

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN SIMULACIÓN NUMÉRICA Y CONTROL



SIMULACIÓN POR MEDIO DE VOLÚMENES FINITOS DE LAS
ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA IDEAL
DEPENDIENTE DEL TIEMPO EN TRES DIMENSIONES ESPACIALES

Ing. **MARIANO ÁLVARO MARTINEZ**

Director

Prof. Dr. **Sergio ELASKAR**

Codirectoras

Prof. Dra. **Ana Scarabino**

Prof. Dra. **Marcela Goldschmit**

TABLA DE CONTENIDOS

Índice de Figuras	vii
Resumen	ix
Abstract	x
Objetivo	xi
Plan de la Tesis	xi
Capítulo I: Introducción y marco teórico	
I.1.- Reseña histórica	1
I.2.- Descripción del problema numérico – Definiciones	3
I.2.a.- Conceptos y definiciones matemáticas útiles	3
I.2.b.- Problema de Riemann	6
Capítulo II: Deducción de las Ecuaciones	
II.1.- Ecuaciones que modelan el problema físico.	9
II.1.a.- Ecuaciones de Maxwell	9
II.1.b.- Ley de Ohm y ecuación de inducción	11
II.1.c.- Ecuación de Conservación de la Masa	12
II.1.d.- Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento	13
II.1.e.- Ecuación de Conservación de la Energía	15
II.1.f.- Síntesis	16
II.2.- Adaptación de las ecuaciones al método numérico	17
II.2.a.- Forma matricial de las ecuaciones de la MGD	18
II.2.b.- Forma adimensional de las Ecuaciones	18
II.2.c.- Forma conservativa de las Ecuaciones de la MGD	19
II.2.d.- Variables primitivas	21
II.2.e.- Forma cuasi-lineal. Matrices Jacobianas de los Flujos	22
II.2.f.- Ondas características	24
Capítulo III: Solución Numérica	
III.1.- Aplicación del problema de Riemann a la MGD	27
III.2.- Método de Solución	29
III.2.a.- Tubo de choque	29

III.2.b.- Discretización del dominio	30
III.2.c.- Método de Godunov	31
III.2.d.- Cálculo de los Flujos de Godunov por HLL	33
III.2.e.- “Solver” de Roe	36
III.2.d.- Modificaciones al “solver” de Roe	39
III.3.- Problema 3D	42
Capítulo IV: Implementación del Código Numérico	
IV.1.- Composición general del software	49
IV.2.- Subrutina MAIN	49
IV.3.- Subrutina DAMOLE	51
IV.4.- Subrutina GEOMETRI	52
IV.5.- Subrutina INICIAL	52
IV.6.- Subrutina PANTALLA	52
IV.7.- Subrutina IMPRESIONES	52
IV.8.- Subrutina METOTVD	52
IV.9.- Subrutinas FLUJYEEEX, FLUJYEEY, FLUJYEEZ	54
Capítulo V: IMPLEMENTACIÓN DEL CÓDIGO COMPUTACIONAL	
V.1.- Equipamiento	57
V.2.- Tubo de choque de la MGD	57
V.3.- Mallado	58
V.4.- Paso temporal	59
V.5.- Condiciones Iniciales	61
V.6.- Condiciones de Contorno	61
V.7.- Variables observadas	62
Capítulo VI: RESULTADOS	
VI.1.- Evolución de la Densidad	63
VI.2.- Evolución de la Presión	66
VI.3.- Evolución de la Velocidad Normal	68
VI.4.- Evolución de las Velocidades Tangenciales	69
VI.5.- Evolución del Campo Magnético	70
VI.6.- Validación	71
VI.7.- Comparación entre Mallados	72
Capítulo VII: CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	
VII.1.- Conclusiones	75
VII.2.- Experiencia personal del Autor	76
VII.3.- Comentarios adicionales del Autor	77
VII.4.- Sugerencias sobre posibles trabajos futuros	78
ABREVIATURAS	79
REFERENCIAS	83

Apéndice A: FORMA ADIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA IDEAL	87
Apéndice B: DEDUCCIÓN DE LOS VECTORES DE FLUJO HIPERBÓLICO	97
Apéndice C: CÁLCULO DE LAS MATRICES JACOBIANAS	101
Apéndice D: PRESENTACIÓN DE LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES MODIFICADOS	107

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.- Solución general de un Problema de Riemann ideal	7
Figura 3.1.- Discretización	31
Figura 3.2.- Método de Godunov	32
Figura 3.3.- Solución exacta de un Problema de Riemann entre celdas	34
Figura 3.4.- Diferentes estados a lo largo de la solución exacta de un Problema de Riemann	37
Figura 5.1.- Paredes del tubo	62
Figura 6.1.- Evolución de la densidad	65
Figura 6.2.- Identificación de ondas	66
Figura 6.3.- Evolución de la Presión	67
Figura 6.4.- Evolución de la Velocidad Normal	68
Figura 6.5.- Evolución de las Velocidades Tangenciales	70
Figura 6.6.- Evolución del Campo Magnético	71
Figura 6.7.- Comparación entre diferentes mallados	73

RESUMEN

El creciente interés por el desarrollo de potentes propulsores de plasma impulsado por campos electromagnéticos ha hecho que la investigación sobre magnetogasdinámica cobrara una gran importancia en los últimos tiempos.

La experimentación, siempre limitada por sus costos, tiempos y otras dificultades, debe ser necesariamente complementada por métodos de simulación. Es así que surge la necesidad de desarrollar herramientas numéricas prácticas y eficaces en este campo.

En la presente Tesis se encontrará el desarrollo de las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal no estacionaria en las tres dimensiones espaciales, seguido de un moderno método numérico para su resolución. Se ha empleado el método de Roe, en un esquema TVD de alta resolución, con las modificaciones propuestas por Yee et al.

Para la implementación del método en cuestión se ha desarrollado un código en lenguaje FORTRAN sobre la base de un código bidimensional preexistente, y se lo ha aplicado al problema del tubo de choque, que representa un problema de Riemann magnetogasdinámico.

Debido al alto costo computacional que demanda una simulación en 3D, se ha debido reducir sensiblemente la densidad del mallado, en comparación con la utilizada en los casos unidimensional y bidimensional. Con la intención de evaluar esto último, se ha incluido, al final del trabajo, un análisis del efecto de la densidad del mallado sobre los resultados.

El problema del tubo de choque de la magnetogasdinámica, utilizado como “benchmark” en esta Tesis, ha sido resuelto satisfactoriamente por el método 3D aquí desarrollado.

ABSTRACT

The increasing interest for the development of powerful plasma propulsion engines powered by electromagnetic fields made the magnetogasdynamic gain great importance in the last times.

Experimentation, always limited by its costs, time and other factors, must be necessarily complemented by numerical simulation methods. For this reason, the need for the development of practical and efficient numerical tools in this field appears.

In the present Thesis the reader will find the development of the equations of the ideal magnetogasdynamic in the three spatial dimensions, followed by a modern numerical resolution method. The method of Roe has been applied, in a high resolution TVD scheme, with the modifications proposed by Yee et al.

For the implementation of this method a FORTRAN code has been designed, based on a preexistent bidimensional code, and it has been applied to the resolution of the shock tube problem, that represents a magnetogasdynamic Riemann problem.

Due to the high computational cost demanded by a 3D simulation, it has been necessary to reduce the grid density, compared to that used on the unidimensional and bidimensional cases. In order to evaluate this last issue, an analysis of the effect of the grid density on the results has been included at the end of the present work.

The magnetogasdynamic shock tube problem, used as a “benchmark” in this Thesis, has been satisfactorily solved by the 3D method developed here.

OBJETIVO

El objetivo de la presente Tesis es desarrollar e implementar un método numérico para resolver las ecuaciones de la magnetogasdinámica ideal no estacionaria en las tres dimensiones espaciales.

PLAN DE LA TESIS

El trabajo de redacción de esta Tesis al que se encuentra actualmente abocado su autor es, en realidad, la última etapa del desarrollo de la misma. Este desarrollo comprende un proceso que puede resumirse en cuatro etapas que forman parte del plan original, y que a continuación se detallan:

1^{ra} Etapa: Estudio y reconocimiento del tema en cuestión y recopilación de información. Incluye el trabajo de valorización y selección de la vasta cantidad de información a la que se tiene acceso en nuestros días.

2^{da} Etapa: Desarrollo de un método numérico para la resolución del problema planteado en las tres dimensiones espaciales. El mismo se basa en métodos previamente desarrollados para problemas similares en una y dos dimensiones.

3^{ra} Etapa: Desarrollo de un software apropiado para la implementación del método numérico. Realización de los ensayos numéricos con el mismo. Validación mediante la resolución de un problema conocido.

4^{ta} Etapa: Redacción de la Tesis.

Capítulo I:

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Comenzaremos el desarrollo de esta tesis ofreciendo una breve explicación de algunos conceptos, cuyo conocimiento permitirá una mejor comprensión del tema que es objeto de la misma. Se presentarán algunas nociones básicas conceptos sobre la magnetogasdinámica y sus aplicaciones, y a continuación, se ofrecerá una serie de conceptos matemáticos que se utilizarán más adelante.

I.1.- RESEÑA HISTÓRICA

Desde los comienzos de los viajes espaciales los motores cohete químicos han sido el medio de propulsión y control utilizado. Tempranamente los especialistas han sido concientes de lo ventajoso que resultaría el poder aprovechar las altas velocidades de escape de gases que se logran con sistemas de propulsión eléctrica. Estas permitirían disminuir los costos de las misiones espaciales, así como encarar misiones al espacio profundo. A pesar de todo esto, la propulsión eléctrica fue relegada a un segundo plano en los programas espaciales de los Estados Unidos y Europa. Durante los últimos años esta tendencia ha cambiado dramáticamente y han comenzado a desarrollarse potentes propulsores de plasma impulsados por campos electromagnéticos.

La principal limitación que presentan los cohetes químicos es su baja velocidad de escape de gases. Esta suele ser de aproximadamente 2km/s, pudiendo alcanzar un máximo de 3.5km/s. Es conocido que cuanto menor sea la velocidad de escape mayor es la carga de propelente necesaria. Como ejemplo de esto podemos mencionar lo siguiente: alcanzar una órbita terrestre implica un cambio de velocidad de unos 8km/s, para lograr esto un

cohete debe llevar una cantidad de combustible mucho mayor que la carga útil. En estos casos, la carga útil suele ser de alrededor de 1% del total del peso.

La propulsión eléctrica puede mejorar esta situación proveyendo una mayor velocidad de escape y por ende una menor masa de propelente. Los primeros propulsores eléctricos fueron los electrotérmicos. En ellos el propelente era calentado a través del contacto con una resistencia espiral caliente (resistojets), o mediante un arco voltaico que atravesaba el seno del fluido (arcjets).

Los resistojets comenzaron a utilizarse comercialmente a principios de la década de los '80s, y lograron velocidades de salida de hasta 10km/s. Los arcjets comenzaron a utilizarse a principio de los '90s, y alcanzaron velocidades de salida levemente superiores.

En 1994 la NASA puso en funcionamiento el primer sistema de propulsión electrostática. En estos se acelera una corriente de iones, tras lo cual se inyecta una corriente de electrones que neutralizan el flujo. Estos propulsores alcanzan una velocidad de salida de unos 100km/s.

Los propulsores electromagnéticos, también llamados propulsores de plasma, fueron inventados en los Estado Unidos durante los '60s, pero en poco tiempo fueron abandonados. En la Unión Soviética, sin embargo, se continuó con su desarrollo y en 1972 más de 100 misiones espaciales contaron con esta tecnología. En el año 2000 las agencias espaciales estadounidense y europea redescubrieron las ventajas de este tipo de propulsión.

Resulta clara, a partir de todo lo dicho anteriormente, la importancia que tienen la comprensión y simulación del comportamiento de un gas ionizado inmerso en un campo magnético. Al finalizar la presente tesis, el autor espera haber hecho, al menos, una pequeña contribución en este campo.

I.2.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA NUMÉRICO - DEFINICIONES

Antes de encarar la resolución efectiva del problema que es objeto de esta tesis resulta imprescindible repasar brevemente ciertos conceptos básicos, que nos serán de utilidad para comprender los modelos empleados y los métodos de resolución utilizados. Veremos cómo surgen y qué representan las ecuaciones diferenciales hiperbólicas en derivadas parciales, su forma cuasi-lineal, su relación con la ecuación de conservación y con el problema de Riemann. Asimismo, se repasarán algunos conceptos matemáticos que serán de utilidad en los capítulos subsiguientes.

I.2.a.- Conceptos y definiciones matemáticas útiles

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP)

Un sistema genérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Primer Orden, expresado en su forma matricial unidimensional, puede representarse como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \underline{B} = \underline{0} \quad (1.1)$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Según las características que presentan los distintos valores que componen esta ecuación podemos decir:

- Si las componentes de \underline{A} y las de \underline{B} son constantes el sistema 1.1 – 1.2 se denomina *lineal con componentes constantes*.
- Si las componentes de \underline{A} y las de \underline{B} son función de x y de t el sistema se denomina *lineal con coeficientes variables*.

- Si la matriz de coeficientes \underline{A} es función del vector \underline{U} , $\underline{A} = \underline{A}(\underline{U})$, el sistema se denomina *cuasi-lineal*.
- Si $\underline{B} = \underline{0}$ el sistema se denomina *homogéneo*.

Es de importancia en estos sistemas definir apropiadamente las condiciones de contorno y las condiciones iniciales. Esto último nos permitirá más tarde definir lo que llamaremos un *problema de Riemann*.

Particular importancia tiene el resaltar que un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0} \quad (1.3)$$

es un sistema EDPs *cuasi-lineales* y *homogéneas*.

Ley de Conservación

Una ley de conservación es una ecuación o sistema de EDPs que puede expresarse en la forma:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{U})}{\partial x} = \underline{0} \quad (1.4)$$

donde:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \quad \underline{F}(\underline{U}) = \begin{bmatrix} f_1(u_i) \\ f_2(u_i) \\ \vdots \\ f_m(u_i) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

son, respectivamente, el vector de variables conservadas y el vector de flujos.

Matriz Jacobiana

La Matriz Jacobiana de la Función de flujo $\underline{F}(\underline{U})$ es la matriz

$$\underline{A}(\underline{U}) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Ahora que conocemos esta matriz, observamos que si aplicamos la regla de la cadena a la ecuación de conservación (1.4), esta puede expresarse como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0} \quad (1.7)$$

o bien, utilizando la matriz Jacobiana recién definida,

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0} \quad (1.8)$$

la cual es idéntica a la ecuación (1.3), es decir, es un sistema de EDPs cuasi-lineales y homogéneas. Cabe adelantar que es un sistema de este tipo, con condiciones iniciales y de borde particulares, el que se resolverá en esta tesis.

Autovalores

Los autovalores λ_i de una matriz \underline{A} de $m \times m$ son las soluciones del polinomio característico

$$|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0 \quad (1.9)$$

donde \underline{I} es la matriz identidad. Los autovalores de la matriz \underline{A} de un sistema como el (1.1) son llamados autovalores del sistema. Físicamente, los autovalores representan velocidades de propagación de información. En el problema que nos compete tendrán singular importancia por representar las velocidades de las ondas que más adelante veremos.

Autovectores

Un autovector derecho de la matriz \underline{A} correspondiente al autovalor λ_i de la misma matriz es un vector de m componentes \underline{R}^i que satisface la ecuación $\underline{A}\underline{R}^i = \lambda_i \underline{R}^i$.

Un autovector izquierdo de la matriz \underline{A} correspondiente al autovalor λ_i de la misma matriz es un vector de m componentes \underline{L}^i que satisface la ecuación $\underline{L}^i \underline{A} = \lambda_i \underline{L}^i$.

Cabe destacar que los autovalores y autovectores de la matriz \underline{A} serán ampliamente utilizados en los métodos de resolución numérica que se describirán en el Capítulo III.

Sistema hiperbólico

Un sistema del tipo (1.1) se llama hiperbólico en un punto (x, t) si la matriz \underline{A} tiene m autovalores reales y el correspondiente conjunto de m autovectores derechos linealmente independientes. Se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico si los autovalores son todos reales y distintos.

Más adelante veremos la importancia de un sistema estrictamente hiperbólico y como se modificará una matriz para transformar un sistema hiperbólico en uno hiperbólico estricto.

I.2.b.- Problema de Riemann

Se denomina Problema de Riemann a un caso particular de Problema de Valor Inicial [1]. Para un sistema hiperbólico con coeficientes constantes (lineal) este problema es del tipo:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.10)$$

con las condiciones iniciales: $\underline{U}(x,0) = \underline{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \underline{U}_L & x < 0 \\ \underline{U}_R & x > 0 \end{cases}$

donde: $\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$

si el sistema es estrictamente hiperbólico tendrá m autovalores reales y distintos

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \quad (1.11)$$

Para la solución de este problema se definen m familias de *características* ($dx/dt = \lambda_i$) y se consideran especialmente las que pasan por el punto $(x=0, t=0)$. Graficando en el plano $x-t$, estas representan m ondas que emanan del origen, una para cada autovalor λ_i . Cada onda, i, representa una discontinuidad en \underline{U} que se propaga con una velocidad λ_i .

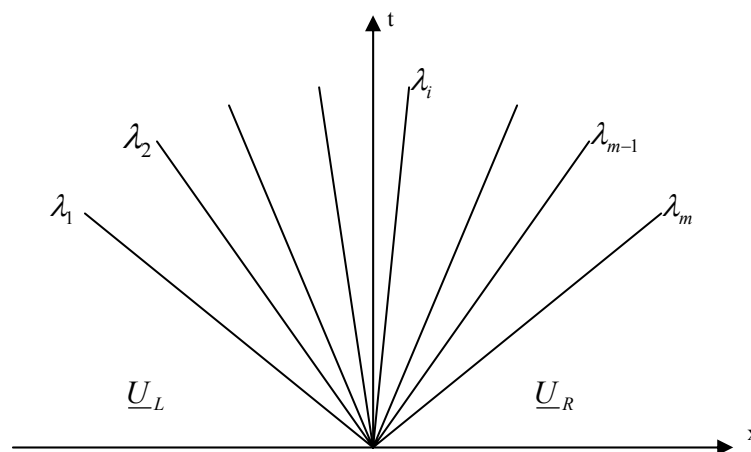


Figura 1.1.- Solución general de un problema de Riemann ideal

A la izquierda de la primera onda la solución es conocida y a la derecha de la última onda también. Es decir,

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_L \quad \text{si } x - \lambda_1 t < 0 \\ \underline{U} &= \underline{U}_R \quad \text{si } x - \lambda_m t > 0\end{aligned}$$

La solución para este problema consiste en encontrar los valores de \underline{U} en los espacios entre las ondas.

Como los autovectores derechos $\underline{R}^{(1)}, \dots, \underline{R}^{(m)}$ son linealmente independientes podemos escribir los dos estados conocidos en la forma:

$$\underline{U}_L = \sum_{i=1}^m \beta_i \underline{R}^{(i)} \qquad \underline{U}_R = \sum_{i=1}^m \gamma_i \underline{R}^{(i)} \qquad (1.12)$$

para el resto de los casos puede demostrarse que la solución es:

$$\boxed{\underline{U}(x, t) = \sum_{x < \lambda_1 t} \beta_i \underline{R}^{(i)} + \sum_{x > \lambda_m t} \gamma_i \underline{R}^{(i)}} \qquad (1.13)$$

Los coeficientes constantes β_i y γ_i se despejan de las ecuaciones (1.12).

Esta solución del problema de Riemann *lineal* es de gran importancia ya que será empleada en el Capítulo III como parte de los métodos para resolver sistemas *cuasi-lineales*. Uno de estos últimos se empleará para resolver las ecuaciones que se desarrollarán en el Capítulo II.

Capítulo II:

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES

En el presente capítulo se desarrollarán las ecuaciones que representan el modelo de la magnetogasdinámica no estacionaria, cuya solución se tratará en el capítulo siguiente. En la primera parte se presentarán las expresiones matemáticas que modelan el problema físico tratado, mientras que en la segunda parte estas expresiones serán escritas de manera conveniente para el método de resolución escogido.

II.1.- ECUACIONES QUE MODELAN EL PROBLEMA FÍSICO

La magnetogasdinámica es regida por las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido ionizado. Consideraremos, por esta razón, la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, la ecuación de conservación de la energía, la ley de Ohm y las ecuaciones de Maxwell. Todas estas serán aplicadas al caso de un fluido simple y se realizarán diversas simplificaciones que se irán mencionando oportunamente.

II.1.a.- Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo son conocidas como ecuaciones de Maxwell, en honor al físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien agrupó unas ecuaciones hasta el momento independientes para que formaran parte de una teoría simétrica y amplia, la teoría del Electromagnetismo.

Ley de Gauss Eléctrica: $\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \rho^q$ (2.1)

Ley de Gauss Magnética: $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ (2.2)

Ley de Faraday: $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ (2.3)

Ley de Ampère: $\nabla \times \underline{B} = \mu_o \underline{j} + \underbrace{\mu_o \epsilon_o}_{\text{Corriente de desplazamiento}} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$ (2.4)

donde, $\underline{E} \equiv$ Campo eléctrico

$\underline{B} \equiv$ Campo magnético

$\underline{j} = \frac{i}{Sup} \equiv$ Densidad de corriente

$\rho^q = \frac{q}{Vol} \equiv$ Densidad de carga eléctrica

$\epsilon_o \equiv$ Permeabilidad eléctrica en el vacío

$\mu_o \equiv$ Permeabilidad magnética en el vacío

Simplificación 1: Considerando la hipótesis de neutralidad del plasma en su conjunto la densidad de carga en un volumen de control será nula ($\rho^q|_{VC} = 0$). Reescribimos entonces la Ley de Gauss eléctrica como $\nabla \cdot \underline{E} = 0$

Simplificación 2: Considerando la relación $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$, es decir, $\mu_o \epsilon_o = \frac{1}{c^2} \approx 0$. Esto nos permite reescribir la ley de Ampère como $\nabla \times \underline{B} = \mu_o \underline{j}$

De esta manera las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

Ley de Gauss Eléctrica:	$\nabla \cdot \underline{E} = 0$	(2.5)
Ley de Gauss Magnética:	$\nabla \cdot \underline{B} = 0$	(2.6)
Ley de Faraday:	$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$	(2.7)

Ley de Ampère:	$\nabla \times \underline{B} = \mu_o \underline{j}$ (2.8)
----------------	---

Tabla 2.1.- Ecuaciones de Maxwell.

