UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Trabajo de Tesis Doctoral

SOBRE EL COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE SOLUCIONES GLOBALES EN TIEMPO DE CIERTAS ECUACIONES NO LINEALES DE EVOLUCIÓN

Claudia B. Ruscitti

Director: Dr. Oscar A. Barraza
Asesor Académico: Dra. Marcela Zuccalli

2011

A los soles que iluminan mi vida, Agustín, Ignacio, Matías y Constanza.

A Darío, mi complemento en esta aventura que es vivir.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi Director, el Dr. Oscar A. Barraza, por haberme guiado en la realización de esta tesis, y también a la Dra. Marcela Zuccalli por su buena predisposición ante cada consulta.

Al Departamento de Matemática, que es mi lugar de trabajo desde hace ya muchos años y, en especial, a la Lic. Nélida Echebest, quien me dio la primera oportunidad en este camino de hacer Matemática.

A mis amigos y compañeros, Silvia, Lau, Laura y Raúl por toda la paciencia, gracias por estar!

A mis compañeros de clases, por hacer agradables tantas horas compartidas, en especial a Marcela por sus ganas de colaborar y su calidez.

Por último, a mis amigos de toda la vida que me alientan y, por supuesto, a mi familia, que me apoya incondicionalmente y cuya felicidad es mi única meta.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. ¿Qué es un fluido?

La respuesta a esta pregunta no es tan sencilla como parece. Dependerá del punto de vista que utilicemos para contestarla.

Un fluido es un medio continuo, es decir una sustancia que se mueve (se deforma) en forma continua al transcurrir el tiempo, $t > 0$, y forma un todo continuo en el espacio $x = (x_1, x_2, x_3)$. Pensamos en tal medio como compuesto de partículas puntuales. Desde el punto de vista físico, el concepto de medio continuo es una abstracción que, estrictamente hablando, está en contra de una teoría ampliamente verificada, la teoría atómica. La teoría de los fluidos trata de construir una teoría matemática que sirva de modelo de la realidad; renunciando a la exactitud y teniendo en cuenta la belleza, extensión y profundidad de las matemáticas originadas; y por otra parte desde el punto de vista físico, por su eficacia en reflejar y en permitirnos intuir y conocer la realidad subyacente, explicar su funcionamiento observado y predecir su evolución futura. La aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que se olvida con frecuencia de que se trata de un modelo.

Así, la consideración del fluido como un medio continuo se basa en que éste consiste en un agregado de partículas en movimiento caótico y que la distancia carcterística de este movimiento, que recibe el nombre técnico de "recorrido libre medio entre colisiones", λ, es mucho menor que las longitudes experimentales, de forma que sólo percibimos un cierto promedio de los procesos individuales entre partículas. Una vez establecido que trabajamos en escalas muy superiores al recorrido libre medio de las partículas podemos olvidar el fino detalle de su movimiento individual y ver en torno a cada punto del espacio x y para cada instante t un volumen elemental representativo, δV, de tamaño mesoscópico o medio, mucho mayor que λ y mucho menor que las longitudes macroscópicas en las que deseamos trabajar. Este volumen elemental, que se denomina también partícula fluida, es considerado como un medio continuo y homogéneo; en él se define una velocidad media del movimiento de ese elemento, que será para nosotros la velocidad puntual en este punto e instante, $u(x,t)$. Es decir, suponemos que existe un valor límite de los promedios cuando δV se hace muy pequeño en la escala intermedia. Análogamente, se definen las demás magnitudes macroscópicas, como la densidad y la presión. En este trabajo consideraremos fluidos que no se comprimen, llamados fluidos incompresibles.

1.2. ¿Qué ecuaciones describen el movimiento de un fluido?

La primera descripción matemática del movimiento de un fluido ideal (es decir incompresible y perfecto, que no sufre el esfuerzo viscoso) fue formulada por Euler ([11]) en 1755 como un enunciado de la segunda ley de movimiento de Newton aplicado a un fluido que se mueve bajo una fuerza interna, conocida como el gradiente de la presión. Las ecuaciones de Euler que gobiernan el tiempo de evolución del campo vectorial de velocidades $u(x,t)$ y del campo escalar presión $p(x,t)$ de un fluido incompresible, en ausencia de fuerzas externas, tienen la forma

$$\begin{aligned} u_t + (u.\nabla)u + \nabla p &= 0 \\ \nabla.\, u &= 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, donde se supone que $\nabla.\, u_0 = 0$ y n puede tomar los valores 2 ó 3.

La condición de incompresibilidad del fluido la expresamos mediante la ecuación $\nabla.\, u = 0$.

