II

LA IMANTACIÓN PARA CAMPOS OSCILATORIOS MUY DÉBILES

POR EL DOCTOR RAMON G. LOYARTE
Director del Instituto de física ; profesor de Física general, Física matemática
y Trabajos de investigación en física

RESUMÉ

L'aimantation pour des champs oscillatoires très faibles. — On investigue théoriquement l'aimantation des corps ferromagnétiques pour des champs oscillatoires très faibles, en admettant que ces corps soient constitués par des aimans élémentaires qui peuvent tourner autour de la position de repos, sous l'action d'un champ extérieur, prennant en considération les chocs qu'entre eux se produissent. L'on suppose: que le champ extérieur est très petit en rapport avec le champ moléculaire, que les angles que ce champ ou les chocs produissent dans les aimans élémentaires sont très petits, et que le nombre de chocs par seconde est petit rélativement à la frequence des mêmes oscillations.

L'on demontre que la dépendance de la perméabilité de la frequence ne permet pas, comme le pretend Leigh Page, expliquer les résultats de mesures de B. Wwedensky et K. Theodortschik.

LA IMANTACIÓN PARA CAMPOS OSCILATORIOS MUY DÉBILES

I

El problema de la imantanción del hierro y del níquel para campos oscilatorios ha sido motivo de numerosas investigaciones experimentales (¹) y de algunas teóricas (²). Las mediciones del autor que se han extendido hasta la frecuencia $1,41 \cdot 10^9$ 1/seg enseñan que para campos muy débiles la permeabilidad magnética permanece primero prácticamente constante dentro de un gran intervalo de frecuencias; que en el hierro decrece luego a partir de la frecuencia $7,5 \cdot 10^6$ y que en el níquel alcanza un máximo poco pronunciado para la frecuencia $1,13 \cdot 10^9$, a partir del cual decrece. Que la permeabilidad para campos débiles queda constante hasta la frecuencia 10^6 ha sido comprobado por Erhardt al mismo tiempo que por nosotros y posteriormente por Urbschat hasta la frecuencia 10^7. Los investigadores rusos encuentran, en general, dentro de esas frecuencias máximos pronunciados.

El comportamiento tanto del hierro como del níquel que hemos observado nosotros y los investigadores mencionados más arriba se explica teóricamente (³) en forma satisfactoria considerando que esos materiales

(¹) Ch. E. Saint-John. (*) *Phil. Mag.*, 39, 297, 1895; I. Klemencic; *Wied, Ann.*, 53, 707, 1894; A. Batelli y L. Magri, (*) *Rend. d. Lincei*, 5, 15, y 2, 63, 1906; *Phy Zs.*, 8, 298, 1907; W. Arkadiew, *Phy. Zs.*, 14, 561, 1913; 22. 511, 1921; *Ann der Phy.*, 45, 133, 1914; 58, 105, 1919; R. G. Loyarte; *Contribución al estudio de las ciencias físicomatemáticas*, I, 453, 1916; II, 105, 1917; R. Gans y R. G. Loyarte, *Ann, der Phy.*, 64, 209, 1921; W. Kaufmann, *Phys Z.*, 17, 552, 1916; F. Erhardt, *Ann der Phys.*, 54, 41, 1917; R. Urbschat, *Zeitsrift für Phy.*, 7, 260, 1921; B. Wwedensky und K. Theodortschik, *Ann der Phy.*, 68, 463, 1922; *Phy Z.*, 24, 216, 1923; N. Nikitin, *Zeitsrif für Phy.*, 29, 288, 1924.

(²) W. Arkadiew, *Phys Zs.*, 14, 928, 1913; R. Gans y R. G. Loyarte, *l. c.*; Leigh Page, *Phy. Rev*, XXI, 456, 1923.

