



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física

Trabajo de Tesis Doctoral

*Modelos Algebraicos en Sistemas
Cuánticos de Muchos Cuerpos:
aplicaciones al Estudio de Sistemas de
Espines en Interacción*

Lic. Lorena Rebón

Director: Prof. Dr. O. Civitarese

Co-director: Prof. Dra. M. Reboiro

Diciembre de 2009

Índice

I	9
1. El Problema de un Átomo en un Campo Electromagnético	10
1.1. Aproximación a un Átomo con Dos Niveles	11
1.1.1. Hamiltoniano del Átomo Libre	13
1.1.2. Estados Desacoplados	15
1.1.3. Estados Acoplados	17
1.1.4. Dinámica de la Interacción	21
1.2. Átomo de Tres Niveles	23
1.2.1. Reducción a un Hamiltoniano Efectivo de Dos Niveles.	31
2. Estados Coherentes	34
2.1. Estados Coherentes del Oscilador Armónico	34
2.1.1. Representación en el Espacio de Fock	35
2.1.2. Operador de Desplazamiento	41
2.1.3. Función de Onda en el Espacio de Coordenadas	41
2.1.4. Producto de Incertezas	42
2.1.5. Distribución de Wigner	44
2.2. Estados Coherentes de Momento Angular	51
3. Estados Comprimidos	57
3.1. Estados Comprimidos de Luz	58
3.1.1. El Operador de Squeezing	61
3.1.2. Análisis de las Fluctuaciones en las Cuadraturas	62

3.2. Estados Comprimidos de Espín	64
3.2.1. Concepto de Squeezing en Sistemas de Espín	66
4. Cadenas de Espines en Interacción	72
4.1. El Hamiltoniano	73
4.2. Algunos Resultados Importantes	79
II	84
5. Squeezing en Cadenas de Espines	85
5.1. Introducción.	85
5.2. Formalismo	87
5.2.1. Hamiltoniano	87
5.2.2. Evolución Temporal	88
5.2.3. Condición Inicial	89
5.3. Resultados y Discusión.	91
5.4. Conclusiones.	102
6. Squeezing en Cadenas de Espines con Interacciones Periódicas y de Largo Alcance	103
6.1. Introducción.	103
6.2. Formalismo	105
6.3. Cadenas Asimétricas	105
6.4. Resultados y Discusión.	118
6.5. Conclusiones.	122
7. Squeezing en Átomos de Tres Niveles	131
7.1. Introducción.	131
7.2. Formalismo	134
7.2.1. Solución Exacta.	135
7.2.2. Parámetro de Squeezing	137

7.2.3. El caso de un único átomo.	138
7.3. Resultados y Discusión.	141
7.4. Conclusiones.	148
8. Conclusiones Generales	151
A. Teoría Cuántica del Campo Electromagnético.	155
A.1. Ecuaciones de Maxwell	155
A.2. Ondas Planas	157
A.3. Cuantificación del Campo Electromagnético	158
A.4. Estados de Fock	162
A.5. Interacción del Campo Electromagnético con la materia	167
A.6. Aproximación Dipolar	168
B. Tratamiento de Sistemas Cuánticos de Muchos Cuerpos	172
B.1. Modelo de Partícula Independiente	173
B.2. Métodos Variacionales	176
B.2.1. Método de Hartree-Fock	178
B.3. Excitaciones Colectivas	180
B.3.1. Aproximación Tamm-Dancoff (TDA)	182
B.3.2. Estado Fundamental Correlacionado: RPA	182
B.4. Representaciones Bosónicas	187
B.4.1. Mapeo de Holstein-Primakoff	191
B.4.2. Mapeo de Dyson	196
B.4.3. Mapeo de Schwinger	197
Bibliografía	199

Resumen

El espíritu de esta tesis ha sido estudiar la aplicación de métodos algebraicos en la descripción de *sistemas cuánticos de muchas partículas*, cuyo comportamiento puede homologarse al de:

- a) N átomos idénticos con unos pocos niveles activos, en interacción con un campo electromagnético,
- b) arreglos lineales de espín $1/2$ acoplados mediante una interacción de intercambio espín-espín.

Si bien este tipo de sistemas son conocidos desde ya hace mucho tiempo, en los últimos años han recibido un creciente interés dado que los mismos son vistos como posibles candidatos para ser utilizados en Óptica Cuántica, Computación Cuántica e Información Cuántica. La solución exacta de los modelos físicos que describen el comportamiento de estos sistemas es conocida, y se obtiene mediante la aplicación de técnicas basadas en la teoría de grupos. Alternativamente, los mismos son factibles de ser tratados en forma aproximada, mediante la aplicación de *métodos no perturbativos*, originalmente formulados en el tratamiento de problemas de muchos cuerpos de Física Nuclear. Particularmente, hemos analizado la aparición de *squeezing*¹ en el sistema, concepto que está relacionado con la posibilidad de reducir la incerteza cuántica sobre alguno de los observables del problema, sin violación del mínimo de incerteza, y con la mejora de la relación señal-ruido en medidas de precisión.

Hemos estudiado cadenas de espines asimétricas, con interacciones a primeros vecinos, haciendo luego una extensión del problema al incluir interacciones periódicas

¹Utilizaremos el término inglés *squeezing* en vez de su traducción al castellano *compresión*, que puede resultar poco específico en este contexto.

y de largo alcance. También hemos estudiado un sistema de A átomos idénticos de tres niveles, en interacción con un campo electromagnético externo. En esta tesis se presentan los resultados obtenidos mediante una diagonalización exacta de la matriz Hamiltoniana, para distintos valores del número de átomos, condiciones iniciales y constantes de acoplamiento.

En las publicaciones que se indican a continuación hemos presentado algunos de los resultados discutidos en esta tesis doctoral.

a) En revistas internacionales:

- ▶ *Study of squeezing in spin clusters*, M. Reboiro, O. Civitarese, and L. Rebón, Physics Letters A **366**, 241-245 (2007);
- ▶ *Spin squeezing in the presence of dissipation*, O. Civitarese, M. Reboiro, L. Rebón, and D. Tielas, Physics Letters A **373**, 754-758 (2009);
- ▶ *Spin squeezing in a $s=1/2$ chain with site-dependent periodic and long-range interactions*, O. Civitarese, M. Reboiro, L. Rebón, and D. Tielas, Physics Letters A **374**, 424-430. En prensa, disponible on-line;
- ▶ *Atomic squeezing in three level atoms with effective dipole-dipole interaction*, O. Civitarese, M. Reboiro, L. Rebón, and D. Tielas, enviado a Physics Letters A (PLA-S-09-04420), 5 de noviembre de 2009.

b) En memorias de congresos (con arbitraje):

- ▶ *Atomic spin squeezing in three level atoms*, O. Civitarese, M. Reboiro, L. Rebón, and D. Tielas, Revista Mexicana de Física **54** (3), 24-29 (2008).

Introducción

El campo emergente de la Información Cuántica, ha sido construido sobre el concepto de *entrelazamiento* de estados cuánticos y *qubits*, sistemas cuánticos con dos estados (Nielsen and Chuang, 2002). El entender en profundidad las propiedades cuánticas de estos dos conceptos, provee de una amplia gama de recursos relacionados con la física del problema, para el desarrollo de nuevos esquemas o paradigmas computacionales, con resultados promisorios que no podrían obtenerse clásicamente.

Han surgido muchas ideas respecto a cómo implementar efectivamente una computadora cuántica (Nielsen and Chuang, 2002). Una idea natural al momento de dar una representación física para un qubit, es utilizar partículas de espín $1/2$, ya que básicamente éstas constituyen sistemas cuánticos de dos estados. La manipulación de un qubit de estas características podría llevarse a cabo mediante la aplicación de un campo magnético local, mientras que las operaciones sobre qubits acoplados (compuertas lógicas de dos qubits) pueden implementarse mediante una interacción espín-espín controlada, modelada por un Hamiltoniano de Heisenberg (Greiner et al., 1994). Los espines electrónicos como así también los espines nucleares, han sido considerados buenos candidatos para este fin. El desafío entonces, es poder realizar medidas sobre espines individuales, y controlar los campos magnéticos y las interacciones entre sitios de espín, a nivel local. Alternativamente, se ha propuesto trabajar con un esquema distinto, en donde el qubit, como sistema cuántico de dos estados, está representado no ya por un espín individual, sino por el estado colectivo correspondiente a un sistema de espines. En las referencias (Meier et al., 2003b) y (Meier et al., 2003a), los autores muestran que, para una amplia clase de cadenas

antiferromagnéticas de espines $s = 1/2$, con un número impar de sitios, el estado fundamental se corresponde con un doblete de espín $S = 1/2$ separado del resto del espectro por una diferencia de energía Δ , y este estado entonces, puede utilizarse para definir un *qubit colectivo*. En estos casos, el nivel de control necesario tanto de los campos magnéticos como de las interacciones de intercambio espín-espín, es a escalas del tamaño del sistema.

El uso de cadenas de espines también se ha propuesto en relación al proceso de Comunicación Cuántica. En (Bose, 2008), se puede encontrar una revisión sobre la utilización de cadenas dinámicas de espín como *cables cuánticos*, para transmitir un estado cuántico de un lugar a otro, a lo largo de distancias cortas. Al preparar un estado cuántico en uno de los extremos de la cadena, este puede ser transmitido dinámicamente hasta el otro extremo con alguna eficiencia, si los espines están acoplados por una interacción de intercambio, formando así un canal de comunicación cuántico.

La utilización de fotones, se ha visto como otra posibilidad al momento de representar un qubit, con propiedades muy cercanas a las ideales (Kok et al., 2007). Por ejemplo, dos modos ópticos de polarización, con un número fijo de fotones, dan una representación natural de un qubit. Dado que los fotones son partículas sin carga eléctrica, interactúan muy débilmente con el entorno, y son potencialmente libres de decoherencia. Pero la realización de compuertas cuánticas de dos qubits, requiere de algún medio para hacerlos interactuar entre sí. Los materiales ópticos no lineales necesarios para poder generar interacciones entre ellos son de difícil realización, si se quiere que no haya pérdida de coherencia. El uso de *cavidades electromagnéticas* puede ir en pos de solucionar este problema. Al localizar átomos en una cavidad sin pérdidas, es decir con un alto factor de calidad Q , donde sólo existen uno o dos modos electromagnéticos con un valor grande de la amplitud del campo eléctrico, los fotones tienen oportunidad de interactuar muchas veces con los átomos antes de escapar de la cavidad. En este sistema, la principal interacción involucrada es la interacción dipolar eléctrica, cuyas reglas de selección para las transiciones atómicas permite introducir la noción de átomo con dos niveles. Haciendo uso de estas técni-

cas, se han creado y manipulado estados entrelazados en sistemas que involucran átomos en una cavidad electromagnética con un alto factor de calidad Q (Haroche, 1998). Posteriormente, aparecieron estudios teóricos sobre estados entrelazados que involucran circuitos de junturas Josephson (Shnirman et al., 1997; Everitt et al., 2001). Los circuitos que involucran pequeñas junturas Josephson se comportan potencialmente como un sistema macroscópico de dos niveles que puede ser externamente controlado. Varios experimentos han demostrado que tales sistemas pueden encontrarse en una superposición coherente de dos estados cuánticos macroscópicos (Friedman et al., 2000; van der Wal et al., 2000). Cuando se analizan los espectros de una o varias junturas Josephson idénticas en una cavidad sin pérdidas con un único modo, bajo condiciones tales que el sistema se encuentra en resonancia, se observa que el problema resulta ser análogo al de un conjunto de átomos de dos niveles interactuando con un campo electromagnético monocromático (Al-Saidi and Stroud, 2002a; Al-Saidi and Stroud, 2002b). Al-Saidi y Stroud muestran (Al-Saidi and Stroud, 2002a) que el espectro correspondiente al proceso de absorción de un fotón, obtenido de una diagonalización exacta en el espacio producto directo de junturas-estados de fotón, está en buen acuerdo con el espectro asociado a un *Hamiltoniano reducido de Jaynes-Cummings* (Jaynes and Cummings, 1963). En la referencia (Al-Saidi and Stroud, 2002b) se extiende el modelo de Jaynes-Cummings acomodando varias junturas en la cavidad, y se realiza una comparación con los resultados del *modelo de Dicke* (Dicke, 1954). Efectos de orden superior causados por las interacciones entre junturas, los cuales no son tenidos en cuenta por el modelo de Dicke, han sido incluidos perturbativamente adicionando un término de interacción dipolo-dipolo de largo alcance entre los pseudoespín $1/2$ que representan cada una de las junturas con dos niveles (Al-Saidi and Stroud, 2002b). Todos estos modelos son tratables en forma no perturbativa mediante linealizaciones de las ecuaciones de movimiento como la aproximación Tamm-Dancoff (TDA), o alternativamente mediante métodos de bosonización del Hamiltoniano. Los resultados que se obtienen (Ballesteros et al., 2003) están en muy buen acuerdo con las soluciones exactas del problema, y permiten visualizar en forma clara algunos efectos de interés como el

comportamiento colectivo de todos los átomos en el sistema y la aparición de un término de interacción no en el campo bosónico. A su vez, se logra que el problema pueda resolverse numéricamente aún para un número considerable de átomos en el sistema.

Más recientemente, se ha puesto la atención en el estudio de sistemas cuánticos de mayor dimensión (Mikami and Kobayashi, 2007; Moreva et al., 2006; O’Leary et al., 2006), considerando algoritmos cuánticos y protocolos para comunicación cuántica y criptografía que involucran sistemas cuánticos con d estados, denominados qudits (Cerf et al., 2002; O’Leary et al., 2006). Uno de los principales intereses en estudiar sistemas con d estados, es el de poder incrementar el espacio de Hilbert con la misma cantidad de recursos físicos disponibles (Greentree et al., 2004). Entre estos sistemas de mayor dimensión, resulta de particular interés la utilización de sistemas cuánticos de tres niveles, llamados *qutrits* (Tamir, 2007; Mikami and Kobayashi, 2007; Klimov et al., 2003). Se ha visto por ejemplo, que el uso de qutrits mejora la eficiencia y seguridad de muchos protocolos de información cuántica (Bechmann-Pasquinucci and Peres, 2000; Cerf et al., 2002; Brukner et al., 2002). En este contexto particular, pero en forma más amplia, en el marco general de la Óptica Cuántica (Mandel and Wolf, 1995; Barnett and Radmore, 1997; Scully and Zubairy, 1997), aparece como un aspecto fundamental a ser estudiado el concepto de *información cuántica*. Ampliamente discutida, ha sido y sigue siendo, la posibilidad de utilizar la complejidad de los estados cuánticos para la codificación de la información, para la transmisión de dicha información sin pérdidas de la misma, y para mejorar la seguridad en las comunicaciones (Bachor and Ralph, 2004). Se han puesto muchos esfuerzos en el estudio de la transferencia de información entre átomos y un campo electromagnético, particularmente en el caso de sistemas de dos niveles (Drummond and Ficek, 2004; Cerf et al., 2007). En esta dirección, uno de los objetivos es el desarrollo de una interface cuántica eficiente entre átomos y luz, donde los átomos constituyen un buen medio para almacenar y procesar información, en tanto que la luz resulta ser un buen medio para transportar dicha información. El acoplamiento de la luz con un sistema atómico podría ser utilizado para desarrollar tal interface cuántica. En forma similar

a lo que sucede con un sistema de dos niveles, la dinámica de un sistema de tres niveles en interacción con un campo de radiación es análoga a la de una partícula de espín 1 en presencia de un campo magnético. La interacción causa la variación del número medio de átomos que ocupa cada uno de los niveles atómicos accesibles, que está relacionado con el valor esperado de las componentes de espín. Este problema también puede resolverse mediante la diagonalización exacta del Hamiltoniano en la base producto directo átomos-fotones, y para ciertas configuraciones de niveles de energía, puede reducirse a un sistema efectivo de dos niveles mediante el uso de un mapeo bosónico adecuado (Reboiro, 2006).

Uno de los aspectos fundamentales a tener en cuenta en relación al tratamiento de la información, y en particular al tratamiento de la información cuántica, es la medida. En general, toda medida está sujeta a un error en la misma que tiene que ver con la resolución del sistema de medición empleado. Pero cuando se trabaja con un sistema cuántico, la medida de todo par de observables está limitada por el principio de incerteza de Heisenberg (Sakurai, 1985), independientemente de la resolución del instrumento. En relación a la posibilidad de reducir las fluctuaciones cuánticas de los observables de un sistema físico, aparece el concepto de *squeezing*. Es bien conocido que ciertos estados del campo electromagnético (estados comprimidos del campo electromagnético), tienen fluctuaciones reducidas en una de las cuadraturas de dicho campo, a la vez que se preserva el producto mínimo de incerteza (Mandel and Wolf, 1995; Barnett and Radmore, 1997; Scully and Zubairy, 1997), y han sido utilizados para reducir el ruido en medidas ópticas de precisión. Paralelamente, se ha puesto la atención en el estudio de estados atómicos colectivos con fluctuaciones reducidas en una de las componentes del espín total del sistema (estados comprimidos de espín) (Kitagawa and Ueda, 1993). Éstos son estados cuánticos correlacionados, que permiten mejorar la relación señal-ruido en interferómetros atómicos (Yurke, 1986; Yurke et al., 1986; Kitagawa and Ueda, 1993) y en aquellas experiencias basadas en la medida de población de niveles (Wineland et al., 1992; Wineland et al., 1994). Al mismo tiempo, el tipo de interacciones utilizadas para la generación de estados comprimidos es similar a las utilizadas en medidas de no demolición cuántica (de

Echaniz et al., 2005; de Echaniz et al., 2008), es decir, en procesos en donde es posible realizar la medida sobre alguna de las propiedades de un sistema cuántico sin alterar dicha propiedad. Por otra parte, el parámetro de squeezing, ζ^2 , que mide el grado de squeezing para el espín del sistema atómico, es particularmente valorado por los experimentalistas ya que, como se muestra en (Wang and Sanders, 2003; Korbicz et al., 2005; Korbicz et al., 2006), está directamente conectado con el entrelazamiento en sistemas atómicos, siendo una condición suficiente para el mismo. Las razones para utilizarlo como herramienta en la detección del entrelazamiento del sistema, radica en que está definido mediante una expresión matemática muy simple y su medida resulta relativamente sencilla.

El objetivo de esta tesis es el estudio de la dinámica de sistemas compuestos por átomos (espines atómicos) y fotones, que resultan de interés en campos tales como la Óptica Cuántica, la Computación Cuántica y la Información Cuántica. Se han tratado cadenas de espines modeladas por un Hamiltoniano de Heisenberg con distintos grados de asimetría en las constantes de acoplamiento, teniendo en cuenta no sólo interacciones a primeros vecinos, sino también interacciones moduladas por un factor de forma del tipo periódico e interacciones de largo alcance. Asimismo, se ha estudiado la dinámica del modelo de Dicke de dos fotones, considerando átomos de tres niveles en interacción con un campo electromagnético monocromático. En cada caso se analiza la posibilidad de generar squeezing en el sistema atómico, dependiendo de la interacción propuesta y del estado inicial en el cual se prepara el sistema. Se analiza cuál es la dependencia del parámetro de squeezing bajo variaciones del valor de las constantes de acoplamiento del Hamiltoniano de interacción. La persistencia o disminución del grado de squeezing del sistema con el tiempo también es un factor a tener en cuenta como una evidencia de la pérdida de coherencia y del grado de entrelazamiento.

La tesis está organizada en dos partes. La primer parte consta de cuatro capítulos introductorios, donde se desarrollan las herramientas necesarias para la descripción física de los sistemas en estudio, y se exponen los conceptos fundamentales de las teorías en las cuáles se basan los trabajos posteriores. Estos primeros capítulos están

dedicados a la presentación del formalismo (interacciones átomo-radiación, estados coherentes, estados comprimidos, cadenas de espines). El foco está puesto en la descripción de sistemas que involucran la interacción de la radiación con la materia. Al respecto, se detallan el modelo de Jaynes-Cummings (Jaynes and Cummings, 1963) y el modelo de Dicke (Dicke, 1954), que describen sistemas de uno o varios átomos en interacción con un campo electromagnético cuantizado. En el Capítulo 1 se describe la dinámica de la interacción de los sistemas átomo-radiación. En el Capítulo 2 se introduce la definición de estados coherentes del campo electromagnético los cuales poseen propiedades interesantes debido a su comportamiento *aproximadamente clásico*. En analogía con estos estados, pueden definirse los estados coherentes de espín o estados coherentes atómicos. En el Capítulo 3 se introduce el concepto de *squeezing*, el cuál ha sido uno de los temas de investigación de esta tesis, y se observan los esquemas básicos para la generación de squeezing, tanto del campo de fotones como de un sistema de espines o pseudoespines. Por último, en el Capítulo 4 se describen los modelos correspondientes a un sistema lineal de espines en interacción.

En la segunda parte, se presentan resultados originales (Reboiro et al., 2007; Civitarese et al., 2008; Civitarese et al., 2009b; Civitarese et al., 2009c), relacionados con la posibilidad de generar squeezing en cierto tipo de sistemas, que pueden ser analizados mediante la utilización de los modelos introducidos en los capítulos anteriores.

En el Capítulo 5 se estudian cadenas de espines asimétricas, con interacciones del tipo espín-espín, para distintos valores de las constantes de acoplamiento entre sitios vecinos. Se discuten las condiciones bajo las cuáles el estado del sistema está en un estado de espín comprimido, mediante el análisis de la dependencia del parámetro de squeezing respecto del número de átomos y de las constantes de interacción. Se analiza la evolución temporal del sistema para distintas condiciones iniciales, y particularmente el efecto del uso de estados coherentes de espín para modelar el estado inicial del sistema.

En el Capítulo 6 se continúa con el análisis previo, pero haciendo una extensión a cadenas de espines que incluyen interacciones no sólo a primeros vecinos, sino también interacciones dependientes del sitio, e interacciones de largo alcance.

Por último, en el Capítulo 7, se estudian las condiciones para la ocurrencia de squeezing, en un sistema de átomos y fotones en una cavidad. El sistema se modela mediante interacciones átomo-fotón, en donde cada átomo está representado como un sistema de tres niveles en resonancia con dos bosones. Se ha analizado la transferencia de espín del campo electromagnético al sistema atómico, mostrando que bajo ciertas condiciones es posible la transmisión de información cuántica entre ambos. Esto permite generar squeezing atómico siempre y cuando el estado inicial del campo en la cavidad sea un estado coherente.

En los capítulos 5, 6 y 7, indicamos las conclusiones parciales a las que hemos arribado. En el Capítulo 8, presentamos las conclusiones generales de esta tesis.

Por último, la tesis contiene dos apéndices (Apéndice A y Apéndice B), que complementan el formalismo utilizado en el texto principal, y la sección Bibliografía, en donde se listan las referencias de todo el material citado.

Parte I

Capítulo 1

El Problema de un Átomo en un Campo Electromagnético

La luz puede ser tanto radiada como absorbida por los átomos. La interacción entre átomos y un campo electromagnético representa uno de los problemas fundamentales en óptica cuántica. Los átomos son sistemas físicos complicados, y aún el átomo más simple, el átomo de hidrógeno, tiene una estructura de niveles de energía para nada trivial. Por lo general, es necesario o deseable aproximar el comportamiento de un átomo real por el de un sistema cuántico más simple. Para muchos propósitos, sólo algunos de los niveles atómicos resultan relevantes al momento de describir la interacción con el campo electromagnético, y entonces el tratamiento teórico puede hacerse modelando el átomo real por un sistema cuántico con sólo unos pocos niveles de energía activos. El caso más simple corresponde a un *sistema de dos niveles*. Esta aproximación está sustentada en el hecho de que en el átomo real, las reglas de selección limitan las transiciones posibles entre estados, de modo que en algunos casos, un cierto estado puede acoplarse a uno sólo del resto de los niveles. En estos casos, la aproximación a un sistema cuántico con dos niveles es muy cercana a la situación experimental real y no solamente una mera conveniencia matemática. El modelo, considera un átomo con dos niveles acoplado a un único modo de un campo electromagnético. En él se describe al átomo como una partícula de pseudo-espín $1/2$ interactuando con un oscilador armónico que representa el

modo del campo del fotón (Davidovich, 1998). La evolución de este sistema puede estudiarse, por ejemplo, mediante Hamiltonianos como el de *Jaynes-Cummings*, que contiene un término correspondiente al átomo libre, el término del campo de fotones, y un término de acoplamiento del átomo al campo electromagnético.

En este capítulo se estudian las soluciones exactas del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (Sección 1.1.3), y la evolución temporal del sistema, mediante el análisis de las probabilidades de transición (Sección 1.1.4). Las predicciones para la dinámica del sistema en un tratamiento cuántico son muy diferentes a las de una teoría semiclásica. En la Sección 1.2 se hace una extensión de este problema para el caso de un átomo con tres niveles accesibles.

1.1. Aproximación a un Átomo con Dos Niveles

La determinación de los autoestados de energía de un átomo pueden ser realmente complicada. Los electrones en el átomo se comportan como partículas inmersas en un potencial central, con un Hamiltoniano de la forma

$$H_A = \sum_k \frac{p_k^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_k} + H_{rel} + H_{ee} + H_{so} + H_{hf}, \quad (1.1)$$

donde los primeros dos términos corresponden a la suma de la energía cinética de los electrones, y a la energía potencial electrostática debido a la atracción Coulombiana con el núcleo, respectivamente. H_{rel} es el término de corrección relativista, H_{ee} describe el acoplamiento electrón-electrón y las contribuciones debido a la naturaleza fermiónica de los mismos, H_{so} es el término de interacción espín-órbita, y H_{hf} describe la interacción hiperfina, debido a la interacción del espín del electrón con el campo magnético generado por el núcleo. Los autovalores de H_A quedan en general bien caracterizados por tres números cuánticos: el número cuántico principal, n , el momento angular orbital, l , y la componente del momento angular orbital en la dirección \hat{z} , indicada por m . Además, dependiendo de las características del problema, se debe definir el momento angular total del electrón, $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$, dado por

su momento angular orbital, \vec{l} , y el momento angular de espín, \vec{s} . El núcleo atómico, también posee un grado de libertad de espín, \vec{I} , y por lo tanto, el momento angular total es $\vec{J} = \vec{j} + \vec{I}$.

Los autovalores de H están determinados por la terna de números cuánticos (n, l, m) , a orden α^2 , donde $\alpha = 1/137$ es la constante de estructura fina. La solución de la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas (Cohen-Tannoudji et al., 1988), permite hallar la función de onda para el electrón, confinado por un potencial Coulombiano, debido a su interacción con el núcleo atómico:

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.2)$$

El elemento de matriz que describe las transiciones dipolares (A.89) está dado por

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle \sim \int d^3r \psi_{n'l'm'}^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} \psi_{nlm}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

El operador $\hat{\mathbf{r}}$ puede escribirse en término de armónico esféricos

$$\begin{aligned} \hat{x} &= r \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1-1} \right) \hat{e}_x, \\ \hat{y} &= r \left(-\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{11} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1-1} \right) \hat{e}_y, \\ \hat{z} &= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10} \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Entonces, la integral (1.3) puede escribirse como la suma de tres integrales, cada una de las cuales es a su vez, un producto de una integral radial y una integral angular. Las integrales angulares implican un producto de tres armónicos esféricos

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.5)$$

y

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{10}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.6)$$

Estas integrales son no nulas sólo en los casos:

- para las componentes x e y

$$\begin{aligned} \Delta l = l - l' &= \pm 1 \\ \Delta m = m - m' &= \pm 1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

- y para la componente z

$$\begin{aligned}\Delta l &= \pm 1 \\ \Delta m &= 0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Estas condiciones son reglas de selección que limitan en forma estricta las transiciones entre niveles atómicos. Si se toma a $\hat{\mathbf{r}}$ en el plano xy , sólo estarán permitidas las transiciones con $\Delta m = \pm 1$. En el caso en que el átomo interactúa con luz monocromática, los únicos niveles de energía relevantes son aquellos que satisfacen estas condiciones de simetría junto con la condición de conservación de la energía,

$$\hbar\omega_{fi} = \varepsilon_f - \varepsilon_i,\tag{1.9}$$

donde ε_i (ε_f) es la energía del átomo en su estado inicial (final), y $\hbar\omega$ es la energía de los fotones incidentes ¹.

En consecuencia, si se elige adecuadamente el tipo de átomo y la frecuencia del campo electromagnético en resonancia con la energía de excitación, y haciendo uso de las reglas de selección para la transición dipolar, la modelización del átomo como un sistema cuántico de sólo dos estados, es una muy buena aproximación a la situación real.

1.1.1. Hamiltoniano del Átomo Libre

Consideremos un sistema con dos niveles de energía, en principio no degenerados, que difieran en una cantidad $\hbar\omega_f$. Podemos pensar por ejemplo, en un átomo con un nivel superior (de mayor energía) al que llamaremos estado excitado, y un nivel inferior, o estado fundamental (Fig. 1.1). Introducimos los operadores de creación y destrucción de partícula para cada nivel atómico b_i, b_i^\dagger ($i = 0, 1$), con las siguientes reglas de conmutación o anticonmutación según se trate de bosones o fermiones

$$[b_i, b_j^\dagger]_{\pm} = \delta_{ij},$$

¹En realidad la luz nunca es perfectamente monocromática, sino que tiene una frecuencia con un ancho finito. En adición a ésto, el átomo al interactuar con su entorno, tampoco tiene un conjunto de niveles de energía perfectamente definidos, debido a fluctuaciones en los potenciales eléctricos o interacciones con el vacío.

$$\begin{aligned}
[b_i, b_j]_{\pm} &= 0, \\
[b_i^{\dagger}, b_j^{\dagger}]_{\pm} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

Puede escribirse el Hamiltoniano del sistema atómico como

$$H_0 = \varepsilon_0 \hat{n}_0 + \varepsilon_1 \hat{n}_1, \tag{1.11}$$

donde $\hat{n}_i = b_i^{\dagger} b_i$ es el operador número de partículas para el estado i -ésimo, y ε_i la energía correspondiente.

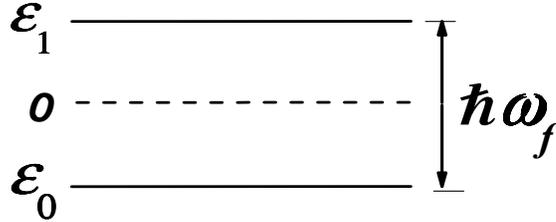


Figura 1.1: Diagrama de niveles de energía para el átomo libre

Fijando la escala de energía de modo tal que $\varepsilon_0 = -\hbar\omega_f/2$ podemos reescribir H_0 como

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_f}{2} (\hat{n}_1 - \hat{n}_0). \tag{1.12}$$

Los autoestados del Hamiltoniano (1.12) están dados por

$$\begin{aligned}
|+\rangle &= b_1^{\dagger} |0\rangle_{at} \\
|-\rangle &= b_0^{\dagger} |0\rangle_{at},
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

donde $|0\rangle_{at}$ es el vacío del espacio de Fock definido por

$$b_i |0\rangle_{at} = 0 \quad i = 0, 1. \tag{1.14}$$

Para considerar los efectos resultantes de colocar el sistema en un campo electromagnético cuantizado (ver Apéndice A), introduciremos los operadores a, a^{\dagger} , que

satisfacen la relación de conmutación bosónica

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (1.15)$$

y cero en cualquier otro caso². En término de estos operadores, el Hamiltoniano para un modo del campo electromagnético de frecuencia ω_b está dado por la expresión

$$H_b = \hbar\omega_b(\hat{n}_b + \frac{1}{2}), \quad (1.16)$$

donde $\hat{n}_b = a^\dagger a$ es el operador número de fotones. Los autoestados de H_b designados por $|l\rangle$ pueden escribirse como

$$|l\rangle = \frac{(a^\dagger)^l}{\sqrt{l!}}|0\rangle_b, \quad (1.17)$$

con $|0\rangle_b$ tal que $a|0\rangle_b = 0$. De esta forma, cada estado $|l\rangle$ tiene un número bien definido de fotones

$$\hat{n}_b|l\rangle = l|l\rangle. \quad (1.18)$$

El Hamiltoniano H_b tiene un número infinito de niveles discretos con energías

$$E_l = \hbar\omega_b(l + \frac{1}{2}), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

1.1.2. Estados Desacoplados

Analicemos primero la estructura de niveles del sistema desacoplado cuando el Hamiltoniano total puede escribirse como la suma de H_0 y H_b sin tener en cuenta términos de interacción átomo-campo.

Tendremos entonces, para el Hamiltoniano del sistema H , la expresión

$$H = \frac{\omega_f}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_0) + \omega_b(\hat{n}_b + \frac{1}{2}), \quad (1.20)$$

donde hemos puesto $\hbar = 1$. El mismo es diagonal en la base producto directo

$$|l, \pm\rangle = |l\rangle \otimes |\pm\rangle. \quad (1.21)$$

²Estamos considerando un campo electromagnético con un único modo. La extensión a un campo multimodo puede hacerse en forma inmediata considerando la suma de las contribuciones individuales de cada modo.

La energía de los estados de esta base es la suma de las energías de partícula independiente. Llamando δ a la diferencia de energía $\omega_f - \omega_b$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 E_{0,-} &= -\frac{\delta}{2} \\
 E_{l,-} &= \omega_b l - \frac{\delta}{2} \\
 E_{l,+} &= \omega_b(l+1) + \frac{\delta}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

Puede verse que para cada valor de l , las energías de los estados excitados $|l, +\rangle$ y $|l+1, -\rangle$ difieren en una cantidad igual a δ , mientras que el estado fundamental tiene una energía $E_{0,-}$ igual a la energía del estado fundamental del átomo libre más la energía de vacío del campo del fotón. A medida que las frecuencias ω_b y ω_f se acercan a un mismo valor, los estados $|l, +\rangle$ y $|l+1, -\rangle$ se encuentran cada vez más próximos en energía, y en el límite $|\delta| \rightarrow 0$ cada nivel, salvo el fundamental, está doblemente degenerado.

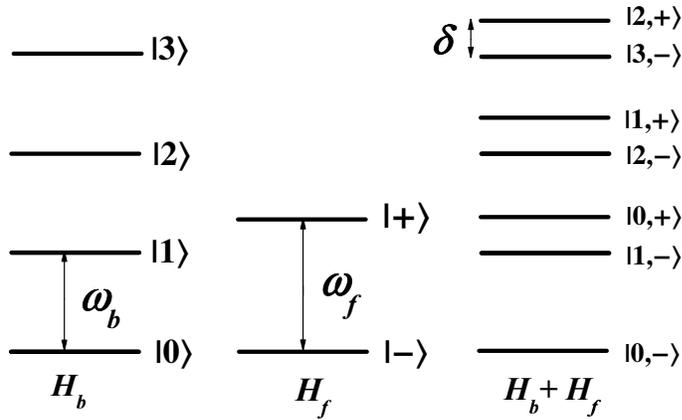


Figura 1.2: Diagrama de niveles de energía para el sistema desacoplado átomo-fotones

Tenemos entonces una secuencia de estados equiespaciados $\epsilon(l) = \{|l+1, -\rangle; |l, +\rangle\}$, donde la energía del estado $|l+1, -\rangle$ es menor que la del estado $|l, +\rangle$ para $\delta > 0$, y viceversa para $\delta < 0$ (Fig. 1.2).

1.1.3. Estados Acoplados

Consideremos ahora la situación en la cual el átomo interactúa con el único modo del campo electromagnético. El átomo en su estado fundamental podría pasar a su estado excitado por absorción de un fotón o, si inicialmente se encuentra en su estado excitado, decaer al estado fundamental emitiendo un fotón. Como se muestra en el Apéndice A.5, la situación puede ser descrita por el término de interacción

$$H_{int} = \sum_{i,j=0,1} \zeta^{ij} b_i^\dagger b_j (a + a^\dagger), \quad (1.23)$$

donde ζ^{ij} es proporcional al elemento de matriz dipolar

$$\zeta^{ij} \sim \langle a_i | e \hat{\mathbf{r}} | a_j \rangle. \quad (1.24)$$

En el caso analizado de un átomo con dos niveles, con $\zeta^{01} = \zeta^{10} = \zeta$ se obtiene

$$H_{int} = \zeta (b_1^\dagger b_0 + b_0^\dagger b_1) (a + a^\dagger). \quad (1.25)$$

El operador $b_1^\dagger b_0$ ($b_0^\dagger b_1$), puede identificarse con el operador escalera S_+ (S_-), ya que actúa destruyendo una partícula en el nivel atómico $| - \rangle$, y creándola en el nivel $| + \rangle$ (destruyendo una partícula en el nivel atómico $| + \rangle$, y creándola en el nivel $| - \rangle$),

$$\begin{aligned} S_+ &= b_1^\dagger b_0, \\ S_- &= b_0^\dagger b_1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Aplicando las reglas de conmutación (anticommutación) de los operadores b_i, b_i^\dagger ($i = 0, 1$), podemos ver que

$$[S_+, S_-] = \hat{n}_1 - \hat{n}_0. \quad (1.27)$$

Entonces, si definimos

$$S_z = \frac{1}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_0), \quad (1.28)$$

obtenemos tres operadores con las reglas de conmutación del álgebra $su(2)$

$$\begin{aligned} [S_+, S_-] &= 2S_z, \\ [S_z, S_\pm] &= \pm S_\pm. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Como el espacio sobre el cual actúan estos operadores es de dimensión $\Omega = 2j + 1 = 2$, podemos interpretar este sistema simple de un átomo con dos niveles como un sistema de pseudoespín 1/2. En término de estos operadores el Hamiltoniano total, átomo + campo, se expresa como

$$H = \omega_f S_z + \omega_b \left(\hat{n}_b + \frac{1}{2} \right) + \zeta (S_+ + S_-) (a + a^\dagger). \quad (1.30)$$

En función de la expresión anterior, hay cuatro términos que contribuyen a la energía de interacción. El término $a^\dagger S_-$ describe el proceso en el cual el átomo en el estado de mayor energía decae al estado de energía menor, y en el proceso se crea un fotón. El término $a S_+$ describe el proceso inverso. En ambos, se conserva la energía. El término $a S_-$ describe un proceso en cual el átomo decae y un fotón es aniquilado, dando como resultado una pérdida de energía. Similarmente, el término $a^\dagger S_+$ resulta en una ganancia de energía durante el proceso. Estos dos términos, oscilan a una frecuencia $\omega_f + \omega_b$, de modo que rápidamente se promedian a cero en comparación con los primeros, que varían muy lentamente cerca de la resonancia. Lo que se conoce como *aproximación de onda rotante*, consiste en mantener en el Hamiltoniano (1.30) sólo los términos proporcionales a $a^\dagger S_-$ y $a S_+$. Esta aproximación es válida cuando el campo electromagnético aplicado tiene una frecuencia ω_b , muy cercana a ω_f . El Hamiltoniano entonces, se reduce a:

$$H = \omega_f S_z + \omega_b \left(\hat{n}_b + \frac{1}{2} \right) + \zeta (S_+ a + a^\dagger S_-). \quad (1.31)$$

El Hamiltoniano (1.31) corresponde al *modelo de Jaynes-Cummings*, el cual no tiene en cuenta términos de la forma $a^\dagger S_+$ y $a S_-$, que no conservan la energía a primer orden, y dan pequeñas correcciones a los resultados cuando $|\omega_b - \omega_f| \ll \omega_f$.

Una base apropiada para diagonalizar el Hamiltoniano de (1.31) es la dada por $|l, k\rangle = |l\rangle \otimes |k\rangle^3$, donde ahora tenemos para la parte atómica

$$|k\rangle = S_+^k |0\rangle, \quad \text{con } k = 0, 1, \quad (1.32)$$

y $|0\rangle$ es tal que

$$S_- |0\rangle = 0. \quad (1.33)$$

De esta forma k indica la ocupación del estado atómico excitado. Los elementos de matriz de H en esta base están dados por

$$\begin{aligned} \langle l, k | H | l, k \rangle &= \omega_b(l + 1/2) + \omega_f(k - 1/2), \\ \langle l - 1, k + 1 | H | l, k \rangle &= \zeta \sqrt{l(1+k)(1-k)}, \\ \langle l + 1, k - 1 | H | l, k \rangle &= \zeta \sqrt{(l+1)k(2-k)}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Esta es una matriz de dimensión infinita, dado que el campo electromagnético contiene un número ilimitado de cuantos. Sin embargo, como el Hamiltoniano (1.31) conmuta con el operador número total de partículas, $S_z + a^\dagger a$, su matriz asociada (1.34) puede escribirse como una matriz en bloques; cada bloque corresponde a un valor distinto del número $L = l + k$, con $L \geq 0$. Hay un único bloque unidimensional correspondiente al valor $L = 0$. El autoestado del sistema para este valor del número cuántico L , coincide con el estado fundamental del sistema desacoplado:

$$\Psi_0 = |0, 0\rangle, \quad (1.35)$$

$$E_0 = -\frac{\delta}{2}. \quad (1.36)$$

Para $L = l + k > 0$, cada bloque es una matriz de dimensión 2×2 de la forma

$$H[L] \equiv H[l] = \begin{pmatrix} \omega_b(l+1) + \frac{\delta}{2} & \zeta \sqrt{l+1} \\ \zeta \sqrt{l+1} & \omega_b(l+1) - \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Los autovalores de esta matriz están dados por

$$\begin{aligned} E_1 &= \omega_b(l+1) - \frac{\Lambda}{2}, \\ E_2 &= \omega_b(l+1) + \frac{\Lambda}{2}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

³Los estados atómicos $|0\rangle$ y $|1\rangle$, se corresponden con los estados $|-\rangle$ y $|+\rangle$ definidos en (1.13).

con

$$\Lambda = \sqrt{\delta^2 + 4\zeta^2(l+1)}. \quad (1.39)$$

Como vemos, dentro de cada subespacio caracterizado por L , la diferencia de energía entre autoestados, es ahora de Λ , mayor que en el caso desacoplado (ver Fig.1.3). Entonces, en cada subespacio podemos encontrar dos autoestados del sistema $|\psi_1(L)\rangle$,

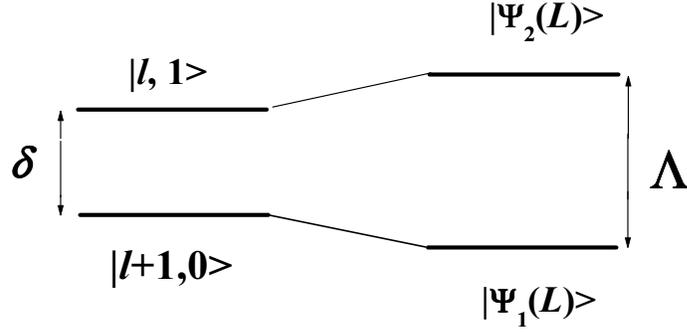


Figura 1.3: Desplazamiento de los niveles de energía producido por el acoplamiento, para el subespacio con autovalor $L = l + 1$.

y $|\psi_2(L)\rangle$, que se expresan como combinación lineal de los estados desacoplados $|l + 1, 0\rangle$ y $|l, 1\rangle$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\Psi_1(L)\rangle &= \cos\theta|l + 1, 0\rangle - \text{sen}\theta|l, 1\rangle, \\ |\Psi_2(L)\rangle &= \cos\theta|l, 1\rangle + \text{sen}\theta|l + 1, 0\rangle, \end{aligned} \quad (1.40)$$

con

$$\cot(2\theta) = \frac{\delta}{2\zeta\sqrt{l+1}}, \quad 0 \leq 2\theta \leq \pi. \quad (1.41)$$

Cuando $\delta = 0$, $\theta = \pi/4$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\Psi_1(L)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|l + 1, 0\rangle - |l, 1\rangle), \\ |\Psi_2(L)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|l, 1\rangle + |l + 1, 0\rangle). \end{aligned} \quad (1.42)$$

En este caso, los estados en cada subespacio se expresan en términos de la suma y la diferencia de los estados desacoplados, con igual peso, y sus energías son

$$\begin{aligned} E_1 &= \omega_b(l+1) - \zeta\sqrt{l+1}, \\ E_2 &= \omega_b(l+1) + \zeta\sqrt{l+1}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

1.1.4. Dinámica de la Interacción

Una vez diagonalizado el Hamiltoniano del sistema, resulta sencillo estudiar la evolución temporal del mismo. Supongamos que inicialmente el estado del sistema es $|\Psi(0)\rangle = |l+1, 0\rangle$. Al tiempo t el sistema habrá evolucionado a un estado $|\Psi(t)\rangle$ dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle. \quad (1.44)$$

Ya que las relaciones dadas en la Ec. (1.40) pueden ser invertidas para obtener

$$\begin{aligned} |l+1, 0\rangle &= \text{sen}\theta|\Psi_2(L)\rangle + \text{cos}\theta|\Psi_1(L)\rangle, \\ |l, 1\rangle &= \text{cos}\theta|\Psi_2(L)\rangle - \text{sen}\theta|\Psi_1(L)\rangle, \end{aligned} \quad (1.45)$$

tendremos

$$|\Psi(t)\rangle = \text{sen}\theta e^{-iE_2 t}|\Psi_2(L)\rangle + \text{cos}\theta e^{-iE_1 t}|\Psi_1(L)\rangle, \quad (1.46)$$

o en término de los estados desacoplados

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\omega_f(l+1)t} \{ [\text{cos}(\Lambda/2t) - i\text{sen}(\Lambda/2t)\text{cos}(2\theta)]|l+1, 0\rangle \\ &\quad - i\text{sen}(\Lambda/2t)\text{sen}(2\theta)|l, 1\rangle \}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Las probabilidades de encontrar el sistema en alguno de los estados desacoplados $|l+1, 0\rangle$, $|l, 1\rangle$, están dadas por:

$$\begin{aligned} P_{l,1} &= \text{sen}^2(2\theta) \text{sen}^2(\Lambda/2t), \\ P_{l+1,0} &= \text{cos}^2(\Lambda/2t) + \text{cos}^2(2\theta) \text{sen}^2(\Lambda/2t), \end{aligned} \quad (1.48)$$

oscilando a la frecuencia $\Lambda/2$. La magnitud Λ es la *frecuencia de Rabi* del sistema para el problema cuántico.

La amplitud de oscilación se hace máxima cuando $\theta = \pi/4$, lo que corresponde a $\delta = 0$. Se conoce a ésta como condición de resonancia del sistema, y se satisface cuando $\omega_b \rightarrow \omega_f$. Las probabilidades de ocupación de cada nivel se reducen a

$$\begin{aligned} P_{l,1} &= \text{sen}^2(\Lambda_0/2t), \\ P_{l+1,0} &= \text{cos}^2(\Lambda_0/2t), \end{aligned} \quad (1.49)$$

con $\Lambda_0 = 2\zeta\sqrt{l+1}$. Entre $t = 0$ y $t = \pi/\Lambda_0$ el sistema atómico absorbe energía del campo electromagnético; $P_{l+1,0}$ disminuye mientras $P_{l,1}$ aumenta. A $t = \pi/\Lambda_0$ sólo el nivel superior está poblado. A partir de allí y hasta $t = 2\pi/\Lambda_0$, el proceso se invierte aumentando $P_{l+1,0}$ a medida que $P_{l,1}$ disminuye (Fig. 1.4).

Este ciclo de absorción-emisión se repite indefinidamente y tiene lugar aún lejos de la condición de resonancia. En tal caso, la amplitud de oscilación se ve reducida debido a la mezcla de estados.

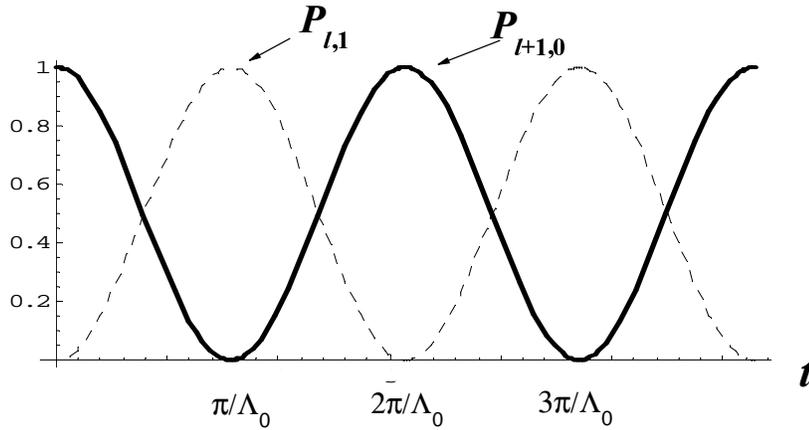


Figura 1.4: Gráficos de $P_{l,1}$ y $P_{l+1,0}$ para el caso en que el sistema se encuentra exactamente en resonancia ($\omega_b = \omega_f$). El estado inicial del sistema consta de $l+1$ fotones y el átomo en su estado fundamental

Para grandes valores de δ ($|\delta| \gg 2\zeta\sqrt{l+1}$), se tiene que $\theta \rightarrow \pi/2$ si $\delta < 0$, y $\theta \rightarrow 0$ si $\delta > 0$. Entonces

$$P_{l,1} \approx 0,$$

$$P_{l+1,0} \approx 1. \quad (1.50)$$

Tanto el número de fotones como la población de los estados permanece sin cambio alguno a medida que transcurre el tiempo.

En el caso en que el sistema se encuentra inicialmente en el estado $|l, 1\rangle$, las expresiones en (1.48) para las probabilidades de transición, resultan intercambiadas, de modo que, para un átomo en resonancia con el campo electromagnético, se tiene

$$\begin{aligned} P_{l,1} &= \cos^2(\Lambda_0/2t), \\ P_{l+1,0} &= \sin^2(\Lambda_0/2t). \end{aligned} \quad (1.51)$$

La frecuencia de Rabi en el vacío, es decir, cuando el número inicial de fotones es $l = 0$, no es nula, y a diferencia de lo que ocurre con el problema tratado en forma semiclásica, el sistema evoluciona en el tiempo. En la teoría semiclásica, un átomo inicialmente en su estado excitado, no puede decaer a menos que exista un campo electromagnético que induce tal transición. La *emisión espontánea*, que es observable experimentalmente, corresponde a un fenómeno puramente cuántico, y aparece naturalmente luego de haber cuantizado el campo de radiación.

1.2. Átomo de Tres Niveles

A diferencia de lo visto en la sección anterior, al estudiar la dinámica de un átomo de dos niveles en un campo electromagnético, cuando se tiene un sistema atómico, en donde las reglas de selección dadas por la aproximación dipolar, permite transiciones entre tres niveles atómicos distintos, entonces, hay más de una forma posible en la cual pueden llevarse acabo las transiciones atómicas. Por ejemplo, una configuración de niveles como se muestra en la Fig. 1.5, se llama *configuración cascada o escalera*. En presencia de un campo electromagnético pueden darse las transiciones entre los estados $|a\rangle$ y $|b\rangle$, y entre los estados $|b\rangle$ y $|c\rangle$, pero están prohibidas las transiciones entre los estados $|a\rangle$ y $|c\rangle$. El modo de la cavidad tiene una frecuencia ν cuyo valor difiere de la frecuencia de transición entre los estados $|b\rangle$ y $|c\rangle$ por una cantidad $\Delta = \nu - \omega_{bc}$. En el caso de la Fig. 1.6 (izquierda), la

configuración atómica está formada por dos niveles inferiores, $|b\rangle$ y $|c\rangle$, que pueden acoplarse a un único nivel superior $|a\rangle$ mediante dos campos de frecuencias ν_1 y ν_2 ; esta configuración de niveles atómicos se conoce como *configuración Λ* . Otro esquema de niveles posible es el denominado *configuración V* que se esquematiza en la misma figura en el gráfico de la derecha.

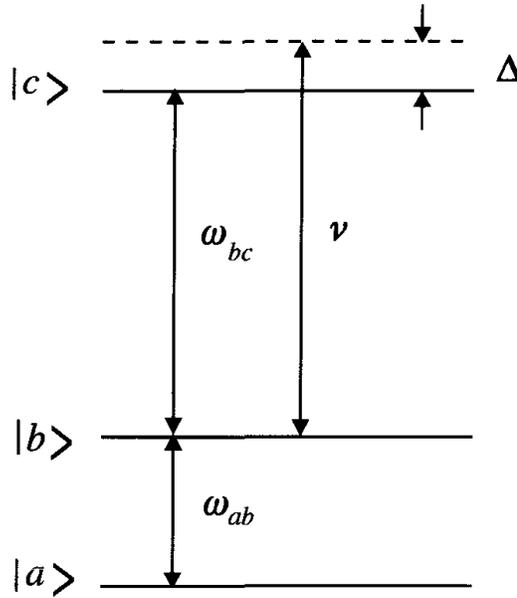


Figura 1.5: Sistema atómico de tres niveles con una configuración en cascada.

Vamos a analizar el caso particular, de una configuración en cascada, tal que $E_2 > E_1 > E_0$, donde con E_i ($i=0, 1, 2$), indicamos la energía del nivel atómico i -ésimo (Fig. 1.7). Si b_i, b_i^\dagger representan los operadores de aniquilación y creación de una partícula en el nivel i -ésimo respectivamente, con las reglas de conmutación (anticonmutación) dadas en (1.11) según se trate de átomos bosónicos (fermiónicos), tendremos para el Hamiltoniano del sistema libre

$$H_0 = \sum_{i=0}^2 E_i b_i^\dagger b_i. \quad (1.52)$$

Cuando el átomo interactúa con un campo electromagnético cuantizado de fre-

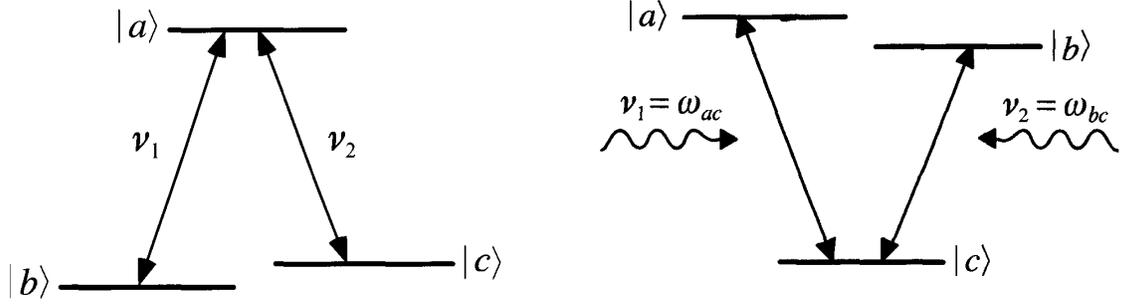


Figura 1.6: A la izquierda: Átomo de tres niveles en la configuración Λ interactuando con dos campos de frecuencias ν_1 y ν_2 . A la derecha: Configuración V en resonancia con las frecuencias de los campos.

cuencia ω , el Hamiltoniano del sistema en la aproximación de onda rotante, puede obtenerse por una generalización adecuada del Hamiltoniano correspondiente a un átomo de dos niveles interactuando con un único modo del campo. Así tendremos que

$$\begin{aligned}
 H &= \omega(a^\dagger a + 1/2) + \sum_{i=0}^2 E_{ii} b_i^\dagger b_i \\
 &+ g_1(ab_1^\dagger b_0 + a^\dagger b_0^\dagger b_1) \\
 &+ g_2(ab_2^\dagger b_1 + a^\dagger b_1^\dagger b_2),
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

donde g_1, g_2 son las constantes de acoplamiento para las transiciones entre los niveles $i = 0, 1$ e $i = 1, 2$ respectivamente. Tenemos entonces un término de fotón más el término del átomo libre (primer y segundo término); el tercer y cuarto término representan la excitación (desexcitación) del átomo por absorción (emisión) de un fotón entre los niveles 0 y 1, y entre los niveles 1 y 2 respectivamente.

Consideremos los operadores bilineales S^{ij} definidos como

$$S^{ij} = b_j^\dagger b_i, \quad i, j = 0, 1, 2, \tag{1.54}$$

que conmutan según las reglas del álgebra $su(3)$

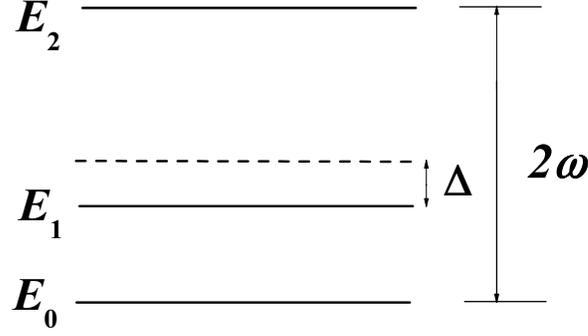


Figura 1.7: Esquema de niveles atómicos.

$$[S^{ij}, S^{km}] = \delta_{im} S^{kj} - \delta_{jk} S^{im}, \quad (1.55)$$

lo cual puede verificarse fácilmente usando (1.11). A partir de estos operadores pueden definirse los operadores de transición S_{\pm}^{ij}

$$\begin{aligned} S_{+}^{ij} &= S^{ij}, \\ S_{-}^{ij} &= (S_{+}^{ij})^{\dagger} = S^{ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \\ & \quad i < j. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Vemos que el efecto de S_{+}^{ij} es el de promover el átomo inicialmente en el nivel i -ésimo al nivel j -ésimo, en tanto que S_{-}^{ij} induce la transición inversa. Para cada par i, j estos operadores conmutan a

$$[S_{+}^{ij}, S_{-}^{ij}] = S^{jj} - S^{ii}. \quad (1.57)$$

Si introducimos el operador de inversión atómico S_z^{ij}

$$S_z^{ij} = \frac{1}{2}(S^{jj} - S^{ii}), \quad (1.58)$$

los operadores $\{S_{+}^{ij}, S_{-}^{ij}, S_z^{ij}\}_{i \neq j}$ satisfacen las relaciones de conmutación de $su(2)$ ⁴

$$\begin{aligned} [S_z^{ij}, S_{\pm}^{ij}] &= \pm S_{\pm}^{ij}, \\ [S_{+}^{ij}, S_{-}^{ij}] &= 2S_z^{ij}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

⁴Notar que son tres subálgebras que no conmutan entre sí.

