1 tiene etiqueta 1. Si ambas son hojas, el resultado es válido. Supongamos que e_2 no es hoja, luego e_2 es una arista interna de T'' . Sea T_1'' el subárbol que tiene a e_2 como arista pendiente, a C' como vértice interior y sea T_2'' el otro subárbol tal que $T_2'' \cup T_1'' = T''$.

Notemos a B_2 la hoja de T_1'' incidente en e_2 . Consideramos $T_1'' \cup C'C_s \cup C_sC_a$. Por la Proposición 8.3.8, e_2 no tiene los mismo cubridores que $C'C_s$ y por la Proposición 8.3.2, no hay otras s -aristas cuyo conjunto de cubridores esté contenido en el conjunto de cubridores de e_2 . Por ambos motivos, B_2 es hoja de todo árbol clique de $G_{T_1'' \cup C'C_s \cup C_sC_a}$ en particular de \tilde{T}_1 un UV -árbol clique. Luego $\tilde{T}_1 \cup T_2''$ resultaría un UV -árbol clique de G lo cual es un absurdo. \square

Proposición 8.3.18 *Si una arista de Π está cubierta por un vecino de a entonces G es la pirámide generalizada (Figura 8.20).*

Demostración:

Sea e_1e_2 la arista de Π cubierta por un vecino v de a . Por la Proposición anterior, e_2 es una s -arista, además es una arista pendiente de T'' .

Si e_1 es una arista pendiente de T'' , existe un vecino de a cubriendo dos hojas de T'' .

Si en cambio e_1 no es una arista pendiente de T'' , analizamos dos casos, que en Π exista otro vértice o no.

1. Si existe otro vértice digamos e_3 , e_3 no puede ser vecino de e_2 pues en ese caso G tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal. Veamos esto último, sea B_1 el extremo de e_1 más lejano de C' y b_1 un separador de B_1 en dirección a las hoja, B_2 el extremo de e_2 y b_2 su vértice simplicial; como el conjunto de cubridores de e_2 no puede ser $C' \cap C_s$, existe un vecino de s que está en C' y no está en B_2 . Es fácil verificar que a, b_1, b_2 es un tripla y v es vértice universal de la tripla. Luego e_3 puede ser adyacente en Π a e_1 .

Si e_3 es adyacente o no a e_1 , se procede en ambos casos como sigue.

Sea T_1'' la componente conexa de $T'' - e_3$ que tiene a C' y T_2'' la otra componente. Consideramos $T_1'' \cup C' C_s \cup C_s C_a$ y \tilde{T}_1 un UV -árbol clique. En \tilde{T}_1 , \tilde{e}_2 es una arista pendiente al igual que $C_a C_s$ y como $v \in N(a)$ cubre a e_1 y e_2 , \tilde{e}_1 está en $T_1[\tilde{e}_2, C_a]$. Como e_2 es adyacente en Π sólo a e_1 , los cubridores de \tilde{e}_2 son los cubridores de $\tilde{T}_1[\tilde{e}_2, C_a] - \tilde{e}_2$ por ello en todo árbol clique de $G_{\tilde{T}_1 - \tilde{e}_2}$ se ubican en un mismo C_s camino. Debido a que e_3 y e_2 no comparten cubridores, los cubridores de \tilde{e}_2 tienen un mismo extremo en todo árbol clique de $G_{\tilde{T}_1 - \tilde{e}_2 \cup e_3 \cup T_2''}$, en particular

en un UV -árbol clique T_0 , sea X ese extremo. Luego $T_0 \cup XB_2$ es un UV -árbol clique de G .

2. Si en cambio no existe otro vértice en Π , podemos suponer que e_1 no es pendiente, sea Y el último vértice del C' -camino que tiene a e_1 cubierto por v , y y es separador de Y en dirección a las hojas, que claramente, cubre a una arista e incidente en Y . Si todo cubridor de e_2 excepto v no cubre a esa arista, deben tener como extremo a Y caso contrario, existe un prohibido de intervalos con un vértice universal. Más claramente, y, a, b_2 es una tripla y v es el vértice universal. Luego todos los cubridores de e_2 tendrían a Y como extremo y si consideramos \tilde{T}_1 un UV -árbol clique de $G_{T''-e_2 \cup C' \cup C_s \cup C_a}$ como la única s -arista es la equivalente a C'_s , los cubridores de e_2 tendrían el mismo extremo, digamos X , con lo cual $\tilde{T}_1 \cup XB_2$ es un UV -árbol clique de G .

Por ello, existe un z cubridor de e_2 que cubre a la arista e , sin perder generalidad podemos suponer que dicho cubridor no es vecino de a pues caso contrario es posible repetir el razonamiento previo.

Como $T'''[C', X]$ no son s -aristas, existe un cubrimiento por no vecinos de s ; sean y_1, \dots, y_k vértices cubriendo el camino tal que $\{y_{i-1}, y_i, y_{i+1}\}$ para $i \leq k - 1$ es un completo. Si W es el otro extremo de e , y w un separador de W en dirección a las hojas entonces el conjunto $\{a, s, v, w, b_2, z, y_1, \dots, y_k\}$ induce la pirámide generalizada de 8 o más vértices (Figura 8.20).

□



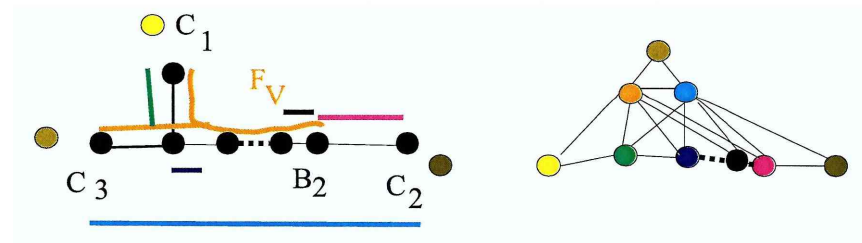


Figura 8.20:

Recordar que si e es una s -arista que es vértice de Π tal que todos los vecinos de a que la cubren, además cubren a los extremos de las aristas apareadas con e , se les asigna la etiqueta 2^* .

Construcción de prohibidos.

La siguiente proposición nos permite construir prohibidos para los grafos no UV minimales compactos con un vértice casi-simplicial en G .

Proposición 8.3.19 1. En Π existe sólo la arista e_1e_2 con e_1 y e_2 etiquetados con 1 y 2^* entonces G tiene como subgrafo inducido a los de las Figuras: 8.22($\beta_{3,3}$), 8.23, 8.24, 8.29, 8.30, pirámide generalizada de más de 8 vértices (Figura 8.20),

2. En Π existe un camino $P = e_1, \dots, e_{2k}$ ($k > 1$) con e_1 y e_2 etiquetados con 1 y 2^* entonces G tiene como subgrafo inducido a $\beta_{2k+1, 2k+1}$ (Figura 8.31).

Demostración:

1. A partir de Π se construye un UV -árbol clique \tilde{T} de $G - a$, como fue recordado previamente (Figura 8.21). En este caso, sean \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 las aristas

equivalentes a e_1 y e_2 respectivamente, por construcción \tilde{e}_2 será incidente en C_s , sea C^*C_s la s -arista incidente en C_s del C_s camino de \tilde{T} que tiene a \tilde{e}_1 .