(³) W. Arkadiew, *l. c.* y R. Gans y R. Loyarte *l. c.*

(*) Los dos trabajos señalados con asteriscos no los conocemos.

están constituídos por imanes permanentes, infinitamente pequeños, cuyas orientaciones se distribuyen según las reglas del azar y que son susceptibles de girar alrededor de la posición de reposo bajo la acción de un campo exterior y de que si esta fuerza es muy pequeña, los ángulos de giración son también pequeños, dado el gran valor del campo molecular, que constituye la fuerza directriz. A la vez la inducción es proporcional al campo y la permeabilidad reversible en el sentido en que Gans [1] la ha definido.

De las mediciones recientes de B. Wwedensky y K. Theodortschik resultaría que entre las longitudes de onda 54-705 metros, la permeabilidad del hierro varía con la frecuencia de una manera muy complicada, ofreciendo varios máximos, muy pronunciados, entre los 80 y los 200 metros; la del níquel ofrecería un primer máximo para los 90 metros de largo de onda. Ese máximo provendría, según los autores, de la existencia de imanes elementales cuya frecuencia de oscilación propia cae dentro de ese intervalo de frecuencias.

Leigh Page pretende explicar teóricamente los resultados obtenidos por Wwedensky y K. Theodortschik, en sus investigaciones del 1922, introduciendo en la teoría a que nos referimos más arriba, los choques entre los imanes elementales. Según sus cálculos, la permeabilidad debe acusar un máximo cuando la frecuencia del campo exterior es comparable en magnitud con el número de choques por segundo.

Una nueva investigación en curso en este Instituto permitirá decidir experimentalmente si la dependencia de la permeabilidad con la frecuencia es la que hemos enunciado al principio o la encontrada por Wwedensky y Theodortschik y otros investigadores rusos.

Aquí nos ocuparemos de la teoría, considerando los choques, pues nos resulta incomprensible el resultado obtenido por Leigh Page, por cuanto siendo características esenciales del movimiento de los imanes elementales, la frecuencia y el amortiguamiento — que Page no introduce — el efecto del campo exterior sobre ellos no puede sino depender, fundamentalmente, de ciertas relaciones entre aquellas magnitudes y la frecuencia de este. Los choques deben desempeñar, necesariamente, un papel secundario, pues su número por segundo debe ser pequeño con respecto a la frecuencia de oscilaciones propias de los imanes elementales, ya que no es posible concebir un estado sólido en que las moléculas choquen a cada oscilación, en cuyo caso el cuerpo fundiría.

[1] RICARDO GANS, *Physik. Zeitschr.*, 11, 988, 910; 12, 1053, 1911 y *Ann. d. Phys.*, 27, 1, 1908; 33, 1065, 1910.

Vamos a calcular, pues, la imantación bajo las siguientes suposiciones : *a)* que el campo exterior H es tan pequeño que el campo H′ que excita a los magnetones es muy pequeño con respecto al campo molecular A que actúa como fuerza directriz. Los ángulos θ de desviación serán así muy pequeños, la inducción proporcional al campo exterior y la permeabilidad reversible ; *b)* que los ángulos de desviación θ_i que originan los choques son también muy pequeños; compatible con esta condición es una velocidad angular ω_i muy grande ; *c)* que el número de choques por segundo es pequeño en relación a la frecuencia de las oscilaciones propias, es decir que la temperatura es mucho menor que la temperatura de Curie.

El problema propuesto se resuelve del siguiente modo: como instante inicial t_i de un magnetón se considera aquel en que choca, caracterizado por los valores de θ_i y ω_i ; en cierto instante t de entre todos los imanes elementales n que forman el ángulo $(\alpha + \theta)$ con la dirección de H′, que hace el tiempo $t' = t - t_i$ que chocaron, habrá n_1 a los que corresponden los valores iniciales θ_1 y ω_1, n_2 a los que corresponde los valores θ_2 y ω_2 y así siguiendo. La contribución de tales imanes elementales al momento en dirección de H′ se calcula fácilmente. Si M es el momento de un imán elemental, esa contribución está dada por la expresión

$$\sum_i \mathrm{M} n_i \cos(\alpha + \theta) = -\sum_i \mathrm{M} n_i \operatorname{sen} \alpha \,.\, \theta, \tag{1}$$

ya que θ es muy pequeño y α varía entre o y π. Allí debe escribirse para θ el valor correspondiente al instante t; será función, está claro, de θ_i, ω_i y de $t - t_i = t'$. Si se suma, luego, con respecto a todos los α y sobre los t' entre o e ∞, se tiene el momento buscado.

