

Capítulo 2

Modelo Estándar Electrodébil

2.1. Introducción

La búsqueda del conocimiento de los constituyentes fundamentales de la materia y de las interacciones que rigen su dinámica ha impulsado el desarrollo de la física de altas energías, y con ello ha generado modelos que explican las observaciones experimentales. Particularmente, el modelo que ha tenido mayor éxito hasta estos días, es el Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales [4, 5], que consiste en una teoría que describe las interacciones electrodébiles y fuertes (este modelo no incluye la interacción gravitacional). El ME no sólo describe extremadamente bien los resultados experimentales; también ocurre que algunas de sus predicciones, como la existencia de los bosones mediadores de las interacciones débiles y la relación entre sus masas, fueron ya corroboradas incluso con precisión de varias cifras significativas.

El propósito del presente capítulo es realizar una breve introducción a la dinámica del ME, a fin de presentar la metodología de trabajo de la física de partículas elementales.

2.2. Partículas Elementales

Entendemos por partículas elementales a los constituyentes puntuales de la materia, esto es, sin subestructura conocida por debajo de los presentes límites experimentales de $10^{-18} - 10^{-19}$ m. Éstas son de dos tipos; partículas materiales y partículas intermedias o de interacción [6, 7].

Las partículas materiales del ME son fermiones de espín $s = 1/2$ y se clasifican a su vez en leptones y quarks. Los leptones son: el electrón e , el muón μ , el tau τ , y sus correspondientes neutrinos ν_e , ν_μ y ν_τ . Las principales características de los leptones dentro del ME se presentan en el cuadro 2.1. Cada uno de los leptones cargados tiene además su antipartícula, lo cual implica por ejemplo, que el electrón e^- tiene una antipartícula llamada positrón e^+ que posee la misma masa que el electrón pero carga opuesta. Es decir que en total tenemos 6 leptones cargados. En el caso de los neutrinos, debido a que tienen

carga eléctrica nula, surgen dos posibilidades para ellos: en principio podrían ser sus propias antipartículas (lo cual los constituye en fermiones de Majorana), o en caso contrario, cada neutrino puede tener una antipartícula distinta a ella misma (constituyéndolos en fermiones de Dirac). Si bien los neutrinos en el ME carecen de masa, existe evidencia experimental reciente que confirma que ésta, aunque pequeña, no es cero, lo cual enriquece la fenomenología de los mismos ya que implica la existencia de oscilaciones, ángulos de mezclas, violaciones de números cuánticos, etc. La detección de las masas de neutrinos constituye así una de las primeras observaciones de física mas allá del ME. Actualmente existen numerosos modelos que pretenden describir la masa de los neutrinos así como sus oscilaciones, pero un análisis detallado de los mismos se escapa del propósito del presente trabajo doctoral. Por otra parte, los quarks son seis y se los denomina: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) y bottom (b); se dice por tanto, que existen seis “sabores” de quarks, y a su vez, existen las correspondientes antipartículas de cada uno. Experimentalmente no ha sido posible encontrar quarks en estados aproximadamente “libres”. Como se mencionará posteriormente, se supone que estas partículas se encuentran en estados ligados llamados hadrones y clasificados a su vez en mesones [estados ligados de quark-antiquark, $(\bar{q}q')$] y bariones [estados ligados de tres quarks, $(qq'q'')$]. Esta descripción de la estructura de los hadrones es consistente con los resultados de experimentos de dispersión profundamente inelástica, que muestran que los mesones tienen dos quarks “de valencia” y los bariones tres, pero debe hacerse la aclaración que los hadrones son estados muy complejos de interacciones entre quarks y partículas mediadoras. Las masas aproximadas de los quarks en el ME pueden verse en el cuadro 2.2 [8]. Los estados que involucran a los quarks “livianos” u , d y s muestran una simetría aproximada bajo el grupo $SU(3)_f$, donde f designa el sabor.

Cuadro 2.1: Leptones en el ME.

Lepton	Masa [MeV/c ²]	Vida media [s]	Carga
Electrón e^-	0.511	∞	-1
Neutrino electrónico ν_e	0	∞	0
Muón μ^-	105.658	$2,197 \times 10^{-6}$	-1
Neutrino muónico ν_μ	0	∞	0
Tau τ^-	1777	$(291,0 \pm 1,5)$	-1
Neutrino taónico ν_τ	0	∞	0

El segundo tipo de partículas son denominadas partículas mediadoras o de interacción y en general son bosones. Éstos en el ME son: el fotón γ , los bosones débiles W^- , W^+ y Z , mediadores de la interacción electrodébil (en el ME la interacción electromagnética y la débil están vinculadas entre sí), los ocho gluones G^a ; $a = 1, \dots, 8$, mediadores de la interacción fuerte, y el bosón de Higgs Φ , que entra en el ME a raíz de la inclusión de un sector escalar que tiene como fin dotar de masa a las partículas, como se explicará en una sección posterior. Cabe destacar que el sector escalar del ME no ha sido confirmado

Cuadro 2.2: Quarks del ME.

Quark	Masa [MeV/c ²]	Carga
u	2-8	2/3
d	5-13	-1/3
c	1000-1600	2/3
s	100-300	-1/3
t	168000-192000	2/3
b	4100-4500	-1/3

experimentalmente hasta el momento de escritura del presente trabajo doctoral. Por otra parte, aunque el ME no incluye a la interacción gravitacional, también se presume la existencia de su mediador, denominado gravitón, el cual tampoco ha sido detectado. Las principales características de los mediadores en el ME están consignadas en el cuadro 2.3.

Cuadro 2.3: Partículas Mediadoras

Interacción	Bosón	Espín	Carga Eléctrica	Masa [GeV/c ²]
Débil	W^-, W^+, Z	1	-1, +1, 0	80.4, 80.4, 91.188
Electromagnética	γ (fotón)	1	0	0
Fuerte	G^a $a = 1, \dots, 8$ (gluones)	1	0	0

2.3. Simetrías

En la naturaleza existen distintos tipos de simetrías, las cuales pueden clasificarse en dos grupos principales [6]:

1. Simetrías Discretas.
2. Simetrías Continuas.

Las simetrías continuas pueden clasificarse a su vez en: simetrías espacio temporales y simetrías internas. Nos concentraremos aquí fundamentalmente en las transformaciones de simetría internas, que en general actúan simultáneamente sobre los números cuánticos y las coordenadas espacio-temporales de una partícula inicial, transformándola en una partícula de diferentes números cuánticos y coordenadas espacio-temporales en el estado final, pero conservando la misma masa.

