XII

SOBRE LOS ÓVALOS

POR EL DOCTOR JULIO REY PASTOR
Profesor de Matemáticas Superiores para el curso de 1926

RÉSUMÉ

Sur les ovales. — La théorie des ovales a déjà acquis des resultats suffisants pour constituer un corps de doctrine. Etant parvenu à ces résultats par des méthodes analytiques fort laborieuses, l'auteur se propose de démontrer que ses propriétés et beaucoup d'autres nouvelles peuvent s'obtenir synthétiquement en ordonnant convénablement les concepts, d'où une simplicité surprenante et l'inutilité de recourir à des postulats métriques.

SOBRE LOS ÓVALOS

La teoría de los óvalos, iniciada por Brunn ([1]) en su tesis doctoral y desarrollada principalmente por Minkowski ([2]), Blaschke ([3]) y los matemáticos japoneses, cuenta ya con resultados suficientes para organizar un cuerpo de doctrina. Obtenidos éstos aisladamente por métodos analíticos laboriosos, nos proponemos demostrar que todos ellos y otras muchas propiedades nuevas, se pueden obtener sintéticamente con sorprendente sencillez y sin postulados métricos, ordenando adecuadamente los conceptos.

1. Se llama *recinto abierto* a todo conjunto conexo formado por puntos interiores, es decir, un conjunto tal que cada punto tiene un entorno perteneciente al conjunto y dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una poligonal perteneciente al conjunto. Si se consideran, además, los puntos de contorno (es decir, fronteras entre los interiores y los exteriores), el recinto se llama *cerrado*.

Llamaremos *convexo* al recinto cuando el segmento determinado por dos puntos cualesquiera del mismo pertenece a él. *Óvalo* es el contorno de un recinto convexo finito. *A priori* no puede decirse que sea curva en el sentido de Jordan. Lo representaremos por la letra O.

2. *Si* A *es punto del óvalo y* P *interior, todo punto de* AP *es interior.* En efecto, hay un entorno circular de P interior al recinto, y el segmento AP es interior al recinto limitado por dicha circunferencia y las dos

([1]) Brunn, *Ovale und Eiflächen-Inaugural Dissertation–München.*

([2]) Minkowski, *Theorie der konvexen Körper insbesondere Beigründung ihres Oberflächenbegriffs-Gesammelte Ablandhungen*, tomo II, páginas 131-229; *Volumen und Oberfläche, Idem*, páginas 230–276; *Ueber die Körper konstante Breite-Idem*, páginas 277-279.

([3]) Blaschke, *Kreis und Kugel, Vorlesungen über Differentialgeometrie*, volumen II.

tangentes por A. Como este recinto forma parte del dado, por la definición de convexidad, todo punto del segmento AP es interior y no de contorno.

3. *El segmento determinado por dos puntos* AB *del óvalo, pertenece a él o tiene interiores todos sus demás puntos.* Pues si tiene algún punto P que no sea de contorno, todos los demás puntos de AP y de BP son interiores (2).

4. *Si una recta tiene comunes tres puntos* A, B, C, *con el óvalo, tiene común todo un segmento.* Pues si algún punto de AC fuese interior, lo sería también el punto intermedio B según (2).

5. Las rectas que pasan por un punto A del óvalo quedan, pues, clasificadas así : las que tienen un solo punto más de intersección se llaman *secantes ;* a las que no lo tienen, o tienen todo un segmento, las llamaremos de *contacto* [1]; y *exteriores* son las que no tienen ningún punto comun con el óvalo.

6. Según (3) *las secantes tienen un segmento interior y el resto es exterior; las rectas de contacto tienen exteriores sus puntos excepto uno, o un segmento, y el óvalo queda en un solo semiplano.*

7. Si A y B son puntos de O y el segmento AB no pertenece a él, toda recta r secante del segmento lo es de O, puesto que tiene un punto interior y, por tanto, uno de contorno en cada semirrecta, frontera entre los interiores y los exteriores. Si AB pertenece a O, la recta r también es secante; pues si fuera de contacto, estaría O en un semiplano.

Por tanto : *si* M *es un punto cualquiera y los rayos* MA *y* MB *son secantes, lo son todos los del ángulo* AMB.