II

Débese, pues, deducir, primeramente, el valor de la desviación θ de un imán elemental para un instante t cualquiera, con la condición de que para cierto instante t_i, el del choque, sea

$$\theta = \theta_i \qquad \text{y} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega_i \,.$$

El campo excitante H′ está dado por la expresión

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} + g\mathcal{M}, \tag{2}$$

según Weiss y Gans, donde g es una constante propia del material y $\mathfrak{M}$ la imantación específica.

Por las suposiciones introducidas, la ecuación de momento del imán elemental es :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + p \frac{d\theta}{dt} + MA\theta = - MH' \operatorname{sen} \alpha, \qquad (3)$$

donde I es el momento de inercia y p el factor de amortiguamiento, que suponemos de origen mecánico ([5]).

Si H es periódico, el momento magnético $\mathfrak{M}$ de la unidad de volumen también lo es, de modo que puede escribirse

$$\frac{MH'}{I} = c \cos \nu t.$$

Por otra parte, si, como supondremos, el decrecimiento logarítmico δ de las oscilaciones propias, cuya frecuencia representaremos con $n_0 = \frac{\nu_0}{2\pi}$ es pequeño respecto a 2π, la (3) se transforma en la siguiente :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\theta}{dt} + \nu_0^2\theta = - c \operatorname{sen} \alpha \cos \nu t, \qquad (4)$$

donde

$$\lambda = \delta n_0 = \frac{p}{2I} \qquad (5)$$

es el decrecimiento, y

$$\nu_0^2 = 4\pi^2 n_0^2 = \frac{MA}{I}. \qquad (6)$$

Como es sabido, el integral de la ecuación de las oscilaciones propias es

$$\theta_p = a_1 e^{-\lambda t} \cos \nu_0 t + a_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \nu_0 t$$

y el de la oscilación forzada

$$\theta_f = - \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\nu_0^2 - \nu^2 + i 2\lambda\nu} \cos \nu t$$

donde es $i = \sqrt{-1}$.

([5]) Si el amortiguamiento fuese debido a la radiación, se tendría en lugar del término $p \frac{d\theta}{dt}$ el término $\frac{2}{3} \frac{M^2}{c^3} \frac{d^3\theta}{dt^3}$, donde M es el momento magnético del imán elemental y c la velocidad de la luz. La forma de las curvas no se modifica mayormente. Véase R. G. LOYARTE, *l. c.*

La solución general es, pues,

$$\theta=\theta_p+\theta_f=-\frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\nu_0^2-\nu^2+i2\lambda\nu}\cos\nu t+a_1e^{-\lambda t}\cos\nu_0 t+a_2e^{-\lambda t}\operatorname{sen}\nu_0 t. \quad (7)$$

Debe ser, además,

$$\theta=\theta_i \qquad \text{y} \qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega_i \qquad \text{para} \qquad t=t_i,$$

de suerte que la (7) se convierte en

$$\begin{aligned}\theta=&-\frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\nu_0^2-\nu^2+i2\lambda\nu}\cos\nu t+\theta_i e^{-\lambda(t-t_i)}\cos\nu_0(t-t_i)+\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{\omega_i}{\nu_0}e^{-\lambda(t-t_i)}\operatorname{sen}\nu_0(t-t_i)\\ &+\frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\nu_0^2-\nu^2+i2\lambda\nu}e^{-\lambda(t-t_i)}\cos\nu t_i\cos\nu_0(t-t_i) \qquad (8)\\ &-\frac{c\frac{\nu}{\nu_0}\operatorname{sen} \alpha}{\nu_0^2-\nu^2+i2\lambda\nu}e^{-\lambda(t-t_i)}\operatorname{sen}\nu t_i\operatorname{sen}\nu_0(t-t_i),\end{aligned}$$

si en $\frac{d\theta}{dt}$ se desprecian términos en que aparece λ como factor, lo que equivale a suponer a $\lambda=\delta n_0$ pequeño respecto a $2\pi n_0=\nu_0$, es decir a δ pequeño respecto a 2π.