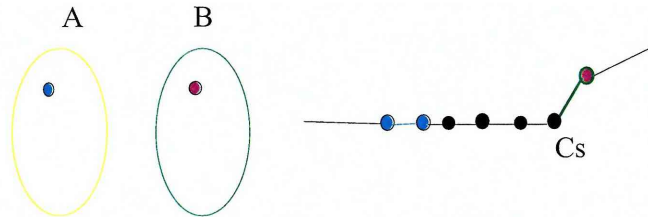


Figura 8.21:

Sabemos que e_1e_2 es arista de Π luego existe $v_1 \in N(s)$ cubriendo a \tilde{e}_1 y a \tilde{e}_2 .

Como $e_2 = A_2B_2$ tiene etiqueta 2^* existe un vecino de a cubriendo e_2 , sea w_2 .

Por otro lado, sea $\tilde{e}_1 = A_1B_1$ existen separadores de A_1 y B_1 , un separador de A_1 en dirección a las hojas es que cubre a \tilde{e}_1 es quien etiqueta a e_1 con 1, sea x_1 y notemos a b_1 un separador en dirección a las hojas de B_1 .

Analizamos 2 situaciones:

a) \tilde{B}_2 es hoja del UV -árbol clique de $G - a$.

Como ya se mencionó al comienzo, suponemos que los vecinos de a están en a lo sumo una hoja del UV -árbol clique pues caso contrario se tiene un prohibido de intervalos con un vértice universal.

Observar que $w_2 \in A_1 - B_1$; por ser \tilde{B}_2 hoja existe un cubridor de C^*C_s que no cubre a \tilde{B}_2 .

1) v_2 cubre a B_1 y sea b_2 el separador de \widetilde{B}_2 que es simplicial pues e_2 es hoja; se analizan las siguientes situaciones

a' $v_2 \in N(a)$, se tiene entonces $\{w_2, b_2, v_1\}$ es un completo; $\{v_2, w_2, s, a\}$ es un completo; $\{x_1, v_1, w_2, v_2\}$ es un completo, $\{s, v_2, v_1, w_2\}$ es un completo y $\{x_1, v_1, b_1, v_2\}$ es un completo. Luego G tiene como subgrafo al inducido por los vértices $\{a, b_1, b_2, v_1, v_2, x_1, s, w_2\}$ que no es UV (Figura 8.22).

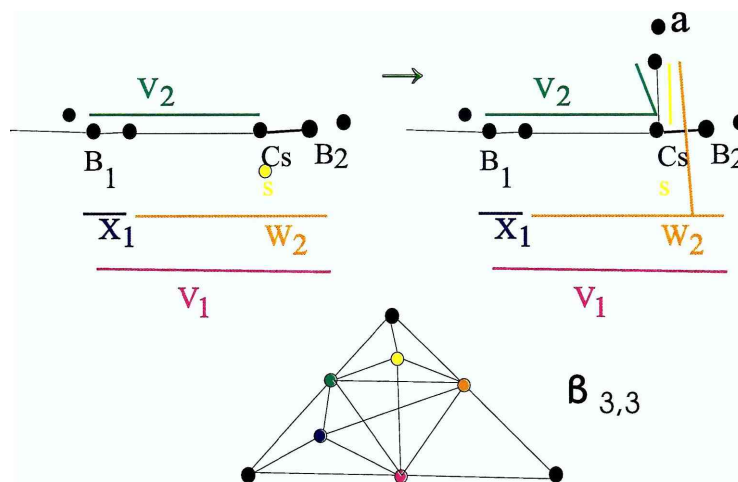


Figura 8.22:

b' si v_2 no es vecino de a , se tiene entonces el grafo inducido por los vértices $\{a, s, v_1, w_2, v_2, x_1, b_1, b_2\}$ que no es UV (Figura 8.23).

Más claramente, $\{w_2, b_2, v_1\}$ es un completo; $\{w_2, s, a\}$ es un completo; $\{x_1, v_1, w_2, v_2\}$ es un completo, $\{s, v_2, v_1, w_2\}$ es un completo y $\{x_1, v_1, b_1, v_2\}$ es un completo.

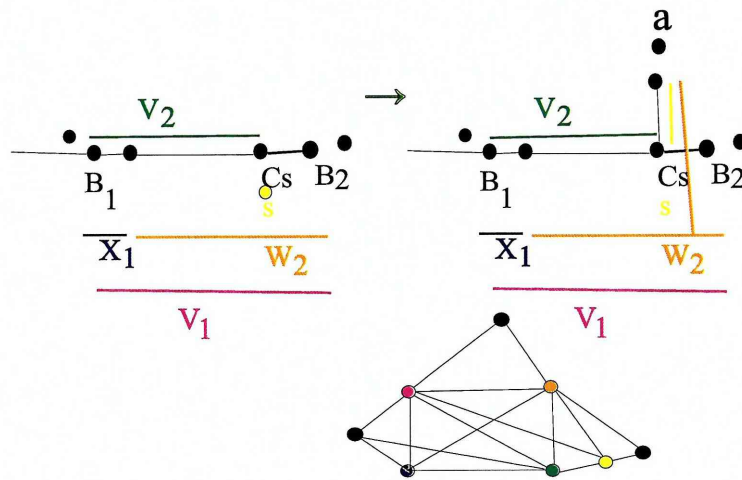
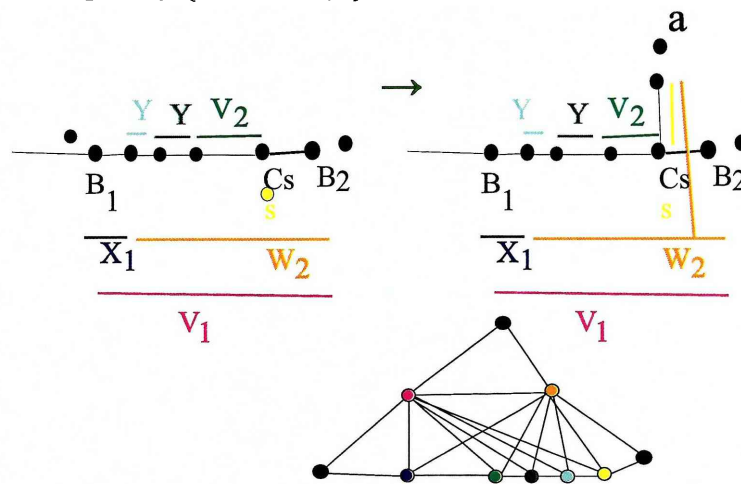


Figura 8.23:

2) si v_2 no cubre a B_1 , como el conjunto de aristas del camino $\tilde{T}[C^*, A_1]$ no son s -aristas y G es compacto, existe un cubrimiento por no vecinos de s del camino. Sean y_1, \dots, y_k vértices cubriendo el camino tal que $\{y_{i-1}, y_i, y_{i+1}\}$ para $i \leq k-1$ es un completo y $\{x_1, v_2, w_2, y_k\}$ es un completo.



Entonces el conjunto $\{a, s, v_1, w_2, v_2, x_1, b_1, b_2, y_1, \dots, y_k\}$ induce la pirámide generalizada de 8 o más vértices (Figura 8.20).

b) \widetilde{B}_2 no es hoja del UV -árbol clique de $G - a$.