II.1.b.- Ley de Ohm y Ecuación de Inducción

La ley de Ohm generalizada expresa la relación entre la densidad de corriente, el campo eléctrico, el campo magnético y la presión electrónica. Haciendo la suposición de que la masa del electrón es mucho menor que la del ión esta relación puede expresarse según (Udrea [2]):

$$\underbrace{\frac{m_e}{n_e^2} \frac{\partial \underline{j}}{\partial t}}_1 = \underline{E} + \underline{u} \times \underline{B} - \underbrace{\frac{1}{n_e} \underline{j} \times \underline{B}}_2 + \underbrace{\frac{1}{n_e} \nabla \cdot \underline{\tau}_e}_3 + \underbrace{\frac{1}{n_e} \nabla p_e}_4 - \underline{\eta} \cdot \underline{j} \quad (2.9)$$

donde: $m_e \equiv$ masa del electrón

$\underline{\tau}_e \equiv$ tensor de tensiones del electrón

$p_e \equiv$ presión del electrón

$n_e \equiv$ cantidad de electrones por unidad de volumen

$\underline{\eta} \equiv$ tensor de resistividad eléctrica del plasma

Término 1: Se desprecia debido a que las frecuencias características del plasma son mucho menores que la frecuencia del electrón.

Término 2: Es la contribución del efecto Hall a la ley de Ohm. El tratamiento de la MGD con efecto Hall está fuera de los objetivos de esta Tesis. Además, este efecto requiere de un tratamiento numérico especial por cuestiones de estabilidad de la solución. El término no será considerado (Udrea [2]).

Término 3: La divergencia del tensor de tensiones del electrón suele ser despreciada por su pequeña magnitud.

Término 4: Aún se está trabajando en modelos que representen con exactitud el término de la presión electrónica. Siguiendo lo descrito por Udrea [2] no será tenido en consideración en esta Tesis.

Después de todas estas simplificaciones en la ecuación solo quedan los efectos resistivos (Sutton y Sherman [3]):

$$\underline{E} = \underline{\eta} \cdot \underline{j} - \underline{u} \times \underline{B} \quad (2.10)$$

Reemplazando esta expresión en la Ley de Faraday obtenemos:

$$\nabla \times (\underline{\eta} \cdot \underline{j} - \underline{u} \times \underline{B}) = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Introduciendo la Ley de Ampère:

$$\nabla \times \left[\underline{\eta} \cdot \frac{1}{\underline{\mu}_o} (\nabla \times \underline{B}) - \underline{u} \times \underline{B} \right] = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

Esto equivale a:

$$\boxed{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u}) = -\nabla \times \left[\frac{1}{\underline{\mu}_o} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right]} \quad (2.13)$$

que es la forma definitiva de la ecuación que utilizaremos en este trabajo.

II.1.c.- Ecuación de Conservación de la Masa

El requerimiento de conservación de la masa del fluido impone ciertas restricciones al campo de velocidades [4]. Esta condición suele expresarse mediante la siguiente relación entre la derivada temporal de la densidad del fluido y la divergencia del vector cantidad de movimiento (flujo másico por unidad de volumen):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0} \quad (2.14)$$

Esta relación debe cumplirse en todos los puntos del fluido en que la expresión del lado izquierdo es una función continua de la posición.

II.1.d.- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Expresaremos a continuación la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento tal como es presentada por Bird, Stewart y Lightfoot [5]:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u})}_1 = -\underbrace{(\nabla \cdot \rho \underline{u} \underline{u})}_2 - \underbrace{\nabla p}_3 - \underbrace{(\nabla \cdot \underline{\tau})}_4 + \underbrace{\rho \underline{g}}_5 \quad (2.15)$$

Término 1: Es la tasa de cambio de la cantidad de movimiento por unidad de volumen.

Término 2: Es la velocidad de ganancia o de pérdida de cantidad de movimiento por convección, por unidad de volumen (flujo de la cantidad de movimiento).

Término 3: Es la fuerza de presión que actúa sobre un elemento por unidad de volumen. Puede escribirse $\nabla \cdot (\underline{I}p)$. Donde \underline{I} es el tensor unitario.

Término 4: Es la velocidad de ganancia o de pérdida de cantidad de movimiento por transporte viscoso, por unidad de volumen.

Es habitual englobar los términos 2 y 3 en un único término: $\nabla \cdot \underline{\sigma} = \nabla \cdot (\underline{\tau} - \underline{I}p)$

Siendo $\underline{\sigma}$ el tensor de tensiones y $\underline{\tau} = \mu \left[\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T - \frac{2}{3} \underline{I}(\nabla \cdot \underline{u}) \right]$ representa las tensiones viscosas.

Término 5: Es la fuerza de masa debida a la gravedad (peso) por unidad de volumen que actúa sobre el elemento. Debido a que el movimiento se realizará principalmente en dirección horizontal y que el peso del fluido resulta despreciable no se lo considerará.

Cabe destacar en este punto que hasta aquí se ha considerado un fluido neutro. Con el propósito de hallar el balance de cantidad de movimiento para un fluido ionizado, será necesario agregar un término que represente la fuerza de masa debida al campo electromagnético. Este se expresará como $\underline{j} \times \underline{B}$.

La ecuación (2.15) queda entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) = -(\nabla \cdot \rho \underline{u} \underline{u}) - \nabla \cdot (\underline{I} p) - (\nabla \cdot \underline{\tau}) + \underline{j} \times \underline{B} \quad (2.16)$$

Reescribiendo la ecuación (2.8) como: $\underline{j} = \frac{1}{\mu_o} \nabla \times \underline{B}$ podemos, también, expresar:

$$\underline{j} \times \underline{B} = \left(\frac{1}{\mu_o} \nabla \times \underline{B} \right) \times \underline{B} \quad (2.17)$$

Operando sobre el lado derecho de la igualdad llegamos a:

$$\underline{j} \times \underline{B} = \frac{1}{\mu_o} \left[\nabla \cdot (\underline{B} \underline{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\underline{B} \cdot \underline{B}) - \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B}) \underline{B}}_0 \right] \quad (2.18)$$

por la Ley de Gauss magnética (2.6) el último término resulta nulo.

Reemplazando (2.18) en (2.16)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) = -(\nabla \cdot \rho \underline{u} \underline{u}) - \nabla \cdot (\underline{I} p) - (\nabla \cdot \underline{\tau}) + \frac{1}{\mu_o} \left[\nabla \cdot (\underline{B} \underline{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\underline{B} \cdot \underline{B}) \right] \underline{B} \quad (2.19)$$

o bien:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + \underline{I} \left(p + \frac{1}{2} \frac{\underline{B} \cdot \underline{B}}{\mu_o} \right) \right] = \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (2.20)$$

II.1.e.- Ecuación de Conservación de la Energía

Para obtener la expresión de la ecuación de conservación de la energía para un fluido simple, nuevamente partiremos de la expresión ofrecida por Bird, Stewart y Lightfoot [6]

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\hat{U} + \frac{1}{2} u^2 \right)}_1 = - \underbrace{\left(\nabla \cdot \rho \underline{u} \left(\hat{U} + \frac{1}{2} u^2 \right) \right)}_2 - \underbrace{(\nabla \cdot \underline{q})}_3 + \underbrace{\rho (\underline{u} \cdot \underline{g})}_4 - \underbrace{(\nabla \cdot p \underline{u})}_5 - \underbrace{(\nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{u}))}_6 \quad (2.21)$$

donde $\epsilon = \rho \hat{U}$ es la energía interna, T es la temperatura \underline{k} el tensor de conductividad térmica y \underline{q} es el flujo de calor dado por la Ley de Fourier $\underline{q} = -\underline{k} \cdot \nabla T$

Término 1: Representa la velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen.

Término 2: Representa la velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debida a convección.

Término 3: Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debida a conducción.

Término 4: Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación. Como en el inciso anterior la fuerza de la gravedad será despreciada y se considerará, en cambio, la fuerza de volumen debida a los efectos electromagnéticos cuyo trabajo se expresa mediante la magnitud $\underline{E} \cdot \underline{j}$ (efecto Joule).

Término 5: Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de presión.

Término 6: Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a fuerzas viscosas.

A continuación es necesario definir la energía total e del fluido como la suma de la energía interna, la energía cinética y la energía asociada al campo magnético:

$$e = \epsilon + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad ; B^2 = \underline{B} \cdot \underline{B} \quad (2.22)$$

El procedimiento para insertar la energía total en la ecuación de conservación de la energía consiste en sumar la ecuación 2.21 a la 2.20 multiplicada internamente por el campo magnético. Luego de introducir las ecuaciones 2.10 y 2.8 y de trabajar algebraicamente se obtiene la expresión de la ecuación en la forma en que la buscamos.

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_0} \right] = \nabla \cdot \left\{ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_0^2} \left[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \right\} \quad (2.23)$$

Mayor detalle acerca de la deducción de esta ecuación se podrá encontrar en [7], [3] y [8].

II.1.f.- Síntesis

Se presentan a continuación y en forma conjunta las cuatro ecuaciones que se han deducido en los apartados anteriores. Estas ecuaciones son las que deberán ser resueltas.

Ecuación de inducción magnética:	
$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u}) = -\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right]$	(2.13)
Ecuación de conservación de la masa:	
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$	(2.14)
Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:	

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} \frac{\underline{B} \cdot \underline{B}}{\mu_o} \right) \right] = \nabla \cdot \underline{\tau}$	(2.20)
Ecuación de conservación de la energía:	
$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \right] = \nabla \cdot \left\{ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} \left[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \right\}$	(2.23)

Tabla 2.2.- Ecuaciones de la magnetogasdínámica.

II.2.- ADAPTACIÓN DE LAS ECUACIONES AL MÉTODO NUMÉRICO

Habiendo obtenido las ecuaciones que rigen nuestro modelo en el apartado precedente, es necesario, ahora, expresar las mismas de una manera que resulte conveniente para el método numérico que se empleará en su resolución. El objetivo del presente apartado es expresar las ecuaciones de la Tabla 2.2 como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, cuasi-lineal, homogéneo y tridimensional. Es decir, un sistema del tipo:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \underline{B}(\underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} + \underline{C}(\underline{U}) \frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.24)$$

con:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}; \quad \underline{A}(\underline{U}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}; \quad \underline{B}(\underline{U}) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}; \quad \underline{C}(\underline{U}) = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$$

Se destaca que para resolver el problema se empleará una formulación conservativa, es decir, las ecuaciones serán formuladas en términos de las variables conservadas. Estas son: la densidad, la cantidad de movimiento, el campo magnético y la energía total. Por tal motivo se expresarán las ecuaciones en su forma conservativa, cuasi-lineal y adimensional.

II.2.a.- Forma matricial de las ecuaciones de la MGD

Se expresará el sistema de ecuaciones mostrado en la Tabla 2.2 en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}_h(\underline{U}) = \nabla \cdot \underline{f}_p(\underline{U}) \quad (2.25)$$

donde: \underline{U} : es el vector de las variables conservadas.

$\underline{f}_h(\underline{U})$: es el tensor de flujo hiperbólico.

$\underline{f}_p(\underline{U})$: es el tensor de flujo parabólico.

Observando las ecuaciones de la Tabla 2.2 notamos que si en la 2.13 llamamos:

$$\nabla \cdot \underline{E}_r = -\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_o} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \quad (2.26)$$

podemos expresar nuestro sistema de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \end{bmatrix}}_{\text{Parte Hiperbólica}} = \nabla \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\tau} \\ \underline{E}_r \\ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} \left[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B} \end{bmatrix}}_{\text{Parte Parabólica}} \quad (2.27)$$

II.2.b.- Forma adimensional de las ecuaciones

Para simplificar el tratamiento de las ecuaciones es conveniente trabajar en forma adimensional. El proceso de adimensionalización da como resultado el siguiente sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix}}_{\text{Parte Hiperbólica}} = \nabla \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\underline{\tau}}{R_e A_l} \\ \underline{E}_r \\ \underline{L}_u A_l \\ \frac{\underline{u} \cdot \underline{\tau}}{R_e A_l} + \frac{k \cdot \nabla T}{P_e A_l} - \frac{\left[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B}}{L_u A_l} \end{bmatrix}}_{\text{Parte Parabólica}} \quad (2.28)$$

Se hace notar que, aunque seguirá utilizándose la misma notación, las variables ρ , $\rho \underline{u}$, \underline{B} , e y p serán de aquí en adelante variables adimensionales. El correspondiente proceso de adimensionalización se explica en detalle en el Apéndice A.

II.2.c.- Forma conservativa de las ecuaciones de la MGD

Expresar un sistema de ecuaciones como una ecuación de conservación significa expresarlo como un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{f}(\underline{U}) = \underline{0} \quad (2.29)$$

Tratando el presente trabajo de la resolución de las ecuaciones de la MGD ideal, resulta sencillo observar que eliminando la parte parabólica (disipativa) de la ecuación 2.28 obtenemos una ecuación de conservación en forma matricial.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{0}} \quad (2.30)$$

El sistema 2.30 es el sistema de ecuaciones que se deberá resolver. En el siguiente capítulo se planteará y se resolverá un problema de Riemann basado en este sistema de ecuaciones.

A continuación, se presentarán algunas formas de expresar las ecuaciones 2.30 que serán de gran importancia a la hora de plantear el método de resolución.

Si definimos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales (x, y, z) podemos expresar la ecuación de conservación tridimensional de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.31)$$

Siguiendo el desarrollo explicado en el Apéndice 2 se observará que las ecuaciones 2.30 y 2.31 serán equivalentes cuando:

$$\underline{U} = [\rho \quad \rho u_x \quad \rho u_y \quad \rho u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad e]^T \quad (2.32)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_y \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 - B_z^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_z - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_z \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Siendo \underline{U} el vector de variables conservadas y \underline{F} , \underline{G} y \underline{H} los vectores de flujo hiperbólico en las direcciones x, y, z, respectivamente.

II.2.d.- Variables primitivas.

Hasta el momento hemos considerado nuestras variables agrupadas en el vector \underline{U} , o vector de las variables conservadas (formulación “conservativa”). Sin embargo, podemos advertir que estas variables no son prácticas ni intuitivas a la hora de comprender el fenómeno físico. Además, nuestros elementos de medición miden variables simples, tales como velocidad, presión, campo magnético, etc. Por todo esto se advierte sobre la conveniencia de definir un vector de variables primitivas.

$$\underline{W} = [\rho \quad u_x \quad u_y \quad u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad p]^T \quad (2.36)$$

Como se ha dicho anteriormente las ecuaciones se resolverán mediante la formulación conservativa, las variables primitivas se utilizarán como una forma práctica de expresar los valores obtenidos, sin perjuicio de que puedan ser utilizadas por simplicidad en alguna etapa del método de resolución.

II.2.e.- Forma cuasi-lineal. Matrices Jacobianas de los Flujos.

Recordando que en la ecuación 2.31 los flujos hiperbólicos son función de las variables conservadas

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{U})}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}(\underline{U})}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}(\underline{U})}{\partial z} = \underline{0}$$

podemos utilizar la regla de la cadena y reescribirla como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}}}_{\underline{A}_c} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{U}}}_{\underline{B}_c} \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{U}}}_{\underline{C}_c} \frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.37)$$

o bien:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + [\underline{A}_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + [\underline{B}_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} + [\underline{C}_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.38)$$

donde

$$[\underline{A}_c] = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \quad [\underline{B}_c] = \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{U}} \quad [\underline{C}_c] = \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{U}} \quad (2.39)$$

son las matrices jacobianas de los flujos. Observando las ecuaciones 2.38 y 2.24 se reconoce la similitud en sus formas. El sistema 2.24 es considerado cuasi-lineal a causa de

que las matrices de coeficientes son solamente función del vector de variables conservadas y no de sus derivadas. Considerando que en la 2.38 se cumple que:

$$\underline{\underline{A}}_c = \underline{\underline{A}}_c(\underline{U}) \quad \underline{\underline{B}}_c = \underline{\underline{B}}_c(\underline{U}) \quad \underline{\underline{C}}_c = \underline{\underline{C}}_c(\underline{U})$$

el sistema 2.38 es la expresión cuasi-lineal de las ecuaciones de la MGD. La resolución del sistema mediante una formulación conservativa significa resolver la ecuación en función de sus variables conservadas, es decir las ecuaciones 2.38-2.39. Esta es la formulación que emplearemos en el presente trabajo.

Si deseamos expresar el sistema en función de las variables primitivas debemos considerar que $\underline{U} = \underline{U}(\underline{W})$. Así podemos escribir la 2.37 como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.40)$$

Premultiplicando cada término por $\frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}}$ obtenemos:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}}_{\substack{A_c \\ A_p}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}}_{\substack{B_c \\ B_p}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{U}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}}_{\substack{C_c \\ C_p}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.41)$$

Es decir:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} + [C_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial z} = \underline{0} \quad (2.42)$$

con

$$[A_p] = \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} [A_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \quad [B_p] = \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} [B_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \quad [C_p] = \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} [C_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \quad (2.43)$$

Estas últimas son las matrices jacobianas respecto de las variables primitivas.

Encarar la resolución de estas ecuaciones significaría resolver el sistema mediante una formulación no-consevativa, que no es el método elegido.

La deducción de las matrices jacobianas se presenta en el Apéndice 3. En el mismo se discute la necesidad de realizar algunas modificaciones empíricas propuestas por Powell [9] a las mismas.

II.2.f.- Ondas características.

Como se ha dicho en el capítulo anterior, la solución general de un problema de Riemann consiste en m ondas, una para cada autovalor de las matrices jacobianas de los flujos λ_i .

Los autovalores de las matrices de coeficientes de una ecuación diferencial en derivadas parciales son los autovalores del sistema (ver Apéndice 4). Como ya se ha explicado, en nuestro caso las matrices de coeficientes son las matrices Jacobianas.

En este caso particular la solución del problema de Riemann constará de ocho ondas, correspondientes a igual número de autovalores. Las ondas correspondientes a la dirección x son:

- Onda Entrópica $\lambda_e = u_x$ (2.44)

- Ondas de Alfven (2) $\lambda_a = u_x \pm c_a$ (2.45)

- Ondas Magnetoacústicas rápidas (2) $\lambda_f = u_x \pm c_f$ (2.46)

- Ondas Magnetoacústicas lentas (2) $\lambda_s = u_x \pm c_s$ (2.47)

donde:

$$c_a = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}} \quad (2.48)$$

es la velocidad de Alfvén.

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\gamma p + B^2}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right]} \quad (2.49)$$

es la velocidad magnetoacústica rápida

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{\gamma p + B^2}{\rho} - \sqrt{\left(\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right]} \quad (2.50)$$

es la velocidad magnetoacústica lenta

Capítulo III:

SOLUCIÓN NUMÉRICA

En el Capítulo I hemos visto el Problema de Riemann general y su solución, mientras que en el Capítulo II hemos deducido las ecuaciones de la MGD y las hemos expresado como un sistema de ecuaciones de conservación en forma matricial.

En el presente capítulo haremos uso de estos dos resultados y plantearemos un problema de Riemann como el estudiado en el Capítulo I con el sistema de EDPs cuasi-lineales deducidas en el Capítulo II.

Para solucionar este problema utilizaremos el método de Roe con algunas modificaciones. Este se basa en el método de Godunov que, a su vez, utiliza la solución exacta del problema de Riemann calculada en el Capítulo I.

III.1.- APLICACIÓN DEL PROBLEMA DE RIEMANN A LA MGD

En el capítulo precedente hemos obtenido, a partir de las ecuaciones de la magnetogasdinámica, el sistema de ecuaciones de conservación 2.31

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{U})}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}(\underline{U})}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}(\underline{U})}{\partial z} = \underline{0}$$

donde,

$$\underline{U} = [\rho \quad \rho u_x \quad \rho u_y \quad \rho u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad e]^T$$

representa el vector de las variables conservadas, mientras que \underline{F} , \underline{G} y \underline{H} representan a los flujos hiperbólicos en las direcciones x, y, z, respectivamente 2.33, 2.34 y 2.35.

En base a estas ecuaciones formularemos un problema de Riemann de la siguiente manera.

$$\text{E.D.P.} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial z} = \underline{0}$$

$$\text{C.I.} \quad \underline{U}(x, y, z, 0) = \underline{U}^0(x, y, z) = \begin{cases} \underline{U}_L & \text{si } x < x_{membrana} \\ \underline{U}_R & \text{si } x > x_{membrana} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{C.B.} \quad \underline{U}(0, y, z, t) &= \underline{U}_i(y, z, t) & \underline{U}(L, y, z, t) &= \underline{U}_d(y, z, t) \\ \underline{U}(x, 0, z, t) &= \underline{U}_p(x, z, t) & \underline{U}(x, H, z, t) &= \underline{U}_t(x, z, t) \\ \underline{U}(x, y, 0, t) &= \underline{U}_{fo}(y, z, t) & \underline{U}(x, y, F, t) &= \underline{U}_{fr}(y, z, t) \end{aligned}$$

Expondremos el método aplicado a nuestro sistema de ocho ecuaciones de la MGD considerando únicamente el flujo en la dirección x, $\underline{F}(\underline{U})$. Esto simplifica sustancialmente la comprensión del desarrollo sin quitarle validez, ya que el tratamiento de los flujos en las otras dos direcciones es en todo similar, y será fácilmente agregado más tarde.

El problema del que nos ocuparemos primero será entonces:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{0} \quad (3.1)$$

Con las condiciones iniciales:

$$\text{C.I.} \rightarrow \underline{U}(x, 0) = \underline{U}^0(x) = \begin{cases} \underline{U}_L & \text{si } x < x_{membrana} \\ \underline{U}_R & \text{si } x > x_{membrana} \end{cases} \quad (3.2)$$

y las condiciones de borde:

$$C.B. \rightarrow \begin{cases} \underline{U}(0,t) = \underline{U}_i(t) \\ \underline{U}(L,t) = \underline{U}_d(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde \underline{U} y \underline{F} son los vectores definidos en 2.32 y 2.33, $\underline{U}^0(x)$ son los datos iniciales para $t = 0$, $[0, L]$ es el dominio espacial, y las condiciones de borde son $\underline{U}_i(t)$ y $\underline{U}_d(t)$.