En término de estos nuevos operadores el Hamiltoniano del sistema se escribe en la forma

$$\begin{aligned}
H &= \omega_b a^\dagger a + \sum_i E_i S^{ii} \\
&+ g_1 (a S_+^{01} + a^\dagger S_-^{01}) \\
&+ g_2 (a S_+^{12} + a^\dagger S_-^{12}).
\end{aligned} \tag{1.60}$$

El Hamiltoniano H puede ser diagonalizado en la base

$$|ln_0n_1n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{l!}} a^\dagger l b_0^{\dagger n_0} b_1^{\dagger n_1} b_2^{\dagger n_2} |0\rangle, \tag{1.61}$$

con

$$\begin{aligned}
n_0 + n_1 + n_2 &= 1, \\
n_0, n_1, n_2 &= 0, 1.
\end{aligned}$$

En esta base, los elementos de matriz no nulos de (1.60) son

$$\begin{aligned}
\langle l, n_0n_1n_2 | H | l, n_0n_1n_2 \rangle &= l\omega + \sum_{i=0}^2 n_i E_i, \\
\langle l-1, n_0-1, n_1+1, n_2 | H | l, n_0n_1n_2 \rangle &= g_1 \sqrt{ln_0(n_1+1)}, \\
\langle l+1, n_0+1, n_1-1, n_2 | H | l, n_0n_1n_2 \rangle &= g_1 \sqrt{(l+1)(n_0+1)n_1}, \\
\langle l-1, n_0, n_1-1, n_2+1 | H | l, n_0n_1n_2 \rangle &= g_2 \sqrt{ln_1(n_2+1)}, \\
\langle l+1, n_0, n_1+1, n_2-1 | H | l, n_0n_1n_2 \rangle &= g_2 \sqrt{(l+1)(n_1+1)n_2}.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Estos son los elementos de matriz no nulos, correspondientes a cada submatriz caracterizada por un valor fijo $L = l + n_2 - n_0$, autovalor del operador $\hat{L} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2S_z^{02}$, el cual es una constante de movimiento del sistema. La diagonalización exacta de la matriz hamiltoniana puede llevarse a cabo en cada uno de estos subespacios, caracterizados por el autovalor del operador \hat{L} . El subespacio correspondiente a $L = 0$, es de dimensión 1, con autoestado, $|0, 0, 1, 0\rangle$. Para el subespacio con $L = 1$, hay dos configuraciones posibles, y por lo tanto, los autoestados correspondientes, son combinación lineal de la base $\{|1, 0, 1, 0\rangle, |0, 0, 0, 1\rangle\}$. Para $L \geq 3$, cada espacio propio es de dimensión 3, siendo los vectores propios, combinación lineal de los estados $\{|l+2, 1, 0, 0\rangle, |l+1, 0, 1, 0\rangle, |l, 0, 0, 1\rangle\}$. Al fijar las escalas de energía

(Fig.1.7) de modo que

$$E_2 - E_0 = 2\omega, \quad E_1 - E_0 = \omega - \Delta, \quad (1.63)$$

el sistema está en resonancia con dos fotones del campo electromagnético. El conjunto de autovalores que se obtiene es:

$$\begin{aligned} \lambda_1(L) &= \omega (l + 1), \\ \lambda_2(L) &= \omega (l + 1) - \delta - r(l), \\ \lambda_3(L) &= \omega (l + 1) - \delta + r(l), \end{aligned} \quad (1.64)$$

con

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta}{2}, \\ r(l) &= \sqrt{g_1^2(l + 2) + g_2^2(l + 1) + \delta^2}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

y los autoestados correspondientes:

$$\begin{aligned} |\Psi_1(L)\rangle &= \mathcal{N}_1(-g_2\sqrt{l+1}|a\rangle + g_1\sqrt{l+2}|c\rangle), \\ |\Psi_2(L)\rangle &= \mathcal{N}_2(g_1\sqrt{l+2}|a\rangle - (r(l) + \delta)|b\rangle \\ &\quad + g_2\sqrt{l+1}|c\rangle), \\ |\Psi_3(L)\rangle &= \mathcal{N}_3(g_1\sqrt{l+2}|a\rangle + (r(l) - \delta)|b\rangle \\ &\quad + g_2\sqrt{l+1}|c\rangle), \end{aligned} \quad (1.66)$$

donde los estados de la base se han rotulado según:

$$\begin{aligned} |a\rangle &= |l + 2, 1, 0, 0\rangle, \\ |b\rangle &= |l + 1, 0, 1, 0\rangle, \\ |c\rangle &= |l, 0, 0, 1\rangle, \end{aligned} \quad (1.67)$$

y las constantes de normalización corresponden a:

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{r(l)^2 - \delta^2}},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\delta}{r(l)}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r(l)^2 - \delta^2}}, \\
\mathcal{N}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\delta}{r(l)}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r(l)^2 - \delta^2}}.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

El caso con $\Delta = 0$ corresponde a un esquema simétrico de niveles de energía, es decir, todos los niveles atómicos equiespaciados (Fig. 1.7). Para esta elección, si inicialmente el único átomo se encuentra en el estado excitado de energía E_2 , la función de onda del sistema al tiempo t en el esquema de Schrödinger, puede escribirse como

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|c\rangle \\
&= \cos\theta e^{-i\lambda_1 t}|\Psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta e^{-i\lambda_2 t}|\Psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta e^{-i\lambda_3 t}|\Psi_3\rangle,
\end{aligned} \tag{1.69}$$

con las relaciones

$$\begin{aligned}
\text{sen}\theta &= \frac{g_2\sqrt{l+1}}{\sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)}} \\
\cos\theta &= \frac{g_1\sqrt{l+2}}{\sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)}}.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Las probabilidades de encontrar al sistema en cada uno de los estados $|a\rangle$, $|b\rangle$ o $|c\rangle$ al tiempo t , son:

$$\begin{aligned}
P_a(t) &= |\langle a | \Psi(t) \rangle|^2 \\
&= \frac{g_1^2 g_2^2 (l+1)(l+2)}{(g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1))^2} \left[1 - \cos \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right) \right]^2, \\
P_b(t) &= |\langle b | \Psi(t) \rangle|^2 \\
&= \frac{g_2^2(l+1)}{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \text{sen}^2 \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right), \\
P_c(t) &= |\langle c | \Psi(t) \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \left[g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1) \cos \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Entonces, en esta configuración tipo escalera, cuando el átomo inicialmente se encuentra en el nivel atómico superior, podemos ver que el sistema exhibe dos frecuencias de oscilaciones de Rabi: $\Lambda = g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)$ a la que oscilan las probabilidades $P_a(t)$ y $P_c(t)$, y 2Λ con la que oscila la probabilidad $P_b(t)$. Como casos extremos, si

se toma $g_1 = 0$ se recuperan los resultados del modelo de Jaynes-Cummings para un átomo de dos niveles con transiciones atómicas $c \leftrightarrow b$

$$\begin{aligned} P_a(t) &= 0 \\ P_b(t) &= \text{sen}^2 \left(g_2 \sqrt{l+1} t \right), \\ P_c(t) &= \text{cos}^2 \left(g_2 \sqrt{l+1} t \right). \end{aligned} \tag{1.72}$$

Al fijar $g_2 = 0$ se obtiene simplemente:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= 0 \\ P_b(t) &= 0, \\ P_c(t) &= 1. \end{aligned} \tag{1.73}$$

La transición $c \leftrightarrow b$ está prohibida, y en consecuencia es imposible poblar el nivel fundamental.

Si el estado inicial del sistema corresponde al de un átomo en su estado fundamental, y $l + 2$ fotones presentes en la cavidad, la expresiones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} P_a(t) &= |\langle a | \Psi(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \left[g_2^2(l+1) + g_1^2(l+2) \text{cos} \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right) \right]^2. \\ P_b(t) &= |\langle b | \Psi(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{g_1^2(l+2)}{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \text{sen}^2 \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right), \\ P_c(t) &= |\langle c | \Psi(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2 (l+1)(l+2)}{(g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1))^2} \left[1 - \text{cos} \left(t \sqrt{g_1^2(l+2) + g_2^2(l+1)} \right) \right]^2, \end{aligned} \tag{1.74}$$

y un análisis similar al caso anterior puede realizarse para distintos valores de las constantes de acoplamiento g_1 y g_2 . Comparando las expresiones en (1.72) con las de (1.75), se ve que el modelo resulta simétrico bajo el intercambio de $|a\rangle$ con $|c\rangle$, y g_1 con g_2 .

1.2.1. Reducción a un Hamiltoniano Efectivo de Dos Niveles.

El modelo descrito por el Hamiltoniano de la ecuación (1.60), el cual representa un sistema de tres niveles en interacción con un modo bosónico, puede extenderse para considerar un sistema de A átomos idénticos de tres niveles. A tal efecto, los operadores S^{ij} en (1.54), deben entenderse como operadores colectivos. Análogamente al caso de un único átomo en la cavidad, el Hamiltoniano del sistema átomos-campo, tiene dos constantes de movimiento: (1) El número total de átomos en el sistema, $A = S^{00} + S^{11} + S^{22}$, y (2) el operador $\hat{L} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2S_z^{02}$. Bajo la condición dada por (1.63), la cual indica que la transición entre el estado fundamental y el segundo estado excitado, está en resonancia exacta con dos fotones del modo electromagnético en la cavidad, el Hamiltoniano en (1.60) puede escribirse en la forma

$$H = \omega_b L + H_I + EA, \quad (1.75)$$

donde $E = \frac{1}{3}(E_0 + E_1 + E_2)$, y

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{2\Delta}{3}(S_z^{12} - S_z^{01}) + a(g_1 S_+^{01} + g_2 S_+^{12}) \\ &+ a^\dagger(g_1 S_-^{01} + g_2 S_-^{12}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

En el trabajo de la Ref. (Klimov et al., 1999), los autores muestran, que para valores grandes del desplazamiento del nivel intermedio, Δ , es posible transformar el Hamiltoniano del sistema, en un Hamiltoniano efectivo de dos niveles, descrito por el álgebra $su(2)$. El procedimiento consta en realizar una secuencia de rotaciones infinitesimales del grupo $SU(3)$, de modo que el Hamiltoniano (1.75) se transforma de la siguiente manera:

$$\tilde{H} = U_4 U_3 U_2 U_1 H U_1^\dagger U_2^\dagger U_3^\dagger U_4^\dagger, \quad (1.77)$$

con

$$\begin{aligned} U_1 &= \exp(i\alpha S_x^{01}), & U_2 &= \exp(i\beta S_x^{12}), \\ U_3 &= \exp(i\gamma S_y^{01}), & U_4 &= \exp(i\delta S_y^{12}), \end{aligned} \quad (1.78)$$

donde

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}g_1 p}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2}g_2 p}{\Delta},$$

$$\gamma = -\frac{\sqrt{2}g_1x}{\Delta}, \quad \delta = \frac{\sqrt{2}g_2x}{\Delta}, \quad (1.79)$$

y $x = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, $p = (a - a^\dagger)/\sqrt{2}i$. Se asume que los parámetros α, \dots, δ son pequeños, lo que implica que $\Delta \gg g_1\sqrt{\bar{n}}, g_2\sqrt{\bar{n}}$ (\bar{n} es el número medio de fotones del modo del campo electromagnético). La expresión para el Hamiltoniano transformado, despreciando términos de orden $(g\sqrt{\bar{n}}/\Delta)^2$, es:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &\approx \left[-\frac{g_1^2}{\Delta}(a^\dagger a + aa^\dagger) - \frac{2}{3}\Delta \right] S_z^{01} \\ &+ \frac{g_1g_2}{\Delta}(a^2S_+^{02} + a^{\dagger 2}S_-^{02}) + \left[\frac{g_2^2}{\Delta}(a^\dagger a + aa^\dagger) + \frac{2}{3}\Delta \right] S_z^{12} \\ &- \frac{2}{\Delta}[g_1^2(S_x^{01})^2 - g_2^2(S_x^{12})^2]. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Por último, se aplica sobre el Hamiltoniano (1.80), una transformación de la forma

$$U_5 = \exp \left[-i\frac{2}{3}\Delta(S_z^{01} - S_z^{12})t \right]. \quad (1.81)$$

Trabajando en el marco de la aproximación de onda rotante, se desprecian los términos que más rápidamente oscilan en el tiempo, y el Hamiltoniano efectivo toma la forma,

$$\begin{aligned} H_{ef} &\approx \frac{A}{2} \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{\Delta} a^\dagger a + \frac{g_2^2}{\Delta} \right) \\ &+ \left(\frac{g_1^2 - g_2^2}{\Delta} a^\dagger a + \frac{g_2^2}{\Delta} \right) S_z^{02} + \frac{g_1g_2}{\Delta}(a^2S_+^{02} + a^{\dagger 2}S_-^{02}) \\ &- S^{11} \left(2\frac{g_1^2}{\Delta} S_z^{02} - \frac{g_1^2 - g_2^2}{\Delta} a^\dagger a - \frac{g_1^2}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (1.82)$$

Dado que el operador S^{11} es una constante de movimiento para H_{ef} , si el primer nivel excitado no se encuentra poblado a $t = 0$, la transformación (1.81), se reduce a un factor de fase, y obtenemos

$$\begin{aligned} H_{ef} &= A\beta_1 a^\dagger a + ((\beta_2 - \beta_1)a^\dagger a + \beta_2) \times \left(S_z^{02} + \frac{A}{2} \right) \\ &+ \lambda(a^2S_+^{02} + a^{\dagger 2}S_-^{02}), \end{aligned} \quad (1.83)$$

donde se han definido las nuevas constantes de acoplamiento,

$$\beta_1 = \frac{g_1^2}{\Delta}, \quad \beta_2 = \frac{g_2^2}{\Delta}, \quad \lambda = \frac{g_1g_2}{\Delta}.$$

El Hamiltoniano (1.83), describe una interacción efectiva entre un conjunto de átomos de dos niveles y un campo electromagnético. Las transiciones que involucran el nivel intermedio, han desaparecido luego de las sucesivas transformaciones y aproximaciones llevadas a cabo. Los resultados numéricos (Klimov et al., 1999), indican que la dinámica de este Hamiltoniano, coincide con la del Hamiltoniano original (que tenía en cuenta la activación de los tres niveles atómicos), en un intervalo de tiempo $gt \ll \Delta^2/g^2\bar{n}$. Este Hamiltoniano efectivo, permite la descripción del sistema a partir de una álgebra $su(2)$, con una simplificación importante respecto del problema original.

En la Ref. (Klimov and Sanchez-Soto, 2000), puede encontrarse una descripción general del método ejemplificado en esta sección, al que los autores denominan *método de pequeñas rotaciones*. En el trabajo citado, se describe, en forma sistemática, esta técnica no perturbativa, que permite obtener la dinámica de un sistema cuántico, en término de Hamiltonianos efectivos, que pueden ser diagonalizados en forma exacta. Los autores comienzan mostrando cómo esta técnica, puede aplicarse en Hamiltonianos descritos por una deformación del álgebra $su(2)$, cuando algún parámetro físico, dado por el modelo particular considerado, se vuelve pequeño. Posteriormente, hacen una extensión de la misma, considerando Hamiltonianos con una deformación del álgebra $su(3)$. El método, puede ser generalizado a sistemas de N niveles, en interacción con campos cuánticos.

Capítulo 2

Estados Coherentes

2.1. Estados Coherentes del Oscilador Armónico

De todos los estados del campo de radiación, los estados coherentes son, quizás, los más importantes de los que surgen frecuentemente en óptica cuántica. Esta clase de estados fue estudiada por primera vez por Schrödinger (1926) en conexión con el problema del oscilador armónico cuántico. Schrödinger se refirió a ellos como estados con un producto de incerteza mínimo, y durante muchos años fueron sólo una mera curiosidad, hasta que J. R. Klauder (Klauder and Skagerstam, 1985), en 1960, fue más allá y comenzó a estudiar en profundidad sus propiedades. El reconocimiento de que los estados coherentes son particularmente importantes y apropiados para el tratamiento cuántico de la coherencia óptica y su adopción dentro del área de la óptica cuántica, se debe a los trabajos de Glauber (1963-1965) quien recién entonces, les adjudicó el nombre de *estados coherentes*.

Seguido del desarrollo de la teoría cuántica de la radiación y con la aparición del láser, hubo un gran interés en estudiar los estados del campo electromagnético que mejor describieran su comportamiento clásico. Una de las consecuencias de la cuantización del campo electromagnético es que trae asociada una relación de incerteza entre las variables conjugadas \hat{q} y \hat{p} . Entonces, parece razonable proponer que la función de onda que describe un campo electromagnético muy cercano a un campo clásico, tenga un *mínimo de incerteza* para todo tiempo, bajo la acción de

un potencial armónico simple. El vector de campo correspondiente a un paquete de onda de este tipo es el estado coherente $|\alpha\rangle$. Este estado, es autoestado de la parte correspondiente a frecuencias positivas del operador de campo eléctrico, o equivalentemente, un autoestado del operador de aniquilación de fotones.

Si bien los estados coherentes fueron creados en el contexto de la óptica cuántica, sus varias generalizaciones tienen un amplio uso en muchas ramas de la física (Klauder and Skagerstam, 1985; Perelemov, 1986). El problema del oscilador armónico es extremadamente simple desde el punto de vista algebraico. Para problemas más complicados, el *método de vectores de estado coherentes* elimina gran parte de esta complejidad. Mediante este método, se pueden reducir problemas que involucran altas simetrías, a problemas de un álgebra de un oscilador armónico n-dimensional acoplado con una simetría intrínseca de menor rango que la original (Hecht, 1987).

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales de la teoría estándar de estados coherentes definidos en conexión con el oscilador armónico unidimensional, y una generalización simple de los mismos para considerar el álgebra de momento angular.

2.1.1. Representación en el Espacio de Fock

Hay distintas maneras de introducir matemáticamente los estados coherentes. Una de ellas es definirlos como autoestados del operador de aniquilación (Glauber, 1963a). Por ejemplo, si nos concentramos en un modo simple del campo electromagnético, diremos que $|\alpha\rangle$ es un estado coherente si

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

con la relación Hermítica conjugada,

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|. \quad (2.2)$$

De esta definición, es fácil ver que el número medio de fotones en un estado coherente $|\alpha\rangle$ está dado por $\langle n \rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$, y por lo tanto $|\alpha|^2$ es una medida de la energía del campo electromagnético

$$\langle H \rangle \sim \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^2. \quad (2.3)$$

Dado que los estados de Fock $\{|n\rangle, n = 0, 1, \dots\}$ forman un conjunto ortonormal completo, podemos utilizarlos para representar $|\alpha\rangle$ en la forma

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle, \quad (2.4)$$

donde los coeficientes de la expansión $b_n = \langle n|\alpha\rangle$ son números complejos a determinar. Recordando que $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, y la definición (2.1) con la que se introdujo el estado coherente $|\alpha\rangle$, es fácil ver que

$$\langle n+1|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \langle n|\alpha\rangle, \quad (2.5)$$

expresión que, utilizada en forma recursiva, nos conduce a

$$\langle n+1|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle, \quad (2.6)$$

y nos permite escribir

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.7)$$

Si el estado $|\alpha\rangle$ se normaliza a la unidad, se obtiene la condición

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} |\langle 0|\alpha\rangle|^2 = 1. \quad (2.8)$$

Finalmente, obtenemos a menos de un factor de fase, la forma explícita para un dado estado coherente en la base de estados número

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.9)$$

Esta expresión nos permite ver que la probabilidad de encontrar n fotones en el estado coherente $|\alpha\rangle$ está dada por una distribución de Poisson

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (2.10)$$

con media $\langle n\rangle$ y varianza $(\Delta n)^2$ ambas iguales a $|\alpha|^2$.

En contraste a lo que ocurre con los estados número, los estados coherentes no son mutuamente ortogonales, ya que

$$\langle \alpha'|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha'|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha'^*)^m}{(m!)^{1/2}} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \langle m|n\rangle, \quad (2.11)$$

y teniendo en cuenta la ortonormalidad de los estados $|n\rangle$ resulta

$$\begin{aligned} |\langle\alpha'|\alpha\rangle| &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha'|^2+|\alpha|^2-2\alpha'^*\alpha)} \\ |\langle\alpha'|\alpha\rangle|^2 &= e^{-|\alpha'-\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Es decir, los estados coherentes son aproximadamente ortogonales para α y α' muy alejados entre sí en el plano complejo, pero tienen un solapamiento significativo, cuando $|\alpha - \alpha'|$ es del orden de la unidad. Sin embargo, pueden utilizarse para formar un conjunto completo (Glauber, 1963a; Barnett and Radmore, 1997). Para tal fin, es necesario demostrar que el operador unidad $\mathbf{1}$, puede expresarse como una suma o una integral en el plano complejo α , de operadores de proyección de la forma $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Para describir tales integrales se introduce el elemento diferencial de área en el plano complejo

$$d^2\alpha \equiv d(\text{Re}\alpha)d(\text{Im}\alpha), \quad (2.13)$$

de modo que $d^2\alpha$ es real. Con la utilización de coordenadas polares, $\alpha = |\alpha|e^{i\vartheta}$, puede probarse la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \sum_{n,m} \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| \\ &= \sum_{n,m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i(n-m)\vartheta} \int_0^\infty d|\alpha| e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{n+m+1} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| \\ &= \sum_{n,m} \delta_{nm} \frac{2}{n!} \int_0^\infty d|\alpha| e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n+1} |n\rangle\langle n| = \sum_n |n\rangle\langle n|, \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde se ha usado la ortogonalidad de las funciones $\{e^{in}\}$ y la expresión integral de la función Gamma. Como los estados número forman un conjunto ortonormal completo, la suma sobre n en la expresión anterior es simplemente el operador unidad. Se tiene entonces

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (2.15)$$

que constituye la relación de completitud para los estados coherentes. En consecuencia, pueden ser utilizados como una base de vectores para expandir un estado

arbitrario $|\psi\rangle$. Como todo estado arbitrario del oscilador posee una representación en término de estados número de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (2.16)$$

con $\sum_n |c_n|^2 = 1$, la serie en esta expresión puede ser utilizada para definir una función ψ de la variable compleja α

$$\psi(\alpha) = \sum_n c_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (2.17)$$

la cual claramente converge para todo $|\alpha|$ finito, debido a la condición que impone sobre los c_n la normalización del estado $|\psi\rangle$. Entonces ψ es una función que resulta analítica en todo el plano complejo α . Existe una correspondencia uno a uno entre estas funciones enteras para las cuales $\sum_n |c_n|^2 = 1$ y los estados del oscilador. Una descripción del oscilador podría realizarse considerando estas funciones como elementos de un espacio de Hilbert. Este espacio $\psi(\alpha)$ se conoce como *espacio de Bargmann* (Bargmann, 1962).

En este punto es interesante adoptar una normalización diferente a la dada en (2.9) para los estados coherentes. Indicaremos con $\|\alpha\rangle$ ¹ a estos estados definidos como:

$$\|\alpha\rangle = |\alpha\rangle e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (2.18)$$

Si de manera conjunta a la definición anterior, se introduce la siguiente medida $d\mu(\alpha)$ en el plano complejo

$$d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha, \quad (2.19)$$

todos los términos Gaussianos en las expresiones anteriores son absorbidos en la nueva notación, y la relación de completitud se reduce a

$$\mathbf{1} = \int d\mu(\alpha) \|\alpha\rangle \langle\alpha|. \quad (2.20)$$

¹Si bien es útil esta normalización en el caso de trabajar sobre el espacio de funciones enteras, a lo largo de esta tesis se utilizará la definición (2.9).

Con la nueva definición adoptada en (2.18), la función $\psi(\alpha)$ corresponde a la función de onda para el estado $|\psi\rangle$ en la representación de estados coherentes $|\alpha\rangle$,

$$\langle\alpha^*|\psi\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\psi\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_n = \psi(\alpha). \quad (2.21)$$

Estas funciones $\psi(\alpha)$ pueden obtenerse en forma alternativa directamente a partir de las funciones de onda en el espacio de coordenadas $\psi(x)$, mediante la *transformación de Bargman*

$$\psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx A(x, \alpha) \psi(x), \quad (2.22)$$

con la función núcleo $A(x, \alpha)$ dada por

$$A(x, \alpha) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2\right). \quad (2.23)$$

No sólo los vectores de estado pueden transformarse a su representación en el espacio de Bargman; también los operadores que actúan sobre estos vectores tienen una realización en este espacio. Como todo operador puede construirse a partir de los operadores de creación y aniquilación, alcanza con determinar la representación para \hat{a}^\dagger y \hat{a} . A partir de (2.1), (2.9) y (2.18), es fácil ver que

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \psi(\alpha) &= \langle\alpha^*|\hat{a}^\dagger|\psi\rangle = \alpha \langle\alpha^*|\psi\rangle = \alpha \psi(\alpha), \\ \hat{a} \psi(\alpha) &= \langle\alpha^*|\hat{a}|\psi\rangle = \frac{d}{d\alpha} \langle\alpha^*|\psi\rangle = \frac{d}{d\alpha} \psi(\alpha), \end{aligned} \quad (2.24)$$

lo que indica que en este espacio, los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} se mapean según

$$\hat{a}^\dagger \longrightarrow \alpha, \quad \hat{a} \longrightarrow \frac{d}{d\alpha} \quad (2.25)$$

La posibilidad de utilizar estados coherentes como una base, junto al hecho que los mismos son autoestados del operador de aniquilación, es de suma importancia en óptica cuántica. Como hemos visto, trabajar con estos estados resulta conveniente al momento de reducir el álgebra de operadores a un álgebra de funciones complejas. Veamos como ejemplo qué resulta al calcular el valor esperado del operador de campo $\hat{\mathbf{E}}$ (A.62) para un estado de este tipo. Dado que los estados coherentes no tienen un número definido de fotones, el valor esperado del operador de aniquilación no

es cero, como ocurre en el caso de estados de Fock (Sección A.4). De (2.1) y (2.2) vemos que

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle &= \alpha, \\ \langle \alpha | \hat{a}^\dagger | \alpha \rangle &= \alpha^*.\end{aligned}\tag{2.26}$$

A partir de estos resultados,

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}} | \alpha \rangle &= i \tilde{\epsilon} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{L^3}} \langle \alpha | (\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) | \alpha \rangle \\ &= i \tilde{\epsilon} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{L^3}} (\alpha e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &= -2 \tilde{\epsilon} |\alpha| \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{L^3}} \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \vartheta).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Esta expresión tiene la forma de una onda electromagnética clásica (A.22), de amplitud $|\alpha|$, y con una constante de fase ϑ a ser determinada de la relación $\alpha = |\alpha|e^{i\vartheta}$. Entonces, los estados coherentes son estados para los cuales *el valor esperado del operador de campo $\hat{\mathbf{E}}$ se asemeja al campo clásico \mathbf{E}* . La expresión de la segunda línea en (2.27) es formalmente idéntica a la expresión para un campo eléctrico cuantizado (A.62), pero los operadores de aniquilación y creación, \hat{a} y \hat{a}^\dagger han sido sustituidos por los números complejos α y α^* .

En forma análoga puede calcularse el valor esperado para el cuadrado del campo electromagnético,

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}}^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | \alpha \rangle \\ &= -\frac{2\pi\hbar\omega}{L^3} \langle \alpha | [\hat{a}^2 e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (1 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a}) + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{-2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] | \alpha \rangle \\ &= \frac{2\pi\hbar\omega}{L^3} [1 + 2|\alpha|^2 - \alpha^2 e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha^{*2} e^{-2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}],\end{aligned}\tag{2.28}$$

y vemos que la expresión resultante también podría haberse obtenido reemplazando los operadores de aniquilación y creación en la expresión del operador de campo, por α y α^* .

2.1.2. Operador de Desplazamiento

Una forma alternativa de ver un estado coherente, es escribiendo (2.9) como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha\hat{a}} |0\rangle. \quad (2.29)$$

Si hacemos uso de la identidad $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$ (Sakurai, 1985), la cual es válida para cualquier par de operadores A, B tales que $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$, se llega a

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} |0\rangle. \quad (2.30)$$

Si definimos el operador $D(\alpha) \equiv e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$, entonces podemos ver al estado coherente $|\alpha\rangle$ como generado por este *operador de desplazamiento* a partir del estado fundamental del oscilador

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (2.31)$$

Algunas propiedades

- (a) D es un operador unitario.
- (b) $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$
- (c) El operador $D(\beta)$ actuando sobre el estado coherente $|\alpha\rangle$ da, a menos de una factor de fase, un nuevo estado coherente *desplazado* del primero

$$D(\beta)|\alpha\rangle = D(\beta)D(\alpha)|0\rangle = e^{\frac{1}{2}(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} |\alpha + \beta\rangle \quad (2.32)$$

2.1.3. Función de Onda en el Espacio de Coordenadas

Introduzcamos el par de operadores Hermíticos \hat{q} y \hat{p} , que representan la coordenada y el impulso del modo del oscilador. Estos operadores deben obedecer la relación de conmutación canónica $[\hat{q}, \hat{p}] = i$, y pueden ser definidos a partir de los

operadores \hat{a}, \hat{a}^\dagger mediante las relaciones

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}),\end{aligned}\tag{2.33}$$

que pueden ser invertidas para obtener

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}), \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p}),\end{aligned}\tag{2.34}$$

A partir de la definición (2.1), vemos que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.\tag{2.35}$$

Dado que el operador \hat{p} puede ser representado por el operador derivada $\hat{p}|q\rangle = i(d/dq)|q\rangle$, donde $|q\rangle$ es un autoestado de \hat{q} con autovalor q , obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dq}\langle q|\alpha\rangle = -\sqrt{2}\left(\frac{q}{\sqrt{2}} - \alpha\right)\langle q|\alpha\rangle,\tag{2.36}$$

que puede ser integrada fácilmente. Entonces la función de onda normalizada del estado coherente $|\alpha\rangle$ en el espacio de coordenadas, es

$$\langle q|\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi)^{1/4}}e^{-(\frac{1}{\sqrt{2}}q - \alpha)^2}.\tag{2.37}$$

Esta función, que tiene la forma de un paquete de onda Gaussiano, no es más que un corrimiento de la función de onda del oscilador en su estado fundamental (Sakurai, 1985), lo cual refleja, que como vimos en (2.31), la forma de generar un estado coherente es mediante desplazamientos del estado fundamental en el plano complejo α .

2.1.4. Producto de Incertezas

Dado un observable A , se define un operador

$$\Delta A \equiv A - \langle A \rangle,\tag{2.38}$$

donde el valor esperado se toma sobre un cierto estado físico. El valor esperado de $\langle(\Delta A)^2\rangle$ se conoce como *dispersión* de A ²,

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2. \quad (2.39)$$

Dados dos observables A y B , se cumple que

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2, \quad (2.40)$$

independientemente de cual sea el estado utilizado al calcular los valores esperados. Esta relación generaliza el principio de incerteza de Heisenberg para dos operadores arbitrarios.

En el caso en que A y B se elijan como \hat{q} y \hat{p} , o viceversa, se obtiene la bien conocida relación

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.41)$$

Usando las expresiones dadas en (2.33), es fácil calcular el valor de este producto de incertezas sobre un estado coherente

$$\begin{aligned} \langle\hat{p}\rangle &= \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha), \\ \langle\hat{q}\rangle &= \langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*), \\ \langle\hat{p}^2\rangle &= \langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^*)^2, \\ \langle\hat{q}^2\rangle &= \langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*)^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} (\Delta\hat{p})^2 &= (\Delta\hat{q})^2 = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \Delta\hat{p}\Delta\hat{q} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Por lo tanto, los estados coherentes, son estados que minimizan el producto de incerteza, con varianzas que están igualmente distribuidas sobre un círculo en el espacio de fase.

²Es común encontrar en la literatura el uso de ΔA para indicar $\sqrt{\langle(\Delta A)^2\rangle}$ y $(\Delta A)^2$ para $\langle(\Delta A)^2\rangle$; en lo que sigue, por simplicidad, también se usará esa notación.

Para ser más explícitos, existe toda una familia de estados para los cuales el producto de incertezas resulta ser un mínimo. Pauli (Pauli, 1980) demostró que la función de onda en la representación de coordenadas para estos estados generales es de la forma

$$\psi(q) = \langle q|\alpha\rangle = (2\pi(\Delta q)^2)^{-1/4} \exp[i\langle p\rangle q - \frac{(q - \langle q\rangle)^2}{4(\Delta q)^2}], \quad (2.44)$$

y como se mostró en (2.37), los estados coherentes pertenecen a esta familia de estados.

2.1.5. Distribución de Wigner

Las funciones de distribución de probabilidad en el espacio de fase son de gran utilidad en física estadística clásica. Éstas permiten calcular los valores medios de funciones que dependen de la posición y del momento de las partículas. Esto se lleva a cabo integrando dichas funciones sobre alguna región en el espacio de fase (Pathria, 1977).

En mecánica cuántica, los valores medios de un observable \hat{A} se calculan a partir de la expresión

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\psi} P_{\psi} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (2.45)$$

donde $\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$ es el operador densidad del sistema, y P_{ψ} es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado cuántico $|\psi\rangle$. El principio de incerteza de Heisenberg prohíbe la existencia de una distribución de probabilidad en el espacio de fase, dado que no es posible determinar simultáneamente la posición y el momento de una partícula. Aún así, ciertas distribuciones pueden ser útiles en mecánica cuántica, permitiendo el cálculo de valores medios de funciones de los operadores de posición y momento, como integrales en el espacio de fase. Las mismas constituyen una herramienta para estudiar sistemas cuánticos a través de su representación en un espacio de fases, en forma alternativa a la representación de los estados como vectores de un espacio de Hilbert.

De todas las distribuciones en el espacio de fase, la *distribución de Wigner* es la

que aparece en forma natural, si se busca un análogo en mecánica cuántica de una distribución de probabilidad clásica. La misma puede ser escrita en la forma

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{x}{2} \right\rangle dx, \quad (2.46)$$

donde p y q son variables conjugadas. La expresión (2.46), a menos de una constante de normalización, es la utilizada originalmente por Wigner en su artículo (Wigner, 1932). Puede demostrarse (Davidovich, 1998) que esta distribución es la única en el espacio de fase que da las *distribuciones marginales* correctas, es decir, que cada una de éstas coincide con la distribución de probabilidad de la cuadratura correspondiente:

$$\int dp W(q, p) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle, \quad \int dq W(q, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle. \quad (2.47)$$

Estas propiedades (2.47) deben seguir siendo válidas al rotar los ejes en el espacio de fase por un ángulo arbitrario θ , de modo que

$$\begin{aligned} \hat{q}_\theta &= \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{q} \hat{U}(\theta) = \hat{q} \cos\theta + \hat{p} \operatorname{sen}\theta, \\ \hat{p}_\theta &= \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{p} \hat{U}(\theta) = -\hat{q} \operatorname{sen}\theta + \hat{p} \cos\theta, \end{aligned} \quad (2.48)$$

siendo la transformada inversa,

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{q}_\theta \cos\theta - \hat{p}_\theta \operatorname{sen}\theta, \\ \hat{p} &= \hat{q}_\theta \operatorname{sen}\theta + \hat{p}_\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Entonces, bajo la rotación del sistema de coordenadas, la expresión en (2.47) es:

$$P(\theta) = \int W(\hat{q}_\theta \cos\theta - \hat{p}_\theta \operatorname{sen}\theta, \hat{q}_\theta \operatorname{sen}\theta + \hat{p}_\theta \cos\theta), \quad (2.50)$$

con

$$P(\theta) = \langle q | \hat{U}^\dagger(\theta) \hat{\rho} \hat{U}(\theta) | q \rangle. \quad (2.51)$$

La expresión (2.50) da la distribución de probabilidad para \hat{q}_θ a partir de la función de Wigner $W(\hat{q}, \hat{p})$. Esta transformación llamada *transformada de Radon* (Radon, 1917), permite reconstruir en forma unívoca la función de distribución $W(\hat{q}, \hat{p})$ a partir de la transformada inversa, si se conoce la función $P(\theta)$.

Una de las propiedades importantes de la distribución de Wigner, es que puede ser utilizada para calcular valores medios de todo operador cuántico que sea una función simétrica de \hat{q} y \hat{p} , en forma análoga a lo que uno haría en mecánica estadística clásica. La asociación entre el valor esperado de esta clase de operadores e integrales del tipo clásicas en el espacio de fase, está dada por (Moyal and Bartlett, 1949):

$$Tr (\hat{\rho}\{\hat{q}^2\hat{p}\}_{sim}) = Tr [\hat{\rho} (\hat{q}^2\hat{p} + \hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{p}\hat{q}^2) /3] = \int_{-\infty}^{+\infty} dqdpW(q,p)q^2p, \quad (2.52)$$

y en general

$$Tr (\hat{\rho}\{\hat{q}^m\hat{p}^n\}_{sim}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dqdpW(q,p)q^m p^n. \quad (2.53)$$

La misma propiedad (2.52) puede ser expresada en término de \hat{a} y \hat{a}^\dagger , mediante

$$Tr [\hat{\rho}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})/2] = \int (d^2\alpha/\pi)\alpha\alpha^*W(\alpha,\alpha^*). \quad (2.54)$$

En la igualdad anterior, $W(\alpha,\alpha^*)$ es la expresión de la distribución de Wigner también en término de \hat{a} y \hat{a}^\dagger :

$$W(\alpha,\alpha^*) = 2Tr [\hat{\rho}\hat{D}(\alpha,\alpha^*)e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{D}^{-1}(\alpha,\alpha^*)], \quad (2.55)$$

siendo $\hat{D}(\alpha,\alpha^*)$ el operador de desplazamiento definido en (2.30)³. Alternativamente, pueden introducirse otras distribuciones en el espacio de fase, asociadas con un ordenamiento normal o antinormal, de funciones de los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger (Glauber, 1963a; Scully and Zubairy, 1997). Tales distribuciones, son conocidas como P -representación y Q -representación, respectivamente. Sin embargo, ninguna de éstas permite obtener las distribuciones marginales correctas.

Para ciertos estados del campo electromagnético, no resulta difícil obtener la función de Wigner, a partir de (2.46). Para el estado de vacío

$$\begin{aligned} W(q,p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left\langle q - \frac{x}{2} \middle| 0 \right\rangle \left\langle 0 \middle| q + \frac{x}{2} \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \psi_0(q - 1/2) \psi_0^*(q + 1/2) dx, \end{aligned} \quad (2.56)$$

³La función de Wigner en (2.55) implica una normalización diferente con respecto a la dada en (2.46): $W \rightarrow 2\pi W$, de modo que $\int (d^2\alpha/\pi)W(\alpha,\alpha^*) = 1$.

donde $\psi_0(q) = 1/(\pi)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}q^2}$ es la función de onda del oscilador armónico en el estado fundamental (Fig. 2.1). Entonces:

$$\begin{aligned} W_0(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-q^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

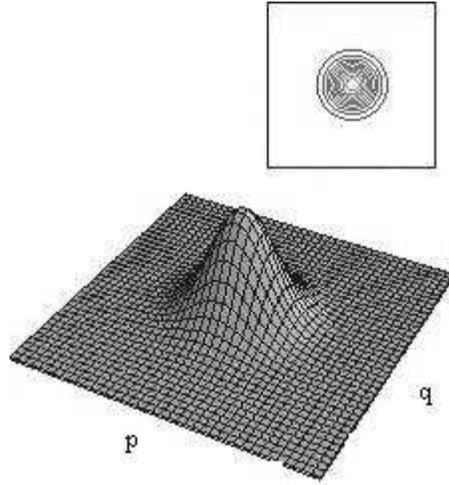


Figura 2.1: Función de Wigner para el estado de vacío. Las fluctuaciones están igualmente distribuidas en ambas cuadraturas q y p ; la proyección de la función de Wigner sobre el espacio de fase es un círculo centrado en el origen (recuadro superior).

La función de Wigner para un estado coherente $|\alpha\rangle$, se obtiene de forma análoga a la del caso anterior, recordando que su función de onda es un desplazamiento en el plano complejo de la función de onda del vacío (2.37), y que el parámetro α se relaciona con los autovalores de los operadores de posición y momento mediante $\alpha = q_0 + ip_0$ (2.35):

$$\begin{aligned} W_{coh}(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(q-q_0)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p_0)x} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-(q-q_0)^2 - (p-p_0)^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

El desplazamiento de la función de onda para un estado coherente respecto de la

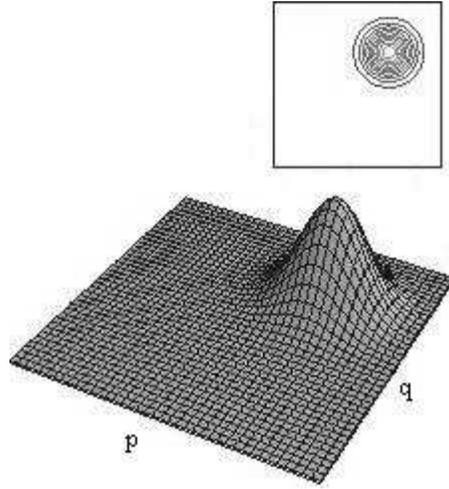


Figura 2.2: Función de Wigner para un estado coherente. En este caso el gráfico es completamente análogo al del vacío (Fig. 2.57), pero se encuentra desplazado en el espacio de fase; esto da un valor medio no nulo del campo eléctrico.

del vacío del campo electromagnético, se traduce en un desplazamiento de la función de Wigner en el espacio de fase (Fig. 2.2).

Para los estados de Fock del campo electromagnético, la función de onda en la representación de coordenadas es de la forma $\langle q|n\rangle = \psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}q^2}H_n(q)$, donde $H_n(q)$ es el polinomio de Hermite de orden n . Entonces, para el estado de un fotón $|1\rangle$,

$$\begin{aligned} W_1(q,p) &= \sqrt{2}\frac{1}{\pi}e^{-q^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left(q^2 - \frac{x^2}{4} \right) e^{-\frac{x^2}{4}} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi}e^{-q^2-p^2} (2q^2 + 2p^2 - 1). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Esta función es negativa en el interior de la circunferencia de radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, anulándose en el borde de la misma (Fig. 2.3). Para estados de Fock con un número mayor de fotones, la cantidad de ceros de la función siempre coincide con n , y aparecen más y

más regiones del espacio de fase donde la función de distribución se vuelve negativa (Fig. 2.4).

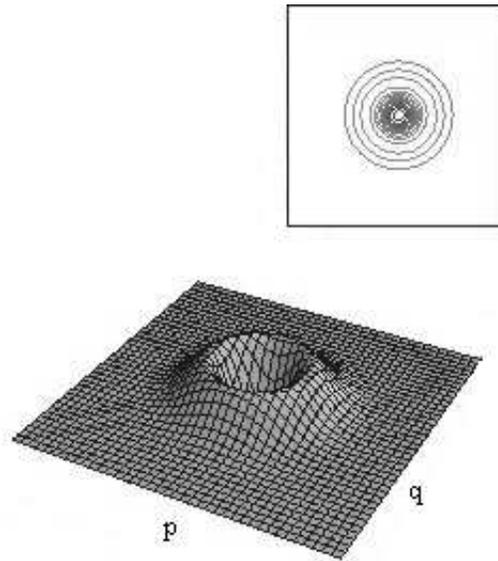


Figura 2.3: Ejemplo de función de Wigner para estados no-Gaussianos del campo electromagnético. En este caso el gráfico corresponde a la función de Wigner para el estado de Fock de un fotón. La función de distribución se vuelve negativa en torno al origen.

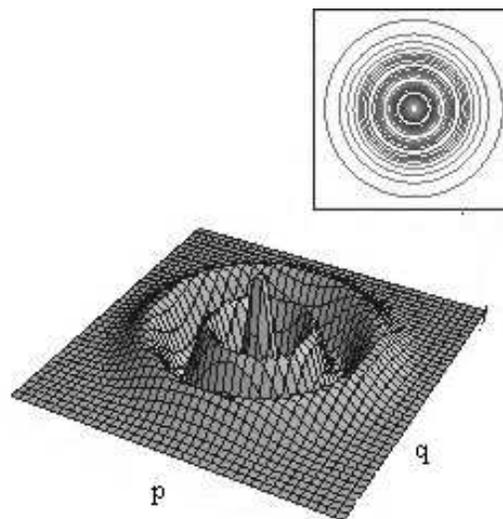


Figura 2.4: Estado de Fock con $n = 4$.

La negatividad de la función de Wigner para ciertos estados, hace que no pueda ser interpretada como una verdadera distribución de probabilidad, y es la razón por la cual se la suele llamar *función de cuasi-probabilidad*. Si bien para estados Gaussianos, como es el caso de los estados coherentes, es siempre positiva y en general bien comportada (sin singularidades), puede ser negativa para estados no Gaussianos, tales como los estados número. Este comportamiento puede pensarse como una consecuencia del principio de incerteza: dado que no es posible medir simultáneamente q y p , no es posible contar con una *verdadera* distribución de probabilidad, en el marco de la mecánica cuántica.

Un análisis que resulta de interés, es la comparación entre estados que son una superposición de dos estados coherentes, digamos por ejemplo,

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (2.60)$$

donde \mathcal{N} es una constante de normalización, y una mezcla estadística de los mismos dos estados coherentes anteriores, cuya matriz densidad está dada por:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|). \quad (2.61)$$

Por simplicidad elijamos $\alpha = \alpha_0 = q_0$, con q_0 real. Entonces, la función de Wigner correspondiente a (2.61), es simplemente la suma de dos funciones Gaussianas, cada una de las cuales, puede obtenerse a partir de (2.58):

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \left(e^{-(q-q_0)^2 - p^2} + e^{-(q+q_0)^2 - p^2} \right). \quad (2.62)$$

En cambio, la correspondiente función de Wigner para el estado definido en (2.60), contiene un término de interferencia, el cual refleja la superposición coherente de los estados $|\alpha_0\rangle$ y $|-\alpha_0\rangle$:

$$W(q, p) = \frac{\mathcal{N}}{\pi} \left(e^{-(q-q_0)^2 - p^2} + e^{-(q+q_0)^2 - p^2} + e^{-q^2 - p^2} \cos(2pq_0) \right). \quad (2.63)$$

Como consecuencia de este término de interferencia, la función de Wigner, es negativa en torno al origen del espacio de fase (Fig. 2.5), a diferencia de (2.62) que es siempre positiva.

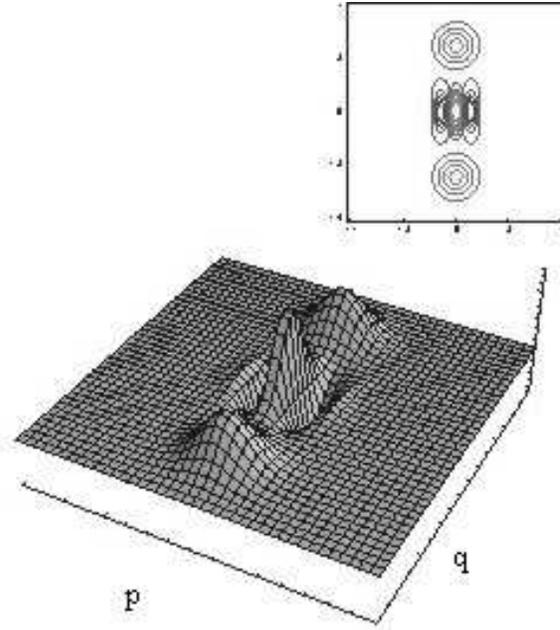


Figura 2.5: Función de Wigner para una superposición de dos estados coherentes, $|\psi\rangle \propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$.

Entonces, la medida de la función de Wigner (Leibfried et al., 1996; Banaszek et al., 1999), puede utilizarse como herramienta para distinguir entre distintos estados del campo electromagnético, mostrando negatividad para estados que no tienen una contrapartida clásica. Los términos oscilatorios en la función de Wigner, asociados a la interferencia, permiten distinguir superposiciones coherentes de estados cuánticos, de ensambles estadísticos. La evolución temporal de la función de Wigner, entonces, permite estudiar procesos de decoherencia, observando la desaparición de tales oscilaciones.

2.2. Estados Coherentes de Momento Angular

Los estados coherentes de momento angular, conocidos como estados de espín coherentes (EEC), o estados coherentes atómicos, también juegan un rol impor-

tante en muchos modelos de óptica cuántica. Si bien el interés sobre estos estados no está limitado a sistemas rotantes, resulta simple definirlos en términos de autoestados de momento angular $|j, m\rangle$, donde j es un valor entero o semientero y $m = -j, -j + 1, \dots, j$. La acción de los operadores de momento angular \hat{J}_3, \hat{J}_\pm sobre el estado $|j, m\rangle$ está dada por

$$\begin{aligned}\hat{J}_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\ \hat{J}_\pm|j, m\rangle &= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}|j, m \pm 1\rangle.\end{aligned}\quad (2.64)$$

El conjunto de estados $\{|j, m\rangle\}$ puede generarse por la aplicación sucesiva del operador $\hat{J}_+(\hat{J}_-)$ sobre el estado $|j, -j\rangle$ ($|j, j\rangle$). Por ejemplo, de aplicar k veces el operador \hat{J}_+ sobre el estado correspondiente a $m = -j$, podemos ver que

$$\begin{aligned}|j, -j + k\rangle &= \sqrt{\frac{(2j - k)!}{2j!k!}} \hat{J}_+^k |j, -j\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(j - m)!}{2j!(j + m)!}} \hat{J}_+^{j+m} |j, -j\rangle,\end{aligned}\quad (2.65)$$

en donde se hizo la sustitución $-j + k = m$. Esta expresión se puede sustituir por otra más compacta

$$|j, m\rangle = \frac{1}{(j + m)!} (C_{j+m}^{2j})^{-1/2} \hat{J}_+^{j+m} |j, -j\rangle, \quad (2.66)$$

donde C_{j+m}^{2j} es el número combinatorio

$$\binom{2j}{j+m}. \quad (2.67)$$

Un estado coherente de momento angular $|\theta, \varphi\rangle$, se define como un autoestado de la componente del momento angular \hat{J} en la dirección de un vector arbitrario $\vec{n} = (\text{sen}\theta\cos\varphi, \text{sen}\theta\text{sen}\varphi, \cos\theta)$

$$(\hat{J} \cdot \vec{n})|\theta, \varphi\rangle = \lambda|\theta, \varphi\rangle, \quad (2.68)$$

donde θ y φ son los ángulos polar y azimutal respectivamente, y con λ se indica el autovalor correspondiente. Por otra parte, dada una rotación \mathcal{R} en el espacio

de coordenadas, especificada por la dirección \vec{n} y de parámetro α , el operador que implementa esta rotación sobre el estado cuántico $|j, m\rangle$ es de la forma (Cohen-Tannoudji et al., 1988)

$$\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{J}\cdot\vec{n}}. \quad (2.69)$$

El estado rotado se obtiene mediante

$$|j, m\rangle' = \hat{R}_{\vec{n}}(\alpha)|j, m\rangle, \quad (2.70)$$

en tanto que, los observables se transforman según

$$A' = \hat{R}_{\vec{n}}(\alpha)A\hat{R}_{\vec{n}}^\dagger(\alpha). \quad (2.71)$$

La componente del operador de momento angular en la dirección (θ, φ) puede obtenerse rotando \hat{J}_3 , el cual se identifica con la componente z del operador de momento angular \hat{J} , un ángulo θ en torno al eje $\vec{n} = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j}$, mediante el operador

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\vec{n}}(\theta) &\equiv \hat{R}(\theta, \varphi) = \exp\{i\theta(\hat{J}_x\sin\varphi - \hat{J}_y\cos\varphi)\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta(e^{-i\varphi}\hat{J}_+ - e^{i\varphi}\hat{J}_-)\right\}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Dado que el estado $|j, -j\rangle$ es autoestado de \hat{J}_3 con autovalor $-j$, entonces $\hat{R}(\theta, \varphi)|j, -j\rangle$ será autoestado de $\hat{J}'_3 = \hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_3\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi)$ con el mismo autovalor

$$\begin{aligned} \hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_3\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi)(\hat{R}(\theta, \varphi)|j, -j\rangle) &= \hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_3\hat{R}^{-1}(\theta, \varphi)\hat{R}(\theta, \varphi)|j, -j\rangle \\ &= \hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_3|j, -j\rangle = -j(\hat{R}(\theta, \varphi)|j, -j\rangle), \end{aligned} \quad (2.73)$$

en donde se ha utilizado el hecho que $\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) = \hat{R}^{-1}(\theta, \varphi)$. En relación a nuestra definición inicial (2.68), la expresión anterior muestra que el estado $|\theta, \varphi\rangle$, es autoestado del operador $\hat{J}_n = \hat{J} \cdot \vec{n}$, con autovalor $-j$.

El operador de rotación (2.72), puede escribirse en una forma más conveniente usando la relación (Barnett and Radmore, 1997)

$$\begin{aligned} \exp(\xi\hat{J}_+ - \xi^*\hat{J}_-) &= \exp(z\hat{J}_+)\exp(\eta\hat{J}_z)\exp(-z^*\hat{J}_-), \quad (2.74) \\ \xi &= -\frac{\theta}{2}\exp(-i\varphi) \quad z = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp(-i\varphi) \quad \eta = \ln(1 + |z|^2) \end{aligned}$$

De acuerdo a todo lo expuesto anteriormente, podemos escribir al estado coherente $|\theta, \varphi\rangle$ como

$$\begin{aligned}
|\theta, \varphi\rangle &= \hat{R}(\theta, \varphi)|j, -j\rangle \\
&= \exp(z\hat{J}_+)\exp(\eta\hat{J}_z)|j, -j\rangle = \exp(-j\eta)\exp(z\hat{J}_+)|j, -j\rangle \\
\Rightarrow |\theta, \varphi\rangle &= (1 + |z|^2)^{-j} \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} \hat{J}_+^k |j, -j\rangle \\
&= (1 + |z|^2)^{-j} \sum_{m=-j}^j (C_{j+m}^{2j})^{1/2} z^{j+m} |j, m\rangle.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Esta expansión puede ser vista como la análoga a la expansión (2.9) de un estado coherente del campo bosónico en término de estados de Fock. Sin embargo, no debemos olvidar que, mientras un estado coherente bosónico es autoestado del operador de aniquilación \hat{a} , el estado coherente atómico $|\theta, \varphi\rangle$ no es un autoestado del operador \hat{J}_- , sino de la componente del operador \hat{J} en la dirección parametrizada por los ángulos (θ, φ) .