Claramente, \widetilde{B}_2 está separado en dirección a las hojas por un vértice no simplicial, notemos x a ese vértice y a $\widetilde{e}_1 = \widetilde{B}'_1 \widetilde{B}_2$ a la arista incidente en \widetilde{B}_2 cubierta por x .

Por la Proposición 8.3.4, existe al menos un vecino de s cubriendo \widetilde{e}_1 . Analizamos dos situaciones:

1) v_1 cubre a \widetilde{e}_1 . Analizaremos 2 casos:

a' Si w_2 no está en \widetilde{B}'_1 , sean \widetilde{b}'_1, b_1 separadores en dirección a las hojas de \widetilde{B}'_1, B_1 respectivamente; claramente $\{\widetilde{b}'_1, v_1, x\}$ es un completo, $\{x, w_2, v_1\}$ es un completo; $\{a, s, w_2\}$ es un completo; $\{w_2, x_1, v_1\}$ es un completo, $\{v_1, x_1, b_1\}$ es un completo y G tiene al grafo de la Figura 8.24 como subgrafo inducido.

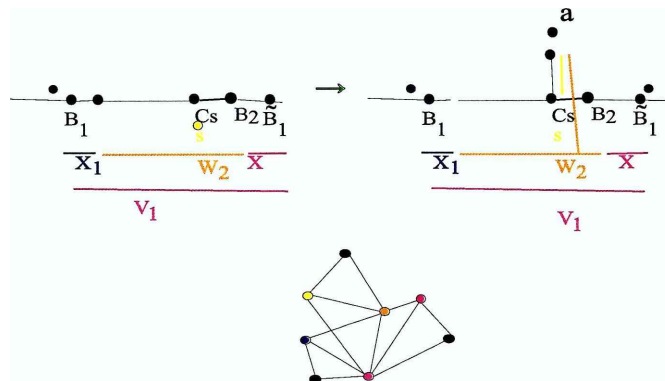


Figura 8.24:

b' Si $w_2 \in \widetilde{B}'_1$ entonces como no hay simpliciales esenciales en G , existe un cubridor de e_2 no cubridor de \widetilde{e}'_1 que puede tener a \widetilde{B}_2 como extremo o bien cubrir a una arista incidente en \widetilde{B}_2 distinta de \widetilde{e}'_1 , claramente pueden presentarse 2 situaciones, si $v_2 \neq w_2$ cubridor de e_2 no está en A_1 , se tiene un prohibido de intervalos con un vértice universal, por ello supongamos que tiene está en A_1 , si no está en B_1 se tiene: como antes los separadores en dirección a las hojas de \widetilde{B}'_1, B_1 son \widetilde{b}'_1, b_1 ; $\{\widetilde{b}'_1, v_1, x, w_2\}$ es un completo; $\{x, w_2, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{a, s, w_2\}$ es un completo; $\{v_1, s, w_2, v_2\}$ es un completo; $\{w_2, x_1, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{v_1, x_1, b_1\}$ es un completo y G tiene al grafo de la Figura 8.25, como subgrafo inducido.

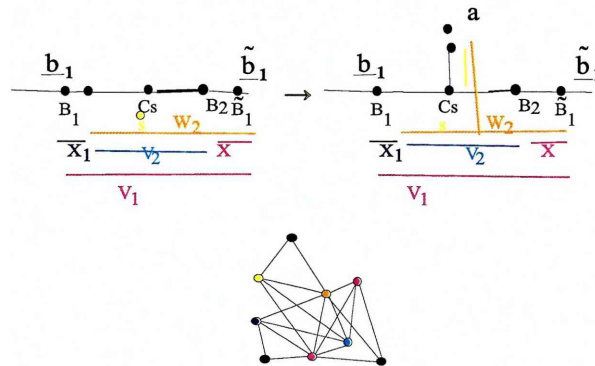


Figura 8.25:

Pero el grafo obtenido en la Figura 8.25, es no UV pero no es minimal con esa condición pues $H - x$ es isomorfo a la pirámide generalizada de 8 vértices, como puede

observarse en la Figura 8.26

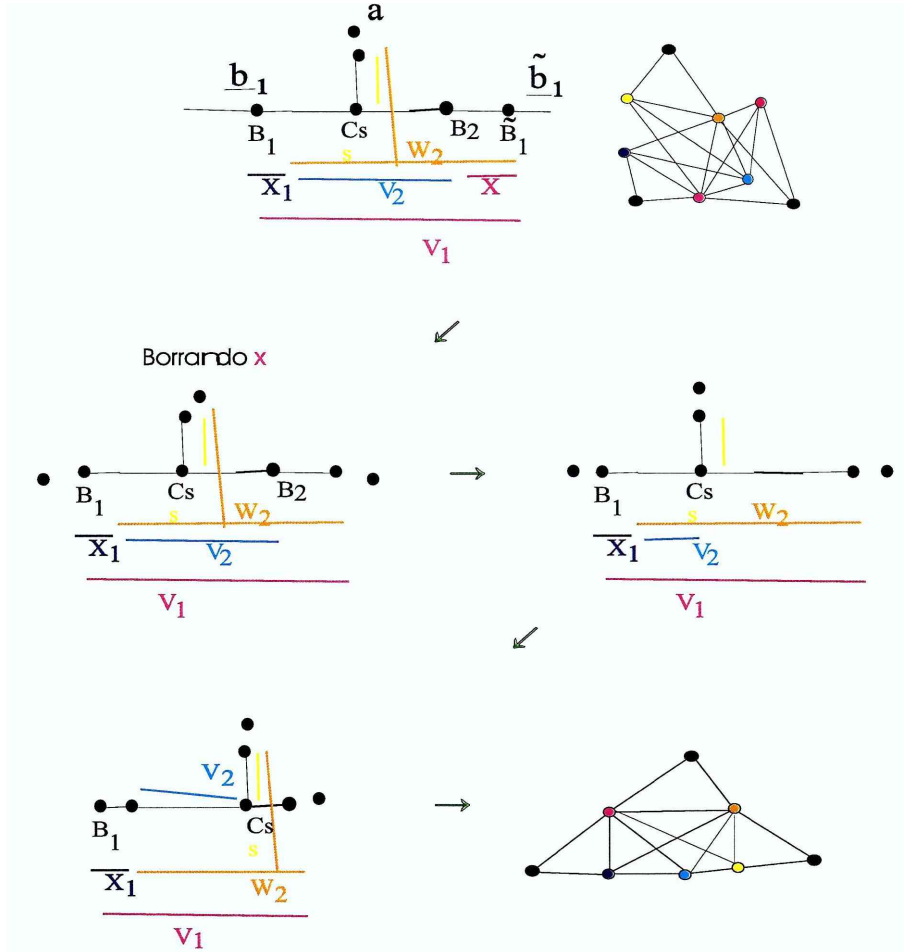


Figura 8.26:

Ahora si el cubridor $v_2 \neq w_2$ de e_2 está en B_1 , se tiene: como antes los separadores en dirección a las hojas de \widetilde{B}_1, B_1 son \widetilde{b}_1, b_1 ; $\{\widetilde{b}_1, v_1, x, w_2\}$ es un completo; $\{x, w_2, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{a, s, w_2\}$ es un completo; $\{v_1, v_2, s, w_2\}$ es

un completo; $\{w_2, x_1, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{v_1, x_1, b_1, v_2\}$ es un completo y G tiene al grafo de la Figura 8.27, como subgrafo inducido.