III.2.- METODO DE SOLUCION

Desde que en 1981 P. L. Roe [10] presentara su solver para el problema de Riemann, el mismo se ha convertido en uno de los más conocidos y utilizados solvers aproximados para este problema. Para comprender el funcionamiento de este y aplicarlo a nuestras ecuaciones de la MGD es necesario, previamente conocer algunos principios del método de Godunov, presentado por este en 1959 como una extensión conservativa del esquema upwind de primer orden de Courant, Isaacson y Rees [11] y mejorado en 1976 por el mismo Godunov [12].

Con el propósito de admitir soluciones discontinuas usaremos una forma integral de la ecuación 3.1.

$$\int_{x_1}^{x_2} \underline{U}(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} \underline{U}(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{U}(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{U}(x_2, t)) dt \quad (3.4)$$

Esta ecuación es válida en cualquier dominio espacial-temporal $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$.

III.2.a.- Tubo de choque

Considérese un tubo de sección rectangular de longitud L . Supóngase que ese tubo se encuentra lleno de un gas ionizado del tipo que representan nuestras ecuaciones de la MGD. Supóngase, luego, que en alguna parte de la longitud del tubo se encuentra ubicada una membrana que separa dos estados diferentes del gas mencionado. Si en un momento determinado esta membrana es súbitamente retirada se producirá una interacción entre los

dos estados iniciales. Este proceso es el que modelaremos utilizando un problema de Riemann de la MGD.

Los tubos de choque son dispositivos experimentales utilizados para generar flujo supersónico de gases y representan la aplicación física del problema de Riemann a las ecuaciones gas dinámicas. En el libro de Courant y Friedrichs [T97] puede encontrarse una discusión detallada acerca de este problema.

III.2.b.- Discretización del dominio

Para encontrar la solución al problema no lineal realizamos una discretización del dominio espacial en volúmenes finitos [14] y un avance explícito en el tiempo con el objeto de emplear en cada uno de ellos la solución exacta conocida del problema de Riemann lineal.

Discretización espacial.- Discretizaremos el dominio espacial $[0, L]$ en un número, M , de celdas de cálculo o volúmenes finitos $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ de longitud $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{L}{M}$, con $i = 1, \dots, M$.

Para una determinada celda, I_i , definimos:

$$\text{Ubicación del centro:} \quad x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x$$

$$\text{Ubicación del límite izquierdo:} \quad x_{i-\frac{1}{2}} = (i-1)\Delta x$$

$$\text{Ubicación del límite derecho:} \quad x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x$$

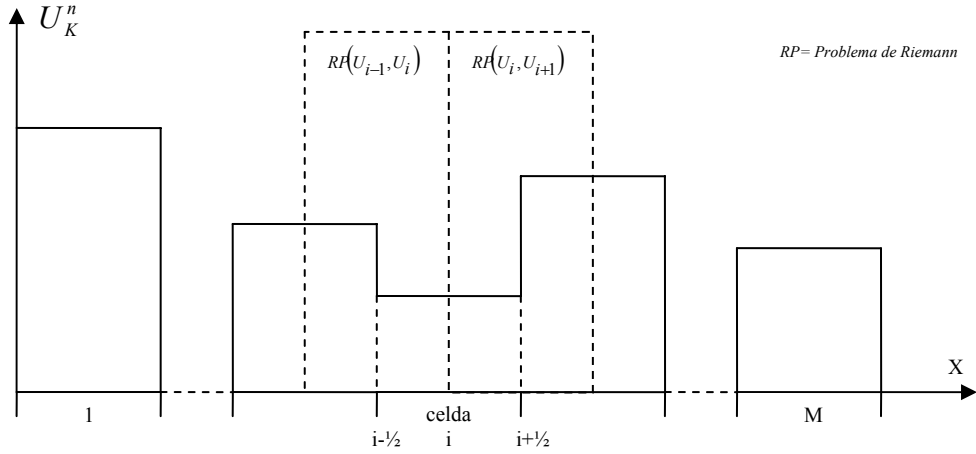


Figura 3.1.- Discretización

Discretización temporal.- El dominio de tiempo $[0, T]$ se discretiza en intervalos, Δt , de tamaño variable que se va actualizando durante el proceso de cálculo de manera que después de cada paso de tiempo el intervalo se actualiza según la fórmula $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{\max}^n}$.

Donde S_{\max}^n es la velocidad de la onda más rápida presente en el dominio de la celda i en el tiempo t^n .

III.2.c.- Método de Godunov

Godunov [15] en 1959 propuso, en base a la discretización mostrada en la Fig. 3.1, asignar en cada celda un valor constante a cada una de las variables. Este valor se calcula a partir de los valores de la misma variable obtenidos como solución del problema de Riemann en el paso temporal anterior (denotadas con \sim). El valor constante de la variable conservada $U_K(x, t)$ en el intervalo de tiempo t^n en la celda i será sencillamente el valor medio de $\tilde{U}_K(x, t)$ entre los límites esta celda (Fig.3.1).

$$U_K^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_K(x, t^n) dx \quad (3.5)$$

Luego, propuso tomar cada frontera entre celdas como un problema de Riemann local centrado en dichas fronteras. De esta manera, en cada celda se plantea un problema de Riemann local con la celda anterior y otro con la posterior. Por ejemplo, la celda i forma parte de un problema de Riemann local $RP(\underline{U}_{i-1}, \underline{U}_i)$ con la celda $i-1$ y de otro, $RP(\underline{U}_i, \underline{U}_{i+1})$, con la celda $i+1$.

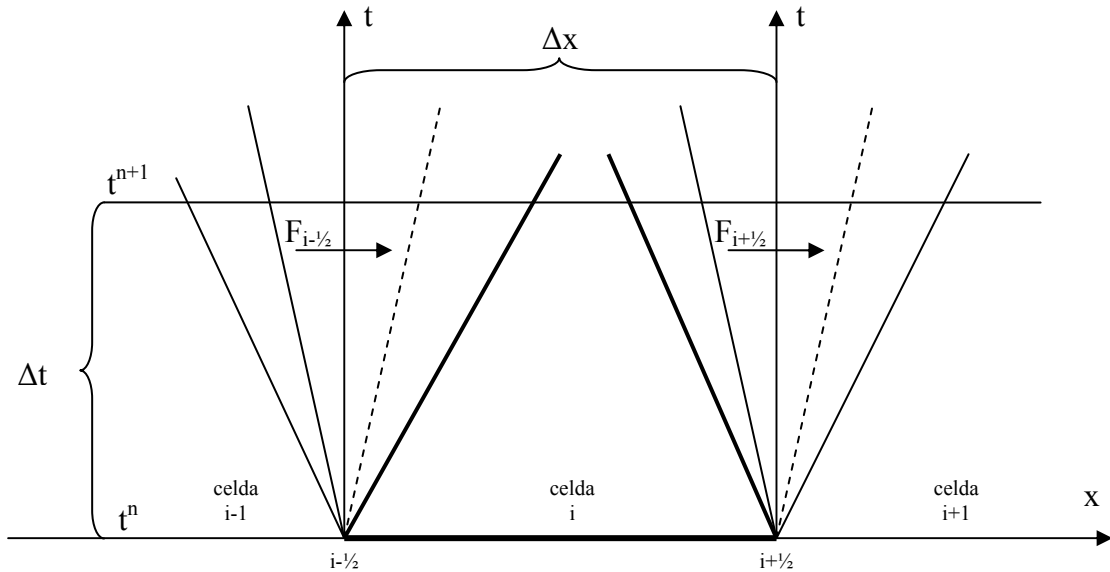


Figura 3.2.- Método de Godunov

El siguiente paso será establecer el mecanismo de actualización del valor de las variables U_K del vector \underline{U}_i^n en cada paso de tiempo. Es decir, de qué manera el valor \underline{U}_i^n se transforma en el \underline{U}_i^{n+1} . Con este objetivo aplicamos la forma integral de la ley de conservación (3.4) a cada volumen de control $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$:

$$\underbrace{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t^{n+1}) dx}_{\underline{U}_i^{n+1} \Delta x} = \underbrace{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t^n) dx}_{\underline{U}_i^n \Delta x} + \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F}[\tilde{U}(x_{i-1/2}, t)] dt}_{F_{i-1/2} \Delta t} - \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F}[\tilde{U}(x_{i+1/2}, t)] dt}_{F_{i+1/2} \Delta t} \quad (3.6)$$

Utilizando el criterio de discretización establecido en la ecuación (3.5) llamamos:

$$\underline{U}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\underline{U}}(x, t^{n+1}) dx$$

Es el valor del vector de variables conservadas \underline{U} en la celda i en el momento t^{n+1} .

$$\underline{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\underline{U}}(x, t^n) dx$$

Es el valor del vector de variables conservadas \underline{U} en la celda i en el momento t^n .

$$\underline{F}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underline{F} \left[\tilde{\underline{U}} \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t \right) \right] dt$$

Es el flujo numérico de Godunov entre las celdas $i-1$ e i .

$$\underline{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underline{F} \left[\tilde{\underline{U}} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t \right) \right] dt$$

Es el flujo numérico de Godunov entre las celdas i e $i+1$.

$$\tilde{\underline{U}}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)$$

Es la solución exacta del problema de Riemann local $RP(\underline{U}_{i-1}, \underline{U}_i)$ sobre la frontera interceldas $i - \frac{1}{2}$.

$$\tilde{\underline{U}}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$$

Es la solución exacta del problema de Riemann local $RP(\underline{U}_i, \underline{U}_{i+\frac{1}{2}})$ sobre la frontera interceldas $i + \frac{1}{2}$.

Reemplazando obtenemos:

$$\underline{U}_i^{n+1} = \underline{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\underline{F}_{i-\frac{1}{2}} - \underline{F}_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.7)$$

Que coincide con la interpretación del método de Godunov propuesta por este mismo en 1976 [12].

III.2.d.- Cálculo de los Flujos de Godunov por HLL

El próximo paso será desarrollar un método práctico para calcular los flujos numéricos interceldas de Godunov. Veremos el método propuesto por Harten, Lax y van Leer (HLL) en 1983 [16].

Consideremos el problema de Riemann de la siguiente figura y su solución exacta. En el mismo S_L y S_R son las velocidades de las ondas más rápidas, T un determinado tiempo y $x_L \leq TS_L$ y $x_R \geq TS_R$.

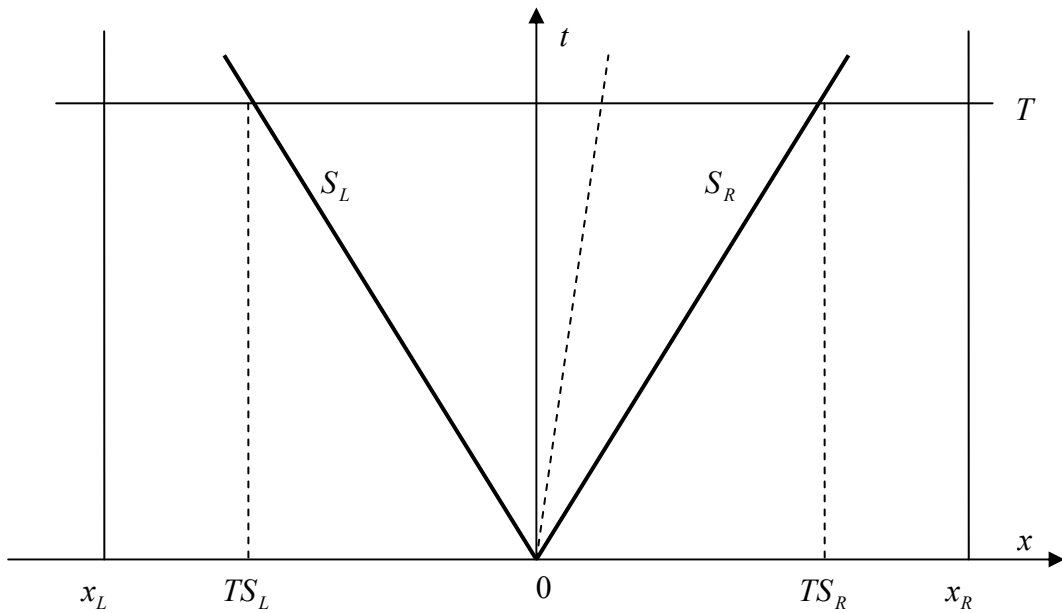


Figura 3.3.- Solución exacta de un problema de Riemann entre celdas

La forma integral de la ley de conservación para el volumen de control $[x_L, 0] \times [0, T]$ será:

$$\int_{x_L}^0 \underline{U}(x, T) dx = \int_{x_L}^0 \underline{U}(x, 0) dx + \int_0^T \underline{F}(\underline{U}(x_L, t)) dt - \int_0^T \underline{F}(\underline{U}(0, t)) dt \quad (3.8)$$

Evaluando el lado derecho de la igualdad 3.8 obtenemos:

$$\int_{x_L}^0 \underline{U}(x, T) dx = -x_L U_L + T(F_L - F_{0L}) \quad (3.9)$$

donde $F_L = F(U_L)$ y $F_{0L} = F(U_{0L})$ son el flujo a través del eje y , en x_L y en la interfase respectivamente, resolviendo por el lado izquierdo. Asimismo, llamamos $U_L = U(x_L, t)$ y $U_R = U(x_R, t)$.

El lado izquierdo de la igualdad 3.8 podemos expresarlo como:

$$\int_{x_L}^0 \underline{U}(x, T) dx = \underbrace{\int_{x_L}^{TS_L} \underline{U}(x, T) dx}_{(TS_L - x_L)U_L} + \int_{TS_L}^0 \underline{U}(x, T) dx$$

$$\int_{x_L}^0 \underline{U}(x, T) dx = \int_{TS_L}^0 \underline{U}(x, T) dx + (TS_L - x_L)U_L \quad (3.10)$$

de 3.9 y 3.10 obtenemos:

$$-x_L U_L + T(F_L - F_{0L}) = \int_{TS_L}^0 \underline{U}(x, T) dx + (TS_L - x_L)U_L$$

reordenando

$$\int_{TS_L}^0 \underline{U}(x, T) dx = T(-S_L U_L + F_L - F_{0L})$$

despejando F_{0L} :

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \underline{U}(x, T) dx \quad (3.11)$$

El mismo procedimiento podemos realizar para el volumen de control $[0, x_R] \times [0, T]$ obteniendo como resultado:

$$F_{0R} = F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} \underline{U}(x, T) dx \quad (3.12)$$

Puede verificarse que $F_{0L} = F_{0R}$ (condición de consistencia).

III.2.e.- “Solver” de Roe

Partiendo de ecuación de conservación expresada en (1.4 y 1.8)

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = \underline{0} \rightarrow \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{A} \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} = \underline{0}$$

donde $\underline{A} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}}$ es la matriz jacobiana de la función de flujo $\underline{F}(\underline{U})$, Roe [10] reemplazó esta matriz jacobiana por una matriz constante, $\hat{\underline{A}}$, que solo depende de los estados iniciales $\hat{\underline{A}} = \hat{\underline{A}}(U_L, U_R)$. Reemplazándola en la ecuación (1.8) se obtiene un problema de Riemann aproximado lineal, con coeficientes constantes.

$$\frac{\partial \hat{\underline{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\hat{\underline{U}})}{\partial x} = \underline{0} \rightarrow \frac{\partial \hat{\underline{U}}}{\partial t} + \hat{\underline{A}} \frac{\partial \hat{\underline{U}}}{\partial x} = \underline{0} \quad (3.13)$$

Una vez calculados la matriz $\hat{\underline{A}}(U_L, U_R)$, sus autovalores $\hat{\lambda}_i(U_L, U_R)$ y sus autovectores derechos $\hat{\underline{K}}^i(U_L, U_R)$, se utiliza la solución exacta del problema de Riemann que se desarrolló en 1.12.

$$\hat{\underline{U}}_L = \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i \hat{\underline{K}}^{(i)} \quad \hat{\underline{U}}_R = \sum_{i=1}^m \hat{\gamma}_i \hat{\underline{K}}^{(i)}$$

Calculando la diferencia

$$\Delta \hat{\underline{U}} = \hat{\underline{U}}_R - \hat{\underline{U}}_L = \sum_{i=1}^m \hat{\gamma}_i \hat{\underline{K}}^{(i)} - \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i \hat{\underline{K}}^{(i)} = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\hat{\gamma}_i - \hat{\beta}_i)}_{\hat{\alpha}_i} \hat{\underline{K}}^{(i)} = \sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i \hat{\underline{K}}^{(i)} \quad (3.14)$$

podemos despejar la intensidad de onda, $\hat{\alpha}_i$, como función de los estados U_L y U_R .

Con todo esto estamos en condiciones de calcular la solución exacta al problema de Riemann aproximado (3.13) mediante las expresiones equivalentes.

$$\hat{U}_i = \underline{U}_L + \sum_{\hat{\lambda}_i \leq 0} \hat{\alpha}_i \hat{K}^{(i)} \quad \text{ó} \quad \hat{U}_i = \underline{U}_R - \sum_{\hat{\lambda}_i \geq 0} \hat{\alpha}_i \hat{K}^{(i)} \quad (3.15)$$

Para una mejor comprensión de las expresiones 3.15 observemos el siguiente gráfico

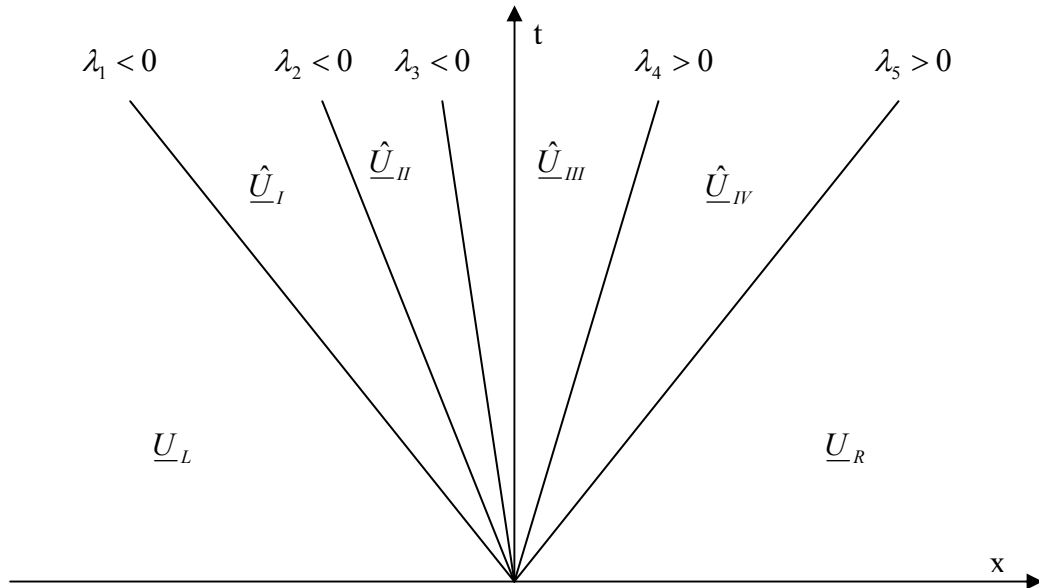


Figura 3.4.- Diferentes estados a lo largo de la solución exacta de un problema de Riemann

$$\hat{U}_I = \underline{U}_L + \hat{\alpha}_1 \hat{K}^{(1)} = \underline{U}_R - \hat{\alpha}_5 \hat{K}^{(5)} - \hat{\alpha}_4 \hat{K}^{(4)} - \hat{\alpha}_3 \hat{K}^{(3)} - \hat{\alpha}_2 \hat{K}^{(2)}$$

$$\hat{U}_{II} = \underline{U}_L + \hat{\alpha}_1 \hat{K}^{(1)} + \hat{\alpha}_2 \hat{K}^{(2)} = \underline{U}_R - \hat{\alpha}_5 \hat{K}^{(5)} - \hat{\alpha}_4 \hat{K}^{(4)} - \hat{\alpha}_3 \hat{K}^{(3)}$$

$$\hat{U}_{III} = \underline{U}_L + \hat{\alpha}_1 \hat{K}^{(1)} + \hat{\alpha}_2 \hat{K}^{(2)} + \hat{\alpha}_3 \hat{K}^{(3)} = \underline{U}_R - \hat{\alpha}_5 \hat{K}^{(5)} - \hat{\alpha}_4 \hat{K}^{(4)}$$

$$\hat{U}_{IV} = \underline{U}_L + \hat{\alpha}_1 \hat{K}^{(1)} + \hat{\alpha}_2 \hat{K}^{(2)} + \hat{\alpha}_3 \hat{K}^{(3)} + \hat{\alpha}_4 \hat{K}^{(4)} = \underline{U}_R - \hat{\alpha}_5 \hat{K}^{(5)}$$

La solución que nos interesa es aquella que corresponde al campo en el que se encuentra el eje t ($x = 0$), en este caso el campo \hat{U}_{III} . Esta es la solución exacta del sistema de Riemann modificado (3.13).

