XXII

SOBRE PRODUCTO DE INTEGRALES SUMABLES C_2

POR EL DOCTOR AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA

RÉSUMÉ

Sur le produit d'integrals sommables C_δ. — On démontre un théorème analogue à celui de Césaro, concernant le produit de séries en introduisant

$$\int_0^\infty \left[\int_0^z u(x)\, v(z - x)\, dx\right] dz,$$

comme expression du produit de

$$\int_0^\infty u(x)\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty v(y)\, dy,$$

laquelle l'on reconnaîtra facilement comme tout-à fait analogue à la formule connue de Cauchy.

SOBRE PRODUCTO DE INTEGRALES SUMABLES C_δ [1]

INTRODUCCIÓN

El señor Madhava [2] se ha ocupado en establecer una interesante analogía entre el producto de series y el producto de integrales entre límites infinitos, demostrando para éste teoremas análogos a los de Cauchy, Mertens, Abel y Hardy que se refieren a aquél. En la presente nota continuamos la analogía demostrando para las integrales el siguiente teorema, análogo al de Césaro, para el caso de las series.

TEOREMA

Si

$$\int_0^\infty u(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty v(y)\,dy$$

son sumables C_δ con suma u y $C_{\delta'}$ con suma v, respectivamente, y es

$$w(z) = \int_0^z u(x)\,v(z-x)\,dx; \qquad \int_0^\infty w(z)\,dz$$

es sumable $C_{\delta+\delta'+1}$ [3] y su suma es $u \,.\, v$.

Para la demostración del teorema necesitamos hacer algunas consideraciones previas :

1. Para que

$$\int_0^\infty w(z)\,dz$$

[1] $\int_0^\infty f(x)\,dx$ es sumable C_δ con suma S, si $\lim_{z\to\infty} \int_0^z \left(1-\frac{x}{z}\right)^\delta f(x)\,dx = S$.

[2] *The Journal of the Indian Mathematical Society*, octubre de 1919 a febrero de 1920.

[3] No se excluye que pueda existir sumabilidad C_r : $r \leq \delta + \delta' + 1$.

sea sumable $C_{\delta+\delta'+1}$, es necesario que $w(z)$ sea función integrable de z en cualquier intervalo $\overline{oa}$, $a > 0$.

Consideremos la expresión

$$I = \iint_T u(x)\, v(y)\, dxdy$$

donde el dominio T es el triángulo de vértices

$$(x = 0,\ y = 0), \qquad (x = 0,\ y = a), \qquad (x = a,\ y = 0).$$

Si efectuamos el cambio de variables

$$x = t, \qquad y = z - t,$$

el dominio T se transforma en el triángulo T′ de vértices

$$(t = 0,\ z = 0), \qquad (t = 0,\ z = a), \qquad (t = a,\ z = a),$$

por otra parte

$$\left| \frac{\partial(xy)}{\partial(zt)} \right| = 1,$$

y entonces

$$I = \iint_{T'} u(t)\, v(z - t)\, dzdt.$$

Calculando la integral doble por integraciones sucesivas, resulta :

$$I = \int_0^a \int_0^z u(t)\, v(z - t)\, dt \,.\, dz,$$

o sea

$$I = \int_0^a w(z)\, dz,$$

y, por lo tanto, $w(z)$ es función integrable en el intervalo $\overline{oa}$.

II. Si se tiene la expresión

$$I = \iiint_T f_1(x) f_2(z - x) f_3(y) f_4(a - z - y)\, dxdydz \text{ [1]}. \qquad (1)$$

Siendo T un dominio limitado por los cuatro planos

$$x = 0, \qquad z - x = 0, \qquad y = 0, \qquad a - z - y = 0,$$

[1] Las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, deberán ser integrables.

y se efectúa el cambio de variables

$$x_1 = x, \qquad y_1 = z - x, \qquad z_1 = x + y$$

[que es una afinidad entre el espacio (xyz) y el $(x_1y_1z_1)$], se tiene que :

Al plano $x = 0$ corresponde el $x_1 = 0$;

Al plano $z - x = 0$ corresponde el $y_1 = 0$;

Al plano $y = 0$ corresponde el $z_1 - x_1 = 0$;

Al plano $a - z - y = 0$ corresponde el $a - z_1 - y_1 = 0$.

El dominio T se transforma, pues, en sí mismo.

En una transformación afín, la relación entre los volúmenes de un tetraedro y su transformado, es el valor absoluto del determinante de la transformación y, por lo tanto,

$$\left| \frac{\partial (xyz)}{\partial (x_1y_1z_1)} \right| = 1$$

pues T se transforma en sí mismo.