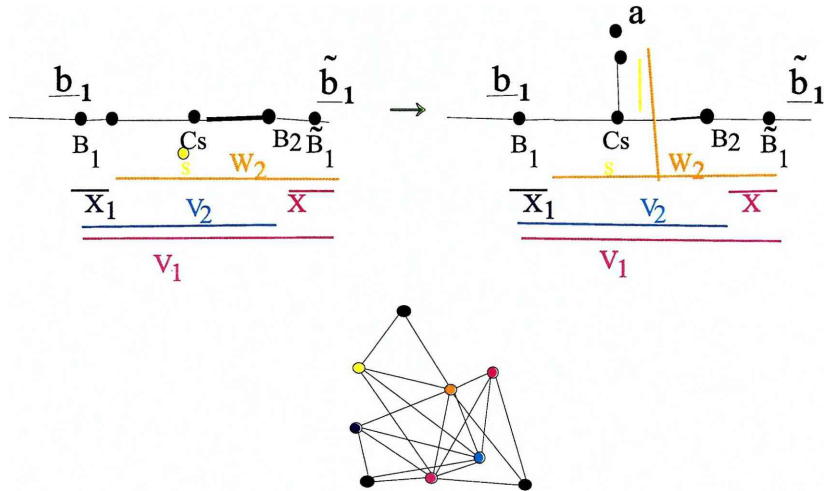


Figura 8.27:

Pero el grafo obtenido en la Figura 8.27, es no UV pero no es minimal con esa condición pues $H - x$ es isomorfo a el grafo obtenido en la Figura 8.23, como puede observarse en la Figura 8.28.

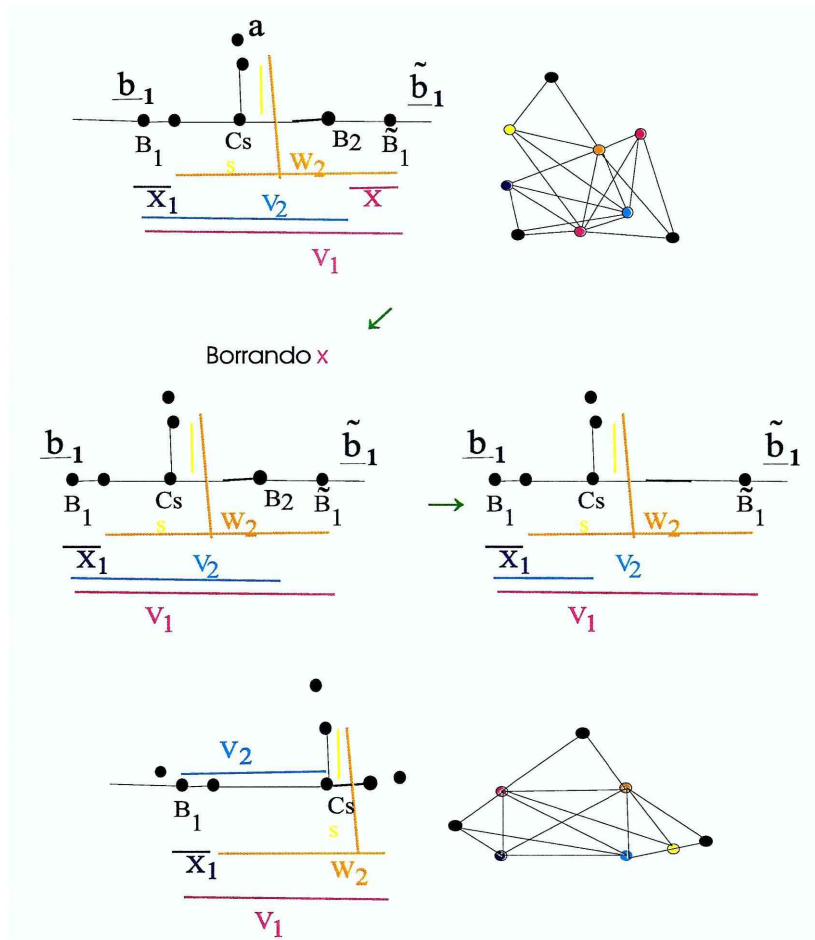


Figura 8.28:

2) v_1 no cubre a \tilde{e}'_1 . Luego existe un vecino de s cubriendo \tilde{e}'_1 , notado por \tilde{v}_1 . Podemos asumir que $\tilde{v}_1 \in A_1 - B_1$ el caso contrario se tiene a un prohibido de intervalos con un vértice universal o si está en B_1 el caso analizado previamente.

Pueden presentarse 2 situaciones: w_2 está o no en \tilde{B}'_1 .

a' Si w_2 no está en \tilde{B}'_1 como antes los separadores en dirección a las hojas de \tilde{B}'_1, B_1 son \tilde{b}'_1, b_1 ; $\{\tilde{b}'_1, \tilde{v}_1, x\}$ es un completo, $\{x, w_2, \tilde{v}_1, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{a, s, w_2\}$ es un completo; $\{v_1, s, w_2, \tilde{v}_1\}$ es un completo; $\{w_2, x_1, v_1, \tilde{v}_1\}$ es un completo; $\{v_1, x_1, b_1\}$ es un completo y G tiene al grafo de la Figura 8.29 como subgrafo inducido.

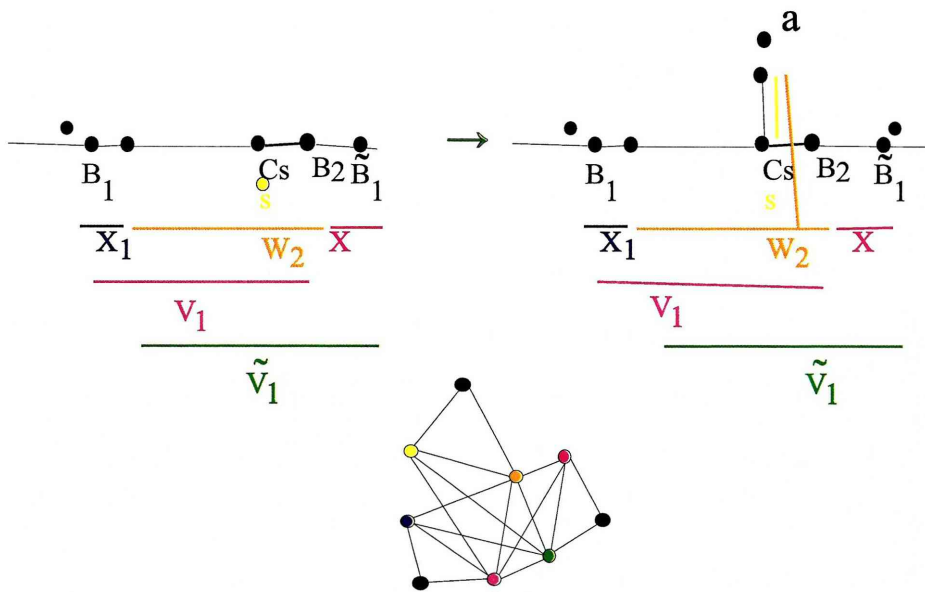


Figura 8.29:

b' Si w_2 está en \widetilde{B}'_1 ; entonces sean unos separadores en dirección a las hojas de $\widetilde{B}'_1, B_1; \widetilde{b}'_1, b_1; \{\widetilde{b}'_1, v_1, x, w_2\}$ es un completo, $\{x, w_2, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{a, s, w_2\}$ es un completo; $\{v_1, s, w_2, v_2\}$ es un completo; $\{w_2, x_1, v_1, v_2\}$ es un completo; $\{v_1, x_1, b_1\}$ es un completo y G tiene al grafo de la Figura 8.30 como subgrafo inducido.