Notemos que el término no lineal $u.\nabla u$ proviene del paso de derivadas totales en tiempo a derivadas parciales

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Se llama término convectivo o de transporte y en la coordenada i vale

$(u.\nabla u)_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Este término es el responsable de las dificultades que aparecen en la resolución del sistema de Euler, como también del sistema que presentaremos a continuación, de Navier-Stokes.

Esta ecuaciones importantes teóricamente, omiten el efecto de la fricción o de esfuerzos cortantes, como fue notado por D'Alembert. Para incorporarlo, el matemático e ingeniero Navier deduce un nuevo sistema de ecuaciones que publica en 1822 ([24]). Este sistema incluye los efectos de atracción y repulsión entre las moléculas y se escribe

$$\begin{aligned} u_t + (u.\nabla)u - \epsilon\Delta u + \nabla p = 0 \\ \nabla.\ u = 0 \\ u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

como antes, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y $\nabla.\ u_0 = 0$. Para Navier, ϵ era una simple función de espacio entre moléculas sin significado físico. En 1828 y 1829, estas ecuaciones fueron estudiadas por Cauchy y Poisson, respectivamente. Pero recién en 1845 el matemático inglés George G. Stokes ([27]) las formula como las concemos actualmente. Él establece la importancia física del parámetro ϵ, mide la magnitud de la viscosidad, esto es la fricción del fluido.

En el último siglo y medio, estas ecuaciones han pasado el test de la aplicación siendo utilizadas por físicos e ingenieros con notable éxito en muy diversos campos, entre ellos la hidráulica, la meteorología y la aeronáutica, y su rango de validez está bien establecido. Pertenecen ya, junto a las ecuaciones de Newton, Schrödinger y Maxwell, a las ecuaciones básicas de la Física.

Referimos a los textos clasicos de Batchelor [4] o Landau-Lipshitz [19] para una introducción a los sistemas completos de los fluidos reales. Quien se interese por un punto de vista más matemático puede consultar textos de distintos autores, como Chorin y Marsden [10] o Temam [28].

1.3. Preliminares técnicos

En esta sección veremos las herramientas técnicas necesarias para el desarrollo de este trabajo. Mostraremos algunos de los espacios funcionales en los que vamos a trabajar y daremos algunos resultados técnicos que utilizaremos más adelante.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Como es usual, $C^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones continuamente diferenciables de cualquier orden en Ω y $C_0^\infty(\Omega)$ consiste en aquellos elementos de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω. El espacio dual de $C^\infty(\Omega)$ se lo llama espacio de distribuciones y se denota por $\mathcal{D}$.

Llamamos $\mathcal{S}$, espacio de Schwartz, al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ de funciones rápidamente decrecientes y distribuciones temperadas a los elementos de su espacio dual.

El espacio de Lebesgue, $L^p(\Omega)$, es el espacio de funciones de $p-$ésima potencia sumables en Ω, y su norma será denotada en el contexto de cada capítulo.

Además de éstos, otros espacios funcionales que mencionaremos en este trabajo son los espacios de Sobolev, Morrey-Campanato, los espacios de Lorentz, los de Marcinkiewicz, los de Triebel-Lizorkin y los espacios de Besov. Damos a continuación sus definiciones.

Espacios de Sobolev

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{m,p} = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathrm{N}^n,\ |\alpha| \leq m\}$$

donde $D^\alpha f$ es la notación utilizada para las derivadas parciales, siendo α un multi-índice. La norma del espacio de Sobolev se define a partir de la norma $||.||_{L^p}$ de $L^p(\Omega)$,

$$||f||_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \tag{1.3}$$

$$||f||_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Algunos espacios de Sobolev, con $p = 2$, pueden ser dotados de la estructura de espacios de Hilbert, al igual que los espacios L^2. Los denotamos por $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, donde el producto interno se define a partir del producto interno de L^2. Es decir,

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}.$$

Espacios de Morrey-Campanato

Para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ el espacio no homogéneo de Morrey-Campanato M_q^p es definido como el espacio de funciones f las cuales pertenecen localmente a L^q y tales que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3,\ 0<r\leq 1} r^{3/p}\left(r^{-3}\int_{|x-y|\leq r}|f(y)|^q dy\right)^{1/q} < \infty,$$

donde el miembro izquierdo de esta desigualdad es la norma de f en M_q^p.

El espacio homogéneo de Morrey-Campanato, $\dot{M}_q^p$ es definido de la misma forma, tomando supremo sobre todos los $r \in (0,\infty)$ en lugar de $r \in (0,1]$.