8. Si M es exterior (propio o impropio) el conjunto de rayos secantes en el haz M es, por tanto, un ángulo que debe ser convexo, pues de lo contrario, según (3), habría puntos del recinto en los rayos opuestos a los secantes, contra (4).

Los lados de este ángulo, que contiene todas las secantes, no son exteriores, porque lo serían todos los de un entorno; ni secantes, por la misma razón; luego son de contacto y no forman recta según (3) luego :

[1] Son las *Stürtzgeraden* de Minkowski.

Por todo punto exterior, propio o impropio, pasan dos rayos de contacto y el óvalo está contenido en el ángulo convexo que determinan.

9. Si M pertenece a O, subsiste lo dicho y los rayos que limitan el ángulo formado por todos los rayos secantes, forman parte de rectas de contacto; los llamaremos rayos o semirrectas *tangentes*.

Todo punto A *de* O *es origen de dos rayos tangentes, que forman un ángulo convexo en el que está contenido* O *y todos los rayos secantes de origen* A. Si los dos rayos tangentes forman una recta, ésta se llama *tangente* y el punto *ordinario*. En caso contrario se llama *anguloso*.

10. Se ve fácilmente que este concepto de tangente no difiere del usual, demostrando que *todo óvalo es una curva cerrada de Jordan*. Si A es un punto interior, cada punto de O determina un rayo proyectante, y a cada rayo corresponde un solo punto, según (3). Falta solo ver la continuidad de la correspondencia. A un entorno circular de M corresponden rayos de un ángulo proyectante que puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo el radio; recíprocamente si δ es un entorno circular del punto M y suponemos que en todo entorno angular de MA hay rayos que corten en puntos exteriores a δ, estos puntos tendrían un punto de acumulación situado en MA y distinto de M, el cual sería también frontera, contra lo antes demostrado.

11. Resultan, pues, las coordenadas del punto M funciones continuas del argumento de MA, es decir, tenemos las ecuaciones del óvalo :

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

siendo el punto (x, y) función biuniforme y bicontinua de t.

Como parámetro t puede elegirse la abscisa del rayo proyectante desde A, y al sentido de las t crecientes corresponde el positivo del haz. Si C y D son dos puntos de un mismo arco AB, como A y B están en un mismo semiplano respecto de la recta CD, los dos sentidos desde A y B son acordes. Resulta, pues : si el parámetro es una función cualquiera biuniforme y creciente de t, su crecimiento define un sentido que llamamos *positivo,* porque lo es el de todos los haces proyectantes desde cualquier punto de la curva. De aquí resulta : *Todos los polígonos ordenados inscritos en el óvalo son convexos y acordes.*

Pues si A y B son vértices consecutivos, todos los demás están en un mismo arco de extremos AB y, por tanto, en un mismo semiplano, condición suficiente de convexidad para los polígonos, y como el sentido de un polígono AB ... P es el de cualquiera de los ángulos ABC, queda demostrada la segunda parte ([1]).

12. Según (8) el óvalo está contenido entre dos rectas de constante de dirección dada, y entre otras dos de dirección perpendicular, es decir, está inscrito en el rectángulo que las cuatro forman; y como con cuatro arcos son monótonas, pues de lo contrario habría trisecantes, resulta que las funciones x e y son de variación acotada y, por tanto: *Los óvalos son rectificables y cuadrables*. Los perímetros y áreas de los polígonos inscritos son, pues, convergentes.

13. De la definición de recinto convexo resulta inmediatamente: *La interferencia de un número finito de recintos convexos que tienen un punto interior común es otro recinto convexo. Si el número de recintos es infinito, con un punto interior común, la interferencia es un punto o un segmento o un recinto convexo.*

14. *Si una curva cerrada de Jordan tiene en cada punto una recta que deja toda ella en un semiplano, es un óvalo.* Supongamos que el segmento AB determinado por dos puntos del recinto tuviera algún punto exterior M. Como AM corta a la curva en algún punto C, toda recta distinta de AB que pase por C deja A y B en distintos semiplanos, contra la hipótesis; y la AB es secante, luego la hipótesis es imposible y el segmento AB pertenece al recinto.

La curva de Jordan puede carecer de tangentes propias, pero es suficiente la existencia de una recta, no secante, por cada punto, para asegurar la convexidad. Además:

15. *El recinto limitado por una curva de Jordan convexa, es la interferencia de los semiplanos limitados por sus rectas no secantes.* Desde luego forma parte el recinto de todos ellos; recíprocamente, todo punto común a éstos, pertenece al recinto; pues si M es exterior y A interior, y C es un punto de la curva, intersección de AM, queda M fuera del semiplano correspondiente a C.