Debemos ahora calcular los flujos para el sistema real. Para esto escribiremos las ecuaciones (3.11) y (3.12) para el sistema modificado y despejamos las integrales.

$$\tilde{F}_{0L} = \tilde{F}_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \tilde{U}(x, T) dx \rightarrow \int_{TS_L}^0 \tilde{U}(x, T) dx = T(\tilde{F}_L - \tilde{F}_{0L}) - TS_L U_L \quad (3.16)$$

$$\tilde{F}_{0R} = \tilde{F}_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} \tilde{U}(x, T) dx \rightarrow \int_0^{TS_R} \tilde{U}(x, T) dx = T(\tilde{F}_{0R} - \tilde{F}_R) + TS_R U_R \quad (3.17)$$

Luego, las integrales despejadas en 3.16 y 3.17 las reemplazamos en 3.11 y 3.12

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 U(x, T) dx \approx F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} \int_{TS_L}^0 \hat{U}(x, T) dx$$

$$F_{0R} = F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} U(x, T) dx \approx F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} \int_0^{TS_R} \hat{U}(x, T) dx$$

$$F_{0L} = F_L - S_L U_L - \frac{1}{T} [T(\tilde{F}_L - \tilde{F}_{0L}) - TS_L U_L] = F_L - \tilde{F}_L + \tilde{F}_{0L}$$

$$F_{0R} = F_R - S_R U_R + \frac{1}{T} [T(\tilde{F}_{0R} - \tilde{F}_R) + TS_R U_R] = F_R + \tilde{F}_{0R} - \tilde{F}_R$$

$$\underline{F}_{0L} = \underline{F}_L - \hat{\underline{F}}_L + \hat{\underline{F}}_{0L} \quad (3.18)$$

$$\underline{F}_{0R} = \underline{F}_R + \hat{\underline{F}}_{0R} - \hat{\underline{F}}_R \quad (3.19)$$

Recordando las soluciones exactas 3.15 para ambos lados del límite entre celdas

$$\hat{\underline{U}}_{0L} = \underline{U}_L + \sum_{\hat{\lambda}_i \leq 0} \hat{\alpha}_i \hat{K}^{(i)} \xrightarrow{\hat{\underline{F}} = \hat{\underline{A}} \hat{\underline{U}}} \hat{\underline{F}}_{0L} = \underbrace{\hat{\underline{A}} \underline{U}_L}_{\hat{\underline{F}}_L} + \sum_{\hat{\lambda}_i \leq 0} \hat{\alpha}_i \hat{\lambda}_i \hat{K}^{(i)} \quad (3.20)$$

$$\hat{\underline{U}}_{0R} = \underline{U}_R - \sum_{\hat{\lambda}_i \geq 0} \hat{\alpha}_i \hat{K}^{(i)} \xrightarrow{\hat{\underline{F}} = \hat{\underline{A}} \hat{\underline{U}}} \hat{\underline{F}}_{0R} = \underbrace{\hat{\underline{A}} \underline{U}_R}_{\hat{\underline{F}}_R} - \sum_{\hat{\lambda}_i \geq 0} \hat{\alpha}_i \hat{\lambda}_i \hat{K}^{(i)} \quad (3.21)$$

Reemplazando 3.20 en 3.18 y 3.21 en 3.19

$$\underline{F}_{0L} = \underline{F}_L - \hat{F}_L + \hat{F}_L + \sum_{\hat{\lambda}_i \leq 0} \hat{\alpha}_i \hat{\lambda}_i \hat{K}^{(i)}$$

$$\underline{F}_{0R} = \underline{F}_R + \hat{F}_R - \sum_{\hat{\lambda}_i \geq 0} \hat{\alpha}_i \hat{\lambda}_i \hat{K}^{(i)} - \hat{F}_R$$

$$\boxed{\underline{F}_0 = \underline{F}_{0L} = \underline{F}_{0R} = \frac{1}{2} \left[\underline{F}_L + \underline{F}_R - \sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_i |\hat{\lambda}_i| \hat{K}^{(i)} \right]} \quad (3.22)$$

Esta última es la expresión final para los flujos entre las celdas propuesta por Roe [31].

III.2.d.- Modificaciones al “solver” de Roe

Con el objeto de captar correctamente las ondas de expansión, Yee et al. [17], en su esquema introduce una función que cambia el valor absoluto del autovalor, quedando:

$$\underline{F}_0 = \underline{F}_{0L} = \underline{F}_{0R} = \frac{1}{2} \left[\underline{F}_L + \underline{F}_R - \sum_{i=1}^m \sigma(\hat{\lambda}_i) \hat{\alpha}_i \hat{K}^{(i)} \right] \quad (3.23)$$

con

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & \text{si } |\lambda| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} (x^2 + \varepsilon^2) & \text{si } |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (3.24)$$

Esquema TVD (Total Variation Diminishing).- Es una forma de análisis de la estabilidad que permite probar la convergencia de los resultados. Este esquema, desarrollado originalmente para el caso escalar, fue más tarde extendido al sistemas de EDP exitosamente.

Le Veque [18] demostró que si la solución es generada por un método numérico en forma conservativa con flujo numérico continuo y consistente con una ley de conservación, entonces si el método es TV estable es convergente.

Una forma de asegurar que el método es TV estable es requerir que la TV no se incremente con la evolución del tiempo. Este requerimiento da lugar a los métodos denominados TVD.

La variación total se define en función de la variación de la solución, \underline{U} , con el tiempo.

$$TV(\underline{U}^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\underline{U}_{i+1}^n - \underline{U}_i^n| \quad ; \text{donde } n \text{ es el paso temporal}$$

El esquema, para ser TVD, requiere que:

$$TV(\underline{U}^{n+1}) \leq TV(\underline{U}^n) \quad (3.25)$$

Métodos de Alta Resolución.- Se entiende por Métodos de Alta Resolución a aquellos que tienen, por lo menos, una exactitud de segundo orden en soluciones suaves y pueden captar discontinuidades sin oscilaciones (Le Veque [18]).

Es deseable al emplear un método de alta resolución usar un método de orden elevado, pero modificarlo para incrementar la disipación numérica en la vecindad de una discontinuidad. Un análisis detallado de algunos métodos de alta resolución puede encontrarse en Colella [19] y en Zalesak [20].

Un flujo numérico puede expresarse como una combinación de un flujo de orden elevado \underline{F}^H y uno de bajo orden \underline{F}^L .

Podemos expresar un flujo de alto orden como la suma de uno de bajo orden y una corrección:

$$\underline{F}^H = \underline{F}^L + (\underline{F}^H - \underline{F}^L)$$

Si la magnitud de la corrección es limitada por los datos se tiene un método con limitador de flujo. Este es uno de los métodos de alta resolución más difundidos. Es flujo en este caso se expresa como:

$$\underline{F}^H = \underline{F}^L + \Phi(\underline{F}^H - \underline{F}^L) \quad (3.26)$$

donde Φ es la función limitadora, esta tiene por objeto cambiar suavemente el esquema entre una exactitud alta y una baja. Esta función se activa sólo en el entorno de las discontinuidades.

Forma final del Flujo Numérico.-

Teniendo en cuenta 3.25 y 3.26 Harten [21] y Yee et al. [17] modificaron la Ec. 3.23, quedando la forma final del Flujo Numérico como.

$$\boxed{\underline{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = \frac{1}{2} \left[\underline{F}_{i+1} + \underline{F}_i - \sum_{p=1}^m \hat{K}_{i+\frac{1}{2}}^p \Phi_{i+\frac{1}{2}}^p \right]_{j,k}^n} \quad (3.27)$$

la función limitadora utilizada se llama Minmod y está dada por:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^p = (\mathbf{g}_{i+1}^p + \mathbf{g}_i^p) - \sigma(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^p + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^p) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p \quad (3.28)$$

con

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^p = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^p} (\mathbf{g}_{i+1}^p - \mathbf{g}_i^p) & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^p = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{g}_i^p = S \cdot \max \left\{ 0; \min \left[\frac{1}{2} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^p |\alpha_{i+\frac{1}{2}}^p|; \frac{S}{2} \sigma_{i-\frac{1}{2}}^p \alpha_{i-\frac{1}{2}}^p \right] \right\} \quad (3.30)$$

$$S = \text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^p) \quad (3.31)$$

Debido a que los vectores propios son más fáciles de obtener en la forma primitiva de las ecuaciones que en la conservativa, en la expresión 3.29 utilizamos:

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^p = l_{i+\frac{1}{2}}^p (W_{i+1} - W_i) \quad (3.32)$$

Cabe destacar que existen otras funciones limitadoras como Superbee, van Leer y van Albada. Sin embargo, en base a la experiencia de Elaskar et al. [23] y Elaskar [24] en el desarrollo de un código que resuelve las ecuaciones de la MGD unidimensional y no estacionaria y las sugerencias aportadas por Shumlak y Udrea [25] se optó por la antes mencionada.

En el Apéndice C se encuentra el desarrollo de las matrices jacobianas, y las modificaciones a estas introducidas por Powel [9] para hacer que el sistema, originalmente hiperbólico se transforme en estrictamente hiperbólico. En el Apéndice D se encuentra la deducción de los autovalores y autovectores de las mismas con las modificaciones propuestas por Zarachay et al. [26] que evitan las degeneraciones en la solución del sistema hiperbólico de la MGD.

III.3.- PROBLEMA 3D

En el Apartado III.1.b tomamos la decisión de evaluar solamente el comportamiento del flujo en la dirección x , es decir $\underline{F}(\underline{U})$, considerando que aquellos correspondientes a las direcciones y y z , $\underline{G}(\underline{U})$ y $\underline{H}(\underline{U})$ respectivamente, debían recibir un trato en todo similar. De lo expresado en el párrafo anterior inferimos que la ecuación 3.7, llevada al caso tridimensional, se expresará del siguiente modo:

$$\underline{U}_{i,j,k}^{n+1} = \underline{U}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\underline{F}_{i-\frac{1}{2},j,k} - \underline{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\underline{G}_{i,j-\frac{1}{2},k} - \underline{G}_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\underline{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \underline{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.33)$$

donde $\underline{F}(\underline{U})$, $\underline{G}(\underline{U})$ y $\underline{H}(\underline{U})$ son los vectores 2.33, 2.34 y 2.35, respectivamente.

Observemos ahora detenidamente el vector 2.33

$$\underline{F}(\underline{U}) = \underline{F} \left(\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ e \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{bmatrix}$$

definamos una función *PER1* que realiza la siguiente permutación

$$PER1 = \begin{cases} \text{elemento_2} & \leftrightarrow & \text{elemento_3} \\ \text{elemento_5} & \leftrightarrow & \text{elemento_6} \end{cases} \quad (3.34)$$

de modo que si aplicamos esta función al vector \underline{U} ,

$$PER1(\underline{U}) = PER1 \left(\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ e \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_y \\ \rho u_x \\ \rho u_z \\ B_y \\ B_x \\ B_z \\ e \end{bmatrix} = \underline{U}' \quad (3.35)$$

obtenemos un vector al que llamamos el \underline{U}' .

Si evaluamos la función $\underline{G}(\underline{U}')$ (que no es más que la función $\underline{G}(\underline{U})$ con los subíndices x e y cambiados) observamos que coincide con $PER1(\underline{F}(\underline{U}))$, o bien

$$\underline{G}(\underline{U}') = PER1(\underline{F}(\underline{U})) \quad \text{o bien} \quad PER1(\underline{G}(\underline{U}')) = \underline{F}(\underline{U}) \quad (3.36)$$

$$\underline{G} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_y \\ \rho u_x \\ \rho u_z \\ B_y \\ B_x \\ B_z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ u_x B_y - u_y B_x \\ 0 \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{pmatrix} = \text{PER1} \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\begin{aligned} G(\underline{U}')^1 &= F(\underline{U})^1 \\ G(\underline{U}')^2 &= F(\underline{U})^3 \\ G(\underline{U}')^3 &= F(\underline{U})^2 \\ G(\underline{U}')^4 &= F(\underline{U})^4 \\ G(\underline{U}')^5 &= F(\underline{U})^6 \\ G(\underline{U}')^6 &= F(\underline{U})^5 \\ G(\underline{U}')^7 &= F(\underline{U})^7 \\ G(\underline{U}')^8 &= F(\underline{U})^8 \end{aligned} \tag{3.37}$$

De igual modo definimos ahora la función *PER2* que realiza la permutación

$$\text{PER2} = \begin{cases} \text{elemento}_2 \leftrightarrow \text{elemento}_4 \\ \text{elemento}_5 \leftrightarrow \text{elemento}_7 \end{cases} \tag{3.38}$$

Aplicamos ahora esta función al vector \underline{U} ,

$$PER2(\underline{U}) = PER2 \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_y \\ \rho u_x \\ B_z \\ B_y \\ B_x \\ e \end{pmatrix} = \underline{U}'' \quad (3.39)$$

y obtenemos un vector al que llamamos el vector \underline{U}'' .

Si evaluamos la función $\underline{H}(\underline{U}'')$ (que es la función $\underline{H}(\underline{U})$ con los subíndices x y z cambiados) observamos que coincide con $PER2(\underline{F}(\underline{U}))$

$$\underline{H}(\underline{U}'') = PER2(\underline{F}(\underline{U})) \quad \text{o bien} \quad PER2(\underline{H}(\underline{U}'')) = \underline{F}(\underline{U}) \quad (3.40)$$

$$\underline{H} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_y \\ \rho u_x \\ B_z \\ B_y \\ B_x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ u_x B_z - u_z B_x \\ u_x B_y - u_y B_x \\ 0 \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{pmatrix} = PER2 \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 H(\underline{U}''^1) &= F(\underline{U})^1 \\
 H(\underline{U}''^2) &= F(\underline{U})^4 \\
 H(\underline{U}''^3) &= F(\underline{U})^3 \\
 H(\underline{U}''^4) &= F(\underline{U})^2 \\
 H(\underline{U}''^5) &= F(\underline{U})^7 \\
 H(\underline{U}''^6) &= F(\underline{U})^6 \\
 H(\underline{U}''^7) &= F(\underline{U})^5 \\
 H(\underline{U}''^8) &= F(\underline{U})^8
 \end{aligned}$$

Las permutaciones que acabamos de realizar nos permiten llevar los vectores $\underline{G}(\underline{U})$ y $\underline{H}(\underline{U})$ a la forma del vector $\underline{F}(\underline{U})$. De esta manera los datos aportados por Zarachay et al. [26] para el caso unidimensional podrán ser utilizados en nuestro problema tridimensional.

Cabe destacar que las igualdades 3.36 y 3.40 de ningún modo implican que los valores numéricos del vector de flujos $\underline{F}(\underline{U})$ sean los mismos cuando este es utilizado cualquiera de las tres direcciones. Por el contrario, dicho vector tomará valores particulares en cada caso. Para evitar esta confusión le agregaremos un subíndice según la siguiente convención:

$\underline{F}_x(\underline{U})$ es el correspondiente al flujo en la dirección x

$\underline{F}_y(\underline{U}) = PER1(\underline{G}(\underline{U}''))$ corresponde al flujo en y

$\underline{F}_z(\underline{U}) = PER2(\underline{H}(\underline{U}''))$ corresponde al flujo en z

De esa manera observamos que la actualización temporal 3.33 puede expresarse como:

$$\boxed{\underline{U}_{i,j,k}^{n+1} = \underline{U}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\underline{F}_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j,k} - \underline{F}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\underline{F}_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2},k} - \underline{F}_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\underline{F}_z \Big|_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \underline{F}_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right]} \quad (3.34)$$

Capítulo IV:

IMPLEMENTACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO

Habiendo explicitado el modelo matemático que representa nuestro problema, y habiendo desarrollado el método mediante el cual intentaremos resolverlo, resta ahora ponerlo en práctica.

Para este fin se ha desarrollado un software en lenguaje FORTRAN cuyas características y organización comentaremos en el presente capítulo.

IV.1.- COMPOSICIÓN GENERAL DEL SOFTWARE

El programa FORTRAN MGD3D consta de once subrutinas y dos archivos externos de datos. La subrutina principal, que constituye el esqueleto del programa, es la subrutina “MAIN”. Esta subrutina es relativamente breve y, como veremos más adelante, su función consiste organizar el programa, es decir, leer los datos externos, llamar a las demás subrutinas en el momento adecuado, y establecer el ciclo principal de evolución del tiempo.

Las otras subrutinas que forman parte del programa son: DAMOLE, GEOMETRI, INICIAL, PANTALLA, IMPRESIONES, METOTVD, FLUJYEEX, FLUJYEEY, FLUJYEEZ Y CONBORD.

IV.2.- SUBRUTINA MAIN

Como se ha dicho anteriormente esta subrutina constituye el esqueleto del programa y trabaja según los siguientes pasos:

Paso 1: Lee datos de archivos externos y los asigna a las variables correspondientes. Podemos agrupar estos datos en tres grandes tipos.

Generales: Dimensiones del mallado (en x, y, z), gas utilizado, número de pasos temporales, CFL máximo,...

Características antes del diafragma: Densidad, presión, velocidades (x, y, z), campo magnético (x, y, z)

Características después del diafragma: Idem anterior.

Paso 2: Llama a la subrutina DAMOLE que calculará los datos moleculares del gas seleccionado en el paso anterior.

Paso 3: Llama a la subrutina GEOMETRI que calcula parámetros geométricos del mallado.

Paso 4: Llama a la subrutina INICIAL para calcular los valores iniciales antes de la membrana.

Paso 5: Llama nuevamente a la subrutina INICIAL para calcular los valores iniciales después de la membrana.

Paso 6: Da comienzo al ciclo principal de evolución del tiempo. Este ciclo tendrá un número de pasos que fue definido en el paso 1.

Paso 7: Llama a la subrutina PANTALLA que muestra en pantalla información de cada paso.

Paso 8: Actualiza el número CFL en base al máximo, leído en el punto 1, y a una ley de incremento establecida. En el primer paso temporal el CFL tendrá un valor muy bajo que irá creciendo al avanzar el tiempo hasta llegar al valor máximo.

Paso 9: Calcula el incremento del tiempo Δt para el paso siguiente en base al CFL y a la mayor velocidad característica.

Paso 10: Llama a la subrutina IMPRESIONES que imprime en archivos las salidas de cada paso.

Paso 11: Llama a la subrutina METOTVD. Esta es la principal subrutina de cálculo, como veremos más adelante esta actualiza los valores del vector \underline{U} aplicando el método descrito en el capítulo anterior.

Paso 12: Actualiza el tiempo en base al valor actual y al incremento establecido en el paso 9 según $t = t + \Delta t$.

Paso 13: Según el número de pasos leído en el paso 1 vuelve al paso 6 o continúa al paso 14.

Paso 14: FIN

IV.3.- SUBRUTINA DAMOLE

La subrutina DAMOLE evalúa los datos moleculares de los gases intervinientes. En ella están almacenados los pesos moleculares, constantes del gas y C_v de catorce gases diferentes, a saber:

1.- N ₂	5.- OH	9.- H ₂ O	13.- H
2.- O ₂	6.- NO ₂	10.- H ₂ O ₂	14.- HE
3.- H ₂	7.- HNO	11.- N ₂	
4.-NO	8.- HO ₂	12.- O	

Según el gas (de 1 a 14) que haya sido seleccionado en el paso 1 de MAIN los datos de este gas son asignados a variables globales.

IV.4.- SUBRUTINA GEOMETRI

En esta subrutina se encuentran almacenadas las dimensiones físicas del tubo y la posición de la membrana. A partir de estos datos y de la densidad del mallado leída en el paso 1 de MAIN se calculan y se asignan a las variables correspondientes las dimensiones de cada celda (Δx , Δy y Δz), las superficies de las caras (SX , SY , SZ), los volúmenes de las celdas y las coordenadas de los nodos.

IV.5.- SUBRUTINA INICIAL

Asigna a cada una de las variables conservadas y primitivas correspondientes a cada una de las celdas un valor inicial según se encuentren antes o después de la membrana. Los valores iniciales son leídos de un archivo externo en el paso 1 de la subrutina MAIN.

IV.6.- SUBRUTINA PANTALLA

Imprime en la pantalla, en cada paso temporal, los valores instantáneos de algunas variables preestablecidas, para permitir un seguimiento de la evolución del cálculo.

IV.7.- SUBRUTINA IMPRESIONES

Imprime en archivos de datos externos los valores de salida calculados cada determinado número de pasos.

IV.8.- SUBRUTINA METOTVD

Es una de las subrutinas más importante del programa debido a que lleva a cabo el cálculo de la actualización temporal de los valores. Aquí es donde se pone en práctica la expresión 3.34, es decir:

$$\underline{U}_{i,j,k}^{n+1} = \underline{U}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\underline{F}_x \Big|_{i-\frac{1}{2},j,k} - \underline{F}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\underline{F}_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2},k} - \underline{F}_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\underline{F}_z \Big|_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \underline{F}_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right]$$

Podemos dividir el trabajo de esta subrutina en varios pasos:

Paso 1: Realiza la permutación 3.36.

Paso 2: Llama a la subrutina FLUJYEEY que calcula el flujo de Godunov en la dirección Y, $\underline{F}_y(\underline{U})$.

Paso 3: Deshace la permutación 3.36.

Paso 4: Realiza la permutación 3.40.

Paso 5: Llama a la subrutina FLUJYEEZ que calcula el flujo de Godunov en la dirección Z, $\underline{F}_z(\underline{U})$.

Paso 6: Deshace la permutación 3.40.

Paso 7: Llama a la subrutina FLUJYEEX que calcula el flujo de Godunov en la dirección X, $\underline{F}_x(\underline{U})$.

Paso 8: Calcula la cantidad $\Delta \underline{U}_y \Big|_{i,j,k} = \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\underline{F}_y \Big|_{i,j-\frac{1}{2},k} - \underline{F}_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k} \right]$

Paso 9: Calcula la cantidad $\Delta \underline{U}_z \Big|_{i,j,k} = \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[\underline{F}_z \Big|_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \underline{F}_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right]$

Paso 10: Calcula la cantidad $\Delta \underline{U}_x|_{i,j,k} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\underline{F}_x|_{i-\frac{1}{2},j,k} - \underline{F}_x|_{i+\frac{1}{2},j,k} \right]$

Paso 11: Calcula el valor actualizado del vector de variables conservativas

$$\underline{U}|_{i,j,k}^{n+1} = \underline{U}|_{i,j,k}^n + \Delta \underline{U}_x|_{i,j,k} + \Delta \underline{U}_y|_{i,j,k} + \Delta \underline{U}_z|_{i,j,k}$$

que equivale a la 3.34.

Paso 12: Calcula los valores actualizados de las variables primitivas a partir de los de las variables conservativas.

Paso 13: Llama a la subrutina CONBORD que impone las condiciones de borde.

Paso 14: Regresa a la subrutina MAIN.

IV.9.- SUBRUTINAS FLUJYEEEX, FLUJYEEY y FLUJYEEZ

Estas subrutinas calculan los flujos numéricos o flujos de Godunov por el método de Roe modificado por Harten e Yee, es decir, calculan la ecuación 3.27.

$$\begin{aligned} \text{dirección x:} \quad \underline{F}_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n &= \frac{1}{2} \left[\underline{F}_x|_{i+1} + \underline{F}_x|_i - \sum_{p=1}^m \hat{K}_{i+\frac{1}{2}}^p \Phi_{i+\frac{1}{2}}^p \right]_{j,k}^n \\ \text{dirección y:} \quad \underline{F}_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^n &= \frac{1}{2} \left[\underline{F}_y|_{j+1} + \underline{F}_y|_j - \sum_{p=1}^m \hat{K}_{j+\frac{1}{2}}^p \Phi_{j+\frac{1}{2}}^p \right]_{i,k}^n \\ \text{dirección z:} \quad \underline{F}_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} \left[\underline{F}_z|_{k+1} + \underline{F}_z|_k - \sum_{p=1}^m \hat{K}_{k+\frac{1}{2}}^p \Phi_{k+\frac{1}{2}}^p \right]_{i,j}^n \end{aligned}$$

Las tres se explicarán como si fueran solo una, ya que cumplen con la misma función, cada una en una dirección.