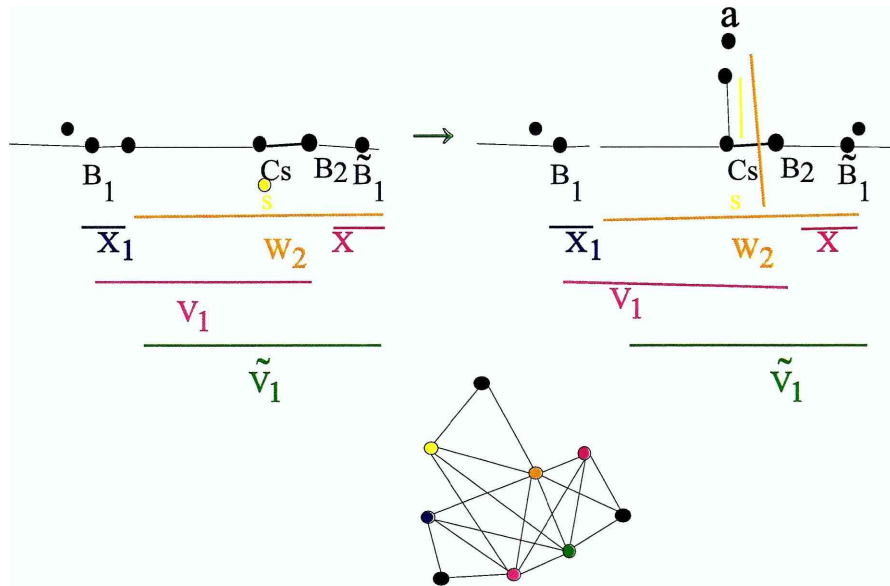


Figura 8.30:

2. A partir del camino impar, se construye un UV -árbol clique de $G - a$; con la técnica empleada en el capítulo anterior; donde las aristas de índice par del camino P , inciden en C_s .

Sea A_1 el extremo de e_1 más próximo a C' ; sin perder generalidad podemos asumir que el vértice que etiqueta a e_{2k} cubre a A_1 , caso

contrario se considera el grafo auxiliar Π^* donde $A'_1 A_{2k}, e_{2k}$, con A_{2k} extremo de e_{2k} y $A'_1 \in T'[B_{2k}, A_1]$; es un camino de longitud 1 entre dos vértices etiquetados uno con 1 y el otro con 2^* .

Claramente existe x_1 que separa A_1 en dirección a las hojas, más aún es cubridor de e_1 , pues e_1 tiene etiqueta 1.

Sea b_i un separador en dirección a las hojas de B_i para $i = 1, \dots, 2k$; v_1 vecino de s cubridor de e_i y e_{i+1} para $i = 1, \dots, 2k - 1$.

Claramente, $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, w_{2k}, s\}$ es un completo; $\{w_{2k}, a, s\}$ es un completo; $\{v_1, \dots, v_{2k-1}, w_{2k}, x_1\}$ es un completo; $\{x_1, v_1, b_1\}$ es un completo; $\{v_i, v_{i+1}, b_i\}$ es un completo para $i = 2, \dots, 2k - 2$; $\{v_{2k-1}, w_{2k}, b_{2k}\}$ es un completo. Luego G tiene como subgrafo inducido a $\beta_{2k+1, 2k+1}$. En la Figura 8.31 se tiene a $\beta_{5,5}$

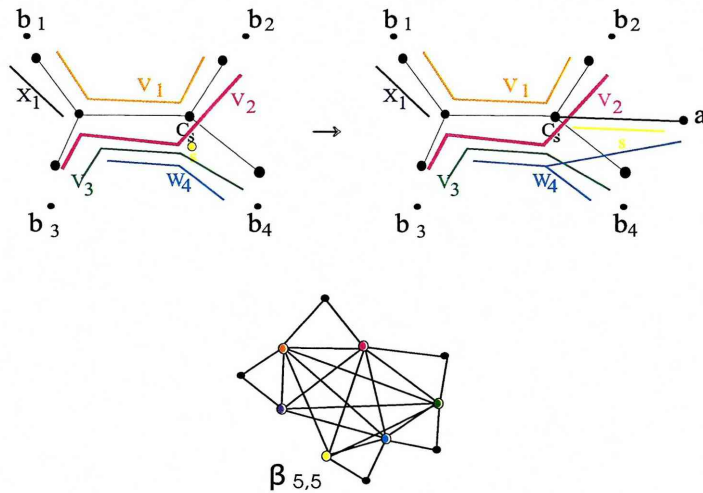


Figura 8.31:

□

Proposición 8.3.20 *Sea e un vértice de Π con etiqueta 2. Si e está cubierta por un vecino de a entonces G es la pirámide generalizada.*

Demostración:

Sea $e = AB$ con etiqueta 2, cubierto por un vecino de a , sea z el vecino de a que cubre a e .

Como e tiene etiqueta 2, existe $e' = A'B'$ y $v \in N(s)$ tal que v cubre a e y e' , si v es vecino de a , e' debe corresponderse a un vértice con etiqueta 1 y por la Proposición 8.3.18, G es la pirámide generalizada. Por ello, supongamos que v no es vecino de a . Además si w es el vértice que etiqueta a e , w no está en A' y por ende $A' \neq C'$.

Por lo antes supuesto, z no puede cubrir a la arista e' , más aún, e' debe ser una s -arista y el vecino de a debe cubrir uno y sólo uno de sus extremos, es decir cubre sólo a A' , caso contrario es posible construir el grafo auxiliar como en el capítulo anterior y tener un camino impar entre un vértice de etiqueta 1 y otro de etiqueta 2*.

Como se probó en la Proposición 8.3.8, e no puede tener a todos los vecinos de s , por ello existe un vecino x de s que no cubre a e .

Veamos que si a', b son separadores de A' y B en dirección a las hojas de T'' respectivamente, a', b, a es una tripla de G y en particular de $G_{T''[A', B] \cup C' C_s \cup C_s C_a} \neq G$. Claramente a', v, b es un camino entre a' y b por no vecinos de a ; b, w, s, a es un camino entre b y a por no vecinos de a' ; como $T''[A', C']$ está cubierto por no vecinos de s , sean x_1, \dots, x_k un cubrimiento

con no vecinos de s tales que inducen un camino entre un vértice de C' no vecino de s y a' , entonces se tiene que $a, x, x_1, \dots, x_k, a'$ es un camino por no vecinos de b .