Hay dos clases de simetrías internas:

- Simetría global: donde los parámetros de la transformación no dependen de las coordenadas espacio temporales.
- Simetría local: donde los parámetros de la transformación dependen explícitamente de las coordenadas espacio temporales.

Apoyándonos en la teoría de grupos, sabemos que toda simetría que pueda ser representada mediante un grupo de Lie está caracterizada por un número de generadores, y los elementos del grupo pueden representarse mediante una transformación unitaria, es decir

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i \sum_{a=1}^n \alpha_a T^a}, \quad (2.1)$$

siendo α_a los parámetros de la transformación U y T^a los generadores del grupo en la correspondiente representación. Éstos deben cumplir las relaciones de conmutación:

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c, \quad (2.2)$$

donde f_{abc} son las constantes de estructura del álgebra de Lie correspondiente.

Basados en esto, podemos decir que las transformaciones de simetría globales deben tener la forma 2.1, mientras que las transformaciones de simetría locales tienen la forma

$$U(\alpha) = e^{i \sum_{a=1}^n \alpha_a(x) T^a} \quad (2.3)$$

donde α_a depende de las coordenadas espacio-temporales.

Durante el siglo XX, muchos físicos se dedicaron al estudio del espectro de las partículas y de las interacciones entre ellas, hasta que históricamente Weinberg, Salam y Glashow postularon que la simetría local interna base para construir el modelo estándar electrodébil es $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [4, 5].

2.4. Organización de las Partículas del Modelo Estándar

Los leptones y los quarks en el modelo estándar se organizan en tres familias que tienen características similares excepto por sus masas [8, 9]:

$$1^a \text{ Familia : } \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, e_R^-, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, u_R, d_R \quad (2.4)$$

$$2^a \text{ Familia : } \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \mu_R^-, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, c_R, s_R \quad (2.5)$$

$$3^a \text{ Familia : } \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L, \tau_R^-, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, t_R, b_R \quad (2.6)$$

Aquí los campos derechos (R) o izquierdos (L) están dados en términos del operador de quiralidad γ_5 mediante:

$$\psi_L = P_L \psi \quad , \quad \psi_R = P_R \psi \quad , \quad (2.7)$$

donde se han definido los proyectores de quiralidad izquierda y derecha como $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ y $P_R = (1 + \gamma_5)/2$ respectivamente y donde ψ puede ser cualquiera de los campos leptónicos o de los quarks, introducidos previamente. Los campos “izquierdos” transforman como dobletes de $SU(2)_L$ o grupo de “isospin”, en tanto que los campos “derechos” transforman como singuletes de $SU(2)_L$.

Las partículas organizadas de esta forma son autoestados del operador T_3 de isospin y del operador Y , denominado hipercarga, los cuales son generadores diagonales de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ respectivamente. Estos operadores determinan dos números cuánticos Y y T_3 , relacionados con la carga eléctrica mediante la relación de Gell Mann-Nishijima [10]:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} . \quad (2.8)$$

2.5. Principio Gauge

Para interpretar el principio gauge consideremos un sistema físico de partículas Ψ cuya dinámica sea descrita mediante un Lagrangiano \mathcal{L} el cual es invariante bajo una simetría global U . Si promovemos que esta simetría se torne local $U(x)$, estaremos transformando las partículas y generando simultáneamente una teoría de interacciones [11].

De este modo, para el ME tendremos que debe ser posible generar los términos de las interacciones electrodébil y fuerte (con todas las propiedades de simetría correctas) al hacer una transformación gauge local sobre los términos en el Lagrangiano libre para todas las partículas

El procedimiento para hacer una teoría invariante bajo transformaciones locales es el siguiente: mediante una derivada covariante se introducen nuevos campos bosónicos, llamados campos de gauge, que interactúan con el campo Ψ de modo que el Lagrangiano

sea invariante de gauge. El número de campos gauge y las características particulares de las interacciones de gauge dependen del grupo de simetría, siendo el número de bosones de gauge igual al número de generadores del grupo de simetría.

2.6. Ruptura Espontánea de la Simetría.

Una definición simple del fenómeno de la ruptura espontánea de la simetría es[7]:

Un sistema físico tiene una simetría espontáneamente rota si las interacciones que gobiernan la dinámica del sistema poseen tal simetría y el estado base (vacío) del mismo no.

La ruptura espontánea de la simetría tiene repercusiones sobre la dinámica del sistema. Una de estas implicaciones está descrita por el teorema de Goldstone[7]:

Si una teoría de campos tiene una simetría global del Lagrangiano que a su vez no es simetría del vacío entonces debe existir un bosón escalar o pseudoescalar sin masa, asociado a cada generador que no aniquile el vacío, y que tiene sus mismos números cuánticos. Estos modos se denotan como bosones de Nambu-Goldstone o simplemente bosones de Goldstone

Estamos por tanto en capacidad de utilizar estos elementos básicos para construir el Lagrangiano del Modelo Estándar, donde la simetría de gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, está espontáneamente rota a $SU(3)_C \otimes U(1)_Q$

2.7. Lagrangiano del Modelo Estándar

Para construir el lagrangiano del ME consideraremos primero como ejemplo la electrodinámica cuántica (QED). La QED es la teoría que describe la dinámica de partículas cargadas electromagnéticamente (fundamentalmente electrones y positrones) cuya interacción está mediada por el fotón. De hecho, la electrodinámica clásica puede ser reproducida a partir del límite clásico de la QED, de allí a que sea la teoría de gauge más exitosa de la física de partículas y haya sido probada a niveles de precisión extremos. Se pueden recrear los principios básicos de dicha teoría comenzando por el siguiente sistema físico: un campo de Dirac Ψ libre sin masa y con espín $s = 1/2$. Es decir, un Lagrangiano de la forma [12]:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu) \Psi \quad (2.9)$$

La demostración de que este Lagrangiano es invariante bajo una transformación global $U(1)$ es inmediata, ya que ésta actúa sobre los campos y las derivadas como:

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta Q} \Psi \quad ; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\theta Q} \quad ; \quad \partial_\mu \Psi \rightarrow e^{i\theta Q} \partial_\mu \Psi \quad (2.10)$$

donde θ es un parámetro continuo y Q es el generador del grupo $U(1)$.