([1]) El haber supuesto que el parámetro es la abscisa del rayo proyectante o una función monótona de ella, no implica restricción ninguna, pues se demuestra inmediatamente, que *si una función continua admite función inversa, cada una de ellas es monótona*. Por tanto, cualquier parámetro t que se adopte es una función monótona de dicha abscisa.

16. Por el pie de la mínima distancia desde un punto interior del óvalo, la única recta no secante es la perpendicular al radio, luego es un punto ordinario. Mediante una cortadura fácil de establecer, resulta : *A todo punto ordinario de un óvalo le corresponde un círculo cuyo centro está en la perpendicular a la recta tangente* y que es el *mayor entre todos los interiores cuyas circunferencias pasan por el punto. El recinto es la suma de estos círculos.*

Por cortadura análoga resulta, asimismo, la existencia de un círculo mínimo entre todos los que contienen al óvalo.

17. Análogamente, resulta : *A todo punto ordinario* P *del óvalo corresponde un círculo, extremo superior de todos los que pasan por* P *y tienen un arco entorno de* P *interior al óvalo.* Este círculo, que llamaremos *de contacto,* coincide con el osculador cuando las funciones sean derivables dos veces.

18. Hemos visto que los óvalos son curvas de Jordan que tienen multitud de propiedades; veamos cuáles son características.

Dada una curva por dos funciones uniformes y continuas, sin exigir la biuniformidad que caracteriza las curvas de Jordan, se obtienen los óvalos imponiendo una condición que puede ser diversa. Así, por ejemplo, basta imponer la condición (4).

Toda curva cerrada desprovista de arcos múltiples y de trisecantes es óvalo.

Ante todo es curva de Jordan, pues supongamos que dos valores t_0 y t_1 diesen el mismo punto A; los rayos proyectantes desde otro B, de los puntos de la curva correspondientes a los intervalos $(t_0, t_0 - \delta)$ $(t_0, t_0 + \delta)$ $(t_1, t_1 - \delta)$ $(t_1, t_1 + \delta)$, forman cuatro ángulos de los cuales al menos dos tienen un ángulo común, y algún rayo de éste corta a los arcos respectivos en puntos distintos, resultando una trisecante.

La recta AB, determinada por dos puntos cualesquiera de la curva, o tiene un segmento común con ella o sólo dos puntos y todos los de las semirrectas complementarias pertenecen a una sola región, porque de lo contrario habría un nuevo punto de intersección. Como esa región es la externa, resulta : Todo punto interior pertenece a las infinitas cuerdas que pasan por él.

Si M y N son puntos interiores, ambos son, pues, interiores a la cuerda PQ determinada por la recta MN y, por tanto, el segmento MN es interior, luego el recinto es convexo.

19. Otra condición que puede imponerse a una curva cerrada, que es la adoptada por Blaschke como definición del óvalo es ésta : recíproca de (11).

Toda curva cerrada que tiene acordes los triángulos determinados por cada tres puntos ordenados de la misma es óvalo. Basta observar que de esta condición se deduce la no existencia de arcos múltiples ni trisecantes, y queda reducido al caso anterior.

Resulta, pues, que el ser acordes los triángulos implica el carácter de curva de Jordan, la existencia de dos tangentes en cada punto, etc. [1].

20. Otra condición también característica es ésta : *Si todos los cuadriláteros ordenados incritos en una curva cerrada son convexos, la curva es óvalo.* Pues si hubiera una trisecante ABC, se podría construir inmediatamente un cuadrilátero no convexo.

21. Como generalización de (14), resulta : *Si una curva cerrada tiene por cada punto una recta que la deja en un semiplano, es un óvalo recorrido una o varias veces.* Todos esos semiplanos tienen comunes puntos no alineados, luego, según (13), la interferencia es un recinto convexo, ningún punto de la curva puede ser interior a él, pues la recta correspondiente dividiría al recinto, contra lo supuesto, luego la curva dada coincide con el contorno, que es un óvalo, pudiendo recorrerlo una o varias veces. Si imponemos la carencia de arcos múltiples, resulta un óvalo.