Como $z \in C_a \cap A' \cap B$, es un vértice universal de $G_{T''[A',B] \cup C' \cup C_s \cup C_a}$, con lo cual resulta un prohibido de intervalos con un vértice universal, contradiciendo la minimalidad de G como grafo no UV . Absurdo.

□

Proposición 8.3.21 *En Π no hay camino impar entre dos vértices ambos etiquetados con 2^* , y no hay camino par entre un vértice etiquetado con 2 y otro etiquetado con 2^* .*

Demostración:

Supongamos que existe un camino impar entre dos vértices etiquetados con 2^* . Sea $P = e_1, \dots, e_{2k}$; $e_i = A_i B_i$ con A_i el extremo más próximo a C' , b_i un separador en dirección a las hojas de B_i , v_i vértice de G vecino de s que cubre a $e_i e_{i+1}$, w_1, w_2 vecinos de a que cubren respectivamente a e_1 y e_{2k} , $x \in C' - N(s)$, $\{a, s, x, w_1, w_2, v_1, \dots, v_{2k-1}, b_1, \dots, b_{2k}\}$ inducen el grafo σ_{2k+1} dado en la Proposición 7.3.3 del capítulo anterior. Observar que en ese grafo x será un simplicial esencial. Por lo antes expuesto, se contradice la minimalidad de G como grafo compacto no UV .

Supongamos que existe camino par entre un vértice etiquetado con 2 y otro con 2^* . Sea $P = e_1, \dots, e_{2k+1}$ con e_1 etiquetado con 2. Por ser etiquetado con 2, A_2 no puede ser C' , luego si consideramos el subárbol de T'' obtenido borrando la arista e_2 , sea $e_2^* = A_2 A_2'$ con A_2' en $T''[C', A_2]$ se puede construir un grafo auxiliar Π^* tal que e_2^*, \dots, e_{2k+1} es un camino impar entre un

vértice de Π^* que recibe etiqueta 1; e_2^* y el vértice e_{2k+1} que tiene etiqueta 2^* , luego G tiene como subgrafo inducido al obtenido en la Proposición 8.3.19, contradiciendo la minimalidad de G como grafo no UV .

□

Caracterización.

Teorema 8.3.2 *G es cordal compacto y tiene un vértice casi-simplicial s vecino del simplicial a . G no es UV minimal si y sólo si Π tiene un camino impar con extremos etiquetados con 1 y 2^* o tiene una arista cubierta por un vecino de a*

Demostración:

Si existen caminos impares cuyos extremos están etiquetados con 1 y 2^* respectivamente, por la Proposición 8.3.19 G no es UV . Si hay una arista de Π cubierta por un vecino de a , por la Proposición 8.3.18, G no es UV .

Si suponemos que no hay ninguna arista de Π cubierta por un vecino de a ni camino impar del tipo mencionado anteriormente, será posible construir un UV -árbol clique para G , de la siguiente manera:

Como $G - a$ es un grafo UV , con s un simplicial esencial sabemos que Π es bipartido, no hay caminos impares entre dos vértices ambos etiquetados con 1, ni caminos pares entre vértices uno etiquetado con 1 y otro etiquetado con 2.

Se construye una bipartición para cada componente conexa de Π . Si la componente tiene un vértice u , etiquetado con 1; se coloca en A a todos los vértices a distancia par desde u y en B a los otros.

Resulta (A, B) una bipartición de Π con los vértices etiquetados con 1 en A , los etiquetados con 2 en B y los etiquetados con 2^* en A (por la Proposición 8.3.21).

Si en la componente conexa de Π no hay un vértice etiquetado con 1 pero si uno etiquetado con 2^* , se coloca en A todos los vértices a distancia par en Π de 2^* y en B todos los vértices a distancia impar en Π de 2^* .

Resulta (A, B) una bipartición con los vértices etiquetados con 2^* en A , los etiquetados con 2 en B (por la Proposición 8.3.21).

Si en la componente conexa de Π no hay vértice etiquetados ni con 1 ni con 2^* pero si con 2, se coloca en A todos los vértices a distancia impar en Π de 2 y en B todos los vértices a distancia par en Π de 2.

Resulta (A, B) una bipartición con los vértices etiquetados con 2 en B (por la Proposición 7.4.6 del capítulo anterior).

Si en la componente conexa de Π no hay vértices etiquetados se toma cualquier bipartición.

A partir de esa bipartición se construye un UV -árbol clique de G .

Por el capítulo anterior, sabemos que para $G - a$ podemos construir un UV -árbol clique así:

Las aristas equivalentes a vértices de B fueron pegadas a C_s y ninguna está cubierta por vecinos de a , ninguna de las aristas equivalentes a vértices de A fueron pegadas a C_s ; por ello las aristas incidentes en C_s son las aristas correspondientes a vértices de B que no están cubiertas por vecinos de a (Proposición 8.3.20) y la arista equivalente a $C'C_s$. Por otro lado, C_s tiene a todos los vecinos de a y la única arista incidente en C_s que tiene a todos los vecinos de a es exactamente la arista equivalente a $C'C_s$. Por ello, los veci-

nos de a , excepto s cubren dicha arista y tienen extremo C_s pues no pueden cubrir a ninguna otra arista incidente en C_s . Luego se adiciona al árbol \tilde{T} la arista $C_a C_s$, y se tiene así, un UV-árbol clique de G (Figura 8.32).

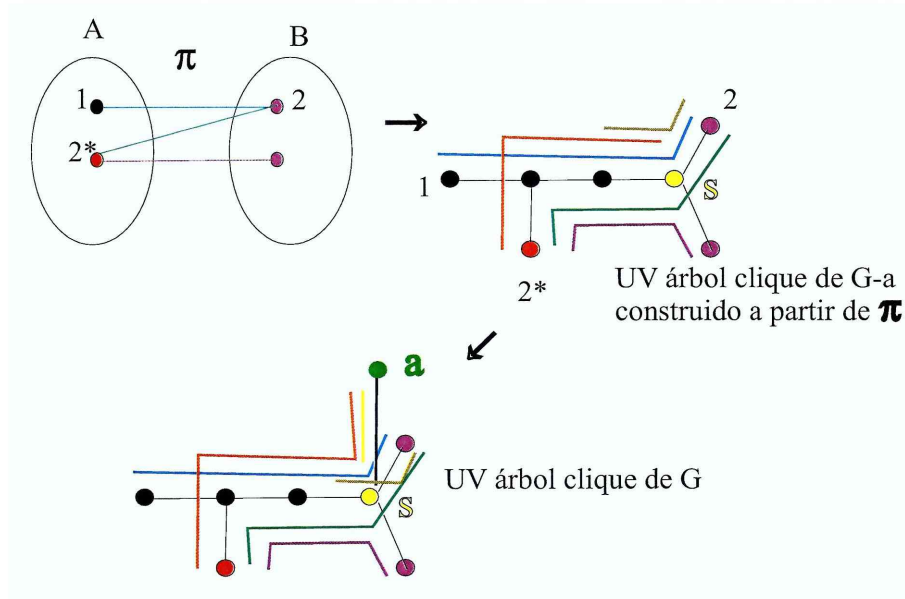


Figura 8.32:

□

Corolario 8.3.1 G un grafo cordal compacto sin vértice universal, con un vértice casi-simplicial. Entonces G es no UV si y sólo si G tiene como sub-grafo inducido a uno de los grafos de la Figura 8.33.