Si promovemos ahora que la transformación sea local, el parámetro θ dependerá de las coordenadas espacio temporales, de donde las correspondientes transformaciones sobre los campos y sus derivadas son:

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta(x) Q} \Psi \quad , \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-i\theta(x) Q} \quad (2.11)$$

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow e^{i\theta(x) Q} \partial_\mu \Psi + iQ [\partial_\mu \theta(x)] e^{i\theta(x) Q} \Psi. \quad (2.12)$$

Reemplazando en el Lagrangiano tenemos:

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi} \gamma^\mu [\partial_\mu + iQ (\partial_\mu \theta(x))] \Psi, \quad (2.13)$$

luego el Lagrangiano no es invariante bajo esta transformación local, debido a que se ve la aparición de un término adicional en el lado derecho de (2.13). Para restaurar la simetría utilizaremos el Principio Gauge, el cual nos indica que debemos introducir un bosón vectorial gauge: el campo fotónico $A_\mu(x)$, que interactúa con el campo Ψ y transforma bajo el grupo de simetría $U(1)$ como:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (2.14)$$

Esta transformación asegura que se compensará el término adicional de $\partial_\mu \theta \neq 0$ tal que el Lagrangiano total sea finalmente invariante gauge.

La manera más sencilla de construir un Lagrangiano invariante es simplemente reemplazando la derivada usual, ∂_μ , por la llamada derivada covariante, D_μ [12]:

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow D_\mu \Psi = (\partial_\mu - ieQ A_\mu) \Psi \quad (2.15)$$

que frente a $U(1)$ transforma como el campo Ψ :

$$D_\mu \Psi \rightarrow e^{i\theta(x) Q} D_\mu \Psi. \quad (2.16)$$

Por último, para incluir la propagación del campo A_μ (que en QED es el fotón) se adiciona el llamado término cinético

$$\mathcal{L}_{Kin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.17)$$

(el cual es a su vez invariante gauge), donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.18)$$

De este modo el Lagrangiano total, invariante de Lorentz e invariante gauge $U(1)$, es el siguiente:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu)\Psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.19)$$

donde se ha incluido el término de “fijado del gauge” $-1/2(\partial_\mu A^\mu)^2$ en el gauge de Lorentz, con el fin de obtener invariancia de Lorentz manifiesta en la teoría.

Como se ha mencionado, el Lagrangiano de la QED es un paradigma para la realización de una teoría de partículas, por tanto extendamos este procedimiento al grupo que nos interesa, $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

El grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ tiene en total 4 generadores, de los cuales tres corresponden al grupo $SU(2)_L$ (y a los cuales denotaremos por $T^a : a = 1, 2, 3$) y el restante es el generador de hipercarga Y correspondiente al grupo $U(1)_Y$. Si partimos nuevamente de:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu)\Psi \quad (2.20)$$

donde ahora Ψ es un doblete de campos fermiónicos izquierdos (dobletes de isospin), podemos ver inmediatamente que el Lagrangiano es invariante bajo una transformación global $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, ya que la transformación actúa sobre los campos y las derivadas como:

$$\Psi \rightarrow e^{ig \sum_{a=1}^3 \theta_a T^a} e^{ig' Y \alpha} \Psi \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-ig \sum_{a=1}^3 \theta_a T^a} e^{-ig' Y \alpha} \quad (2.21)$$

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow e^{ig \sum_{a=1}^3 \theta_a T^a} e^{ig' Y \alpha} \partial_\mu \Psi$$

donde θ_a y α son parámetros continuos globales.

Si promovemos ahora la transformación de fase de global a local, es decir si hacemos que los parámetros θ_a y α dependan de las coordenadas espacio-temporales, vemos que no se tiene invariancia gauge local debido a que la derivada incluirá términos de derivadas de $\theta(x)$ y $\alpha(x)$, por tanto podemos vía el principio gauge introducir la derivada covariante. Esta derivada tiene la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{a=1}^3 T^a W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu, \quad (2.22)$$

donde se han incluido campos gauge W_μ^a con $a = 1, 2, 3$, y B_μ . Los primeros son bosones vectoriales asociados al grupo $SU(2)_L$, y el último corresponde al grupo $U(1)_Y$.

Podemos realizar algo más de álgebra en la derivada covariante a fin de que ésta quede en función de los estados bosónicos físicos, que surgen de combinaciones de los W_μ^a . En

la representación fundamental de $SU(2)_L$, se tiene $T_a = \sigma_a/2$, siendo σ_a las matrices de Pauli. De este modo,

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \right\} + i\frac{g'}{2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} B_\mu. \quad (2.23)$$

Definiendo ahora

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (2.24)$$

se tiene

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{g'}{g}YB_\mu & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{g'}{g}YB_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

En adelante definiremos $\tan \theta_W = g'/g$ siendo θ_W el “ángulo de Weinberg”. Haciendo una rotación de ángulo θ_W , definimos

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \text{sen } \theta_W \\ -\text{sen } \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

de donde podemos finalmente escribir la derivada covariante como:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) + igA_\mu \text{sen } \theta_W Q + \frac{igZ_\mu}{\cos \theta_W}(T^3 - \text{sen}^2 \theta_W Q), \quad (2.27)$$

donde $T^\pm = (\sigma_1 \pm \sigma_2)/2$ y $Q = T_3 + Y/2$ (como se anticipó en la ec.(2.8)).

Cabe destacar que los campos izquierdos han sido introducidos en el modelo como dobles de $SU(2)$ (de allí la notación $SU(2)_L$), mientras que los derechos transforman como singletes de $SU(2)_L$. La derivada covariante actúa según $D_\mu \psi_R = (\partial_\mu + igA_\mu \text{sen } \theta_W Q - igZ_\mu \text{sen}^2 \theta_W Q / \cos \theta) \psi_R$ (ver ecs. (2.4)-(2.6)).

Continuando con el procedimiento descrito para el Lagrangiano de la QED, al haber incluido nuevos campos vectoriales, debemos adicionar el término de propagación de los campos, también denominado término cinético, el cual debe ser invariante gauge y podemos escribirlo en términos de un tensor de esfuerzo, obteniendo un Lagrangiano tipo Yang-Mills para la teoría electrodébil:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

donde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (2.29)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.30)$$

Es importante destacar que el término $g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ introducido en la ec.(2.7) es debido a la naturaleza no abeliana del grupo $SU(2)_L$. Dicho término genera interacción entre los bosones de gauge de $SU(2)_L$ (algo que no ocurre en QED).

