XXI

UN TEOREMA SOBRE INTEGRALES SUMABLES C_δ

Por el doctor AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA

RÉSUMÉ

Un théorème sur les intégrales sommables C_δ. — Si une intégrale entre des limites infinies divergente, est sommable par la méthode de Césaro d'ordre δ; et si

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\, dx$$

est convergente pour toute valeur de $\alpha > 0$ elle est aussi sommable par une méthode de Hardy, dans laquelle on adopte :

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\, dx$$

comme définition généralisée de

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

UN TEOREMA SOBRE INTEGRALES SUMABLES C_δ [1]

Siendo

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

sumable C_δ con suma S, lo que quiere decir

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\left(1-\frac{t}{x}\right)^\delta f(t)\,dt=S,$$

e

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}f(x)\,dx$$

convergente para $\alpha>0$, demostraremos que

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}f(x)\,dx=S \text{ [2]}.$$

El señor Madhava [3] demuestra que :

« Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones integrables, y

$$\int_0^\infty u(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty |v(x)|\,dx$$

[1] Nuestro teorema en el caso $\delta=1$ puede verse en : *On the limits of certain series and integrals*, by T. J. I'a Bronwich, in *Math. annalen*, **65**, § 6, página 365, 1908.

[2] Hardy estudia la expresión $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}f(x)\,dx$, como definición generalizada de $\int_0^\infty f(x)\,dx$ en : *Researches in the theory of divergent series and divergent integrals*, in *Quarterly Journal of Mathematics*, **35**, páginas 22 y siguientes, 1903.

[3] *Multiplication of infinite integrals*, by K. B. Madhava, in *Journal of the Indian M. S.*, Madras, **12**, página 3, 1920.

son convergentes, tenemos entonces que

$$\int_0^\infty \left[\int_0^x u(t)\, v(x-t)\, dt\right] dx$$

es convergente, y su valor es

$$\int_0^\infty u(x)\, dx \cdot \int_0^\infty v(x)\, dx \text{ ».}$$

Poniendo

$$u(x) = e^{-\alpha x} f(x) \qquad \text{y} \qquad v(x) = e^{-\alpha x} x^\delta,$$

tendremos :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\left[\int_0^x (x-t)^\delta f(t)\, dt\right] dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\, dx \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx \quad (1)$$

de donde

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\, dx = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}\left[\int_0^x (x-t)^\delta f(t)\, dt\right] dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} \quad (2)$$

Tenemos por hipótesis

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta f(t)\, dt = S. \quad (3)$$

Definiremos una función

$$\varepsilon(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta f(t)\, dt - S. \quad (4)$$

Es entonces, por la (3)

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0, \quad (5)$$

y además, de la (4) se deduce

$$|\varepsilon(x)| \leq \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta |f(t)|\, dt + |S|. \quad (6)$$

Suponiendo $x \leq b$, y designando por M al máximo de $|f(t)|$ en el intervalo $(0, b)$, se tendrá

$$|\varepsilon(x)| \leq M \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta dt + |S| \quad (7)$$

o

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{Mx}{\delta + 1} + |S| \tag{8}$$

o puesto que $x \leq b$

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{Mb}{\delta + 1} + |S| \qquad \text{para } x \leq b. \tag{9}$$

De la (4) resulta :

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\delta f(t)\,dt = S + \varepsilon(x), \tag{10}$$

y de aquí

$$\int_0^x (x - t)^\delta f(t)\,dt = Sx^\delta + \varepsilon(x)\,x^\delta. \tag{11}$$

Por medio de la (11) se puede transformar la (2), obteniendo

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\,dx = S + \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}, \tag{12}$$

y entonces

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)\,dx = S + \lim_{\alpha \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}. \tag{13}$$

Para demostrar el teorema hay que demostrar que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} = 0. \tag{14}$$

Si $b > 0$

$$\left| \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} \right| \leq \frac{\displaystyle\int_0^b e^{-\alpha x} x^\delta |\varepsilon(x)|\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} + \frac{\displaystyle\int_b^\infty e^{-\alpha x} x^\delta |\varepsilon(x)|\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} \tag{15}$$

En virtud de la (5) es posible elegir b de modo tal que

$$|\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } x \geq b,$$

y en consecuencia se obtiene

$$\frac{\int_b^\infty e^{-\alpha x} x^\delta |\varepsilon(x)|\, dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\int_b^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Por medio de la (9) se obtiene

$$\frac{\int_0^b e^{-\alpha x} x^\delta |\varepsilon(x)|\, dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} \leq \left[\frac{Mb}{\delta + 1} + |S|\right] \frac{\int_0^b e^{-\alpha x} x^\delta dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}. \tag{17}$$

Efectuando en el segundo miembro el cambio de variables $\alpha x = t$, se obtiene

$$\frac{\int_0^b e^{-\alpha x} x^\delta |\varepsilon(x)|\, dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} \leq \left[\frac{Mb}{\delta + 1} + |S|\right] \frac{\int_0^{b\alpha} e^{-t} t^\delta dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^\delta dt}. \tag{18}$$

Con la (16) y la (18) se puede deducir de la (15)

$$\left|\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\, dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}\right| < \left[\frac{Mb}{\delta + 1} + |S|\right] \frac{\int_0^{b\alpha} e^{-t} t^\delta dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^\delta dt} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

El primer término del segundo miembro tiende a cero para α, tendiendo a cero es posible, pues, elegir σ de manera tal que aquél se conserve menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, si $\alpha < \sigma$.

Por la misma (19) se deduce entonces

$$\left|\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\, dx}{\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx}\right| < \varepsilon, \qquad \text{si } \alpha < \sigma \tag{20}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta \varepsilon(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\delta dx} = 0, \tag{21}$$

que era lo que faltaba demostrar.

Agustín Durañona y Vedia.

(Entregado a la Secretaría de la Facultad el 5 de octubre de 1927; impreso en enero de 1928.)