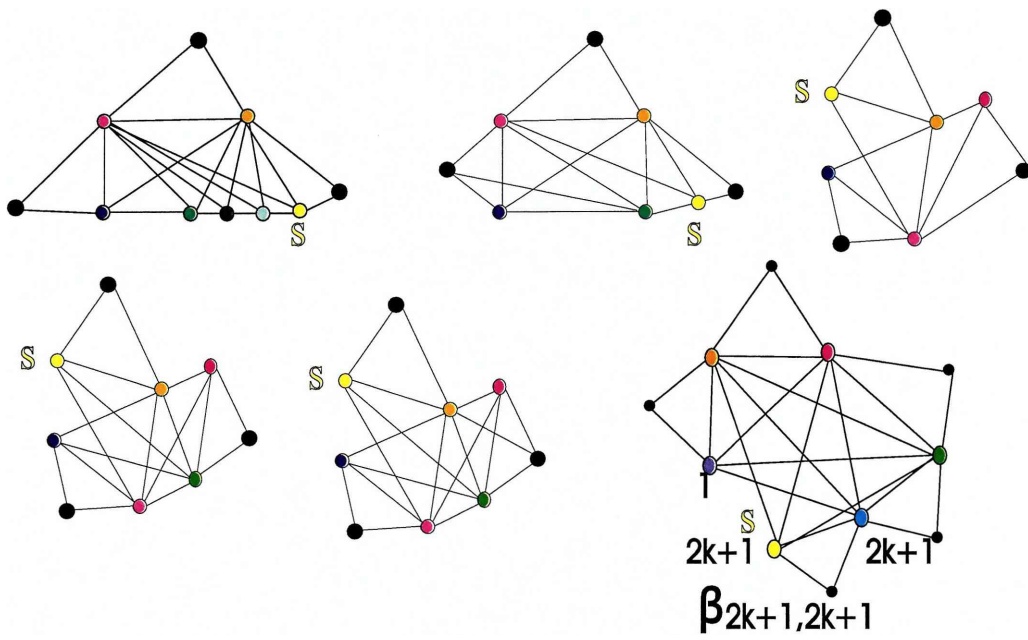


Figura 8.33: Cordales no UV minimales sin simpliciales esenciales

Corolario 8.3.2 *G un grafo cordal compacto con vértice universal. Entonces G es no UV si y sólo si G tiene como subgrafo inducido a uno de los de la Figura 8.34*

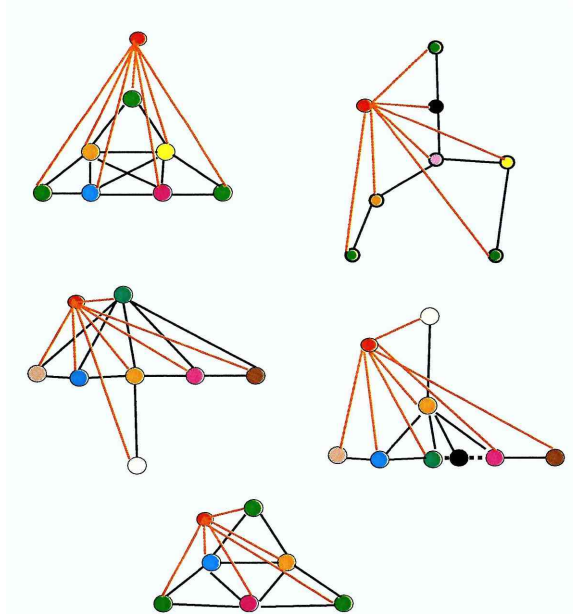


Figura 8.34: Cordales no UV minimales sin simpliciales esenciales con vértice universal

Corolario 8.3.3 *G un grafo cordal es no UV si y sólo si tiene como subgrafo inducido a uno de los grafos de la Figura 8.35*

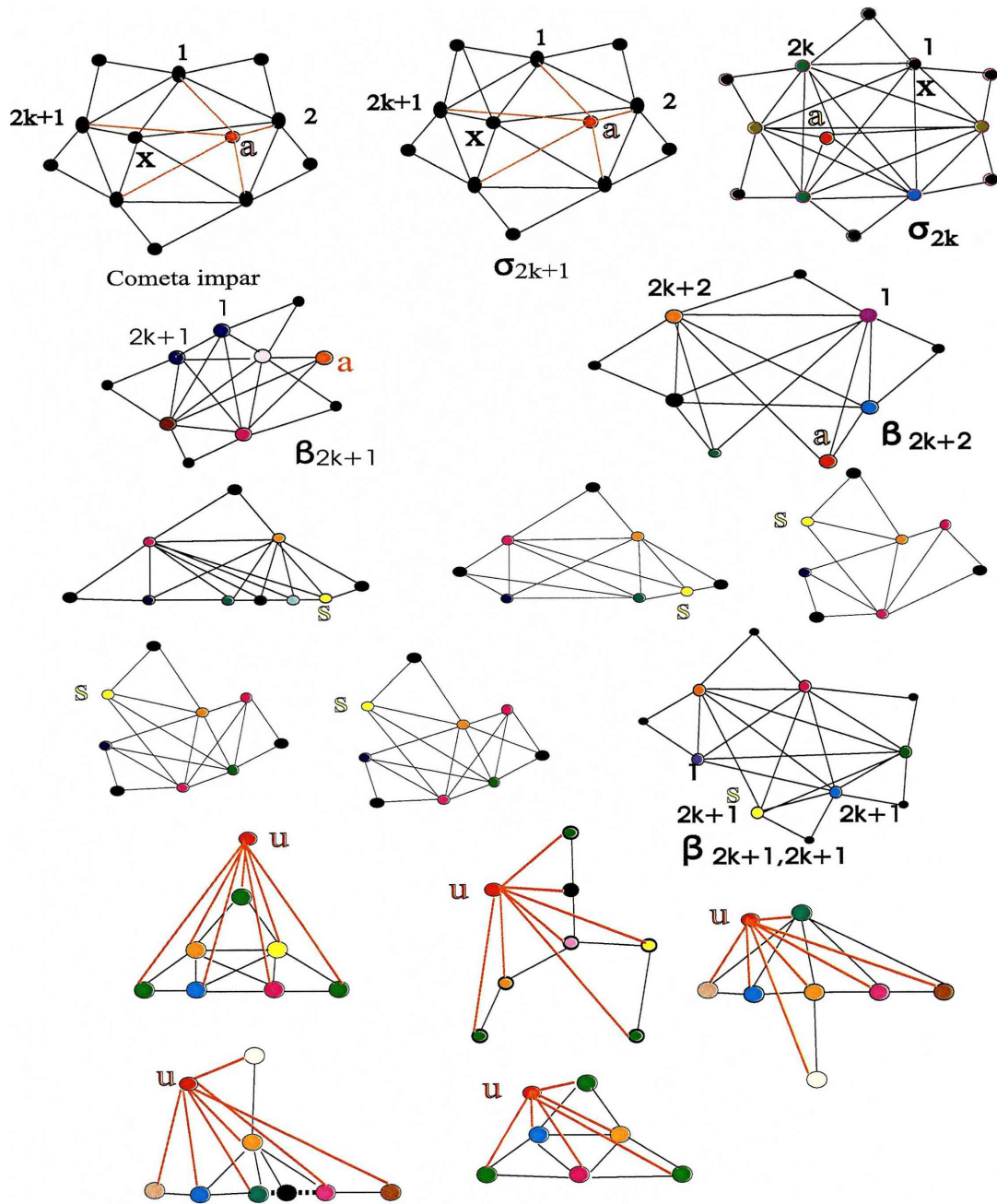
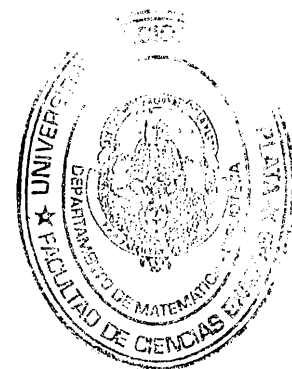