III

Puesto que todas las direcciones del campo A son igualmente probables, del número N de imanes elementales contenidos en la unidad de volumen

$$N_\alpha=\frac{1}{2}N\operatorname{sen}\alpha d\alpha \qquad (9)$$

forman con la dirección del campo excitante H′ ángulos comprendidos entre α y $\alpha+d\alpha$. Además de los N_α

$$n=N_\alpha\,.\,z\,.\,e^{-zt'}dt' \qquad (10)$$

habrán chocado en el instante t', siendo t' el tiempo transcurrido entre el instante t_i y el instante t, es decir que $t-t_i=t'$ y z el número de choques por segundo.

Es, pues,

$$n = \frac{1}{2} N \cdot z \cdot e^{-zt'} \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha \cdot dt'. \tag{11}$$

De estos n imanes elementales habrá n_1 cuyos valores de θ y ω en el instante t_i del choque fueron θ_1, ω_1; n_2 a los que corresponden θ_2, ω_2, o, de una manera general, n_i a los que corresponden en el instante t_i los valores $\theta_i \omega_i$. La distribución de los n_i es, está claro, la distribución estadística que es compatible con la energía de los imanes elementales.

La energía de un imán elemental en el campo H′ es

$$U_1 = -MH' \cos(\alpha + \theta_i) = -MH' \cos \alpha + MH' \operatorname{sen} \alpha \cdot \theta_i,$$

por la pequeñez atribuída a los θ; la energía potencial debida al campo A es

$$U_2 = \frac{1}{2} A\theta_i^2$$

por la pequeñez de los θ. Está claro, por otra parte, que siendo A muy grande la energía U_2 se hace muy grande con respecto kT para valores de θ_i relativamente pequeños. Podemos, pues, escribir, de una manera general,

$$\frac{A\theta_i^2}{2kT} >> 1$$

para valores grandes de θ_i. Al mismo resultado se llega sin el conocimiento del valor de A, por otras consideraciones [1]

La energía cinética es:

$$L = \frac{1}{2} I\omega_i^2.$$

De acuerdo con las leyes estadísticas se tendrá

$$n_i = Ce^{\frac{U_1 + U_2 + L}{kT}} d\theta_i d\omega_i$$

o

$$n_i = Ce^{\frac{MH'}{kT}\cos \alpha} e^{-\frac{MH'}{kT}\operatorname{sen} \alpha \cdot \theta_i} e^{-\frac{A\theta_i^2 + I\omega_i^2}{2kT}} d\theta_i d\omega_i, \tag{12}$$

donde C es una constante que se determina por la condición de que la suma de las n_i debe ser igual al valor n de la (9). Si, como se ha supuesto, el campo exterior H es tan pequeño que la inducción B es proporcio-

[1] Véase: OTTO STERN, *Zur Molekulartheorie des Paramagnetismus fester Salze*, *Z. fur. Phy.*, 1, 147, 1920.

nal a H, el cociente $\frac{MH'}{kT}$ es menor que la unidad y por la pequeñez de θ_i el producto $\frac{MH'}{kT}$ sen $\alpha \cdot \theta_i$ es muy pequeño respecto a la unidad, de modo que puede substituirse el exponente correspondiente por la unidad.

Formemos ahora la suma de los n_i para calcular C. La integración sobre θ_i debe extenderse entre $-\infty$ y $+\infty$, pues $\frac{A\theta_i^2}{2kT}$ es muy grande respecto a la unidad ya para valores de θ_i que pueden considerarse pequeños; la integración sobre ω_i puede extenderse también entre $-\infty$ y $+\infty$, puesto que aparte de que ω_i pueda adquirir valores muy grandes, el exponencial decrece muy rápidamente a medida que ω_i aumenta.