Nuevamente dividiremos el trabajo de la subrutina en una serie de pasos.

Paso 1: Define un juego de variables locales de esta subrutina a partir de las correspondientes variables generales de la fila (j,k). Esta es la fila que se está evaluando durante toda la llamada a esta subrutina.

Paso 2: Calcula el vector $\underline{F}(\underline{U})$ según la ecuación 2.33 con los valores de las celdas de toda la fila.

Paso 3: Calcula un valor aproximado de las variables en las fronteras promediando sus valores en las celdas adyacentes.

$$\text{Ej: } \quad DENS(1, j, k) = \frac{1}{2} [DENS(1, j, k) + DENS(2, j, k)]$$

Este valor será utilizado para calcular los parámetros λ , α y K (ecs. 3.27 y 3.28).

Paso 4: Calcula diferencias entre los valores obtenidos en el paso anterior y los asigna a las fronteras.

Paso 5: Calcula las velocidades magnetoacústicas y de Alfvén.

Paso 6: Calcula los α (ec. 3.32) en las fronteras.

Paso 7: Calcula los autovalores.

Paso 8: Calcula los coeficientes σ de la ec. 3.28.

Paso 9: Calcula la función g (ec. 3.30).

Paso 10: Calcula la misma función que el paso 9 pero para las celdas de los extremos.

Paso 11: Calcula la función γ (ec. 3.29) en las fronteras.

Paso 12: Calcula $\sigma(\lambda + \gamma)$ para la ecuación 3.28

Paso 13: Calcula la ecuación 3.28

Paso 14: Calcula la sumatoria $T = \sum_p \hat{K}_{i+\frac{1}{2}}^p \Phi_{i+\frac{1}{2}}^p$ para cada frontera de la fila.

Paso 15: Calcula los flujos numéricos sumándole a la corrección el valor previo.

$$\frac{F_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{2} = \frac{1}{2} \left[F_{i+1} + F_i - \sum_{p=1}^m \hat{K}_{i+\frac{1}{2}}^p \Phi_{i+\frac{1}{2}}^p \right]_{j,k}^n$$

Paso 16: Regresa a la subrutina METOTVD.

Capítulo V:

IMPLEMENTACIÓN DEL CÓDIGO COMPUTACIONAL

En el capítulo precedente hemos diseñado un código computacional apropiado para implementar el método desarrollado en el Capítulo III. Con el mismo se intentará resolver el problema planteado en el Capítulo II.

En el presente capítulo explicaremos los pormenores del estudio numérico realizado. Esto nos permitirá comprender con mayor claridad los resultados obtenidos y que serán expuestos en el próximo capítulo.

V.1.- EQUIPAMIENTO

Los ensayos numéricos correspondientes a esta tesis fueron realizados en una computadora personal equipada con un procesador AMD Athlon® X2 y una memoria RAM de 1GB. Este equipo fue asignado al autor por el Laboratorio de Capa Límite y Fluidodinámica Ambiental (LaCLyFA) del Departamento de Aeronáutica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

V.2.- TUBO DE CHOQUE DE LA MGD

Cuando se crea o se modifica un método numérico para la solución de un problema dado, y se diseña un software para su implementación, es factible obtener un resultado que verifica las condiciones numéricas impuestas. Sin embargo, ¿quién nos asegura que el resultado numérico obtenido representa el resultado correcto del problema que se desea resolver?

Es por esta razón que los métodos y códigos numéricos deben ser validados. Con este propósito se utilizan los llamados “benchmarks”. Estos son problemas específicos, con solución conocida, en las cuales la comunidad científica tiene gran confianza [27]. El “benchmark” que usaremos para validar nuestro método, es el llamado “problema del tubo de choque de la magnetogasdínámica” que fuera propuesto por Brio y Wu en 1985 [28].

Este problema representa un dispositivo ideal conformado por un tubo lleno de un cierto gas. En un primer momento (condición inicial) una membrana transversal se encuentra ubicada en una determinada sección de este tubo, separando dos estados distintos del fluido. De un lado de la membrana el gas posee alta presión, mientras que en el otro la presión es mucho menor. En un instante dado ($t=0$) la membrana se retira súbitamente permitiendo que el gas evolucione libremente. A diferencia del problema clásico del tubo de choque (presentado en el inciso III.1.a) de la gasdínámica, en este problema el gas se encuentra ionizado y existe un campo magnético actuando sobre él.

En la evolución del gas se espera encontrar cinco ondas. Una onda rápida de expansión, una onda compuesta lenta, una discontinuidad de contacto, una onda de compresión lenta y una onda de expansión lenta. Las dos primeras se desplazan hacia la zona de mayor presión, mientras que las tres últimas lo hacen hacia la de menor presión.

Cabe destacar que el problema de Riemann de la Magnetogasdínámica introducido por Brio y Wu, no es un verdadero problema físico. Puede observarse que este problema se extiende al infinito, es decir, no tiene bordes físicos. En un tubo de choque real lleno con plasma magnetizado el campo magnético tiene que cumplir ciertas condiciones en las paredes del tubo, es decir, deben satisfacerse las ecuaciones de Maxwell. Por otra parte, resulta evidente que en las paredes del tubo físico la velocidad normal a estas debe ser nula. Por todo esto, no debe sorprender que la solución numérica aparezca como no física (Zarachay [26]).

V.3.- MALLADO

Los ensayos fueron realizados con cuatro diferentes densidades de mallado, a saber:

	número de celdas en la dirección X	número de celdas en la dirección Y	número de celdas en la dirección Z	número total de celdas	Dx, Dy, Dz (el. cúbicos)
mallado 1	200	70	70	980.000	5
mallado 2	160	56	56	501.760	6.25
mallado 3	100	35	35	122.500	10
mallado 4	40	14	14	7.840	25

Tabla 5.1.- Descripción de los mallados

Puede observarse que la relación de dimensiones 20:7:7 es respetada en todos los casos. Si consideramos que las dimensiones físicas del tubo en cuestión también guardan esa relación, notaremos que los elementos tridimensionales (volúmenes finitos) serán siempre de forma cúbica.

V.4.- PASO TEMPORAL

En la Sección III.2.a se explicó que el incremento temporal se calculaba según la expresión

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{\max}^n} \quad (5.1)$$

Esta condición asegura que ninguna onda viajará, en cada intervalo de tiempo (Δt), una distancia mayor que la longitud de una celda (Δx). Esto es necesario para poder realizar el cálculo de los flujos entre las celdas. Cabe destacar que esta condición aún es válida en el caso de darse una interacción o cruce entre ondas, bajo la suposición de que esto no producirá un cambio en sus velocidades (Le Veque [18]).

Si se define el número de Courant-Friedrichs-Lewy como:

$$CFL = \frac{\Delta t \cdot S_{\max}^n}{\Delta x} \quad (5.2)$$

la condición 5.1 implica que el CFL debe ser menor que 1. Por otra parte, vemos que el número de CFL puede ser visto como el cociente entre los módulos de dos velocidades,

$$CFL = \frac{\Delta t \cdot S_{\max}^n}{\Delta x} = \frac{S_{\max}^n}{\Delta x / \Delta t} \quad (5.3)$$

la máxima velocidad de onda S_{\max}^n , y la velocidad del malla definida por su geometría,

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Esto indica que el número CFL debe ser mayor que 0.

En base a las consideraciones anteriores podemos expresar el paso de tiempo como:

$$\Delta t \leq \frac{CFL \cdot \Delta x}{S_{\max}^n} \quad \text{con} \quad 0 \leq CFL \leq 1 \quad (5.4)$$

Como vemos, el incremento temporal no debe ser necesariamente constante, sino que puede variar desde un valor nulo, para $CFL=0$, hasta un valor máximo, para $CFL=1$. Aprovechando esa posibilidad, y para facilitar la convergencia y evitar fluctuaciones, se ha elegido en este trabajo utilizar un paso de tiempo variable aumentando linealmente el valor del CFL desde 0 hasta 0,4. Una vez alcanzado el valor de 0,4 este queda constante hasta el final del cálculo.

Para el caso tridimensional general, en la ec. (5.3) se utiliza la dimensión más grande de cada celda

$$\Delta x = \text{máx}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

y la velocidad más alta entre las ondas en todas las direcciones.

V.5.- CONDICIONES INICIALES

Las condiciones iniciales de la simulación fueron introducidas en la forma de variables primitivas, que son las variables físicamente medibles.

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix} \quad \underline{W}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ 1 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{W}_d = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,75 \\ -1 \\ -0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

A partir de estas, el programa calcula las variables conservadas:

$$\underline{U} = [\rho \quad \rho u_x \quad \rho u_y \quad \rho u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad e]^T$$

Como oportunamente se ha explicado estas son las variables en las que se basa nuestro método de solución.

V.6.- CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno establecidas consisten en asignar el valor nulo a las derivadas primeras de las variables en toda la superficie del tubo. Con este objetivo se toma una “cáscara” del espesor de una celda sobre la superficie, y a cada una de las celdas que la componen se le asigna el valor de la adyacente más cercana al centro.

En otras palabras, si consideramos que el tubo es un prisma rectangular y llamamos a sus seis caras: entrada, salida, piso, techo, fondo y frente; asignaremos a cada cara las siguientes condiciones de contorno.

entrada: $\underline{U}(i = 1, j, k) = \underline{U}(i = 2, j, k)$
 salida: $\underline{U}(i = i_{\max}, j, k) = \underline{U}(i = i_{\max} - 1, j, k)$

 piso: $\underline{U}(i, j = 1, k) = \underline{U}(i = 2, j, k)$
 techo: $\underline{U}(i, j = j_{\max}, k) = \underline{U}(i, j = j_{\max} - 1, k)$

 fondo: $\underline{U}(i, j, k = 1) = \underline{U}(i, j, k = 2)$
 frente: $\underline{U}(i, j, k = k_{\max}) = \underline{U}(i, j, k = k_{\max} - 1)$

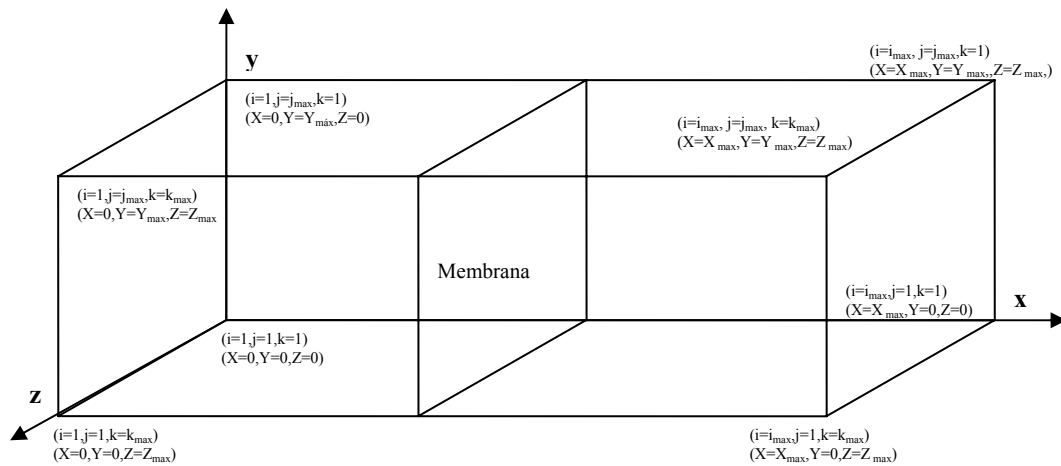


Figura 5.1.- Paredes del Tubo

V.7.- VARIABLES OBSERVADAS

Para comentar y evaluar los resultados obtenidos en nuestra simulación observaremos la evolución de las variables primitivas. Siendo estas las que estamos habituados a observar experimentalmente y percibir con nuestros sentidos, son las que nos permitirán una mejor comprensión de los fenómenos.

Capítulo VI:

RESULTADOS

En este apartado presentaremos y comentaremos los resultados obtenidos en nuestra simulación. En una primera instancia se presentarán detalladamente los resultados correspondientes al mallado más denso, es decir, el presentado como mallado 1 en la tabla 5.1. Dichos valores serán comparados con aquellos obtenidos y validados por Maglione y Elaskar en su simulación bidimensional. Más tarde, se realizará una comparación entre los resultados 3D obtenidos con los cuatro mallados presentados en la tabla 5.1. Se intentará de ese modo establecer una correlación entre la densidad del mallado y la precisión de los resultados obtenidos con este tipo de métodos.

Cabe destacar que la condición de tridimensionalidad del flujo se logra mediante la asignación de diversos valores a las componentes transversales del campo magnético.

A diferencia de lo que se hizo en trabajos previos, se ha optado en esta Tesis por ofrecer la evolución temporal de las variables en función del tiempo mismo, y no de los pasos temporales. Esto se debe a que la duración de los pasos temporales es función de la densidad del mallado, por lo tanto resultaría imposible hacer una comparación entre los resultados correspondientes a distintos mallados.

VI.1.- EVOLUCIÓN DE LA DENSIDAD

Comenzaremos observando la evolución de la densidad a lo largo de la simulación. Compararemos los datos obtenidos en la simulación tridimensional desarrollada en esta

tesis con aquellos bidimensionales previamente obtenidos y validados por Maglione y Elaskar [29 y 30].

En la Figura 6.1 se observa que para $t=0$, los valores de la densidad corresponden, en ambas simulaciones, a los asignados en las condiciones iniciales. Es decir, antes de la membrana, ubicada en la mitad de la longitud del tubo, la densidad adimensional tiene un valor de 1, mientras que después de esta su valor es de 0,125. Se observa total superposición de las curvas correspondientes a ambas simulaciones.

Una vez retirada la membrana, se puede observar una gran discontinuidad de contacto. Inmediatamente a la izquierda de esta el valor de la densidad comienza a disminuir, dando lugar al comienzo de una onda de expansión. A la derecha de la misma se produce un aumento de la presión que da lugar al comienzo de una onda de compresión. En sucesivos pasos se observa que la onda de expansión se desplaza hacia la izquierda, mientras que la de compresión lo hace hacia la derecha. Las diferencias entre las simulaciones 2D y 3D son mínimas y atribuibles a la discrepancia en las densidades de los mallados.

La discontinuidad de contacto se caracteriza por un salto en las variables, en el cual las curvas características son paralelas a esta, a ambos lados, y la entropía se mantiene constante. En la onda de expansión, los estados a ambos lados se conectan a través de una transición suave, las características a ambos lados divergen en forma de abanico y no hay variación de entropía. La onda de compresión es una onda de choque, los estados a ambos lados de esta se conectan a través de una abrupta discontinuidad en la cual las curvas características a ambos lados convergen y hay un salto de entropía.

Muy tempranamente, para $t=0,01$, puede observarse en la simulación 2D la formación de una onda compuesta. En la simulación 3D esta onda comienza a dibujarse claramente, en la misma ubicación y con las mismas características, aunque de manera un poco más tardía. Esta demora se atribuye a la menor densidad del mallado.

Más tarde comienza a definirse claramente el límite, al principio poco claro, entre la onda de choque y la discontinuidad de contacto. Se observa también la aparición de una onda de expansión rápida, que viaja hacia la derecha por delante de la onda de choque.

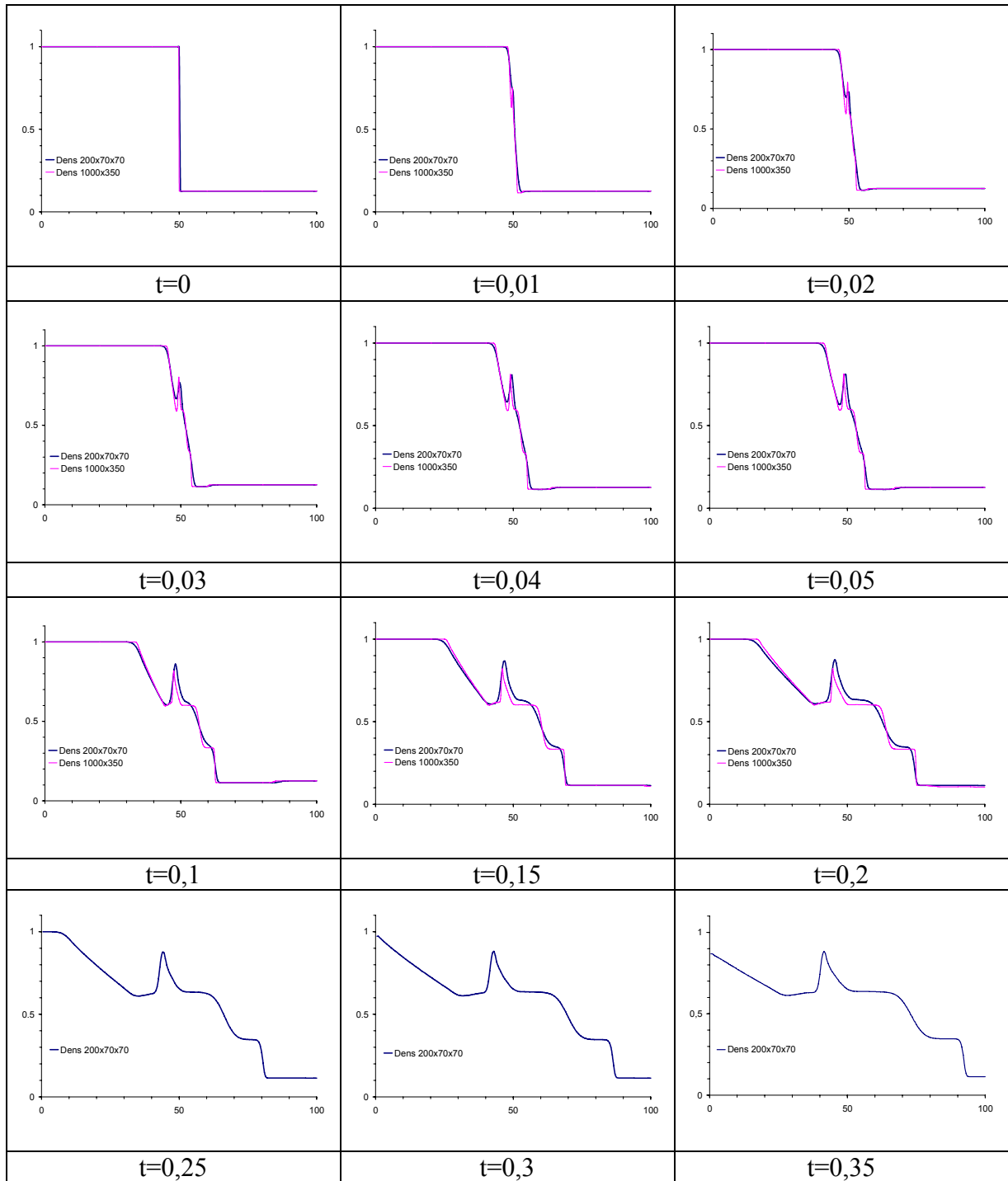


Fig. 6.1.- Evolución de la densidad (no se cuenta con datos 2D para $T > 0,2$)

En síntesis, podemos observar la formación de cinco discontinuidades. Como puede verse en la Figura 6.2 definimos dos discontinuidades que se propagan hacia la izquierda y tres que se propagan hacia la derecha, a saber:

Discontinuidades que se propagan hacia la izquierda:

- Onda de expansión lenta
- Onda compuesta lenta

Discontinuidades que se propagan hacia la derecha:

- Discontinuidad de contacto
- Onda de choque
- Onda de expansión rápida

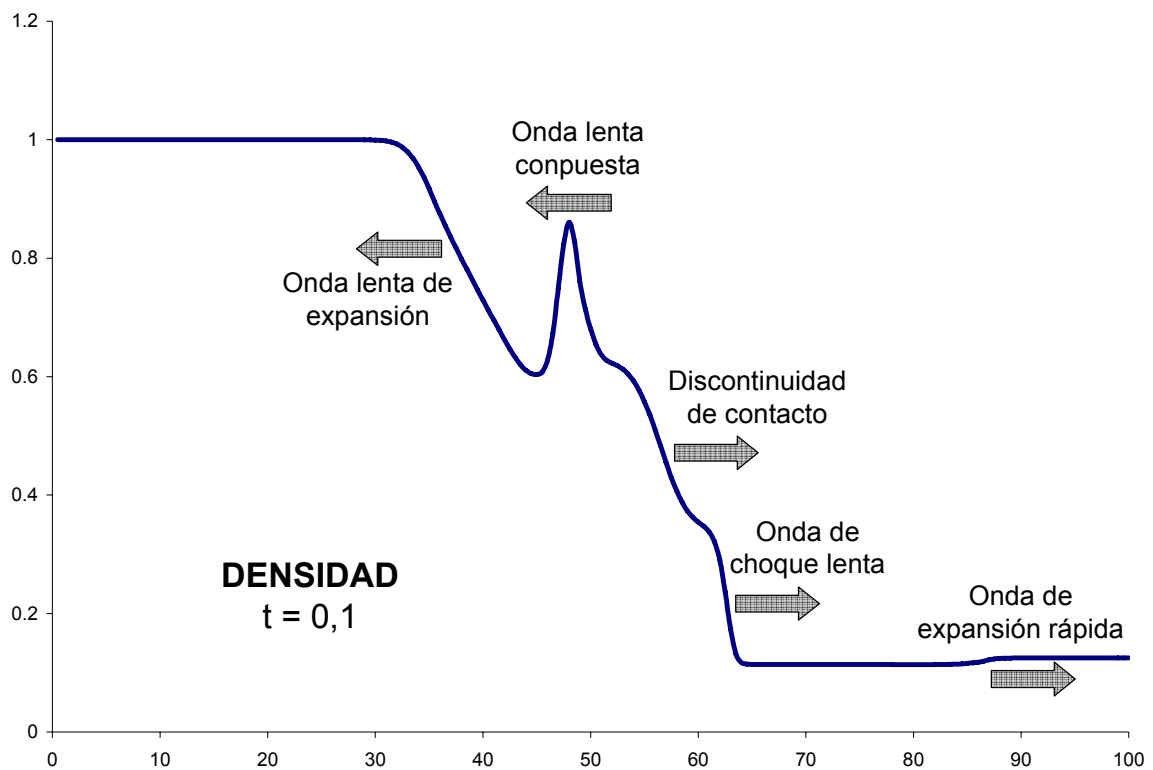


Fig. 6.2.- Identificación de ondas

VI.2.- EVOLUCIÓN DE LA PRESIÓN

En la Figura 6.3 se observa que la evolución de la presión presenta características similares a aquellas observadas en la evolución de la densidad. Se reconocen las mismas ondas y las curvas del modelo 3D se ajustan a las del modelo 2D en la medida esperada. Se destaca, a diferencia de lo que ocurre con la densidad, que no hay variación en la presión a través de la discontinuidad de contacto.