Los operadores de momento angular transformados por la rotación, pueden encontrarse utilizando la relación

$$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \tag{2.76}$$

junto con las relaciones de conmutación del álgebra $su(2)$. En la expresión anterior \hat{A} y \hat{B} son dos operadores cualesquiera. Por ejemplo, en el caso de \hat{J}_3

$$\begin{aligned}
\hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_3\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) &= \exp\left[\frac{1}{2}\theta(\hat{J}_-e^{i\varphi} - \hat{J}_+e^{-i\varphi})\right]\hat{J}_3\exp\left[-\frac{1}{2}\theta(\hat{J}_-e^{i\varphi} - \hat{J}_+e^{-i\varphi})\right] \\
&= \hat{J}_3 + \frac{\theta}{2}(\hat{J}_-e^{i\varphi} + \hat{J}_+e^{-i\varphi}) - \frac{\theta^2}{2!}\hat{J}_3 + \dots \\
&= \frac{1}{2}\hat{J}_3\cos\theta + (\hat{J}_-e^{i\varphi} + \hat{J}_+e^{-i\varphi})\text{sen}\theta
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Análogamente se obtienen en forma explícita \hat{J}'_{\pm}

$$\hat{R}(\theta, \varphi)\hat{J}_{\pm}\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) = e^{\pm i\varphi}\left\{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{J}_{\pm}e^{\mp i\varphi} - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{J}_{\mp}e^{\pm i\varphi} - \text{sen}\theta\hat{J}_3\right\} \tag{2.78}$$

Estas expresiones pueden ser utilizadas para calcular el valor esperado de las componentes del momento angular $\hat{J} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$, en el estado $|\theta, \varphi\rangle$. Notar que

$\hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) = \hat{R}(-\theta, \varphi)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_3 | \theta, \varphi \rangle &= \langle j, -j | \hat{R}(-\theta, \varphi) \hat{J}_3 \hat{R}(\theta, \varphi) | j, -j \rangle \\
&= -j \cos \theta \\
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_1 | \theta, \varphi \rangle &= -j \sin \theta \cos \varphi \\
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_2 | \theta, \varphi \rangle &= -j \sin \theta \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

donde se ha usado (2.77) y (2.78) cambiando θ por $-\theta$. Esto muestra, que efectivamente, la acción de $\hat{R}(\theta, \varphi)$ produce la rotación de \hat{J} , dado que

$$\langle \theta, \varphi | \hat{J} | \theta, \varphi \rangle = (-j \sin \theta \cos \varphi, -j \sin \theta \sin \varphi, -j \cos \theta) = -j \vec{n}. \tag{2.80}$$

Como el operador $\hat{R}(\theta, \varphi)$ es unitario, los valores esperados para \hat{J}_i^2 pueden calcularse mediante

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_i^2 | \theta, \varphi \rangle &= \langle j, -j | \hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) \hat{J}_i^2 \hat{R}(\theta, \varphi) | j, -j \rangle \\
&= \langle j, -j | \hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) \hat{J}_i \hat{R}(\theta, \varphi) \hat{R}^\dagger(\theta, \varphi) \hat{J}_i \hat{R}(\theta, \varphi) | j, -j \rangle
\end{aligned} \tag{2.81}$$

con $i = 1, 2, 3$. Se encuentra entonces que

$$\begin{aligned}
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_1^2 | \theta, \varphi \rangle &= j^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{j}{2} \left(\cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos(2\varphi) \right) \\
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_2^2 | \theta, \varphi \rangle &= j^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{j}{2} \left(\cos^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos(2\varphi) \right) \\
\langle \theta, \varphi | \hat{J}_3^2 | \theta, \varphi \rangle &= j^2 \cos^2 \theta + \frac{j}{2} \sin^2 \theta = \frac{j}{2} - \frac{j}{2} (1 - 2j) \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.82}$$

y como era de esperar, se verifica que $\langle \hat{J}^2 \rangle = j(j+1)$, dado que este valor no puede cambiar por la acción de la rotación del sistema. Las fluctuaciones en \hat{J}_1 y \hat{J}_2 resultan de (2.80) y (2.82)

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{J}_1)^2 &= \frac{j}{2} - \frac{j}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\
(\Delta \hat{J}_2)^2 &= \frac{j}{2} - \frac{j}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

El producto de estas incertezas está dado por

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{J}_1)^2 (\Delta \hat{J}_2)^2 &= \left(\frac{j}{2} - \frac{j}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \left(\frac{j}{2} - \frac{j}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right) \\
&= \frac{j^2}{4} + \frac{j^2}{4} \sin^2 \theta (1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \\
&\geq \frac{j^2}{4} \geq \frac{j^2}{4} \cos^2 \theta = \frac{1}{4} |\langle \hat{J}_3 \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

A diferencia de lo que pasa con los estados coherentes del oscilador, los estados coherentes de espín no pueden ser estados de mínima incerteza para cualquier elección del vector \vec{n} . Sin embargo, dado el estado $|\theta, \varphi\rangle$, éste minimiza la relación de incerteza

$$(\Delta \hat{J}'_1)^2 (\Delta \hat{J}'_2)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{J}'_3 \rangle|^2, \quad (2.85)$$

con

$$\hat{J}'_i = \hat{R}(\theta, \varphi) \hat{J}_i \hat{R}^\dagger(\theta, \varphi). \quad (2.86)$$

Notar que ésto es equivalente a tomar una terna de operadores $(\hat{J}'_1 \hat{J}'_2 \hat{J}'_3)$, donde \hat{J}'_3 representa la componente de \hat{J} en la dirección de \vec{n} , y por lo tanto, respecto de este sistema, $\theta = 0$.

Los estados coherentes de momento angular surgen naturalmente del modelo de Jaynes-Cummings tratado en el Capítulo 1. Para tal sistema de dos niveles, $j = \frac{1}{2}$ y se identifica los estados fundamental y excitado $|0\rangle$ y $|1\rangle$, con los estados de momento angular $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ y $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ respectivamente.

Capítulo 3

Estados Comprimidos

El principio de incerteza de Heisenberg establece que, la desigualdad $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$, se debe cumplir entre las desviaciones estándar de dos observables arbitrarios A y B . El producto de estas desviaciones está limitado por una cota inferior, pero en principio, no hay ninguna restricción al valor que pueda tomar cada una de ellas por separado. Como hemos visto en el Capítulo 2, esta cota inferior se alcanza para estados coherentes. Al mismo tiempo que minimizan el producto de incertezas $\Delta A \Delta B$, los estados coherentes presentan la particularidad que $\Delta A = \Delta B$. Esto significa, que los estados coherentes, tienen una distribución isotrópica del ruido cuántico¹ para variables conjugadas. Existe otro tipo de estados cuánticos, para los cuales, una de las fluctuaciones puede estar reducida respecto a las fluctuaciones del vacío, o a las fluctuaciones sobre un estado coherente general. Esta reducción de las fluctuaciones sobre una de las variables, debe estar acompañada del aumento de las fluctuaciones sobre la variable conjugada, a fin de cumplir con el límite impuesto por la Mecánica Cuántica. Si a la vez, estos estados son estados de mínima incerteza, diremos que el estado es un *estado comprimido*².

En este capítulo, comenzaremos analizando las propiedades de los estados com-

¹Con la expresión *ruido cuántico* nos referimos a la incerteza de alguna cantidad física debido, exclusivamente, a su origen cuántico. La mecánica cuántica predice que el proceso de medida, tiene en sí mismo, un efecto que es el de agregar ruido al sistema. Este ruido, entonces, puede estar presente en todo sistema cuántico, aunque las fuentes convencionales de ruido, como vibraciones, fluctuaciones térmicas, etc., puedan ser suprimidas.

²El término original en inglés es *squeezed state*, que proviene del verbo *to squeeze*: apretar, estrujar, estrechar; como sustantivo *squeeze*: estrujón, apretón.

primidos cuando las variables conjugadas son las dos cuadraturas del campo electromagnético. Luego, extenderemos el concepto a sistemas de momento angular.

3.1. Estados Comprimidos de Luz

Consideremos un campo electromagnético con un único modo de oscilación. Hemos visto (ver Capítulo 2), que es posible definir dos variables adimensionales \hat{q} y \hat{p} , en término de los operadores de aniquilación y creación, mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

que a partir de las relaciones de conmutación entre \hat{a} y \hat{a}^\dagger , verifican

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i.\tag{3.2}$$

\hat{q} y \hat{p} se comportan como dos variables conjugadas, obedeciendo la relación de incerteza

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{1}{2}.\tag{3.3}$$

Una interpretación alternativa de \hat{q} y \hat{p} , surge al expresar el vector campo eléctrico $\mathbf{E}(\vec{r}, t)$ en término de estas variables. Dado que,

$$\hat{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = l(\omega)\vec{\varepsilon}[\hat{a}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}],\tag{3.4}$$

donde $l(\omega)$ es alguna función real de la frecuencia, y $\vec{\varepsilon}$ es el vector de polarización. Entonces, a partir de la definición (3.1), obtenemos

$$\hat{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) = \sqrt{2}l(\omega)\vec{\varepsilon}[\hat{q}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \hat{p}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)].\tag{3.5}$$

De aquí que, \hat{q} y \hat{p} representan las amplitudes con las que oscilan las dos cuadraturas en las que puede descomponerse el campo $\hat{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$.

Como vimos, es una característica de los estados coherentes de luz, incluyendo el estado de vacío, que las dispersiones de estas dos variables son ambas iguales a $\frac{1}{2}$, alcanzado el valor mínimo del producto de incertezas. Para estos estados encontramos

una distribución de \hat{q} y \hat{p} en el espacio de las fases, que presenta simetría circular (Figura 3.1). Sin embargo, como ya comentamos en el Capítulo 2, existe toda una familia de estados de mínima incerteza, cuya función de onda en la representación de coordenadas está dada por un paquete de onda Gaussiano (2.44). La varianza $(\Delta\hat{q})^2$ para estos estados generales, no es necesariamente igual a $\frac{1}{2}$, como lo es para estados coherentes. En el caso en que, $(\Delta\hat{q})^2$ (o bien $(\Delta\hat{p})^2$) sea menor a $\frac{1}{2}$, la distribución en el espacio de fases toma forma elíptica, y diremos que el estado está comprimido.

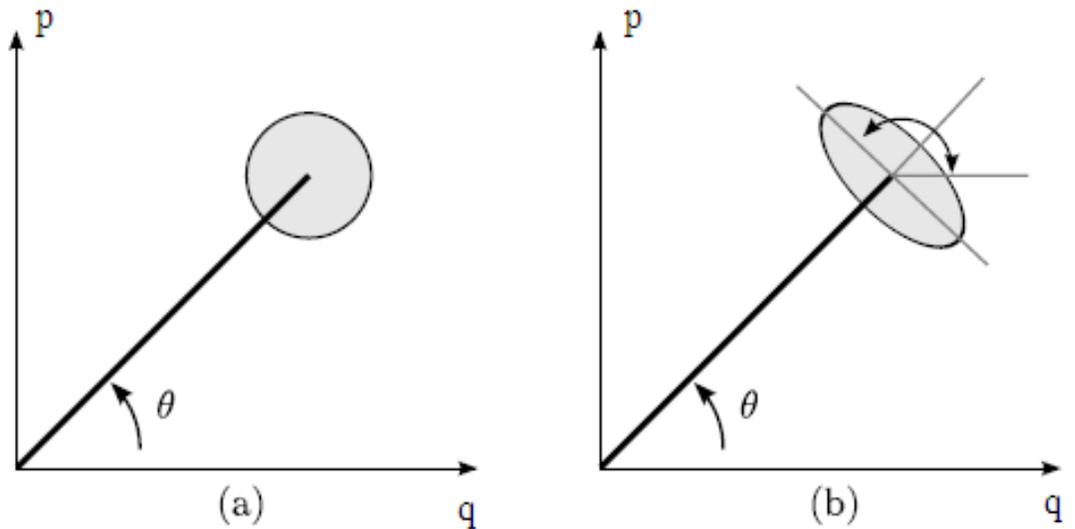


Figura 3.1: Distribución de las cuadraturas del campo eléctrico (a) para un estado de luz coherente, (b) para un estado de luz comprimido por el operador $S(\zeta)$

En forma intuitiva, uno podría pensar que esta familia de estados comprimidos de mínima incerteza, puede obtenerse a partir de estados coherentes, mediante una transformación de escala, que comprima, por ejemplo, el eje q al mismo tiempo que dilata el eje p (Davidovich, 1998)

$$q \Rightarrow e^r q$$

$$p \Rightarrow e^{-r}p, \quad (3.6)$$

para un valor arbitrario (y en principio real) del parámetro r . Siguiendo esta idea, la función de onda de tales estados, estaría dada por

$$\phi_\alpha(q, r) = \mathcal{N}_r \psi_\alpha(e^r q), \quad \tilde{\phi}_\alpha(p, r) = \tilde{\mathcal{N}}_r \tilde{\psi}_\alpha(e^{-r} p), \quad (3.7)$$

donde

$$\psi(q) = \langle q|\alpha \rangle = (2\pi(\Delta q)^2)^{-1/4} \exp[i\langle p \rangle q - \frac{(q - \langle q \rangle)^2}{4(\Delta q)^2}] \quad (3.8)$$

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq e^{-ipq} \psi(q), \quad (3.9)$$

y $(\Delta q)^2 = (\Delta p)^2 = \frac{1}{2}$ en el caso de estados coherentes. Dado que $\psi_\alpha(q)$ está normalizada a la unidad, al imponer la misma condición sobre $\phi_\alpha(q, r)$ se obtienen las constantes de normalización \mathcal{N}_r y $\tilde{\mathcal{N}}_r$

$$\begin{aligned} \int \phi_\alpha^*(q, r) \phi_\alpha(q, r) dq &= |\mathcal{N}_r|^2 \int \psi_\alpha^*(e^r q) \psi_\alpha(e^r q) dq \\ &= |\mathcal{N}_r|^2 e^{-r} \int \psi_\alpha^*(q') \psi_\alpha(q') dq' = 1 \\ \Rightarrow \mathcal{N}_r &= e^{r/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Análogamente, se encuentra que $\tilde{\mathcal{N}}_r = e^{-r/2}$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(q, r) &\sim \frac{e^{r/2}}{(2\pi(\Delta q)^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{e^{2r}(q - \langle q \rangle)^2}{4(\Delta q)^2}\right] = \frac{1}{(2\pi e^{-2r}(\Delta q)^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{4e^{-2r}(\Delta q)^2}\right] \\ \tilde{\phi}_\alpha(p, r) &\sim \frac{e^{-r/2}}{(2\pi(\Delta p)^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{e^{-2r}(p - \langle p \rangle)^2}{4(\Delta p)^2}\right] = \frac{1}{(2\pi e^{2r}(\Delta p)^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(p - \langle p \rangle)^2}{4e^{2r}(\Delta p)^2}\right] \end{aligned}$$

que, al menos en forma cualitativa, nos permite ver en que medida son afectadas las dispersiones de ambas cuadraturas

$$\begin{aligned} (\Delta q')^2 &= e^{-2r}(\Delta q)^2 \\ (\Delta p')^2 &= e^{2r}(\Delta p)^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Esto nos indica, que es posible encontrar estados, que para ciertos valores del parámetro r , cumplan con que $(\Delta q')^2 < \frac{1}{2}$, al tiempo que $(\Delta p')^2 > \frac{1}{2}$.

3.1.1. El Operador de Squeezing

Consideremos el estado de vacío bajo la transformación de escala anterior (3.6); para este estado particular la función de onda en la q -representación, está dada por

$$\phi_0(q, r) = e^{r/2} \psi_0(e^r q), \quad (3.12)$$

con $\psi_0(q) = (1/\pi)^{1/4} e^{-q^2/2}$ (ver 2.37). Derivando $\phi_0(q, r) = \langle q | \phi_0(r) \rangle$ con respecto a r , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \langle q | \phi_0(r) \rangle &= \frac{1}{2} \phi_0 - (e^r q)^2 \phi_0 = \frac{1}{2} \phi_0 + q \frac{\partial}{\partial q} \phi_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (q \phi_0) + \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} \phi_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q} q + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \phi_0 = \frac{i}{2} \langle q | (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) | \phi_0(r) \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde se ha hecho uso de que $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$, y de la representación del operador \hat{p} en la base de coordenadas, $\langle q | \hat{p} | \phi_0 \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q} \langle q | \phi_0 \rangle$. Tenemos entonces, que el estado que representa el vacío comprimido, cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial r} |\phi_0(r)\rangle = \frac{i}{2} (\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) |\phi_0(r)\rangle = \frac{1}{2} (\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) |\phi_0(r)\rangle, \quad (3.14)$$

que una vez integrada da la expresión para $|\phi_0(r)\rangle \equiv |r, 0\rangle$

$$|r, 0\rangle = \hat{S}(r) |0\rangle, \quad (3.15)$$

donde $\hat{S}(r) = \exp[(r/2)(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})]$ es el *operador de squeezing*. En una forma más amplia, uno podría partir de las cuadraturas generalizadas

$$\begin{aligned} \hat{q}_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \\ \hat{p}_\theta &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger e^{i\theta} - \hat{a} e^{-i\theta}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

obteniéndose

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2}(\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta \hat{a}^{\dagger 2})\right], \quad (3.17)$$

con $\zeta = r e^{2i\theta}$, lo que implica una combinación de squeezing y rotación, que corresponde a una compresión de la cuadratura q_θ y una dilatación en la cuadratura $q_{\theta+\pi/2}$.

El resto de los estados comprimidos con incerteza mínima pueden obtenerse aplicando la transformación de squeezing sobre un estado coherente general $|\alpha\rangle$

$$|\zeta, \alpha\rangle = \hat{S}(\zeta)|\alpha\rangle = \hat{S}(\zeta)\hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (3.18)$$

donde $\hat{D}(\alpha)$ es el operador de desplazamiento definido en (2.30). Alternativamente, puede obtenerse todo un conjunto de estados comprimidos de mínima incerteza mediante un desplazamiento del *vacío comprimido*

$$|\alpha, \zeta\rangle \equiv \hat{D}(\alpha)|\zeta, 0\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \quad (3.19)$$

Como los operadores $\hat{S}(\zeta)$ y $\hat{D}(\alpha)$ no conmutan, los estados $|\zeta, \alpha\rangle$ y $|\alpha, \zeta\rangle$ son diferentes entre sí.

Este operador de squeezing puede ser interpretado como el operador de evolución correspondiente al Hamiltoniano

$$H_{int} \propto \hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}, \quad (3.20)$$

asociado a procesos de emisión y absorción de dos fotones. Este tipo de Hamiltonianos aparecen en óptica no lineal, relacionados con procesos tales como el efecto Kerr, en donde la luz viaja a través de un medio con un índice de refracción que depende de la intensidad, mediante la utilización de un resonador paramétrico óptico (OPO), el cual básicamente consiste de un oscilador armónico cuyos parámetros oscilan en el tiempo a una frecuencia óptica, o mediante el acoplamiento con una muestra de átomos en el interior de una cavidad. La generación de este tipo de estados por diferentes procesos además de los mencionados, a sido bien probada experimentalmente por más de una década, observándose una efectiva reducción del ruido cuántico (Drummond and Ficek, 2004; Bachor and Ralph, 2004).

3.1.2. Análisis de las Fluctuaciones en las Cuadraturas

A fin de demostrar que el estado $|\zeta, \alpha\rangle = \hat{S}(\zeta)|\alpha\rangle$ definido en (3.18), efectivamente es un estado comprimido, debemos calcular en forma explícita las fluctuaciones del campo. Para tal propósito y haciendo uso de la expansión (2.74), hallaremos primero

la expresión para \hat{a} y \hat{a}^\dagger bajo la transformación unitaria dada por $\hat{S}(\zeta)$

$$\begin{aligned}
\hat{S}(\zeta)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\zeta) &= \hat{a} + \zeta\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2!}|\zeta|^2\hat{a} + \frac{1}{3!}\zeta|\zeta|^2\hat{a}^\dagger + \dots \\
&= \hat{a}\cosh|\zeta| + \frac{\zeta}{|\zeta|}\hat{a}^\dagger\sinh|\zeta| = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger e^{2i\theta}\sinh r \\
\hat{S}(\zeta)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(\zeta) &= \hat{a}^\dagger\cosh r + \hat{a}e^{-2i\theta}\sinh r.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dado que $\hat{S}^\dagger(\zeta) = \hat{S}(-\zeta) = \hat{S}^{-1}(\zeta)$, obtenemos el conjunto de operadores transformados

$$\begin{aligned}
\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{q}\hat{S}(\zeta) &= \hat{q}\cosh r - \hat{q}_\phi\sinh r \\
\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{p}\hat{S}(\zeta) &= \hat{p}\cosh r + \hat{p}_\phi\sinh r \\
\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{q}^2\hat{S}(\zeta) &= \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{q}\hat{S}(\zeta)\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{q}\hat{S}(\zeta) = \hat{q}^2\cosh^2 r + \hat{q}_\phi^2\sinh^2 r - \{\hat{q}, \hat{q}_\phi\}\sinh r\cosh r \\
\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{p}^2\hat{S}(\zeta) &= \hat{p}^2\cosh^2 r + \hat{p}_\phi^2\sinh^2 r + \{\hat{p}, \hat{p}_\phi\}\sinh r\cosh r,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde se ha hecho la sustitución $\phi = 2\theta$. Calculando los valores esperados de éstos operadores en un estado $|\alpha\rangle$, pueden obtenerse las expresiones para $(\Delta q')^2$ y $(\Delta p')^2$:

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta q')^2\rangle &= \langle(\Delta q)^2\rangle\cosh^2 r + \langle(\Delta q_\phi)^2\rangle\sinh^2 r \\
&\quad + [2\langle q\rangle\langle q_\phi\rangle - \langle\{\hat{q}, \hat{q}_\phi\}\rangle]\sinh r\cosh r \\
\langle(\Delta p')^2\rangle &= \langle(\Delta p)^2\rangle\cosh^2 r + \langle(\Delta p_\phi)^2\rangle\sinh^2 r \\
&\quad - [2\langle p\rangle\langle p_\phi\rangle - \langle\{\hat{p}, \hat{p}_\phi\}\rangle]\sinh r\cosh r,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde los valores esperados en el lado izquierdo se refieren a un estado $|\zeta, \alpha\rangle$, en tanto que en el lado derecho, deben calcularse sobre el estado $|\alpha\rangle$. El cálculo resulta simple recordando que el estado coherente $|\alpha\rangle(\langle\alpha|)$ es autoestado de \hat{a} (\hat{a}^\dagger) con autovalor α (α^*), y que para tales estados, tanto $(\Delta q_\phi)^2$ como $(\Delta p_\phi)^2$ toman el valor $\frac{1}{2}$ para todo ϕ (ver Capítulo 2). Entonces

$$\begin{aligned}
(\Delta q')^2 &= \frac{1}{2}\cosh 2r - \frac{1}{2}\sinh 2r\cos 2\theta \\
(\Delta p')^2 &= \frac{1}{2}\cosh 2r + \frac{1}{2}\sinh 2r\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{3.24}$$

El valor mínimo en la primera expresión se obtiene para $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$(\Delta q')^2 = \frac{1}{2}\cosh 2r - \frac{1}{2}\sinh 2r = \frac{1}{2}e^{-2r}, \tag{3.25}$$

la cual es menor a $\frac{1}{2}$ para todo $\zeta \neq 0$. Entonces, de acuerdo a la definición dada, el estado $|\zeta, \alpha\rangle$ es un estado comprimido. Para este mismo valor de θ , la otra dispersión resulta ser $(\Delta p')^2 = \frac{1}{2}e^{2r}$. Es decir, la acción del operador $\hat{S}(\zeta)$ sobre un estado coherente $|\alpha\rangle$, produce un estado con fluctuaciones de \hat{q} reducidas respecto del valor de vacío, en tanto que las fluctuaciones en \hat{p} exceden a dicho valor. Al mismo tiempo, el producto de incertezas, se mantiene en su valor mínimo. Resultados análogos se obtienen sobre estados del tipo $|\alpha, \zeta\rangle$. Más aún, se puede demostrar (Mandel and Wolf, 1995), que con la misma elección de θ , el operador de squeezing $\hat{S}(\zeta)$ actuando sobre *cualquier* estado cuántico, reduce la dispersión de \hat{q} por el mismo factor e^{-2r} , es decir que $(\Delta q')^2 = e^{-2r}(\Delta q)^2$, aunque en este caso general, el estado resultante no es un estado de mínima incerteza.

3.2. Estados Comprimidos de Espín

Hemos visto que un campo de radiación se dice comprimido, si la fluctuación en una de las cuadraturas, por ejemplo $(\Delta q)^2$, tiene un valor por debajo del límite cuántico estándar de $\frac{1}{2}$. Estos estados de luz comprimidos se generan a partir de interacciones no lineales (3.20) que establecen *correlaciones cuánticas* entre fotones.

En analogía con los estados comprimidos en sistemas bosónicos, los sistemas de espín o de momento angular, pueden verse como estados comprimidos, cuando el ruido cuántico en las diferentes componentes del espín total, se redistribuye conservando las relaciones de incerteza. Podríamos decir por ejemplo, que se tiene un estado comprimido, cuando el valor de $(\Delta \hat{S}_x)^2$ o $(\Delta \hat{S}_y)^2$ es menor que $\frac{1}{2}|\langle \hat{S}_z \rangle|$. Pero entonces esta definición implicaría que todo estado de espín coherente $|\theta, \varphi\rangle$ es un estado comprimido si se lo localiza en un sistema de coordenadas apropiado, o si se rota adecuadamente el propio estado. Por ejemplo, volviendo a las expresiones halladas en (2.80) y (2.84), para una rotación $\hat{R}(\theta, \varphi) = \hat{R}(\theta, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\langle \hat{S}_z \rangle| &= \frac{j}{2}|\cos\theta|, \\ (\Delta \hat{S}_x)^2 &= \frac{j}{2}\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{3.26}$$

y como puede inferirse de la Figura 3.2, la relación $(\Delta\hat{S}_x)^2 < \frac{1}{2}|\langle\hat{S}_z\rangle|$, se verifica para todo valor de θ en el intervalo $[0, 2\pi]$ que no sea un múltiplo entero de $\pi/2$

Entonces, esta definición del squeezing en un sistema de espines, resulta incompleta desde el punto de vista que no refleja correlaciones cuánticas. La reducción en la varianza de una de las componentes de espín, no necesariamente implica la presencia de squeezing en el sistema, sino que puede ser una consecuencia del sistema de coordenadas elegido. Ésto plantea las siguientes preguntas (Kitagawa and Ueda, 1993):

- ¿ Un estado de espín coherente (EEC), puede calificarse como un estado comprimido?
- ¿ Existen otros estados más adecuados para ser considerados como *estados comprimidos de espín*?

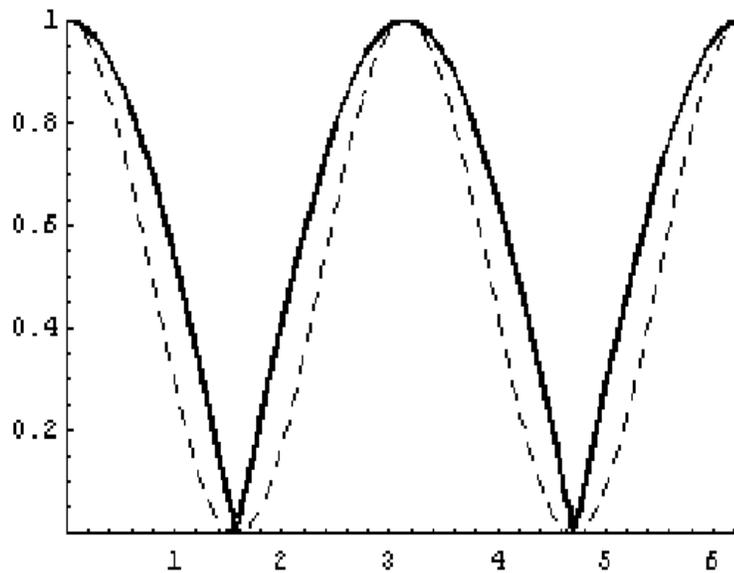


Figura 3.2: Gráfico de las funciones $\cos^2\theta$ (línea punteada) y $|\cos\theta|$ (línea sólida) en el intervalo $[0, 2\pi]$.

3.2.1. Concepto de Squeezing en Sistemas de Espín

Supongamos un sistema con un espín $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$. Hemos definido (2.68) al estado de espín coherente $|\theta, \varphi\rangle$, como un autoestado de la componente del espín del sistema en la dirección $\hat{n} = (\theta, \varphi)$, con autovalor $-S$, donde θ y φ indican los ángulos polar y azimutal, respectivamente (Fig. 3.3). Explícitamente, estos estados pueden expandirse en término de autoestados de S_z (2.75) en la forma

$$\begin{aligned} |\theta, \varphi\rangle &= (1 + |z|^2)^{-S} \sum_{k=0}^{2S} \frac{z^k}{k!} \hat{S}_+^k |S, -S\rangle, \\ z &= -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \exp(-i\varphi). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por otra parte, todo estado puro de espín $\frac{1}{2}$ puede verse como un estado coherente³

$$\begin{aligned} |\theta, \varphi\rangle &= (1 + |z|^2)^{-1/2} (|0\rangle + z|1\rangle) \\ &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle - e^{-i\varphi} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $|1\rangle(|0\rangle)$ es el autoestado de S_z con autovalor $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})$. En el Capítulo 2, hemos obtenido las expresiones para las varianzas de las componentes de espín (2.83) correspondientes a un EEC. Si se considera un nuevo sistema de coordenadas, $(x'y'z')$, en donde la componente del espín en la dirección (θ, φ) ,

$$S_{\theta\varphi} = (S_x \sin\theta \cos\varphi, S_y \sin\theta \sin\varphi, S_z \cos\theta),$$

se hace coincidir con uno de los ejes de la terna, digamos por ejemplo, con el eje z' , las componentes de \mathbf{S} normales a $S_{z'}$, estarán completamente inciertas, con varianzas iguales a $\frac{1}{4}$. Esto se observa de (2.83), teniendo en cuenta que, respecto del sistema de coordenadas $(x'y'z')$, el ángulo polar que orienta al EEC, es nulo ($\theta = 0$).

³En general, un sistema de espín $1/2$ estará en un estado que es una superposición lineal de los estados de la base $\{|0\rangle; |1\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

con α y β números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Debido a esta condición de normalización, es que el estado puede escribirse, a menos de un factor de fase no observable, mediante dos parámetros reales θ y φ en la forma

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (3.28)$$

Los números θ y φ definen un punto en la esfera unitaria (Fig. 3.3), llamada *Esfera de Bloch* (Nielsen and Chuang, 2002)

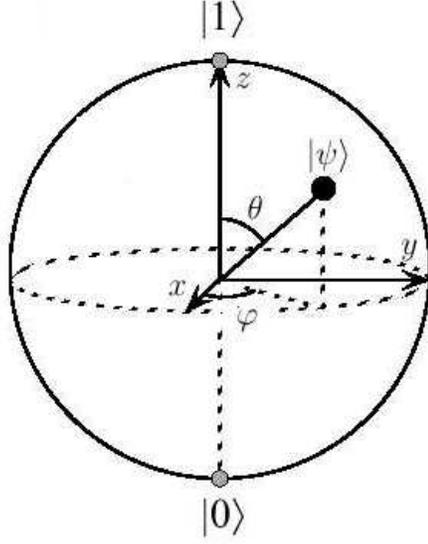


Figura 3.3: Esfera de Bloch. Permite tener una representación geométrica de estados de espín (o pseudoespín) $\frac{1}{2}$ como puntos sobre la superficie de una esfera unitaria.

Un sistema de espín S puede verse como un sistema colectivo formado por $N = 2S$ espines $\frac{1}{2}$. Más aún, el EEC de espín S , $|\theta, \varphi\rangle$, es equivalente a un conjunto de $2S$ espines $\frac{1}{2}$, todos apuntando en la misma dirección (θ, φ) . Por ejemplo, si tomamos el caso simple de un sistema formado por dos espines $\frac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 |\theta, \varphi\rangle &= (1 + |z|^2)^{-1} \sum_{k=0}^2 \frac{z^k}{k!} \hat{S}_+^k |1, -1\rangle \\
 &= (1 + |z|^2)^{-1} \{ |00\rangle + z(|10\rangle + |01\rangle) + z^2 |11\rangle \} \\
 &= (1 + |z|^2)^{-1} (|0\rangle_1 + z|1\rangle_1)(|0\rangle_2 + z|1\rangle_2),
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

y recordando la forma del parámetro z (3.27), la expresión anterior se reduce a:

$$|\theta, \varphi\rangle = (\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle_1 - e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle_1) (\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle_2 - e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle_2), \tag{3.31}$$

lo cual representa el estado de dos espines $\frac{1}{2}$ no correlacionados definidos por el mismo conjunto de parámetros (θ, φ) en la esfera de Bloch. En general, un EEC $|\theta, \varphi\rangle$

de espín $S = \frac{N}{2}$, es equivalente a un *estado producto* de $2S$ espines $\frac{1}{2}$ apuntando todos en la dirección $\hat{n}(\theta, \varphi)$. Se deduce que $|\theta, \varphi\rangle$ es un *estado no correlacionado*, aunque como dijimos, podría tener fluctuaciones reducidas en una de las componentes del espín total, según la orientación del estado en el sistema de coordenadas elegido. En el sistema $(x'y'z')$, donde el eje z' coincide con la dirección (θ, φ) , las fluctuaciones para el estado son, $(\Delta\hat{S}_{x'})^2 = (\Delta\hat{S}_{y'})^2 = \frac{N}{4}$.

Tomemos un sistema colectivo formado por N espines $\frac{1}{2}$ acoplados a espín $S = \frac{N}{2}$, pero no necesariamente un EEC. Es posible elegir un sistema de coordenadas $(x'y'z')$, donde el eje z' coincide con la dirección del espín medio del sistema, $\langle \mathbf{S} \rangle = (\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle, \langle S_z \rangle)$. La varianza de las componentes normales al espín medio, $(\Delta\hat{S}_{k'})^2$ con $k' = x'$ o y' , puede calcularse mediante la expresión

$$\begin{aligned}
(\Delta\hat{S}_{k'})^2 &= \langle \hat{S}_{k'}^2 \rangle = \langle \sum_{i,j=1}^N \hat{S}_{k'}^{(i)} \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)2} \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle \\
&= \frac{N}{4} + \sum_{i \neq j} \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

en donde la primera igualdad resulta del hecho que $\langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle = 0$, debido al sistema de coordenadas elegido. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_{k'} \rangle^2 &= \sum_{i,j=1}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle \langle \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle \langle \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle = 0. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

En ausencia de correlaciones,

$$\langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle = \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle \langle \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \hat{S}_{k'}^{(j)} \rangle = - \sum_{i=1}^N \langle \hat{S}_{k'}^{(i)} \rangle^2 = 0. \quad (3.34)$$

Por lo tanto, a partir de (3.32) y (3.34) se deduce que, en ausencia de correlaciones cuánticas entre los espines elementales, la varianza de las componentes normales a la dirección del valor medio del espín del sistema, es simplemente la suma de las varianzas individuales, e igual a $\frac{N}{4}$. En el caso en que *sí haya correlaciones cuánticas*, la suma en (3.32) podría dar como resultado la disminución de las fluctuaciones en una de las direcciones normales, por debajo del valor $\frac{N}{4}$, a expensas del aumento en la otra dirección (Fig. 3.4).

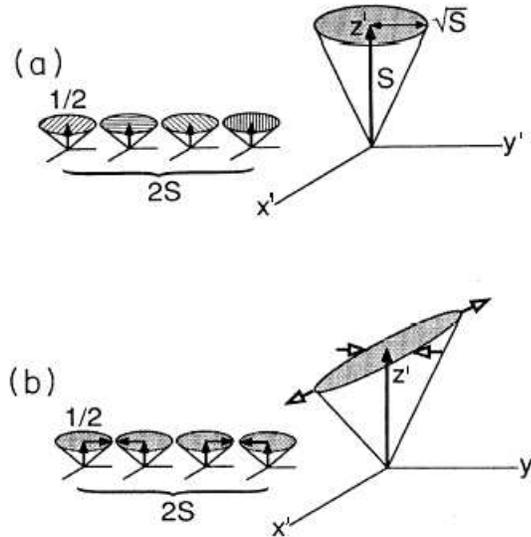


Figura 3.4: Gráfico esquemático de un estado de espín S en término de $2S$ espines $\frac{1}{2}$. (a) Estado de espín coherente construido a partir de $2S$ espines $\frac{1}{2}$ no correlacionados. (b) Estado de espín comprimido construido a partir de $2S$ espines $\frac{1}{2}$ correlacionados.

Entonces, diremos que *el estado está comprimido sólo si la varianza de una de las componentes del espín normal a $\langle \mathbf{S} \rangle$ es menor que $\frac{|\langle \mathbf{S} \rangle|}{2}$* . Esta definición, que se discute en (Kitagawa and Ueda, 1993), excluye la mera dependencia del sistema de coordenadas, incluyendo correlaciones cuánticas en la definición de squeezing.

Coherentemente con la definición anterior, se define el *parámetro de squeezing* como

$$\zeta^2 = \frac{2(\Delta \hat{S}_\perp)^2}{|\langle \mathbf{S} \rangle|}, \quad (3.35)$$

donde \hat{S}_\perp es la componente del espín en una dirección perpendicular a $\langle \mathbf{S} \rangle$. Entonces la desigualdad $\zeta^2 < 1$ indica que el sistema es un estado de espín comprimido.

Dos puntos importantes que se desprenden de lo visto son:

1. Para obtener estados de espín comprimidos se requiere de una *interacción no lineal* en los operadores de espín, debido a que un Hamiltoniano lineal, produce como único efecto la rotación de los espines individuales y no establece correlaciones cuánticas entre ellos.
2. Un sistema de espín $\frac{1}{2}$ no puede ser comprimido dado que es equivalente a un sistema con un único espín elemental, y no existe ningún otro espín para poder establecer correlaciones entre ellos.

En relación al punto 1, se observa que es posible generar squeezing a partir de Hamiltonianos con una dependencia cuadrática en los operadores de espín (Kitagawa and Ueda, 1993), en analogía con el Hamiltoniano no lineal de la Eq. (3.20) que genera estados comprimidos de luz. Por otro lado, también es posible la generación de squeezing mediante el uso de Hamiltonianos lineales en los operadores de espín, siempre y cuando el sistema de espín esté acoplado a otro sistema cuántico, como por ejemplo, a un oscilador armónico (Genes et al., 2003).

Alternativamente a la definición (3.35), y dependiendo del contexto, existen otras definiciones para el parámetro de squeezing atómico, ζ^2 . Por ejemplo, la expresión

$$\zeta^2 = \frac{N(\Delta\hat{S}_\perp)^2}{|\langle \mathbf{S} \rangle|^2} \quad (3.36)$$

es introducida en (Wineland et al., 1994), donde los autores muestran que un valor de ζ^2 por debajo de 1, está asociado a la reducción del ruido en medidas espectroscópicas utilizando ensambles de N átomos de dos niveles.

En la Ref. (Prakash and Kumar, 2005), se definen los factores de squeezing

$$\zeta_x^2 = \frac{(\Delta\hat{S}_x)^2}{\frac{1}{2}[\langle \hat{S}_y^2 \rangle + \langle \hat{S}_z^2 \rangle]^{1/2}}, \quad \zeta_y^2 = \frac{(\Delta\hat{S}_y)^2}{\frac{1}{2}[\langle \hat{S}_x^2 \rangle + \langle \hat{S}_z^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (3.37)$$

En este caso, ambas expresiones pueden tomar valores menores a 1 simultáneamente, sin violación del principio de incerteza de Heisenberg. Entonces, esta definición, permite encontrar squeezing simultáneo de dos componentes del espín total, perpendiculares entre sí, con respecto a una tercera.

En un sentido más amplio, en la Ref. (Korbicz et al., 2005), puede encontrarse un tipo de desigualdades, cuya característica común, es que están formadas por expresiones que dependen de las variables de espín del sistema. A estas desigualdades, los autores las llaman *desigualdades de espín-squeezing generalizadas*, y las mismas indican distintos tipos de entrelazamiento presentes en el sistema. Es decir, estas desigualdades, han sido propuestas por los autores, como buenos testigos de entrelazamiento cuántico.

Capítulo 4

Cadenas de Espines en Interacción

Los modelos de espines en interacción son utilizados a menudo para describir una amplia gama de sistemas de muchos cuerpos. Estos modelos dan cuenta de las interacciones efectivas dentro de diferentes contextos físicos, como es el caso de la física de materia condensada. En 1926, unos pocos años luego de la formulación de la mecánica cuántica, Heisenberg y Dirac (Heisenberg, 1926; Dirac, 1926) propusieron una interacción efectiva, $J_{ij}\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$, entre espines electrónicos o átomos vecinos que presentan superposición de sus funciones de onda. Esta interacción entre espines es producto del efecto combinado de una repulsión debido a la fuerza Coulombiana y del principio de exclusión de Pauli, y provee de una teoría microscópica del electromagnetismo y muchos otros fenómenos cooperativos que involucran espines electrónicos.

Distintos sistemas físicos, como por ejemplo, un arreglo de junturas Josephson (Fazio and van der Zant, 2001), o un sistema de átomos colocados en una red (Duan et al., 2003; Porras and Cirac, 2004), pueden describirse usando este tipo de interacciones. La importancia del estudio de este tipo de interacciones, se debe a que, en muchos casos, el sistema físico descrito se comporta como un sistema cuántico efectivo de dos niveles, y por lo tanto es un posible candidato a ser usado como qubit en el campo de la computación cuántica (Nielsen and Chuang, 2002). También se ha puesto la atención en el uso de cadenas de espines dinámicas para ser utilizadas como canales de comunicación, en donde la transferencia de información

cuántica - transferencia de un estado cuántico de un lugar a otro - se lleva a cabo exclusivamente a través de la evolución dinámica de una cadena formada por sistemas cuánticos individuales con interacciones permanentes entre los mismos (Bose, 2003; Amico et al., 2004; Eisert and Gross, 2009).

4.1. El Hamiltoniano

Comencemos considerando un conjunto de espines localizados interactuando mediante lo que se conoce como *interacción de intercambio* (Pathria, 1977). Esta interacción es de naturaleza puramente cuántica y su forma fue derivada simultáneamente por Heisenberg y Dirac en 1926. El modelo más conocido para espines interactuando en la red de un sólido, es el denominado modelo de Heisenberg (Greiner et al., 1994), cuyo Hamiltoniano es de la forma

$$H = \sum_{i,j} J_{ij} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \quad (4.1)$$

donde \vec{s}_i es el operador de espín para el sitio i -ésimo de la red, y J_{ij} indica el valor de la interacción de intercambio entre el sitio i y el sitio j . En general, digamos que la red en la que se localizan los espines, es de dimensión d . Por ejemplo, si $d = 1$ es una cadena lineal, $d = 2$ corresponde a una red cuadrada y $d = 3$ indica una red cúbica. Una red tipo escalera tiene una estructura intermedia entre la cadena y la red cuadrada. Pueden formarse estructuras más complejas a partir de n de estos arreglos tipo escalera acoplados por niveles.

Un sólido magnético real es una estructura $3d$, aunque puede ser considerado en forma efectiva como un sistema de baja dimensión si la magnitud de la interacción de intercambio difiere significativamente según la dirección (Hase et al., 1993; Nishijo et al., 2000; Hase et al., 2006). Por ejemplo, un sólido magnético que estuviera compuesto por cadenas de espines, podría analizarse como una cadena lineal con $d = 1$, si la interacción de intercambio entre sitios de la cadena fuera mucho más fuerte que con las cadenas vecinas. Análogamente, en un sistema magnético plano ($d = 2$), la interacción dominante es intraplano.

En muchos sistemas reales, se puede suponer, que el valor de la interacción de intercambio, J_{ij} , disminuye rápidamente cuando se incrementa la distancia entre sitios, de modo que en tales casos, sólo es necesario tener en cuenta, interacciones a primeros vecinos. Si además, la interacción J_{ij} , toma el mismo valor J entre cualquier par de espines contiguos i, j , el Hamiltoniano en (4.1) se reduce a

$$H = J \sum_i \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1}, \quad (4.2)$$

en donde la suma es sobre todos los pares de vecinos contiguos en la red. Sin embargo, existen sistemas magnéticos en donde el valor de la interacción de intercambio entre pares sucesivos de espines no es la misma. Además, el Hamiltoniano de interacción (4.1) puede incluir interacciones no sólo a primeros vecinos, sino también entre vecinos más lejanos ¹. Como ejemplo, la cadena de Majumdar-Gosh (Majumdar and Ghosh, 1969) se describe por un Hamiltoniano de la forma

$$H = J \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1} + \frac{J}{2} \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+2}, \quad (4.4)$$

que incluye interacciones entre primeros y segundos vecinos, con condiciones periódicas de contorno (Fig: 4.1).

Los materiales reales, en general, presentan varios tipos de anisotropías. Entre los Hamiltonianos más usados en $1d$, se encuentra el Hamiltoniano de Heisenberg completamente anisotrópico, con interacciones a primeros vecinos:

$$H_{XYZ} = \sum_{i=1}^N J_x \hat{s}_i^x \hat{s}_{i+1}^x + J_y \hat{s}_i^y \hat{s}_{i+1}^y + J_z \hat{s}_i^z \hat{s}_{i+1}^z. \quad (4.5)$$

Este Hamiltoniano describe cadenas de espines donde el vector de espín puede apuntar en una dirección arbitraria. Como casos especiales, el Hamiltoniano del modelo de Ising, ($J_x = J_y = 0, J_z \neq 0$), describe cadenas de espines con sólo dos estados posibles, \uparrow , o \downarrow , sobre el eje de cuantización \hat{z} ; el Hamiltoniano XY , ($J_x \neq J_y, J_z = 0$);

¹En general, se podría pensar en Hamiltonianos con interacciones de largo alcance, en donde cada espín interactúa con todos los demás espines en la cadena. El modelo de Haldane-Shastry (Shastry, 1988; Haldane, 1988) propone interacciones del tipo $1/r^2$, que en sus versiones periódicas están dadas por

$$H = J \sum_{i \neq j} \frac{1}{(\text{sen}(i-j)\pi/N)^2} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (4.3)$$

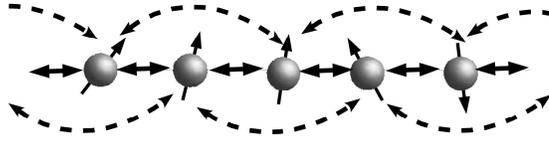


Figura 4.1: La figura esquematiza una cadena de espines: un sistema de espines con interacciones permanentes, en donde el valor de las constantes de acoplamiento generalmente disminuye con la distancia. En este esquema, las flechas continuas (punteadas) indican interacciones a primeros (segundos) vecinos.

el XXX , o Hamiltoniano isotrópico de Heisenberg, ($J_x = J_y = J_z$), y el XXZ , o Hamiltoniano anisotrópico de Heisenberg, ($J_x = J_y \neq J_z$).

Las propiedades de estos tipos de Hamiltonianos, están fuertemente ligadas a sus constantes de acoplamiento J_{ij} . Por ejemplo, en el Hamiltoniano isotrópico (4.2) el signo de la interacción de intercambio determina el alineamiento favorable entre espines contiguos. $J < 0$ ($J > 0$) corresponde a favorecer un ordenamiento ferromagnético (antiferromagnético). Clásicamente, cuando $J < 0$ la energía de interacción entre pares de espines es mínima para espines paralelos. El estado fundamental ferromagnético (FM) tiene todos sus espines paralelos. Contrariamente, cuando $J > 0$ el estado fundamental antiferromagnético (AFM) es un estado de Néel en donde cada espín es antiparalelo a sus vecinos más próximos.

El magnetismo, es un fenómeno puramente cuántico, por lo que el problema debe tratarse dentro de la teoría de la mecánica cuántica y no clásicamente. Por ejemplo, consideremos una cadena finita de espines $s = \frac{1}{2}$, con interacciones isotrópicas a primeros vecinos. En este caso el Hamiltoniano (4.2) puede expresarse en la siguiente forma:

$$H = J \sum_{i=1}^N \hat{s}_i^z \hat{s}_{i+1}^z + \frac{1}{2} (\hat{s}_i^+ \hat{s}_{i+1}^- + \hat{s}_i^- \hat{s}_{i+1}^+), \quad (4.6)$$

con las relaciones de conmutación correspondientes a los operadores del grupo $SU(2)$

$$[\hat{s}_i^z, \hat{s}_j^\pm] = \pm \hat{s}_i^\pm \delta_{i,j}, \quad [\hat{s}_i^+, \hat{s}_j^-] = 2\hat{s}_i^z \delta_{i,j}. \quad (4.7)$$

H actúa sobre un espacio de Hilbert de dimensión 2^N expandido por la base de vectores ortogonales $|\sigma_1 \dots \sigma_N\rangle$, donde $\sigma_i = \uparrow$ ($\sigma_i = \downarrow$) representa un autoestado de \hat{s}_i^z con autovalor $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$). En esta base, H puede ser representado por una matriz real y simétrica $2^N \times 2^N$, cuyos autovalores y autovectores pueden calcularse mediante algoritmos de diagonalización estándar.

La matriz Hamiltoniana también puede ser escrita en forma de una matriz diagonal en bloques si a priori se realiza una transformación de la base $\{|\sigma_1 \dots \sigma_N\rangle\}$ a una base simétrica, lo que permite reducir el trabajo computacional para llevar a cabo la diagonalización numérica, y en consecuencia es factible trabajar con sistemas de mayor dimensión. Esto se consigue, observando que el Hamiltoniano (4.6) posee simetría rotacional en torno al eje z ², lo que implica que la componente z del espín total, $\hat{S}^z = \sum_{i=1}^N \hat{s}_i^z$, se conserva:

$$[H, \hat{S}^z] = 0. \quad (4.8)$$

La acción de H sobre $|\sigma_1 \dots \sigma_N\rangle$ dará como resultado una combinación lineal de los vectores de la base que poseen todos el mismo número de espines con proyección $s^z = -\frac{1}{2}$ (alternativamente $\frac{1}{2}$). Entonces, clasificando los vectores de la base según su número cuántico $S^z = N/2 - r$, donde r es el número de espines con proyección $s^z = -\frac{1}{2}$, la representación matricial de H resulta en una matriz en bloques, donde cada bloque corresponde a un subespacio caracterizado por el valor de r . Luego, la diagonalización puede llevarse a cabo en cada uno de estos subespacios de dimensión reducida.

Existe, sin embargo, un método analítico que permite obtener, en forma exacta, los autovalores y autovectores del Hamiltoniano (4.6) con condiciones periódicas de contorno ($\vec{s}_{N+1} = \vec{s}_1$). Este método se conoce como *ansatz de Bethe* (Bethe, 1931). Para poder aplicar este método a la resolución del Hamiltoniano (4.6), es necesario contar con una simetría de traslación, además de la simetría dada por (4.8), es decir,

²Esto sigue siendo válido para el Hamiltoniano más general (4.1) siempre que $J_{ij}^x = J_{ij}^y$.

que el Hamiltoniano H , debe ser invariante con respecto a una traslación discreta de un número arbitrario de sitios de red. Si e^{iP} , es el operador que implementa la traslación de los estados del sistema, en una unidad hacia la derecha, entonces la simetría traslacional implica

$$[H, e^{iP}] = 0. \quad (4.9)$$

El subespacio solución, correspondiente al bloque con $r = 0$, contiene un sólo estado, el cual se conoce como el estado de referencia de Bethe, en donde todos los espines tienen proyección $s^z = \frac{1}{2}$:

$$|\psi_0\rangle = |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle. \quad (4.10)$$

La energía de este estado de referencia es $E_0 = J\frac{N}{4}$.

Para el bloque con $r = 1$, los estados del subespacio correspondiente, tendrán todos sus espines con proyección $s^z = \frac{1}{2}$, excepto uno, con proyección $s^z = -\frac{1}{2}$. Entonces, se propone como solución, un autoestado de la forma

$$|\psi_1\rangle = \sum_{x=1}^N f(x)|x\rangle, \quad (4.11)$$

donde $|x\rangle$ representa el estado con todos sus espines con proyección $\frac{1}{2}$, salvo para el espín localizado en el sitio x de la red ($1 \leq x \leq N$). Debido a la invarianza traslacional y a las condiciones de contorno periódicas, es razonable asumir que $f(x)$, es la función de onda para la onda plana:

$$f(x) = e^{ikx}, \quad (4.12)$$

con $k = 2m\pi/N$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$, lo cual se deriva de la condición de contorno $f(x + L) = f(x)$. Cada uno de los N estados $|\psi_1(k)\rangle$, es solución de la ecuación de autovalores $H|\psi_1(k)\rangle = E_1|\psi_1(k)\rangle$, de donde puede obtenerse en forma explícita su energía:

$$E_1 - E_0 = J(\cos k - 1). \quad (4.13)$$

El vector de estado (4.11), representa la excitación de un magnón, la cual es una perturbación periódica del estado de referencia de Bethe, por una onda de espín, de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$.

Para el siguiente bloque, $r = 2$, el subespacio correspondiente debe ser combinación lineal de estados con exactamente dos espines con proyección $s^z = -\frac{1}{2}$, digamos por ejemplo, en los sitios x_1 , y x_2 , de la cadena. Los autoestados tendrán la forma

$$|\psi_2\rangle = \sum_{x_1, x_2}^N f(x_1, x_2) |x_1, x_2\rangle, \quad (4.14)$$

con ($1 \leq x_1, x_2 \leq N$). Ahora, la condición de periodicidad que debe cumplirse es

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1 + L), \quad (4.15)$$

donde el cambio en el orden de los argumentos se debe a que $f(x_1, x_2)$, se definió para $x_1 < x_2$. El anzats correcto es de la forma

$$f(x_1, x_2) = A_{12} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} + A_{21} e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1)}, \quad (4.16)$$

que verifica la condición (4.15), tomando

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{21} e^{i k_1 L}, & A_{21} &= A_{12} e^{i k_2 L} \\ e^{i(k_1 + k_2)L} &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La última condición en (4.17), refleja la invarianza de la función de onda bajo un desplazamiento de N unidades en la cadena

$$f(x_1 + L, x_2 + L) = f(x_1, x_2) \iff e^{i(k_1 + k_2)L} = 1. \quad (4.18)$$

La energía de los estados depende de k_1 , y k_2 , en la siguiente forma:

$$E_2 - E_0 = J \sum_{j=1,2} (\cos k_j - 1). \quad (4.19)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, para cada bloque con $r > 2$, la forma general de los autoestados correspondientes, es

$$|\psi_r\rangle = \sum_{1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_r \leq N} f(x_1, \dots, x_r) |x_1, \dots, x_r\rangle. \quad (4.20)$$

Ahora, el anzats de Bethe, toma la forma

$$f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{p \in \mathcal{S}_r} A_p e^{i(k_{p(1)} x_1 + \dots + k_{p(r)} x_r)}, \quad (4.21)$$

donde la suma es sobre todas las $r!$ permutaciones. La condición de periodicidad a satisfacer está dada por

$$f(x_1, \dots, x_r) = f(x_2, \dots, x_r, x_1 + L), \quad (4.22)$$

y la energía para el estado de r magnones, es

$$E_r - E_0 = J \sum_{j=1}^r (\cos k_j - 1). \quad (4.23)$$

Entonces, mediante este procedimiento, se diagonaliza el Hamiltoniano isotrópico de Heisenberg (4.6), en la base de ondas de espín. Esta técnica, puede aún aplicarse al Hamiltoniano XXZ , y con ciertas modificaciones, al modelo más general XYZ (Gómez et al., 1996).

Para el régimen FM, con constante de acoplamiento $J < 0$, la energía de los estados con $r > 0$, son siempre positivas respecto de la del estado de referencia de Bethe (ver 4.23). Por lo tanto, este estado de referencia coincide con el estado fundamental del sistema. Todos los espines tienden a alinearse, y el estado fundamental cuántico coincide con el estado fundamental clásico, con el mismo valor de energía.

El régimen AFM está caracterizado por una constante de acoplamiento $J > 0$, con lo cual la energía correspondiente a la excitación de un magnón, es negativa respecto de la del estado de referencia, y dar vuelta un espín es energéticamente favorable. Por lo tanto, el estado de referencia de Bethe no tiene nada que ver con el estado fundamental del sistema, y las ondas de espín, no son excitaciones reales en torno al estado fundamental. La determinación exacta del estado fundamental AFM es un arduo problema de muchas partículas. Particularmente, existen algunos modelos de espín de AFM en $d = 1$ para los cuales pueden conocerse en forma exacta el estado fundamental y los primeros estados excitados (Bose, 2001).

4.2. Algunos Resultados Importantes

Uno de los principales desafíos en el camino de construir una computadora cuántica universal es lograr controlar cada sistema cuántico de dos estados (qubits) individualmente, a la vez que se consiguen tiempos de decoherencia grandes. Los espines

electrónicos como así también los espines nucleares, han sido considerados buenos candidatos para la realización física de qubits, debido a que surgen naturalmente como sistemas cuánticos de dos estados, y el tiempo de decoherencia para el grado de libertad de espín resulta considerablemente más largo que para la carga eléctrica - la unidad de carga eléctrica también ha sido propuesta como una unidad cuántica posible para representar un qubit.

Tanto para espines electrónicos como para espines nucleares, es posible realizar compuertas lógicas de uno o dos qubits mediante la aplicación de campos magnéticos locales o mediante interacciones de intercambio sobre los espines individuales (Nielsen and Chuang, 2002). Esto requiere de un control local y de una alta fidelidad en las medidas que es difícil lograr en la práctica. Pero, ¿es posible utilizar otro esquema, que aunque análogo, resulte más ventajoso que el anterior? Una posibilidad sería codificar el qubit en varios espines, lo cual permitiría relajar el requerimiento de la manipulación local de los campos al aumentar el tamaño del qubit.

Consideremos una cadena antiferromagnética de espines $s = 1/2$ con un número N de sitios, de la forma

$$H = \sum_{i=1}^{N_{max}} J_{\perp} (s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y) + J_z s_i^z s_{i+1}^z, \quad (4.24)$$

donde $N_{max} = N - 1$ en el caso de cadenas abiertas, y $N_{max} = N$ para cadenas cerradas (en este caso el sitio $N + 1$ se identifica con el sitio 1). Como hemos mencionado en la sección anterior, la energía del nivel fundamental y los estados excitados del sistema pueden obtenerse mediante la diagonalización exacta de la matriz Hamiltoniana. Lo que se observa, es que para las cadenas con un número impar de sitios N , el estado fundamental es un doblete de espín $S = 1/2$, separado del primer estado excitado por una diferencia de energía que depende del valor de las interacciones J_{\perp} , J_z y de N (Fig. 4.2), y este comportamiento se mantiene aún en las cadenas con interacciones de largo alcance (Fig. 4.3). Esto sugiere una estructura de niveles propicia para la implementación de un qubit.