22. Si las funciones que definen una curva son derivables y no se anulan simultáneamente x' e y', la curva se llama *regular,* y tiene para cada valor de t un vector tangente de componentes (x', y'). El teorema

[1] Resultan así, como corolario, las propiedades de las *funciones uniformes convexas.* Se llama así $y = f(x)$, si para cada terna $x_1 < x_2 < x_3$ es

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} > 0. \qquad (1)$$

Geométricamente : los triángulos inscritos, ordenados por abscisas crecientes, son acordes positivos.

La continuidad de tales funciones resulta también directamente así : en el intervalo (x_2, x_3) es $f(x)$ superior a la función lineal determinada por (x_1, y_1) (x_2, y_2) e inferior a la (x_2, y_2) (x_3, y_3) ; luego el límite a la derecha de x_2 es el mismo de ambas, o sea y_2 ; análogamente resulta por la izquierda, luego $f(x)$ es continua en x_2.

La definición (1) implica la monotonía de la pendiente de la cuerda ; luego hay tangente por la derecha de x_2 y tangente por la izquierda.

de los incrementos de Cauchy expresa que en todo arco de curva con tangentes hay algún punto cuya tangente es paralela a la cuerda [1].

Resulta de aquí : *Si una curva cerrada regular no admite más de dos tangentes paralelas, es óvalo.* En efecto, si la tangente en A cortara en B, en cada uno de los arcos AB habría una tangente paralela a la AB, contra la hipótesis; luego la tangente en A no corta en otro punto, ni atraviesa a la curva en A, pues en cada arco habría una tangente paralela a la de A; luego, según (21), es óvalo descrito una o varias veces.

23. Imponer a la curva cerrada la condición de que no haya más de dos tangentes paralelas, es lo mismo que imponer la monotonía de la función Arg (x', y') de 0 a $2n\pi$; esta monotonía viene expresada por la condición :

$$\operatorname{sg}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \text{const}, \qquad \text{o brevemente :} \qquad \operatorname{sg}\Delta = \text{const}, \qquad (1)$$

la que también expresa la carencia de inflexiones. Y si además imponemos la condición

$$\Delta \operatorname{Arg}(x', y') = 2\pi \qquad (2)$$

que expresa que la curva indicatriz (x', y') da una sola vuelta, tenemos dos condiciones analíticas que caracterizan los óvalos, sin hacer intervenir el concepto de curva de Jordan, que es de muy difícil comprobación. Si de antemano se sabe que una curva cerrada es de Jordan, se verifica ya la segunda condición y basta comprobar la primera. Resulta, pues : *Una curva cerrada regular de Jordan sin inflexiones es un óvalo.*

La condición (2) puede, por tanto, substituirse por esta otra : las dos integrales

$$\int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,dt, \qquad \int_{t_1}^{t_2} y'(t)\,dt \qquad (3)$$

no deben anularse simultáneamente (suma de cuadrados positiva) en ningún intervalo, pues ésto equivale a la falta de puntos múltiples, es decir : a valores distintos de t corresponden puntos distintos.

24. Según (8), resulta : *Por cada punto exterior pasan dos tangentes al óvalo.* Por la monotonía de la función Arg resulta fácilmente : *Los puntos de contacto de las tangentes trazadas por dos puntos* A *y* B *están o no separados entre sí, según que la recta* AB *sea exterior o secante.*

[1] Si la curva es de Jordan, se puede demostrar que hay un punto en que el vector no sólo es paralelo a la cuerda, sino acorde con ella.

25. La condición de no anularse simultáneamente x' e y' no es esencial y puede dejar de verificarse con el cambio de parámetro. Recíprocamente, si en un punto es $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$, y ambos infinitésimos tienen órdenes determinados, basta poner $\tau = (t - t_0)^{\lambda+1}$, siendo λ el menor de los órdenes, para que quede determinado el vector tangente, como se comprueba fácilmente formando las derivadas respecto del nuevo parámetro.

Lo característico es que el radio de curvatura sea finito o no.

