XXIX

SOBRE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

POR EL DOCTOR ALBERTO E. SAGASTUME BERRA
Secretario de la Facultad

RÉSUME

Sur les solutions d'une équation différentielle. — On expose dans cette note les résultats obtenus par l'auteur dans l'étude d'une équation différentielle très simple, dont on trouve un système fondamental de solutions qui ont, parmi leurs proprietés les plus remarquables, celle d'être les dérivées successives d'une même fonction entière qui appartient elle aussi au système, et celle d'avoir un théorème d'addition algébrique.

SOBRE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

1. En esta breve nota expondremos los resultados obtenidos por nosotros en el estudio de un tema que nos fué propuesto como trabajo de investigación el año 1926 por el doctor Julio Rey Pastor, y que se refieren a las propiedades más características de una clase de funciones, que se obtienen como soluciones de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} = y, \tag{1}$$

siendo n un número entero y positivo arbitrario. Esta ecuación presenta interés por el hecho de dar, para varios valores de n, funciones clásicamente conocidas y muy utilizadas en el Análisis. Así para $n = 1$, se tiene la función exponencial; para $n = 2$, las funciones hiperbólicas; para $n = 4$, las circulares. Se trata de investigar, entonces, las propiedades comunes a estas funciones y a la clase más general definida por la ecuación (1).

2. *Teorema I. — Si $y = y(x)$ es una solución de la ecuación* (1), *lo es también de la ecuación*

$$y^{(kn)} = y \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

La demostración es inmediata: derivando r veces la (1), se obtiene

$$y^{(n+r)} = y^{(r)},$$

y haciendo sucesivamente $r = (k-1)n$, $r = (k-2)n$, ..., $r = 2n$, $r = n$, y sumando todas las ecuaciones que así se obtienen, además de la ecuación (1) queda:

$$y^{(kn)} = y.$$

En el caso $n = 1$, este teorema nos da una propiedad fundamental y muy conocida de la función e^x; lo mismo sucede para $n = 4$, con las funciones sen x, cos x.

3. *Teorema II.* — *Si* $y_0 = y_0(x)$ *es una solución de* (1), *y definimos las funciones*

$$y_1 = y_0', \qquad y_2 = y_1', \qquad \ldots, \qquad y_{r+1} = y_r', \qquad \ldots,$$

todas ellas son también soluciones de (1).

Supongamos cierto el teorema para y_r, es decir, sea

$$y_r^{(n)} = y_r;$$

derivando esta ecuación, se obtiene:

$$y_r^{(n+1)} = y_{r+1}^{(n)} = y_r' = y_{r+1},$$

es decir, que la propiedad, admitida para un índice r, es verdadera para el índice $r + 1$; por lo tanto, como vale para y_0, valdrá en general.

Observemos que, en virtud de la misma ecuación (1) y de la definición de las y_r, se tiene

$$y_{r+n} = y_r;$$

por consiguiente, las funciones y_r se reducen solamente a n distintas, que son y_0 y sus $n - 1$ primeras derivadas (supuesta, naturalmente, la existencia de estas derivadas).

4. Vamos a hallar ahora la expresión de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1); bastará, de acuerdo con la observación hecha al fin del número precedente, encontrar una solución; derivándola $n - 1$ veces obtendremos otras $n - 1$ soluciones que, junto con la original, darán un sistema fundamental siempre que la función de que partimos sea linealmente independiente de sus $n - 1$ primeras derivadas.

Una solución de la ecuación propuesta está dada por la serie

$$E_n(x \mid n) = 1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots;$$

se verifica inmediatamente que esta función satisface a la (1), y que la serie del segundo miembro converge para cualquier valor de x, es decir, que $E_n(x \mid n)$ es una función entera. Sus $n - 1$ primeras derivadas son

$$E_r(x \mid n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{kn-r}}{(kn-r)!}, \tag{2}$$

donde r varía de 1 a $n-1$; dando a r el valor n, se obtiene nuevamente la $E_n(x \mid n)$, de acuerdo con el resultado del párrafo 3. Todas estas series son también convergentes para cualquier valor finito de x; las $E_r(x \mid n)$ son todas funciones enteras de x.

En lo que sigue, y siempre que no haya ambigüedad, convendremos en suprimir el argumento n que figura en $E_r(x \mid n)$, escribiendo simplemente $E_r(x)$. Además, como es fácil ver que

$$\frac{dEr(x)}{dx} = E_{r+1}(x) \tag{3}$$

para $r = 1, 2, \ldots, n-1$, y cuando $r = n$ es $E_n'(x) = E_1(x)$, convendremos en que la notación $E_{r+n}(x)$, que no ha sido definida hasta ahora, signifique lo mismo que $E_r(x)$:

$$E_{r+n}(x) = E_r(x). \tag{4}$$

Debemos demostrar ahora que las $E_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ son linealmente independientes, para lo cual consideramos el wronskiano de estas funciones, que escribiremos

$$W(E_1, \ldots, E_n) = \begin{vmatrix} E_n(x), & E_{n-1}(x), & \ldots, & E_1(x) \\ E_n'(x), & E_{n-1}'(x), & \ldots, & E_1'(x) \\ . & & & . \\ E_n^{(n-1)}(x), & E_{n-1}^{(n-1)}(x), & \ldots, & E_1^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

o sea, si tenemos en cuenta las fórmulas (3) y (4):

$$W(E_1, \ldots, E_n) = \begin{vmatrix} E_n(x), & E_{n-1}(x), & \ldots, & E_1(x) \\ E_1(x), & E_n(x), & \ldots, & E_2(x) \\ . & & & . \\ E_{n-1}(x), & E_{n-2}(x), & \ldots, & E_n(x) \end{vmatrix}$$