Escribiendo, además,

$$\frac{MH'}{kT} = a; \qquad \frac{A}{2kT} = s$$

e

$$\frac{I}{2kT} = b,$$

se tiene

$$Ce^{a\cos\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\theta_i^2}d\theta_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\omega_i^2}d\omega_i = \frac{1}{2}N \cdot z \cdot e^{-zt'} \text{ sen } \alpha \cdot d\alpha dt'.$$

Es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\theta_i^2}d\theta_i = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b\omega_i^2}d\omega_i = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

y, por consiguiente,

$$C = \frac{N}{\pi}\sqrt{bs}e^{-a\cos\alpha} \cdot z \cdot e^{-zt'} \text{ sen } \alpha d\alpha dt' \qquad (13)$$

y, por consiguiente,

$$n_i = \frac{N}{\pi}\sqrt{sb}e^{-(s\theta_i^2 + b\omega_i^2)} \cdot \text{sen } \alpha \cdot z \cdot e^{-zt'} \cdot d\alpha d\theta_i d\omega_i dt'. \qquad (14)$$

El momento magnético que estos n_i imanes elementales determinan en dirección de H, en el instante t, será pues, de acuerdo con la (1) y (14)

$$\delta\mathfrak{M}_{it'} = -\frac{NM}{\pi}\sqrt{sb}e^{-(s\theta_i^2 + b\omega_i^2)} \text{ sen}^2 \alpha \cdot z \cdot e^{-zt'}d\alpha \cdot \theta \cdot d\theta_i d\omega_i dt', \quad (15)$$

donde el subíndice t' puesto en $\mathfrak{M}$ indica que el momento proviene de los imanes elementales que sufrieron una colisión hace t' segundos.

Si se introduce en la (15) el valor de θ dado por la (8) y se integra respeto θ_i, ω_i y α se obtiene el momento que determinan en el instante t, en dirección de H, todos los imanes elementales que chocaron hace $t' = t - t_i$ segundos. Dado que

$$\int_{-B}^{+B} e^{-s\theta_i^2}\theta_i d\theta_i = 0$$

e

$$\int_{-D}^{+D} e^{-b\omega_i^2}\omega_i d\omega_i = 0,$$

donde B y D son valores cualesquiera de θ_i y ω_i, resulta

$$\Sigma\mathfrak{M}_{t'} = \frac{2}{3}\,\mathrm{NM}\,.\,z\,.\,e^{-zt'}dt'\left[\frac{c}{d}\cos\nu t - \frac{c}{d}e^{-\lambda(t-t_i)}\cos\nu t_i \cos\nu_0(t-t_i)\right.$$
$$\left. + \frac{c}{d}\frac{\nu}{\nu_0}e^{-\lambda(t-t_i)}\operatorname{sen}\nu t_i \operatorname{sen}\nu_0(t-t_i)\right]. \tag{16}$$

Si se integra la (16) con respecto a t' entre o e ∞, reemplazando, previamente, $t - t_i$ por t' y t_i por $t - t'$ se obtiene el momento total en dirección del campo H. Aparecen los siguientes integrales:

a) $$z\int_0^\infty e^{-zt'}dt' = 1;$$

b) $$z\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)t'}\cos\nu(t-t')\cos\nu_0 t' dt' =$$
$$= \frac{z}{2}\left[\frac{z+\lambda}{(\nu+\nu_0)^2+(z+\lambda)^2} + \frac{z+\lambda}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]\cos\nu t +$$
$$+ \frac{z}{2}\left[\frac{\nu+\nu_0}{(\nu+\nu_0)^2+(z+\lambda)^2} + \frac{\nu-\nu_0}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]\operatorname{sen}\nu t; \tag{17}$$

c) $$z\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)t'}\operatorname{sen}\nu(t-t')\operatorname{sen}\nu_0 t' dt' =$$
$$= \frac{z}{2}\left[\frac{\nu+\nu_0}{(\nu+\nu_0)^2+(z+\lambda)^2} - \frac{\nu-\nu_0}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]\operatorname{sen}\nu t +$$
$$+ \frac{z}{2}\left[\frac{z+\lambda}{(\nu+\nu_0)^2+(z+\lambda)^2} - \frac{z+\lambda}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]\cos\nu t.$$