Si llamamos *normal* al parámetro cuando se verifica $x'^2 + y'^2 > 0$, y consideramos solamente parámetros normales, resulta : Si la condición $\operatorname{sg} \Delta = \text{const}$ se verifica en sentido estricto, el óvalo tiene radio finito, y si en algunos puntos es $\Delta = 0$ en ellos el radio es infinito, como resulta de la fórmula :

$$p = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\Delta}.$$

En particular, si se adopta como parámetro $\varphi = \operatorname{Arg}(x', y')$ resulta $x'^2 + y'^2 = \rho^2$, luego este parámetro es normal para los óvalos de radio finito no nulo.

26. Si los vectores tangenciales (x', y') se aplican a un punto O resulta la indicatriz tangencial. Sus puntos son funciones continuas de t y si el óvalo carece de segmentos rectos, a valores distintos de t corresponden puntos distintos de la indicatriz; luego : *Si el parámetro es normal, la indicatriz tangencial de un óvalo curvo es una curva de Jordan que no pasa por* O *y es polarmente uniforme respecto de* O. La recíproca es cierta, es decir, estas propiedades de la indicatriz caracterizan al óvalo curvo.

Dada la indicatriz que cumpla estas condiciones, está determinado el óvalo en magnitud y posición, si se fija arbitrariamente uno de sus puntos. Basta, en efecto, integrar las coordenadas de la indicatriz.

A los puntos del óvalo de radio infinito corresponden en la indicatriz puntos cuya tangente pasa por O y, por tanto, de inflexión.

27. Como la indicatriz tangencial no es sino la hodógrafa del movimiento sobre el óvalo, cuando el parámetro es el tiempo, se pueden aplicar las relaciones, bien conocidas de la cinemática, entre estas curvas y la indicatriz formada por los radios de curvatura.

Inmediatamente se ve que el invariante δ no es sino el duplo de la velocidad areolar en el óvalo, y Δ es el duplo de la velocidad areolar en la indicatriz.

28. Llamaremos *indicatriz de curvatura* a una curva formada por los extremos de los vectores que representan los radios de curvatura, aplicados a un origen O. En particular, si el parámetro es el argumento del vector tangente, resulta de (26) : *La indicatriz de curvatura es igual a la tangencial, girada de* $\frac{\pi}{2}$.

Substituyendo en las integrales (3)

$$dx = \rho \, . \cos \varphi \, . \, d\varphi, \qquad dy = \rho \, . \operatorname{sen} \varphi \, . \, d\varphi,$$

resulta :

$$\int_0^{2\pi} \rho \, . \cos \varphi \, . \, d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \rho \, . \operatorname{sen} \varphi \, . \, d\varphi = 0,$$

es decir : *La resultante de los infinitos vectores de curvatura es nula.*

Esto demuestra que el radio, no sólo tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto (que también lo son relativos); pues en tal caso, trazando cualquier recta por O que separe ambos radios extremos, todos los vectores de un semiplano serían menores que los del otro y, por tanto, su resultante no podría ser nula. Tiene, pues, que haber siquiera otro máximo y otro mínimo relativo. Y traducida esta consecuencia, resulta el curioso teorema de los cuatro vértices, que la intuición nos haría sospechar : *Todo óvalo regular tiene, por lo menos, cuatro vértices* (¹).

29. Para el estudio de los óvalos regulares, especialmente de los *orbiformes* (de anchura constante), es útil la ecuación normal de la tangente :

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = p(\varphi),$$

siendo φ el argumento y p la distancia al origen. Si p es una función de φ, la ecuación define una envolvente. En los óvalos esta función es uniforme de 0 a 2π.

Aplicando las fórmulas usuales, resulta como expresión del radio de curvatura la siguiente simplicísima :

$$\rho = p + p''.$$

Las curvas paralelas resultan incrementando la función p en una constante cualquiera. El radio de curvatura de la curva $p + c$ resulta según la fórmula anterior : $\rho + c$.

(¹) Nótese que es condición esencial la existencia de radio de curvatura finito en todo punto, *sin excepción*. Por ejemplo, se forma fácilmente un óvalo con dos arcos iguales de espiral logarítmica, tangente en los dos puntos de empalme (o formando ángulo), el cual carece de vértices.