Por tanto hasta el momento podemos escribir el Lagrangiano invariante de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ como:

$$\mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle - \frac{1}{4} \langle B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \rangle + \Psi_L i \gamma^\mu D_\mu \Psi_L + \Psi_R i \gamma^\mu D_\mu \Psi_R, \quad (2.31)$$

donde se ha tenido en cuenta explícitamente que nuestro espectro se ha dividido en campos derechos y campos izquierdos, dado que la derivada covariante actúa de manera diferente sobre estos estados.

Cabe notar que la inclusion de un término de masas de la forma $m \bar{\psi} \psi = m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R)$ no es compatible con esta formulación debido a que se mezclarían inadecuadamente campos izquierdos (singletes) y derechos (dobletes), implicando una ruptura explícita de la simetría de gauge.

A fin de incluir las masas de las partículas, en el ME se incluye un Lagrangiano escalar. Éste rompe espontáneamente la simetría y permite la existencia de términos de masa mediante el llamado mecanismo de Higgs.

2.7.1. Lagrangiano Escalar

En esta subsección se aborda el Lagrangiano escalar del Modelo Estándar. Sus consecuencias, como la ruptura espontánea de la simetría y el Mecanismo de Higgs, son una parte esencial de la descripción de las partículas elementales. [6, 7, 9, 13, 14]

Partimos del Lagrangiano escalar:

$$\mathcal{L}_{escalar} = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi). \quad (2.32)$$

Aquí el potencial está definido mediante:

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.33)$$

con λ real positivo y donde Φ es un campo escalar complejo, representado mediante un doblete de $SU(2)_L$ y que tiene hipercarga $Y = 1$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^\pm \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 + i\phi^2 \\ \sigma + i\chi \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Esta definición asegura que el lagrangiano escalar es invariante frente a $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Podemos obtener el vacío a partir del hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}[(\partial_0\Phi_0)^2 + (\nabla\Phi)^2] + V(\Phi^\dagger\Phi). \quad (2.35)$$

El mínimo de H se obtiene para $\langle\Phi\rangle_0 = \text{constante}$. Debido a la simetría $SU(2)$, puede elegirse sin pérdida de generalidad

$$\langle\Phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

tal que v corresponda al mínimo del potencial $V(\Phi^\dagger\Phi)$ y por consiguiente de la energía. Podemos encontrar la ecuación para éste mínimo:

$$\mu^2 + \lambda\langle\Phi\rangle_0^2 = 0, \quad (2.37)$$

de donde surge

$$v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (2.38)$$

A partir de estos resultados podemos realizar las siguientes consideraciones sobre el valor de μ :

Si $\mu^2 > 0$ tenemos un único estado de vacío, como se ve en un diagrama del potencial (Figura 1.1 (a)).

Si $\mu^2 < 0$ no tenemos un estado de vacío único, lo cual puede verse claramente en la figura del potencial (Figura 1.1 (b)). Decimos que se ha roto espontáneamente la simetría, dado que en general $T_a|0\rangle \neq 0$ para los generadores del grupo de gauge.

Debido a que la hipercarga del campo Φ es 1, se obtiene para el estado de vacío

$$\left(T_3 + \frac{Y}{2}\right) \langle\Phi\rangle_0 = 0 \quad (2.39)$$

es decir, el estado de vacío es aniquilado por el operador $T_3 + Y/2$, y recordando la ec.2.8, concluimos que la simetría $U(1)$ relacionada con el operador de carga no se rompe. De este modo se tiene el siguiente patrón de ruptura de la simetría [14]:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{v} U(1)_Q$$

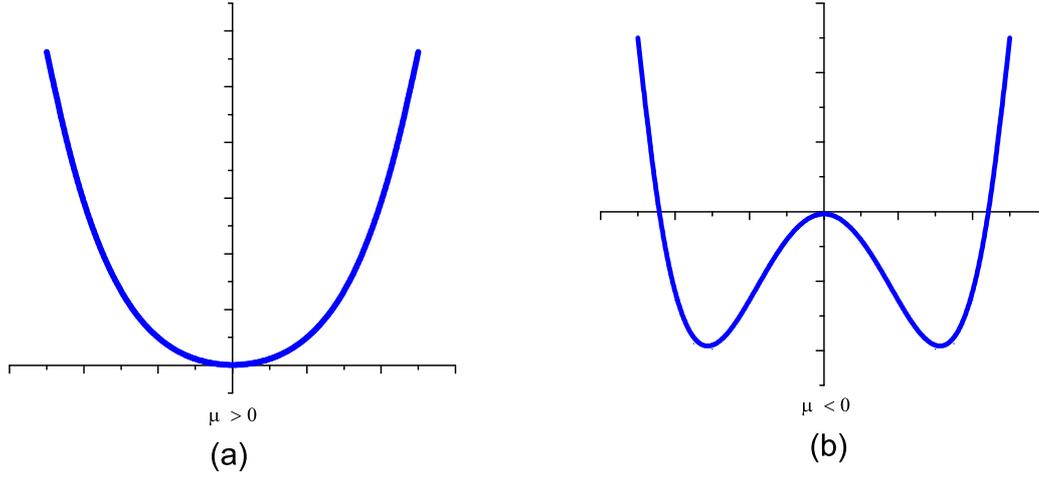


Figura 2.1: Potencial Del Lagrangiano Escalar

El fotón, generador de $U(1)_Q$, permanece sin masa. En cambio, veremos que los bosones de gauge asociados con los generadores T^1, T^2 y $T^3 - Y/2$ adquieren masa.

Si expresamos ϕ^0 en términos de $\langle \phi \rangle_0$:

$$\sigma + i\chi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{H}{\sqrt{2}} + i\chi \quad (2.40)$$

donde el campo H se denomina bosón de Higgs, podemos escribir el Lagrangiano (consideramos únicamente los términos asociados a σ) como:

$$\mathcal{L}_{escalar} = \left| \left(\partial_\mu + igT^a W_\mu^a + i\frac{g'}{2} B_\mu \right) \frac{v+H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 - \mu^2 \frac{(v+H)^2}{2} - \lambda \frac{(v+H)^4}{4}. \quad (2.41)$$

Aquí los términos cuadráticos para los campos vectoriales son:

$$\frac{g^2(v+H)^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2(v+H)^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu,$$

donde los términos con v^2 constituyen términos de masa para los bosones W^\pm y Z . Se tiene entonces

$$M_W = \frac{gv}{2},$$

$$M_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}. \quad (2.42)$$

De este modo, el mecanismo de Higgs ha dotado de masa a los bosones W y Z partiendo de un Lagrangiano invariante de gauge, a través de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