Puesto que z es pequeño respecto a $n_0 = \frac{2\pi}{\nu_0}$, todos los términos de los integrales b y c, a excepción de aquellos en que figura el factor

$$\frac{z(z+\lambda)}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}$$

son muy pequeños respecto a la unidad.

El momento total es, pues,

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3}\,\mathrm{NM}\frac{c}{d}\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\nu}{\nu_0}\right)\frac{z(z+\lambda)}{(\nu-\nu_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]\cos\nu t \qquad (18)$$

o introduciendo los valores de c y d y sustituyendo ν y ν_0 por $2\pi n$ y $2\pi n_0$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{\mathrm{NM}^2\mathrm{H}'}{\mathrm{I}}\frac{1}{n_0^2-n^2+i\frac{\lambda}{\pi}n} \left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right)\frac{z(z+\lambda)}{4\pi^2(n-n_0)^2+(z+\lambda)^2}\right]. \qquad (19)$$

Para $z=0$, lo que corresponde a prescindir de los choques, se obtiene el resultado de nuestro trabajo anterior (1):

$$\mathcal{M} = \frac{1}{6\pi^2}\frac{\mathrm{NM}^2}{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{H}'}{n_0^2-n^2+i\frac{\lambda}{\pi}n}. \qquad (20)$$

Volvamos ahora la expresión (19). Discutamos, primeramente, la expresión entre llaves. Si la representamos por u e introducimos en lugar de λ su valor δn_0 se tiene:

$$u = \left[1-\frac{1}{2}\frac{n+n_0}{n_0}\frac{z(z+\delta n_0)}{4\pi^2(n-n_0)^2+(z+\delta n_0)^2}\right]. \qquad (21)$$

Para discutir esta expresión es menester hacer suposiciones respecto a z y δ. A z ya la hemos supuesto pequeña respecto a n_0; en cuanto a δ se puede afirmar sobre la base de la dependencia de la permeabilidad con el período que enseñan todas la mediciones (incluso las discutidas) que es mayor que cero y no sumamente pequeña. Para el níquel resulta de nuestras investigaciones $\delta = 0{,}025$. Supondremos, pues, que, δn_0 es del mismo orden que z; la influencia de esta suposición sobre la

(1) R. G. LOYARTE, *l. c.*, I, 453, 1917.

dependencia entre u y n no es muy grande. Así resulta que para $n = 0$ ó $n = \infty$ es $u = 1$ y para $n = n_0$ su valor es próximo a $\frac{1}{2}$; variando entre esos límites lentamente con n.

Puesto que es

$$H' = H + g\mathfrak{M}$$

resulta

$$H = \left[\frac{n_0^2 - n^2 + i\frac{\delta}{\pi}nn_0}{\frac{NM^2u}{6\pi^2 I}} - g\right]\mathfrak{M}. \qquad (22)$$

La susceptibilidad magnética, compleja, es, por consiguiente,

$$\overline{K} = \frac{\mathfrak{M}}{H} = \frac{\frac{NM^2}{6\pi^2 I}u}{n_0^2 - g\frac{NM^2}{6\pi^2 I}u - n^2 + i\frac{\delta}{\pi}nn_0}. \qquad (23)$$

Escribamos

$$n_0'^2 = n_0^2 - g\frac{NM^2}{6\pi^2 I}u. \qquad (24)$$

Así se obtiene

$$\overline{K} = \frac{\frac{NM^2}{6\pi^2 I}u}{n_0'^2 - n^2 + i\frac{\delta}{\pi}nn_0}.$$