En función a esta característica, en las Refs. (Meier et al., 2003b; Meier et al., 2003a) los autores muestran que el doblete del estado fundamental del arreglo, puede

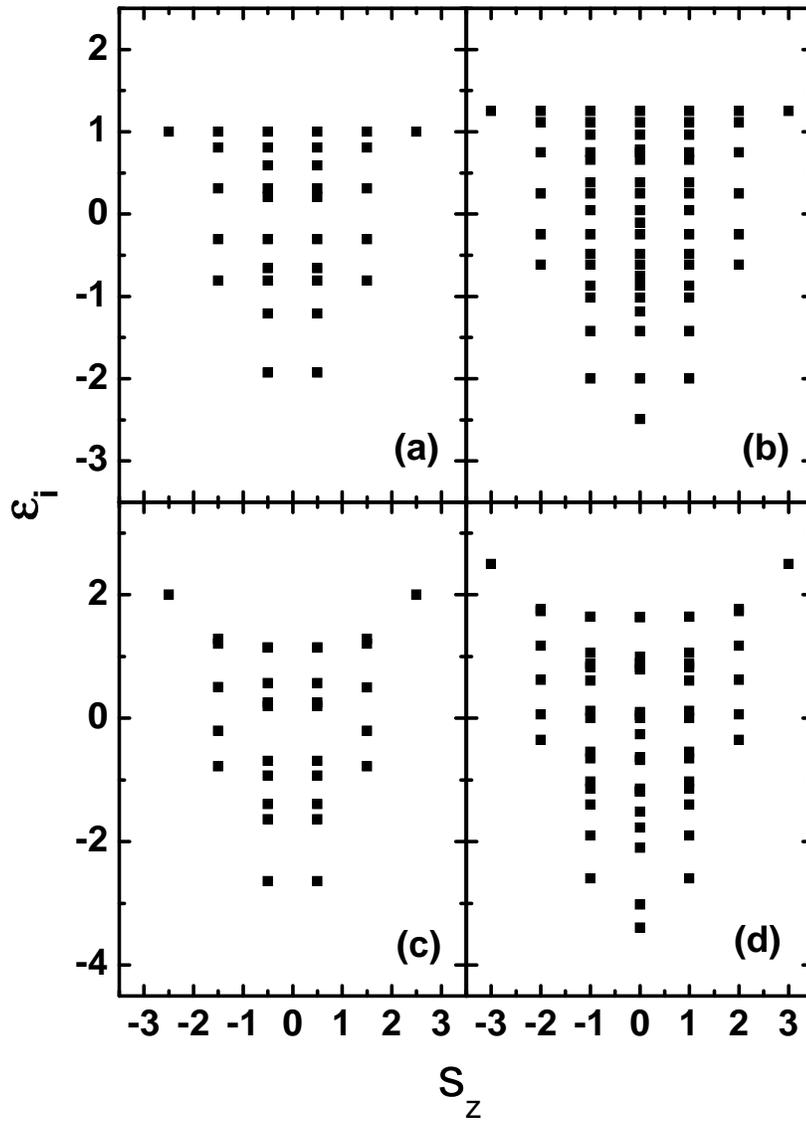


Figura 4.2: Espectro de energía para cadenas de Heisenberg con una interacción a primeros vecinos. Los recuadros (a) y (b) corresponden a una cadena simétrica con $J_{\perp} = J_z = 1$, con $N = 5$ y 6 sitios respectivamente. Análogamente, los recuadros (c) y (d) corresponden a una cadena asimétrica con $J_{\perp} = 1$, $J_z = 2$. Los autoestados de energía están rotulados de acuerdo a su número cuántico correspondiente a \hat{S}_z .

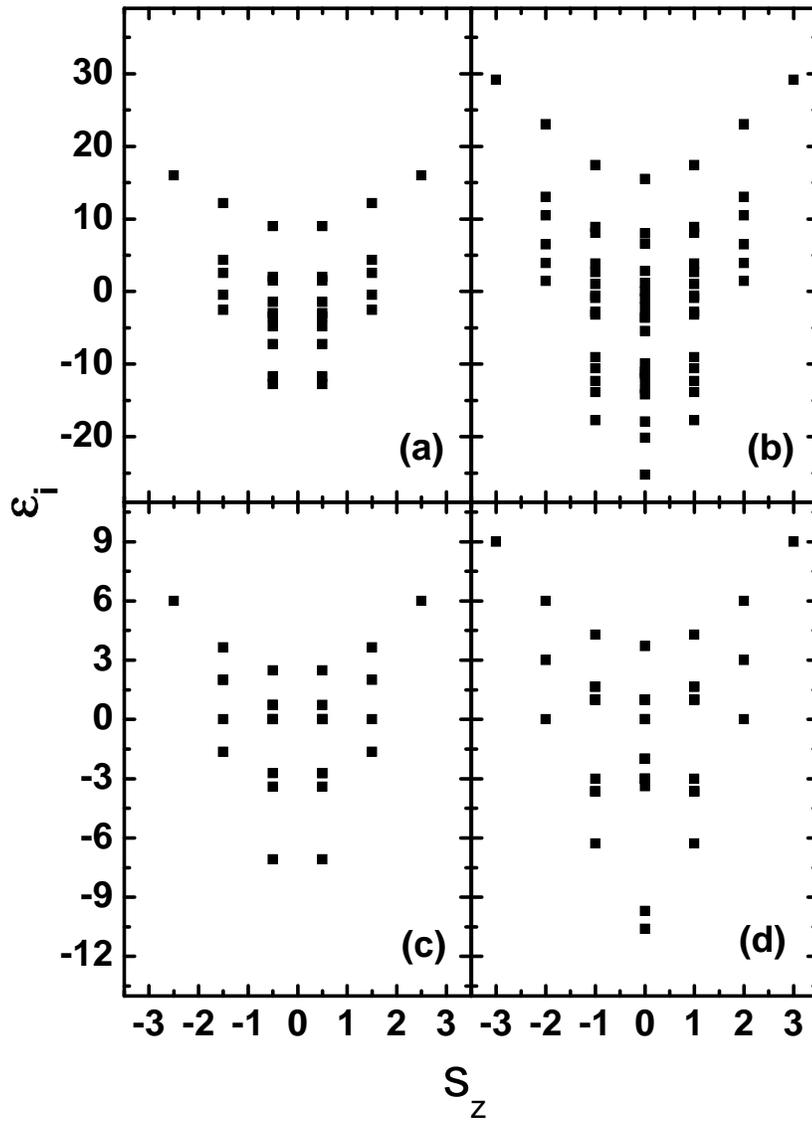


Figura 4.3: Espectro de energía para cadenas de espines con una interacción de largo alcance dependiente del sitio. Los recuadros (a) y (b) corresponden a una cadena con una interacción entre sitios $J_{\perp} = J_z = 1$, con 5 y 6 sitios respectivamente. Los recuadros (c) y (d) corresponden a una cadena asimétrica con $J_{\perp} = 1$, $J_z = 2$, con 5 y 6 sitios respectivamente. Los autoestados de energía están rotulados de acuerdo a su número cuántico correspondiente a \hat{S}_z .

definir un nuevo *qubit colectivo de espín* de modo que

$$\begin{aligned}\hat{S}_z|1\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle, \\ \hat{S}_z|0\rangle &= -\frac{1}{2}|1\rangle.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Los estados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ no tienen, en general, una representación simple en la base producto. Por ejemplo, en el caso no trivial más simple de todos, el qubit colectivo con $N = 3$ se expresa por

$$\begin{aligned}|1\rangle &= \frac{2}{\sqrt{6}}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3,\end{aligned}\tag{4.26}$$

en tanto que $|0\rangle$ se obtiene a partir de (4.26) invirtiendo cada uno de los espines individuales. A pesar de la representación complicada en la base producto, estos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, son en muchos aspectos similares a los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ de un único espín, y por lo tanto pueden ser utilizados como base computacional. Ésto es posible dado que $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ corresponde a un doblete de espín $S = 1/2$ tal que

$$\begin{aligned}\hat{S}^-|1\rangle &= |0\rangle, \\ \hat{S}^+|0\rangle &= |1\rangle,\end{aligned}\tag{4.27}$$

donde los operadores colectivos $\hat{S}^\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, son los operadores escalera para la cadena de espín, y un campo magnético constante \mathbf{B} actúa sobre el qubit colectivo en forma análoga que sobre un qubit de un único espín.

Por último, un resultado importante de los trabajos citados, es que para una amplia clase de cadenas del tipo de la presentada en (4.24), es posible realizar compuertas lógicas universales que actúan sobre el qubit colectivo; tanto el tiempo de operación de las compuertas como la tasa de decoherencia, se incrementan sólo moderadamente con el tamaño del arreglo. La principal ventaja de trabajar con qubits de espín colectivos en vez de qubits de espín individuales, es que es suficiente controlar campos magnéticos e interacciones de intercambio en una escala del orden del diámetro del arreglo. Para el caso de un arreglo lineal de espines esta escala es N veces más grande que la del qubit original.

Parte II

Capítulo 5

Squeezing en Cadenas de Espines

En este capítulo se discuten las condiciones bajo las cuales es posible la reducción en las fluctuaciones (*squeezing*) de una de las componentes del espín, en una cadena de espines asimétrica con interacciones a primeros vecinos. Se calcula la evolución temporal del sistema para diferentes condiciones iniciales. Particularmente, se analiza los efectos del uso de estados de espín coherentes (EEC) para modelar la condición inicial del sistema. Los resultados obtenidos han sido parcialmente expuestos en (Reboiro et al., 2007).

5.1. Introducción.

El concepto de squeezing ha sido extensamente aplicado al estudio de sistemas bosónicos (Walls, 1983; Loudon and Knight, 1987; Dodonov, 2002; Scully and Zubairy, 1997; Peng and Lee, 1999; Mollow and Glauber, 1967). En su trabajo, Walls y Zoller (Walls and Zoller, 1981) consideran las incertezas entre componentes de espín perpendiculares entre sí. Como hemos mencionado en el Capítulo 3, si se establecen correlaciones cuánticas apropiadas entre espines elementales de un sistema, es posible cancelar, parcialmente, las fluctuaciones del espín total en una dirección a expensas del aumento de las fluctuaciones en las otras direcciones. Obviamente esto ocurre sin modificación del mínimo de la relación de incerteza entre componentes.

En los últimos años ha habido esfuerzos considerables, enfocados en el estudio del

squeezing del espín en sistemas no lineales. Para una revisión general del tema puede consultarse (Drummond and Ficek, 2004). En las siguientes referencias pueden encontrarse algunos de los temas de discusión en relación con el squeezing del espín. Por ejemplo, en la Ref. (Oblak, 2005) se analiza cómo la generación de squeezing atómico en átomos fríos está ligada a la mejora en el rendimiento de relojes de cesio. En las Refs. (Wineland et al., 1992; Wineland et al., 1994) se muestra que la preparación de estados correlacionados (estados de espín comprimidos) como estados iniciales del sistema, mejora la relación señal-ruido en experimentos en donde la medida de la población de niveles está limitada por las incertezas mecánico-cuánticas. En las Refs. (Messikh et al., 2003; Hald et al., 1999; Josse et al., 2004) se analiza la relación entre el entrelazamiento y el squeezing del espín, desde un punto de vista tanto teórico como experimental. El estudio de la orientación del espín en estados de espín coherentes puede encontrarse en (Wang, 2001; Kitagawa and Ueda, 1993). Estados de espín óptimamente comprimidos han sido considerados en (Rojó, 2003). La discusión acerca de una definición generalizada del squeezing del espín puede encontrarse en (Prakash and Kumar, 2005). El squeezing del espín en modelos anisotrópicos tipo Ising (Sørensen and Mølmer, 1999; Wang et al., 2001) también ha sido de interés en conexión con computación cuántica. Recientemente, cadenas de espín han sido propuestos como candidatos para formar sistemas de qubits. En las Ref. (Meier et al., 2003b; Meier et al., 2003a) se muestra cómo una cadena de espines con un número impar de espines $s=1/2$, interactuando via acoplamientos antiferromagnéticos, constituye una realización de un qubit lógico. El espectro de estos sistemas está caracterizado por un doblete $S = \frac{1}{2}$ en su estado fundamental, separado del espectro de estados excitados por un gap de energía. El doblete $S = \frac{1}{2}$ del estado fundamental puede definirse como un qubit codificado en el estado colectivo del cluster. Una nueva clase de sistemas moleculares magnéticos se presenta en (Troiani et al., 2005; Affronte et al., 2004; Carretta et al., 2003). En este caso la implementación física de una computadora cuántica está pensada como una colección de moléculas acopladas, correspondiendo cada una a un qubit diferente. La ventaja de este esquema, en comparación con otros basados en espines individuales para

ser utilizados como qubits, es la dimensionalidad del subsistema físico. Además, posibilita la reducción de la resolución espacial necesaria para trabajar en forma seleccionada sobre cada qubit, lo cual se realiza por medio de campos magnéticos locales.

En el trabajo que aquí se presenta, hemos discutido la ocurrencia de squeezing atómico para una cadena de espines con interacciones a primeros vecinos. Se ha analizado cómo es la dependencia del factor de squeezing en función del valor de las constantes de acoplamiento de la interacción, para distinto número de átomos en la cadena, distintos estados iniciales. Los detalles del formalismo están presentados en la Sección 5.2. En la Sección 5.3 se presentan y discuten los resultados para los diferentes parámetros del modelo y las diferentes condiciones iniciales. Las conclusiones se detallan en la Sección 5.4.

5.2. Formalismo

5.2.1. Hamiltoniano

Hemos estudiado un sistema cuántico formado por una cadena de espines asimétrica (ver Capítulo 4), descrita por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{l,\gamma} g_{\gamma,l} \hat{S}_{\gamma,l} \hat{S}_{\gamma,l+1}. \quad (5.1)$$

El subíndice l ($l = 1, \dots, N_{max}$) rotula el sitio de espín, $\gamma = x, y, z$ indica la dirección espacial, $g_{\gamma,l}$ es la constante de acoplamiento de la interacción entre espines localizados en los sitios l y $l + 1$ en la dirección γ . N es el número de espines en la cadena; la sumatoria se realiza hasta $N_{max} = N$ para una cadena cerrada y hasta $N_{max} = N - 1$ para una cadena abierta.

El Hamiltoniano de la Eq. (5.1) se diagonaliza en la base

$$|k\rangle = |k_1, k_2, \dots, k_l, \dots, k_N\rangle = \prod_{l=1, k_l=0,1}^N \hat{S}_{+,l}^{k_l} |0\rangle. \quad (5.2)$$

El índice k_l identifica el estado del átomo l -ésimo, y los valores $k_l = 0$ y 1 están asociados con el estado fundamental ($s_z = -1/2$) y el primer estado excitado ($s_z =$

1/2) de cada átomo, respectivamente. El estado de vacío $|0\rangle$, es el estado en dónde todos los espines tienen proyección $s_z = -1/2$, y los operadores $\hat{s}_{\pm,l} = \hat{s}_{x,l} \pm i\hat{s}_{y,l}$ son los operadores escalera para el sitio l . Éstos operadores junto con $\hat{s}_{z,l}$, obedecen las relaciones de conmutación del álgebra $su(2)$.

La matriz del Hamiltoniano en esta base es una matriz en bloques, cuyos elementos $H_{k,k'}$ están dados por la expresión

$$\begin{aligned}
\langle k|H|k'\rangle = & \\
& \delta(k, k') \sum_l g_{z,l} (k_l - 1/2)(k_{l+1} - 1/2) + \\
& \frac{1}{2} \sum_l g_{+,l} \delta(k'_l, k_l + 1) \delta(k'_{l+1}, k_{l+1} - 1) + \\
& \frac{1}{2} \sum_l g_{+,l} \delta(k'_l, k_l - 1) \delta(k'_{l+1}, k_{l+1} + 1) \\
& \frac{1}{2} \sum_l g_{-,l} \delta(k'_l, k_l + 1) \delta(k'_{l+1}, k_{l+1} + 1) + \\
& \frac{1}{2} \sum_l g_{-,l} \delta(k'_l, k_l - 1) \delta(k'_{l+1}, k_{l+1} - 1),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

con $g_{\pm,l} = \frac{1}{2}(g_{x,l} \pm g_{y,l})$. Los autovectores de \hat{H} son combinación lineal de los estados de la base $\{k\}$ dados en (5.2)

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{k\}} c_{\alpha,k} |k\rangle. \tag{5.4}$$

5.2.2. Evolución Temporal

La evolución temporal de un cierto operador \hat{O} en el esquema de Heisenberg (Sakurai, 1985), está dada por

$$\hat{O}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{O} \hat{U}(t), \quad \hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}. \tag{5.5}$$

Entonces, el valor esperado $\langle \hat{O}(t) \rangle$ será

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = Tr(\hat{\rho}(t)\hat{O}) = \sum_{\beta} \langle \beta|\hat{\rho}(t)\hat{O}|\beta\rangle \tag{5.6}$$

donde $\{|\beta\rangle\}$ es el conjunto de autoestados del Hamiltoniano H . El operador densidad $\hat{\rho}(t)$ se define como

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho} \hat{U}^\dagger(t), \quad \hat{\rho} = |I\rangle\langle I|, \quad (5.7)$$

siendo $|I\rangle$ es el estado inicial del sistema. Si en la expresión anterior se introduce la relación de clausura para la base de autoestados de H , el valor esperado (5.6) puede calcularse mediante la suma

$$\sum_{\alpha,\beta} \langle \beta|I\rangle\langle I|\alpha\rangle\langle \alpha|\hat{O}|\beta\rangle e^{-i(E_\beta-E_\alpha)t/\hbar}. \quad (5.8)$$

E_α , E_β son los autovalores correspondientes a los autovectores $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ del Hamiltoniano, respectivamente.

La expresión (5.8) puede ser escrita en forma más compacta en términos del producto interno entre el estado inicial $|I\rangle$ y los autovectores $\{|\alpha\rangle\}$ del Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(t) \rangle &= \sum_{k,k'} T^*(k') \langle k'|\hat{O}|k\rangle T(k), \\ T(k) &= \sum_{\beta k'} c_{\beta k}^* c_{\beta k'} \langle k|I\rangle e^{-iE_\beta t/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

La ventaja de esta expresión sobre (5.8) radica en la forma sencilla que adquieren los elementos de matriz de los operadores de interés, los operadores de espín, en la base $|k\rangle$. Los coeficientes $c_{\beta k}$, son los coeficientes de expansión de los autoestados de H también en la base $|k\rangle$, los cuáles quedan determinados de la diagonalización de la matriz Hamiltoniana.

5.2.3. Condición Inicial

Hemos estudiado la evolución temporal del operador de espín total bajo la acción de \hat{H} , adoptando un estado de espín coherente (EEC) como estado inicial $|I\rangle$ (Kitagawa and Ueda, 1993; Glauber, 1963b), el cual está definido como un autoestado de la componente del operador de espín total $\hat{\mathbf{S}}$, en la dirección de un vector unitario \mathbf{n}_0

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}_0 |EEC\rangle = -S |EEC\rangle, \quad (5.10)$$

con $S = \frac{N}{2}$.

La orientación de \mathbf{n}_0 en la esfera está dada por los ángulos polar y azimutal θ_0 , φ_0 (Fig. 3.3). Por lo tanto, $\mathbf{n}_0(\theta_0, \varphi_0) = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$.

Este estado inicial puede escribirse como (2.75)

$$\begin{aligned} |I\rangle &= e^{z\hat{S}_+} |0\rangle, \\ &= (1 + |z|^2)^{-\frac{N}{2}} \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \hat{S}_+^k |0\rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

con

$$z = e^{-i(\varphi_0 - \pi)} \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (5.12)$$

\hat{S}_+ es el operador colectivo

$$\hat{S}_+ = \sum_l \hat{s}_{+,l}. \quad (5.13)$$

Como hemos visto en el Capítulo 3, los estados atómicos comprimidos o estados comprimidos de espín, son estados atómicos que presentan fluctuaciones reducidas en una de las componentes del espín total, independientemente del sistema de referencia adoptado; estos estados corresponden necesariamente a sistemas cuánticamente correlacionados. Los estados coherentes de espín no son estados atómicos comprimidos, y a diferencia de lo que ocurre con los estados comprimidos del campo electromagnético (3.18), no hay una expresión para un estado atómico comprimido. El objetivo entonces, será inspeccionar para qué conjunto de parámetros y condiciones iniciales en que se prepara el sistema atómico, la interacción no lineal descrita por el Hamiltoniano en (5.1), produce un estado de espín comprimido.

Consideramos la componente $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{n}}$ del espín total $\hat{\mathbf{S}}$ en la dirección de un vector unitario \mathbf{n} , de modo tal que $\mathbf{n} \cdot \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = 0$, y $\hat{\mathbf{S}}_{\perp}$ como la componente del espín en una dirección perpendicular a ambos, es decir a \mathbf{n} y $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$. Esta terna de vectores $\{\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle, \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{S}}_{\perp}\}$, define un sistema de coordenadas en donde uno de los ejes coincide con la dirección en que apunta el espín medio del sistema, $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$. Utilizaremos la cantidad

$$\zeta^2 = \frac{2(\Delta S_{\mathbf{n}})^2}{|\langle \mathbf{S} \rangle|}. \quad (5.14)$$

como una medida de la relación entre las fluctuaciones del espín en la dirección \mathbf{n} y el valor medio del espín total. Siguiendo las Refs. (Drummond and Ficek, 2004; Kitagawa and Ueda, 1993), diremos que la componente \mathbf{S}_n está comprimida respecto de \mathbf{S}_\perp si $\zeta^2 < 1$. Esquemáticamente, ésto significa que el valor medio del espín $\hat{\mathbf{S}}$ precesa en el plano determinado por la orientación de \mathbf{S}_n y \mathbf{S}_\perp . La precesión, se da a lo largo de una curva con semiejes ΔS_n , y ΔS_\perp , en un plano perpendicular a la dirección de $\langle \mathbf{S} \rangle$, y el valor de ζ^2 dependerá de la relación entre estos ejes (Fig. 3.4).

5.3. Resultados y Discusión.

Hemos diagonalizado el Hamiltoniano de la Eq. (5.1), y estudiado la evolución temporal del sistema para distintos estados iniciales, es decir para estados EEC preparados en diferentes orientaciones (θ_0, φ_0) . El objetivo de estos cálculos fue investigar la evolución del vector unitario \mathbf{n} , perpendicular a la dirección instantánea del valor medio del espín $\langle \mathbf{S} \rangle$, y del vector unitario $\mathbf{n}_S = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{|\langle \mathbf{S} \rangle|}$. Con estos elementos, es posible localizar la dirección en la cual el factor de squeezing ζ^2 alcanza su valor mínimo; esta dirección está caracterizada por los ángulos (θ, φ) de \mathbf{n} . El procedimiento seguido consiste en:

- calcular el valor esperado del espín total $\langle \mathbf{S} \rangle$ a partir de los autovalores y autovectores de H para cada tiempo t ;
- una vez hallado $\langle \mathbf{S} \rangle$ para un tiempo fijo t , éste determina una dirección sobre el espacio a la que indicamos con \mathbf{n}_S ;
- se calcula el parámetro de squeezing ζ^2 sobre todo el plano perpendicular a \mathbf{n}_S , mediante una variación del ángulo φ que orienta al vector \mathbf{n} ;
- se retiene la orientación (θ, φ) para la cual el valor de ζ^2 es mínimo;
- este proceso se realiza para cada tiempo t .

Se tomó el número de sitios de espín N , y las constantes de acoplamiento $g_{z,l}$ y $g_{\pm,l}$ como parámetros libres, analizando tanto el caso de cadena abierta como cerrada.

Los resultados de los cálculos realizados se muestran en las Figuras 5.1- 5.7, que reflejan los efectos de: **(a)** la orientación del EEC, **(b)** la asimetría del acoplamiento entre sitios de espín, **(c)** el número de sitios de espín, **(d)** la dirección en la cual el sistema presenta squeezing máximo.

La Figura 5.1 muestra la evolución temporal de la dirección del vector unitario \mathbf{n}_S . El efecto de la asimetría en el acoplamiento (ver leyenda de la Figura 5.1), se ve reflejado en la precesión en torno al eje z , del espín medio. Notar que, al aumentar la asimetría de la interacción, hay una rápida variación del ángulo azimutal, y una reducción de la órbita, que se ve reflejada en el valor casi constante del ángulo θ . En ambos casos, el EEC está apuntando en la dirección $\theta_0 = \varphi_0 = \pi/4$, mientras que el espín medio, rota en torno al eje z , apuntando en la dirección dada por $\theta = 3\pi/4$. Esto significa que la dirección medida del espín total puede estar relacionada a los acoplamientos en la cadena de espines, para una condición inicial fija.

La Figura 5.2 muestra la variación del factor de squeezing ζ^2 en el plano (θ, φ) para cuatro instantes de tiempo diferentes. El sistema es el mismo de la Figura 5.1 (cadena abierta), con los valores de las constantes de acoplamiento correspondientes al caso (a). La línea blanca permite localizar la dirección espacial del vector \mathbf{n} en la cual se ha calculado el valor de ζ^2 . Las distintas regiones indican valores de ζ^2 por debajo y por arriba de 1. Los resultados indican que hay un grado de periodicidad en la aparición del squeezing; puede verse que, si bien las regiones en donde $\zeta^2 < 1$ van cambiando con el tiempo, éstas se repiten a intervalos de aproximadamente $\Delta t = 10$.

El efecto que causa la asimetría de la interacción sobre el valor del squeezing atómico se puede ver en la Figura 5.3. La comparación de estos resultados con los de la Figura 5.2, sugiere la supresión del squeezing, es decir, el aumento del valor del parámetro ζ^2 a causa de la misma. Ésto puede entenderse pensando la asimetría de la cadena como una pequeña perturbación δ en la dirección z , lo que produce una disminución en la amplitud de la función de onda por un factor $(1-\delta)$, y reduce el valor medio del espín total.

El factor ζ^2 es fuertemente dependiente de los parámetros del estado inicial (EEC). El conjunto de resultados que se muestran en la Figura 5.4 indicarían que

es posible obtener un valor $\zeta^2 < 1$ para un EEC con $\theta_0 \neq 0$. Para el EEC con $\theta_0 = \varphi_0 = 0$, el vector \mathbf{n} está orientado por $\theta = \pi/2$ para todos los valores de φ , y éste es el caso límite para el cual $\zeta^2 = 1$ en todo el plano. El efecto sobre ζ^2 debido al número de sitios se muestra en la Figura 5.5 (interacciones simétricas) y en la Figura 5.6 (interacciones no-simétricas). En ambas figuras el EEC se fija con los parámetros $\theta_0 = \varphi_0 = \pi/4$, mientras que el parámetro de squeezing se calcula a $t = 4$. Se ve que, para este tiempo, relativamente pequeño, la asimetría de la interacción afecta más el comportamiento de ζ^2 que el cambio en el número de espines en la cadena.

Hasta aquí sólo hemos analizado cadenas de espín abiertas. La comparación de los resultados entre cadenas abiertas y cerradas se muestran en las Figuras 5.7 y 5.8. El estado inicial EEC es el mismo para ambas figuras, y se utiliza en ambas los mismos valores para las constantes de acoplamiento. El número de sitios de espines se tomó como variable: 5 sitios para la Figura 5.7, y 7 sitios para la Figura 5.8. Aunque la variación con el tiempo de ζ^2 es mayor para una cadena cerrada, al compararla con los resultados para una cadena abierta, donde el valor del factor de squeezing se mantiene siempre en un intervalo más estrecho, las cadenas cerradas exhiben un mayor grado de squeezing, es decir, presenta valores menores para el factor ζ^2 . La escala de tiempo en ambas figuras es mayor que en las figuras previas, pero persiste la tendencia que muestran los resultados de las Figuras 5.1 - 5.6. Las Figuras 5.7 y 5.8 también muestran que el squeezing tiende a desaparecer al aumentar el número de sitios (para $N = 7$ átomos en la cadena la media temporal de ζ^2 es mayor a 1).

La característica general que emerge de estos resultados es la posibilidad de controlar el movimiento y las fluctuaciones del espín total, sobre la esfera, mediante

- la elección adecuada de los parámetros de interacción entre sitios de espín,
- la preparación del estado inicial, y
- generando cadenas abiertas o cerradas con distinto número de sitios de espín.

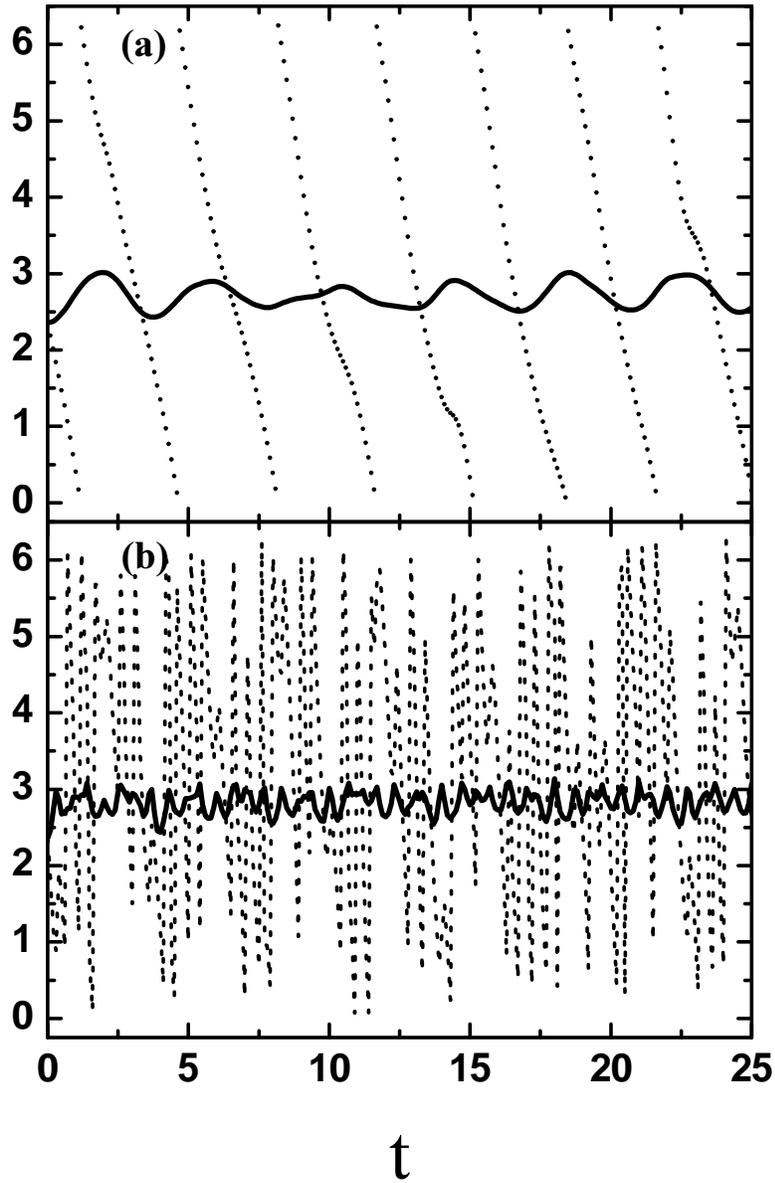


Figura 5.1: Evolución temporal de la dirección del vector unitario $\mathbf{n}_S = \langle \mathbf{S} \rangle / |\langle \mathbf{S} \rangle|$. Se observa la dependencia temporal de los ángulos θ (línea continua) y ϕ (línea quebrada) para el intervalo $0 \leq t \leq 25$, en unidades arbitrarias de tiempo. El sistema es una cadena abierta con $N = 5$ sitios. El estado inicial es un EEC definido por $\theta_0 = \phi_0 = \pi/4$. Las constantes de acoplamiento valen $g_{z,l} = 4$, $g_{+,l} = 1$, $g_{-,l} = 0$, para todos los valores de l (Caso (a)) y $g_{z,l} = 4$ si l es impar, 8 para $l = 2$ y 16 para $l = 4$, $g_{+,l} = 1$ (l imp), $2(l = 2)$, $4(l = 4)$ y $g_{-,l} = 0$ (Caso (b)).

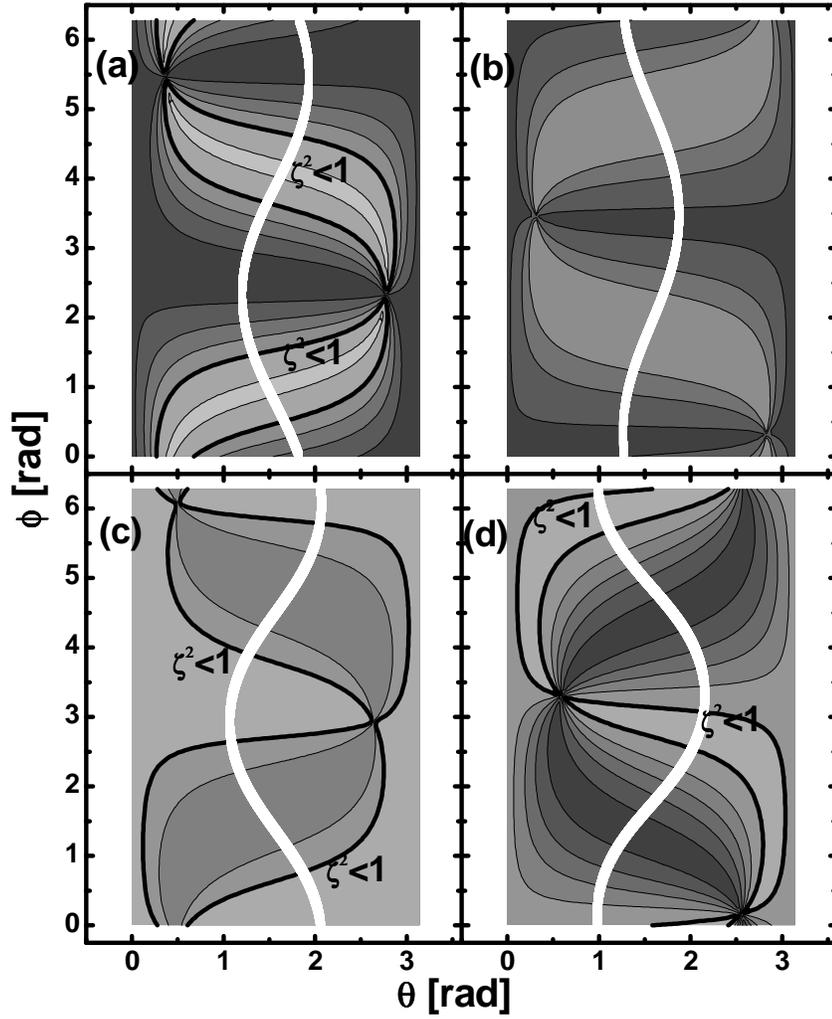


Figura 5.2: Dependencia angular del factor de squeezing de Eq. (5.14) en el plano $\theta - \phi$. Los valores de los parámetros son los mismos que en el Caso (a) de la Fig. 5.1. La secuencia (a)-(d) corresponde a $t = 10, 15, 20$ y 25 , respectivamente. La línea blanca muestra la ubicación del vector \mathbf{n} perpendicular a $\langle \mathbf{S} \rangle$. Las zonas grises corresponden a las regiones en donde aparece el squeezing ($\zeta^2 < 1$).

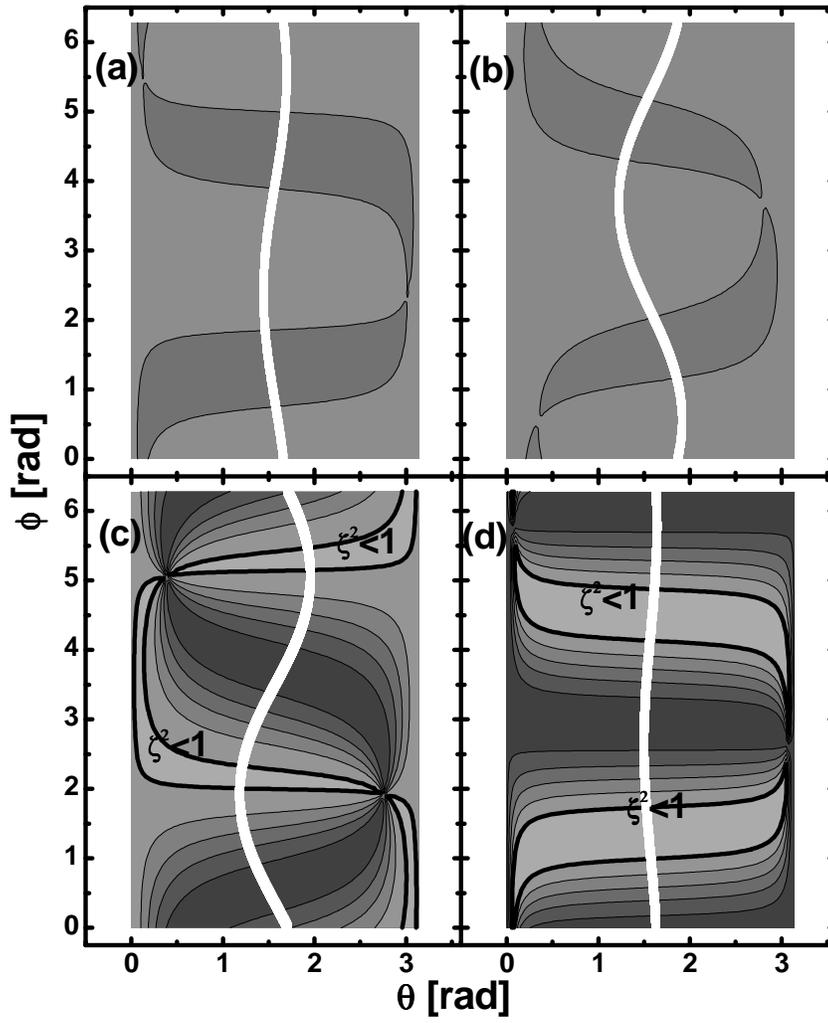


Figura 5.3: Idem Fig. 5.2 pero para valores de los parámetros correspondientes al Caso (b) de la Fig. 5.1.

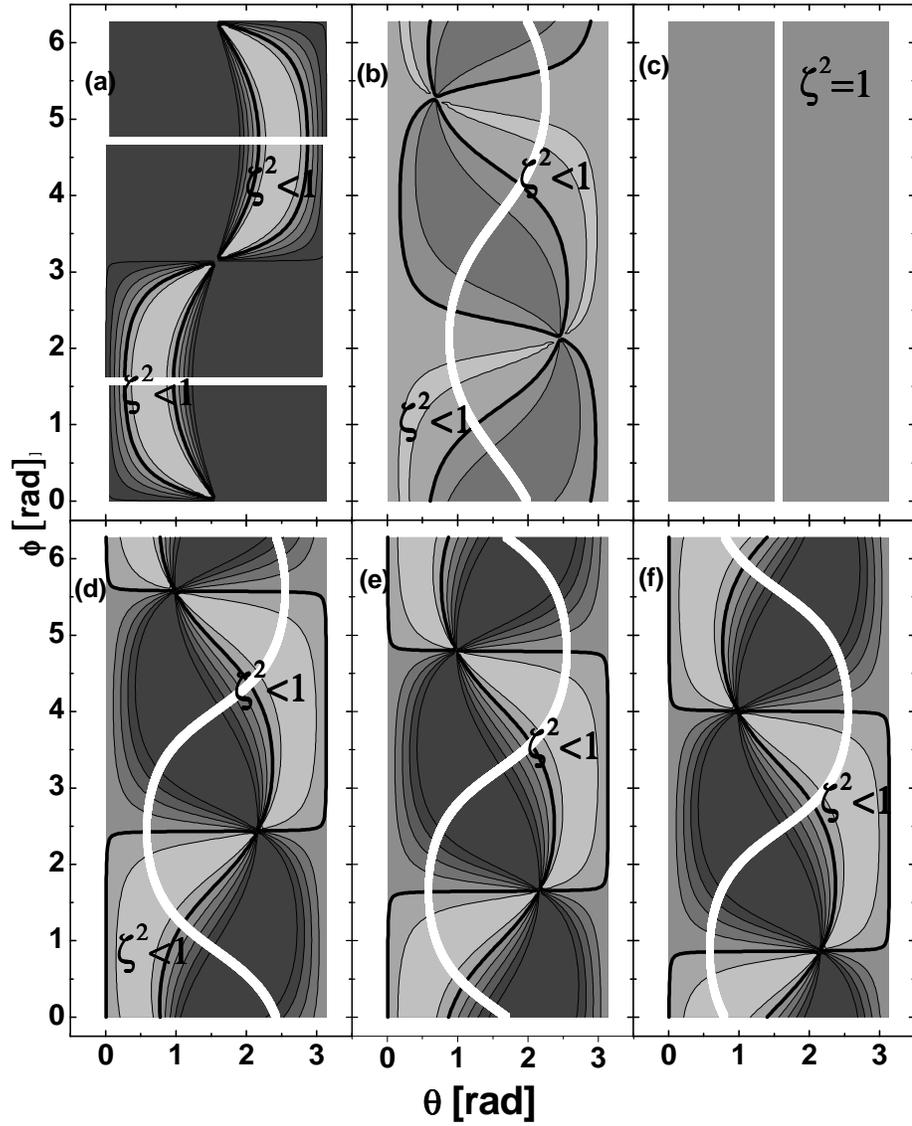


Figura 5.4: Dependencia del factor de squeezing ζ^2 con el estado inicial EEC. En esta figura todos los casos corresponden a $t = 4$, para una cadena abierta con $N = 5$ sitios y $g_{z,l} = 4$, $g_{+,l} = 1$, $g_{-,l} = 0$, para todos los valores de l . La parametrización del estado EEC (θ_0, ϕ_0) es la siguiente: (a) $(\pi/2, 0)$, (b) $(\pi/4, 0)$, (c) $(0, 0)$, (d) $(\pi/8, 0)$, (e) $(\pi/8, \pi/4)$, (f) $(\pi/8, \pi/2)$. El significado de los gráficos de contorno es el mismo que en la Fig. 5.2.

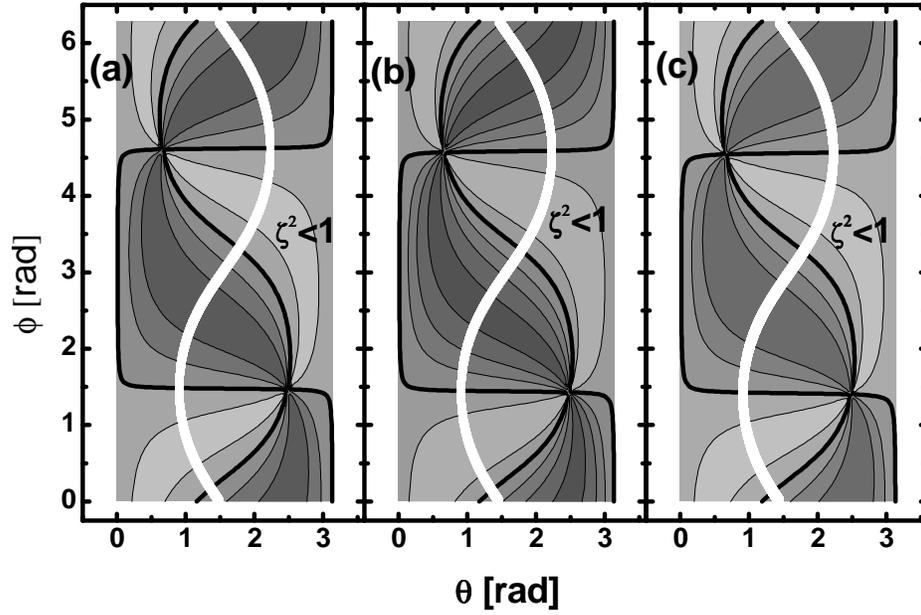


Figura 5.5: Efectos sobre ζ^2 debido al cambio en el número de sitios de espín en una cadena abierta. El tiempo se fijó en $t = 4$, los parámetros del EEC en $\theta_0 = \phi_0 = \pi/4$ y las constantes de acoplamiento en $g_{z,l} = 4$, $g_{+,l} = 1$, $g_{-,l} = 0$, para todos los valores de l . La secuencia (a), (b) y (c) muestra los resultados para $N = 5, 6, 7$ sitios respectivamente.

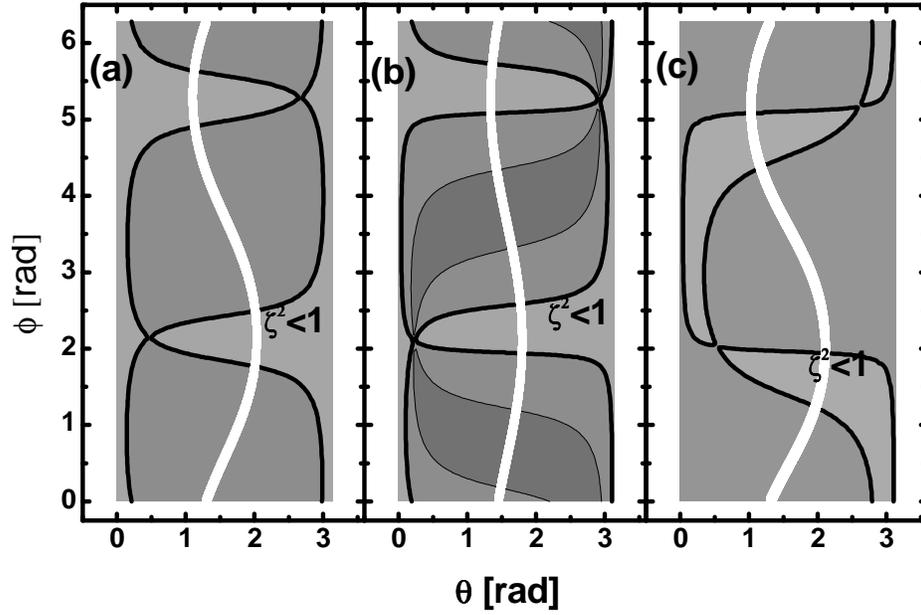


Figura 5.6: Efectos sobre ζ^2 debido al cambio en el número de sitios de espín en una cadena abierta. El tiempo se fijó en $t = 4$, los parámetros del EEC en $\theta_0 = \phi_0 = \pi/4$ y las constantes de acoplamiento en $g_{z,l} = 4$ (l *imp*), 16 (l *par*), $g_{+,l} = 1$ (l *imp*), 4 (l *par*), $g_{-,l} = 0$ para todos los valores de l . La secuencia (a), (b) y (c) muestra los resultados para $N = 5, 6, 7$ sitios respectivamente.

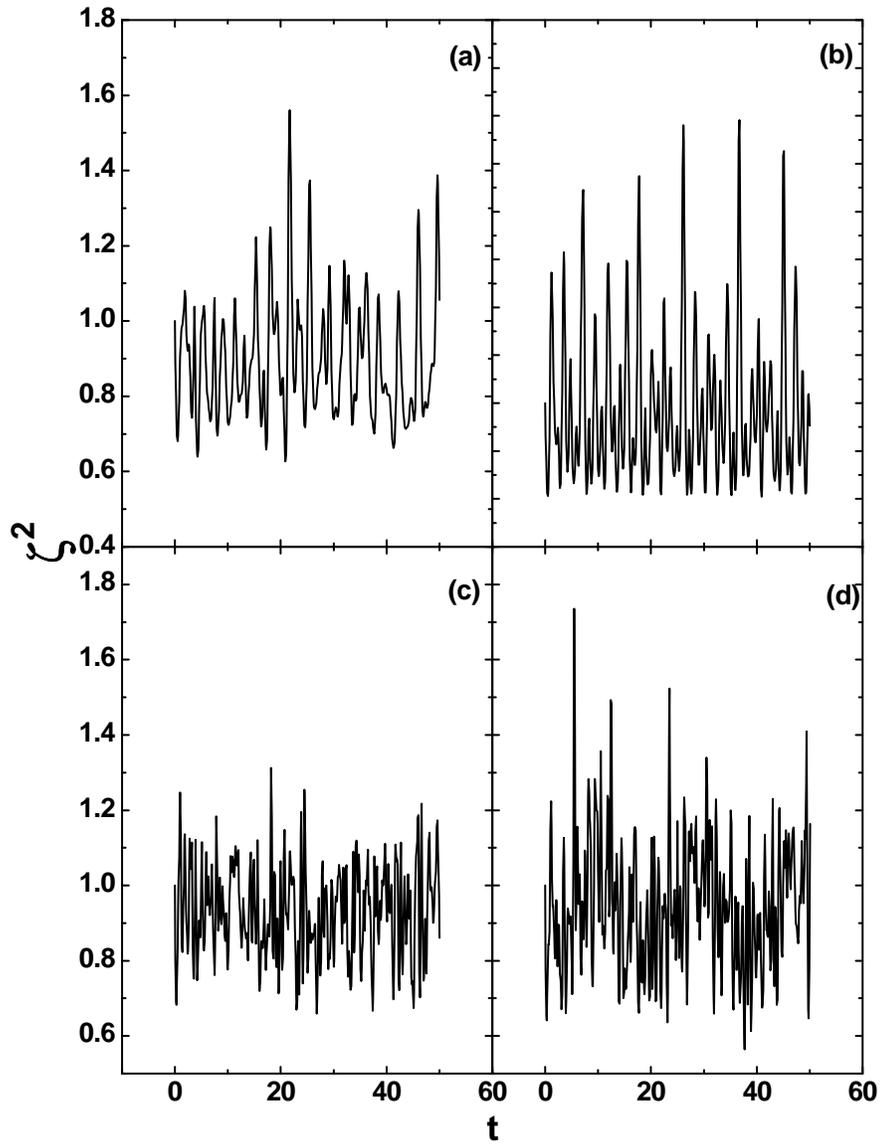


Figura 5.7: Resultados para $N = 5$ sitios. Los cuadros (a) y (c) corresponden al caso de una cadena abierta, mientras que los cuadros (b) y (d) corresponden al de una cadena cerrada. Las constantes de acoplamiento se fijaron en: $g_{z,l} = 4$ para (a) y (b), y $g_{z,l} = 4$ (si l es impar) y $g_{z,l} = 16$ (si l es par) para los casos (c) y (d); $g_{+,l} = 1$ par (a) y (b), y $g_{+,l} = 1$ (si l es impar) y $g_{+,l} = 4$ (si l es par) para (c) y (d), $g_{-,l} = 0$ en todos los casos. Las figuras muestran el valor mínimo del parámetro de squeezing como función del tiempo.

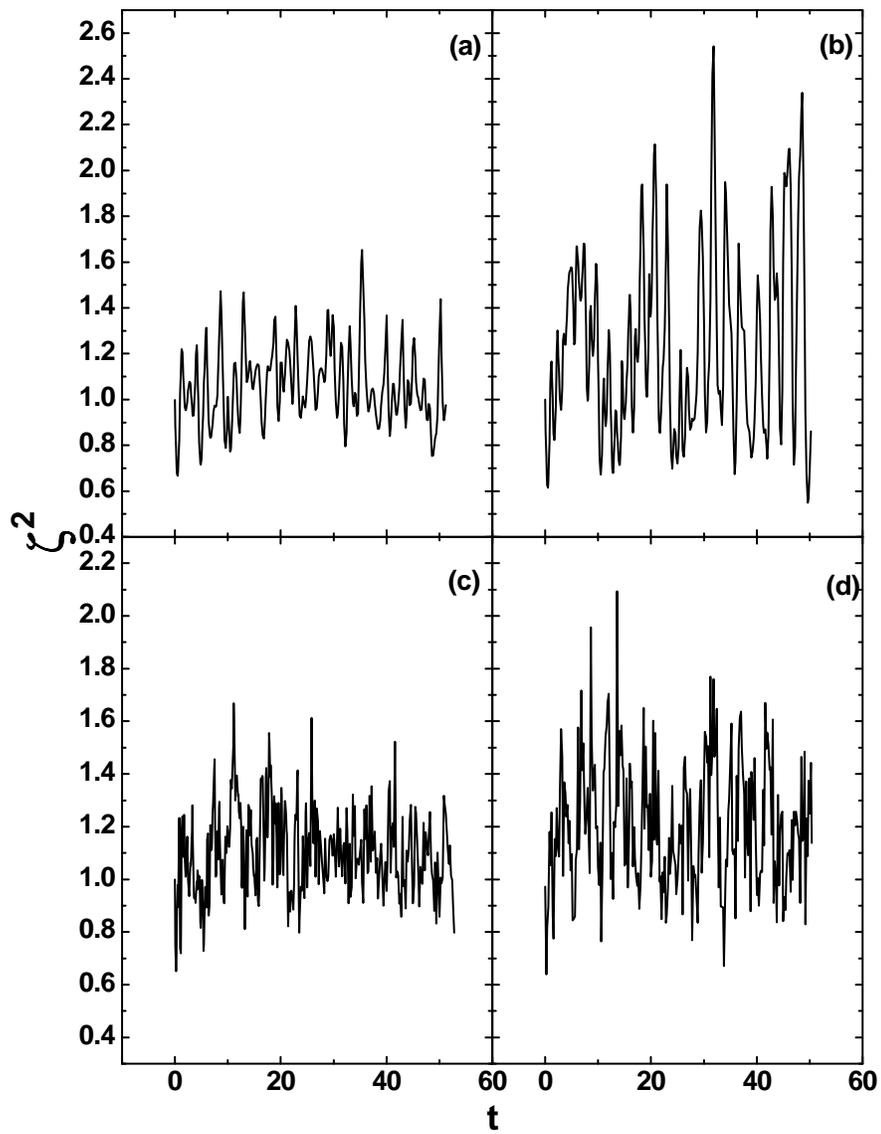


Figura 5.8: Resultados para $N=7$ átomos. Los valores de las constantes de acoplamiento son los de la Fig. 5.7

5.4. Conclusiones.

En este trabajo, se ha estudiado la presencia de squeezing en cadenas asimétricas de espines $1/2$, con interacciones a primeros vecinos. Se consideraron cadenas abiertas, para las cuáles se calcularon las fluctuaciones del espín total en el plano perpendicular a la dirección del espín medio. Estos valores fueron tomados como un indicador del grado de squeezing del sistema de espines. Los cálculos se realizaron para distintos valores del conjunto de parámetros del Hamiltoniano del sistema, y del estado inicial (EEC). Los resultados obtenidos se resumen en los siguientes puntos:

- i) El grado de squeezing atómico en una cadena abierta, se ve reducido ($\zeta^2 > 1$), si la interacción entre sitios de espín, varía dependiendo del sitio.
- ii) Hay una fuerte dependencia del factor de squeezing, ζ^2 , del estado inicial en el cual se prepara el sistema, en nuestro caso un estado EEC.

Estas conclusiones, obviamente, están limitadas por los valores de los parámetros introducidos en el modelo; sin embargo son representativas de la tendencia que pueda exhibir una cadena de espines más compleja.

Capítulo 6

Squeezing en Cadenas de Espines con Interacciones Periódicas y de Largo Alcance

En este capítulo, presentamos los resultados numéricos y analíticos para el factor de squeezing, ζ^2 , en una cadena de espines $S=1/2$. La cadena está compuesta de N átomos con dos niveles. La interacción entre niveles atómicos está modelada por una interacción espín-espín dependiente del sitio. Se estudia la evolución temporal del factor de squeezing, como así también la dependencia del mismo del número de átomos y de los parámetros de interacción. Se observa que las interacciones de largo alcance optimizan el grado de squeezing para el espín del sistema. Los resultados originales han sido enviados y aceptados para su publicación (Civitarese et al., 2009c).

6.1. Introducción.

Muchos de los desarrollos recientes en computación cuántica y óptica cuántica han renovado el interés en el estudio de sistemas de espines y sus interacciones (Kok et al., 2007; Imai and Hayashi, 2006; Scully and Zubairy, 1997; Peng and Lee, 1999; Klauder and Sudarshan, 2006). En particular, el problema de la reconstrucción del

espín en medidas cuánticas de no demolición (Saffman et al., 2009; Teper et al., 2008; Oblak, 2005), está íntimamente relacionado al squeezing de los observables de espín (Hagelstein and Chaudhary, 2006; Nielsen and Mølmer, 2008; de Echaniz et al., 2008; Korbicz et al., 2006). Pero aún quedan pendientes algunas cuestiones a cerca del modelado y las propiedades físicas de tales sistemas de espín, que deben ser resueltas a fin de poder decidir qué tipo de cadenas de espín, resultan en dispositivos adecuados para la transmisión de información cuántica. Es por ésto que en este trabajo, nos hemos enfocado en la persistencia de la orientación del espín total en presencia de interacciones de tipo espín-espín entre sitios de la cadena (Troiani et al., 2005; Affronte et al., 2004; Carretta et al., 2003; Sørensen and Mølmer, 1999; Wang et al., 2001). En relación a ésto, uno puede investigar, como una herramienta conveniente, la respuesta del espín de una cadena de espines del tipo Heisenberg con diferentes interacciones (Haldane, 1988; Shastry, 1988; Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995; Inozemtsev and Inozemtseva, 1991; Inozemtsev and Dorfel, 1993; Frau et al., 1994; Dittrich and Inozemtsev, 1997; Inozemtseva and Inozemtsev, 1997). Basándonos en nuestros resultados previos (Reboiro et al., 2007; Civitarese et al., 2008; Civitarese et al., 2009b; Reboiro, 2008), se han considerado cadenas de espines tipo Heisenberg anisotrópicas, dado que la anisotropía en las interacciones espín-espín, juega un rol importante en la construcción del equilibrio entre las componentes del espín total. En vista de este objetivo hemos seleccionado, de la literatura existente, interacciones espín-espín de tipo periódicas, de tipo gaussiano, e interacciones de largo alcance (Haldane, 1988; Shastry, 1988; Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995).

En el presente trabajo, se ha calculado el squeezing de los observables de espín (Kitagawa and Ueda, 1993), en un sistema de átomos de dos niveles que interactúan entre sí, localizados en los sitios de una cadena abierta. El cálculo del valor esperado de los observables, se obtienen via el uso del formalismo de la matriz densidad.