La uniformidad de la función p es suficiente para caracterizar el óvalo, si la curva carece de puntos cuspidales; pero sin esta condición previa, hay que imponer además la condición $p > 0$. Resulta de aquí: *Las curvas paralelas externas de un óvalo son óvalos y también las internas si la constante se conserva menor que el mínimo de la función $p + p''$.*

30. En la geometría afine se plantea el problema de obtener un parámetro tal que resulte $\Delta = 1$. Sin necesidad de los algoritmos que suelen utilizarse en dicha teoría, vamos a obtenerlo rápidamente. Llamando σ a dicha función de t, y designando las derivadas respecto del nuevo parámetro con puntos en vez de acentos, se tiene:

$$\dot{x} = \frac{x'}{\sigma'}, \qquad \dot{y} = \frac{y'}{\sigma'}, \qquad \ddot{x} = \frac{x'' - x'\dfrac{\sigma''}{\sigma'}}{\sigma'^2}, \qquad \ddot{y} = \frac{y'' - y'\dfrac{\sigma''}{\sigma'}}{\sigma'^2}.$$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = (x'y'' - y'x'')\,\sigma'^{-3} = \Delta\sigma'^{-3},$$

luego el parámetro que resuelve el problema es

$$\sigma = \int \Delta^{\frac{1}{3}}\,.\,dt$$

y se llama *longitud afine,* por tener la propiedad aditiva y ser invariante en las afinidades.

Como Δ tiene en el óvalo signo constante, es σ función biuniforme de t, y adoptado como parámetro el radio de curvatura tiene la expresión

$$\rho = a^3,$$

siendo a el módulo, su vector tangencial.

31. Todos los determinantes $\begin{vmatrix} x^{(h)} & y^{(h)} \\ x^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix}$ son invariantes respecto de las afinidades (absolutos en las de módulo 1, es decir, en las que conservan las áreas).

Puesto que el de índices 1 y 2 es constante y nulo el de índices 1 y 3, el invariante más sencillo es el de índices 2 y 3, que se llama *curvatura afine* y que coincide con el primer *reciprocante* de Sylvester. Su valor es, por tanto,

$$k = \ddot{x}\dddot{y} - \ddot{y}\dddot{x}$$

Si el parámetro t es cualquiera, su expresión resulta :

$$k = (x''y''' - y''x''')\,\Delta^{-\frac{5}{3}} + \left(\frac{1}{3}\Delta'' - \frac{5}{9}\Delta^{-1}\Delta'^{2}\right)\Delta^{-\frac{5}{3}} \tag{1}$$

y en particular, si se adopta $t = x$, es :

$$k = \left(\frac{1}{3}y^{\text{IV}} - \frac{5}{9}y''^{-1}y'''^{2}\right)y''^{-\frac{5}{3}}. \tag{2}$$

32. Igualando a cero la integración es inmediata y resulta la ecuación general de las parábolas; si se iguala a una constante resulta la ecuación general de las elipses o de las hipérbolas, según que la constante sea positiva o negativa.

Recíprocamente, si se parte de la ecuación de las cónicas, resulta que la parábola tiene curvatura afine nula, la elipse la tiene positiva y la hipérbola negativa y en todas tres es constante.

No carece de interés observar que la curvatura afine de la elipse depende solamente del área, por la fórmula

$$k = \left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En los óvalos la curvatura afine puede cambiar de signo y ser función discontinua. Los puntos se llaman *elípticos*, *hiperbólicos* o *parabólicos*, según la naturaleza de la cónica osculatriz. Como ésta tiene comunes con la curva las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta, la naturaleza del punto depende del signo de la expresión diferencial (1) (1).

Expuestos a grandes rasgos los resultados fundamentales, proponemos como direcciones en que pueden extenderse, las siguientes :

I. *Óvalos con infinitos ejes de simetría parcial.* Pueden construirse generalizando la llamada regla del cuarto $\frac{1}{4}$. Si sobre el punto medio de cada lado de un cuadrado se lleva una flecha igual a a, sobre el punto medio de cada lado del octógono así formado se lleve una flecha igual

(1) Estas propiedades precisan de aclaración. En efecto, es fácil formar un óvalo con cuatro arcos de hipérbolas iguales, el cual tiene tangente única y círculo osculador en cada punto y curvatura afine constante e igual en los cuatro arcos. La contradicción es debida a que en los puntos de unión tiene derivadas terceras distintas a la derecha y a la izquierda, que por ser opuestas dan el mismo valor a k. El resultado anterior presupone la existencia de derivadas en cada punto, *hasta el orden cuarto inclusive*.

a b, y así siguiendo se llevan 16 flechas c, 32 flechas d, etc., se forma un polígono que define como límite una curva cerrada, la cual es óvalo si los números a, b, c, ..., cumplen ciertas condiciones. Demuéstrese que es suficiente la condición :

$$a + b + c + d + \dots \leq \frac{\pi}{4}$$

y estúdiense las propiedades de sus infinitos puntos angulosos.