Para $n = 0$, $u = 1$, de modo que se tiene

$$\left[\overline{K}\right]_{n=0} = K_0 = \frac{NM^2}{6\pi^2 I n_0''^2}, \qquad (25)$$

donde es $n_0''^2$ el valor que toma $n_0'^2$ para $u = 1$, y, por lo tanto,

$$\overline{K} = \frac{n_0''^2 K_0 u}{n_0'^2 - n^2 + i\frac{\delta}{\pi}nn_0} \qquad (26)$$

y

$$n_0'^2 = n_0^2 - gK_0 u n_0'^2$$

o

$$n_0'^2 = \frac{n_0^2}{1 + gK_0 u}. \qquad (27)$$

Puesto que tanto en níquel como en hierro es g muy grande respecto a la unidad y que K_0 tiene en el níquel el valor uno, más o menos, y en hierro mayor todavía, puede escribirse, con mucha aproximación,

$$n_0' = \frac{n_0}{\sqrt{g K_0 u}}$$

y, por lo tanto,

$$n_0'' = \frac{n_0}{\sqrt{g K_0}}$$

y

$$\frac{n_0'}{n_0''} = \frac{1}{\sqrt{u}}. \tag{28}$$

La (26) puede, pues, escribirse,

$$\overline{K} = \frac{K_0 u}{\frac{1}{u} - \frac{n^2}{n_0''^2} + i \frac{\delta}{\pi} \frac{n n_0}{n_0''^2}}, \tag{29}$$

de donde resulta para la susceptibilidad K y la conductibilidad magnética σ_m, del mismo modo que en el trabajo anterior, citado al pie de la página precedente,

$$K = \frac{K_0 u}{\frac{1}{u} - \frac{n^2}{n_0''^2} + \frac{\delta^2}{\pi^2} g K_0 \frac{\frac{n^2}{n_0''^2}}{\frac{1}{u} - \frac{n^2}{n_0''^2}}} \tag{30}$$

$$\sigma_m = \frac{2 \frac{\delta}{\pi} K_0 u \frac{n^2}{n_0''^2} \cdot n_0}{\left[\frac{1}{u} - \frac{n^2}{n_0''^2}\right]^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} g K_0 \frac{n^2}{n_0''^2}}. \tag{31}$$

Dejando de lado los choques, se obtiene, como puede verse en el trabajo anterior, página 464, volumen I, serie matemático-física de las *Contribuciones*,

$$K = \frac{K_0}{1 - \frac{n^2}{n_0'^2} + \varepsilon'^2 \frac{\frac{n^2}{n_0'^2}}{1 - \frac{n^2}{n_0'^2}}}$$

y

$$\sigma_m = \frac{2\pi K_0 \varepsilon' n_0' \left(\dfrac{n}{n_0'}\right)^2}{\left[1 - \dfrac{n^2}{n_0'^2}\right]^2 + \varepsilon'^2 \dfrac{n^2}{n_0'^2}},$$

donde n'_0 desempeña el papel de n_0'' y ε'^2 el de $\frac{\delta^2}{\pi^2} g K_0$. La forma de la dependencia de K y, por lo tanto, de la permeabilidad con la frecuencia es, en esencia, la misma en ambos casos, ya que u varía muy lentamente con la frecuencia. Una discusión más prolija de las ecuaciones (3) y (31) es innecesaria.

La consideración de los choques no altera pues, mayormente, la dependencia a que nos veníamos refiriendo ; la explicación de Page de los resultados de Wwedensky y K. Theodortschik no es, por lo tanto, correcta. Para explicarlos sería menester suponer valores de n_0'' y, por lo tanto de n_0, y de $\frac{\delta^2}{\pi^2} g K_0$ tales que no estarían en armonía con otros hechos conocidos.

RAMÓN G. LOYARTE.

(Entregado a la secretaría de la Facultad el 5 de mayo de 1926; impreso en agosto de 1926.)