En la Sección 6.2 se describe el formalismo utilizado para el tratamiento del problema; los resultados y discusiones se presentan en la Sección 6.4. Por último, en la Sección 6.5, se señalan las conclusiones a las que hemos arribado.

6.2. Formalismo

El marco de referencia para el formalismo que se presenta a continuación, es el tratamiento de cadenas finitas de N espines $1/2$, que exhiben propiedades antiferromagnéticas (o ferromagnéticas), en presencia de una interacción de intercambio entre espines modulada por un factor que depende de la distancia entre sitios (Haldane, 1988; Shastry, 1988). La interacción en estas cadenas *no* se encuentra restringida a los sitios vecinos más cercanos. Los aspectos formales de la solución pueden verse en (Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995). Esencialmente y como hemos hecho antes (Capítulo 5), uno deberá definir el Hamiltoniano \hat{H} que describe la dinámica de la cadena, una base de estados, y mediante la diagonalización de \hat{H} , obtener la solución exacta para un número razonable de átomos. Para un número grande de átomos la diagonalización de la matriz del Hamiltoniano no es factible por razones de dimensionalidad, pero es posible obtener soluciones aproximadas mediante la aplicación de métodos no perturbativos como linealizaciones o bosonizaciones (Apéndice B), que están en buen acuerdo con los resultados exactos (Ballesteros et al., 2003). En las siguientes subsecciones haremos incapié en detalles específicos de la solución para diferentes interacciones. En relación al cálculo de la evolución temporal de los observables, se ha hecho uso del formalismo de la matriz densidad. Para el factor de squeezing del sistema de espín, se ha adoptado la definición dada en las Refs. (Sørensen and Mølmer, 1999; Wang et al., 2001).

6.3. Cadenas Asimétricas

Aquí discutimos unos pocos ejemplos de estas cadenas de espines, que pueden ser resueltos en forma exacta mediante diagonalización. En particular, tomaremos el caso simple de 2 átomos presentes en la cadena. El espectro de cada átomo corresponde al de los dos niveles de un espín $s=1/2$. Los átomos interactúan mediante sus espines, y esta interacción espín-espín puede descomponerse en las distintas direcciones correspondientes a las distintas componentes del espín atómico. En general, esta interacción puede tomar valores distintos según la dirección espacial.

Podemos escribir el Hamiltoniano del sistema como

$$H = \sum_{i \neq j=1}^N g(i, j) (\lambda_x \hat{s}_{x,i} \hat{s}_{x,j} + \lambda_y \hat{s}_{y,i} \hat{s}_{y,j} + \lambda_z \hat{s}_{z,i} \hat{s}_{z,j}). \quad (6.1)$$

La interacción (6.1) es una generalización de la interacción $\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j$ entre sitios de espines, pesada según la dirección por el acoplamiento:

$$g_\gamma(i, j) = \lambda_\gamma g(i, j), \quad \gamma = x, y, z, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.2)$$

Al igual que en el Cap. 5 los operadores escalera $\hat{s}_{\pm,i} = \hat{s}_{x,i} \pm i \hat{s}_{y,i}$, y el operador de espín $\hat{s}_{z,i}$, obedecen las reglas de conmutación del álgebra $su(2)$, y el Hamiltoniano de la Eq. (6.1) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} H = \sum_{i \neq j=1}^N g(i, j) [& \lambda_- (\hat{s}_{+,i} \hat{s}_{+,j} + \hat{s}_{-,i} \hat{s}_{-,j}) \\ & + \lambda_+ (\hat{s}_{+,i} \hat{s}_{-,j} + \hat{s}_{-,i} \hat{s}_{+,j}) \\ & + \lambda_z \hat{s}_{z,i} \hat{s}_{z,j}], \end{aligned} \quad (6.3)$$

con $\lambda_\pm = \frac{1}{4}(\lambda_x \pm \lambda_y)$. El producto de estados

$$|k\rangle = |k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_N\rangle = \prod_{i=1}^N \hat{s}_{+,i}^{k_i} |0\rangle, \quad k_i = 0, 1, \quad (6.4)$$

define una base en la cual el Hamiltoniano (6.3) puede ser diagonalizado. El estado $|0\rangle$ es el estado de vacío del sistema, y por definición, todos los átomos están en nivel atómico de mínima energía ($s_z = -1/2$). Los elementos de matriz de H (6.3) en la base (6.4) están dados por la expresión

$$\begin{aligned} \langle k' | H | k \rangle = & \sum_{i \neq j} g(i, j) \{ \lambda_- \delta(k_i + 1, k'_i) \delta(k_j + 1, k'_j) \\ & + \lambda_- \delta(k_i - 1, k'_i) \delta(k_j - 1, k'_j) \\ & + \lambda_+ \delta(k_i + 1, k'_i) \delta(k_j - 1, k'_j) \\ & + \lambda_+ \delta(k_i - 1, k'_i) \delta(k_j + 1, k'_j) \\ & + \lambda_z (k_i - 1/2)(k_j - 1/2) \delta(k_i, k'_i) \delta(k_j, k'_j) \}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Los elementos no diagonales de la matriz (6.5) conectan estados con $\Delta k = 0$ y ± 2 , donde $k = \sum_i k_i - N/2$ es el autovalor correspondiente a la proyección del espín total en la dirección z . En particular, para la elección $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_\perp$, el operador $\hat{S}_z = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{z,i}$ conmuta con el Hamiltoniano (6.3) para toda modulación en el acoplamiento $g(i, j)$, y los elementos de matriz (6.5) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \langle k' | H | k \rangle &= \sum_{i \neq j} g(i, j) \left\{ \frac{\lambda_\perp}{2} \delta(k_i + 1, k'_i) \delta(k_j - 1, k'_j) \right. \\ &\quad + \frac{\lambda_\perp}{2} \delta(k_i - 1, k'_i) \delta(k_j + 1, k'_j) \\ &\quad \left. + \lambda_z \left(k_i - \frac{1}{2} \right) \left(k_j - \frac{1}{2} \right) \delta(k_j, k'_j) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para esta relación particular de los valores de las constantes de acoplamiento, las únicas transiciones posibles se dan para $\Delta k = 0$, lo cual es una consecuencia de que, como dijimos $[H, S_z] = 0$. Entonces la matriz (6.6) se divide en submatrices independientes, cada una correspondiente a un valor fijo de k , y la diagonalización puede llevarse acabo en cada uno de estos subespacios independientemente.

Estos son los elementos necesarios para calcular, en forma exacta, el conjunto completo de autovalores $\{E_\alpha\}$ y autovectores $\{|\alpha\rangle\}$ de H , y con ellos la correspondiente matriz densidad del sistema. Sobre la base de autovectores de H , calculamos la evolución temporal de cada operador O de interés en el problema:

$$\begin{aligned} \langle O(t) \rangle &= \sum_{n,m} T^*(n) \langle n | O | m \rangle T(m), \\ T(m) &= \sum_{\alpha n} c_{\alpha n}^* c_{\alpha m} \langle n | I \rangle e^{iE_\alpha t/\hbar}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

En la ecuación anterior $|n\rangle$ es un elemento de la base (6.4), y los coeficientes $c_{\alpha n}$ representan la amplitud de $|n\rangle$ en el autoestado $|\alpha\rangle$ del Hamiltoniano de la Eq.(6.3).

El Factor de Squeezing

Se ha adoptado, para el factor de squeezing ζ^2 , la definición (Sørensen and Mølmer, 1999)

$$\zeta^2 = \frac{N(\Delta S_n)^2}{|\langle \mathbf{S} \rangle|^2}, \quad (6.8)$$

donde N es el número de átomos en la cadena, y \hat{S}_n es la componente del espín total en una dirección perpendicular a $\langle \mathbf{S} \rangle$, esto es, la dirección en el espacio definida por el vector unitario

$$\begin{aligned} \check{n} &= (\sin \theta_n \cos \phi_n, \sin \theta_n \sin \phi_n, \cos \theta_n), \\ \check{n} \cdot \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

El Estado Inicial

En todos los casos que se presentan, se ha considerado el estado coherente

$$\begin{aligned} |I\rangle &= (1 + |z|^2)^{-N/2} \sum_{m=0}^N \frac{z^m}{m!} \hat{S}_+^m |0\rangle, \\ z &= e^{-i(\phi_0 - \pi)} \tan(\theta_0/2), \end{aligned} \quad (6.10)$$

como condición inicial del sistema. Este estado no es un autoestado de H , y el mismo queda definido por la orientación de los ángulos ϕ_0 y θ_0 sobre la esfera de Bloch (Fig. 3.3). El operador \hat{S}_+ es el operador colectivo dado por $\hat{S}_+ = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{+,i}$.

Algunos casos con Solución Analítica

El caso con $N = 2$

Se presentan los resultados analíticos para el caso simple de una cadena con $N = 2$ átomos, considerando diferentes interacciones entre los sitios de la cadena. La misma es una cadena abierta determinada por la definición del Hamiltoniano introducido en (6.1).

1. Interacción Armónica

Escribimos la interacción entre átomos como $g(i, j) = \sin(|i - j|\frac{\pi}{2})$ y $\lambda_z = 2\lambda_\perp$. La diagonalización del Hamiltoniano arroja el siguiente conjunto de autovalores ϵ_α y autovectores Ψ_α (con $\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \lambda_\perp, & |\Psi_1\rangle &= |0, 0\rangle, \\ \epsilon_2 &= 0, & |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle), \\ \epsilon_3 &= -2\lambda_\perp, & |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle), \\ \epsilon_4 &= \lambda_\perp, & |\Psi_4\rangle &= |1, 1\rangle.\end{aligned}\tag{6.11}$$

A partir de este conjunto de autovalores y autovectores, podemos calcular la evolución temporal de los observables del espín, a partir de la condición inicial elegida (6.10). El sistema tiene tanto a \hat{S}_z como a \hat{S}_z^2 como constantes de movimiento, siendo su forma explícita

$$\begin{aligned}\langle S_z(t) \rangle &= -\cos \theta_0, \\ \langle S_z^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta_0.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Entonces, para una elección de la orientación del estado inicial dada por $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\phi_0 = 0$, el valor esperado de la componente z del espín total, resulta nulo, $\langle S_z \rangle = 0$, y

$$\begin{aligned}\langle \vec{S} \rangle &= (\langle S_x \rangle, 0, 0), \\ \langle S_x \rangle &= -\cos \left(\frac{\lambda_\perp t}{\hbar} \right).\end{aligned}\tag{6.13}$$

En este caso el vector unitario que define la dirección normal a $\langle \vec{S} \rangle$ es:

$$\vec{n} = (0, \pm \sin \theta_n, \cos \theta_n).\tag{6.14}$$

El signo positivo corresponde a la elección $\phi_n = \frac{\pi}{2}$ en tanto que el negativo corresponde a $\phi_n = \frac{3\pi}{2}$. Con estos elementos, la expresión formal para el factor de squeezing ζ^2 da

$$\zeta^2 = \frac{1 \pm 2 \sin \theta_n \cos \theta_n \sin \left(\frac{\lambda_\perp t}{\hbar} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\lambda_\perp t}{\hbar} \right)}\tag{6.15}$$

Análogamente, estos cálculos pueden repetirse para diferentes orientaciones de la condición inicial. La elección $\theta_0 = 0$ y $\phi_0 = 0$ da como resultado $\zeta^2 = 1$ (no hay squeezing). El caso con $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ es similar al caso $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_0 = 0$, dando la misma expresión para ζ^2 (6.15), lo cual es consistente con el hecho que los estados iniciales sólo difieren en una fase.

2. Interacción Gaussiana

La interacción entre sitios de espín puede ser modelada por un factor de forma gaussiano

$$g(i, j) = e^{-\frac{1}{2}(i-j)^2}. \quad (6.16)$$

Las soluciones del problema de autovalores para esta interacción, son

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\lambda_z}{2} e^{-1/2}, & |\Psi_1\rangle &= |0, 0\rangle, \\ \epsilon_2 &= (\lambda_\perp - \frac{\lambda_z}{2}) e^{-1/2}, & |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle), \\ \epsilon_3 &= -(\lambda_\perp + \frac{\lambda_z}{2}) e^{-1/2}, & |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle), \\ \epsilon_4 &= \frac{\lambda_z}{2} e^{-1/2}, & |\Psi_4\rangle &= |1, 1\rangle. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Con la elección $\lambda_z = 2\lambda_\perp$ la expresión de las soluciones resulta idéntica a las correspondientes a (6.11), a menos de un factor $e^{-1/2}$. Por ejemplo, para los ángulos de orientación $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_0 = 0$ se obtiene

$$\zeta^2 = \frac{1 \pm 2 \sin \theta_n \cos \theta_n \sin \left(\frac{\lambda_\perp t}{\hbar} e^{-1/2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\lambda_\perp t}{\hbar} e^{-1/2} \right)}, \quad (6.18)$$

y una expresión similar para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

El caso con $N=3$

Un análisis análogo al de la sección anterior puede realizarse para el caso con $N = 3$ átomos. La solución, para ambas interacciones (interacción armónica e interacción Gaussiana), también resulta analítica. A partir de la misma, discutiremos el efecto de la asimetría sobre el factor de squeezing ζ^2 . El concepto principal detrás de esto,

es el mecanismo de ruptura de simetría inducida por los acoplamientos λ_i de la Eq.(6.3). En este ejemplo, la diagonalización de H puede realizarse en la base de los ocho estados que resultan de los tres sitios (átomos) de la cadena en dos estados posibles (estados de espín 1/2 para cada sitio). Los autovalores de la correspondiente ecuación secular son:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \lambda_z/2 \\
\epsilon_2 &= 0 \\
\epsilon_3 &= -\lambda_z/4 - \Delta \\
\epsilon_4 &= -\lambda_z/4 + \Delta \\
\epsilon_5 &= \epsilon_2 \\
\epsilon_6 &= \epsilon_3 \\
\epsilon_7 &= \epsilon_4 \\
\epsilon_8 &= \epsilon_1
\end{aligned}$$

con

$$\Delta = \frac{\sqrt{\lambda_z^2 + 8\lambda_\perp^2}}{4}$$

La dependencia temporal de los valores esperados de las componentes de espín, pueden ser calculados en forma explícita, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\langle S_z \rangle &= -\frac{3}{2}c_0 \\
\langle S_z^2 \rangle &= \frac{3}{4} + \frac{3}{2}c_0^2 \\
\langle S_+^2 \rangle &= e^{-2i(\phi_0 - \pi)} \frac{1}{2}s_0^2(A - iBc_0) \\
\langle S_+ \rangle &= e^{-i(\phi_0 - \pi)} \frac{1}{2}s_0 \left[\frac{1}{2}s_0^2 C + \left(1 - \frac{1}{2}s_0^2\right) A - iBc_0 \right] \\
\langle \{S_+, S_-\} \rangle &= 3 + s_0^2 C \\
\langle \{S_+, S_z\} \rangle &= e^{-i(\phi_0 - \pi)} s_0 \left[-c_0 A + i \left(1 - \frac{1}{2}s_0^2\right) B \right]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

y

$$\langle S_x \rangle = \text{Re}\langle S_+ \rangle,$$

$$\begin{aligned}
\langle S_y \rangle &= \text{Im}\langle S_+ \rangle, \\
\langle S_x^2 \rangle &= \frac{1}{2}\text{Re}\langle S_+^2 \rangle + \frac{1}{4}\langle \{S_+, S_-\} \rangle, \\
\langle S_y^2 \rangle &= -\frac{1}{2}\text{Re}\langle S_+^2 \rangle + \frac{1}{4}\langle \{S_+, S_-\} \rangle
\end{aligned} \tag{6.20}$$

con los parámetros

$$\begin{aligned}
c_0 &= \cos(\theta_0) \\
s_0 &= \sin(\theta_0)
\end{aligned}$$

relacionados con la definición de los ángulos que orientan el estado inicial (6.10). El resto de las cantidades que entran en las expresiones de (6.19) se corresponden con

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta) \right] \cos(\Delta + \frac{3}{4}\lambda_z t) + \\
&\quad \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta) \right] \cos(\Delta - \frac{3}{4}\lambda_z t) \\
B &= \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta) \right] \sin(\Delta + \frac{3}{4}\lambda_z t) - \\
&\quad \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta) \right] \sin(\Delta - \frac{3}{4}\lambda_z t) \\
C &= 3 - (\alpha + \beta)^2 \sin^2(\Delta t)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\lambda_z - 4\lambda_\perp}{4\Delta} \\
\beta &= \frac{\lambda_z + 2\lambda_\perp}{4\Delta} \\
3 &= \alpha^2 + 2\beta^2
\end{aligned} \tag{6.22}$$

No resulta difícil, luego de un poco de álgebra, mostrar que para interacciones simétricas ($\lambda_z = \lambda_\perp$) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{3}{4}\lambda_z \\
\alpha &= -1 \\
\beta &= 1 \\
A &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= 0 \\
C &= 3
\end{aligned}
\tag{6.23}$$

Luego, los valores esperados (6.19) pueden ser escritos como

$$\begin{aligned}
\langle S_z \rangle &= -\frac{3}{2}c_0 \\
\langle S_z^2 \rangle &= \frac{3}{4} + \frac{3}{2}c_0^2 \\
\langle S_+^2 \rangle &= e^{-2i(\phi_0-\pi)} \frac{3}{2}s_0^2 \\
\langle S_+ \rangle &= e^{-i(\phi_0-\pi)} \frac{3}{2}s_0 \\
\langle \{S_+, S_-\} \rangle &= 3(1 + s_0^2) \\
\langle \{S_+, S_z\} \rangle &= -3e^{-i(\phi_0-\pi)} s_0 c_0
\end{aligned}
\tag{6.24}$$

La dirección del valor esperado del espín total en cada instante de tiempo, se determina mediante las relaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\langle S_x \rangle}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} &= -s_0 \cos(\phi_0), \\
\frac{\langle S_y \rangle}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} &= s_0 \sin(\phi_0), \\
\frac{\langle S_z \rangle}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} &= -c_0
\end{aligned}
\tag{6.25}$$

Por ejemplo, para una elección de $\phi_0 = \pi$, el vector de espín $\langle S \rangle$ se encuentra en el plano $x - z$ y es perpendicular a todo vector sobre el eje \hat{y} . Como el valor esperado de S_y se anula, la varianza del vector de espín en una dirección perpendicular a $\langle S \rangle$ se reduce a

$$(\Delta S_n)^2 = (\Delta S_y)^2 = \langle S_y^2 \rangle = \frac{3}{4}
\tag{6.26}$$

Por otra parte

$$|\langle S \rangle| = \frac{3}{2}
\tag{6.27}$$

y en consecuencia,

$$\zeta^2 = N \frac{(\Delta S_n)^2}{|\langle S \rangle|^2} = 1
\tag{6.28}$$

Esto significa, que para obtener valores $\zeta^2 < 1$, debe romperse la simetría del Hamiltoniano, considerando *constantemente de acoplamientos no todas iguales* (este comportamiento ya fue observado en el trabajo que se discute en el Capítulo 5 al considerar interacciones a primeros vecinos). Si bien aquí se ha hecho una elección particular del ángulo ϕ_0 del estado coherente, lo cual permite simplificar el cálculo analítico, los resultados para la evolución temporal del factor de squeezing resultan independientes de la elección de dicho ángulo, es decir, es invariante frente a una rotación en torno al eje \hat{z} . Esto ya había sido notado en los resultados analíticos obtenidos para $N = 2$. Posteriormente, esta independencia en la evolución del sistema con respecto a la orientación del estado inicial en el plano $x - y$, ha sido corroborada al analizar los gráficos que resultan de un tratamiento numérico del problema, para cadenas de distintas longitudes. A una conclusión similar han arribado los autores en (Wang and Sanders, 2003).

Los casos más simples con $N = 2, 3$ átomos pueden ser tratados analíticamente en forma exacta, y estos resultados pueden ser de ayuda a fin de obtener alguna idea acerca del comportamiento que sería de esperar en los casos con un mayor número de átomos N , los cuales deben ser resueltos numéricamente. Para obtener alguna expresión analítica que de cuenta del comportamiento en el límite de un número muy grande de sitios, se puede recurrir a ciertas técnicas de muchos cuerpos (Apéndice B), como la Aproximación Tamm-Dancof (TDA).

Solución Asintótica para N Grande - TDA

La Aproximación Tamm-Dancof (B.3.1), puede utilizarse para calcular observables de espín en el caso en que el número de sitios en la cadena se vuelve muy grande, y la diagonalización exacta resulta un problema intratable numéricamente. La TDA está basada en la expansión bosónica de los operadores de espín y un posterior mapeo sobre la base de un fonón. Esto se lleva a cabo de la siguiente manera:

a) Expansión bosónica de los operadores de espín: Los operadores de espín se expresan en término de operadores bosónicos asociados a cada sitio de la cadena, mediante lo que se conoce como mapeo de Holstein-Primakoff (Klein and Marshalek,

1991). De este mapeo, que corresponde a una serie infinita en el operador número de bosones, retenemos sólo el orden más bajo

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_i b_i^+ \\ S_- &= \sum_i b_i \\ S_z &= \sum_i b_i^+ b_i - \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

El subíndice i se refiere al sitio. El estado de vacío $|0\rangle$ está definido como el estado con todos los átomos en el nivel de más baja energía, tal que para cada operador bosónico b_i se tiene $b_i |0\rangle = 0$ ¹. Claramente, los operadores (6.29) obedecen las reglas de conmutación del álgebra $su(2)$.

b) Base de un fonón: Los operadores bosónicos b_i^+ pueden escribirse en términos de una nueva base de operadores, también bosónicos, Γ_n mediante la combinación lineal

$$\Gamma_n^+ = \sum_i X_n(i) b_i^+ \quad (6.30)$$

Los nuevos operadores actuando sobre el vacío previamente definido $|0\rangle$, dan

$$\Gamma_n |0\rangle = 0 \quad (6.31)$$

y generan un conjunto de estados $|n\rangle$, tal que

$$|n\rangle = \Gamma_n^+ |0\rangle. \quad (6.32)$$

La Eq. (6.30) puede invertirse, obteniéndose la transformación inversa

$$b_i^+ = \sum_n X_n^*(i) \Gamma_n^+, \quad (6.33)$$

que preserva las relaciones de conmutación originales.

c) Diagonalización TDA: El Hamiltoniano de la Eq. (6.3) se transforma a la base bosónica de operadores b_i^+ (b_i) y posteriormente, a la base de operadores de un fonón

¹Si se representan los niveles atómicos de un dado sitio por la acción de operadores de creación y aniquilación $c_{i,\pm}^+$ y $c_{i,\pm}$, el operador de creación bosónico está definido como $b_i^+ = c_{i,+}^+ c_{i,-}$ y el estado de vacío es de la forma $|0\rangle = \prod_j c_{j,-}^+ | \rangle$, tal que $b_i |0\rangle = c_{i,-}^+ c_{i,+} \prod_j c_{j,-}^+ | \rangle = 0$

(6.30). La imagen TDA del Hamiltoniano es la siguiente:

$$\begin{aligned} H_{TDA} &= \sum_i \epsilon_i (\hat{n}_i - \frac{1}{4}) + \sum_{i \neq j} \lambda_{\perp} g_{ij} b_i^{\dagger} b_j \\ &= \sum_n E_n \Gamma_n^{\dagger} \Gamma_n \end{aligned} \quad (6.34)$$

con

$$\epsilon_i = \sum_{j \neq i} \lambda_z g_{ij}$$

En el marco de la aproximación TDA (B.3.1) el Hamiltoniano resulta linealizado por la ecuación de movimiento

$$[H_{TDA}, \Gamma_n^{\dagger}] = E_n \Gamma_n^{\dagger}, \quad (6.35)$$

obteniéndose la ecuación secular de autovalores

$$\epsilon_l X_n(l) + \sum_{k \neq l} \lambda_{\perp} g_{lk} X_n(k) = E_n X_n(l). \quad (6.36)$$

Entonces, al reemplazar la amplitud

$$X_n(l) = \frac{1}{E_n - \epsilon_l} \sum_{k \neq l} \lambda_{\perp} g_{lk} X_n(k) = \frac{\Lambda_n(l)}{E_n - \epsilon_l} \quad (6.37)$$

en la Eq. (6.36), se obtiene la relación de dispersión para las energías TDA, E_n . Las amplitudes están normalizadas

$$\sum_l |X_n(l)|^2 = 1. \quad (6.38)$$

d) Condición inicial: Una vez realizada la transformación anterior, la condición inicial (6.10) puede escribirse en término de los fonones TDA como:

$$|I\rangle = \left(|0\rangle + \sum_{n=1}^N \lambda_n z \Gamma_n^{\dagger} |0\rangle \right) \mathcal{N}, \quad (6.39)$$

donde \mathcal{N} es la norma del estado inicial $|I\rangle$.

e) Los operadores de espín en la base TDA: Como hemos hecho antes para la condición inicial y el Hamiltoniano, los operadores de espín pueden escribirse en la

base de fonones TDA, dando

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n - \frac{N}{2} \\ S_+ &= \sum_n \lambda_n \Gamma_n^\dagger \end{aligned} \quad (6.40)$$

con

$$\lambda_n = \sum_k X_n(k) \quad (6.41)$$

Luego, están dados todos los elementos para calcular los valores esperados de los operadores de espín. A orden dominante las expresiones resultantes son:

$$\langle S_z \rangle = -\frac{N}{2} + \frac{|z|^2 N}{1 + |z|^2 N} \quad (6.42)$$

$$\langle S_z^2 \rangle = \frac{N^2}{4} - (N-1) \frac{N|z|^2}{1 + |z|^2 N} \quad (6.43)$$

$$\langle S_+ \rangle = \frac{|z|}{1 + |z|^2 N} \sum_{n=1}^N \lambda_n e^{i(E_n - E_0)t - (\varphi_0 - \pi)} \quad (6.44)$$

$$\langle S_+^2 \rangle = 0 \quad (6.45)$$

$$\langle \{S_+, S_-\} \rangle = N + \frac{2|z|^2}{1 + N|z|^2} \sum_n |\lambda_n| \quad (6.46)$$

$$\langle \{S_+, S_z\} \rangle = -(N-1) \langle S_+ \rangle \quad (6.47)$$

El resto de las cantidades necesarias para obtener la expresión del factor de squeezing, pueden obtenerse a partir de (6.47) ²En el límite para $N \gg 1$, las expresiones

2

$$S_x^2 = \frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) + \frac{1}{4}\{S_+, S_-\} \quad (6.48)$$

$$S_y^2 = -\frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) + \frac{1}{4}\{S_+, S_-\} \quad (6.49)$$

$$\langle S_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle S_x^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \{S_+, S_-\} \rangle \quad (6.50)$$

$$\langle S_y^2 \rangle = -\frac{1}{2} \text{Re} \langle S_x^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \{S_+, S_-\} \rangle \quad (6.51)$$

$$\Delta^2 S_x = \frac{1}{2} \text{Re} \langle S_+^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \{S_+, S_-\} \rangle - (\text{Re} \langle S_+ \rangle)^2 \quad (6.52)$$

$$\Delta^2 S_y = -\frac{1}{2} \text{Re} \langle S_+^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle \{S_+, S_-\} \rangle - (\text{Im} \langle S_+ \rangle)^2 \quad (6.53)$$

$$\Delta^2 S_z = \langle S_z^2 \rangle - \langle S_z \rangle^2 \quad (6.54)$$

$$\langle \{S_x, S_y\} \rangle - 2\langle S_x \rangle \langle S_y \rangle = \text{Im} \langle S_+^2 \rangle - 2(\text{Re} \langle S_+ \rangle)(\text{Im} \langle S_+ \rangle) \quad (6.55)$$

$$\langle \{S_x, S_z\} \rangle - 2\langle S_x \rangle \langle S_z \rangle = \text{Re}(\langle \{S_x, S_z\} \rangle) - 2(\text{Re} \langle S_+ \rangle) \langle S_z \rangle \quad (6.56)$$

$$\langle \{S_y, S_z\} \rangle - 2\langle S_y \rangle \langle S_z \rangle = \text{Im}(\langle \{S_y, S_z\} \rangle) - 2(\text{Im} \langle S_+ \rangle) \langle S_z \rangle. \quad (6.57)$$

anteriores se reducen a

$$\langle S_z \rangle = -\frac{N}{2} \quad (6.58)$$

$$\langle S_z^2 \rangle = \frac{N^2}{4} \quad (6.59)$$

$$\langle S_+ \rangle = \langle S_+^2 \rangle = 0 \quad (6.60)$$

$$\langle \{S_+, S_-\} \rangle = N \quad (6.61)$$

$$\langle \{S_+, S_z\} \rangle = 0, \quad (6.62)$$

y el factor de squeezing (6.8) tiende asintóticamente al valor 1:

$$\zeta^2_{\text{large } N} \rightarrow \frac{(N^2/4) |\check{n}|^2}{(N^2/4)} = 1, \quad (6.63)$$

dado que \check{n} es un vector unitario. Este resultado indicaría que, al menos en el subespacio de un fonón, es de esperar una saturación en el valor del factor de squeezing para un gran número de sitios de espín (o átomos) en la cadena. Naturalmente, una generalización de dicho comportamiento no es válida, ya que sería necesario obtener la diagonalización exacta para valores grandes de N , pero esta tarea está limitada por el rápido crecimiento de la dimensión del problema, que aumenta como (2^N) (Notar que bajo la transformación TDA, el problema original de dimensión 2^N se reduce a otro problema de N^2 dimensiones).

6.4. Resultados y Discusión.

En esta sección se presentan y discuten los resultados del formalismo introducido anteriormente, para el factor de squeezing ζ^2 , para diferentes interacciones entre sitios de espín. En todos los casos se han considerado átomos de dos niveles, cada uno de los cuales es equivalente a un sistema de espín $s = 1/2$. La diagonalización exacta se llevó a cabo para distintos números de átomos en la cadena, $N \leq 11$. Los factores de modulación $g(i, j)$ para las distintas interacciones propuestas, son los

siguientes

$$\begin{aligned}
g(i, j) &= |\sin(\frac{\pi}{2}(i - j))|, & (a) \\
g(i, j) &= \sin(\frac{\pi}{2}|i - j|), & (b) \\
g(i, j) &= e^{-\frac{1}{2}(i-j)^2}, & (c) \\
g(i, j) &= (\sin(\frac{\pi}{N}(i - j)))^{-2}, & (d)
\end{aligned} \tag{6.64}$$

con $i \neq j$ en todos los casos. Estos factores están asociados a interacciones periódicas o interacciones de largo alcance, que han sido discutidas y pueden encontrarse en la literatura (Shastry, 1988; Haldane, 1988; Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995; Inozemtsev and Inozemtseva, 1991; Inozemtsev and Dorfel, 1993; Frau et al., 1994; Dittrich and Inozemtsev, 1997; Inozemtseva and Inozemtsev, 1997).

Los parámetros λ_{\perp} y λ_z de la Eq. (6.6), se fijaron en los valores $\lambda_{\perp} = 1$ y $\lambda_z = 2$, para todos los casos, imponiendo una asimetría en las interacciones (Civitarese et al., 2009b; Reboiro et al., 2007; Reboiro, 2008). Como condición inicial hemos elegido un estado coherente (6.10) con $\theta_0 = \pi/2, \pi/4$ y $\pi/8$, y $\phi_0 = 0$. Cabe mencionar, que cambiar el valor $\phi_0 = 0$ no modifica los resultados de interés ya que representa sólo una fase en el estado inicial. Este comportamiento se ve reflejado en los resultados analíticos de la sección previa (Eqs. (6.15), (6.18)) para el caso de cadenas con $N = 2$ sitios, y ha sido verificado numéricamente para los casos con $N > 2$.

En las Figuras 6.1-6.3 se muestra la dependencia temporal del parámetro de squeezing ζ^2 para una cadena con $N = 5$ átomos. El procedimiento consiste en:

1. diagonalización del Hamiltoniano (6.3) en la base (6.4);
2. cálculo de la matriz densidad a partir de los correspondientes autovalores y autovectores del problema, al igual que se hizo en el trabajo presentado en el Capítulo 5 (Eqs. (5.5)-(5.7));
3. cálculo del valor esperado de las componentes de espín total que entran en la definición del parámetro de squeezing (6.8).

La Figura 6.1 muestra los resultados obtenidos para los diferentes factores $g(i, j)$ (6.64), con un estado inicial coherente $\theta_0 = \pi/2$ y $\phi_0 = 0$. Aunque en prácticamene

todos los casos el valor de ζ^2 se encuentra muy cercano al valor $1/2$, se observan oscilaciones muy rápidas en el valor del mismo. Esto significa que la media temporal es mucho mayor a $1/2$. En este caso el valor esperado del espín total es perpendicular a la dirección z . A los efectos de investigar la sensibilidad de la dependencia temporal de ζ^2 respecto de la condición inicial, hemos repetido estos mismos cálculos para los valores $\theta_0 = \pi/4$ y $\theta_0 = \pi/8$. Los resultados se muestran en las Figuras 6.2 y 6.3. Se observa que, para valores pequeños de θ_0 , las oscilaciones de ζ^2 están confinadas a una franja relativamente angosta, $0,7 < \zeta^2 < 1$ (ver Figura 6.3). Para el caso límite $\theta_0 = 0$, se obtiene $\zeta^2 = 1$, como era de esperar ya que entonces el estado inicial coherente es un autoestado \hat{S}_z , y las componentes perpendiculares \hat{S}_x y \hat{S}_y se encuentran completamente indeterminadas. Esta situación persiste con el tiempo ya que \hat{S}_z es una constante de movimiento. De estos resultados se desprende que la dependencia temporal de ζ^2 puede ser controlada por las interacciones espín-espín, como así también por la elección del estado inicial coherente. Una buena elección del estado coherente puede, de hecho, minimizar la media temporal de ζ^2 . El valor óptimo de ζ^2 es del orden de $0,7$. Por otra parte, siguiendo los resultados presentados en las Figuras 6.1-6.3, una cadena con una interacción espín-espín modulada por un factor $g(i, j)$, como los de la Eq. (6.64), puede considerarse como un dispositivo eficaz para conservar la información acerca de la orientación del espín, y del peso relativo de las componentes del espín total.

Siguiendo con la comparación entre los distintos factores de forma que modulan la interacción, se muestran en la Figura 6.4 los resultados correspondientes a la Eq. (6.15) y Eq. (6.18). Mientras la figura obtenida a partir de una modulación $g(i, j) = \sin |\frac{\pi}{2}(i - j)|$, (caso (a)), muestra oscilaciones en torno al mínimo $\zeta^2 = 1/2$, la que se obtiene con $g(i, j) = e^{-\frac{1}{2}(i-j)^2}$ (caso (b)) muestra, en adición a lo anterior, una modulación con un período mayor que en el caso previo. Esto está en acuerdo con las expresiones obtenidas en (6.15) y (6.18) donde se observa que el factor de squeezing ζ^2 oscila con una frecuencia λ_{\perp}/\hbar en el primero de los casos, y con una frecuencia $\lambda_{\perp}e^{-1/2}/\hbar$ en el segundo. Por otra parte, la comparación de estas figuras con lo observado en la Figura 6.1-(b) y 6.1-(c), indica que al incrementarse el número

de átomos, las oscilaciones de ζ^2 son más rápidas y su valor mínimo se incrementa significativamente. Este comportamiento resulta más evidente del análisis de las Figuras 6.5-6.7.

Veamos cómo es la dependencia del parámetro de squeezing con respecto a N . Las Figuras 6.5-6.7 muestran los resultados obtenidos para el parámetro de squeezing, ζ^2 , como función del número de sitios de espín en la cadena. Cada punto en estas figuras representa el mínimo valor de ζ^2 sobre un cierto intervalo temporal, calculado para un valor fijo N . Es decir, que para un dado N , hemos calculado la evolución temporal de ζ^2 , y buscado su valor mínimo en el mismo intervalo de tiempo en que se obtuvieron las Figuras 6.1-6.3. En la Figura 6.8 en cambio, cada punto representa la media temporal del parámetro de squeezing como función del número de átomos. Los parámetros utilizados son los mismos de la Figura 6.7, y el intervalo de tiempo considerado se amplió hasta $t = 1000$. Como característica general se observa que el mínimo absoluto y el valor promedio mínimo para ζ^2 se obtiene utilizando un factor de modulación $g(i, j) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{N}(i - j)\right)\right)^{-2}$ para la interacción entre sitios de la cadena (Shastry, 1988; Haldane, 1988; Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995). Esta interacción, que representa una interacción de intercambio con $J_{ij} = 1/r_{ij}^2$, siendo r_{ij} la distancia entre sitios, fue propuesta por Shastry (Shastry, 1988) y por Haldane (Haldane, 1988), en el estudio de una cadena de Heisenberg de espines-1/2 antiferromagnética. Posteriormente, el espectro de una cadena de Heisenberg isotrópica S-1/2, fue resuelto en forma exacta usando esta misma interacción de largo alcance (Inozemtsev and Kuzemsky, 1991; Inozemtsev, 1995).

Los resultados que hemos presentado, aunque no son concluyentes, indicarían que una cadena de Heisenberg anisotrópica S-1/2 antiferromagnética, con interacciones de largo alcance, puede verse como un mecanismo óptimo de generación de squeezing.

6.5. Conclusiones.

Hemos extendido nuestros cálculos iniciados en trabajos anteriores para analizar la aparición y persistencia de squeezing atómico en un tipo generalizado de cadenas de Heisenberg con interacciones dependientes del sitio. Como resumen, en este trabajo se han reportado los resultados del cálculo del factor de squeezing, ζ^2 , en una cadena abierta de espines $S=1/2$ con interacciones periódicas e interacciones de largo alcance. Se ha investigado la dependencia de ζ^2 como función de:

- (i) la forma de las interacciones entre sitios de espín,
- (ii) el número de átomos en la cadena, y
- (iii) la condición inicial en la que se prepara el sistema.

Los resultados, en general, son dependientes de la condición inicial, que en este caso se ha tomado como un estado de espín coherente. Si bien el número de átomos para el que se han llevado a cabo los cálculos exactos es relativamente pequeño ($N \leq 11$), el tamaño del espacio de configuración es lo suficientemente grande para reflejar la tendencia principal de los resultados. Para el caso de un número grande de átomos se ha discutido el uso de la aproximación TDA, que resulta exacta en el subespacio de pares de hueco-partícula (en este caso cada par se corresponde con un espín de proyección $s_z = -1/2$ y uno con proyección $s_z = 1/2$). En este subespacio, los resultados muestran una saturación del valor del parámetro ζ^2 cuando $N \gg 1$. Dentro de estas limitaciones, podemos concluir diciendo que las cadenas de Heisenberg anisotrópicas, con interacciones antiferromagnéticas de largo alcance, pueden considerarse como posibles dispositivos óptimos en relación con la persistencia del squeezing del sistema de espines.

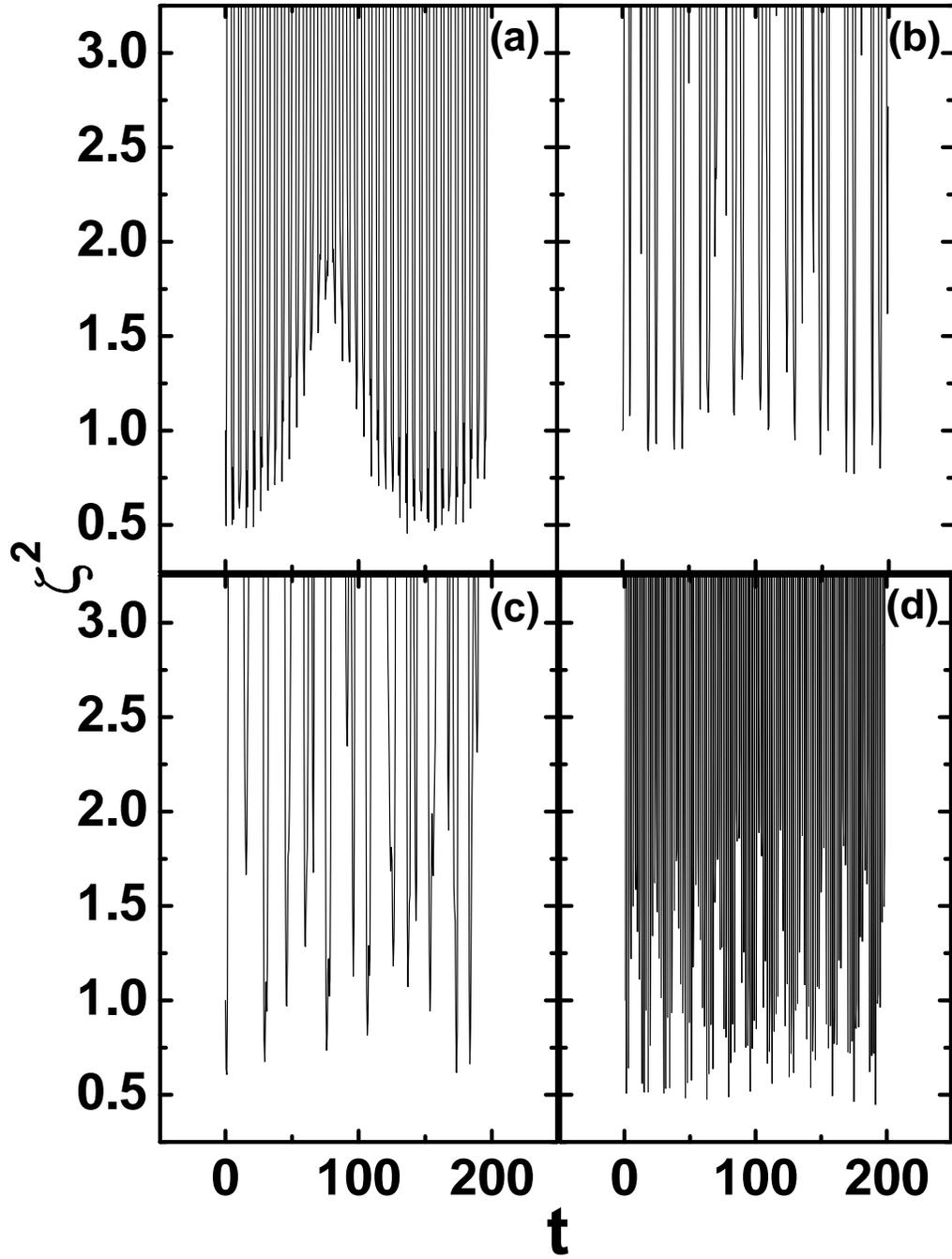


Figura 6.1: Dependencia temporal del factor de squeezing ζ^2 , para diferentes interacciones. En los gráficos (a)-(d), los resultados corresponden a los factores $g(i, j)$ de la Eq. (6.64). Los parámetros de la interacción se fijaron en los valores $\lambda_{\perp}=1$ y $\lambda_z=2$. El estado inicial es un estado coherente (6.10) con $\theta_0 = \pi/2$ y $\phi_0 = 0$. El tiempo está en unidades arbitrarias.

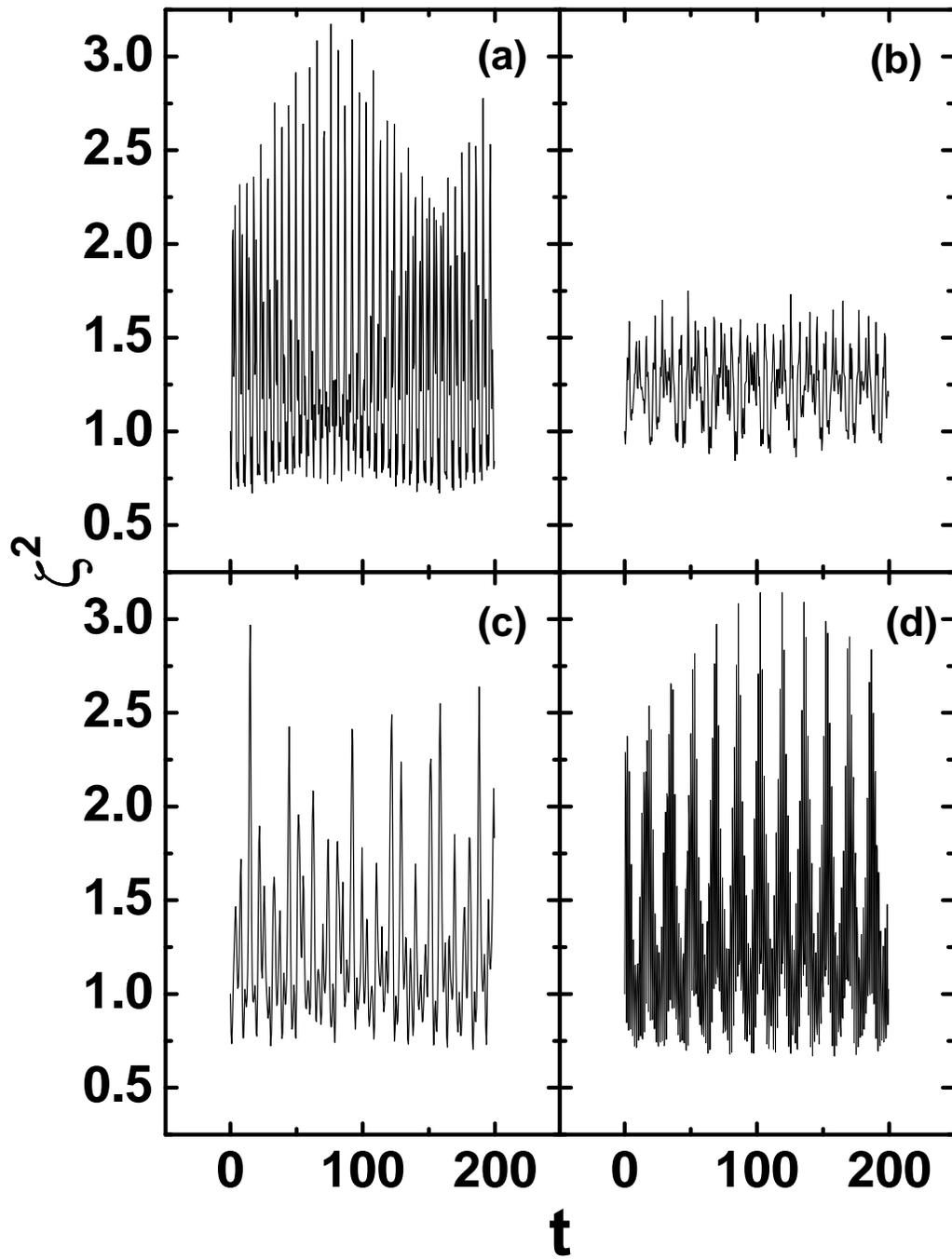


Figura 6.2: Idem Figura 6.1, para un estado inicial coherente con $\theta_0 = \pi/4$ y $\phi_0 = 0$.

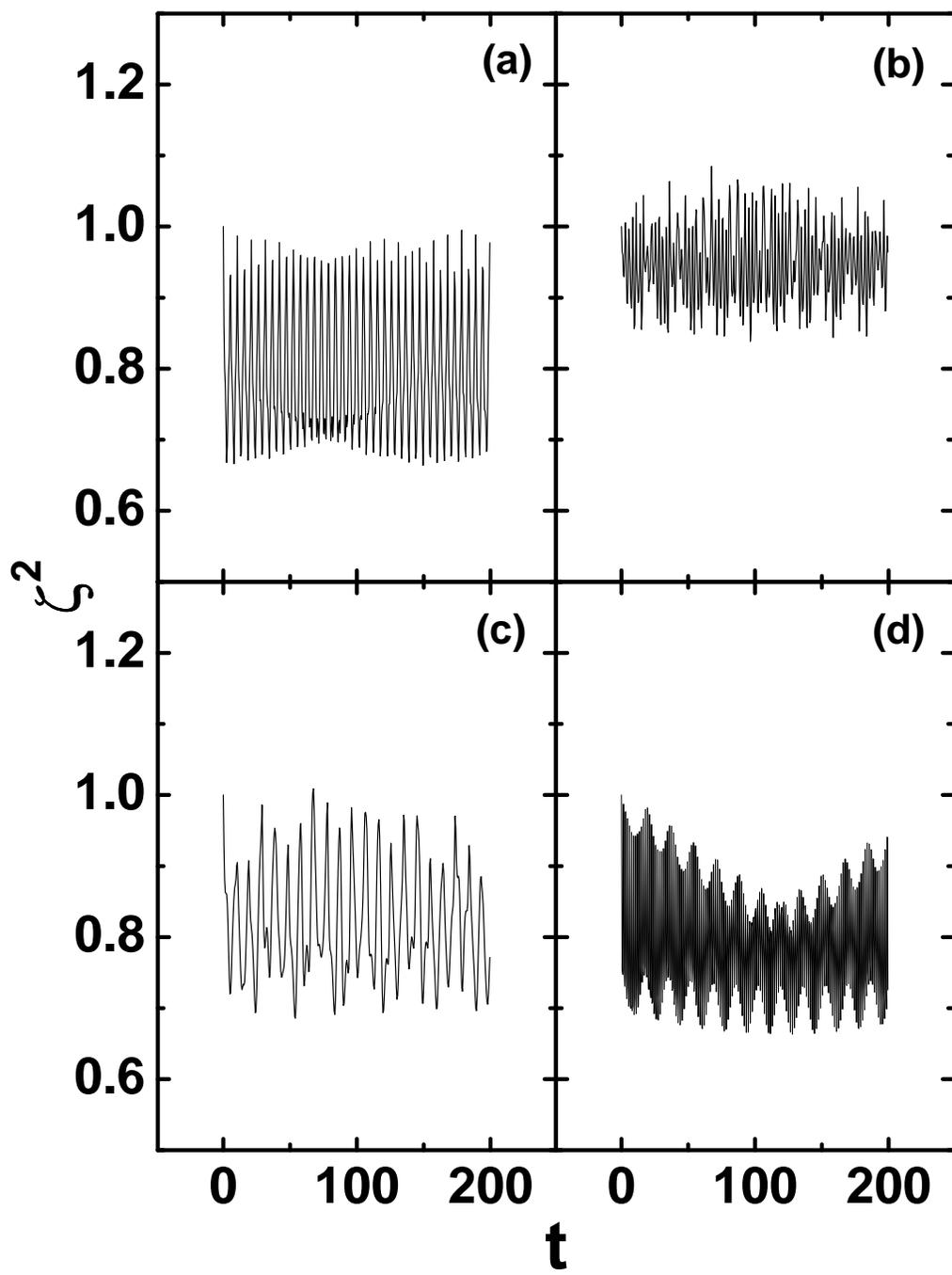


Figura 6.3: Idem Figura 6.1, para un estado inicial coherente con $\theta_0 = \pi/8$ y $\phi_0 = 0$.

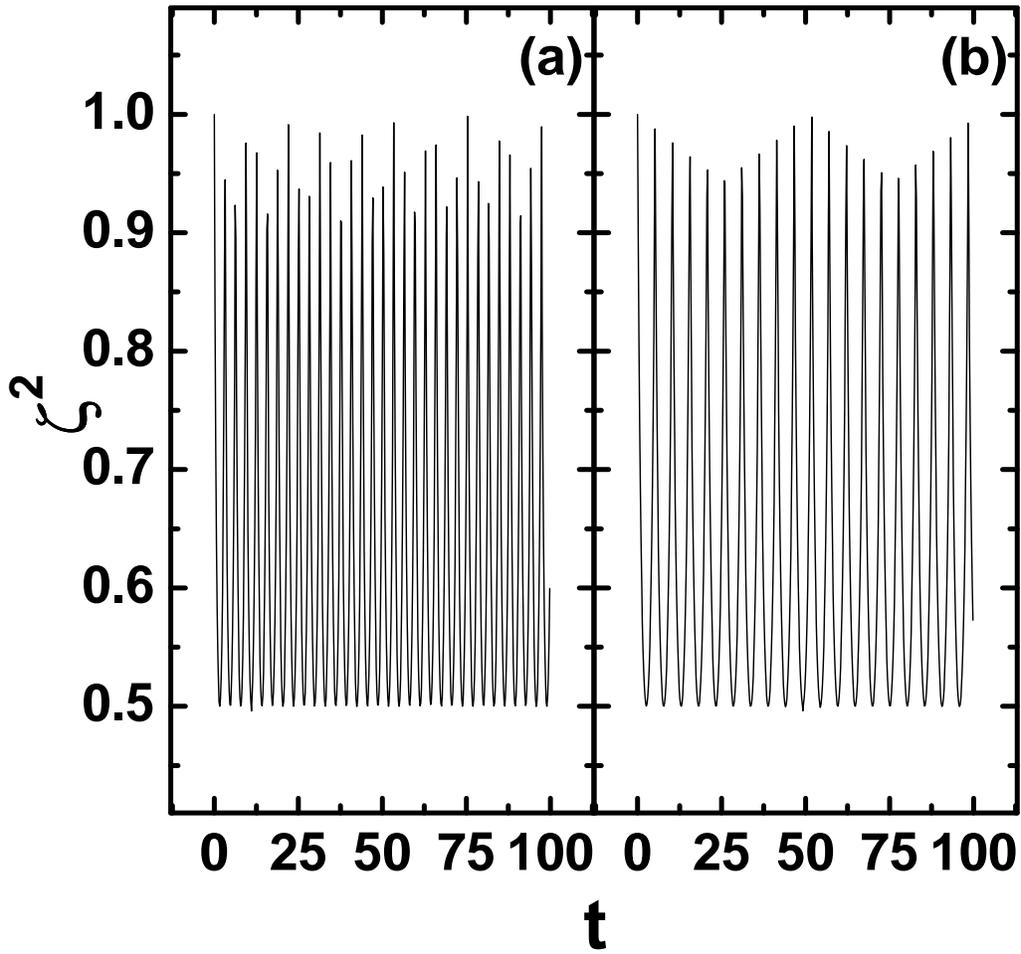


Figura 6.4: Dependencia temporal del factor de squeezing ζ^2 , para el caso $N = 2$, que corresponde a la Eq. (6.15) (gráfico (a)), y a la Eq. (6.18) (gráfico (b)). Las curvas se obtuvieron a partir de los autovalores y autovectores dados en la Eq. (6.11) y (6.17), respectivamente. El estado inicial es un estado coherente (6.10) con $\theta_0 = \pi/2$ y $\phi_0 = 0$.

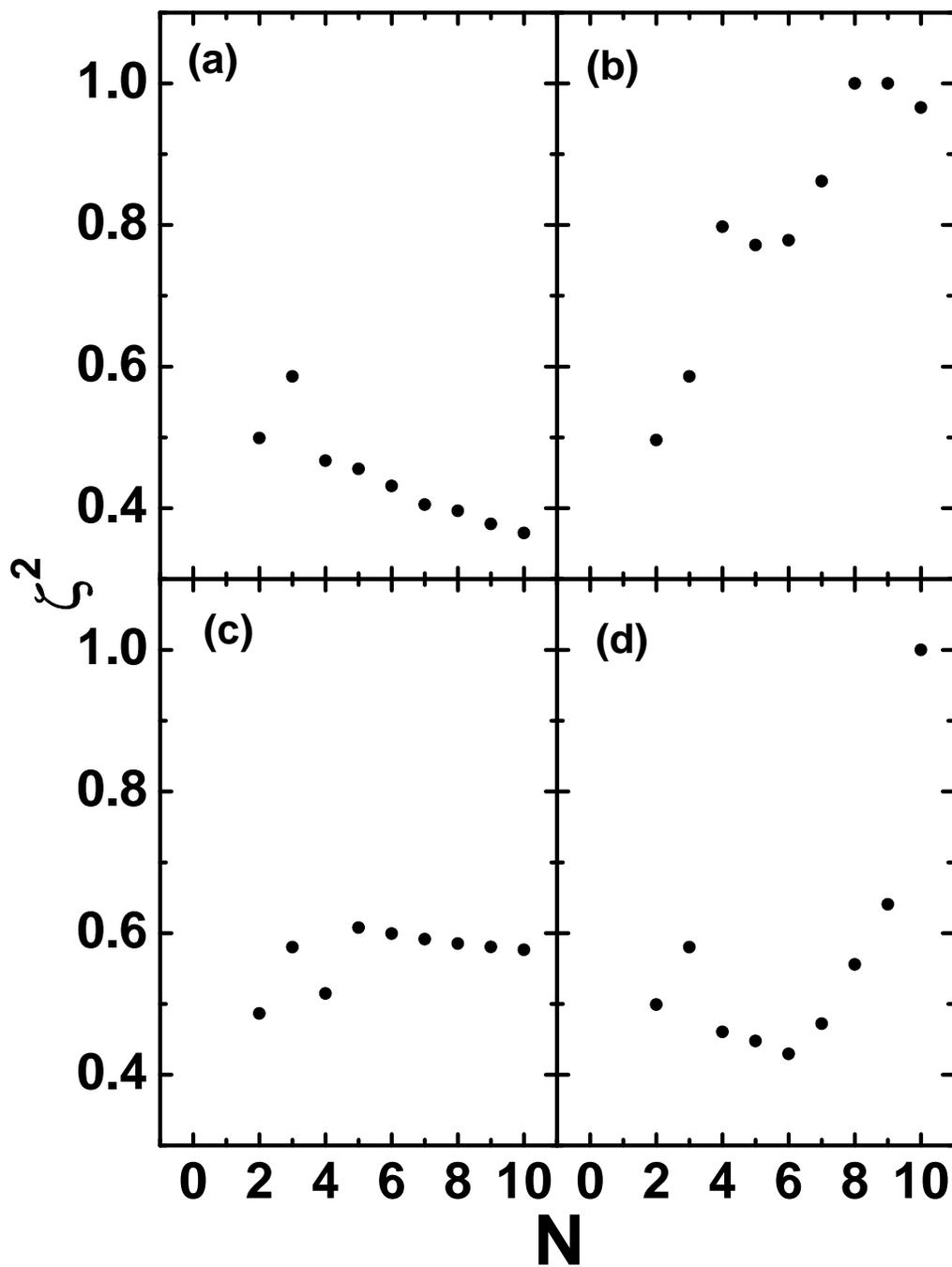


Figura 6.5: Valor mínimo del parámetro de squeezing ζ^2 , como función del número de átomos N , para diferentes interacciones espín-espín. En los gráficos (a)-(d), los resultados corresponden a los factores $g(i, j)$ de la Eq. (6.64). Los parámetros de la interacción se fijaron en los valores $\lambda_{\perp}=1$ y $\lambda_z=2$, y el estado inicial es un estado coherente (6.10) con $\theta_0 = \pi/2$ y $\phi_0 = 0$. Como se detalla en el texto, este valor mínimo se encuentra luego de estudiar la evolución temporal de ζ^2 en el intervalo $0 < t < 200$.