2.8. Masas Fermiónicas y Lagrangiano final del Modelo Estándar Electrodébil.

Por último, para dotar de masa a los fermiones, incluimos un acoplamiento entre fermiones y escalares, o Lagrangiano de Yukawa, invariante frente al grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [6, 7]:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{i,j}^3 [(L_i^{q\dagger} \Phi) r_j^D h_{ij}^D + (L_i^{q\dagger} \tilde{\Phi}) r_j^U h_{ij}^U + (L_i^{\ell\dagger} \Phi) r_j^\ell h_{ij}^\ell + h.c.], \quad (2.43)$$

donde hemos introducido una notación más compacta para los dobletes izquierdos (L_i) y para los singletes derechos (r_j) provenientes de las ec.(2.4, 2.5 y 2.6), con i y j índices que corresponden a cada familia considerada, y donde $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$. Nótese que este lagrangiano no mezcla el sector leptónico (ℓ) con el de quarks (q) debido a la simetría frente a $U(1)_Y$.

Teniendo en cuenta la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, y escribiendo el campo ϕ^0 como en la ec.(2.40), a partir de la ec.(2.43) se obtiene para el sector de quarks el siguiente lagrangiano para las masas:

$$\mathcal{L}_Y^{(masas)} = \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{D}_{iL}^0 h_{ij}^D D_{jR}^0 + \bar{U}_{iL}^0 h_{ij}^U U_{jR}^0 + h.c.), \quad (2.44)$$

donde $U^0 = (u_1^0 \ u_2^0 \ u_3^0)^T$ y $D^0 = (d_1^0 \ d_2^0 \ d_3^0)^T$ contienen a los quarks. De esta forma podemos identificar las matrices de masa para los sectores up y down como

$$M_{U_{ij}} = \frac{v}{\sqrt{2}} h_{ij}^U, \quad M_{D_{ij}} = \frac{v}{\sqrt{2}} h_{ij}^D. \quad (2.45)$$

Es conveniente ahora llevar a cabo rotaciones en el espacio de sabor para los fermiones de cada carga y quiralidad, a fin de escribir el lagrangiano en términos de los autoestados de masa,

$$U_{L,R}^0 = V_{L,R}^U U_{L,R}, \quad D_{L,R}^0 = V_{L,R}^D D_{L,R} \quad (2.46)$$

Las matrices de masa diagonales vendrán dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_U &= \text{diag}(m_u, m_c, m_t) = V_L^{U\dagger} M_U V_R^U \\ \mathcal{M}_D &= \text{diag}(m_d, m_s, m_b) = V_L^{D\dagger} M_D V_R^D\end{aligned}\quad (2.47)$$

donde $V_{L,R}^\psi$ son matrices unitarias de 3×3 .

Por último podemos recopilar toda la información expuesta en las secciones anteriores para escribir el Lagrangiano del modelo estándar electrodébil como:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\Psi + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{escalar} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{F.G.} + \mathcal{L}_{F.P.G.}\quad (2.48)$$

donde se ha incluido el Lagrangiano que fija el gauge ($\mathcal{L}_{F.G.}$) definido mediante:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{F.G.} &= -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu Z^\mu + \eta M_Z \chi)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\xi}|(\partial_\mu - igW_\mu^3)W^{\mu+} - i\xi M_W \phi^+|^2\end{aligned}\quad (2.49)$$

con α , η y ξ constantes que toman valores dependiendo del gauge covariante renormalizable en el cual se desee trabajar. Por último, aunque incluimos en ec.(2.48) el término del Lagrangiano de Faddeev-Popov ($\mathcal{L}_{F.P.G.}$), no nos detendremos en su análisis, debido a que para los efectos de la presente tesis doctoral no se hace necesario. Se menciona simplemente debido a que es una parte importante de la construcción de la funcional generatriz del ME.

2.8.1. Corrientes Neutras en el ME.

A fin de presentar algunos resultados que serán utilizados en los siguientes capítulos, analizaremos algunos aspectos del Lagrangiano del ME ec(2.48). Partiendo del primer término de este Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_I = \bar{\Psi}^0(i\gamma^\mu D_\mu)\Psi^0\quad (2.50)$$

podemos obtener los acoplamientos del campo A^μ con los fermiones:

$$\mathcal{L}_I^{em} = ig \text{sen } \theta_W Q_f \sum_f (\bar{f}^0 \gamma_\mu f^0) A^\mu\quad (2.51)$$

donde Q_f designa la carga del fermión en cuestión y la suma se extiende a todos los fermiones del ME.

Por otra parte, para el bosón Z^0 , mediador de la interacción débil neutra, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^Z = & -\frac{ig}{2 \cos \theta_W} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \text{sen}^2 \theta_W}{3} \right) \bar{U}_L^0 \gamma_\mu U_L^0 - \frac{2 \text{sen}^2 \theta_W}{3} \bar{U}_R^0 \gamma_\mu U_R^0 \right. \\ & + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}^2 \theta_W}{3} \right) \bar{D}_L^0 \gamma_\mu D_L^0 + \frac{\text{sen}^2 \theta_W}{3} \bar{D}_R^0 \gamma_\mu D_R^0 \\ & + \sum_{\alpha=1}^3 \left(-\frac{1}{2} + \text{sen}^2 \theta_W \right) \bar{\ell}_{\alpha L}^0 \gamma_\mu \ell_{\alpha L}^0 + \text{sen}^2 \theta_W \bar{\ell}_{\alpha R}^0 \gamma_\mu \ell_{\alpha R}^0 \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha L}^0 \gamma_\mu \nu_{\alpha L}^0 \right\} Z^\mu \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde nuevamente $U^0 = (u_1^0 \ u_2^0 \ u_3^0)^T$ y $D^0 = (d_1^0 \ d_2^0 \ d_3^0)^T$ designan a los quarks y $\ell_\alpha = \ell_1, \ell_2, \ell_3$ y $\nu_\alpha = \nu_1, \nu_2, \nu_3$ a los leptones y neutrinos respectivamente. Es importante notar que el Lagrangiano anterior está escrito en la base de interacción utilizada en la ec.(2.31) (denotada con el superíndice 0), de modo que los campos fermiónicos (autoestados de masa) no corresponden a los campos físicos tanto en el sector de quarks como en el leptónico. Se puede ver del lagrangiano ec.(2.52) que los acoplamientos son universales para las tres familias. Esto ocurre para los fermiones izquierdos y para los derechos. Por lo tanto, podemos decir que dentro del ME *los acoplamientos de los fermiones que tienen carga eléctrica idéntica en la base de corriente con el bosón Z, son universales para cada componente de quiralidad*. Para escribir el lagrangiano anterior en términos de los autoestados de masa $U = (u \ c \ t)^T$, $D = (d \ s \ b)^T$, es necesario introducir las matrices unitarias que diagonalizan las matrices de masa de Yukawa, introducidas en la sección anterior (ec.(2.46)).