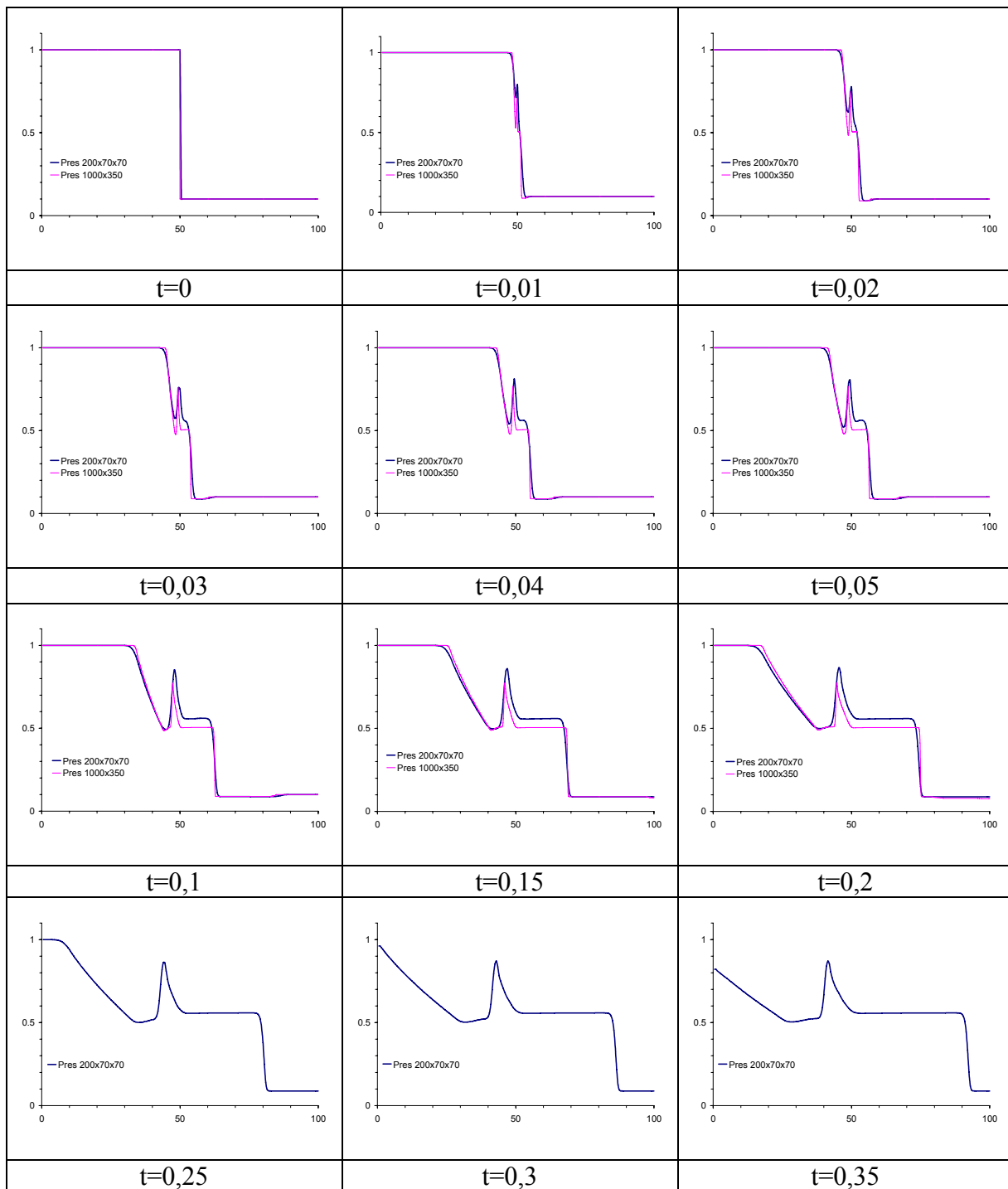


Fig. 6.3.- Evolución de la presión

VI.3.- EVOLUCIÓN DE LA VELOCIDAD NORMAL

En la Figura 6.4 puede verse la evolución de la componente normal a la membrana de la velocidad. La misma, inicialmente nula, comienza a crecer y propagarse en ambas direcciones. Se observa, nuevamente, que los datos de la simulación 3D se ajustan a los de la simulación 2D.

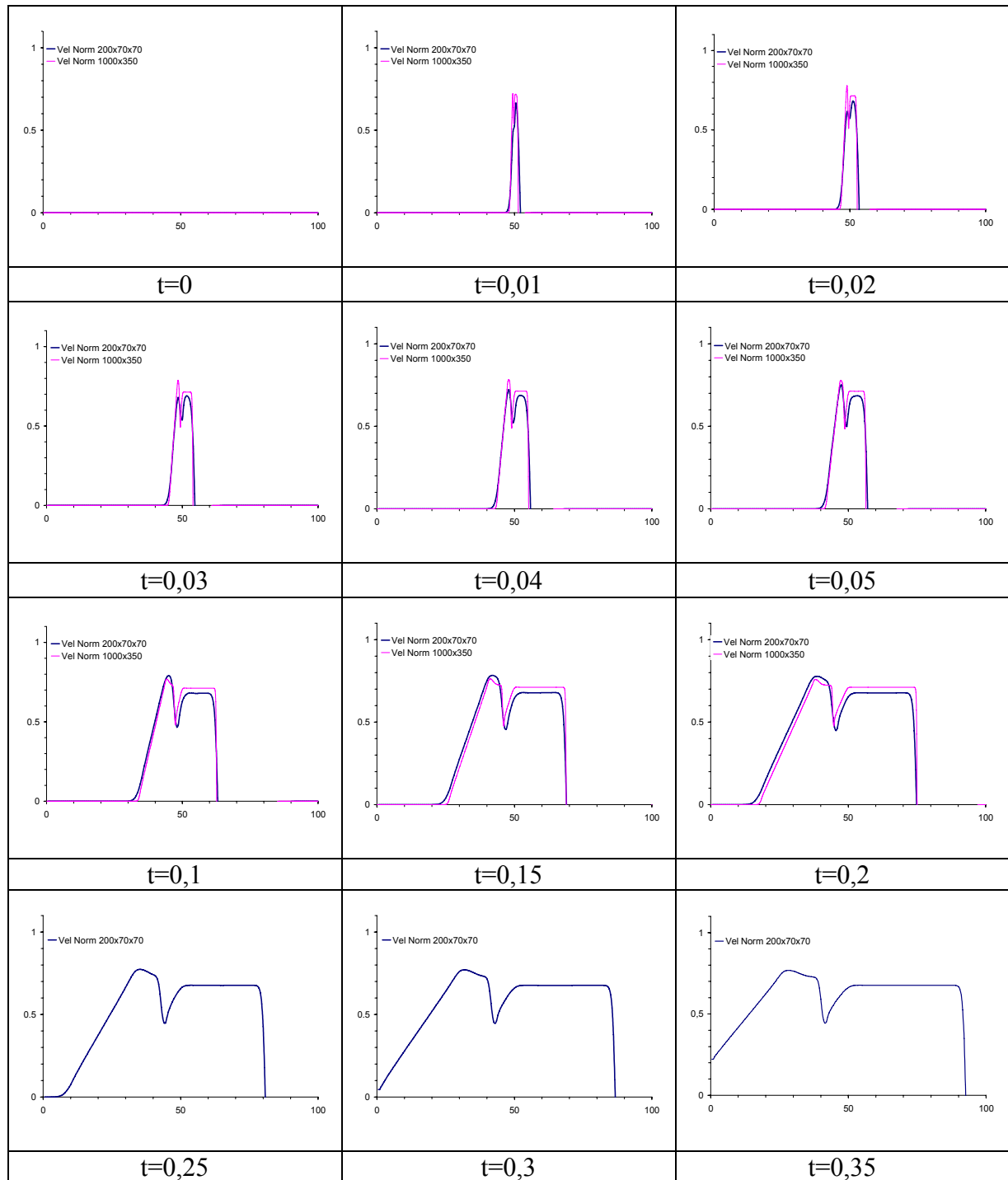
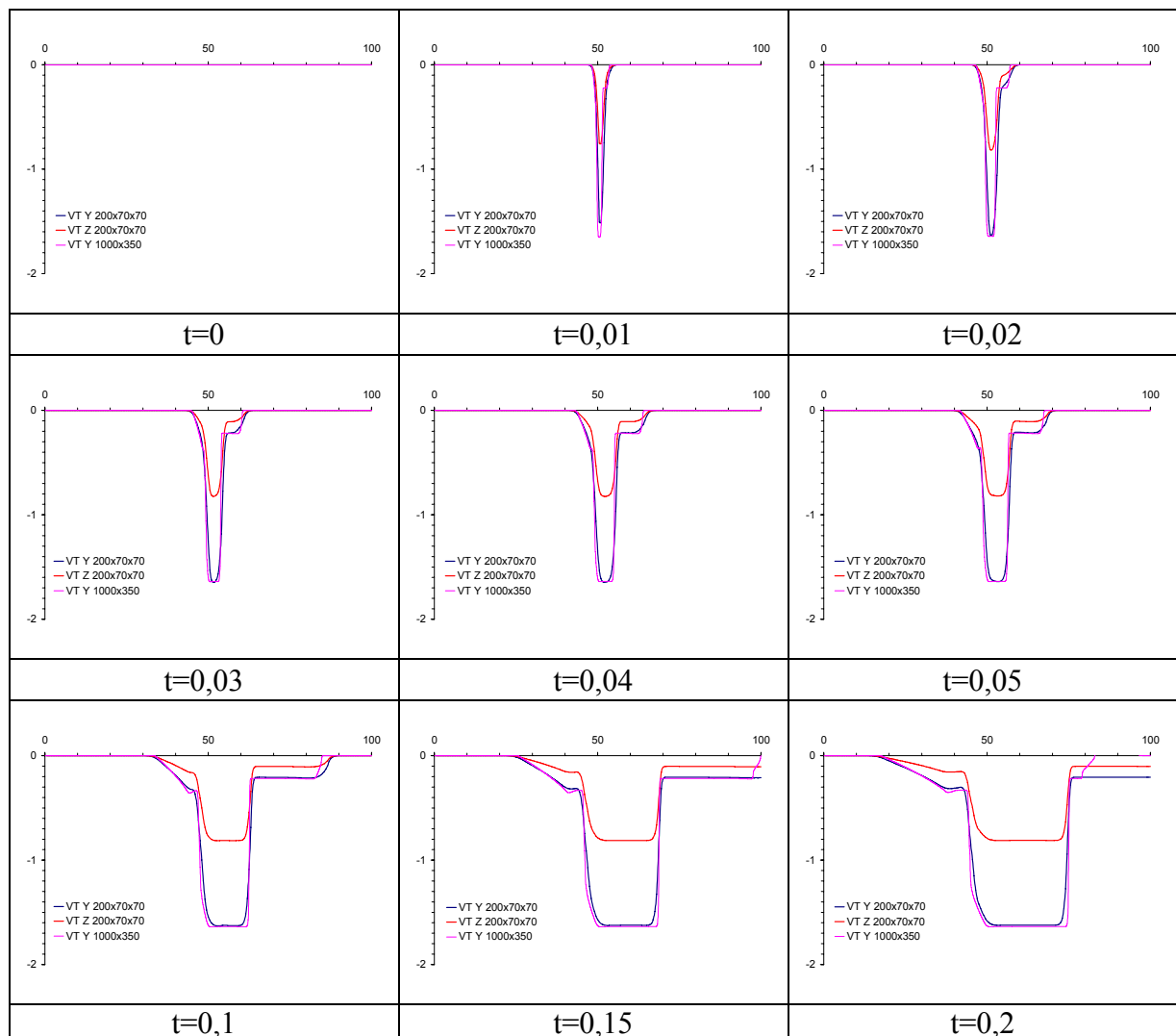


Fig. 6.4.- Evolución de la velocidad normal

VI.4.- EVOLUCIÓN DE LAS VELOCIDADES TANGENCIALES

En la Figura 6.5 se presenta la evolución de las componentes tangenciales de la velocidad. Las componentes Y y Z de la simulación 3D se comparan con la componente Y de la simulación 2D. Las curvas de las componentes Y de ambas simulaciones se ajustan correctamente, mientras que las correspondientes a la componente Z presenta una forma similar pero con valores inferiores. Este comportamiento resulta coherente a la luz de lo que veremos en el siguiente apartado.



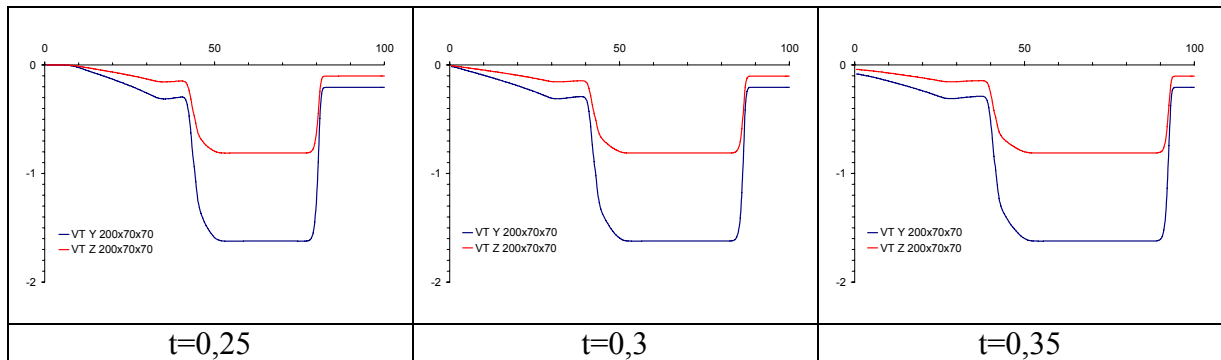


Fig. 6.5.- Evolución de las velocidades tangenciales

VI.5.- EVOLUCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO

Podemos observar en la Figura 6.6 la evolución de las componentes transversales del campo magnético. No se ha incluido la componente normal de este porque conserva su valor inicial constante durante toda la simulación. Las componentes en la dirección Y y Z de la simulación 3D se comparan con la componente Y de la simulación 2D.

La curva correspondiente a la componente Y para 3D se adapta correctamente a su homóloga de la simulación 2D, salvando las diferencias inducidas por la diferente densidad de los mallados. Por su parte, la curva de la componente Z presenta una forma similar pero con valores más pequeños.

El comportamiento de las componentes Z del campo magnético y de la velocidad se comprende al recordar que el valor inicial asignado al campo magnético en Z es 50% inferior al asignado a su componente Y. Los valores fueron elegidos de este modo para poner en evidencia que ambas componentes transversales del campo magnético son calculadas independientemente. Se realizaron simulaciones con valores similares en ambas componentes y la superposición de los resultados fue perfecta. Además, cabe destacar que el valor de la componente Y del campo magnético para la simulación en 2D fue el mismo que el empleado en la simulación 3D.

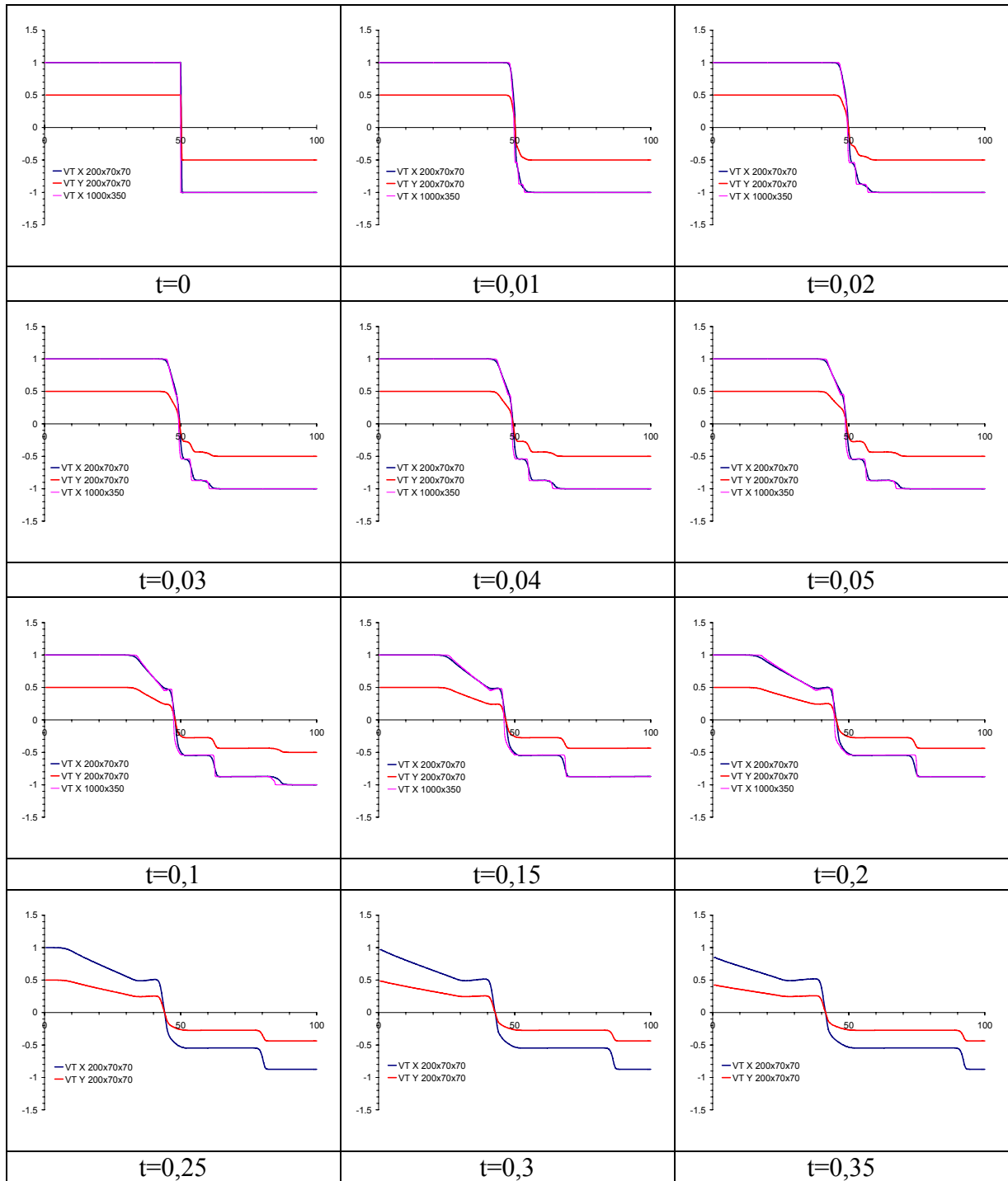


Fig. 6.6.- Evolución del campo magnético

VI.6.- VALIDACIÓN

Los gráficos correspondientes a la simulación 3D, objeto de esta Tesis, coinciden ampliamente con aquellos correspondientes a la simulación 2D realizada y validada por

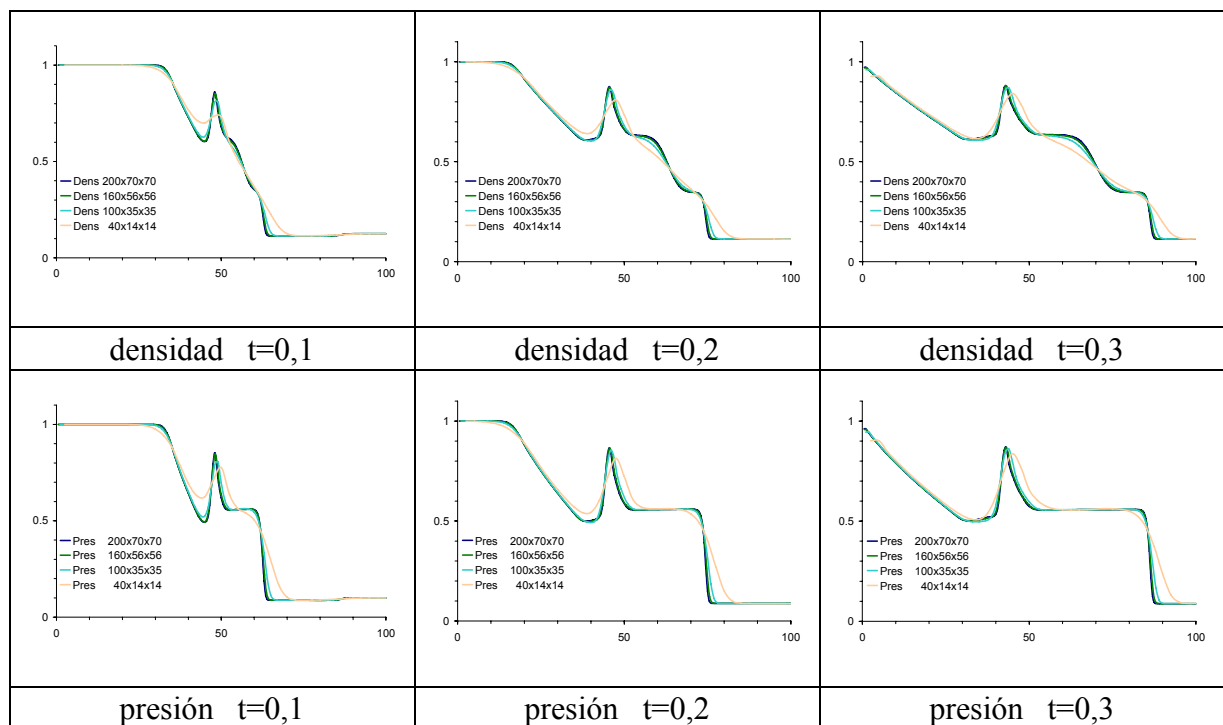
Maglione y Elaskar [29 y 30]. Todas las ondas son captadas en su posición correcta, y su velocidad de desplazamiento coincide en ambas simulaciones.