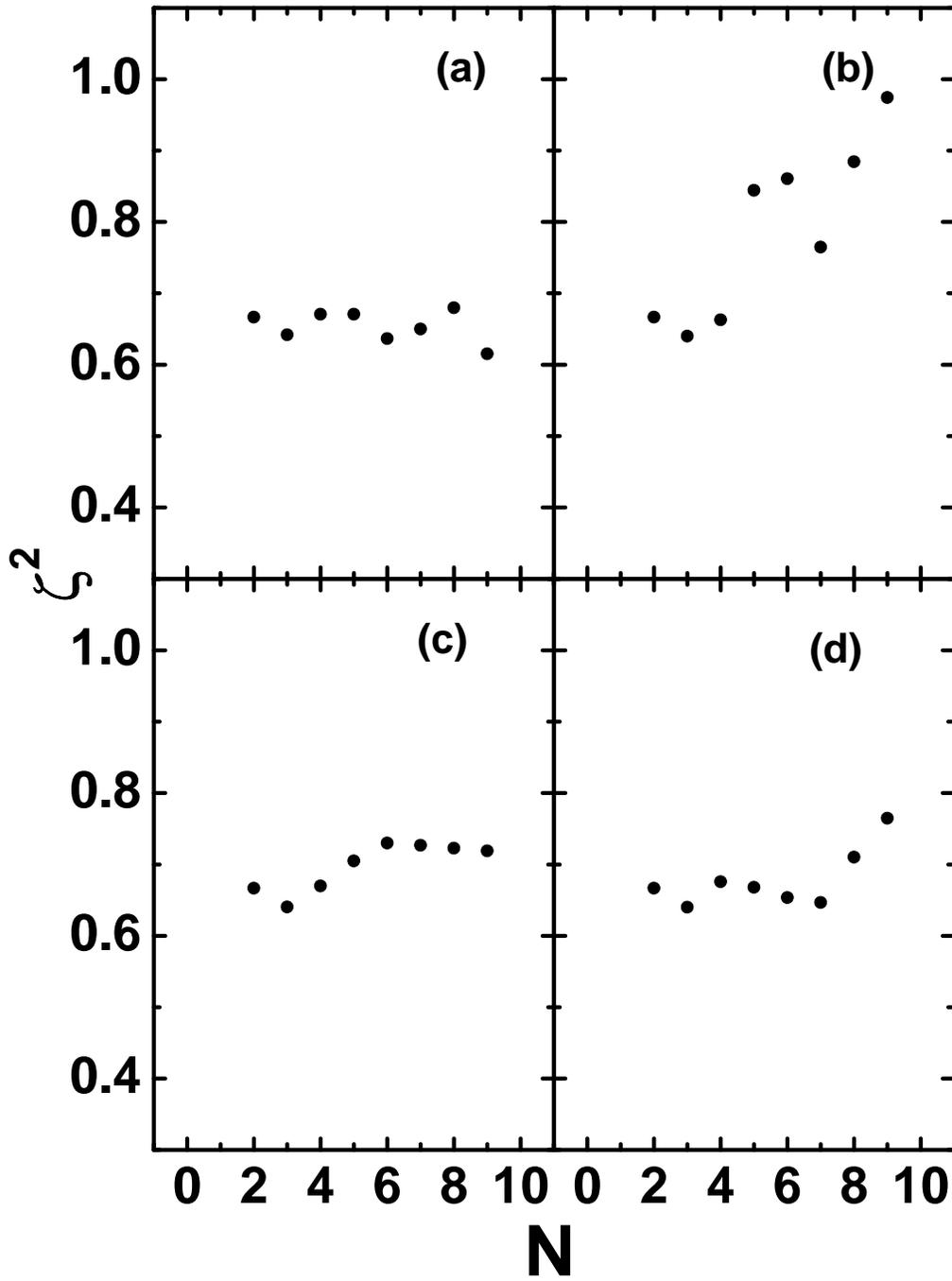


Figura 6.6: Idem Figura 6.5, para un estado inicial coherente con $\theta_0 = \pi/4$ y $\phi_0 = 0$.

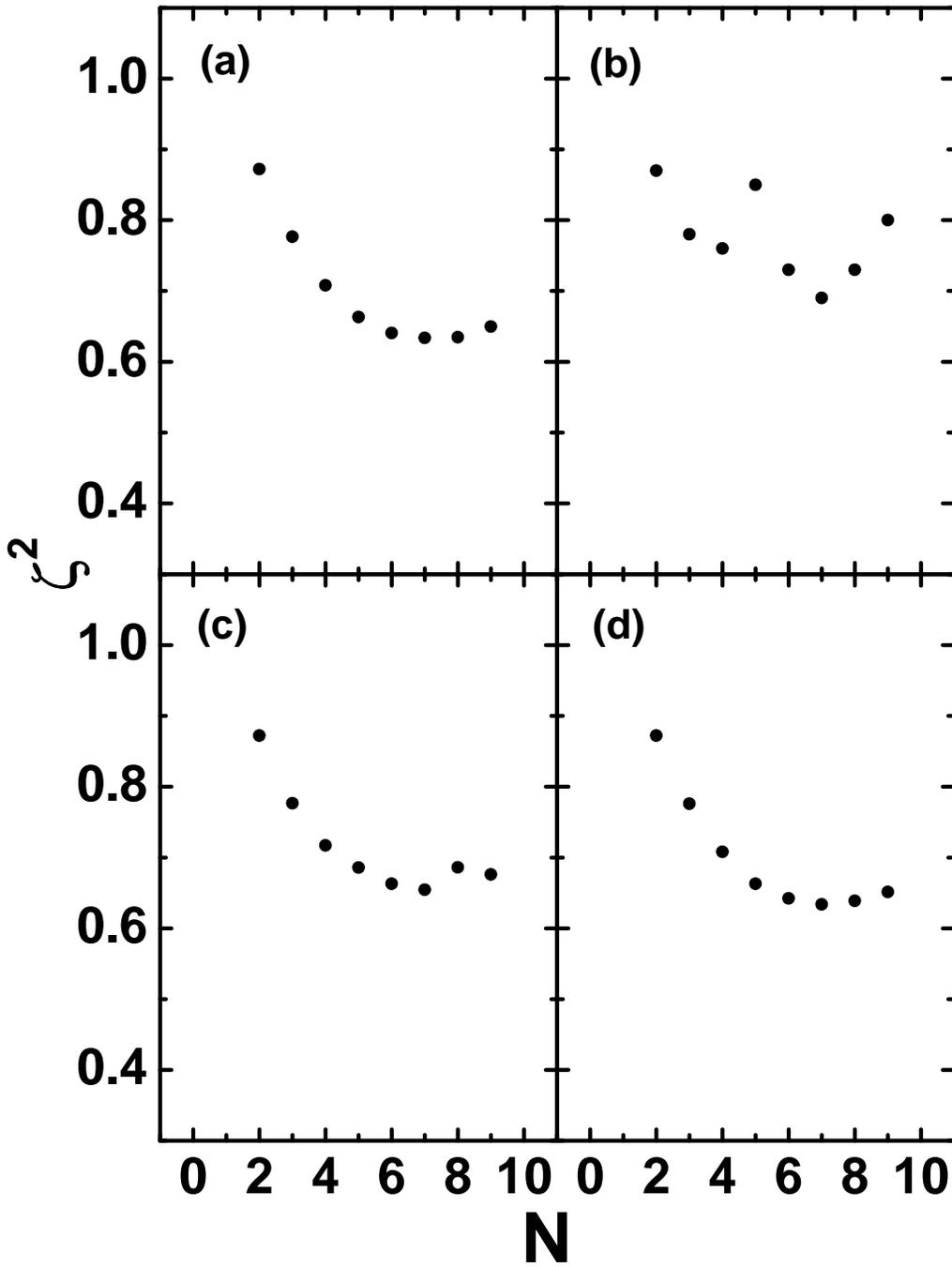


Figura 6.7: Idem Figura 6.5, para un estado inicial coherente con $\theta_0 = \pi/8$ y $\phi_0 = 0$.

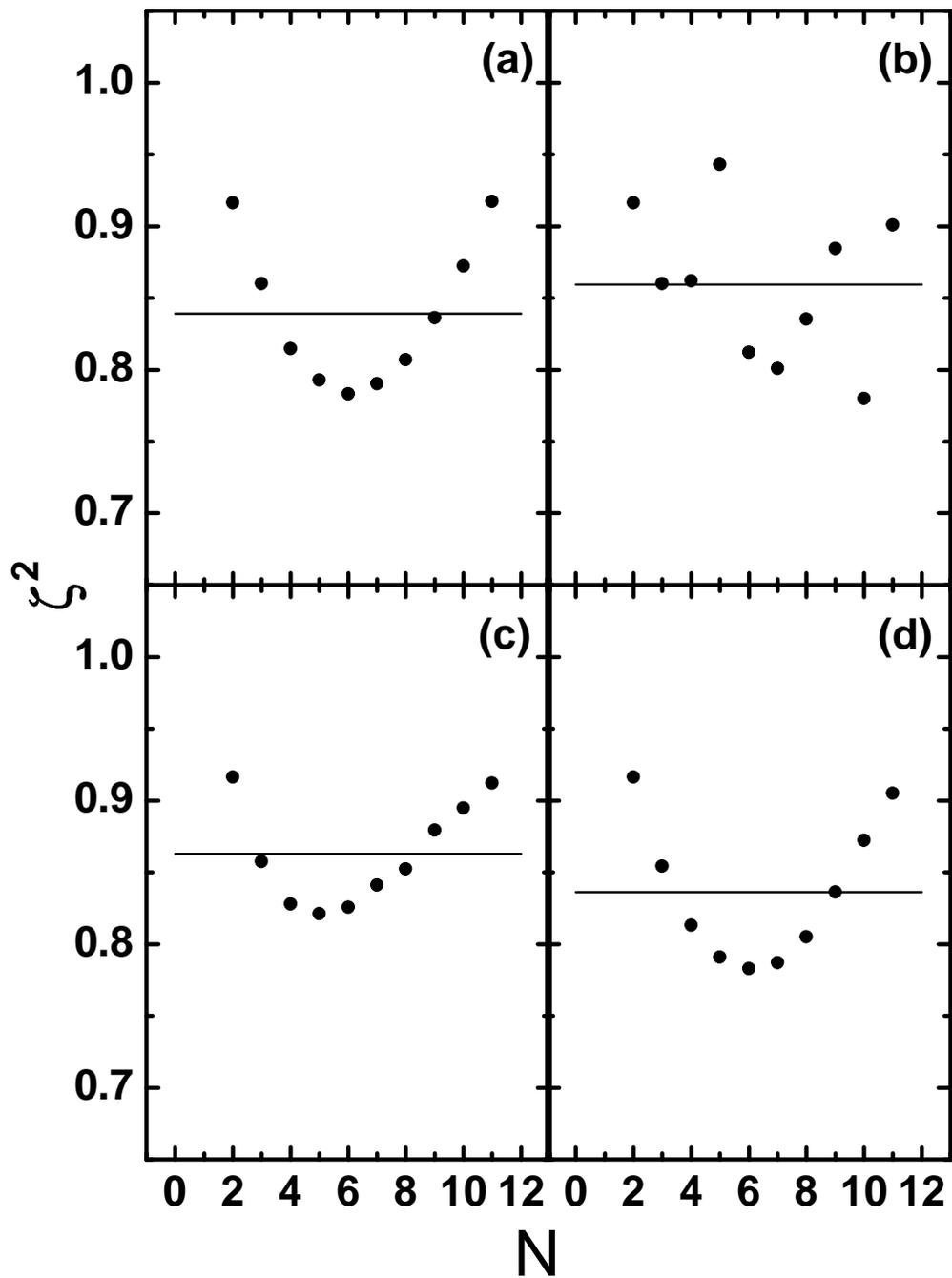


Figura 6.8: Valor promedio (puntos) del parámetro de squeezing ζ^2 como función del número de átomos en el intervalo de tiempo $0 < t < 1000$, para cada una de las interacciones discutidas en el texto. Los parámetros utilizados son los mismos de la Figura 6.7. La línea indica el valor medio para el conjunto de puntos y ayuda a una rápida comparación entre los efectos del uso de las distintas interacciones

Capítulo 7

Squeezing en Átomos de Tres Niveles

En este capítulo, se detalla nuestro trabajo (Civitarese et al., 2008), a cerca de la transferencia de espín entre un campo de radiación y un sistema atómico compuesto por átomos con tres niveles activos. La evolución temporal de la población de niveles, calculada a partir de las soluciones del modelo propuesto, muestra que la utilización de estados coherentes fotónicos, no garantiza la óptima transferencia de espín bajo las condiciones de squeezing.

7.1. Introducción.

El estudio de sistemas de espines como laboratorios para los efectos mecánico-cuánticos, fue ampliamente impulsado debido a la posibilidad de utilizar espines elementales como unidad de información en computación cuántica. Al mismo tiempo, el campo de la óptica cuántica también ha sido observado en conexión con dichos sistemas de espines. En este sentido, existe un gran interés en acoplar átomos con luz, y se han reportado trabajos exitosos al respecto (Furusawa and Takei, 2007; Yonezawa et al., 2007; Romero-Isart et al., 2007). Varias propuestas se han presentado para utilizar este tipo de acoplamiento para la generación de squeezing atómico (Kuzmich and Polzik, 2003; de Echaniz et al., 2008). Generalmente hablando, la interacción

entre luz y espines o pseudoespines localizados, como son los niveles atómicos, provoca un cambio en el número de átomos que ocupa cada nivel atómico permitido, y este cambio en la población de niveles atómicos puede ser interpretado mediante la acción de los operadores escalera para el espín del sistema ¹. En este sentido, es que se dice que la interacción provoca una transferencia del espín entre el campo electromagnético y los átomos (Genes et al., 2003; Romero-Isart et al., 2007; Lyakhov et al., 2007; Rabl and Zoller, 2007). Como consecuencia, ocurren desviaciones en los valores esperados de los observables de espín, en comparación con los valores dados por las relaciones de incerteza y de conmutación estándar (Walls and Zoller, 1981; Kitagawa and Ueda, 1993; Prakash and Kumar, 2005).

Las condiciones bajo las cuales tiene lugar el fenómeno de squeezing atómico via el acoplamiento con el campo, es decir, la transferencia de información cuántica entre estados atómicos y campos láser, han estado bajo investigación, tanto teórica como experimental (de Echaniz et al., 2005). Una revisión general del tema puede verse en (Drummond and Ficek, 2004).

El squeezing en campos electromagnéticos cuantizados, ha recibido constante atención desde la aparición de las primeras publicaciones, hace más de 20 años (Walls, 1983; Friberg et al., 1985). La Referencia (Rangel et al., 2005) describe la generación de squeezing y la presencia de revivals en un sistema ion-cavidad en contacto con un reservorio. En este trabajo, el sistema analizado consiste de un único ion con dos niveles en una trampa armónica, a temperatura cero y expuesto a la acción de dos láser externos.

En la Ref. (Rubín-Linares and Moya-Cessa, 2005) se propone un esquema simple para medir el squeezing y las propiedades de fase de un oscilador armónico. El trabajo de Poulsen and Mølmer (Poulsen and Mølmer, 2001) muestra que bajo condiciones adecuadas, la información cuántica de estados colectivos, puede transmitirse a un pulso de luz.

El squeezing atómico bajo emisión colectiva, es decir, para el caso de grandes sistemas de átomos radiantes, fue estudiada por V. I. Yukalov y E. P. Yukalova en la

¹Este formalismo de álgebras de pseudoespín se ha desarrollado en el Capítulo 1.

Ref. (Yukalov and Yukalova, 2004). En el mismo se sugiere un método para gobernar el comportamiento con el tiempo del factor de squeezing.

Las propiedades de entrelazamiento y squeezing del espín para tres bosones en dos modos se han discutido en la Ref. (Zeng et al., 2005). Los aspectos teóricos y experimentales del entrelazamiento y el squeezing en un sistema de dos modos están presentados en (Josse et al., 2004). El estudio del squeezing del espín en estados de espín coherentes no lineales se pueden encontrar en (Wang, 2001). En la Ref. (Rojo, 2003) se han estudiado estados de espín máximamente comprimidos.

En la Ref. (Wang and Sanders, 2003) se estudia la relación entre las cuadraturas bosónicas y los estados atómicos comprimidos en el espín. La transferencia del espín entre fotones y átomos se ha examinado usando un Hamiltoniano de Dicke (Dicke, 1954). Bajo las condiciones del modelo, y en el límite de un gran número de átomos en el sistema, se observa una transferencia perfecta (Wang and Sanders, 2003).

El squeezing del espín via interacciones átomo-campo ha sido considerado en el contexto del modelo de Tavis-Cummings (Jaynes and Cummings, 1963; Buley and Cummings, 1964; Cummings, 1965; Tavis and Cummings, 1968) en la Ref. (Genes et al., 2003). En el trabajo correspondiente a la referencia (Genes et al., 2003), se describe un conjunto de N átomos de dos niveles interactuando con un campo cuantizado en una cavidad.

La característica común a todos los modelos teóricos introducidos en las referencias anteriores, es la presencia de interacción entre niveles atómicos y fotones. La estructura general de los Hamiltonianos que incluyen tales tipos de interacciones pertenecen a la familia de los acoplamientos presentados en Marshalek y Klein en la Ref. (Klein and Marshalek, 1991). Estas formas se presentan como factibles de ser tratadas mediante expansiones bosónicas y/o mapeos bosónicos exactos (Civitarese and Reboiro, 1998; Civitarese and Reboiro, 1999), como un método alternativo a la diagonalización exacta. Las técnicas de mapeos bosónicos permiten la generalización de interacciones simples, tales como las que aparecen en el Hamiltoniano de Dicke (Dicke, 1954) o en el Hamiltoniano de Tavis-Cummings (Jaynes and Cummings, 1963; Buley and Cummings, 1964; Cummings, 1965; Tavis and Cummings, 1968).

El esquema comúnmente adoptado a la hora de tratar átomos de dos niveles en interacción con un campo de radiación, ha sido extendido por Z. Ficek and P. D. Drummond (Ficek and Drummond, 1991a; Ficek and Drummond, 1991b) y por J. Javanainen y P. L. Gould (Javanainen and Gould, 1990), para considerar el squeezing en el caso de un átomo con tres niveles.

En este trabajo hemos considerado:

- (a) un sistema de átomos con tres niveles accesibles interactuando con fotones.

La condición inicial del sistema ha sido modelada a partir de:

- (b) estados coherentes para describir el campo electromagnético.

Con respecto al punto (a) se presentan los detalles algebraicos necesarios para construir la solución exacta del Hamiltoniano que describe las excitaciones atómicas en un sistema de A átomos con tres niveles inducidas por la absorción o emisión de fotones. Relativo al punto (b), estudiamos la dependencia de las soluciones con respecto al número medio de fotones en el estado inicial. Los detalles del formalismo se presentan en la Sección 7.2. Algunos aspectos de este formalismo utilizado ya han sido descritos en los trabajos que se comentan en los Capítulos 5 y 6. El objetivo ha sido investigar la posibilidad de generar squeezing atómico mediante la interacción de los átomos con el campo electromagnético.

La presencia de squeezing en el sistema se analiza numéricamente en la Sección 7.3, donde se presentan y discuten los resultados obtenidos para distintos valores de los parámetros del modelo y diferentes condiciones iniciales. La evolución temporal del squeezing atómico y del campo se muestran en la Sección 7.3. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 7.4.

7.2. Formalismo

El sistema a tratar consiste de A átomos idénticos, cada uno con tres niveles de energía accesibles, con una configuración en cascada (Fig. 1.7). El sistema atómico

se encuentra en interacción con un campo de radiación (Sección 1.2). Tanto átomos como fotones se encuentran en el interior de una cavidad electromagnética.

Los operadores de creación (aniquilación) para el nivel atómico i -ésimo ($i = 0, 1, 2$), se indican por $b_i^\dagger(b_i)$. Estos operadores, obedecen relaciones de conmutación bosónicas.

El Hamiltoniano del sistema está dado por

$$H = \omega a^\dagger a + \sum_i E_i S^{ii} + g_1 (a S_+^{01} + a^\dagger S_-^{01}) + g_2 (a S_+^{12} + a^\dagger S_-^{12}). \quad (7.1)$$

Los operadores $S_+^{ij}, S_-^{ij}, S_z^{ij}$ para $i \neq j$ generan la representación simétrica de dimensión $(A+1)(A+2)/2$ del álgebra $su(3)$, siendo S_\pm^{ij} los operadores de transición atómicos y $S_z^{ij} = \frac{1}{2}(S^{jj} - S^{ii})$ los operadores de inversión.

En la expresión para H de la Eq. (7.1), ω es la energía del fotón, es decir del modo del campo electromagnético, $a^\dagger(a)$ es el operador de creación (aniquilación) de un fotón, E_i es la energía del i -ésimo nivel atómico, y g_1 y g_2 son las constantes de acoplamiento que describen la absorción (emisión) de un fotón en presencia de una excitación (desexcitación) atómica entre los niveles 0 y 1 (término proporcional a g_1), y entre los niveles 1 y 2 (término proporcional a g_2).

La condición de resonancia para el caso de dos fotones (Klimov et al., 1999) se satisface al fijar las energías de los niveles atómicos E_i de modo que

$$E_2 - E_0 = 2\omega, \quad E_1 - E_0 = \omega - \Delta. \quad (7.2)$$

7.2.1. Solución Exacta.

El operador

$$\hat{L} = a^\dagger a + 2S_z^{02}, \quad (7.3)$$

conmuta con el Hamiltoniano de la Eq. (7.1), y por lo tanto, este último puede ser diagonalizado en la base de estados

$$|n_b n_0 n_1 n_2\rangle = N_{n_b, n_0 n_1 n_2} a^{\dagger n_b} b_0^{\dagger n_0} b_1^{\dagger n_1} b_2^{\dagger n_2} |0\rangle, \quad (7.4)$$

debiendo imponerse las restricciones

$$\begin{aligned} n_0 + n_1 + n_2 &= A, \\ n_2 - n_0 + n_b &= L, \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde A es el número de átomos, y L es la suma del número de fotones n_b , y la diferencia $n_2 - n_0$ entre la población de los estados atómicos $i = 2$ e $i = 0$. N_{n_b, n_0, n_1, n_2} es la constante de normalización.

La diagonalización de H arroja un conjunto de autovalores E_α , y autovectores

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_{a \equiv \{n_b, n_0, n_1, n_2\}} c_\alpha(a) |a\rangle. \quad (7.6)$$

Para un cierto número de átomos A en el sistema, la matriz Hamiltoniana es una matriz en bloques, donde cada bloque corresponde a un cierto valor del número cuántico L . En cada uno de estos bloques la diagonalización es factible. Sin embargo, a medida que el valor de L se incrementa aumenta la dimensión de la submatriz correspondiente, y el proceso de diagonalización se vuelve irrealizable dimensionalmente. A los efectos de poder llevar adelante los cálculos de nuestro interés, la dimensión del espacio de configuraciones se toma como el mayor valor de L para el cual es factible la diagonalización exacta, y este valor se fija analizando la estabilidad de la función de onda al incrementarse el valor de L .

Recurriendo al uso de los autovectores de H , la dependencia temporal del valor esperado para un cierto operador \hat{O} , en un estado arbitrario $|\phi(t)\rangle$ puede escribirse como

$$\langle \phi(t) | \hat{O} | \phi(t) \rangle = \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha, \beta}(t) \langle \Psi_\alpha | \hat{O} | \Psi_\beta \rangle. \quad (7.7)$$

En esta expresión, $D_{\alpha, \beta}(t)$ es el elemento de matriz

$$D_{\alpha, \beta}(t) = \langle \phi(t) | \Psi_\alpha \rangle \langle \Psi_\beta | \phi(t) \rangle, \quad (7.8)$$

que depende de la condición inicial al tiempo $t = 0$, $|\phi(0)\rangle$, mediante

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\phi(0)\rangle. \quad (7.9)$$

7.2.2. Parámetro de Squeezing

Diferentes definiciones para el parámetro de squeezing atómico han sido utilizadas dependiendo del contexto (Kitagawa and Ueda, 1993; Wineland et al., 1992; Raghavan et al., 2001; Prakash and Kumar, 2005). En todos los casos, este refleja la disminución parcial en las fluctuaciones de una de las componentes del espín a expensas del incremento en otra de las componentes, mientras se preserva el valor mínimo del producto de incerteza entre ambas.

Para un par de operadores arbitrarios \hat{R} y \hat{S} , la cantidad

$$\begin{aligned} Q(R, S) &= \frac{2(\Delta\hat{R})^2}{|\langle \phi(t) | [\hat{R}, \hat{S}] | \phi(t) \rangle|}, \\ (\Delta\hat{R})^2 &= \langle \phi(t) | \hat{R}^2 | \phi(t) \rangle - \langle \phi(t) | \hat{R} | \phi(t) \rangle^2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

es la medida estándar para el squeezing del operador \hat{R} con respecto al operador \hat{S} (Drummond and Ficek, 2004; Cerf et al., 2007). Con esta definición, el factor de squeezing para los operadores del campo es de la forma

$$\begin{aligned} Q(q, p) &= 2(\Delta\hat{q})^2 \\ Q(p, q) &= 2(\Delta\hat{p})^2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Diremos que una de las cuadraturas del campo está comprimida respecto de la otra cuando el correspondiente factor de squeezing sea < 1 , consistentemente con (2.43).

Si estamos interesados en la identificación de sistemas para los que el cambio en la población de niveles atómicos puede determinarse con precisión, debemos intentar minimizar las fluctuaciones cuánticas de los operadores de inversión. Por ejemplo, como una medida de la inversión población del estado fundamental al segundo nivel excitado ($n_2 - n_0$), se debe analizar la evolución temporal del factor

$$Q(\hat{S}_z, \hat{S}_+) = \frac{2(\Delta\hat{S}_z)^2}{|\langle \hat{S}_+ \rangle|}, \quad (7.12)$$

donde $\hat{S}_z \equiv \hat{S}_z^{02}$ y $\hat{S}_+ \equiv \hat{S}_+^{02}$. Una definición similar para el factor de squeezing atómico puede encontrarse en (Prakash and Kumar, 2005), en donde se discute el squeezing simultáneo de *dos* componentes de espín perpendiculares entre sí.

7.2.3. El caso de un único átomo.

En esta sección se presentan los resultados analíticos para el caso $A = 1$. La diagonalización del Hamiltoniano de la Eq. (7.1) arroja el siguiente conjunto de autovalores λ_α y autovectores $|\Psi_\alpha\rangle$, con $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L) &= \omega (n_b - 1), \\
|\Psi_1(L)\rangle &= \mathcal{N}_1(-g_2\sqrt{n_b - 1}|a\rangle + g_1\sqrt{n_b}|c\rangle), \\
\lambda_2(L) &= \omega (n_b - 1) - \delta - r(n_b), \\
|\Psi_2(L)\rangle &= \mathcal{N}_2(g_1\sqrt{n_b}|a\rangle - (r(n_b) + \delta)|b\rangle \\
&\quad + g_2\sqrt{n_b - 1}|c\rangle), \\
\lambda_3(L) &= \omega (n_b - 1) - \delta + r(n_b), \\
|\Psi_3(L)\rangle &= \mathcal{N}_3(g_1\sqrt{n_b}|a\rangle + (r(n_b) - \delta)|b\rangle \\
&\quad + g_2\sqrt{n_b - 1}|c\rangle),
\end{aligned} \tag{7.13}$$

con

$$\begin{aligned}
|a\rangle &= |n_b, 1, 0, 0\rangle, \\
|b\rangle &= |n_b - 1, 0, 1, 0\rangle, \\
|c\rangle &= |n_b - 2, 0, 0, 1\rangle,
\end{aligned} \tag{7.14}$$

y

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\Delta}{2}, \\
r(n_b) &= \sqrt{g_1^2 n_b + g_2^2 (n_b - 1) + \delta^2}, \\
\mathcal{N}_1 &= \frac{1}{\sqrt{r(n_b)^2 - \delta^2}}, \\
\mathcal{N}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\delta}{r(n_b)}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r(n_b)^2 - \delta^2}}, \\
\mathcal{N}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\delta}{r(n_b)}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r(n_b)^2 - \delta^2}},
\end{aligned}$$

(7.15)

para cada uno de los subespacios rotulados por un valor dado de $L = n_b + n_2 - n_0$. Para un número variable de fotones, cada subespacio de soluciones está rotulado por éste número cuántico L . La matriz de la Eq. (7.8) está determinada por la condición inicial $|\phi(0)\rangle$. Tomaremos como condición inicial al único átomo del sistema en su estado fundamental, y un estado de Fock de n_b fotones

$$|\phi(0)\rangle = |n_b, 1, 0, 0\rangle, \quad (7.16)$$

Entonces, para $L = n_b - 1$

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta} &= d_\alpha^* d_\beta, \\ d_\alpha &= c_\alpha^*(n_b, 1, 0, 0) e^{-i \lambda_\alpha(N) t/\hbar}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Para calcular el squeezing atómico es necesario calcular la evolución temporal del operador escalera S_+^{02} , y de S_z^{02}

$$\begin{aligned} \langle S_z(n_b, t) \rangle &= \langle \phi(t) | S_z^{02} | \phi(t) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{g_1^2 n_b}{r(n_b)^2} \sin^2(r(n_b)t) + \\ &= \frac{g_1^2 g_2^2 n_b (n_b - 1)}{(r(n_b)^2 - \delta^2)^2} \left((\cos(r(n_b)t) - \cos(\delta t))^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\delta}{r(n_b)} \sin(r(n_b)t) - \sin(\delta t) \right)^2 \right) \\ \langle S_z^2(n_b, t) \rangle &= \langle \phi(t) | (S_z^{02})^2 | \phi(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{g_1^2 n_b}{r(n_b)^2} \sin^2(r(n_b)t) \right), \\ \langle S_+(t) \rangle &= \langle \phi(t) | S_+^{02} | \phi(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

En función a las expresiones anteriores, para esta condición inicial, no hay manifestación del squeezing atómico, sin importar cuantos fotones o niveles atómicos se incluyan, ya que el denominador en (7.12) se anula exactamente.

Para el caso de un estado fotónico coherente (2.9), las expresiones anteriores se ven modificadas para dar

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta} &= d_{\alpha}^* d_{\beta}, \\ d_{\alpha} &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} c_{\alpha}^*(k, 1, 0, 0) e^{-i \lambda_{\alpha}(k-1) t/\hbar}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

donde $|z|^2 = n_b$ es el valor medio del número de fotones en el estado coherente. En este caso

$$\begin{aligned} \langle S_z(t) \rangle &= e^{-n_b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_b^k}{k!} \langle S_z(k, t) \rangle, \\ \langle S_z^2(t) \rangle &= e^{-n_b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_b^k}{k!} \langle S_z^2(k, t) \rangle, \\ \langle S_+(t) \rangle &= e^{-n_b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_b^{k+1}}{k!} f_0(k) (a(k) + ib(k)) \end{aligned} \quad (7.20)$$

con

$$\begin{aligned} a(n) &= (g_2^2 (n-2) + g_1^2 (n-1)) f_1(n+1) + \\ &\quad g_1^2 (n-1) (f_2(n-1) f_2(n+1) + f_2(n-1) f_2(n+1)), \\ b(n) &= g_1^2 (n-1) (f_1(n-1) f_2(n+1) - f_2(n-1) f_1(n+1)), \end{aligned} \quad (7.21)$$

y

$$\begin{aligned} f_0(n) &= \frac{g_1 g_2 \sqrt{(n+2)(n+1)} e^{2i\omega t/\hbar}}{(g_1^2(n+2) + g_2^2(n+1))(g_1^2 n + g_2^2(n-1))}, \\ f_1(n) &= \cos(\delta t) \cos(r(n)t) + \frac{\delta}{r(n)} \sin(\delta t) \sin(r(n)t) - 1, \\ f_2(n) &= -\sin(\delta t) \cos(r(n)t) + \frac{\delta}{r(n)} \cos(\delta t) \sin(r(n)t). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Como se puede ver de la Eq.(7.20), la contribución de estados con diferente valores de L , es una condición necesaria para la aparición de squeezing atómico. Nótese

que, para esta condición inicial, la evolución temporal del operador escalera (7.20) no se anula. Ésto significa, que dependiendo de los valores de las constantes de acoplamiento en H , puede haber squeezing, es decir que $Q(S_z, S_+) \leq 1$. Resultados similares se reportan en (Genes et al., 2003), para un sistema de átomos de dos niveles interactuando con un único modo bosónico en una cavidad.

7.3. Resultados y Discusión.

Presentamos los resultados obtenidos del comportamiento del sistema descrito en la Sección 7.2.1. Hemos realizado la diagonalización exacta de la matriz Hamiltoniana en la base (7.14), en forma numérica, obtenido la matriz densidad de la Eq. (7.8) para cada subespacio A, L , y calculado la evolución temporal de los operadores de interés. El espaciamento de energía entre niveles atómicos queda fijado por las relaciones en la Eq. (7.2), con la elección $\Delta = 0$, y por lo tanto $E_0 = -\omega$, $E_1 = 0$, $E_2 = \omega$. En todos los casos hemos tomado estados coherente en el sector de fotones para describir el estado inicial del sistema.

Se consideraron diferentes constantes de acoplamiento para el Hamiltoniano de la ecuación (7.1), teniendo en cuenta parametrizaciones simétricas, $g_1 = g_2$, y no simétricas, $g_1 \neq g_2$. El valor medio del número de fotones en el estado coherente, $|z|^2$, se tomó como una variable del problema. Los cálculos numéricos se realizaron para $A = 1$, $A = 3$, $A = 6$, $A = 15$ y $A = 18$ átomos, respectivamente. El caso con $A = 1$ puede ser resuelto en forma analítica, como mostramos en la Sección 7.2.3

En las Figuras 7.1 - 7.3, mostramos los resultados obtenidos para la evolución temporal del operador de inversión atómico, $\langle S_z(t) \rangle$, el squeezing atómico, $Q(S_z, S_+)$, y el squeezing del campo, $Q(x, p)$. La condición inicial consiste de A átomos en el estado fundamental ($n_0 = A$), mientras que el parámetro $|z|^2$ del estado coherente de fotones está fijo en el valor $n_b = 10$.

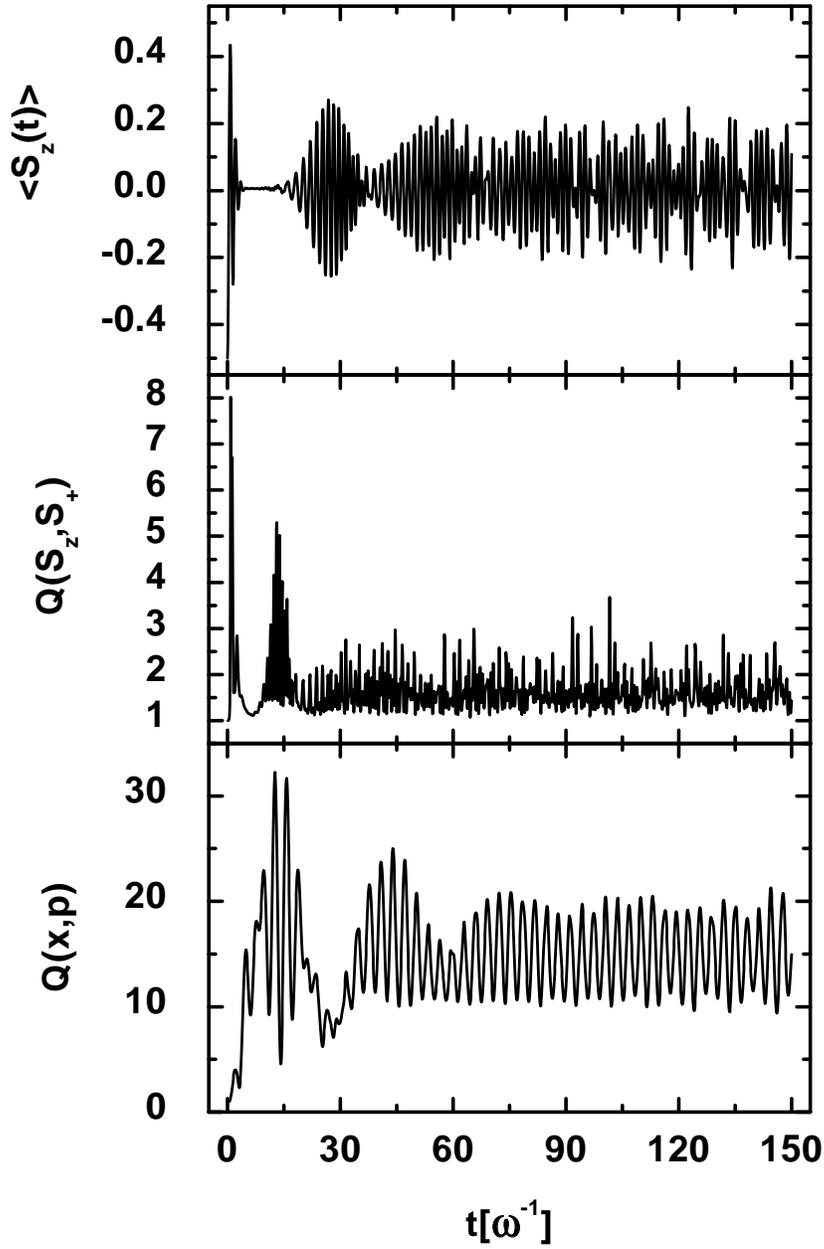


Figura 7.1: Valor medio del operador de inversión, $\langle S_z(t) \rangle$, squeezing atómico, $Q(S_z, S_+)$, y squeezing del campo, $Q(x, p)$, como funciones del tiempo. El sistema consta de un átomo, inicialmente en su estado fundamental, y un campo fotónico coherente, con un número medio de fotones $n_b = 10$. Las constantes de acoplamiento se fijaron en los valores $g_1 = 1$ y $g_2 = 1$.

La Figura 7.1 muestra los resultados para $A = 1$, $g_1 = g_2 = 1$ y $n_b = 10$. No hay ningún indicio de squeezing, a pesar del uso de un estado coherente en el sector fotónico. Este resultado puede compararse con los encontrados en (Genes et al., 2003), donde se muestra que en el caso de átomos con dos niveles, la utilización de un estado coherente de fotones, no es condición suficiente para la obtención de squeezing atómico. De esta manera vemos que, para $g_1 = g_2$, tres niveles atómicos, un único átomo en el sistema, y un estado coherente de fotones, no hay squeezing atómico.

En la Figura 7.2 se muestran los resultados obtenidos, también para un único átomo inicialmente en su estado fundamental, pero con una parametrización asimétrica, $g_1 = 1$, $g_2 = 4$, para las constantes de acoplamiento. Esta elección en el valor de las constantes se ha hecho con el fin de inspeccionar el comportamiento del sistema cuando $g_2 > g_1$, ya que en el caso simétrico no se obtiene ningún indicio de squeezing atómico. El caso asimétrico *si* exhibe squeezing. El valor central del squeezing atómico $Q(S_z, S_+)$, se encuentra en el rango de valores 0.75-0.80. Dicho comportamiento persiste cuando el número de átomos se ve incrementado. Como contrapartida, al estudiar el régimen $g_1 > g_2$, hemos observado que no es posible obtener una reducción en las fluctuaciones para la componente S_z del espín atómico con respecto al operador de transferencia S_+ . A modo ilustrativo, en la Figura 7.3 se muestra el comportamiento en el tiempo del squeezing atómico $Q(S_z, S_+)$ cuando el estado inicial del sistema es el mismo que en las Figs. 7.1 y 7.2, y los valores de las constantes de acoplamiento se han fijado en los valores $g_1 = 1$, $g_2=0.6$.

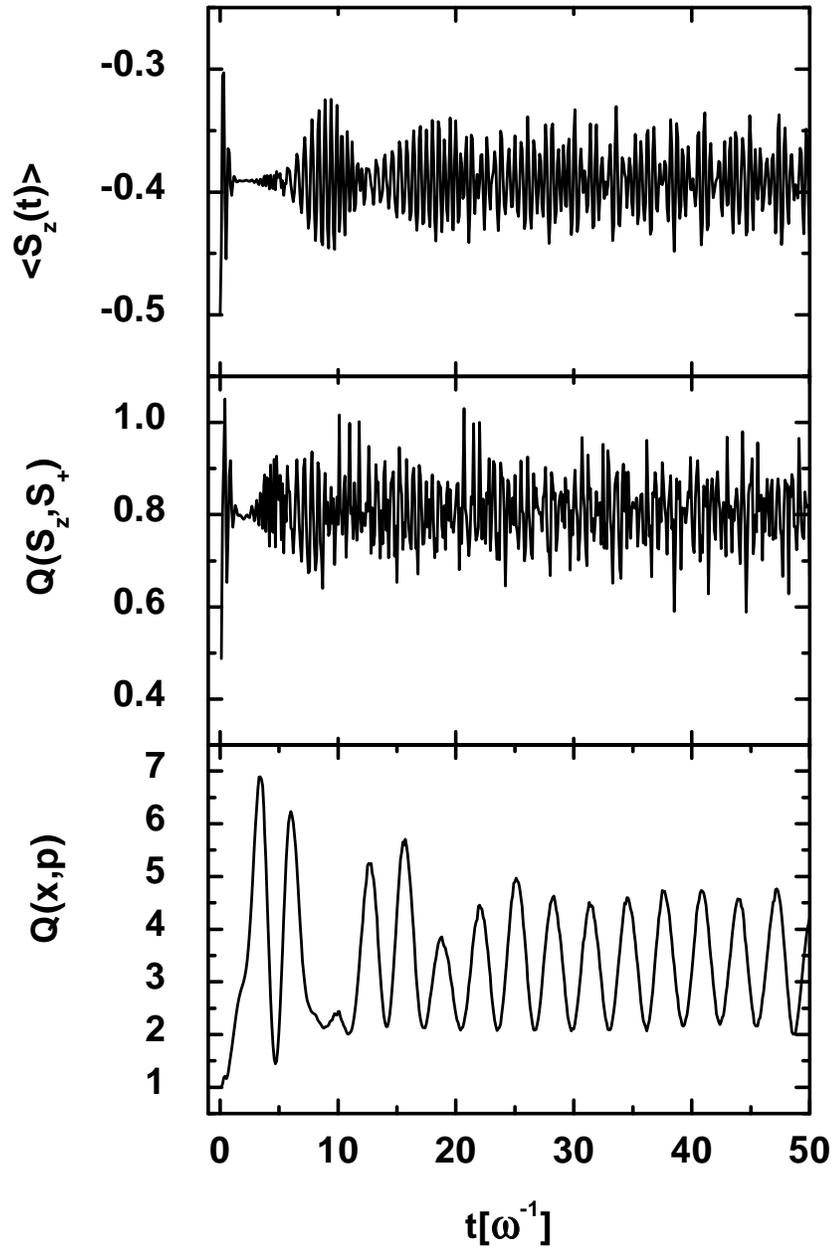


Figura 7.2: Idem Figura 7.1 para los parámetros $n_b = 10$, $g_1 = 1$ y $g_2 = 4$.

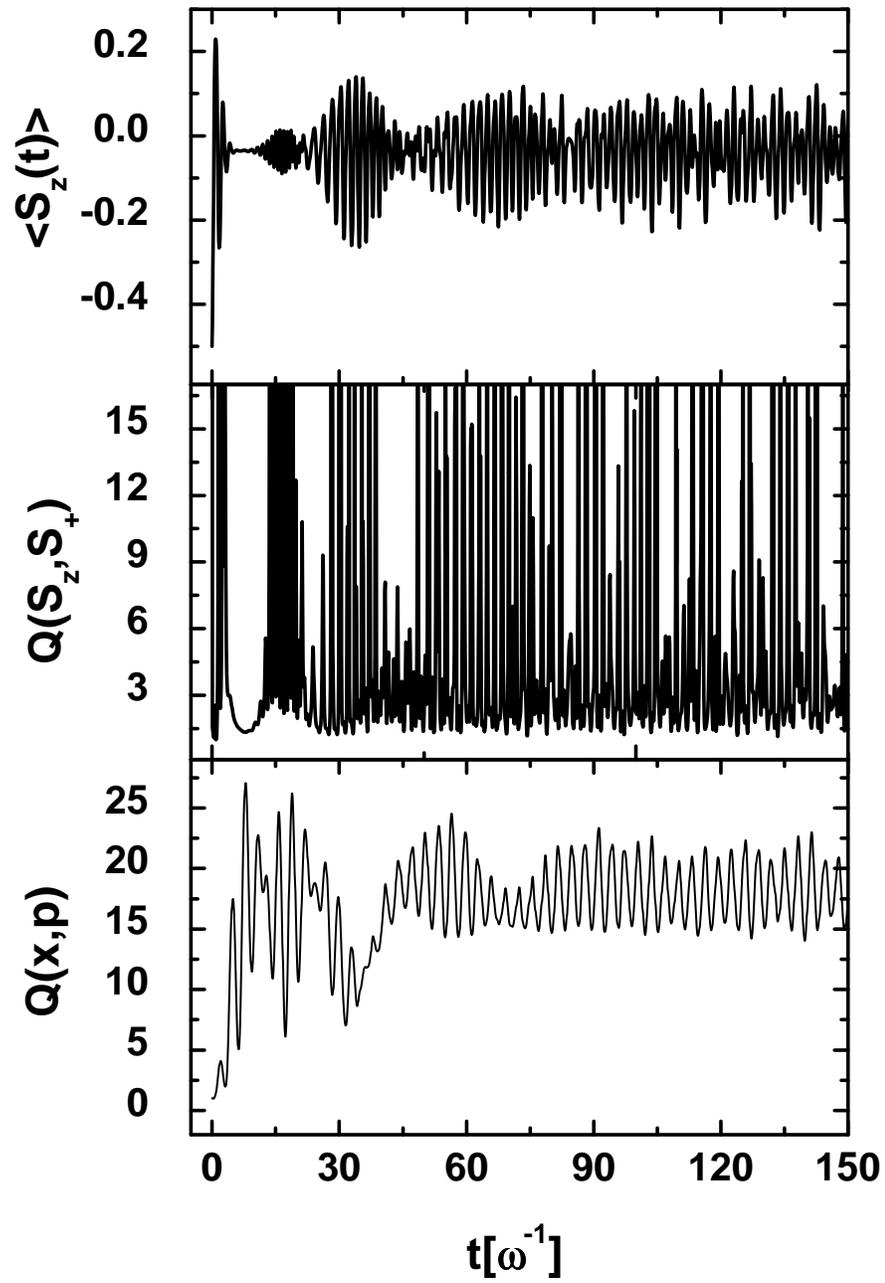


Figura 7.3: Idem Figura 7.1 para los parámetros $n_b = 10$, $g_1 = 1$ y $g_2 = 0,6$

La comparación entre los resultados obtenidos al utilizar parametrizaciones simétricas y no simétricas en el Hamiltoniano (7.1), señalan una posible dependencia crítica en el squeezing, del peso relativo de las constantes de acoplamiento, relacionadas a la emisión y absorción de fotones, en transiciones que involucran el estado fundamental n_0 , y el estado excitado n_2 , independiente del valor medio del número de fotones. La población del nivel 1 actúa como disparador para la repoblación del nivel 2. Es decir, cuando $g_1 > g_2$, hay una cantidad importante de átomos que pueblan el nivel 1 a partir del nivel 0, pero una muy pequeña cantidad puede ser excitada al nivel 2, el cual permanece prácticamente vacío (Fig. 7.4(a)). Entonces, no hay posibilidad de transferencia de espín desde el campo al segundo nivel excitado, y en consecuencia esta condición no resulta en squeezing del sistema atómico. La condición $g_1 = g_2$ es un caso intermedio, en el cual los tres niveles atómicos están casi igualmente poblados (Fig. 7.4(b)). Esto es consistente con lo que se observa en la Fig. 7.1, donde el valor central de $\langle S_z(t) \rangle$ es cero. Por último, el caso con $g_2 > g_1$, permite poblar el segundo nivel excitado a partir del nivel 1 (Fig. 7.4(c)), haciendo posible la transferencia de espín a partir del sector bosónico. Esta diferencia poblacional entre los niveles 1 y 2 es consistente con el valor central del operador de inversión atómico $\langle S_z(t) \rangle$ observado en la Fig. 7.2

La dependencia del squeezing atómico en función del número de átomos, se muestra en la Figura 7.5, donde la evolución temporal del factor $Q(S_z, S_+)$ corresponde a un sistema con $n_b = 21$ y $A = 3, A = 6, A = 15$ y $A = 18$ átomos, inicialmente todos en su estado fundamental. Se ve cómo el squeezing atómico desaparece a medida que se incrementa el número de átomos. Estos resultados indican la fuerte dependencia del squeezing atómico con el número de átomos presentes en la cavidad. Por otra parte, comparando esta figura con la Figura 7.6, podemos decir que el número medio de bosones del estado coherente del campo electromagnético, casi no cambia el valor central del factor $Q(S_z, S_+)$, y el efecto es el de suavizar las curvas.

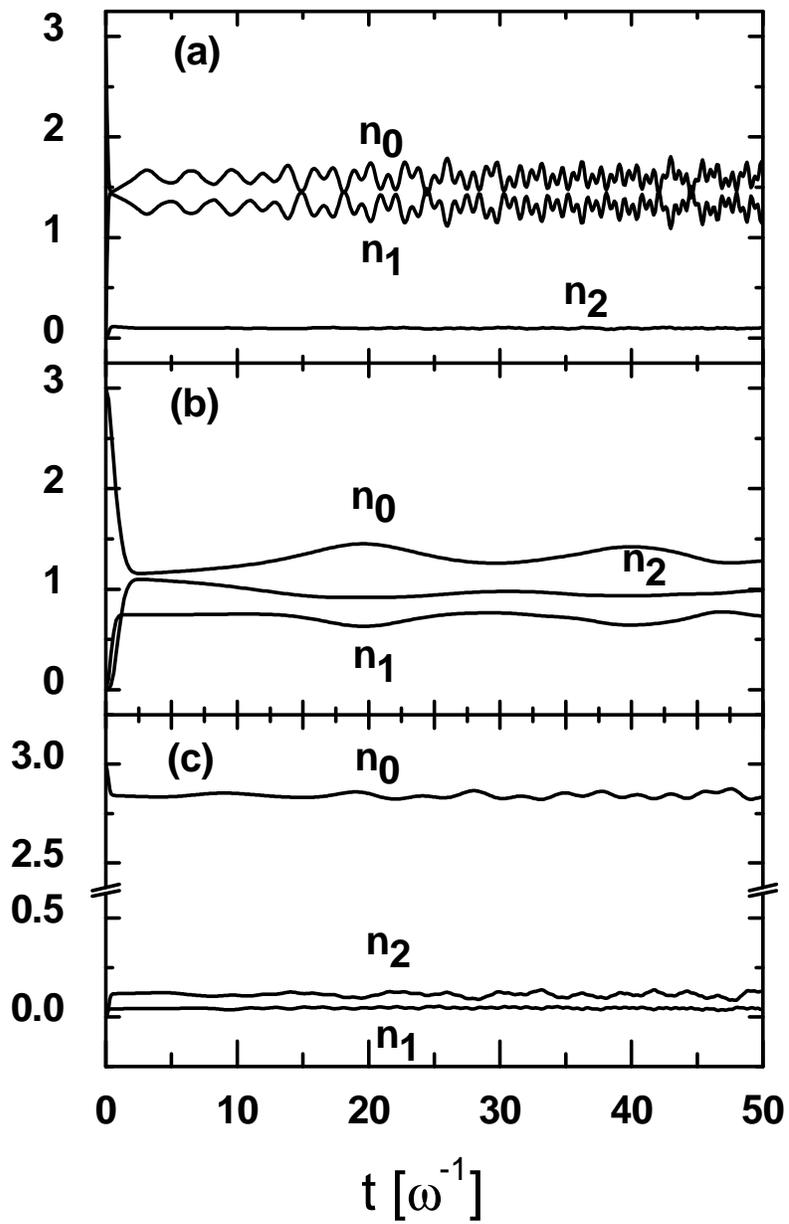


Figura 7.4: Población atómica de niveles como función del tiempo. El sistema consiste de tres átomos, inicialmente en el estado fundamental. La relación entre las constantes de acoplamiento se eligió como: (a) $g_1 > g_2$, (b) $g_1 = g_2$ y (c) $g_1 < g_2$.

En relación a la elección del valor de Δ en la ecuación (7.2), hemos verificado que utilizar un valor $\Delta \neq 0$ no afecta los resultados observados.

El modelo utilizado para la descripción del sistema resulta simétrico con respecto al intercambio de g_1 y g_2 , si inicialmente todos los átomos se encuentran en el segundo estado excitado.

7.4. Conclusiones.

En este trabajo se ha estudiado la aparición de squeezing en sistemas compuestos por átomos con tres niveles y un campo de radiación. Se encuentra que el uso de condiciones iniciales que consisten de un número fijo de fotones, no genera squeezing atómico; en cambio, sí hay posibilidad de generarlo, si se consideran estados coherentes en el sector de fotones en la elección de la condición inicial. La transferencia del espín entre átomos y fotones se ve incrementada, si las interacciones entre los niveles atómicos y los fotones del campo, están parametrizadas en forma asimétrica. Esto se consigue tomando $g_2 > g_1$ en el Hamiltoniano de la Eq. (7.1). También se observa que el uso de estados coherentes no da, automáticamente squeezing, a menos que se consideren interacciones asimétricas en la forma explicada anteriormente. Finalmente, para una parametrización fija, se observa que, a medida que el número de átomos en el sistema se incrementa, el squeezing desaparece.

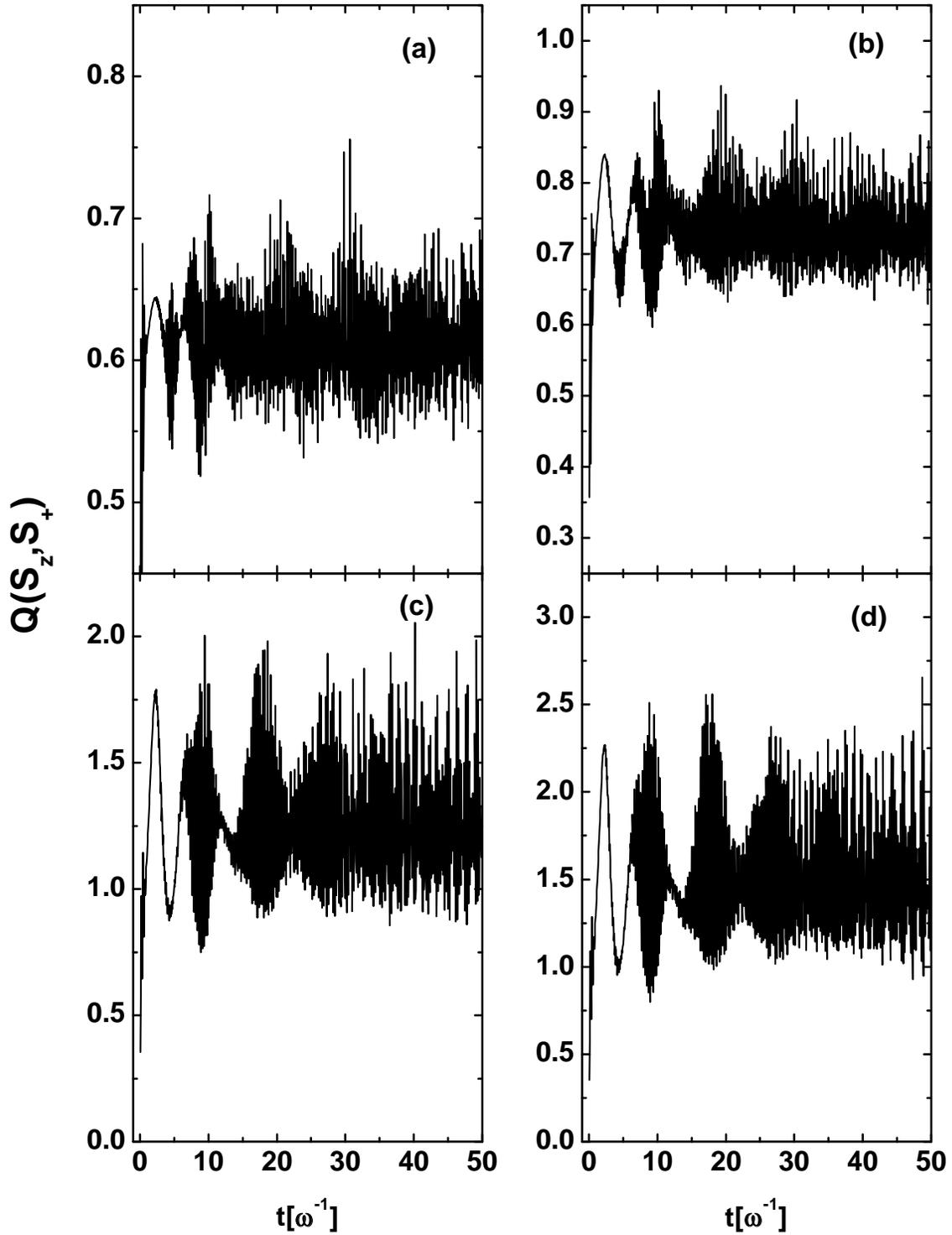


Figura 7.5: Squeezing atómico, $Q(S_z, S_+)$, como función del tiempo. Las constantes de acoplamiento se fijaron a los valores $g_1 = 1$, $g_2 = 6$. El estado inicial consta de A átomos en su estado fundamental, y de un estado coherente con un número medio de fotones $n_b = 21$. La secuencia (a), (b), (c) y (d), corresponde a un sistema con $A = 3$, $A = 6$, $A = 15$ y $A = 18$ átomos, respectivamente.