Espacios de Lorentz

Sean $1 \leq p,\ q \leq \infty$, una función f pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}$ si y sólo si

$$||f||_{L^{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty,$$

si $q = \infty$ esto significa

$$||f||_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t) < \infty,$$

donde f^* es la función decreciente definida a partir de f de la siguiente forma

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s \geq 0; |\{|f| > s\}| \leq t\},\ t \geq 0.$$

Los espacios $L^{p,\infty}$ se denominan espacios de Marcinkiewcz o espacios L^p-débiles.

Notemos que si $p = q$, el espacio $L^{p,p}$ no es más que el espacio de Lebesgue L^p.

Espacios de Besov

Sean $0 < p,\ q \leq \infty$ y $s \in \mathbb{R}$. Una distribución temperada pertenece al espacio de Besov no-homogéneo $B_q^{s,p}$ si y sólo si

$$||S_0 f||_q + \left(\sum_{j>0}\left(2^{sj}||\triangle_j f||_q\right)^p\right)^{1/p} < \infty, \tag{1.4}$$

donde $\{S_j,\ \triangle_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es la descomposción de Littlewood-Payley, es decir, $I = S_0 + \sum_{j\geq 0}\triangle_j$.

En [7], se encuentra información detallada acerca de esta descomposición.

Espacios de Triebel-Lizorkin

Sean $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ y $s \in \mathbb{R}$. Una distribución temperada pertenece al espacio de Triebel-Lizorkin no-homogéneo $F_q^{s,p}$ si y sólo si

$$||S_0 f||_q + || \left(\sum_{j>0} (2^{sj} |\triangle_j f|)^p \right)^{1/p} ||_q < \infty. \tag{1.5}$$

Es fácil ver que las cantidades dadas en (1.4) y (1.5), definen una norma si $p,\ q \geq 1$ y una cuasi norma en general, con la convención usual que $p = \infty$ en ambos casos corresponde a la norma de L^∞.

Para más información acerca de los espacios de Triebel-Lizorkin, remitimos al lector a [29] y [30].

Los espacios homogéneos de Besov y de Triebel-Lizorkin, son definidos de manera análoga, descartando el término $||S_0 f||_q$ y considerando la suma anterior para $j \in \mathbb{Z}$.

Teoremas de punto fijo

Nos referiremos ahora a dos resultados clásicos relacionados con la existencia de soluciones de punto fijo de ecuaciones funcionales abstractas. Estos teoremas son conocidos como teoremas de Picard. En [7] se encuentran sus demostraciones.

Teorema 1.3.1 *Sea X un espacio de Banach con norma $||.||$ y $B : X \times X \to X$ un operador bilineal tal que, para todos $x_1,\ x_2 \in X$,*

$$||B(x_1, x_2)|| \leq \eta ||x_1|| ||x_2||,$$

entonces, para todo $y \in X$ tal que $4\eta||y|| < 1$, la ecuación

$$x = y + B(x, x)$$

tiene una solución $x \in X$. En particular, la solución es tal que $||x|| \leq 2||y||$ y esta es la única solución tal que $||x|| < \frac{1}{2\eta}$.

Teorema 1.3.2 *Sea X un espacio de Banach con norma $||.||$, $L : X \to X$ un operador lineal tal que, para cada $x \in X$, $||L(x)|| \leq \lambda ||x||$ y $B : X \times X \to X$ un operador bilineal tal que, para todos $x_1,\ x_2 \in X$,*

$$||B(x_1, x_2)|| \leq \eta ||x_1|| ||x_2||,$$

entonces, para todo $0 < \lambda < 1$ *y para todo* $y \in X$ *tal que* $4\eta||y|| < (1-\lambda)^2$, *la ecuación*

$$x = y + B(x, x) + L(x)$$

tiene una solución $x \in X$*. En particular, la solución es tal que* $||x|| \leq \frac{2||y||}{1-\lambda}$ *y esta es la única solución tal que* $||x|| < \frac{1-\lambda}{2\eta}$.

1.4. Distintos tipos de soluciones

En esta sección nos concentraremos en el significado de la palabra solución.

Es sabido que las soluciones clásicas o fuertes de los sistemas (1.1) y (1.2), es decir aquellas que resuelven exactamente dichos sistemas, son localmente regulares y únicas en tiempo. Pero en un instante $T > 0$ cuando dejan de ser regulares, si ese instante existe, pueden perder su unicidad. El efecto de la nolinealidad en las ecuaciones de fluidos es distinto si trabajamos en 2 ó 3 dimensiones. Detallamos este punto a continuación.