Al hacer la rotación de los campos se observa que debido a que los acoplamientos son universales (esto es, proporcionales a la identidad en el espacio de sabor), y debido a la unitariedad de las matrices $V_{L,R}^{U,D}$, las interacciones son también diagonales en la base de autoestados de masa. Por tanto, puede decirse que en el ME *no se presentan cambios de sabor en corrientes neutras a nivel árbol*.

2.8.2. Corrientes cargadas en el ME. Matriz CKM y Violación de CP.

Para encontrar la forma que tienen las corrientes cargadas, podemos proceder de manera similar a la esquematizada en la subsección anterior para los bosones neutros, considerando nuevamente el primer término del lagrangiano ec.(2.48). Teniendo en cuenta el espectro de partículas del modelo, los acoplamientos para las corrientes débiles cargadas vienen dados por

$$\mathcal{L}_{cc} = -\frac{ig}{\sqrt{2}} \left[\bar{U}_{iL}^0 \gamma_\mu D_{iL}^0 + \sum_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha L}^0 \gamma_\mu \ell_{\alpha L}^0 \right] W^{\mu+} + \text{h.c.} \quad (2.53)$$

Debido a la simetría del modelo no se tienen corrientes cargadas que involucren a los fermiones derechos.

Ahora bien, si deseamos escribir el lagrangiano ec(2.53) en términos de los autoestados de masa debemos tener en cuenta nuevamente las matrices $V_{L,R}^{U,D}$. Podemos escribir para el sector de quarks

$$\mathcal{L}_{cc}^q = -\frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{U}_L\gamma_\mu V_{CKM}D_LW^{\mu+} + \text{h.c.}, \quad (2.54)$$

donde se ha introducido la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{CKM} [15], definida mediante

$$V_{CKM} = V_L^{U\dagger}V_L^D.$$

Dado que esta matriz no es diagonal, existen cambios de sabor mediados por corrientes débiles cargadas, de este modo el ME predice que los números cuánticos de extrañeza, charm, etc. no son cantidades conservadas en la naturaleza.

Kobayashi y Maskawa en 1973 descubrieron que es necesario que la matriz V_{CKM} tenga al menos una fase compleja (adicional a los tres ángulos de Euler generalizados) para parametrizar en forma general la mezcla de quarks en el caso de tres familias [15]. Por otra parte, si realizamos una transformación de CP (siendo C el operador conjugación carga y P el operador paridad) sobre el Lagrangiano ec.(2.54) obtenemos

$$\mathcal{L}_{cc}^{q\text{ CP}} = -\frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{U}_L\gamma_\mu V_{CKM}^*D_LW^{\mu+} + \text{h.c.}. \quad (2.55)$$

De este modo, la fase compleja en la matriz V_{CKM} implicaría violación de la simetría CP en las interacciones débiles. Investigaciones más detalladas muestran que en general la condición que debe satisfacerse para que esta fase sea observable es

$$(m_t^2 - m_c^2)(m_t^2 - m_u^2)(m_c^2 - m_u^2)(m_b^2 - m_s^2)(m_b^2 - m_d^2)(m_s^2 - m_d^2) \times J_{CP} \neq 0, \quad (2.56)$$

donde J_{CP} (“parámetro Jarlskog”) se define mediante [16]

$$J_{CP} = \pm\text{Im}(V_{i\alpha}V_{j\beta}V_{i\beta}^*V_{j\alpha}^*), \quad (i \neq j, \alpha \neq \beta).$$

Los datos experimentales indican que $J_{CP} \approx \mathcal{O}(10^{-5})$, por lo cual la violación de CP es en general un efecto pequeño en el ME, y de hecho no fue observada experimentalmente hasta el año 1964.

2.9. Cromodinámica Cuántica

La cromodinámica cuántica (QCD), consiste en la descripción de las interacciones fuertes mediante una teoría de gauge local. La simetría en consideración está basada en el grado de libertad de color que tienen los quarks y gluones y se encuentra realizada de

forma exacta. El grupo en cuestión es $SU(3)$, por lo que se denota $SU(3)_C$ [17, 18, 19].

El grupo $SU(3)$ es de dimensión $N^2 - 1 = 8$, de tal manera que si ésta es una simetría de gauge esperamos la presencia de ocho bosones de gauge vectoriales: los gluones. Éstos son de masa nula, dado que la simetría está realizada en forma exacta.

Por otra parte, debido a que no se han observado interacciones fuertes de largo alcance y que los gluones no tienen masa, surge un problema fenomenológico, es decir, debe existir alguna razón por la cual la interacción no tiene alcance infinito aun cuando sus mediadores tienen masa cero. La conjetura en el ME es que la naturaleza no abeliana del campo gauge de color produce un confinamiento espacial de los gluones y quarks, y como consecuencia los estados asintóticos son hadrones, esto es, estados ligados de quarks, sin carga neta de color. El problema del confinamiento no es abordable a través de tratamientos perturbativos, pero hay grandes avances en el uso de teorías no perturbativas utilizando modelos computacionales de discretización del espacio-tiempo (“lattice QCD”) que inducen a creer que QCD es efectivamente una teoría confinada.

2.9.1. Grupo $SU(3)_C$

Experimentalmente las transiciones de cambio de sabor son en general de mucha menor magnitud que aquéllas en donde interviene la fuerza fuerte. El número cuántico de sabor es asociado a la interacción electrodébil, mientras que la fuerza fuerte conserva el sabor y es además independiente de éste. Por otra parte, los mediadores de la interacción electrodébil (γ, Z, W^\pm) no acoplan color. La evidencia empírica impone una serie de requisitos que la teoría de las interacciones de color, esto es, las interacciones fuertes, debe satisfacer [17, 18, 19]:

- El número de colores es $N_c = 3$, por tanto los quarks pertenecen a una representación en tripletes (3) del grupo de simetría.
- Los quarks y antiquarks son estados diferentes. Entonces $3 \neq \bar{3}$, lo cual implica que la representación sea compleja.
- Hipótesis de confinamiento: Los estados hadrónicos son singletes de color.