Se observan algunas pequeñas discrepancias manifestadas como una falta de resolución (líneas más redondeadas o suavizadas). Estas se atribuyen a la menor densidad del mallado utilizado, como consecuencia de la limitación en la capacidad computacional.

VI.7.- COMPARACIÓN ENTRE MALLADOS

Para completar este capítulo se presenta a continuación una comparación entre los resultados obtenidos con el programa 3D, utilizando los diferentes mallados definidos en la Tabla 5.1.

En la Figura 6.7 se muestran las curvas de las variables densidad, presión y velocidad normal. Puede notarse claramente que, tal como fuera previsto en incisos anteriores de este mismo capítulo, la menor densidad del mallado se traduce en una disminución de la precisión de los resultados. Esto es evidenciado como un redondeo o suavizado en la forma de las curvas.



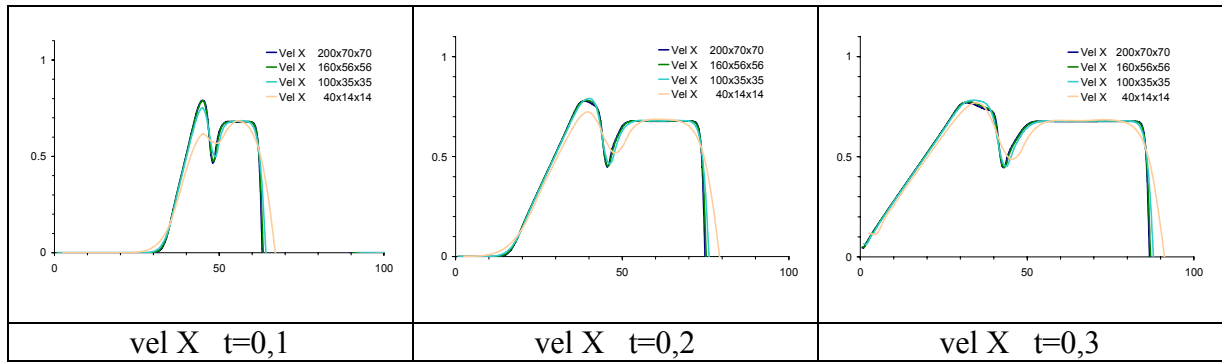


Fig. 6.7.- Comparación entre diferentes mallados

Esta última consideración resulta de gran importancia ya que avala la hipótesis hecha en la Sección VI.6 para explicar las pequeñas discrepancias entre la simulación 3D y la 2D.

Capítulo VII:

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Se dedicará este último capítulo a presentar las conclusiones, basadas en la cuidadosa observación y el análisis de los resultados mostrados en el capítulo precedente. Además, se incluirán algunos comentarios acerca de la experiencia personal del autor que pudieran resultar de provecho para eventuales lectores. Luego, se ensayará una breve reflexión acerca de cuanto el autor cree haber incorporado y aprendido durante el proceso de realización del trabajo y la confección de esta Tesis. Por último, se sugerirán posibles opciones de trabajo para continuar la presente línea de investigación.

VII.1.- CONCLUSIONES

Al analizar los datos obtenidos con el método 3D, se observó que las curvas correspondientes a las distintas variables se ajustaban claramente a sus equivalentes, correspondientes al método 2D. Se verificó la aparición de las mismas ondas, con similares dimensiones y velocidades de desplazamiento.

Sin embargo, también pudo verse en los gráficos que las curvas correspondientes al método 3D, presentaban un aspecto menos definido que aquellas obtenidas con el método 2D. Es decir, presentan un aspecto más suave o redondeado.

Esas pequeñas discrepancias fueron atribuidas desde el principio a la menor densidad del mallado utilizado para el cálculo 3D. Cabe aclarar que el costo computacional de realizar los ensayos en 3D, con un mallado de densidad similar al utilizado en 2D habría superado

ampliamente las capacidades del hardware empleado. Por esta razón debió implementarse uno de menor densidad.

Con el objeto de analizar la validez de la interpretación antes mencionada, se decidió realizar los cálculos tridimensionales con cuatro mallados de diferentes densidades y comparar los resultados obtenidos. Al hacerlo, se observó que la disminución de la densidad del mallado, generaba variaciones en los resultados idénticas a las diferencias observadas entre el cálculo 3D y 2D realizado en un primer momento.

Considerando todo esto, estamos en condiciones de aseverar que el problema del tubo de choque de la magnetogasdinámica, utilizado como “benchmark” en esta Tesis, ha sido resuelto satisfactoriamente por el método 3D aquí desarrollado.

VII.2.- EXPERIENCIA PERSONAL DEL AUTOR

Es muy probable que aquellos profesionales que estén considerando la posibilidad de profundizar sus conocimientos a través de la realización de estudios de postgrado, puedan encontrar provechosa la lectura de las experiencias de quienes los han precedido en ese camino. Por esta razón, el autor de la presente Tesis ha considerado oportuno dedicar algunas breves palabras a relatar su experiencia personal.

Quien escribe, es un Ingeniero Aeronáutico egresado hace cuatro años de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Su formación de grado le ha aportado una excelente base de conocimientos en materia de Mecánica de los Fluidos, asignatura en la que además se desempeña como docente. Sin embargo, en el momento de comenzar con el presente trabajo sus conocimientos sobre métodos numéricos eran mínimos y sus conocimientos acerca de gases ionizados en campos magnéticos y plasma eran casi nulos.

Por todo esto resulta comprensible que el primer contacto con el material a analizar le resultara un tanto preocupante y desalentador, a pesar del apoyo y la confianza infundida por sus directores. Resulta curioso, sin embargo, que en el término de unos pocos meses se haya encontrado a si mismo manejando dicho material sin mayores dificultades.

No menos difícil parecía en un principio el desafío de tener que enfrentarse con la necesidad de leer y escribir código en lenguaje FORTRAN. El autor tenía alguna experiencia en lenguajes de programación de alto nivel como Matlab o Scilab, pero tuvo que aprender sobre la marcha a leer y a escribir código en FORTRAN.

Cabe destacar al respecto, la inmensa ayuda que significa el agregado de comentarios explicativos dentro del mismo software. Esto constituye una excelente práctica de programación, que facilita la comprensión de un código, y la reutilización y mejora del software.

No menos destacable resulta la inmensa ayuda que significó el trabajar diariamente en un ámbito universitario, desempeñando actividad docente y de investigación, y el haber sido beneficiado con una beca del PROMEI para la realización de postgrados. Además de la indispensable ayuda económica esto aporta experiencia en redacción de trabajos científicos y enormes facilidades a la hora de conseguir material, acceder a la información y consultar a personas idóneas.

VII.3.- COMENTARIOS ADICIONALES DEL AUTOR

Desde un principio se estableció formalmente que el objetivo del presente trabajo era:

“Desarrollar e implementar un método numérico para resolver las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal en las tres dimensiones espaciales”

Sin embargo, a lo largo del desarrollo de su Tesis, el autor ha comprendido que el verdadero objetivo de la misma va mucho más allá de lo formalmente expresado en esas palabras.

Durante el desarrollo del trabajo se pone verdaderamente en evidencia el enorme caudal de conocimientos que son incorporados, algunas veces en forma consciente y otras en forma inconsciente. Se ha aprendido acerca de la magnetogasdínámica y sus ecuaciones,

acerca del problema de Riemann y los métodos para resolverlo; se ha aprendido sobre métodos numéricos y el desarrollo de software para su implementación, así como de una infinidad de temas más, cuya enumeración sería tediosa e inevitablemente incompleta.

Sin perjuicio de la importancia de todo lo que acaba de mencionarse, al finalizar la redacción de su Tesis, quien escribe se queda con la sensación de que el principal objetivo de la misma no era el que formalmente se expresara desde el comienzo. Aquel, parece haber sido solo una excusa destinada a promover el desarrollo de un sinnúmero de habilidades y destrezas que, junto con el pensamiento (a veces lógico y metódico, otras espontáneo e intuitivo, pero siempre crítico) terminan siendo el principal aporte que este trabajo deja en quien lo ha desarrollado.

VII.4.- SUGERENCIAS SOBRE POSIBLES TRABAJOS FUTUROS

Con el presente trabajo queda completa la “trilogía” del desarrollo de métodos para resolver las ecuaciones **ideales** de la magnetogasdinámica en 1D, 2D y 3D. Además han sido desarrollados por investigadores de la Universidades Nacionales de Córdoba y Río Cuarto los códigos 1D y 2D para las ecuaciones de la magnetogasdinámica real. Por esta razón, resulta interesante, en esta instancia, la posibilidad dotar al código 3D de la capacidad de resolver las ecuaciones **reales** de la magnetogasdinámica, incorporando los términos disipativos. Este agregado parece ser una posibilidad para un futuro tesista de maestría que desee profundizar en este camino. En una etapa posterior sería importante poder extender el código para trabajar con mallas no estructuradas.

Abreviaturas:

\underline{E} \equiv Campo eléctrico

\underline{B} \equiv Campo magnético

\underline{u} \equiv Vector velocidad

ρ \equiv Densidad

$\rho^q = \frac{q}{Vol}$ \equiv Densidad de carga eléctrica

\underline{q} \equiv Flujo de calor

T \equiv Temperatura

\underline{k} \equiv Tensor de conductividad térmica

p \equiv presión

p_e \equiv presión del electrón

\underline{g} \equiv Aceleración de la gravedad

$\underline{j} = \frac{i}{Sup}$ \equiv Densidad de corriente

c \equiv Velocidad de la luz

ϵ \equiv Permeabilidad eléctrica

μ \equiv Viscosidad

μ_o \equiv Permeabilidad magnética en el vacío

m_e \equiv masa del electrón

$\underline{\tau}$ \equiv tensor de tensiones viscosas

$\underline{\tau}_e$ \equiv tensor de tensiones del electrón

$\underline{\sigma}$ \equiv tensor de tensiones viscosas

σ \equiv Función introducida por Yee et al.

n_e \equiv cantidad de electrones por unidad de volumen

$\underline{\eta}$ \equiv tensor de resistividad eléctrica del plasma

\underline{I} es el tensor unitario

\underline{U} \equiv Vector de las variables conservadas

$\underline{U}_i^n \equiv$ Vector de las variables conservadas discretizadas para la celda i y el tiempo n

$\tilde{\underline{U}}_i^n \equiv$ Vector solución del problema de Riemann i en el tiempo n

$U_K \equiv$ Variable K del vector \underline{U}_i^n

$\hat{U} \equiv$ Energía interna por unidad de masa

$\underline{u} \equiv$ Velocidad del fluido

$u \equiv$ Módulo de la velocidad

$e \equiv$ Energía total del fluido

$f_h = f \equiv$ Tensor de flujo hiperbólico

$f_p \equiv$ Tensor de flujo parabólico

$\underline{F} \equiv$ Vector de flujo hiperbólico en la dirección x

$\underline{G} \equiv$ Vector de flujo hiperbólico en la dirección y

$\underline{H} \equiv$ Vector de flujo hiperbólico en la dirección z

$\underline{F}_{i-\frac{1}{2}} \equiv$ Flujo numérico de Godunov entre las celdas $(i-1)$ e i

$\underline{F}_{i+\frac{1}{2}} \equiv$ Flujo numérico de Godunov entre las celdas i e $(i+1)$

$\underline{F}_L \equiv$ Flujo a través de x_L

$\underline{F}_R \equiv$ Flujo a través de x_R

$\underline{E}_{0L} \equiv$ Flujo a través de la interfase por la izquierda

$\underline{E}_{0R} \equiv$ Flujo a través de la interfase por la derecha

$\underline{F}^H \equiv$ Flujo de orden elevado

$\underline{F}^L \equiv$ Flujo de bajo orden

$x_L \equiv$ Límite izquierdo del volumen de control del problema de Riemann local

$x_R \equiv$ Límite derecho del volumen de control del problema de Riemann local

$[A_c]; [B_c]; [C_c] \equiv$ Matrices jacobianas de los flujos en las variables conservativas

$[A_p]; [B_p]; [C_p] \equiv$ Matrices jacobianas de los flujos en las variables primitivas

$\lambda \equiv$ Autovalor

$\lambda_e \equiv$ Autovalor correspondiente a la onda Entrópica

$\lambda_a \equiv$ Autovalor correspondiente a la onda de Alfven

$\lambda_f \equiv$ Autovalor correspondiente a la onda magnetoacústica rápida

$\lambda_s \equiv$ Autovalor correspondiente a la onda magnetoacústica lenta
 $c_a \equiv$ Velocidad de Alfven
 $c_f \equiv$ Velocidad magnetoacústica rápida
 $c_a \equiv$ Velocidad magnetoacústica lenta
 $L \equiv$ Longitud del tubo
 $x \equiv$ Coordenada longitudinal
 $x_i \equiv$ Coordenada longitudinal del centro de la celda i
 $x_{i-\frac{1}{2}} \equiv$ Coordenada longitudinal de la frontera entre las celdas $(i-1)$ e i
 $RP(U_{i-1}; U_i) \equiv$ Problema de Riemann local entre las celdas $(i-1)$ e i
 $t^n \equiv$ Paso de tiempo n
 $S_{\max}^n \equiv$ Velocidad de la onda más rápida
 $S_L \equiv$ Velocidad de la onda más rápida que viaja hacia la izquierda
 $S_D \equiv$ Velocidad de la onda más rápida que viaja hacia la derecha
 $\underline{\underline{A}} \equiv$ Matriz Jacobiana de la función de flujo
 $\underline{\underline{K}} \equiv$ Autovalores derechos de $\underline{\underline{A}}$
 $\phi \equiv$ Función limitadora
 $CFL \equiv$ Flujo de Courant-Friedrichs-Lewy
 $\tilde{*} \equiv$ Valor referente a la solución exacta al problema de Riemann local
 $\hat{*} \equiv$ Valor referente a la solución exacta al problema modificado por Roe

Referencias:

1. Eleuterio Toro, "Riemann Solvers And Numerical Methods for Fluid Dynamics". Springer, 1997.
2. Udrea B. "An Advanced Implicit Solver for MHD". PhD Thesis, University of Washington, 1999
3. Sutton G. and Sherman A. "Engineering Magnetohydrodynamics". McGraw-Hill, New York, 1965.
4. Batchelor G. K. "An Introduction to Fluid Dynamics". Cambridge University Press, 1967.
5. Bird, Stewart y Lightfoot, "Transport Phenomena" (ec.3.2-8). Wiley, 2002.
6. Bird, Stewart y Lightfoot "Transport Phenomena" (ec.10.1-11). Wiley, 2002.
7. Polovin R. V. y Demutskii V. P., "Fundamentals of magnetohydrodynamics". Consultants Bureau, 1990.
8. Scott B. D., "An Introduction to MHD". Ph. D. Thesis, University of Washington, 1999.
9. Powell K., "An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)". NASA Contract No NAS1-19489, ICASE, NASA Langley Research Laboratory, Hampton, 1995.
10. P. L. Roe. "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes". Journal of Computational Physics, 43:357-372, 1981.
11. R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees. "On the solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences". Comm. Pure. Appl. Math., 5:243-255, 1952
12. S. K. (Ed.) Godunov. "Numerical Solution of Multi-Dimensional Problems in Gas Dynamics". Nauka Press, Moscow, 1976
13. R. Courant and K. O. Friedrichs. "Supersonic Flow and Shock Waves". Springer-Verlag, 1985.
14. Suhas V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow". Cap.3, Ed. Taylor and Francis, ISBN 0-89116-522-3, 1980
15. S. K. Godunov. "A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics". Mat. Sb., 47:357-393, 1959

16. A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. "On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws". *SIAM Review*, 25(1):35-61, 1983.
17. Yee H., Warming R. y Harten A., "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for steady-state Calculations". *J. Comput. Phys.*, Vol. 57, págs. 327-360, 1985.
18. Le Veque R. J. "Numerical Methods for Conservation Laws". Birkäuser, Germany, 1992.
19. Colella P., "Multidimensional Upwind methods for hyperbolic conservation law". Lawrence Berkeley Lab Report LBL-17023, 1984
20. Zalesak S. T., "A preliminary comparison of modern shock-capturing schemes: linear advection". *Advance in computers methods for partial differential equations*, 1987.
21. Harten A., "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws". *Journal of Computational Physics*, 49, 1983.
22. Yee H. Warming R., Harten A., "Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations". *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, págs. 327 – 360, 1985.
23. Elaskar S., Sanchez C., Brito H., "Numerical tools for the simulation of the APPT behaviour: arc generation and plasma flow". "3rd International Conference on Spacecraft Propulsion". Cannes, France. Publicado en los Proceedings, European Space Agency. pp. 501-508, October, 2000.
24. Elaskar S., "Solución de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal por medio de un esquema TVD". ENIEF 2000, Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA), San Carlos de Bariloche. Publicado en *Mecánica Computacional*, Vol 19, Pags. 483-488, Noviembre 2000.
25. Shumlak U. and Udea B., "An approximate Riemann Solver for MHD Computations on Parallel Architectures". 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper N°2001-2591, Anaheim, California, 11-14 June 2001.
26. Zarachay A., Malagoli A., Colella P., "A higher order Godunov Method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics". *SIAM J. on Sci. Comput.* Vol. 15, págs. 263-284, 1994.
27. Oberkampf W. L. y Trucano T. G., "Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics". Sandia National Laboratories, SAND2002-0529, en <http://infoserve.sandia.gov/cgi-bin/techlib/access-control.pl/2002/020529.pdf>, 2002.
28. Brio M. y Wu C., "An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics". *J. Comput. Phys.*, Vol. 45, págs. 400-422, 1988.

29. L. S. Maglione, Sergio A. Elaskar , Héctor H. Brito “Numerical simulation of two-dimensional, non-steady, ideal magnetogasdynamic equations”. 28th International Electric Propulsion Conference. IEPC. Paper N° 70, 2003.
30. Maglione L., Elaskar S., Brito H. Dean R., “Simulación numérica de flujos magnetogasdinámicos reales en dos dimensiones”. *Mecánica Computacional Vol XXV*, pp. 2475-2484 A. Cardona, N. Nigro, V. Sonzogni, M. Storti. (Eds.) Santa Fe, Argentina, Noviembre 2006.
31. Roe P. and Balsara D., “Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics” SIAM J. App. Math., Vol 56, págs. 57-67, 1996.

Apéndice A:

FORMA ADIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINÁMICA IDEAL

En este primer apéndice se mostrará la forma de llegar a las expresiones de las ecuaciones expresadas en la tabla 2.2 en forma adimensional. Con este propósito se seguirá el desarrollo utilizado por Elaskar y Maglione para sus trabajos en una y dos dimensiones espaciales.

1.- VARIABLES DE REFERENCIA

Las variables listadas a continuación son las que se usarán como los valores de referencia necesarios para el proceso de adimensionado.

Tamaño característico del plasma de referencia	a
Campo magnético de referencia	B_{ref}
Densidad de referencia	ρ_{ref}
Resistividad de referencia	η_{ref}
Viscosidad cinemática de referencia	ν_{ref}
Coefficiente de conducción térmica de referencia	k_{ref}
Coefficiente de difusividad térmica	$\alpha_{ref} = \frac{k_{ref}}{\rho_{ref}c_p}$
Velocidad de referencia – Alfven –	$c_a = \frac{B_{ref}}{\sqrt{\mu_0 \rho_{ref}}}$

2.- VARIABLES Y COEFICIENTES ADIMENSIONALES

Con la ayuda de las variables de referencia calcularemos las variables y los coeficientes adimensionales.

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{y} = \frac{y}{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{z} = \frac{z}{a} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{t} = \frac{t}{a/c_a} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{u} = \frac{u}{c_a} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{B} = \frac{B}{B_{ref}} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{e} = \frac{e}{B_{ref}^2 / \mu_o} \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{p} = \frac{p}{B_{ref}^2 / \mu_o} \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{T} = \frac{Tc_p}{c_a^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_{ref}} \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{ref}} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{k} = \frac{k}{k_{ref}} \quad (\text{A.14})$$

3.- NÚMEROS ADIMENSIONALES CARACTERÍSTICOS UTILIZADOS

Número de Reynolds (R_e): Es una medida de la relación existente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas existentes en un fluido. Si el número de Reynolds es pequeño, entonces, los efectos viscosos prevalecen sobre los inerciales. Por el contrario, si el Reynolds es grande los efectos inerciales prevalecen.

Este número se define como:

$$R_e = \frac{aU}{\nu_{ref}} \quad (\text{A.15})$$

Número de Lundquist (L_u): Describe la influencia del campo magnético sobre el flujo, es una medida de la relación existente entre la velocidad de flujo y la velocidad de difusión del campo magnético. Para $L_u \gg 1$ el campo magnético se mueve con el flujo, para $L_u \ll 1$ no tiene influencia sobre el movimiento de este.

Este número se define como:

$$L_u = \frac{\mu_0 a U}{\eta_{ref}} \quad (\text{A.16})$$

Número de Peclet (P_e): Es una medida de la relación existente entre la convección térmica y la conducción térmica. Para un P_e grande la advección térmica es más importante que la conducción.

Se define como:

$$P_e = \frac{aU}{\alpha_{ref}} \quad (\text{A.17})$$

Número de Alfvén (A_l): Es una medida de la proporción existente entre la velocidad de Alfvén y la velocidad del flujo.

Se define:

$$A_l = \frac{c_a}{U} \quad (\text{A.18})$$

4.- FORMA ADIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Partimos de la ecuación 2.14

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

Introduciendo en esta las variables adimensionales A.6, A.4, A.5 y A.7 obtenemos:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \rho_{ref})}{\partial (\bar{t} a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \rho_{ref} \bar{u} c_a) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Trabajando algebraicamente

$$\frac{\rho_{ref} c_a}{a} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_{ref} c_a}{a} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{u}) = 0 \quad (\text{A.20})$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \underline{u}) = 0} \quad (\text{A.21})$$

Esta última es la forma adimensional que buscamos.