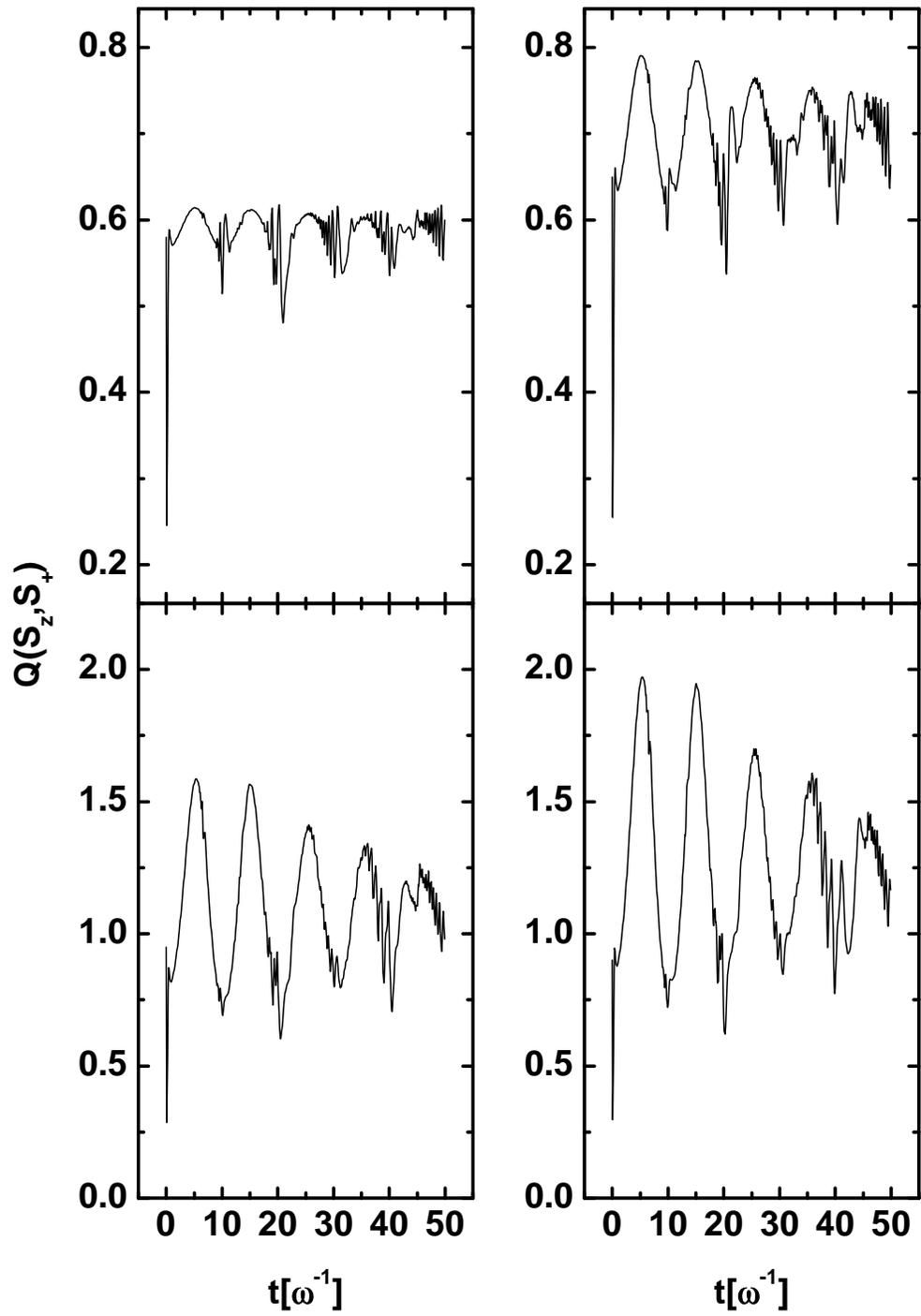


Figura 7.6: Idem Figura 7.5 pero el número medio de fotones en el estado coherente se fijó en $n_b = 100$.

Capítulo 8

Conclusiones Generales

En esta tesis estudiamos la dinámica de cadenas de espines $1/2$ y la de sistemas compuestos que involucran interacciones entre espines atómicos y un campo electromagnético. Estos sistemas simples, sin embargo, modelan el comportamiento de sistemas más complejos como sólidos magnéticos, junturas Josephson y cavidades resonantes, entre otros. A tal efecto, hemos encontrado el conjunto de energías y autoestados correspondiente a cada uno de los sistemas estudiados mediante una diagonalización exacta de su Hamiltoniano. La evolución temporal de los observables de nuestro interés, se obtuvo a partir del cálculo del valor esperado de los mismos utilizando el formalismo de la matriz densidad. Para el caso en que el sistema consta de sólo $N=2$, o $N=3$ átomos, hemos arribado a expresiones analíticas para dicha evolución, en tanto que para $N > 3$, hemos abordado el problema en forma numérica. Obviamente el tratamiento numérico se ve limitado computacionalmente por el crecimiento exponencial del espacio de configuraciones, el cuál es de dimensión 2^N . Por lo tanto, a medida que el número de partículas se incrementa, resulta necesario recurrir a técnicas del tratamiento cuántico de muchos cuerpos como alternativa a la diagonalización exacta. En el caso de cadenas de espines, hemos utilizado uno de estos métodos, como es la aproximación Tamm-Dancoff, que permite linealizar las ecuaciones de movimiento en el espacio de un fonón. El problema modificado, ahora puede ser resuelto en un espacio de dimensión N . El método permite observar algunos de los comportamientos más relevantes en el límite asintótico $N \gg 1$.

El formalismo presentado en la primer parte de la tesis, lo hemos aplicado a la evaluación del parámetro de squeezing para el espín atómico. En el caso de cadenas de espines, este puede verse como un testigo del entrelazamiento de pares de espines elementales. En sistemas que exhiben interacciones del tipo espín-fotón, la aparición de squeezing atómico está vinculada a la transferencia de espín entre el campo electromagnético y el conjunto de átomos, la cual produce una redistribución de la población de los niveles atómicos. En cualquiera de los casos, el estado atómico del sistema es un estado correlacionado con reducción de las fluctuaciones cuánticas sobre alguno de los observables de espín del total.

Partiendo de una descripción microscópica del tipo de sistemas que presentan squeezing atómico (Hamiltonianos no lineales, con interacciones cuadráticas en los operadores de espín, como los tratados en los Capítulos 5 y 6, o aquellos que implican interacciones dipolares entre átomos y fotones, como el estudiado en el Capítulo 7), hemos analizado los efectos sobre el grado de squeezing del sistema asociados con la asimetría de la interacción, y encontrado que ésta resulta ser un factor necesario para la aparición de squeezing atómico. A partir de nuestros cálculos, hemos observado la competencia entre las condiciones iniciales en que se prepara el sistema y las interacciones presentes en el mismo.

En el caso de cadenas de espines $1/2$, resulta evidente la dependencia del factor de squeezing con la orientación, en la esfera de Bloch, del estado de espín coherente (EEC) que se elige como estado inicial. En el trabajo que se discute en el Capítulo 5, el sistema elegido es una cadena antiferromagnética de Heisenberg del tipo XXZ con interacciones a primeros vecinos. En el Capítulo 6, hemos ido más allá en nuestro estudio acerca de la dinámica de este tipo de cadenas, incluyendo interacciones moduladas por un factor de forma dependiente del tipo de sitio (interacciones periódicas), o de la distancia entre sitios (interacciones de largo alcance). En general, el aumento en el número de sitios atómicos resulta en una disminución en el grado de squeezing del espín, es decir, en un aumento del valor del factor de squeezing por encima de 1. En todos los casos surge como una de las características fundamentales la posibilidad de controlar la orientación, el movimiento y las fluctuaciones del

espín total mediante el control de las interacciones entre sitios. Un punto de vista interesante y que ha quedado como motivación para trabajos futuros, es que cada uno de los diferentes Hamiltonianos de este tipo, pueden verse como Hamiltonianos efectivos surgidos de distintas extensiones no lineales del álgebra de Lie ordinaria $sl(2)$, o de su q -deformación $\mathcal{U}_q sl(2)$. Este tratamiento permite una conexión con la teoría de grupos cuánticos (Gómez et al., 1996; Chaichian and Demichev, 1996), la cual provee de una rica estructura matemática para el tratamiento del problema.

En el caso de un sistema con interacciones entre niveles atómicos y un campo electromagnético, como el que estudiamos en el Capítulo 7, no existe posibilidad de generar squeezing atómico si el estado inicial bosónico es un estado número. Esto justifica la elección de un estado coherente como condición inicial para el sector bosónico. En este caso, el número medio de bosones del estado coherente del campo electromagnético no afecta sustancialmente el valor central del factor de squeezing atómico, aunque sí tiende a suavizar las oscilaciones en el tiempo. Por otra parte, un rol importante es el que juega el número A de átomos presentes en la cavidad, cuyo efecto es el de borrar el squeezing atómico a medida que A aumenta.

Con respecto al tipo de sistemas de átomos-fotones, uno de los problemas de interés en relación a la transferencia de espín entre el campo de radiación y el sistema atómico, es como ésta se ve afectada por la presencia de factores de disipación no controlables (Civitarese et al., 2009b). Nuestros resultados muestran que:

- (a) La inclusión de interacciones átomo-átomo produce una mejora en relación a la aparición de squeezing en el sistema atómico, y es responsable de los efectos de resurgimiento;
- (b) La presencia de términos disipativos va en deterioro de la transferencia de espín desde el campo de radiación a los niveles atómicos;
- (c) El estado inicial para el sector atómico juega un rol tan importante como el estado inicial del campo de radiación, al momento de producir el alineamiento de espín atómico;
- (d) El efecto principal en relación con las interacciones átomo-átomo y átomo-fotón, es que éstas producen incoherencia independientemente del número de fotones

involucrados;

(e) Al igual que en el caso puramente atómico de cadenas de espines, hay una dependencia de la transferencia de espín de las constantes de acoplamiento, lo cual abre la posibilidad de modelar estos efectos mediante redes atómicas y/o trampas iónicas.

En general, un conjunto de átomos en interacción con un campo electromagnético desarrollan momentos dipolares variables en el tiempo, y el efecto de la inclusión de una interacción efectiva dipolo-dipolo entre sitios atómicos vecinos (Civitarese et al., 2009a), podría ser considerada en relación a la transferencia de espín y la aparición de squeezing atómico.

Apéndice A

Teoría Cuántica del Campo Electromagnético.

A.1. Ecuaciones de Maxwell

Con el objetivo de cuantizar el campo electromagnético, será conveniente comenzar con la descripción clásica de dicho campo basada en las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones relacionan los vectores de campo eléctrico y magnético \mathbf{E} y \mathbf{H} , junto con el vector de desplazamiento \mathbf{D} y el vector de inducción \mathbf{B} , en la siguiente forma :

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \varrho, \quad (\text{A.4})$$

en donde el sistema de unidades utilizado es el cgs. Tomando la divergencia de la primer ecuación junto con la derivada temporal de (A.4), se obtiene la ecuación de continuidad para las densidades de carga eléctrica y de corriente ϱ y \mathbf{j}

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Dado que la divergencia de un rotor es nula, a partir de (A.3) puede expresarse

el campo de inducción magnética \mathbf{B} en términos de un *vector potencial* \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.6})$$

Luego, la ec. (A.2) es equivalente a

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

Con ésto, y recordando que los campos gradientes son irrotacionales, el vector de campo eléctrico es expresable según

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (\text{A.8})$$

donde φ es un *potencial escalar*.

Los potenciales \mathbf{A} y φ no son únicos, dado que los potenciales modificados

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (\text{A.9})$$

donde $\chi(\mathbf{r}, t)$ es una función arbitraria, dan los mismos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Entonces, la Teoría Clásica del Electromagnetismo es una *teoría invariante de escala*, o *invariante de gauge*.

Si insertamos (A.6) y (A.8) en las ecuaciones (A.1) y (A.4), se llega a las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \varphi &= -4\pi \rho \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

en donde se ha usado la relación $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, en la primera de las expresiones. Es posible simplificar la primer ecuación eligiendo los potenciales de modo que

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.11})$$

lo que implica que la función de escala χ queda determinada por la relación

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \quad (\text{A.12})$$

A esta elección particular de los potenciales \mathbf{A} y φ se la conoce como *gauge de Lorentz*, y nos conduce finalmente a

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} &= -4\pi \varrho,\end{aligned}\tag{A.13}$$

A.2. Ondas Planas

En el caso de un campo electromagnético en el espacio libre, $\mathbf{j} = 0$ y $\varrho = 0$. Para este caso siempre es posible encontrar una función de gauge χ tal que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \varphi'(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{A.14}$$

para todo \mathbf{r} y t . La primer condición implica que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) &= 0, \\ \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\nabla^2 \chi,\end{aligned}\tag{A.15}$$

en tanto que la segunda, es posible siempre que

$$\begin{aligned}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} &= 0, \\ \rightarrow \varphi &= \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Derivando (A.15) respecto del tiempo, y usando (A.16) se obtiene

$$\nabla \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.\tag{A.17}$$

Notar que el término en el interior del paréntesis corresponde a la expresión del campo eléctrico \mathbf{E} en término de los potenciales \mathbf{A} y φ , y por lo tanto este gauge es consistente con la ecuación para la divergencia de dicho campo (A.4) cuando $\varrho = 0$.

Nos falta ver que este gauge sea también consistente con la ecuación de Maxwell (A.1) para $\mathbf{j} = 0$. Si se toma la divergencia de esta ecuación

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} \\ &= \frac{4\pi}{c} (\nabla \cdot \mathbf{j}).\end{aligned}\tag{A.18}$$

Dado que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ es siempre nulo y que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ se anula por ser $\rho = 0$, se concluye que debe ser $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ para asegurar la consistencia del conjunto de ecuaciones.

Este gauge, es el llamado *gauge de Coulomb*. La ecuación para el vector potencial \mathbf{A} se reduce a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.19})$$

lo cual conduce a buscar soluciones en término de *ondas planas transversales* para el potencial \mathbf{A} , y consecuentemente para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Típicamente una solución para esta ecuación está dada por un potencial vector real \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= 2\tilde{\epsilon}|\mathbf{A}_0|\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha) \\ &= \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{A}_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde $\tilde{\epsilon}$ es el vector de polarización real y \mathbf{k} es el vector número de onda; $\mathbf{A}_0 = \tilde{\epsilon}|\mathbf{A}_0|e^{i\alpha}$ es la amplitud. Esta expresión (A.20) para el potencial \mathbf{A} satisface automáticamente (A.19) si

$$\omega = |\mathbf{k}|c, \quad (\text{A.21})$$

en tanto que es solución de la primer ecuación en (A.14) cuando $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$, es decir, cuando el vector de polarización $\tilde{\epsilon}$ es perpendicular al número de onda \mathbf{k} . De (A.6) y (A.8) se obtienen los correspondientes campos eléctrico y magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -2k|\mathbf{A}_0|\tilde{\epsilon}\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha) \\ &= ik\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c., \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= -2|\mathbf{A}_0|\mathbf{k} \times \tilde{\epsilon}\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha) \\ &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A.3. Cuantificación del Campo Electromagnético

Para desarrollar una teoría cuántica del campo electromagnético, es conveniente expresar el campo en término de variables discretas. Para ello podemos confinar el

campo en el interior de una caja, de grandes dimensiones pero finita, de volumen $\Omega = L^3$. Algo nuevo a tener en cuenta como parte del problema, es la aparición de condiciones de contorno que limitan los modos normales de vibración; la solución general de \mathbf{A} será una superposición de estos modos normales, los cuales ahora están discretizados.

En el interior de la caja sigue verificándose la ecuación (A.19) para los campos en el espacio libre. Para condiciones de contorno periódicas en las paredes tendremos

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(L, y, z, t) &= \mathbf{A}(0, y, z, t), \\ \mathbf{A}(x, L, z, t) &= \mathbf{A}(x, 0, z, t), \\ \mathbf{A}(x, y, L, t) &= \mathbf{A}(x, y, 0, t).\end{aligned}\tag{A.23}$$

Entonces una solución normal está dada por

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = N_{\mathbf{k}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}\tag{A.24}$$

donde, como vimos en la Sección A.2

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega_k^2}{c^2},\tag{A.25}$$

y

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} = 0.\tag{A.26}$$

Las condiciones de contorno (A.23) requieren que

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right) \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbf{Z},\tag{A.27}$$

en tanto que la condición de transversalidad (A.26), implica que hay dos direcciones de polarización $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ linealmente independientes para cada vector de onda \mathbf{k} .

La solución más general para \mathbf{A} es una superposición de todos los modos normales. Esta superposición está dada por la serie de Fourier

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} [a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma} + a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1,2} N_{\mathbf{k}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} [a_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}].\end{aligned}\tag{A.28}$$

El factor $e^{\pm i\omega_k t}$ ha sido absorbido en los coeficientes de Fourier dependientes del tiempo $a_{\mathbf{k}\sigma}(t)$, con la relación

$$a_{\mathbf{k}\sigma}(t) = a_{\mathbf{k}\sigma}(0)e^{-i\omega_k t}, \quad (\text{A.29})$$

la cual es consistente con la ecuación para los coeficientes $a_{\mathbf{k}\sigma}(t)$ que se obtiene al insertar (A.28) en (A.19)

$$\frac{d^2 a_{\mathbf{k}\sigma}}{dt^2} + \omega_k^2 a_{\mathbf{k}\sigma} = 0. \quad (\text{A.30})$$

Para calcular la energía del campo electromagnético podemos recurrir a su expresión clásica (Jackson, 1962)

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} d^3r (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} d^3r \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A}^*) \right] \quad (\text{A.32})$$

donde se ha usado la expresión (A.8) y el gauge de Coulomb (A.14). Insertando la expansión de Fourier (A.28) para el potencial \mathbf{A} , y luego de un poco de álgebra se obtiene

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} N_k^2 L^3 (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* + a_{\mathbf{k}\sigma}^* a_{\mathbf{k}\sigma}). \quad (\text{A.33})$$

Esta expresión es análoga a la energía de un conjunto de osciladores armónicos desacoplados¹.

Cuando se elige la constante de normalización para los modos normales (A.24)

$$N_k = \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{L^3 \omega_k}}, \quad (\text{A.36})$$

¹Para establecer esta analogía es conveniente expresar los coeficientes $a_{\mathbf{k}\sigma}$ y $a_{\mathbf{k}\sigma}^*$ en término de una variable $q_{\mathbf{k}\sigma}$ con dimensiones de longitud, y una constante m_k con unidades de masa en la forma

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_k t} &= \frac{1}{\sqrt{2m_k \hbar \omega_k}} (m_k \omega_k q_{\mathbf{k}\sigma} + i p_{\mathbf{k}\sigma}), \\ a_{\mathbf{k}\sigma}^* e^{i\omega_k t} &= \frac{1}{\sqrt{2m_k \hbar \omega_k}} (m_k \omega_k q_{\mathbf{k}\sigma} - i p_{\mathbf{k}\sigma}), \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

donde $p_{\mathbf{k}\sigma} = m_k \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma}$. Con esto, y eligiendo la constante de normalización tal que $N_k^2 = \frac{2\pi \hbar c^2}{L^3 \omega_k}$, la expresión para la energía del campo se reduce a

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{p_{\mathbf{k}\sigma}^2}{2m_k} + \frac{m_k \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\sigma}^2}{2}. \quad (\text{A.35})$$

la energía del campo electromagnético se reduce a

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_k (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* + a_{\mathbf{k}\sigma}^* a_{\mathbf{k}\sigma}), \quad (\text{A.37})$$

la cual puede verse como la suma de oscilaciones armónicas del campo. En otras palabras, los modos normales del campo electromagnético se comportan dinámicamente como osciladores clásicos con energía $\hbar \omega_k$.

Ahora se está en condiciones de realizar la cuantización de este problema. Esto implica que las variables que describen la dinámica del campo $a_{\mathbf{k}\sigma}$ y $a_{\mathbf{k}\sigma}^*$, deben ser interpretadas ya no como funciones, sino como operadores que indicaremos con $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ respectivamente.

A partir de la cuantización canónica

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{p}_{\mathbf{k}'\sigma'}] &= i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'}, \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{q}_{\mathbf{k}'\sigma'}] &= [\hat{p}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{p}_{\mathbf{k}'\sigma'}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

y de (A.34), se infieren las reglas de conmutación de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger] &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\sigma, \sigma'}, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

El Hamiltoniano que describe al campo electromagnético (A.37) también será interpretado como un operador:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_k (\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A partir del mismo, se determina la evolución temporal de los operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, mediante las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}}{\partial t} &= [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{H}] \\ &= \hbar \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \quad \text{o} \quad \dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}\sigma} = -i\omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

la cual formalmente, es idéntica a la ecuación clásica de movimiento (A.29). Tomando la adjunta de esta ecuación se obtiene la ecuación de movimiento para $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$

$$\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger = i\omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger. \quad (\text{A.42})$$

Por último, a partir de la expansión de Fourier para el vector potencial

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} N_{\mathbf{k}} \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (\text{A.43})$$

y de las ecuaciones de movimiento, se obtienen los *Operadores de Campo*

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} N_{\mathbf{k}} \omega_k \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (\text{A.44})$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} N_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \times \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (\text{A.45})$$

Como consecuencia de haber impuesto la condición de cuantización (A.39), es que los campos $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ no conmutan, y por lo tanto no pueden ser medidos simultáneamente.

A.4. Estados de Fock

Consideremos un único modo del campo electromagnético con frecuencia ω , al que le corresponden operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Si $|n\rangle$ es el autoestado de energía correspondiente al autovalor de energía E_n , entonces

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (\text{A.46})$$

Al aplicar el operador \hat{a} sobre la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{H}|n\rangle &= \left([\hat{a}, \hat{H}] + \hat{H}\hat{a} \right) |n\rangle = \left(\hbar\omega \hat{a} + \hat{H}\hat{a} \right) |n\rangle = E_n \hat{a}|n\rangle \\ \rightarrow \hat{H}\hat{a}|n\rangle &= (E_n - \hbar\omega) \hat{a}|n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Esta última ecuación indica que el estado $\hat{a}|n\rangle$ también es autoestado de energía, pero correspondiente a un autovalor reducido en una unidad $\hbar\omega$ respecto del de $|n\rangle$:

$$|n-1\rangle = a_n \hat{a}|n\rangle, \quad (\text{A.48})$$

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega, \quad (\text{A.49})$$

donde a_n es una constante a ser determinada de la condición de normalización

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = 1. \quad (\text{A.50})$$

Si se repite el procedimiento un número n de veces, la energía irá disminuyendo en una unidad $\hbar\omega$ cada vez, hasta obtener

$$\hat{H}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle, \quad (\text{A.51})$$

donde E_0 indica la energía del estado fundamental, y por lo tanto $E_0 - \hbar\omega$ correspondería a un autovalor de energía menor que E_0 . Pero en el caso del oscilador no están permitidas energías por debajo de E_0 , y se concluye que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (\text{A.52})$$

El estado $|0\rangle$ es el estado de vacío, y utilizando esta relación en la ecuación (A.46) puede obtenerse su energía

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle = E_0|0\rangle, \\ \rightarrow E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Teniendo en cuenta este valor de la energía para el estado fundamental y luego de aplicar sucesivamente la relación (A.49), pueden obtenerse las energías de los estados excitados

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (\text{A.54})$$

Juntado ésta y la ecuación y la ecuación de autovalores (A.46), se llega a

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (\text{A.55})$$

es decir, que el autoestado de energía $|n\rangle$ es también autoestado del *operador número* $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

Ahora resulta inmediata la determinación de la constante de normalización en (A.48)

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = |a_n|^2 \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = n |a_n|^2 \langle n | n \rangle = 1. \quad (\text{A.56})$$

Si $|n\rangle$ es un autoestado normalizado, entonces $a_n = n^{-1/2}$. Entonces, la acción del operador \hat{a} sobre un autoestado de energía queda determinada por

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (\text{A.57})$$

Siguiendo el mismo razonamiento a partir de (A.46) pero con \hat{a}^\dagger , se llega a

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (\text{A.58})$$

Entonces vemos que todos los autoestados de energía pueden generarse a partir del vacío por aplicación sucesiva del operador \hat{a}^\dagger

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (\text{A.59})$$

Los estados de Fock $|n\rangle$ forma un conjunto completo de estados, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \quad (\text{A.60})$$

Un vector de estado arbitrario, podrá ser expresado en general como una superposición de autoestados de energía

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (\text{A.61})$$

donde c_n son coeficientes complejos.

Como surge de (A.54), los autovalores de energía son discretos, en contraste con lo que ocurre en una teoría clásica del electromagnetismo donde la energía puede tomar cualquier valor. Por otra parte, hay una energía residual $E_0 = \hbar\omega/2$, a la que se llama *energía de punto cero*.

Una propiedad interesante de los estados de Fock $|n\rangle$ es que el valor esperado del operador de campo correspondiente a un único modo linealmente polarizado

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{L^3}}\tilde{\epsilon}(\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t}), \quad (\text{A.62})$$

se anula, debido a (A.57), (A.58) y a la ortogonalidad de dichos estados

$$\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0. \quad (\text{A.63})$$

Sin embargo, el valor esperado del cuadrado del campo electromagnético, el cual es proporcional a la intensidad del campo, es

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{E}^2 | n \rangle &= \frac{2\pi\hbar\omega}{L^3} \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{\epsilon} \langle n | (\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) (\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) | n \rangle \\
&= \frac{2\pi\hbar\omega}{L^3} \langle n | (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) | n \rangle \\
&= \frac{2\pi\hbar\omega}{L^3} \langle n | (1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) | n \rangle \\
&= \frac{4\pi\hbar\omega}{L^3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{A.64}
\end{aligned}$$

Este resultado muestra fluctuaciones del campo en torno a un valor medio nulo, aún para el estado de vacío $|0\rangle$. Estas fluctuaciones del vacío son responsables de muchos fenómenos de interés en óptica cuántica, como lo es por ejemplo, la emisión espontánea de un átomo en un estado excitado.

Los autovalores de energía (A.49) pueden ser interpretados como los correspondientes a n cuantos del campo electromagnético o fotones, cada uno con energía $\hbar\omega$. Es por eso que los autoestados $|n\rangle$ también se conocen como *estados número de fotones*, y a los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger se los denomina *operadores de destrucción y creación* respectivamente, ya que al disminuir o aumentar la energía en una unidad, se los puede interpretar como operadores que disminuyen o aumentan en uno la cantidad de fotones presentes. Claramente, se ve en las ecuaciones (A.57) y (A.58), que éstos cambian un estado con n fotones a uno con $n - 1$ o $n + 1$ fotones.

Todo este formalismo considerado para un único modo del campo electromagnético puede extenderse para tratar campos con múltiples modos.

El Hamiltoniano (A.40) es la suma de las contribuciones de los varios modos normales del campo electromagnético

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hat{H}_{\mathbf{k}\sigma}, \tag{A.65}$$

donde

$$\hat{H}_{\mathbf{k}\sigma} = \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right). \tag{A.66}$$

Como consecuencia de la estructura del Hamiltoniano (A.65), sus autoestados pueden ser factorizados con respecto a los distintos modos normales. Un autoestado general de \hat{H} podrá tener $n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}$ fotones en el primer modo, $n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}$ en el segundo, etc., y lo indicaremos como $|n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}, \dots\rangle$. Estos autoestados son un producto directo de autoestados $|n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}\rangle$ correspondientes a osciladores independientes

$$|n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}, \dots\rangle = |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}\rangle |n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}\rangle \dots |n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}\rangle \dots \quad (\text{A.67})$$

Los operadores de aniquilación y destrucción $\hat{a}_{\mathbf{k}_l\sigma_l}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}_l\sigma_l}^\dagger$, destruyen o crean un cuanto sólo en el modo l -ésimo

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}_l\sigma_l} |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}} |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l} - 1, \dots\rangle, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}_l\sigma_l}^\dagger |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{\mathbf{k}_l\sigma_l} + 1} |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l} + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Ahora el operador número $\hat{N}_{\mathbf{k}\sigma}$ del modo normal \mathbf{k}_σ se define por la relación

$$\begin{aligned} \hat{N}_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle &\equiv \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle \\ &= n_{\mathbf{k}\sigma} |n_{\mathbf{k}\sigma}\rangle \quad (n_{\mathbf{k}\sigma} = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

y por lo tanto la energía E está dada por

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar\omega_k \left(n_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.70})$$

Por último, el vector de estado más general para el campo es una superposición lineal de estos autoestados:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}} \sum_{n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}} \dots \sum_{n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}} \dots c_{n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}} |n_{\mathbf{k}_1\sigma_1}, n_{\mathbf{k}_2\sigma_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_l\sigma_l}, \dots\rangle \\ &\equiv \sum_{\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}} c_{\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}} |\{n_{\mathbf{k}\sigma}\}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Esta última expresión incluye no sólo estados producto, sino estados más generales con correlaciones entre los distintos modos del campo, que pueden resultar de la interacción de dichos modos con un sistema común.

A.5. Interacción del Campo Electromagnético con la materia

En la mayoría de los casos puede suponerse que la materia está formada por partículas, donde cada una de éstas tiene una masa m_i y una carga e_i^2 . La interacción de cada una de estas partículas con el resto puede describirse por medio de un potencial $V(x_1 \dots x_j)$. Tales modelos de sistemas de muchas partículas se utilizan, a diferentes escala, tanto en física atómica, molecular y física del estado sólido, como en física nuclear, y en física de partículas elementales. El Hamiltoniano para tal sistema de muchos cuerpos (ver Apéndice B), en un tratamiento no relativista tiene la forma

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + V. \quad (\text{A.72})$$

Para ver como se modifica esta expresión por la interacción del sistema con un campo electromagnético, se puede recurrir al principio de invarianza de gauge. Consideremos por un momento el movimiento libre de una única partícula. Entonces, si la función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ es solución de la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (\text{A.73})$$

la función transformada $\psi(\mathbf{r}, t) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi\right)$, donde χ es una fase constante arbitraria, también es solución de (A.73) y los observables de la teoría, tales como autovalores, valores esperados, probabilidades de transición, etc., permanecen sin cambio. Distinto es el caso si la fase χ es una función que varía *localmente*, es decir que depende de las coordenadas y del tiempo

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} \chi(\mathbf{r}, t)\right). \quad (\text{A.74})$$

En este caso claramente, no se satisface la ecuación de Schrödinger a menos que se agreguen nuevos términos:

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t) \right\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (\text{A.75})$$

²No necesariamente las partículas deben ser electrones.

donde las funciones insertadas $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$ deben transformarse según

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t},\end{aligned}\tag{A.76}$$

Estas funciones pueden identificarse con los potenciales del campo electromagnético (A.9), que como vimos en la Sección A.1, son invariantes de escala. Debido al requerimiento de la invarianza bajo una transformación de fase global, ahora la ecuación (A.75) tiene la forma

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}.\tag{A.77}$$

Esta ecuación representa la interacción de una partícula de carga eléctrica e con un campo electromagnético, donde $\psi(\mathbf{r}, t)$ es la función de onda que describe a dicha partícula. Entonces, la ecuación de Schrödinger más el concepto de invarianza de gauge local, introduce en forma natural el campo electromagnético, y da el término de interacción correcto. En el caso de un electrón ligado por una fuerza central, como es el caso de los electrones ligados al núcleo atómico, deberá agregarse en (A.75) el correspondiente potencial central $V(r)$.

A.6. Aproximación Dipolar

Consideremos el problema de un electrón ligado al núcleo atómico, en el caso en que todo el átomo está inmerso en una onda electromagnética plana. En el gauge de Coulomb (A.14), en donde el potencial escalar es nulo ($\varphi(\mathbf{r}, t) = 0$), el Hamiltoniano tiene la forma

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + V(r).\tag{A.78}$$

Por otra parte, la condición $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0$ implica que

$$\begin{aligned}[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{A}}] &= -i\hbar\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0, \\ \rightarrow \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}},\end{aligned}\tag{A.79}$$

y al desarrollar el cuadrado en (A.78) obtenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{\mathbf{p}}^2 - 2\frac{e}{c}\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \hat{\mathbf{A}}^2 \right] + V(r). \quad (\text{A.80})$$

Entonces el Hamiltoniano total del sistema *partícula + campo* tiene la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{tot} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \\ &= \hat{H}_p + \hat{H}_c + \hat{H}_{int}, \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H}_p &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r), \\ \hat{H}_c &= \sum_{\mathbf{k}\sigma} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right), \\ \hat{H}_{int} &= -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\mathbf{A}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

El término \hat{H}_{int} en (A.82) representa la interacción de una partícula (en particular de un electrón) con el campo electromagnético. El término proporcional a $\hat{\mathbf{A}}^2$ puede despreciarse en cálculos no relativistas ya que es del orden de c^{-2} . Luego, reteniendo sólo el término proporcional a $\hat{\mathbf{A}}$, y usando su forma explícita en una teoría cuántica del campo electromagnético (A.43)

$$\hat{H}_{int} = -\frac{e}{mc} \hat{\mathbf{p}} \cdot \sum_{\mathbf{k}\sigma} N_{\mathbf{k}} \check{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (\text{A.83})$$

En el caso ya no de una única partícula, sino de un sistema de partículas, el Hamiltoniano del sistema es

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_c + \sum_{i=1} \hat{H}_p^{(i)} + \sum_{i=1} \hat{H}_{int}^{(i)}, \quad (\text{A.84})$$

Por simplicidad se omitirá la suma y el índice i , y se harán explícitos en el momento que sean necesarios.

Consideremos estados de la forma

$$|\text{part} + \text{campo}\rangle = |a\rangle | \dots n_{\mathbf{k}\sigma} \dots \rangle, \quad (\text{A.85})$$

donde $|a\rangle$ representa el estado del sistema de partículas, y $| \dots n_{\mathbf{k}\sigma} \dots \rangle$ es el producto directo de estados de Fock, cada uno correspondiente a un modo de oscilación del

campo electromagnético (A.67). La interacción en (A.83) puede generar transiciones entre los estados (A.85). Dado que esta interacción sólo contiene términos con un operador de creación \hat{a}^\dagger o de aniquilación \hat{a} , \hat{H}_{int} induce transiciones en donde un único fotón está presente en el proceso, es decir, que el sistema puede decaer de su estado inicial $|a_i\rangle$ a un estado final $|a_f\rangle$ emitiendo un fotón, o en el proceso inverso, podría excitarse desde un estado inicial $|a_i\rangle$ a un estado final $|a_f\rangle$ por absorción de un fotón.

Indiquemos con el índice i (j) al estado inicial (final) del sistema total partículas + campo.

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |a_i\rangle |\dots n_{\mathbf{k}\sigma}\dots\rangle, \\ |f\rangle &= |a_f\rangle |\dots n'_{\mathbf{k}\sigma}\dots\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

El elemento de matriz de transición entre estos estados está dado por

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle = -\frac{e}{mc} \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} N_{k'} \left\{ \langle a_f | \hat{\mathbf{p}} \cdot \check{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}'\sigma'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} | a_i \rangle \times \langle \dots n'_{\mathbf{k}\sigma}\dots | \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'} | \dots n_{\mathbf{k}\sigma}\dots \rangle + cc \right\}. \quad (\text{A.87})$$

En el caso en que la longitud de onda del campo electromagnético es mucho más grande que las dimensiones del sistema $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \simeq \lambda^{-1}r \ll 1$, y uno puede retener sólo el primer término de la expansión en serie de Taylor de la función exponencial

$$e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 1 \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2 + \dots \quad (\text{A.88})$$

Luego, en la *aproximación dipolar*, el elemento de matriz de transición entre estados tiene la forma

$$\langle f | \hat{H}_{int} | i \rangle_{dip} = -\frac{e}{mc} \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} N_{k'} \check{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{k}'\sigma'} \cdot \langle a_f | \hat{\mathbf{p}} | a_i \rangle \times \{ \langle \dots n'_{\mathbf{k}\sigma}\dots | \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'} | \dots n_{\mathbf{k}\sigma}\dots \rangle + cc \}. \quad (\text{A.89})$$

El elemento de matriz $\langle a_f | \hat{\mathbf{p}} | a_i \rangle$ puede ser escrito en otra forma:

$$\begin{aligned} \langle a_f | \hat{\mathbf{p}} | a_i \rangle &= \langle a_f | m \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} | a_i \rangle = -m \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{r}}, \hat{H}] \\ &= -m \frac{i}{\hbar} \langle a_f | \hat{\mathbf{r}} \hat{H} - \hat{H} \hat{\mathbf{r}} | a_i \rangle = -m \frac{i}{\hbar} (E_i - E_f) \langle a_f | \hat{\mathbf{r}} | a_i \rangle \\ &= i m \omega_{fi} \langle a_f | \hat{\mathbf{r}} | a_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Luego el elemento de matriz (A.89) puede expresarse en términos del elemento de matriz del *operador dipolar* $\hat{e}\hat{r}$, y de allí el nombre de la aproximación.

Apéndice B

Tratamiento de Sistemas Cuánticos de Muchos Cuerpos

A lo largo de esta tesis hemos tratado con cierto tipo de sistemas cuánticos, cuyo comportamiento puede describirse por dos clases de problemas generales:

- (a) El de un sistema de espines $1/2$ localizados, que interactúan entre sí mediante una interacción de intercambio,
- (b) y el de N átomos idénticos, con unos pocos niveles activos, interactuando con un campo electromagnético cuantizado.

Bajo ciertas condiciones, los sistemas correspondientes al caso (a) pueden ser descritos por el modelo de Heisenberg (Greiner et al., 1994) del ferromagnetismo (ver Capítulo 4) en sus distintas versiones: interacciones de corto y largo alcance, Hamiltonianos isotrópicos o anisotrópicos. En tanto, los sistemas incluidos en (b), pueden simplificarse de modo de incluir solamente interacciones dipolares entre dos o tres niveles atómicos; el sistema puede ser modelado por un Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (Jaynes and Cummings, 1963), en el caso de un único átomo, o por un Hamiltoniano de Dicke (Dicke, 1954) en el caso de varios átomos presentes en el sistema.

La solución exacta de estos modelos es conocida, y se obtiene mediante la aplicación de técnicas basadas en la teoría de grupos. Particularmente, el tratamiento del

acoplamiento fotón-estados atómicos puede realizarse diagonalizando el Hamiltoniano en el espacio producto directo entre grados de libertad fermiónicos y bosónicos.

Sin embargo, existe una limitación obvia para el tratamiento exacto, que está dada por el rápido crecimiento de la dimensión de la matriz del Hamiltoniano.

Esto lleva a la necesidad de estudiar soluciones aproximadas de los sistemas propuestos, basadas en *métodos no perturbativos*, que han sido originados y muy bien desarrollados en el marco de problemas de muchos cuerpos de física nuclear.

Dada la naturaleza de los problemas en estudio, uno podría pensar en la existencia de fenómenos colectivos que implican la participación de todas las partículas en el sistema. Las contribuciones de cada uno de los pares fermiónicos que representan la excitación y desexcitación de los niveles de energía, podrían constituir una especie de onda de espín de naturaleza bosónica. De ser así, uno podría usar un proceso de linealización de las ecuaciones de movimiento, como son las aproximaciones TDA y RPA. En forma alternativa, se podría pensar en un Hamiltoniano bosónico efectivo, obtenido a partir del original, mediante otra clase de técnicas de muchos cuerpos conocida como mapeos bosónicos que preservan el álgebra de los operadores.

Este apéndice intenta describir los conceptos principales de estas técnicas, y mostrar la utilidad de las mismas en la resolución de los problemas de interés, a partir de resultados concretos presentes en la bibliografía. Algunas de las técnicas aquí descritas, han sido aplicadas con éxito al estudio de la estructura de las soluciones de sistemas que pueden ser modelados por Hamiltonianos del tipo de los tratados en los capítulos anteriores.

B.1. Modelo de Partícula Independiente

Como ejemplo del modelo de partícula independiente, podemos analizar lo que ocurre en el caso del núcleo atómico, el cual es un sistema cuántico de muchos cuerpos. La aplicación del modelo a este sistema físico concreto, puede ser de utilidad para entender, en más detalle, casos como los tratados esta tesis (sistemas cuánticos complejos, cuyos grados de libertad efectivos se pueden descomponer en estados

fermiónicos o bosónicos independientes, y/o estados acoplados)

Con el objeto de dar una descripción microscópica de las propiedades de los núcleos, uno puede comenzar usando un modelo en donde los nucleones en el núcleo, pueden considerarse como partículas independientes moviéndose en órbitas casi no perturbadas de partícula simple. Aceptando esta idea, es natural proponer que la dinámica de cada partícula está gobernada por un potencial promedio debido al resto de los nucleones. Un modelo de este tipo, trata a cada nucleón en forma completamente independiente del resto, aunque la interacción nucleón-nucleón entra en el modelo en forma indirecta a través del potencial medio. A este modelo se lo conoce como *modelo de capa* o *modelo de partícula independiente*. Este modelo es ciertamente una aproximación al problema exacto de muchos cuerpos, pero puede ser utilizado como base para teorías más elaboradas.

Una teoría microscópica completa del núcleo podría derivarse de la solución de la ecuación de Shrödinger

$$\hat{H}\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^A t(x_i) + \sum_{i<j}^A v(x_i, x_j) \right\} \Psi(x_1, \dots, x_A) = E\Psi(x_1, \dots, x_A), \quad (\text{B.1})$$

donde t es la energía cinética y v la energía potencial de interacción entre partículas. La cantidad x_i representa las coordenadas de la partícula i -ésima, incluyendo la coordenada espacial \mathbf{r}_i y las variables discretas tales como el espín y el isoespín.

Bajo la asunción del modelo nuclear de capas, la ecuación anterior se reduce a una mucho más simple

$$\hat{H}_0\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^A h(x_i) \right\} \Psi = \sum_{i=1}^A \{t(x_i) + V(x_i)\} \Psi = E\Psi. \quad (\text{B.2})$$

Las soluciones Ψ de la Ec. (B.2) son productos antisimetrizados de funciones de

partícula simple¹

$$\Phi_{k_1 \dots k_A}(x_1, \dots, x_A) = \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(x_1) & \dots & \phi_{k_1}(x_A) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{k_A}(x_1) & \dots & \phi_{k_A}(x_A) \end{vmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

con autovalores

$$E_{k_1 \dots k_A} = \epsilon_{k_1} + \dots + \epsilon_{k_A}, \quad (\text{B.6})$$

donde las funciones ϕ_k forman una base completa de autofunciones del Hamiltoniano \hat{h}_i :

$$\hat{h}_i \phi_k(x_i) = \epsilon_k \phi_k(x_i). \quad (\text{B.7})$$

A cada nivel de energía k le corresponde un par de operadores de creación y destrucción \hat{a}_k^\dagger , \hat{a}_k que crean o aniquilan una partícula con función de onda ϕ_k . En el caso nuclear, dado que los nucleones son fermiones, cada nivel puede ser ocupado por una única partícula a la vez según el principio de exclusión de Pauli; los operadores \hat{a}_k^\dagger , \hat{a}_k anticonmutan

$$\{\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}. \quad (\text{B.8})$$

En el espacio de Fock, el vector de estado correspondiente a la función de onda en (B.5) puede escribirse a partir de los operadores de creación \hat{a}_k^\dagger actuando sobre el vacío $|0\rangle$, definido como el estado carente de partículas, $\hat{a}_k|0\rangle = 0$

$$|\Phi_{k_1 \dots k_A}\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger \dots \hat{a}_{k_A}^\dagger |0\rangle. \quad (\text{B.9})$$

¹Esta es la forma de incluir los efectos de la antisimetría de la función de onda de un sistema de A fermiones, como lo es el núcleo atómico. A este producto se lo conoce como determinante *de Slater*, y es equivalente a la expresión

$$\Phi_{k_1 \dots k_A}(x_1, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P \text{sign}(P) P\{\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_A}(x_A)\}. \quad (\text{B.3})$$

La suma es sobre todas las posibles permutaciones de las A partículas en los niveles $(k_1 \dots k_A)$; la función $\text{sign}(P)$, describe el cambio en el signo de la función de onda por intercambio de dos fermiones. En forma análoga, una función de onda totalmente *simétrica*, la cual corresponde a un sistema de A bosones, puede representarse por

$$\Phi_{k_1 \dots k_A}(x_1, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_a!}} \sum_P P\{\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_A}(x_A)\}. \quad (\text{B.4})$$

En esta expresión, los enteros n_k indican el número de ocupación de cada nivel, de modo que $\sum n_k = N$. En el caso fermiónico, el número de ocupación de cada nivel sólo puede valer 0 o 1.

En el estado fundamental de un sistema con A nucleones, los diferentes niveles están todos ocupados con exactamente una partícula hasta el nivel de Fermi (el nivel ocupado de mayor energía); los niveles con una energía mayor a la del nivel de Fermi se encuentran todos vacíos. Entonces, para el estado fundamental se tiene

$$|\Phi_0\rangle = \hat{a}_1^\dagger \dots \hat{a}_A^\dagger |0\rangle. \quad (\text{B.10})$$

En analogía con el gas de Fermi, las *excitaciones del sistema* corresponden a promover un nucleón desde un nivel por debajo del nivel de Fermi, a alguno de los niveles por encima de éste. En el caso en que sólo un nucleón es promovido, se habla de un estado $1p - 1h$. Haciendo uso de los índices i, j para los niveles por debajo de la superficie de Fermi ($\epsilon_i \leq \epsilon_F$), e indicando con n, m los niveles por encima de la superficie de Fermi ($\epsilon_n > \epsilon_F$), una excitación de este tipo (ph) puede expresarse en la forma

$$|\Phi_{mi}\rangle := \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i |\Phi_0\rangle = \pm \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_1^\dagger \dots \hat{a}_{i-1}^\dagger \hat{a}_{i+1}^\dagger \dots \hat{a}_A^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.11})$$

en donde se ha usado que el operador $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ es el operador número del nivel i -ésimo, junto con

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger |0\rangle = (1 + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i) |0\rangle = |0\rangle, \quad (\text{B.12})$$

que se infiere de la relación de anticonmutación (B.8). El signo $+(-)$ corresponde a un número par(impar) de permutaciones de operadores de un fermión.

Entonces, el determinante de Slater (B.5) forma un conjunto completo de estados para un sistema de A nucleones, en donde cada estado del sistema está caracterizado por una distribución particular de los nucleones en los distintos niveles obtenidos a partir del potencial de partícula independiente, $V(x_i)$. Esta es la base que usualmente se utiliza para estudiar el *Hamiltoniano de muchos cuerpos* \hat{H} (B.1).

B.2. Métodos Variacionales

En el modelo sencillo de partícula independiente, uno descompone \hat{H} en la forma

$$\hat{H} = T + \sum_{i < j}^A v(x_i, x_j) = \hat{H}_0 + V_R, \quad (\text{B.13})$$

con la *interacción residual*

$$V_R = \sum_{i < j}^A v(x_i, x_j) - \sum_i V(x_i), \quad (\text{B.14})$$

de modo tal que V_R sea lo suficientemente pequeña y pueda despreciarse. El problema ahora es encontrar ese tal potencial efectivo $V(x_i)$.

Una forma es proponer un potencial particular, asumiendo que éste describe en buena medida los efectos de las interacciones mutuas, investigar sus consecuencias, y contrastar con los resultados experimentales.

En forma más sofisticada, es posible derivar este potencial de un cuerpo a partir de las interacciones de dos cuerpos

$$V(1\dots A) = \sum_{i < j=1}^A v(x_i, x_j) \simeq \sum_i V(x_i), \quad (\text{B.15})$$

mediante un principio variacional. Esto es posible ya que el problema de autovalores de la ecuación de Shrödinger

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (\text{B.16})$$

es equivalente a la ecuación variacional

$$\delta E[\Psi] = 0, \quad (\text{B.17})$$

con

$$E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (\text{B.18})$$

Esto significa que la energía del sistema como función de los vectores de estado en el espacio de Hilbert, tiene un extremo cuando $|\Psi\rangle$ es la solución exacta de la ecuación de Schrödinger.

El método variacional es especialmente adecuado para determinar el estado fundamental del sistema, ya que para cualquier función de prueba $|\Psi\rangle$

$$E[\Psi] \geq E_0, \quad (\text{B.19})$$

y en el caso en que el estado fundamental es no degenerado, la igualdad se da si $|\Psi\rangle$ es proporcional a la solución exacta $|\Psi_0\rangle$. Si ahora se quiere calcular el primer

estado excitado $|\Psi_1\rangle$, se debe resolver la ecuación variacional (B.17) en el subespacio ortogonal a $|\Psi_0\rangle$, ya que ahora, dentro de ese subespacio, el valor esperado mínimo de \hat{H} se alcanza sobre el estado $|\Psi_1\rangle$. A la resolución de la ecuación variacional debe agregarse la condición de ortogonalidad $\langle\Psi_1|\Psi_0\rangle = 0$. Así se podría seguir hasta calcular todo el espectro.

Sin embargo en la práctica uno no conoce $|\Psi_0\rangle$ en forma exacta, ya que la variación se lleva a cabo en un subconjunto restringido del espacio de Hilbert, y entonces uno obtiene sólo una aproximación $|\Phi_0\rangle$ al estado fundamental. Luego, para el primer estado excitado, también se obtendrá una aproximación $|\Phi_1\rangle$ de la verdadera función de onda, a partir de (B.17) y de la condición adicional

$$\langle\Phi_1|\Phi_0\rangle = 0. \quad (\text{B.20})$$

Para el segundo estado excitado, habrá dos condiciones adicionales,

$$\langle\Phi_2|\Phi_1\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle\Phi_2|\Phi_0\rangle = 0, \quad (\text{B.21})$$

y así, a medida que se desean obtener más y más estados excitados la cantidad de condiciones a satisfacer, se vuelve inmanejable en la mayoría de los casos.

B.2.1. Método de Hartree-Fock

El método *variacional de Hartree-Fock* asume que tal potencial medio de partícula independiente existe, y propone como función de onda de prueba para describir los estados del sistema, el producto antisimetrizado de la Ec. (B.9), construido a partir de A funciones de onda de partícula simple φ_i , elegidas arbitrariamente, pero ortogonales. Entonces, el Hamiltoniano deberá poder expresarse en la forma

$$\hat{H}^{HF} = \sum_{i=1}^A h(i), \quad (\text{B.22})$$

y las autofunciones correspondientes al autovalor mínimo E_0^{HF} se supondrán una buena aproximación a la función exacta del estado fundamental

$$|HF\rangle = |\Phi(1\dots A)\rangle = \prod_{i=1}^A \hat{a}_i^\dagger |0\rangle. \quad (\text{B.23})$$

Al usar el conjunto de determinantes de Slater $\{\Phi\}$ como funciones de prueba, el Hamiltoniano H (B.1) en segunda cuantización, puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{k_1 k_2} \langle k_1 | \hat{t} | k_2 \rangle \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} + \frac{1}{4} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} (\langle k_1 k_2 | \hat{v} | k_3 k_4 \rangle - \langle k_1 k_2 | \hat{v} | k_4 k_3 \rangle) \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4} \\ &= \sum_{k_1 k_2} t_{k_1 k_2} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2} + \frac{1}{4} \sum_{k_1 k_2 k_3 k_4} \tilde{v}_{k_1 k_2 k_3 k_4} \hat{a}_{k_1}^\dagger \hat{a}_{k_2}^\dagger \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

donde $\tilde{v}_{k_1 k_2, k_3 k_4}$ es el elemento de matriz antisimetrizado para el operador de dos cuerpos $\hat{v}(x_i, x_j)$. A partir de esta expresión, puede calcularse la energía de Hartree-Fock

$$E^{HF} = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle = \sum_{i=1}^A t_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \tilde{v}_{ij,ij}.\quad (\text{B.25})$$

Lo que resta hacer, es minimizar esta expresión de la energía, haciendo que su variación sea nula. Al hacer ésto, el problema se convierte en un problema de autovalores, cuya estructura puede resultar más clara al escribirla en el espacio de coordenadas:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^A \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi_i(\mathbf{r}')|^2 \varphi_k(\mathbf{r}) - \sum_{i=1}^A \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\varphi_i^*(\mathbf{r}') \varphi_k(\mathbf{r}')) \varphi_i(\mathbf{r}) \\ = \epsilon_k \varphi_k(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

que puede reescribirse en la forma

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + \Gamma_H(\mathbf{r}) \right\} \varphi_k(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Gamma_{In}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_k(\mathbf{r}') = \epsilon_k \varphi_k(\mathbf{r}),\quad (\text{B.27})$$

la cual corresponde a una ecuación de Schrödinger no local.

Hemos definido

$$\Gamma_H = \int d\mathbf{r}' v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{i=1}^A |\varphi_i(\mathbf{r}')|^2 \varphi_k\quad (\text{B.28})$$

al cual se lo conoce como *potencial de Hartree*, y el término de intercambio

$$\Gamma_{In}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{i=1}^A \varphi_i^*(\mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}).\quad (\text{B.29})$$

Este último término surge de haber usado funciones de onda antisimétricas para la descripción del sistema. Un cálculo variacional utilizando funciones de onda que

fueran simplemente un producto de las funciones de onda de partícula independiente, sin la condición de antisimetrización, hubiera dado únicamente el potencial local de Hartree.

El sistema de ecuaciones (B.27) genera un problema autoconsistente, ya que los potenciales Γ_H y Γ_{In} , dependen de las propias soluciones del sistema. Las ecuaciones pueden resolverse por iteración, comenzando con un conjunto de funciones de onda φ_k , con las cuales se calculan los potenciales Γ_H y Γ_{In} ; con estos potenciales en el sistema de ecuaciones (B.27) se calcula un nuevo conjunto de funciones de onda de partícula simple, y se inicia otra vez el ciclo. El proceso termina, cuando los potenciales permanecen sin cambio entre dos ciclos consecutivos (o al menos cuando su variación es menor al error que se pretende cometer). En ese caso,

$$\Gamma_{kk'} = \sum_{i=1}^A \tilde{v}_{ki,k'i} \quad (\text{B.30})$$

es el potencial medio que siente una partícula debido a la interacción con el resto de las partículas en el sistema, que corresponde al Hamiltoniano de partícula independiente requerido:

$$\sum_{kk'} (t_{kk'} + \Gamma_{kk'}) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} = \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (\text{B.31})$$

Finalmente, de (B.25), (B.30) y (B.31) se obtiene la energía correspondiente al estado $|HF\rangle$

$$E^{HF} = \sum_{i=1}^A \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \tilde{v}_{ij,ij}. \quad (\text{B.32})$$

Notar que esta energía no es simplemente la suma de las energías de partícula independiente.

B.3. Excitaciones Colectivas

Las propiedades básicas del estado fundamental de sistemas de muchas partículas, pueden entenderse mediante el modelo de partícula independiente (Sección B.1), el cual también es el punto de partida para el método de Hartree-Fock (Sección B.2.1).

Los estados excitados sin embargo, también resultan de sumo interés como parte del estudio del sistema. Por ejemplo, en el caso del núcleo atómico, los espectros de los estados excitados son de importancia al momento de entender la estructura nuclear (Ring and Schuck, 1980). Algunas de estas excitaciones pueden ser descriptas adecuadamente en el modelo de capa, a partir de excitaciones del tipo *ph*. Pero no todos los estados excitados pueden reproducirse en el marco de este modelo, debido a que deben tenerse en cuenta la participación colectiva de las partículas del sistema.