De todos los grupos de Lie compactos sólo hay cuatro que tienen una representación 3-dimensional irreducible; entonces sólo tenemos las siguientes opciones: $SU(3)$, $SO(3) \simeq SU(2) \simeq S_p(1)$. Debido a que la representación en tripletes de $SO(3)$ es real, el único grupo que sobrevive es $SU(3)$.

2.9.2. Lagrangiano de la QCD

Siguiendo el procedimiento que realizamos para la construcción del Lagrangiano del sector electrodébil del ME, denotaremos por q_f^α un campo quark de color α y sabor f .

Para simplificar las ecuaciones, adoptemos una notación vectorial en el espacio de color: $q_f \equiv (q_f^1 \ q_f^2 \ q_f^3)^T$. El Lagrangiano libre para los quarks es entonces

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f, \quad (2.57)$$

el cual es invariante bajo una transformación global $SU(3)_C$ en el espacio de color:

$$q_f \longrightarrow (q_f)' = U q_f, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1$$

En esta representación, las matrices de transformación U pueden escribirse de la forma

$$U = \exp \left(i g_s \frac{\lambda^a}{2} \theta_a \right), \quad (2.58)$$

donde $\lambda^a/2$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) denota los generadores de la representación fundamental del álgebra de $SU(3)$ y θ^a son constantes arbitrarias. Las matrices λ^a (matrices de Gell-Mann) tienen traza nula y satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c, \quad (2.59)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)_C$.

Como en el caso de las interacciones electrodébiles, se propone que el Lagrangiano sea invariante bajo una transformación $SU(3)_C$ local, $\theta^a = \theta^a(x)$. Para satisfacer este requisito, debemos cambiar las derivadas en la ec.(2.57) por derivadas covariantes. Debido a que tenemos 8 generadores independientes, necesitamos 8 bosones gauge $G_a^\mu(x)$, los llamados gluones:

$$D^\mu q_f \equiv \left[\partial^\mu - i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu(x) \right] q_f \equiv [\partial^\mu - i g_s G^\mu(x)] q_f. \quad (2.60)$$

Nótese que hemos introducido la notación compacta:

$$[G^\mu(x)]_{\alpha\beta} \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{\alpha\beta} G_a^\mu(x). \quad (2.61)$$

Queremos que $D^\mu q_f$ transforme en la misma forma que el vector de color q_f . Esto fija las propiedades de transformación de los campos gauge

$$\begin{aligned} D^\mu &\longrightarrow (D^\mu)' = U D^\mu U^\dagger \\ G^\mu &\longrightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger \end{aligned}$$

La transformación gauge de los campos gluónicos es más complicada que la que se obtiene en el modelo estándar para el fotón. De forma similar a lo que sucede con el grupo

$SU(2)$, la conmutación de las matrices de $SU(3)$ genera un término adicional debido a la naturaleza no abeliana del grupo. Para construir un invariante gauge cinético de los campos gluónicos, introducimos los correspondientes campos de esfuerzo:

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g_s}[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu - ig_s[G^\mu, G^\nu] = \frac{\lambda^a}{2}G_a^{\mu\nu}(x), \quad (2.62)$$

donde

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu. \quad (2.63)$$

Tomando la normalización adecuada para el término cinético gluónico, tenemos finalmente el Lagrangiano de QCD, invariante de $SU(3)_C$ [9]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}\langle G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \rangle + \sum_{k=1}^f \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f + \mathcal{L}_{F.G.} + \mathcal{L}_{F.P.G} \quad (2.64)$$

donde $\langle \rangle$ denota traza en el espacio de color y la suma se extiende sobre todos los sabores de quarks. El Lagrangiano de Fijado de Gauge para QCD en el régimen perturbativo se define mediante

$$\mathcal{L}_{G.F} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu G_\mu^a)^2, \quad (2.65)$$

donde α es una constante que se elige de acuerdo al gauge en el que se desee obtener información. Por otra parte el Lagrangiano de Faddeev-Popov o de fantasmas para QCD esta dado por [9]

$$\mathcal{L}_{F.P.G} = -\bar{c}_a \partial^\mu (\delta_{ac} \partial_\mu - g_s f^{abe} G_\mu^b) c_e, \quad (2.66)$$

donde c representa a los campos fantasmas. Es importante observar que la constante de acoplamiento gauge es la misma para todos los sabores (es decir, la interacción fuerte entre quarks es independiente del sabor). De esta manera tenemos que los números cuánticos de extrañeza, encanto, bottom, etc., son conservados por la interacción fuerte.

2.10. Anomalías quirales en el Modelo Estándar

En todo modelo, bien sea clásico o cuántico, que pretenda explicar la interacción entre partículas, surge el problema de la autointeracción, esto es, la interacción de una partícula consigo misma. El cálculo de las autointeracciones en general conduce a obtener resultados divergentes, implicando que la intensidad de la interacción sea infinita. Los infinitos resultados no tienen interpretación física, por lo cual se hace necesario incluir algún esquema de renormalización a fin conseguir resultados totales finitos. Adicionalmente, se debe exigir que los resultados que se obtienen orden por orden en teoría de perturbaciones sean

finitos, garantizando de esta forma la renormalizabilidad de la teoría. A primer orden en teoría de perturbaciones, usualmente se deben considerar procesos de autointeracción de las partículas haciendo especialmente interesante el estudio de las mismas.

En una teoría cuántica de campos se pueden construir reglas de Feynman (expresiones diagramáticas de interacciones entre partículas) para calcular las funciones de Green y los elementos de la matriz S en teoría de perturbaciones. En una teoría de campos relativista uno usualmente encuentra infinitos en los cálculos de diagramas que contienen loops (primer orden en teoría de perturbaciones). El programa de renormalización que se implementa debe permitir consistentemente aislar y remover estos infinitos a fin de obtener cantidades físicas medibles. Técnicamente la teoría de renormalización es compleja y en la presente tesis doctoral no se pretende hacer un estudio detallado de la misma. Sin embargo, es importante notar que el ME es una teoría renormalizable dado que está basado en una simetría de gauge. Esto implica que mediante la implementación de un esquema de renormalización cálculos de interacciones entre las partículas del modelo tienen resultados finitos y consistentes.

En las siguientes secciones se muestra el resultado del cálculo de la interacción entre las corrientes vectoriales y axiales a primer orden en teoría de perturbaciones, el cual es conocido como anomalía quiral. A fin de encontrar una expresión para las anomalías quirales, es necesario introducir primero las Identidades de Ward.