Tenemos, entonces :

$$I = \iiint_T f_1(x_1) f_3(z_1 - x_1) f_2(y) f_4(a - z_1 - y_1)\, dx_1 dz_1 dy_1.$$

Podemos escribir entonces

$$\iiint_T f_1(x) f_2(z - x) f_3(y) f_4(a - z - y)\, dxdydz =$$
$$= \iiint_T f_1(x) f_3(z - x) f_2(y) f_4(a - z - y)\, dxdydz. \qquad (2)$$

III. Consideremos ahora la expresión

$$J = \int_0^a \cdot \int_0^z f_1(x) f_2(z - x)\, dx \cdot \int_0^{a-z} f_3(y) f_4(a - z - y)\, dy \,.\, dz.$$

El segundo miembro puede interpretarse como una integral triple que estuviese extendida al dominio

$$0 \leq x \leq z, \qquad 0 \leq y \leq a - z,$$

que será limitado por los planos

$$x = 0, \qquad z - x = 0, \qquad y = 0, \qquad a - z - y = 0$$

siendo, por lo tanto, el dominio T antes citado. Podemos poner, entonces :

$$\iiint_T f_1(x) f_2(z - x) f_3(y) f_4(a - z - y)\, dxdydz =$$
$$= \int_0^a \cdot \int_0^z f_1(x) f_2(z - x)\, dx \cdot \int_0^{a-z} f_3(y) f_4(a - z - y)\, dx \,.\, dz,$$

y análogamente :

$$\iiint_T f_1(x) f_3(z-x) f_2(y) f_4(a-z-y)\,dx dy dz =$$
$$= \int_0^a \cdot \int_0^z f_1(x) f_3(z-x)\,dx \cdot \int_0^{a-z} f_2(y) f_4(a-z-y)\,dy\,.\,dz.$$

Teniendo en cuenta la (2) se deduce :

$$\int_0^a \int_0^z f_1(x) f_2(z-x)\,dx \cdot \int_0^{a-z} f_3(y) f_4(a-z-y)\,dy\,.\,dz =$$
$$= \int_0^a \cdot \int_0^z f_1(x) f_3(z-x)\,dx \cdot \int_0^{a-z} f_2(y) f_4(a-z-y)\,dy\,.\,dz.$$

Pongamos

$$f_1(t) = u(t), \qquad f_2(t) = t^{\delta}, \qquad f_3(t) = v(t), \qquad f_4(t) = t^{\delta'},\ (^1)$$

y entonces

$$\int_0^a \cdot \int_0^z u(x)(z-x)^{\delta} dx \cdot \int_0^{a-z} v(y)(a-z-y)^{\delta'} dy\,.\,dz =$$
$$= \int_0^a \cdot \int_0^z u(x)\, v(z-x)\,dx \cdot \int_0^{a-z} y^{\delta}(a-z-y)^{\delta'} dy\,.\,dz.$$

Por medio del cambio de variables $(a-z)\,t = y$, obtendremos

$$\int_0^{a-z} y^{\delta}(a-z-y)^{\delta'} dy = (a-z)^{\delta+\delta'+1}\, \mathrm{B}(\delta+1, \delta'+1)\,;$$

y recordando, además, que

$$w(z) = \int_0^z u(x)\, v(z-x)\,dx,$$

resultará

$$\int_0^a \cdot \int_0^z u(x)(z-x)^{\delta} dx \cdot \int_0^{a-z} v(y)(a-z-y)^{\delta'} dy\,.\,dz =$$
$$= \mathrm{B}(\delta+1, \delta'+1) \int_0^a (a-z)^{\delta+\delta'+1}\, w(z)\,dz. \quad (3)$$

IV. Si $\varphi(x)$ es una función integrable, y

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0,$$

(1) Puede observarse que las funciones que introducimos son integrables.

demostraremos que

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{z^{m+n+1}} = 0.$$

En efecto :

$$\left|\frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{z^{m+n+1}}\right| \leq \frac{\int_0^z (z-x)^m x^n\,|\varphi(x)|\,dx}{z^{m+n+1}} \leq \frac{\int_0^z |\varphi(x)|\,dx}{z} \tag{4}$$

y como

$$\lim_{x\to\infty}|\varphi(x)| = 0$$

y por consecuencia

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\int_0^z |\varphi(x)|\,dx}{z} = 0$$

deberá ser también por la (4)

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{z^{m+n+1}} = 0. \tag{5}$$

Estamos ahora en condiciones de generalizar la proposición.

Si $\varphi(x)$ es una función integrable, y

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \mathrm{L},$$

demostraremos que

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{\mathrm{B}(m+1,n+1)\,z^{m+n+1}} = \mathrm{L}\ (^1).$$

Pongamos

$$\varphi(x) = \mathrm{L} + \varepsilon(x)$$

y tendremos

$$\frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{\mathrm{B}(m+1,n+1)\,z^{m+n+1}} = \mathrm{L} + \frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varepsilon(x)\,dx}{\mathrm{B}(m+1,n+1)\,z^{m+n+1}} \tag{6}$$

(1) Puede verse : N. E. Norlund, *Sur une application des fonctions permutables*, en *Acta Universitatis Ludensis*, **16**, 1920.