Nótese, en cambio, que no es posible la existencia de óvalos no circulares con un conjunto denso de vértices.

II. *Óvalos algebraicos*. Puestas las coordenadas homogéneas en función de un parámetro (racionales, si $p = 0$, elípticas, si $p = 1$, y abelianas, en general), se obtienen inmediatamente condiciones necesarias para que la curva sea un óvalo, a saber :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \neq 0$$

que expresa la falta de inflexiones y la no anulación simultánea de los menores complementarios de la última fila; pero esto no excluye la existencia de puntos dobles reales.

Entre las cúbicas y cuádricas no existen óvalos para $p = 0$, pero es fácil obtener de género $p > 0$ como, por ejemplo :

$$2x - y^2 - 3x^2 + x^3 = 0, \qquad x^4 + y^4 = 1.$$

Obtener criterios suficientes para caracterizar óvalos algebraicos.

III. *Curvatura logarítmica*. El teorema de Berwald, cuya demostración es muy sencilla, expresa que en todo óvalo hay por lo menos cuatro puntos con espiral logarítmica que tiene contacto de cuarto orden.

Demostrar que en la elipse estos cuatro puntos son los extremos de los diámetros conjugados y simétricos.

Estudiar los centros de curvatura logarítmica, es decir, centros de las espirales logarítmicas con contacto de tercer orden.

IV. *Generalización del teorema de los cuatro vértices*. Demostrar la afirmación de Blaschke (no demostrada) según la cual, todo óvalo que tenga comunes con una circunferencia $2n$ puntos tiene, por lo menos, $2n$ vértices. Con tal objeto basta demostrar que en todo arco exterior a la circunferencia hay, por lo menos, un punto en que el radio de curvatura es menor que r y en cada arco interior algún punto en que el radio es mayor que r', propiedades que resultan mediante las indicatrices de curvatura.

V. *Óvalos elípticos.* Böhmer en un trabajo bajo la dirección de Minkowski, demostró que si un óvalo tiene todos sus puntos elípticos, cinco cualesquiera de ellos determinan una elipse.

Este teorema, notable porque relaciona una cuestión de geometría diferencial con una de geometría integral, se puede demostrar del modo siguiente : si hay elipses e hipérbolas entre las cónicas determinadas por cinco puntos del óvalo, por continuidad habrá también parábolas, luego basta demostrar que una parábola no puede cortar al óvalo elíptico en más de cuatro puntos, y esto resulta fácilmente una vez demostrado el siguiente lema. Es sabido que los arcos de cónica que pasan por AB y tienen tangentes fijas AC y BC, están en el triángulo ABC separados, los arcos de elipse de los de hipérbola, por el arco de parábola determinado por esos dos puntos y tangentes. El lema de Minkowski expresa que lo mismo sucede con los arcos de curvatura elíptica, es decir, todos los que tienen tangentes en A y B que se cortan en el triángulo (incluso su contorno) son interiores al arco de parábola.

Puesto que la curvatura de un óvalo elíptico es positiva, si ésta se conserva finita, es decir, si las derivadas son finitas, esta curvatura tiene un máximo y un mínimo, que puede ser cero. Investigar si existe algun teorema análogo al de los cuatro vértices (27) o construir algún óvalo compuesto de dos arcos de curvatura afine monótona.

Nota. — Mientras llegaba el turno a la impresión de esta memoria, ha sido publicada en número recién llegado de los *Annali di Matematica*, una nota donde se demuestra la continuidad de las funciones convexas de modo mucho más complicado que el incluído como corolario en nuestra nota.

Cuando se parte de la definición de Jensen hay que imponer además la acotación o la mensurabilidad para poder deducir la continuidad [1].

Julio Rey Pastor.

(Entregado a la Secretaría de la Facultad el 13 de diciembre de 1926; impreso en enero de 1928.)

[1] Véase : Jensen, *Acta Math.*, página 175, 1906, y Sierpienski, *Fundamenta Mathematicae*, página 124, 1920.