2.10.1. Identidades de Ward

Las identidades de Ward representan una versión cuántica del teorema de Noether clásico, y están relacionadas con la conservación de corrientes a todos los órdenes en teoría de perturbaciones. Para las teorías de gauge, las identidades de Ward se constituyen en expresiones diagramáticas de la conservación de las corrientes, obtenidas como consecuencia de la invariancia bajo simetrías internas.

Ahora bien, en teorías de gauge no abelianas las funciones de Green (esencialmente, amplitudes de probabilidad de propagar campos entre dos puntos) que tienen un número impar de acoplamientos, contribuyen con términos anómalos a la divergencia de la corriente axial vectorial. La anomalía triangular que consiste en la contribución del “triángulo” formado por tres propagadores fermiónicos (ver figura 2.2), puede considerarse como el diagrama básico en este sentido, ya que su ausencia significa la ausencia de cualquier otro diagrama anómalo [20, 21, 22, 23]. Es necesario que la anomalía esté ausente para asegurar la renormalizabilidad de la teoría, dado que el acoplamiento entre dos bosones de gauge vectoriales y uno axial está ausente a nivel árbol en el lagrangiano.

El diagrama de la figura 2.2 conduce a la siguiente amplitud

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2; q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1 \cdot x_1 + ik_2 \cdot x_2} \langle 0 | T(V_\mu^a(x_1) V_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(0)) | 0 \rangle \quad (2.67)$$

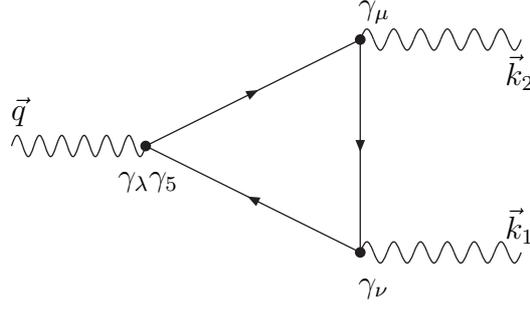


Figura 2.2: anomalía

donde

$$\begin{aligned} V_\mu^a(x) &= \bar{\psi}(x) T^a \gamma_\mu \psi(x) \\ A_\lambda^c(x) &= \bar{\psi}(x) T^c \gamma_\lambda \gamma_5 \psi(x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

son las corrientes vectoriales y axiales respectivamente, y T^a una representación matricial de los generadores del grupo de simetría considerado.

La divergencia de la corriente axial-vectorial conduce a:

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 2m T_{\mu\nu}^{abc} - \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma D^{abc} \quad (2.69)$$

donde $T_{\mu\nu}^{abc}$ viene dado por

$$T_{\mu\nu}^{abc}(k_1, k_2; q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(V_\mu^a(x_1) V_\nu^b(x_2) P^c(0)) | 0 \rangle e^{ik_1 \cdot x_1 + ik_2 \cdot x_2}, \quad (2.70)$$

con

$$P(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x). \quad (2.71)$$

Es importante destacar que la identidad de Ward para diagramas a un loop que contienen campos vectoriales y pseudoescalares (P) y que es libre de anomalías conduce a:

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 2m T_{\mu\nu}^{abc}, \quad (2.72)$$

de donde podemos identificar al segundo término del lado derecho de la ec.(2.69) como el término anómalo. Nótese que el mencionado término anómalo es proporcional a:

$$D^{abc} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\{T^a, T^b\} T^c), \quad (2.73)$$

conocido con el nombre de coeficiente de anomalía triangular. De este modo se puede concluir que $D^{abc} = 0$ garantiza la ausencia del término anómalo en la teoría.

2.10.2. Anomalía triangular en el ME.

En el caso del ME tenemos que los fermiones son dobletes o singletes bajo $SU(2)$. La representación matricial T^a , para este caso serán las matrices de Pauli $\tau^a/2$ o la hipercarga $Y \times \mathbf{1}_{2 \times 2}$. Para el grupo $SU(2)_L$ la anomalía se cancela debido a las propiedades de estas matrices,

$$Tr[\{\tau^i, \tau^j\}\tau^k] = 2\delta^{ij}Tr[\tau^k] = 0 \quad (2.74)$$

mientras que para los coeficientes que incluyen generadores de $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ se tiene

$$Tr[\{Y, Y\}\tau^i] = 2Tr[\tau^i Y Y] \propto Tr[\tau^i] = 0, \quad (2.75)$$

donde se ha tenido en cuenta que cada miembro del multiplete de $SU(2)$ tiene la misma hipercarga. Adicionalmente tenemos el coeficiente con un operador Y :

$$Tr[\{\tau^i, Y\}\tau^j] = Tr[\{\tau^i, \tau^j\}Y] = 2\delta^{ij}Tr[Y]. \quad (2.76)$$

Como puede verse, esta última anomalía es proporcional a la traza de Y (es decir, la suma de los valores de hipercarga de todos los fermiones izquierdos y derechos del modelo). Si recordamos la definición 2.8, podemos encontrar la relación $Y = 2(Q - T_3)$, que podemos utilizar para conocer los números cuánticos de hipercarga para las partículas del ME. De esta forma, para cada familia, se llega fácilmente a

$$\begin{aligned} \sum_{leptones} Y &= -1 - 1 - 2 = -4 \\ \sum_{quarks} Y &= 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = 4. \end{aligned} \quad (2.77)$$

De donde $Tr[Y] = 0$. Aquí el factor 3 que está al frente del paréntesis proviene de sumar sobre los tres colores de quarks. Por último para el coeficiente de anomalía con tres generadores de $U(1)_Y$ tenemos:

$$\begin{aligned} Tr[\{Y, Y\}Y] &= 2Tr[YYY] \\ &= 16Tr[Q^3 - 3Q^2T_3 + 3QT_3^2 - T_3^3] \propto Tr[Q^2T_3 - QT_3^2] = 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde se tuvo en cuenta que $Tr[T_3^3] = 0$, mientras que, debido a que la corriente electromagnética Q es una corriente vectorial (V), Q^3 relacionará tres bosones vectoriales (VVV) y los loops que contienen estas tres corrientes son libres de anomalías. Ahora bien, para cada familia de leptones del ME se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{leptones} (Q^2T_3 - QT_3^2) &= -\frac{1}{4} \\ \sum_{quarks} (Q^2T_3 - QT_3^2) &= 3 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Se concluye, por tanto, que las anomalías quirales en el modelo estándar se cancelan completamente familia por familia [22, 23].