5.- FORMA ADIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Partimos de la ecuación 2.20

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{u}) + \nabla \cdot \left[\rho \underline{u} \underline{u} - \frac{1}{\mu_o} \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} \frac{\underline{B} \cdot \underline{B}}{\mu_o} \right) \right] = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

$$\text{con } \underline{\underline{\tau}} = \mu \left[\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T - \frac{2}{3} I (\nabla \cdot \underline{u}) \right]$$

Introduciendo en esta las variables adimensionales A.6, A.4, A.5, A.7, A.8 y A.10

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\rho}_{ref} \bar{u} c_a)}{\partial (\bar{t} a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\rho} \bar{\rho}_{ref} \bar{u} c_a \bar{u} c_a - \frac{1}{\mu_o} \bar{B} \bar{B}_{ref} \bar{B} \bar{B}_{ref} + I \left(\frac{\bar{p} \bar{B}_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}^2 \bar{B}_{ref}^2}{\mu_o} \right) \right] = \\ & \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\mu} \bar{\mu}_{ref} \left[\left(\frac{c_a}{a} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{c_a}{a} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{c_a}{a} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Introduciendo la definición de la velocidad de Alfvén

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} c_a^2}{a} \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \frac{\rho_{ref} c_a^2}{a} \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\rho u u} - \overline{B B} + I \left(\overline{p} + \frac{1}{2} \overline{B^2} \right) \right] = \\ \frac{c_a}{a^2} \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\mu \mu_{ref}} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \cdot \overline{u} \right] \right] \end{aligned} \quad (A.23)$$

Considerando la relación entre la velocidad cinemática y la absoluta

$$\underline{v}_{ref} = \frac{\underline{\mu}_{ref}}{\underline{\rho}_{ref}} \quad (A.24)$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\rho u u} - \overline{B B} + I \left(\overline{p} + \frac{1}{2} \overline{B^2} \right) \right] = \frac{v_{ref}}{c_a a} \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\mu} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \cdot \overline{u} \right] \right] \quad (A.25)$$

$$\boxed{\frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\rho u u} - \overline{B B} + I \left(\overline{p} + \frac{1}{2} \overline{B^2} \right) \right] = \frac{1}{R_e A_t} \overline{\nabla} \cdot \overline{\underline{\tau}}} \quad (A.26)$$

donde:

$$\underline{\underline{\tau}} = \overline{\mu} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\nabla} \cdot \overline{u} \right] \quad (A.27)$$

6.- FORMA ADIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE INDUCCIÓN

Partimos, en este caso, de la ecuación 2.13.

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u B} - \underline{B u}) = -\nabla \times \left[\frac{1}{\underline{\mu}_o} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right]$$

Introduciendo en esta las variables adimensionales A.8, A.4, A.5, A.7 y el coeficiente adimensional A.13.

$$\frac{\partial(\overline{BB}_{ref})}{\partial t(\overline{ta}/c_a)} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (\underline{uc}_a \overline{BB}_{ref} - \overline{uc}_a \underline{BB}_{ref}) = -\frac{1}{a} \overline{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_o} \eta_{ref} \underline{\eta} \cdot \left(\frac{1}{a} \nabla \times \underline{BB}_{ref} \right) \right] \quad (A.28)$$

$$\frac{B_{ref} c_a}{a} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \frac{B_{ref} c_a}{a} \overline{\nabla} \cdot (\underline{uB} - \overline{uB}) = -\frac{\eta_{ref} B_{ref}}{a^2 \mu_o} \overline{\nabla} \times [\underline{\eta} (\overline{\nabla} \times \underline{B})] \quad (A.29)$$

Introduciendo los números adimensionales de Lundquist (A.16) y Alfvén (A.18)

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot (\underline{uB} - \overline{uB}) = -\frac{1}{L_u A_l} \overline{\nabla} \times [\underline{\eta} (\overline{\nabla} \times \underline{B})] \quad (A.30)$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot (\underline{uB} - \overline{uB}) = -\frac{1}{L_u A_l} \overline{\nabla} \cdot \underline{E}} \quad (A.31)$$

6.- FORMA ADIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Partimos de la ecuación 2.23

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \frac{\underline{B}}{\mu_o} \right] = \nabla \cdot \left\{ \underline{u} \cdot \underline{\tau} + \underline{k} \cdot \nabla T - \frac{1}{\mu_o^2} [\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B})] \times \underline{B} \right\}$$

Introducimos en esta las variables adimensionales A.9, A.4, A.5, A.9, A.10, A.8, A.7, A.11 y los coeficientes adimensionales A.14 y A.13.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\bar{e}B_{ref}^2 / \mu_o)}{\partial(\bar{t}a / c_a)} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\bar{e}B_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{\bar{p}B_{ref}^2}{\mu_o} + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}^2 B_{ref}^2}{\mu_o} \right) \bar{u} c_a \right] - \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left[(\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \frac{B_{ref}^2 c_a}{\mu_o} \right] = \\
& \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ k_{ref} \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \frac{1}{a} \frac{c_a^2}{c_p} \right\} + \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ c_a \bar{u} \cdot \left[\bar{\mu} \mu_{ref} \frac{c_a}{a} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right] \right\} \\
& - \frac{1}{a} \bar{\nabla} \cdot \left\{ -\frac{1}{\mu_o^2} \left[\eta_{ref} \bar{\eta} \cdot \left(\frac{B_{ref}}{a} (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \right) \right] \times B_{ref} \bar{B} \right\}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{B_{ref}^2 c_a}{a \mu_o} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \frac{B_{ref}^2 c_a}{a \mu_o} \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \right] = \\
& \frac{k_{ref} c_a^2}{a^2 c_p} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \} + \frac{c_a^2}{a^2} \mu_{ref} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \bar{u} \cdot \left[\bar{\mu} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\nabla} \cdot \bar{u} \right] \right] \right\} \\
& - \frac{\eta_{ref} B_{ref}^2}{a^2 \mu_o^2} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \} \times \bar{B}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Trabajando algebraicamente e introduciendo los números adimensionales de Reynolds (A.15), de Alfvén (A.18), de Lundquist (A.16), de Peclet (A.17) junto con A.33 se obtiene finalmente:

$$\boxed{
\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[\left(\bar{e} + \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{B}^2 \right) \bar{u} - (\bar{B} \cdot \bar{u}) \bar{B} \right] = \\
& \frac{1}{R_e A_l} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{u} \cdot \bar{\tau} \} + \frac{1}{P_e A_l} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{k} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \} - \frac{1}{L_u A_l} \bar{\nabla} \cdot \{ \bar{\eta} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{B}) \} \times \bar{B}
\end{aligned}
} \tag{A.34}$$

Las ecuaciones A.21, A.26, A.31 y A.34 se pueden expresar matricialmente como en la ecuación 2.28.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho u} \\ \overline{B} \\ \overline{e} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \overline{\rho u} \\ \overline{\rho u u} - \overline{B B} + I \left(\overline{p} + \frac{1}{2} \overline{B^2} \right) \\ \overline{u B} - \overline{B u} \\ \left(\overline{e} + \overline{p} + \frac{1}{2} \overline{B^2} \right) \overline{u} - (\overline{B \cdot u}) \overline{B} \end{bmatrix} = \overline{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{\tau} \\ \overline{R_e A_l} \\ \overline{E_r} \\ \overline{L_u A_l} \\ \frac{\overline{u \cdot \tau}}{\overline{R_e A_l}} + \frac{\overline{k \cdot \nabla T}}{\overline{P_e A_l}} - \frac{\overline{(\eta \cdot (\nabla \times \overline{B})) \times \overline{B}}}{\overline{L_u A_l}} \end{bmatrix}$$

Apéndice B:

DEDUCCIÓN DE LOS VECTORES DE FLUJO HIPERBÓLICO

En este segundo apéndice deduciremos la forma de expresar la ecuación matricial 2.30 en la forma de la ecuación 2.31. Con este objetivo deberán encontrarse las expresiones correspondientes a los vectores de flujo hiperbólico, ecuaciones 2.33, 2.34 y 2.35.

Partimos de la ecuación 2.30

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + I \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Al considerar la característica vectorial del segundo y el tercer elemento de esta ecuación matricial de cuatro elementos, observamos que la misma puede verse como un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas.

1.- PRIMER ELEMENTO DE LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho u_x \quad \rho u_x \quad \rho u_x] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \overbrace{(\rho u_x)}^F + \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{(\rho u_z)}^G + \frac{\partial}{\partial z} \overbrace{(\rho u_z)}^H} = 0} \quad (\text{A.1})$$

2.- SEGUNDO ELEMENTO DE LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{u}) + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + \underline{I} (p + \frac{1}{2} B^2)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} (\rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2) & (\rho u_x u_y - B_x B_y) & (\rho u_x u_z - B_x B_z) \\ (\rho u_y u_x - B_y B_x) & (\rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2) & (\rho u_y u_z - B_y B_z) \\ (\rho u_z u_x - B_z B_x) & (\rho u_z u_y - B_z B_y) & (\rho u_z^2 - B_z^2 + p + \frac{1}{2} B^2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\begin{bmatrix} (\rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2) \\ (\rho u_y u_x - B_y B_x) \\ (\rho u_z u_x - B_z B_x) \end{bmatrix}}^F \quad \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{\begin{bmatrix} (\rho u_x u_y - B_x B_y) \\ (\rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2) \\ (\rho u_z u_y - B_z B_y) \end{bmatrix}}^G \quad \frac{\partial}{\partial z} \overbrace{\begin{bmatrix} (\rho u_x u_z - B_x B_z) \\ (\rho u_y u_z - B_y B_z) \\ (\rho u_z^2 - B_z^2 + p + \frac{1}{2} B^2) \end{bmatrix}}^H \right]} = 0} \quad (\text{A.2})$$

3.- TERCER ELEMENTO DE LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} (u_x B_x - B_x u_x) & (u_x B_y - B_x u_y) & (u_x B_z - B_x u_z) \\ (u_y B_x - B_y u_x) & (u_y B_y - B_y u_y) & (u_y B_z - B_y u_z) \\ (u_z B_x - B_z u_x) & (u_z B_y - B_z u_y) & (u_z B_z - B_z u_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 & (u_x B_y - B_x u_y) & (u_x B_z - B_x u_z) \\ (u_y B_x - B_y u_x) & 0 & (u_y B_z - B_y u_z) \\ (u_z B_x - B_z u_x) & (u_z B_y - B_z u_y) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 \\ (u_y B_x - B_y u_x) \\ (u_z B_x - B_z u_x) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} (u_x B_y - B_x u_y) \\ 0 \\ (u_z B_y - B_z u_y) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} (u_x B_z - B_x u_z) \\ (u_y B_z - B_y u_z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(A.3)

4.- CUARTO ELEMENTO DE LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} + (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \right] = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \quad \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_y \quad \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_z + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_z \right] = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_y \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_z + (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_z \right] = 0}$$

(A.4)

Agrupando las ecuaciones A.1, A.2, A.3 y A.4 obtenemos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ e \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - B_x u_y \\ u_x B_z - B_x u_z \\ (e + p + \frac{1}{2} B^2) u_x - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_x \end{bmatrix}}^F + \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{\begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_y u_x - B_y B_x \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ u_y B_x - B_y u_x \\ 0 \\ u_y B_z - B_y u_z \\ (e + p + \frac{1}{2} B^2) u_y - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_y \end{bmatrix}}^G \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \overbrace{\begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z u_x - B_z B_x \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ \rho u_z^2 - B_z^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ u_z B_x - B_z u_x \\ u_z B_y - B_z u_y \\ 0 \\ (e + p + \frac{1}{2} B^2) u_z - (\underline{B} \cdot \underline{u}) B_z \end{bmatrix}}^H
\end{aligned}$$

De lo cual se deduce que la ecuación 2.30 puede expresarse como la 2.31

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0}$$

Apéndice C:

CÁLCULO DE LAS MATRICES JACOBIANAS

En este tercer apéndice presentaremos detalladamente el método mediante el cual se han calculado las matrices jacobianas de los flujos en términos de las variables primitivas (ecs. 2.43). Cabe destacar que se ha utilizado una metodología diferente de aquellas utilizadas en los trabajos en 1D y 2D, aprovechando los beneficios que aporta el cálculo matricial.

Partimos, en esta oportunidad, de la ecuación 2.31

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial z} = \underline{0}$$

Introduciendo en ella el vector de las variables primitivas 2.36

$$\underline{W} = [\rho \quad u_x \quad u_y \quad u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad p]^T$$

y recordando que:

$$\underline{F} = \underline{F}(\underline{U}(\underline{W})) = \underline{F}(\underline{W})$$

$$\underline{G} = \underline{G}(\underline{U}(\underline{W})) = \underline{G}(\underline{W})$$

$$\underline{H} = \underline{H}(\underline{U}(\underline{W})) = \underline{H}(\underline{W})$$

podemos escribirla de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial z} = \underline{0}$$

premultiplicando cada término por $\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1}$:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \overbrace{\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial x}}^{[A_p]} + \overbrace{\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial y}}^{[B_p]} + \overbrace{\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{W}} \frac{\partial \underline{W}}{\partial z}}^{[C_p]} = \underline{0} \quad (\text{B.1})$$

obtenemos

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} + [C_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial z} = \underline{0} \quad (\text{B.2})$$

con

$$[A_p] = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}} \quad (\text{B.3})$$

$$[B_p] = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}} \quad (\text{B.4})$$

$$[C_p] = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1} \frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{W}} \quad (\text{B.5})$$

El éxito de este método para el cálculo de matrices $[A_p]$, $[B_p]$ y $[C_p]$ reside en haber encontrado la expresión algebraica de la matriz $\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}}\right)^{-1}$.

Considerando 2.32 y 2.36:

$$\underline{U} = [\rho \quad \rho u_x \quad \rho u_y \quad \rho u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad e]^T$$

$$\underline{W} = [\rho \quad u_x \quad u_y \quad u_z \quad B_x \quad B_y \quad B_z \quad p]^T$$

Resulta claro que:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_z & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{U^2}{2} & \rho U_x & \rho U_y & \rho U_z & B_x & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Al invertir algebraicamente esa matriz obtenemos:

$$\left[\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_y}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{U_z}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{U^2(\gamma-1)}{2} & -U_x(\gamma-1) & U_y(\gamma-1) & U_z(\gamma-1) & -B_x(\gamma-1) & -B_y(\gamma-1) & -B_z(\gamma-1) & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Debemos ahora calcular las matrices $\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}}$, $\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}}$ y $\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{W}}$. Expresando los vectores de flujo

según las variables primitivas

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left(\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) u_x - B_x^2 u_x - B_x B_y u_y - B_x B_z u_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ u_y B_x - u_x B_y \\ 0 \\ u_y B_z - u_z B_y \\ \left(\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_x + u_y + u_z) + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) u_y - B_y B_x u_x - B_y^2 u_y - B_y B_z u_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ \rho u_y u_z - B_y B_z \\ \rho u_z^2 - B_z^2 + p + \frac{1}{2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_z B_y - u_y B_z \\ 0 \\ \left(\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) u_z - B_z B_x u_x - B_z B_y u_y - B_z^2 u_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

podemos derivarlas y obtener:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_x^2 & 2\rho u_x & 0 & 0 & -B_x & B_y & B_z & 1 \\ u_x u_y & \rho u_y & \rho u_x & 0 & -B_y & -B_x & 0 & 0 \\ u_x u_z & \rho u_z & 0 & \rho u_x & -B_z & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ \frac{u_x^2}{2} \left[\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(2u_x^2 + u^2) + B_y^2 + B_z^2 \right] & \rho u_x u_y - B_x B_y & \rho u_x u_z - B_x B_z & -u_y B_y - u_z B_z & 2B_y u_x - B_x u_y & 2B_z u_x - B_x u_z & \frac{u_x}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_x u_y & \rho u_y & \rho u_x & 0 & -B_y & -B_x & 0 & 0 \\ u_y^2 & 0 & 2\rho u_y & 0 & B_x & -B_y & B_z & 1 \\ u_z u_y & 0 & \rho u_z & \rho u_y & 0 & -B_z & -B_y & 0 \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & u_y & -u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & -u_z & u_y & 0 \\ \frac{u^2 u_y}{2} & \rho u_x u_y - B_y B_x & \left[\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho (2u_y^2 + u^2) \right] & \rho u_y u_z - B_y B_z & 2u_y B_x - u_x B_y & -B_x u_x - B_z u_z & 2B_z u_y - B_y u_z & \frac{u_y}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_z & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_x u_z & \rho u_z & 0 & \rho u_x & -B_z & 0 & -B_x & 0 \\ u_y u_z & 0 & \rho u_z & \rho u_y & 0 & -B_z & -B_y & 0 \\ u_z^2 & 0 & 0 & 2\rho u_z & B_x & B_y & -B_z & 1 \\ 0 & -B_z & 0 & B_x & u_z & 0 & -u_x & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & B_y & 0 & u_z & -u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2 u_z}{2} & \rho u_x u_z - B_z B_x & \rho u_y u_z - B_z B_y & \left[\frac{p\gamma}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho (2u_z^2 + u^2) \right] & 2u_z B_x - u_x B_z & 2B_y u_z - B_z u_y & -B_x u_x - B_y u_y & \frac{u_z}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

En un último paso calculamos las expresiones B.3, B.4 y B.5

$$[A_p] = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \right)^{-1} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -u_y & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -u_z & 0 & u_x & 0 \\ 0 & p\gamma & 0 & 0 & (\gamma-1)\underline{u} \cdot \underline{B} & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix}$$

$$[B_p] = \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \right)^{-1} \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_y & 0 & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_y & 0 & \frac{B_x}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & u_y & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & 0 \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & u_y & -u_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & -u_z & u_y & 0 \\ 0 & 0 & p\gamma & 0 & 0 & (\gamma-1)\underline{B} \cdot \underline{u} & 0 & u_y \end{bmatrix}$$

$$[C_p] = \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{W}} \right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \underline{W}} = \begin{bmatrix} u_z & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & u_z & 0 & 0 & -\frac{B_z}{\rho} & -\frac{B_y}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_z & \frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & -B_z & 0 & B_x & u_z & 0 & -u_x & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & B_y & 0 & u_z & -u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p\gamma & 0 & 0 & (\gamma-1)\underline{u} \cdot \underline{B} & u_z \end{bmatrix}$$

De este modo hemos obtenido de manera práctica y sencilla las matrices jacobianas de los flujos.

Apéndice D:

PRESENTACIÓN DE LOS AUTOVALORES Y AUTOVECTORES MODIFICADOS

En este cuarto y último apéndice presentaremos los autovalores y los autovectores de la matriz jacobiana de los flujos modificada por Powell. Caber recordar que según los que se explicó en la sección III.3 solo hacen falta los valores de la matriz jacobiana del flujo en la dirección x , \underline{F} , para realizar nuestros cálculos.

Hemos visto en el Apéndice anterior la deducción de la matriz jacobiana $[A_p]$. A continuación presentaremos la misma matriz con las modificaciones introducidas por Powell, que ya han sido mencionadas en los capítulos precedentes.

$$[A_p] = \begin{bmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u_x & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{bmatrix}$$

Seguidamente se ofrecen los autovalores y los autovectores derechos e izquierdos.

– **Primer autovalor:** $\lambda_e = u_x$

Autovectores asociados:

$$\underline{r}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

– **Segundo y tercer autovalores:**

$$\lambda_a = u_x \pm c_a$$

Autovectores asociados:

$$\underline{r}_a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \\ \beta_y \\ 0 \\ \pm \sqrt{\rho} \beta_z \\ \mp \sqrt{\rho} \beta_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l}_a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \\ \beta_y \\ 0 \\ \pm \frac{\beta_z}{\sqrt{\rho}} \\ \mp \frac{\beta_y}{\sqrt{\rho}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

– **Cuarto y quinto autovalores:**

$$\lambda_f = u_x \pm c_f$$

Autovectores asociados:

$$\underline{r}_f^\pm = \begin{bmatrix} \rho\alpha_f \\ \pm\alpha_f c_f \\ \mp\alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \mp\alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ \alpha_s \sqrt{\rho} \beta_y \\ \alpha_s \sqrt{\rho} \beta_z \\ \alpha_f \rho \end{bmatrix} \quad \underline{l}_f^\pm = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{\alpha_f c_f}{2c^2} \\ \mp\frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \mp\frac{\alpha_s}{2c^2} c_s \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ \frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho c}} \beta_y \\ \mp\frac{\alpha_s}{2\sqrt{\rho c}} \beta_z \\ \frac{\alpha_f}{2\rho c^2} \end{bmatrix}$$

– **Sexto y séptimo autovalores:**

$$\lambda_f = u_x \pm c_s$$

Autovectores asociados:

$$\underline{r}_s^\pm = \begin{bmatrix} \rho\alpha_s \\ \pm\alpha_s c_s \\ \pm\alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm\alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} \beta_y \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} \beta_z \\ \alpha_s \rho \end{bmatrix} \quad \underline{l}_s^\pm = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{\alpha_s c_s}{2c^2} \\ \pm\frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm\frac{\alpha_f}{2c^2} c_f \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ 0 \\ -\frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho c}} \beta_y \\ \frac{\alpha_f}{2\sqrt{\rho c}} \beta_z \\ \frac{\alpha_s}{2\rho c^2} \end{bmatrix}$$

– **Octavo autovalor:**

$$\lambda_d = u_x$$

Autovectores asociados:

$$\underline{r}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En todos los casos:

$$c_{a,n} = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}}$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{P} + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P} + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\mathcal{P} B_x^2}{\rho^2}} \right)$$

$$\beta_y = \begin{cases} \frac{B_y}{B_\perp} & B_\perp \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & B_\perp = 0 \end{cases}$$

$$\beta_z = \begin{cases} \frac{B_z}{B_\perp} & B_\perp \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & B_\perp = 0 \end{cases}$$

$$\beta_\perp = \sqrt{\beta_y^2 + \beta_z^2}$$

$$\alpha_f = \frac{c^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2}$$

$$\alpha_s = \frac{c_f^2 - c^2}{c_f^2 - c_s^2}$$