Por la definición de $\varepsilon(x)$, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0,$$

y entonces de la (6) y la proposición anterior resultará

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\int_0^z (z-x)^m x^n \varphi(x)\,dx}{B(m+1, n+1)\, z^{m+n+1}} = L.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Si

$$\int_0^\infty u(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty v(y)\,dy$$

son sumables C_δ con suma u, y $C_{\delta'}$ con suma v, respectivamente, debe ser

$$u = \lim_{t\to\infty} \int_0^t u(x)\left(1-\frac{x}{t}\right)^\delta dx, \qquad v = \lim_{t\to\infty} \int_0^t v(y)\left(1-\frac{y}{t}\right)^{\delta'} dy. \quad (7)$$

Introduzcamos dos funciones $\Phi(t)$ y $\varepsilon(t)$, que definiremos por las relaciones

$$\Phi(t) = \int_0^t u(x)\left(1-\frac{x}{t}\right)^\delta dx, \qquad v + \varepsilon(t) = \int_0^t v(y)\left(1-\frac{y}{t}\right)^{\delta'} dy. \quad (8)$$

Si se tienen en cuenta las (7) se puede deducir entonces que

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = u, \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (9)$$

El lector comprobará también que tanto $\Phi(t)$ como $\varepsilon(t)$ son funciones continuas para $t \geq 0$, y como ambas tienen límite para $t \to \infty$, el conjunto de sus valores para $t \geq 0$, deberá ser acotado.

Multiplicando las (8) por t^δ y $t^{\delta'}$, respectivamente, obtendremos

$$\Phi(t)\, t^\delta = \int_0^t u(x)(t-x)^\delta dx, \qquad v t^{\delta'} + \varepsilon(t)\, t^{\delta'} = \int_0^t v(y)(t-y)^{\delta'} dy,$$

cambiando t por z en la primera y t por $a-z$ en la segunda resultará :

$$\Phi(z)\, z^\delta = \int_0^z u(x)(z-x)^\delta dx,$$

$$v(a-z)^{\delta'} + \varepsilon(a-z)(a-z)^{\delta'} = \int_0^{a-z} v(y)(a-z-y)^{\delta'} dy. \quad (10)$$

Por medio de las (10) reemplazaremos valores en la (3), la que se transformará entonces en

$$v\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} dz + \int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} \varepsilon(a-z)\, dz =$$
$$= B(\delta+1, \delta'+1)\int_0^a w(z)\,(a-z)^{\delta+\delta'+1} dz,$$

y dividiendo ambos miembros por $B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}$

$$v\,\frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}} + \frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} \varepsilon(a-z)\, dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}} =$$
$$= \int_0^a w(z)\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\delta+\delta'+1} dz,$$

pasando al límite

$$v \lim_{a\to\infty} \frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}} + \lim_{a\to\infty} \frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} \varepsilon(a-z)\, dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\int_0^a w(z)\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\delta+\delta'+1} dz. \quad (11)$$

Recordando la segunda de las proposiciones IV y las (9) se obtiene :

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}} = u. \quad (12)$$

Por otra parte, siendo M una cota de $|\Phi(z)|$ para $z \geq 0$

$$\left|\frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} \varepsilon(a-z)\, dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}}\right| \leq M\,\frac{\int_0^a z^\delta (a-z)^{\delta'} |\varepsilon(a-z)|\, dz}{B(\delta+1, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta'+1}}.$$

Cambiando en el segundo miembro z por $a-z$

$$\left|\frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a-z)^{\delta'} \varepsilon(a-z)\, dz}{B(\delta+\delta, \delta'+1)\, a^{\delta+\delta,+1}}\right| \leq \frac{M}{B(\delta+1, \delta'+1)}\,\frac{\int_0^a z^{\delta'} (a-z)^{\delta} |\varepsilon(z)|\, dz}{a^{\delta+\delta'+1}}.$$

Recordando la primera de las proposiciones IV se tiene que, por tender a cero el segundo miembro, tenderá también el primero, y entonces:

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\int_0^a \Phi(z)\, z^\delta (a - z)^{\delta'} \varepsilon (a - z)\, dz}{B(\delta + 1, \delta' + 1)\, a^{\delta + \delta' + 1}} = 0. \tag{13}$$

Por medio de las (12) y (13), la (11) quedará en la forma

$$uv = \lim_{a \to \infty} \int_0^a w(z) \left(1 - \frac{z}{a}\right)^{\delta + \delta' + 1} dz$$

o, en otras palabras,

$$\int_0^\infty w(z)\, dz$$

es sumable $C_{\delta + \delta' + 1}$ con suma $u \,.\, v$.

AGUSTÍN DURAÑONA Y VEDIA.

(Entregado a la Secretaría de la Facultad el 11 de diciembre de 1927; impreso en enero de 1928.)