Derivando respecto a x este determinante según la regla conocida, la última fila se hace igual a la primera, y, por lo tanto,

$$\frac{dW}{dx} \equiv 0$$

es decir,

$$W = \text{const.}$$

Esta constante se podrá calcular dando un valor cualquiera a x; si hacemos $x = 0$, teniendo en cuenta que de la definición (2) de las funciones $E_r(x)$ resulta

$$E_r(0) = \begin{cases} 0 & (r \neq n) \\ 1 & (r = n) \end{cases},$$

se obtiene el valor buscado

$$W(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1. \tag{5}$$

5. *Teorema III.—(Teorema de adición). Las funciones* $E_r(x)$ *admiten un teorema de adición expresado por la fórmula :*

$$E_r(x_1 + x_2) = \sum_{k=0}^{n-1} E_{r+k}(x_1)\, E_{n-k}(x_2). \tag{6}$$

Para demostrarlo, observemos que $E_r(x_1 + x_2)$, por ser función analítica en todo el plano, será desarrollable en serie de Taylor en el entorno del punto x_1, y este desarrollo será absolutamente convergente en cualquier punto; teniendo en cuenta la fórmula (3) se obtiene :

$$\begin{aligned} E_r(x_1 + x_2) &= E_r(x_1) + x_2 E_{r+1}(x_1) + \frac{x_2^2}{2!} E_{r+2}(x_1) + \ldots + \\ &+ \frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} E_{r+n-1}(x_1) + \frac{x_2^n}{n!} E_r(x_1) + \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)!} E_{r+1}(x_1) + \ldots = \\ &= E_r(x_1)\left[1 + \frac{x_2^n}{n!} + \frac{x_2^{2n}}{2n!} + \ldots\right] + E_{r+1}(x_1)\left[x_2 + \frac{x_2^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right] + \\ &\ldots + E_{r+n-1}(x_1)\left[\frac{x_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x_2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} E_r(x_1 + x_2) = E_r(x_1)\, E_n(x_2) + E_{r+1}(x_1)\, E_{n-1}(x_2) + \\ + \ldots + E_{r+n-1}(x_1)\, E_1(x_2) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

La fórmula (6) da, por ejemplo:

$$E_1(x_1 + x_2 \mid 1) = E_1(x_1 \mid 1)\, E_1(x_2 \mid 1)$$

que es el bien conocido teorema de adición de la función exponencial. Si $n = 2$, se obtiene análogamente,

$$E_1(x_1 + x_2 \mid 2) = E_1(x_1 \mid 2)\, E_2(x_2 \mid 2) + E_2(x_1 \mid 2)\, E_1(x_2 \mid 2)$$
$$E_2(x_1 + x_2 \mid 2) = E_2(x_1 \mid 2)\, E_2(x_2 \mid 2) + E_1(x_1 \mid 2)\, E_1(x_2 \mid 2)$$

que corresponden respectivamente a $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

Para $n = 4$, en cambio, no se obtienen los teoremas de adición de sen x y cos x, porque las funciones $E_r(x \mid 4)$ no son, en la forma como las hemos definido, las funciones circulares, sino combinaciones de éstas con las hiperbólicas; en efecto, es fácil ver que

$$E_1(x \mid 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x)$$

$$E_2(x \mid 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x)$$

$$E_3(x \mid 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \operatorname{sen} x)$$

$$E_4(x \mid 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x).$$

6. Se puede obtener otra expresión de las funciones $E_r(x \mid n)$ teniendo en cuenta que, si aplicamos a la ecuación (1) el método usual de integración de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes, se obtiene otro sistema fundamental de soluciones que son $e^{\varepsilon_i x}$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, designando por ε_i a las raíces enésimas de la unidad. Deben existir, por lo tanto, relaciones lineales entre las funciones $E_r(x \mid n)$ y las $e^{\varepsilon_i x}$.

Para hallar estas relaciones, convengamos en que $\varepsilon_0 = 1$, y que las demás raíces estén ordenadas en tal forma que $\varepsilon_i = \varepsilon_1{}^i$ (lo que siempre es posible), de modo que

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_{i+j}. \tag{7}$$

De las fórmulas que definen las $E_r(x \mid n)$, compendiadas en la (2), se deduce inmediatamente :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{i.j} E_{n-j}(x \mid n) = e^{\varepsilon_i x} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{8}$$

que puede considerarse como una generalización de la fórmula de Euler

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix} \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Si multiplicamos la (8) por $\varepsilon_{k.i}$ y sumamos respecto a i, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ji} E_{n-j}(x \mid n) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{ki} e^{\varepsilon_i x},$$

o, sea, por la (7) e invirtiendo las sumatorias del primer miembro :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{E}_{n-j}(x \mid n) \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{i(k+j)} = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{ki} e^{\varepsilon_i x}.$$

Pero es, como es fácil ver,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{i(k+j)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k+j \neq n \\ n & \text{si} \quad k+j = n \end{cases},$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{E}_k(x \mid n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_{ki} e^{\varepsilon_i x}, \tag{9}$$

que es la expresión buscada.

Nos proponemos llevar adelante el estudio de estas funciones que presentan tan interesantes propiedades.

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA.

(Entregado a a Comisión de publicaciones el 13 de junio e 1928; impreso en octubre de 1928.)