Si partiendo del modelo de partícula independiente para un sistema de A nucleones, se llena cada uno de los niveles hasta el nivel de Fermi, entonces las excitaciones de 0, 1, 2, ..., N partículas, forman un conjunto ortogonal y completo que puede utilizarse para expandir las verdaderas funciones de onda del sistema, tanto la correspondiente al estado fundamental $|0\rangle$ como la de los estados excitados $|\nu\rangle$

$$\begin{aligned} |0\rangle &= C_0^0 |HF\rangle + \sum_{mi} C_{mi}^0 \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i |HF\rangle + \frac{1}{4} \sum_{mni j} C_{mn,ij}^0 \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j |HF\rangle + \dots \\ |\nu\rangle &= C_0^\nu |HF\rangle + \sum_{mi} C_{mi}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i |HF\rangle + \frac{1}{4} \sum_{mni j} C_{mn,ij}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j |HF\rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

en donde los índices m, n (i, j) se refieren a los niveles por arriba (debajo) del nivel de Fermi. El operador $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i$ aniquila una partícula por debajo del nivel de Fermi (crea un hueco) y crea una partícula por encima de este nivel, y por eso se llama operador de creación hueco-partícula.

La diagonalización exacta de \hat{H} en la base completa (B.33) es un problema no resoluble. Uno podría suponer que la contribución dominante se debe sólo a excitaciones del tipo *ph*, y entonces la expansión (B.33) podría aproximarse por

$$|\nu\rangle \simeq C_0^\nu |HF\rangle + \sum_{mi} C_{mi}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i |HF\rangle. \quad (\text{B.34})$$

La *aproximación Tamm-Dancoff* supone que las correlaciones sólo deben tomarse en cuenta para los estados excitados, mientras que el estado fundamental permanece inalterado. De esta forma, para el estado excitado sólo es suficiente retener el término

$$|\nu\rangle = \sum_{mi} C_{mi}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i |HF\rangle. \quad (\text{B.35})$$

Esta aproximación considera interacciones entre pares ph sobre un estado fundamental no correlacionado $|HF\rangle$. El problema más general, considera excitaciones colectivas construidas sobre un estado fundamental correlacionado de Hartree-Fock (Random Phase Aproximation RPA)

B.3.1. Aproximación Tamm-Dancoff (TDA)

Consideremos un conjunto de autoestados exactos del Hamiltoniano \hat{H} de un sistema de muchas partículas, como el dado en (B.24)

$$\hat{H}|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle. \quad (\text{B.36})$$

Es posible definir operadores Q_ν y Q_ν^\dagger de forma tal que

$$|\nu\rangle = Q_\nu^\dagger|0\rangle \quad \text{y} \quad Q_\nu|0\rangle = 0. \quad (\text{B.37})$$

Q_ν^\dagger podría elegirse por ejemplo, como

$$Q_\nu^\dagger = |\nu\rangle\langle 0|. \quad (\text{B.38})$$

A partir de la ecuación de Schrödinger (B.36) puede obtenerse la ecuación de movimiento

$$[\hat{H}, Q_\nu^\dagger]|0\rangle = (E_\nu - E_0)Q_\nu^\dagger|0\rangle. \quad (\text{B.39})$$

La aproximación TDA consiste en aproximar el estado fundamental $|0\rangle$ por el estado de Hartree-Fock $|HF\rangle$, y el operador Q_ν^\dagger por el operador colectivo

$$Q_\nu^\dagger = \sum_{mi} C_{mi}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i. \quad (\text{B.40})$$

En esta aproximación estamos restringiendo el espacio al de excitaciones del tipo $p-h$. En la próxima sección veremos una generalización de este tratamiento que se basa en un vacío más complejo, y de cuyas soluciones pueden obtenerse las ecuaciones para los coeficientes C_{mi}^ν del caso TDA como una particularización del problema.

B.3.2. Estado Fundamental Correlacionado: RPA

Para casos más generales puede tratarse al estado fundamental y a los estados excitados en una forma simétrica, permitiendo que ambos contengan pares de hueco

partícula. Esto significa que los estados excitados pueden obtenerse tanto creando como destruyendo un par hueco-partícula sobre el estado fundamental. Entonces una generalización del operador (B.40) estaría dada por

$$Q_\nu^\dagger = \sum_{mi} X_{mi}^\nu \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i - \sum_{mi} Y_{mi}^\nu \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m. \quad (\text{B.41})$$

El estado fundamental en la aproximación RPA, se define en forma análoga a (B.37)

$$Q_\nu |RPA\rangle = 0. \quad (\text{B.42})$$

Los autoestados $|\nu\rangle = Q_\nu^\dagger |RPA\rangle$, deben ser ortonormales:

$$\langle \nu' | \nu \rangle = \delta_{\nu\nu'}. \quad (\text{B.43})$$

Pero en función a la definición (B.42) de los estados excitados y a la definición del vacío (B.42)

$$\begin{aligned} \langle \nu' | \nu \rangle &= \langle RPA | Q_{\nu'} Q_\nu^\dagger | RPA \rangle = \langle RPA | Q_{\nu'} Q_\nu^\dagger - Q_\nu^\dagger Q_{\nu'} | RPA \rangle \\ &= \langle RPA | [Q_{\nu'}, Q_\nu^\dagger] | RPA \rangle = \delta_{\nu\nu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Utilizando la definición explícita para el operador Q_ν^\dagger en la condición de normalización se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} & - \sum_{mni} X_{mi}^\nu * X_{nj}^{\nu'} \langle RPA | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | RPA \rangle \\ & - \sum_{mni} Y_{mi}^\nu * Y_{nj}^{\nu'} \langle RPA | [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n] | RPA \rangle = \delta_{\nu\nu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

El resto de los términos se anulan, ya que $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n |RPA\rangle = 0$, pues implica la destrucción de dos pares de hueco-partícula en el estado fundamental. Vemos de la relación anterior, que la condición de normalización es posible si

$$\langle RPA | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | RPA \rangle = \delta_{ij} \delta_{nm}. \quad (\text{B.46})$$

Todavía no conocemos como es el estado fundamental $|RPA\rangle$. Si asumimos que este estado fundamental correlacionado no difiere demasiado del estado $|HF\rangle$, podemos

evaluar el conmutador en esta aproximación

$$\begin{aligned} \langle RPA | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | RPA \rangle &= \delta_{ij} \delta_{nm} - \delta_{ij} \langle RPA | \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m | RPA \rangle \\ &\quad - \delta_{nm} \langle RPA | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | RPA \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

expresión que es distinta a la requerida en (B.46) a menos que

$$\langle RPA | \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m | RPA \rangle \ll 1 \quad \text{y} \quad \langle RPA | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | RPA \rangle \ll 1. \quad (\text{B.48})$$

Esta condición es conocida como *aproximación de cuasi-bosón*, ya que (B.46) sería una relación exacta si los operadores de creación y aniquilación de un par ph , $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i$ y $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m$, conmutaran como operadores bosónicos.

Para una variación arbitraria $\delta Q_\nu |0\rangle$, la cual representa un estado arbitrario, puede obtenerse, a partir de la ecuación de movimiento (B.39) y del hecho que $\langle 0 | Q_\nu^\dagger = 0$

$$\langle 0 | [\delta Q, [\hat{H}, Q_\nu^\dagger]] | 0 \rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0 | [\delta Q, Q_\nu^\dagger] | 0 \rangle. \quad (\text{B.49})$$

En el modelo RPA esto corresponde a

$$\begin{aligned} &\sum_{nj} \langle RPA | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \left[\hat{H}, X_{nj}^\nu \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j - Y_{nj}^\nu \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \right] \right] | RPA \rangle \\ &= \sum_{nj} E_\nu^{RPA} \langle RPA | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, X_{nj}^\nu \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j - Y_{nj}^\nu \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \right] | RPA \rangle \\ &\quad \sum_{nj} \langle RPA | \left[\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, \left[\hat{H}, X_{nj}^\nu \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j - Y_{nj}^\nu \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \right] \right] | RPA \rangle \\ &= \sum_{nj} E_\nu^{RPA} \langle RPA | \left[\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, X_{nj}^\nu \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j - Y_{nj}^\nu \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \right] | RPA \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

debido a que las variaciones δX_{nj}^ν y δY_{nj}^ν son independientes. Con la aproximación del estado fundamental por $|HF\rangle$ más la condición de cuasi-bosón, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{nj} A_{minj} X_{nj}^\nu + B_{minj} Y_{nj}^\nu &= E_\nu^{RPA} X_{mi}^\nu, \\ \sum_{nj} A_{minj}^* X_{nj}^\nu + B_{minj}^* Y_{nj}^\nu &= -E_\nu^{RPA} Y_{mi}^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

con

$$\begin{aligned}
A_{minj} &= \langle HF | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \left[\hat{H}, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j \right] \right] | HF \rangle = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \tilde{v}_{mjn}, \\
B_{minj} &= -\langle HF | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \left[\hat{H}, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n \right] \right] | HF \rangle = \tilde{v}_{mjn},
\end{aligned} \tag{B.52}$$

en donde ϵ_k es la energía de partícula simple del problema de Hartree-Fock y \tilde{v}_{mjn} es el elemento de matriz antisimetrizado del potencial de dos cuerpos (ver Sección (B.2.1)).

Las ecuaciones (B.51) y (B.52) son las denominadas *ecuaciones RPA*. En algunos casos las amplitudes Y_{mi}^ν , que son una medida de las correlaciones del vacío, podrían ser pequeñas comparadas con X_{mi}^ν . En los casos en que las primeras puedan desprejarse por completo, se está en la aproximación TDA, y las amplitudes X_{mi}^ν corresponden a los coeficientes C_{mi}^ν de la expansión (B.40). Entonces tendremos estados *ph* puros. En el caso en que las correlaciones del estado fundamental son importantes, el reemplazo de $|RPA\rangle \simeq |HF\rangle$ en las ecuaciones (B.50) no está justificado.

Una aproximación TDA se lleva a cabo en (Ballesteros et al., 2003), donde se estudia un *arreglo unidimensional de N junturas Josephson de dos niveles* (Al-Saidi and Stroud, 2002a; Al-Saidi and Stroud, 2002b; Jaynes and Cummings, 1963; Cummings and Dorri, 1983; Cummings, 1986; Filatrella et al., 1998; Filatrella et al., 2000; Cawthorne et al., 1999; Almaas and Stroud, 2001b; Almaas and Stroud, 2001a; Almaas and Stroud, 2002; Harbaugh and Stroud, 2000), colocado en una cavidad sin pérdidas, que puede ser considerado equivalente a una muestra de N átomos idénticos, cada uno de los cuales posee dos niveles atómicos accesibles, pudiendo ser excitados o desexcitados por absorción o emisión de un fotón. Explícitamente, el Hamiltoniano de tal sistema físico está compuesto por:

- (a) Un término que describe *el campo libre del fotón*, representado por un oscilador armónico con una única frecuencia ω_b .
- (b) El término que describe las *excitaciones internas de los átomos*, que en su forma simplificada (un modelo atómico con dos niveles) permite la utilización del

álgebra $su(2)$. Esta parte del Hamiltoniano tiene la forma de un término colectivo S_z correspondiente al campo libre de los fermiones, más una interacción efectiva de largo alcance del tipo espín-espín (Greiner et al., 1994).

- (c) La *interacción entre el campo del fotón y los átomos*. Este es un término de scattering que representa la excitación y desexcitación de un nivel atómico simple mediante la absorción o emisión de un fotón. El scattering (o reemisión) del fotón actúa como una excitación colectiva, dado que implica la participación de todos los átomos en el sistema.

La forma explícita de este Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega_f S_z + \omega_b \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \zeta (\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{S}_-) \\ & + \lambda \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^N (\hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(i)} + \hat{S}_+^{(i)} \hat{S}_-^{(j)}), \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

con los operadores colectivos $\hat{S}_+ = \hat{S}_-^\dagger = \sum_{j=1}^N \hat{S}_+^{(j)}$ y $\hat{S}_z = \sum_{j=1}^N \hat{S}_z^{(j)}$, donde j es el índice atómico. El mismo es una versión extendida del modelo de Dicke, con el agregado de un término de interacción entre junturas. Los autores muestran que bajo la aproximación de cuasi-bosón, el Hamiltoniano (B.53) puede aproximarse por uno de la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{TDA} \approx & -\omega_f \Omega N + W_1 \hat{Q}_1^\dagger \hat{Q}_1 + \omega_b \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \\ & + \zeta \sqrt{2\Omega N} (\hat{a}^\dagger \hat{Q}_1 + \hat{Q}_1^\dagger \hat{a}), \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

con $W_1 = \omega_f + (N - 1)4\lambda\Omega$ y 2Ω la degeneración de los niveles atómicos. El operador $\hat{Q}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\Omega N}} \hat{S}_+$, representa la superposición coherente de todos los operadores atómicos $\hat{S}_+^{(j)}$. Los elementos de matriz de \hat{H}_{TDA} se calculan en la base

$$|l, k\rangle = N_{l,k} a^{\dagger l} (\hat{Q}_1^\dagger)^k |0\rangle. \quad (\text{B.55})$$

Los elementos de matriz no diagonales exhiben una dependencia con el factor $\zeta\sqrt{N}$. Este factor describe adecuadamente lo reportado previamente en (Al-Saidi and

Stroud, 2002b), en donde se indica que el grupo de N juntas se comporta como una única junta con un acoplamiento al modo de la cavidad $\zeta\sqrt{N}$ en lugar de ζ . En (Ballesteros et al., 2003), esto aparece naturalmente una consecuencia directa de la aproximación TDA, quedando claramente explícito en la forma del Hamiltoniano. El cálculo de los autovalores y reglas de suma, da un acuerdo a nivel del primer dígito respecto de los obtenidos mediante la solución exacta, y el acuerdo mejora a medida que se incrementa N . La evolución temporal del operador de inversión atómico $S(t)$ muestra correctamente la tendencia de la solución exacta.

B.4. Representaciones Bosónicas

El concepto de realización (o mapeo) bosónico (Klein and Marshalek, 1991) aparece por primera vez en física nuclear con la idea de expandir formas bilineales de operadores de creación y aniquilación fermiónicos, en series de Taylor de operadores bosónicos. El objetivo, es convertir el estudio del movimiento vibracional nuclear en un problema de osciladores acoplados. Estos métodos de *mapeos bosónicos o expansiones bosónicas*, son aplicables al modelo de capa nuclear, pero también pueden ser aplicados a muchos otros sistemas de muchos cuerpos.

Es bien conocido dentro de la teoría de muchos cuerpos, que bajo ciertas circunstancias pares de fermiones pueden exhibir un comportamiento tipo bosónico, especialmente cuando la densidad de tales pares es suficientemente baja como para minimizar los efectos del principio de exclusión de Pauli. Bajo estas circunstancias, las excitaciones de tales sistemas pueden ser identificadas como una colección de osciladores aproximadamente armónicos. Esto es lo que ocurre con la aproximación de cuasi-bosón vista en la sección anterior (Sección (B.3.2)).

Las oscilaciones armónicas están caracterizadas por un espectro equidistante. Los espectros experimentales de núcleos esféricos para algunas regiones de la tabla periódica, muestran en forma cualitativa esta estructura (Ring and Schuck, 1980). Sin embargo, el detalle muestra algunas desviaciones, más o menos dramáticas, de este esquema simple.

Este comportamiento anarmónico se debe a dos efectos:

1. Los pares de fermiones colectivos

$$\sum_{m,i} c_{mi} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, \quad (\text{B.56})$$

no son bosones exactos. Al utilizar estos operadores bilineales en la descripción de un estado de dos fonones, no se obtienen dos bosones desacoplados, debido a que el principio de Pauli excluye todas las configuraciones donde el mismo nivel está ocupado por más de una partícula (o hueco).

2. El Hamiltoniano exacto de many-body contiene no sólo términos de segundo orden en los términos bosónicos, los cuales son diagonalizados en la aproximación TDA (o RPA), sino que contiene términos de más alto orden. Tales términos son despreciados en la aproximación armónica; estos términos provienen de acoplamientos entre diferentes modos colectivos, como así también acoplamientos a estados no colectivos.

Los métodos bosónicos explotan este tipo de situaciones, reemplazando los grados de libertad de pares de fermiones *directamente* por grados de libertad bosónicos *exactos* mediante una serie infinita en polinomios bosónicos, de modo que las reglas de conmutación de los operadores de pares de fermiones se satisfagan a todo orden. De esta manera, se representa el Hamiltoniano fermiónico mediante operadores bosónicos puros $\hat{b}_\mu, \hat{b}_\mu^\dagger$ y se diagonaliza en un espacio bosónico. Matemáticamente, esto corresponde a un mapeo del espacio de Fock de estados de muchos fermiones en un espacio de estados bosónicos, que preservan los elementos de matriz de los generadores.

Lo que se gana a través de esta aproximación es describir movimientos colectivos cuya implementación podría ser dificultosa en la formulación fermiónica habitual. Muchos modos colectivos pueden ser aproximados por funciones de onda simples, es decir, por estados de un bosón $\hat{b}_\mu^\dagger |0\rangle$. Para tales estados, la aproximación cuadrática del Hamiltoniano resulta ser bastante buena, con lo cual se puede esperar que términos de alto orden en la expansión bosónica del Hamiltoniano tiendan rápidamente

a cero. Si éste es el caso, será suficiente tener en cuenta sólo los primeros términos en la expansión.

Por otra parte, dado que los grados de libertad bosónicos tienen su conexión con variables canónicas clásicas, tienen una interpretación más intuitiva que los operadores fermiónicos, y facilitan los tratamientos semiclásicos. En adición a esto, los mapeos bosónicos proveen una conexión directa entre modelos microscópicos de estructura nuclear y modelos fenomenológicos colectivos.

Hay muchos tipos de representaciones bosónicas, algunos de los cuales resultan equivalentes en ciertos límites. Sin embargo, en todos los casos uno parte de un espacio de Hilbert fermiónico de dimensión finita \mathcal{H}_F , el cual queda completamente determinado por el vacío $|0\rangle$, y un conjunto de operadores de creación y destrucción fermiónicos $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$ correspondientes a niveles de partícula simple. Este espacio fermiónico se mapea en un espacio de Hilbert diferente, un espacio bosónico \mathcal{H}_B

$$\mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_B. \quad (\text{B.57})$$

El espacio bosónico está determinado por un vacío bosónico $|0\rangle$ y operadores de creación y aniquilación bosónicos $\hat{b}_\mu^\dagger, \hat{b}_\mu$:

$$\hat{b}_\mu |0\rangle = 0, \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} [\hat{b}_\mu, \hat{b}_{\mu'}^\dagger] &= \delta_{\mu\mu'}, \\ [\hat{b}_\mu, \hat{b}_{\mu'}] &= [\hat{b}_\mu^\dagger, \hat{b}_{\mu'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

En general, el espacio bosónico \mathcal{H}_B es mucho mayor que el espacio fermiónico \mathcal{H}_F . Entonces, el mapeo (B.57) se realiza sobre un cierto subespacio de \mathcal{H}_B , al que se lo denomina *subespacio físico*

$$\mathcal{H}_F \rightarrow \mathcal{H}_{fis} \subset \mathcal{H}_B. \quad (\text{B.60})$$

De esta manera, si $\{|p_i\rangle\}$ es cualquier base ortonormal y completa de \mathcal{H}_F , y $\{|p_i\rangle\}$ es una base ortonormal para el subespacio físico \mathcal{H}_{fis} , se tiene una correspondencia uno a uno

$$\{|p_i\rangle\} \rightarrow \{|p_i\rangle\}. \quad (\text{B.61})$$

Hay básicamente dos conceptos para introducir explícitamente este tipo de mapeos:

(i) Belyaev y Zelevinsky (Belyaev and Zelevinsky, 1962) proponen *mapear los operadores* de modo de *preservar las relaciones de conmutación*. Normalmente, el conjunto de operadores de interés puede construirse a partir de un conjunto de operadores básicos, que junto a las relaciones de conmutación entre ellos, forman un álgebra de operadores. Como ejemplo puede tomarse el caso simple del álgebra de Lie $su(2)$; el método puede extenderse sin demasiada dificultad a álgebras más complicadas.

En este caso, un conjunto de generadores está dado por los operadores escalera \hat{J}_+ (de subida) y \hat{J}_- (de bajada), que son utilizados para construir la base, operando sobre un cierto estado de referencia, y el operador diagonal \hat{J}_z , cuyos autovalores son enteros o semi-enteros no negativos. Las relaciones de conmutación que se verifican entre ellos son:

$$\left[\hat{J}_+, \hat{J}_- \right] = 2\hat{J}_z, \quad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm \right] = \pm \hat{J}_\pm. \quad (\text{B.62})$$

Introducimos un operador de creación bosónico \hat{b}^\dagger (uno por cada operador de subida, en el caso de álgebras más complejas). Los operadores diagonales, en este caso \hat{J}_z , deben ser lineales en el operador número de bosones, $\hat{b}^\dagger \hat{b}$, y pueden construirse por simple inspección. En el caso de \hat{J}_+ , este genera las mismas reglas de selección que \hat{b}^\dagger en función de la elección de la base bosónica, y por lo tanto está restringido a ser de la forma

$$(\hat{J}_+)_B = (\hat{J}_-)_B^\dagger = \hat{b}^\dagger f(\hat{b}^\dagger \hat{b}), \quad (\text{B.63})$$

donde la función f se determina de modo de satisfacer las relaciones de conmutación (B.62). Todos los demás operadores en el espacio fermiónico pueden obtenerse como polinomios de estos operadores básicos, y sus imágenes bosónicas estarán dadas por la imagen bosónica de esos polinomios.

Para obtener el mapeo de los vectores de la base, sólo hace falta definir una correspondencia entre el vacío en el espacio bosónico $|0\rangle$ y el vacío de cuasipartícula en el espacio fermiónico $|0\rangle$. El resto de los estados se obtiene por aplicación sucesiva del operador $(\hat{J}_+)_B$ sobre $|0\rangle$.

(ii) Marumori y co-autores (Marumori et al., 1964a; Marumori et al., 1964b), proponen atacar el problema desde el punto de vista del *mapeo de los vectores de estado*, relegando a un segundo plano las relaciones de conmutación entre operadores. Entonces, para cada operador fermiónico arbitrario \hat{A}_F ,

$$\hat{A}_F = \sum_{ij} A_{ij} |p_i\rangle \langle p_j|, \quad (\text{B.64})$$

habrá un operador bosónico \hat{A}_B dado por

$$\hat{A}_B = \sum_{ij} A_{ij} |p_i\rangle \langle p_j|, \quad (\text{B.65})$$

con la propiedad

$$\langle p_i | \hat{A}_B | p_j \rangle = \langle p_i | \hat{A}_F | p_j \rangle = A_{ij}. \quad (\text{B.66})$$

El mapeo de los vectores de estado (B.61) junto con el mapeo de los operadores $\hat{A}_F \rightarrow \hat{A}_B$ *preserva todos los elementos de matriz* en el subespacio físico. Por otra parte, dado un vector *no físico* $|u\rangle$, es decir, un vector perteneciente al complemento ortogonal del espacio físico, tendremos

$$\hat{A}_B |u\rangle = 0. \quad (\text{B.67})$$

Los mapeos así definidos no son únicos, y el subespacio físico puede elegirse arbitrariamente en la medida que tenga la misma dimensión que el espacio fermiónico. Obviamente como estrategia, se elige un mapeo que resulte físicamente útil.

Varias de estas técnicas han sido desarrolladas dentro de la teoría de ondas de espín en un ferromagneto, algunas de las cuales pueden extenderse al caso general de sistemas de muchos fermiones.

B.4.1. Mapeo de Holstein-Primakoff

Consideremos los operadores de momento angular $\hat{J}_+ = (\hat{J}_-)^{\dagger}$ y \hat{J}_z , que obedecen las relaciones de conmutación del grupo $SU(2)$ dadas en (B.62). Si se observan los elementos de matriz no nulos en el espacio de estados de momento angular $|j, m\rangle$,

con $-j \leq m \leq j$

$$\begin{aligned}\langle j, m | \hat{J}_z | j, m \rangle &= m, \\ \langle j, m+1 | \hat{J}_+ | j, m \rangle &= [(j-m)(j+m+1)]^{1/2},\end{aligned}\tag{B.68}$$

notamos que la secuencia de enteros o semienteros m puede mapearse en un conjunto de números enteros no negativos k , $0 \leq k \leq 2j$, mediante el desplazamiento

$$m = -j + k.\tag{B.69}$$

Entonces, para un autovalor j determinado, las Ecs. (B.68) se transforman en

$$\begin{aligned}\langle k | \hat{J}_z | k \rangle &= -j + k, \\ \langle k+1 | \hat{J}_+ | k \rangle &= [(k+1)(2j-k)]^{1/2},\end{aligned}\tag{B.70}$$

En estas dos últimas ecuaciones pueden reconocerse los elementos de matriz de los operadores bosónicos

$$\begin{aligned}(\hat{J}_z)_B &= -j + \hat{b}^\dagger \hat{b}, \\ (\hat{J}_+)_B &= (\hat{J}_-)_B^\dagger = \hat{b}^\dagger (2j - \hat{b}^\dagger \hat{b})^{1/2},\end{aligned}\tag{B.71}$$

actuando en un espacio de Fock bosónico, expandido por los vectores

$$|k\rangle = (k!)^{-1/2} (\hat{b}^\dagger)^k |0\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots\tag{B.72}$$

Contrariamente a lo que ocurre con el subespacio de momento angular j , el cual tiene dimensión $2j + 1$, el espacio bosónico es de dimensión infinita ($k \rightarrow \infty$). Por otro lado, como $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ es el operador número de bosones tal que $\hat{b}^\dagger \hat{b} |k\rangle = k |k\rangle$, la raíz cuadrada en la expresión (B.71) no está definida en el espacio bosónico completo; sólo está definida en un subespacio del mismo determinado por la condición $k \leq 2j$, el subespacio físico, de dimensión finita $2j + 1$. Entendidas de esta forma, las Ecs. (B.71) proveen la imagen bosónica de todas las representaciones irreducibles de $SU(2)$. Estas ecuaciones pueden ser invertidas dentro del subespacio permitido, obteniéndose

$$\hat{b}^\dagger = (j + 1 - \hat{J}_z)^{-1/2} \hat{J}_+,\tag{B.73}$$

a partir de la cual puede verificarse que \hat{b} y \hat{b}^\dagger son operadores que obedecen relaciones de conmutación dentro del espacio vectorial de una representación irreducible de $SU(2)$.

Las raíces cuadradas en la definición de los operadores bosónicos (B.71), son una abreviación formal de la correspondiente serie de Taylor, la cual deberá usarse explícitamente en las aplicaciones prácticas. Esta serie converge rápidamente si el número de bosones k es pequeño comparado con el valor $2j$. Es una desventaja de este tipo de representaciones bosónicas que, en principio, es necesario trabajar con infinitos términos para preservar los elementos de matriz de los operadores, condición a partir de la cual se derivó el mapeo.

Un mapeo como este se utiliza en el trabajo ya citado anteriormente (Ballesteros et al., 2003) para hallar la imagen bosónica del Hamiltoniano (B.53). Los operadores colectivos de pseudo-espín se expresan en término de los operadores bosónicos b^\dagger , b :

$$\begin{aligned} S_+ &\rightarrow b^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b} \\ S_- &\rightarrow \sqrt{N - b^\dagger b} b, \\ S_z &\rightarrow b^\dagger b - \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{B.74}$$

La imagen bosónica de los primeros tres términos de \hat{H} se obtiene en forma automática. El término de interacción espín-espín requiere de algún reordenamiento previo. Finalmente, puede aproximarse \hat{H}_B a orden $1/\Omega^2$ por

$$\begin{aligned} H_{MB} \approx & (\omega_f + \lambda(2N - 3))b^\dagger b + \omega_b(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \frac{N}{2}\omega_f \\ & - 2\lambda b^{\dagger 2} b^2 + \zeta(a^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b} b + b^\dagger \sqrt{N - b^\dagger b} a). \end{aligned} \tag{B.75}$$

Alternativamente, uno podría aplicar directamente el mapeo bosónico al Hamiltoniano completo de la Ec. (B.53) y hacer un desarrollo en potencias de $b^\dagger b$. La aproximación TDA realizada en el mismo trabajo (Ballesteros et al., 2003) y a la que se hizo referencia en la sección anterior, representa el primer orden de tal expansión.

²Como ya se mencionó anteriormente, 2Ω representa la degeneración de cada nivel atómico, que se relaciona con la dimensión del subespacio físico mediante $2(2\Omega) = 2j + 1$.

Un resultado importante de este mapeo, es que la interacción original espín-espín en \hat{H} puede ser interpretada en la imagen bosónica \hat{H}_B , como una no-linealidad del tipo $b^{\dagger 2}b^2$ del campo bosónico efectivo. Esta interacción es del tipo de efecto Kerr no-lineal cuyas consecuencias dinámicas podrían ser de interés estudiar, en particular aquellas concernientes al fenómeno de superposición cuántica (Chumakov et al., 1999; Joshi, 2000; Zou and Shao, 2001).

Ahora, el Hamiltoniano puramente bosónico (B.75) puede ser diagonalizado en la base

$$| l, k \rangle = \frac{1}{\sqrt{l! k!}} a^{\dagger l} b^{\dagger k} | 0 \rangle. \quad (\text{B.76})$$

Una comparación de los resultados mediante la obtención de autovalores, reglas de suma, y de la dinámica de la población atómica, muestra un muy buen acuerdo con la solución exacta, mejorando lo observado a partir de la aproximación TDA.

Para el caso general de este modelo, el cual surge de incorporar transiciones entre n niveles atómicos, el álgebra de operadores corresponde a la representación simétrica de $SU(n)$, la cual puede ser mapeada por un *mapeo de Holstein-Primakoff generalizado*. En (Reboiro, 2006) se hace uso de este mapeo bosónico par tratar una colección de A átomos idénticos con tres niveles cada uno, interactuando con un campo de radiación cuantizado en una cavidad. Bajo la aproximación de onda rotante (1.31), el sistema está descrito por un Hamiltoniano, \hat{H} , con interacciones lineales fotón-nivel atómico

$$\begin{aligned} H &= \omega a^{\dagger} a + \sum_i E_i S^{ii} \\ &+ g_1 (a S_+^{01} + a^{\dagger} S_-^{01}) \\ &+ g_2 (a S_+^{12} + a^{\dagger} S_-^{12}). \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

El Hamiltoniano puede resolverse en forma exacta en la base número de fotones, l , y n_0 , n_1 , y n_2 excitaciones de los tres niveles atómicos.

$$| l n_0 n_1 n_2 \rangle = N_{l, n_0 n_1 n_2} a^{\dagger l} b_0^{\dagger n_0} b_1^{\dagger n_1} b_2^{\dagger n_2} | 0 \rangle, \quad (\text{B.78})$$

Este sistema había sido tratado previamente por Klimov y co-autores en (Klimov et al., 1999). En este trabajo, mediante una serie de rotaciones del grupo $SU(3)$, se

obtiene un Hamiltoniano efectivo que bajo la condición de resonancia de dos fotones, exhibe interacciones cuadráticas átomo-fotón entre dos de los niveles atómicos, cancelando la contribución del nivel intermedio³. En (Reboiro, 2006) se muestra que, a un resultado similar, se puede llegar mediante una expansión bosónica dada por:

$$\begin{aligned}
S^{00} &= \beta_0^\dagger \beta_0 = \hat{n}_0, \\
S^{22} &= \beta_2^\dagger \beta_2 = \hat{n}_2, \\
S^{11} &= \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2)^2, \\
S^{01} &= \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) \beta_0, \quad S^{10} = \beta_0^\dagger \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2), \\
S^{21} &= \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) \beta_2, \quad S^{12} = \beta_2^\dagger \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2), \\
S^{20} &= \beta_0^\dagger \beta_2, \quad S^{02} = \beta_2^\dagger \beta_0,
\end{aligned} \tag{B.79}$$

donde β_i, β_i^\dagger , ($i = 0, 2$), son operadores bosónicos exactos, y $\Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) = \sqrt{A - \hat{n}_0 - \hat{n}_2}$.

Bajo la elección de una escala particular de energía tal que $E_0 + E_1 + E_2 = 0$, la imagen bosónica del Hamiltoniano resulta ser

$$\begin{aligned}
\hat{H}_B &= -\frac{2\Delta}{3}A + \omega_b a^\dagger a + (\Delta - \omega_b) \beta_0^\dagger \beta_0 + (\Delta + \omega_b) \beta_2^\dagger \beta_2 + \\
&g_1(a^\dagger \beta_0^\dagger \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) + \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) \beta_0 a) + \\
&g_2(a^\dagger \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) \beta_2 + \beta_2^\dagger \Phi(\hat{n}_0, \hat{n}_2) a),
\end{aligned} \tag{B.80}$$

Dado el mapeo empleado de la Ec. (B.80), el término atómico ha sido reemplazado por una constante más los términos proporcionales a $\beta_0^\dagger \beta_0$ y $\beta_2^\dagger \beta_2$, y el Hamiltoniano bosónico contiene *sólo* las interacciones entre el fotón y los niveles atómicos con $i = 0$ e $i = 2$. El Hamiltoniano de la Ec.(B.80), puede ser diagonalizado en la base

$$|ln_0 n_2 \rangle = N_{ln_0 n_2} a^{\dagger l} \beta_0^{\dagger n_0} \beta_2^{\dagger n_2} |0\rangle, \tag{B.81}$$

con una ventaja obvia respecto de (B.77) debido a la dimensión del problema. Los resultados que se obtienen del comportamiento del sistema a partir del Hamiltoniano mapeado (B.80), están en excelente acuerdo con los obtenidos a partir de la solución exacta, en tanto que este procedimiento de bosonización simplifica enormemente

³Las principales consideraciones acerca del método utilizado por los autores en la referencia (Klimov et al., 1999), se han expuesto en la Sección 1.2

la tarea de encontrar una solución del Hamiltoniano original, en comparación con el método de (Klimov et al., 1999). Por último, la reducción del Hamiltoniano a uno que describe interacciones entre $n - 1$ niveles atómicos, no es una característica particular de este problema de tres niveles, sino una ventaja propia de este mapeo con la elección del cero de energía dado por $\sum_{i=1}^n E_i = 0$.

B.4.2. Mapeo de Dyson

La forma de derivar el mapeo de Dyson es siguiendo los conceptos básicos planteados por Belyaev-Zelevinsky (Belyaev and Zelevinsky, 1962). Introducimos los operadores bosónicos \hat{b}^\dagger y \hat{b} y se elige \hat{J}_z diagonal en la misma forma que en (B.71),

$$(\hat{J}_z)_B = -j + \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (\text{B.82})$$

Se insistió en que \hat{J}_+ y \hat{J}_- producían, en algún sentido, las mismas reglas de selección, pero no hay en principio una imposición para que sean conjugados Hermíticos uno del otro en el espacio mapeado. Entonces, podría generalizarse la Ec. (B.63) a la forma

$$(\hat{J}_+)_B = \hat{b}^\dagger f_+(\hat{n}), (\hat{J}_-)_B = f_-(\hat{n})\hat{b}, \quad (\text{B.83})$$

donde \hat{n} es el operador número de bosones $\hat{b}^\dagger \hat{b}$. Esta forma garantiza que se satisfaga la segunda de las relaciones en (B.62) para funciones arbitrarias f_\pm . Con ayuda de las relaciones

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger f(\hat{n}) &= f(\hat{n} - 1)\hat{b}^\dagger, \\ f(\hat{n})\hat{b} &= \hat{b}f(\hat{n} - 1), \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

la segunda de las relaciones en (B.62) da la ecuación

$$\hat{n}f_+(\hat{n} - 1)f_-(\hat{n} - 1) - (\hat{n} - 1)f_+(\hat{n})f_-(\hat{n}) = 2(\hat{n} - j), \quad (\text{B.85})$$

la cual puede resolverse fácilmente con la propuesta $f_+(\hat{n})f_-(\hat{n}) = c_0 + c_1(\hat{n} - 1)$. Se obtiene la condición

$$f_+(\hat{n})f_-(\hat{n}) = 2j - \hat{n}, \quad (\text{B.86})$$

que deja cierto grado de libertad en la elección de las funciones f_{\pm} . El mapeo de Dyson corresponde a elegir $f_- = 1$. Entonces,

$$f_+(\hat{n}) = 2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (\text{B.87})$$

Esta es una representación muy sencilla, pero que viola la hermiticidad, ya que $(\hat{J}_+)_B = \hat{b}^\dagger(2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}) \neq (\hat{J}_-)_B^\dagger = \hat{b}$. La base de vectores

$$|k\rangle = \phi_k((\hat{J}_+)_B)|0\rangle, \quad (\text{B.88})$$

sigue siendo ortogonal, pero no está normalizada.

Sin embargo, ésta resulta una representación útil en el problema de muchos cuerpos (Ring and Schuck, 1980), y es factible llevarse a una forma unitaria mediante una transformación adecuada (Klein and Marshalek, 1991).

B.4.3. Mapeo de Schwinger

Schwinger (Schwinger, 1965) introdujo una representación bosónica de los operadores de momento angular, que es a la vez finita y Hermítica. Para ello consideró dos tipos de bosones \hat{a} y \hat{b} , tales que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (\text{B.89})$$

actuando en un espacio de estados correspondiente a un oscilador bidimensional,

$$|n_a, n_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_a! n_b!}} (\hat{a}^\dagger)^{n_a} (\hat{b}^\dagger)^{n_b} |0, 0\rangle. \quad (\text{B.90})$$

Si los operadores bosónicos en consideración son tales que \hat{b}^\dagger incrementa el autovalor de \hat{J}_z en media unidad, en tanto que \hat{a}^\dagger lo disminuye en la misma cantidad, los autovalores de \hat{J}_z pueden expresarse como una diferencia del número de bosones, de modo que

$$(\hat{J}_z)_B = \frac{1}{2}(\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{1}{2}(\hat{n}_b - \hat{n}_a), \quad (\text{B.91})$$

Claramente

$$(\hat{J}_+)_B = \hat{b}^\dagger \hat{a} \quad (\hat{J}_-)_B = \hat{a}^\dagger \hat{b}, \quad (\text{B.92})$$

son operadores escalar, claramente Hermíticos. A partir de esta representación de las relaciones de conmutación de los operadores bosónicos, puede verificarse fácilmente que estos tres operadores $(\hat{J}_\pm)_B$ y $(\hat{J}_z)_B$, satisfacen el álgebra $su(2)$.

Si calculamos \hat{J}^2 obtenemos

$$(\hat{J}^2)_B = \frac{1}{2}\hat{N}\left(\frac{1}{2}\hat{N} + 1\right), \quad (\text{B.93})$$

donde

$$\hat{N} = \hat{n}_b + \hat{n}_a, \quad (\text{B.94})$$

es el operador número total de bosones con autovalor n . Entonces, las representaciones irreducibles están caracterizadas por los valores

$$j = \frac{1}{2}n. \quad (\text{B.95})$$

Finalmente los estados de la base para el operador de momento angular pueden escribirse como

$$|n_a, n_b\rangle = |j, m\rangle \rightarrow |j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} (\hat{a}^\dagger)^{j-m} (\hat{b}^\dagger)^{j+m} |0, 0\rangle. \quad (\text{B.96})$$

Como hemos visto, estas representaciones simples de los operadores de momento angular pueden ser utilizadas en modelos en los cuales el Hamiltoniano pueda expresarse en término de operadores de espín o cuasi-espín. En tales casos, la representación bosónica del Hamiltoniano puede obtenerse sin demasiado esfuerzo.

Bibliografía

- Affronte, M., Ghirri, A., Carretta, S., Amoretti, G., Piligkos, S., Timco, G. A., and Winpenny, R. E. P.: 2004, *Applied Physics Letters* **84**, 3468
- Al-Saidi, W. A. and Stroud, D.: 2002a, *Physical Review B* **65(22)**, 224512
- Al-Saidi, W. A. and Stroud, D.: 2002b, *Physical Review B* **65(22)**, 224512
- Almaas, E. and Stroud, D.: 2001a, *Physical Review B* **64(17)**, 179902
- Almaas, E. and Stroud, D.: 2001b, *Physical Review B* **63(14)**, 144522
- Almaas, E. and Stroud, D.: 2002, *Physical Review B* **65(13)**, 134502
- Amico, L., Osterloh, A., Plastina, F., Fazio, R., and Massimo Palma, G.: 2004, *Physical Review A* **69(2)**, 022304
- Bachor, H.-A. and Ralph, T. C.: 2004, *A Guide to Experiments in Quantum Optics, 2nd, Revised and Enlarged Edition*, Wiley-VCH
- Ballesteros, A., Civitarese, O., Herranz, F. J., and Reboiro, M.: 2003, *Physical Review B* **68(21)**, 214519
- Banaszek, K., Radzewicz, C., Wódkiewicz, K., and Krasinski, J. S.: 1999, *Physical Review A* **60**, 674
- Bargmann, V.: 1962, *Reviews of Modern Physics* **34**, 829
- Barnett, S. M. and Radmore, P. M.: 1997, *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Clarendon Press
- Bechmann-Pasquinucci, H. and Peres, A.: 2000, *Physical Review Letters* **85**, 3313
- Belyaev, S. T. and Zelevinsky, V. G.: 1962, *Nuclear Physics* **39**, 582
- Bethe, H.: 1931, *Zeitschrift fur Physik* **71**, 205
- Bose, I.: 2001, *ArXiv e-prints: cond-mat/0107399v1*

- Bose, S.: 2003, *Physical Review Letters* **91(20)**, 207901
- Bose, S.: 2008, *ArXiv e-prints: cond-mat/0802.1224*
- Brukner, Č., Żukowski, M., and Zeilinger, A.: 2002, *Physical Review Letters* **89(19)**, 197901
- Buley, E. R. and Cummings, F. W.: 1964, *Physical Review* **134**, 1454
- Carretta, S., van Slageren, J., Guidi, T., Liviotti, E., Mondelli, C., Rovai, D., Cornia, A., Dearden, A. L., Carsughi, F., Affronte, M., Frost, C. D., Winpenny, R. E., Gatteschi, D., Amoretti, G., and Caciuffo, R.: 2003, *Physical Review B* **67(9)**, 094405
- Cawthorne, A. B., Barbara, P., Shitov, S. V., Lobb, C. J., Wiesenfeld, K., and Zangwill, A.: 1999, *Physical Review B* **60**, 7575
- Cerf, N. J., Bourennane, M., Karlsson, A., and Gisin, N.: 2002, *Physical Review Letters* **88(12)**, 127902
- Cerf, N. J., Leuchs, G., and Polzik, E. S. (eds.): 2007, *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*, London, Imperial College Press
- Chaichian, M. and Demichev, A.: 1996, *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific
- Chumakov, S. M., Frank, A., and Wolf, K. B.: 1999, *Physical Review A* **60**, 1817
- Civitarese, O. and Reboiro, M.: 1998, *Physical Review C* **57**, 3055
- Civitarese, O. and Reboiro, M.: 1999, *Physical Review C* **60(3)**, 034302
- Civitarese, O., Reboiro, M., Rebon, L., and Tielas, D.: 2008, *Revista Mexicana de Física* **54(3)**, 24
- Civitarese, O., Reboiro, M., Rebon, L., and Tielas, D.: 2009a, *Atomic squeezing in three level atoms with effective dipole-dipole interaction*, Submitted November 5
- Civitarese, O., Reboiro, M., Rebon, L., and Tielas, D.: 2009c, *Physics Letter A (in press)*
- Civitarese, O., Reboiro, M., Rebon, L., and Tielas, D.: 2009b, *Physics Letters A* **373**, 754
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloe, F.: 1988, *Mécanique Cuantique - Tome I*, Hermann, Paris

- Cummings, F. W.: 1965, *Physical Review* **140**, 1051
- Cummings, F. W.: 1986, *Physical Review A* **33**, 1683
- Cummings, F. W. and Dorri, A.: 1983, *Physical Review A* **28**, 2282
- Davidovich, L.: 1998, in S. Hacyan, R. Jáuregui, and R. López-Peña (eds.), *Latin-American School of Physics - XXXI ELAF*, pp 3–43
- de Echaniz, S. R., Koschorreck, M., Napolitano, M., Kubasik, M., and Mitchell, M. W.: 2008, *Physical Review A* **77(3)**, 032316
- de Echaniz, S. R., Mitchell, M. W., Kubasik, M., Koschorreck, M., Crepaz, H., Eschner, J., and Polzik, E. S.: 2005, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **7**, 548
- Dicke, R. H.: 1954, *Physical Review* **93**, 99
- Dirac, P. A. M.: 1926, *Royal Society of London Proceedings Series A* **112**, 661
- Dittrich, J. and Inozemtsev, V. I.: 1997, *Journal of Physics A Mathematical General* **30**, L623
- Dodonov, V. V.: 2002, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **4**, 1
- Drummond, P. D. and Ficek, Z.: 2004, *Quantum Squeezing*, Berlín, Springer-Verlag
- Duan, L.-M., Demler, E., and Lukin, M. D.: 2003, *Physical Review Letters* **91(9)**, 090402
- Eisert, J. and Gross, D.: 2009, *Physical Review Letters* **102(24)**, 240501
- Everitt, M. J., Stiffel, P. Clark, T. D., Vourdas, A., Ralph, J. F., Prance, H., and Prance, R. J.: 2001, *Physical Review B* **63**, 144530
- Fazio, R. and van der Zant, H.: 2001, *Phys. Rep.* **355**, 235
- Ficek, Z. and Drummond, P. D.: 1991a, *Physical Review A* **43**, 6247
- Ficek, Z. and Drummond, P. D.: 1991b, *Physical Review A* **43**, 6258
- Filatrella, G., Pedersen, N. F., and Wiesenfeld, K.: 1998, *Applied Physics Letters* **72**, 1107
- Filatrella, G., Pedersen, N. F., and Wiesenfeld, K.: 2000, *Physical Review E* **61**, 2513
- Frau, M., R-Monteiro, M. A., and Sciuto, S.: 1994, *Journal of Physics A Mathematical General* **27**, 801

- Friberg, S., Hong, C. K., and Mandel, L.: 1985, *Physical Review Letters* **54**, 2011
- Friedman, J. R., Patel, V., Chen, W., Tolpygo, S. K., and Lukens, J. E.: 2000, *Nature* **406**, 43
- Furusawa, A. and Takei, N.: 2007, *Phys. Rep.* **443**, 97
- Genes, C., Berman, P. R., and Rojo, A. G.: 2003, *Physical Review A* **68(4)**, 043809
- Glauber, R. J.: 1963a, *Physical Review* **131**, 2766
- Glauber, R. J.: 1963b, *Physical Review* **130**, 2529
- Gómez, C., Ruiz-Altaba, M., and Sierra, G.: 1996, *Quantum Groups in Two-dimensional Physics*, Cambridge - University Press
- Greentree, A. D., Schirmer, S. G., Green, F., Hollenberg, L. C., Hamilton, A. R., and Clark, R. G.: 2004, *Physical Review Letters* **92(9)**, 097901
- Greiner, W., Neise, L., and Stöcker, H.: 1994, *Thermodynamics and Statistical Mechanics.*, Springer - Verlag, Heidelberg
- Hagelstein, P. L. and Chaudhary, I. U.: 2006, *ArXiv Condensed Matter e-prints*
- Hald, J., Sørensen, J. L., Schori, C., and Polzik, E. S.: 1999, *Physical Review Letters* **83**, 1319
- Haldane, F. D. M.: 1988, *Physical Review Letters* **60**, 635
- Harbaugh, J. K. and Stroud, D.: 2000, *Physical Review B* **61**, 14765
- Haroche, S.: 1998, *Phys. Today* **36**, 805
- Hase, M., Kohno, M., Kitazawa, H., Tsujii, N., Suzuki, O., Ozawa, K., Kido, G., Imai, M., and Hu, X.: 2006, *Physical Review B* **73(10)**, 104419
- Hase, M., Terasaki, I., and Uchinokura, K.: 1993, *Physical Review Letters* **70**, 3651
- Hecht, K. T.: 1987, *The Vector Coherent State. Method and Its Application to Problems of Higher Symmetries.*, Springer-Verlag
- Heisenberg, W.: 1926, *Zeitschrift für Physik* **38**, 411
- Imai, I. and Hayashi, M. (eds.): 2006, *Quantum Computation and Information: From Theory to Experiment*, Springer - Verlag, Heidelberg
- Inozemtsev, V. I.: 1995, *Journal of Physics A Mathematical General* **28**, L439
- Inozemtsev, V. I. and Dorfel, B.: 1993, *Journal of Physics A Mathematical General* **26**, L999

- Inozemtsev, V. I. and Inozemtseva, N. G.: 1991, *Journal of Physics A Mathematical General* **24**, L859
- Inozemtsev, V. I. and Kuzemsky, A. L.: 1991, *Physical Review B* **43**, 1090
- Inozemtseva, N. G. and Inozemtsev, V. I.: 1997, *Journal of Physics A Mathematical General* **30**, L137
- Jackson, J. D.: 1962, *Classical Electrodynamics*
- Javanainen, J. and Gould, P. L.: 1990, *Physical Review A* **41**, 5088
- Jaynes, E. T. and Cummings, F. W.: 1963, in *Proceedings of the IEEE*, Vol. 51, p. 89
- Joshi, A.: 2000, *Physics Letters A* **270**, 249
- Josse, V., Dantan, A., Bramati, A., and Giacobino, E.: 2004, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 532
- Kitagawa, M. and Ueda, M.: 1993, *Physical Review A* **47**, 5138
- Klauder, J. R. and Skagerstam, B. S.: 1985, *Coherent States - Applications and Mathematical Physics*, Singapore: World Scientific
- Klauder, J. R. and Sudarshan, E. C. G.: 2006, *Fundamental of Quantum Optics*, Dover Publications, Dover
- Klein, A. and Marshalek, E. R.: 1991, *Reviews of Modern Physics* **63**, 375
- Klimov, A. B., Guzmán, R., Retamal, J. C., and Saavedra, C.: 2003, *Physical Review A* **67(6)**, 062313
- Klimov, A. B., Negro, J., Farias, R., and Chumakov, S. M.: 1999, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **1**, 562
- Klimov, A. B. and Sanchez-Soto, L. L.: 2000, *Physical Review A* **61(6)**, 063802
- Kok, P., Munro, W. J., Nemoto, K., Ralph, T. C., Dowling, J. P., and Milburn, G. J.: 2007, *Reviews of Modern Physics* **79**, 797
- Korbicz, J. K., Cirac, J. I., and Lewenstein, M.: 2005, *Physical Review Letters* **95(12)**, 120502
- Korbicz, J. K., Gühne, O., Lewenstein, M., Häffner, H., Roos, C. F., and Blatt, R.: 2006, *Physical Review A* **74(5)**, 052319
- Kuzmich, A. and Polzik, E. S.: 2003, *Quantum Information with Continuous*

- Variables*, Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands
- Leibfried, D., Meekhof, D. M., King, B. E., Monroe, C., Itano, W. M., and Wineland, D. J.: 1996, *Physical Review Letters* **77**, 4281
- Loudon, R. and Knight, P. L.: 1987, *Journal of Modern Optics* **34**, 709
- Lyakhov, A. O., Braun, D., and Bruder, C.: 2007, *Physical Review A* **76(2)**, 022321
- Majumdar, C. K. and Ghosh, D. K.: 1969, *Journal of Mathematical Physics* **10**, 1388
- Mandel, L. and Wolf, E.: 1995, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge, University Press
- Marumori, T., Yamamura, M., and Tokunaga, A.: 1964a, *Progress of Theoretical Physics* **31**, 1009
- Marumori, T., Yamamura, M., Tokunaga, A., and Takada, K.: 1964b, *Progress of Theoretical Physics* **32**, 726
- Meier, F., Levy, J., and Loss, D.: 2003a, *Physical Review B* **68(13)**, 134417
- Meier, F., Levy, J., and Loss, D.: 2003b, *Physical Review Letters* **90(4)**, 047901
- Messikh, A., Ficek, Z., and Wahiddin, M. R. B.: 2003, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **5**, L1
- Mikami, H. and Kobayashi, T.: 2007, *Physical Review A* **75(2)**, 022325
- Mollow, B. R. and Glauber, R. J.: 1967, *Physical Review* **160**, 1076
- Moreva, E. V., Maslennikov, G. A., Straupe, S. S., and Kulik, S. P.: 2006, *Physical Review Letters* **97(2)**, 023602
- Moyal, J. E. and Bartlett, M. S.: 1949, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **45**, 99
- Nielsen, A. E. B. and Mølmer, K.: 2008, *Physical Review A* **77(6)**, 063811
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L.: 2002, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, University Press
- Nishijo, J., Ogura, E., Yamaura, J., Miyazakia, A., Enokia, T., Takano, T., Kuwatanib, Y., and Iyoda, M.: 2000, *Solid State Communications* **116**, 661
- Oblak, D.: 2005, *Physical Review A* **71**, 043807
- O'Leary, D. P., Brennen, G. K., and Bullock, S. S.: 2006, *Physical Review A* **74(3)**,

032334

- Pathria, R. K.: 1977, *Statistical Mechanics*, Pergamon Press
- Pauli, W.: 1980, *General principles of quantum mechanics - English translation*, Heidelberg: Springer, 1980
- Peng, J. S. and Lee, G. X.: 1999, *Introduction to Modern Quantum Optics*, World Scientific - Singapore
- Perelemov, A.: 1986, *Generalized Coherent States and Their Applications.*, Texts and Monogr. in Physics, Springer
- Porras, D. and Cirac, J. I.: 2004, *Physical Review Letters* **92(20)**, 207901
- Poulsen, U. V. and Mølmer, K.: 2001, *Physical Review Letters* **87(12)**, 123601
- Prakash, H. and Kumar, R.: 2005, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **7**, 757
- Rabl, P. and Zoller, P.: 2007, *Physical Review A* **76(4)**, 042308
- Radon, J.: 1917, *Mathematisch-Physiche Klass* **69**, 262
- Raghavan, S., Pu, H., Meystre, P., and Bigelow, N. P.: 2001, *Optics Communications* **188**, 149
- Rangel, R., Carvalho, L., and Zagury, N.: 2005, *Journal of Physics B Atomic Molecular Physics* **38**, 729
- Reboiro, M.: 2006, in *AIP Conference Proceedings-VI Latin-American Symposium on Nuclear Physics and Applications*, Vol. 884, p. 429
- Reboiro, M.: 2008, *Phys. Scr.* **78(4)**, 045006
- Reboiro, M., Civitarese, O., and Rebon, L.: 2007, *Physics Letters A* **366**, 241
- Ring, P. and Schuck, P.: 1980, *The Nuclear Many - Body Problem*, Springer - Verlag, N. Y.
- Rojo, A. G.: 2003, *Physical Review A* **68(1)**, 013807
- Romero-Isart, O., Eckert, K., and Sanpera, A.: 2007, *Physical Review A* **75(5)**, 050303
- Rubín-Linares, G. T. and Moya-Cessa, H.: 2005, *Journal of Modern Optics* **52**, 1751
- Saffman, M., Oblak, D., Appel, J., and Polzik, E. S.: 2009, *Physical Review A* **79(2)**, 023831

- Sakurai, J.: 1985, *Modern Quantum Mechanics*, University of Hawaii
- Schwinger, J.: 1965, *Quantum Theory of Angular Momentum*, Eds. Academic, New York
- Scully, M. O. and Zubairy, M. S.: 1997, *Quantum Optics*, Cambridge - University Press
- Shastry, B. S.: 1988, *Physical Review Letters* **60**, 639
- Shnirman, A., Schön, G., and Hermon, Z.: 1997, *Physical Review Letters* **79**, 2371
- Sørensen, A. and Mølmer, K.: 1999, *Physical Review Letters* **83**, 2274
- Tamir, B.: 2007, *Physical Review A* **75(3)**, 032344
- Tavis, M. and Cummings, F. W.: 1968, *Physical Review* **170**, 379
- Teper, I., Vrijsen, G., Lee, J., and Kasevich, M. A.: 2008, *Physical Review A* **78(5)**, 051803
- Troiani, F., Ghirri, A., Affronte, M., Carretta, S., Santini, P., Amoretti, G., Piligkos, S., Timco, G., and Winpenny, R. E.: 2005, *Physical Review Letters* **94(20)**, 207208
- van der Wal, C. H., ter Haar, A. C. J., Wilhelm, F. K., Schouten, R.Ñ., Harmans, C. J. P. M., Orlando, T. P., Lloyd, S., and Mooij, J. E.: 2000, *Science* **290**, 773
- Walls, D. F.: 1983, *Nature* **306**, 141
- Walls, D. F. and Zoller, P.: 1981, *Physical Review Letters* **47**, 709
- Wang, X.: 2001, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **3**, 93
- Wang, X. and Sanders, B. C.: 2003, *Physical Review A* **68(1)**, 012101
- Wang, X., Søndberg Sørensen, A., and Mølmer, K.: 2001, *Physical Review A* **64(5)**, 053815
- Wigner, E.: 1932, *Physical Review* **40**, 749
- Wineland, D. J., Bollinger, J. J., Itano, W. M., and Heinzen, D. J.: 1994, *Physical Review A* **50**, 67
- Wineland, D. J., Bollinger, J. J., Itano, W. M., Moore, F. L., and Heinzen, D. J.: 1992, *Physical Review A* **46**, 6797
- Yonezawa, H., Braunstein, S. L., and Furusawa, A.: 2007, *Physical Review Letters* **99(11)**, 110503

- Yukalov, V. I. and Yukalova, E. P.: 2004, *Physical Review A* **70(5)**, 053828
- Yurke, B.: 1986, *Physical Review Letters* **56**, 1515
- Yurke, B., McCall, S. L., and Klauder, J. R.: 1986, *Physical Review A* **33**, 4033
- Zeng, B., Zhou, D. L., Xu, Z., and You, L.: 2005, *Physical Review A* **71(4)**, 042317
- Zou, J. and Shao, B.: 2001, *Physical Review B* **64(2)**, 024511