Figura 8.35: Cordales no UV minimales



Capítulo 9

Conclusiones

Los grafos cordales fueron caracterizados como aquellos grafos que admiten una representación por medio de árboles y familias de subárboles. Podemos pensar en un grafo cordal G como en una pareja $(T, DC(G))$, llamada representación canónica de G ; donde T es un árbol clique, es decir, un árbol generador de $K(G)$ tal que $DC(G)$ es una familia de subárboles de T .

Los árboles cliques no sólo aparecen en la literatura de teoría de grafos, sino también en el contexto de esquemas acíclicos de base de datos [4], matrices esparcidas [2], biología [22], entre otros. Como ejemplo, los árboles cliques pueden utilizarse como modelo, para estudiar la interacción de proteínas [22].

Nuestro interés, fue estudiar a los grafos cordales y algunas de sus subclases a través de sus representaciones canónicas y de sus árboles clique.

Los resultados obtenidos aportan también conocimiento sobre otras propiedades estructurales de los grafos cordales. Así, propiedades clásicas de grafos cordales, son más simples al observar las representaciones canónicas. El número cromático del grafo es el máximo número de subárboles que cubren un vértice

del árbol, es decir el tamaño del clique máximo. La conectividad del grafo es el peso mínimo de las aristas de un árbol clique.

Se estudiaron las k -asteroidales de los grafos cordales en relación con las ramas y las hojas de los árboles cliques.

Se clasificaron los vértices simpliciales en esenciales y no esenciales. Se introdujeron los vértices casi-simpliciales, los grafos cordales compactos y supercompactos. Estos resultados, nos permitieron encontrar los grafos minimales que poseen un claw en cualquiera de sus representaciones canónicas, es decir, los grafos minimales prohibidos para la clase UV . También obtuvimos los grafos minimales prohibidos para la clase de Intervalos usando las representaciones canónicas.

La conclusión más importante que observamos es que las representaciones canónicas aportan conocimiento a la estructura de los grafos cordales, siendo una herramienta que puede ser usada para encontrar pruebas más simples de resultados ya conocidos y estudiar distintos problemas abiertos que pueden ser visualizados en este contexto con mayor claridad.

Como trabajo futuro, sería interesante aplicar las herramientas desarrolladas para estudiar las clases:

- RDV , de la cual se conocen algunos prohibidos,
- la clase DV , ya caracterizada por Panda [20], sólo concentrandonos en hallar la diferencia entre las clases UV y DV , obteniendo así, una prueba más sencilla
- La conjetura de Hendry: los grafos cordales hamiltonianos son ciclos

extensibles.

Agradecimientos:

Quisiera agradecer a los jurados de esta tesis, Dra. Liliana Alcón, Dra. Patricia Dobson, Dr. Guillermo Durán por sus comentarios, correcciones y sugerencias.

Bibliografía

- [1] L. Alcón and M. Gutierrez, Finding intersection models: from Chordal to Helly circular-arc graphs. (enviado).
- [2] J. Blair and B. Peyton. An introduction to chordal graphs and clique trees. *Graph Theory and Sparse Matrix Computation*, 56 (1993), pag. 1-29.
- [3] A. Berry, A. Sigayret, C. Sinoquet. Maximal sub-triangulation as improving phylogenetic Data. *Proceedings of JIM'03. Soft Computing-Recent Advances in Knowledge Discovery*, G. Govaert, R. Haenle and Nadif(eds), 1900:01, (2005).
- [4] P. Buneman, A characterization of rigid circuit graphs, *Discrete Mathematics* 9 (1974), pag. 205-212.
- [5] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.* 15 (1965), pag. 835-855.
- [6] F. Gavril, The intersection graphs of subtrees are exactly chordal graphs, *J. Combin. Theory B*, 16 (1974), pag. 47-56.

- [7] F. Gavril, Algorithms for the intersection graphs of directed paths in directed trees, *Discrete Mathematics* 13 (1975), pag. 237-249.
- [8] F. Gavril, A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees, *Discrete Mathematics* 23 (1978), pag. 211-227.
- [9] M. Gutierrez, Intersection Graphs and the Clique Operator, *Graphs and Combinatorics*, 2 (2001), pag 237-244.
- [10] M. Gutierrez and J. Meidanis, Algebraic Theory for the Clique Operator, *Journal of the Brazilian Computer Society*, n.3, v.7 (2002), pag. 53-64.
- [11] M. Gutierrez, S. Tondato and J. Szwarcfiter, A forbidden subgraph characterization of path graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 19 (2005), pag. 281-287.
- [12] M. Gutierrez, J. Szwarcfiter and S. Tondato, Graficas Cordales: las representaciones canónicas como herramienta para la resolución de algunos problemas, *XXII Coloquio de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus aplicaciones*, Guanajuato, México, 2007.
- [13] M. Gutierrez, J. Szwarcfiter and S. Tondato, Clique trees of chordal graphs: leafage and 3-asteroidals, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30 (2008), pag. 237-242.
- [14] C.G. Lekkerkerker and J. Ch. Boland, Representation of finite graph by a set of intervals on the real line, *Fundamenta Mathematicae* Li (1962), pag 45-64.

- [15] B. Lévêque, F. Maffray, M. Preissmann, Characterizing path graphs by forbidden induced subgraphs. (enviado)
- [16] I. Lin, T. McKee and D. B. West, The leafage of a chordal graphs, *Discussiones Mathematicae, Graph Theory*, vol. 18 (1998), pag. 23-48.
- [17] T. A. McKee and F. R. McMorris, *Topics in intersection graph theory*, Siam, Philadelphia (1999), pag. 19-25.
- [18] T. A. McKee, Strong clique trees, neighborhood trees, and strongly chordal graphs, *Journal of Graphs Theory* (2000), pag. 151-160.
- [19] C. Monma and V. Wei, Intersection graphs of paths in a tree, *J. Combin. Theory B* 41 (1986), pag. 141-181.
- [20] B.S. Panda, The forbidden subgraph characteriztion of directed vertex graphs, *Discrete Math.* 196 (1999), pag 239-256.
- [21] J. Spinrad, *Efficient graph representations*, Academic Mathematical Society, (2003).
- [22] E. Zotenko, K. Guimarães, R. Jothi and T. Przytycka. Decomposition of overlapping protein complexes: A graph theoretical method for analysing static and dynamic protein associations. *Algorithms for Molecular Biology* 1:7, (2006).