En los años 1933-1934, Jean Leray hizo una contribución fundamental al problema de Navier-Stokes ([21], [22]). Tras obtener existencia de solución clásica para datos regulares durante un pequeño intervalo de tiempo (0, T), se encontró con el problema de que no le era posible controlar a priori el crecimiento de la velocidad y sus derivadas al avanzar el tiempo, lo cual arruinaba la esperanza de construir una solución global. Enfrentado esta dificultad, optó por el procedimiento ya seguido por Hilbert en el tratamiento del problema de Dirichlet para el operador laplaciano y planteó el problema en el marco de las llamadas soluciones débiles en los espacios de energía que hoy llamamos de Sobolev, ver [22]. Leray fue capaz de construir soluciones débiles del sistema Navier-Stokes de energía cinética finita (estimaciones de $||u||_{L^2}$), pero la regularidad de tales objetos se resistió en dimensión $n = 3$. Tampoco fue posible probar en dimensión $n = 3$ la unicidad de tales soluciones, que es otro problema fundamental abierto. La presencia de singularidades fue conjeturada por Leray y le sirvió como posible explicación del fenómeno físico de la turbulencia. Según esta hipótesis, incluso para datos regulares las soluciones en tres dimensiones pueden desarrollar en un tiempo finito singularidades en los puntos donde la vorticidad, $w = \nabla \times u$, se hace infinita. La teoría de soluciones débiles ha sido luego elaborada por matemáticos como E. Hopf, O. A. Ladyzhenskaya, J. Serrin, J. -L. Lions, G. Prodi, T. Kato, R. Temam y otros muchos.

En 1982, L. A. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg ([5]) mostraron que el conjunto de puntos singulares de una solución débil, que comienza con una condición inicial regular, tiene medida de Hausdorff cero. Éste es el mejor resultado acerca de la pérdida de suavidad de soluciones débiles conocido hasta la actualidad.

Por otro lado, una aproximación diferente basada en la teoría de semigrupos, fue introducida por Tosio Kato ([18]) quien mostró la existencia de una única solución global regular bajo la hipótesis de datos iniciales pequeños, para ello define una nueva norma, conocida usualmente como "norma artificial de Kato". Las soluciones estudiadas por T. Kato se denominan *mild.*

El método de Kato está basado en argumentos de *scaling* e invariancia, por esta razón su teoría requiere que los datos iniciales pertenezcan a $L^n(\mathbb{R}^n)$, porque este es el único espacio de Lebesgue que es invariante bajo cambios de escala, esto es

$$||f(x)||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = ||\lambda f(\lambda x)||_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Entonces, los espacios de funciones de la teoría de Leray y de la teoría de Kato, coinciden cuando $n = 2$ pero no lo hacen cuando $n = 3$. Así en dos dimensiones ambas teorías se complementan y la solución del sistema de Navier-Stokes es única y regular cuando los datos iniciales pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^2)$. En tres dimensiones, el problema sigue aún sin resolverse.

Organización de la Tesis

En esta tesis trabajaremos con sistemas de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que modelizan distintos problemas de evolución que provienen de considerar fenómenos físicos en los que intervienen fluidos incompresibles. Nos concentraremos en el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo de los mismos. En el capítulo 2 estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del sistema de Navier-Stokes en espacios de Banach abstractos, llamados adecuados, definidos por G. Karch ([17]). Estos espacios generalizan a la mayoría de los espacios conocidos en los que se ha estudiado existencia y decaimiento de las soluciones *mild* del sistema de Navier-Stokes. Estos resultados han sido publicados en el trabajo [3].

En el capítulo siguiente, el objeto de nuestro estudio es el sistema viscoso de Boussinesq, que es similar, desde el punto de vista técnico, al de Navier-Stokes. Para este sistema, probaremos la existencia y unicidad de sus soluciones *mild* globales en tiempo, en espacios de Banach adecuados, y también encontraremos una tasa de decaimiento para las mismas. En el trabajo [26], se encuentran publicadas dichas conclusiones.

En el capítulo 4, consideraremos un problema de evolución que generaliza al sistema de Navier-Stokes en un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, siendo $n = 2$ o $n = 3$. Suponiendo la existencia de soluciones fuertes, mostraremos su comportamiento cuando la variable $t > 0$, que representa al tiempo, toma valores grandes. También definiremos un tipo de estabilidad, la exponencial. En el capítulo 5, nos dedicaremos al estudio de un modelo hiperviscoso, cuyas soluciones globales en tiempo aproximan, en distintos sentidos, a las de Navier-Stokes.

Por último, en el capítulo 6 sintetizaremos el trabajo realizado y enumeraremos distintos temas pendientes que son una continuación natural de esta tesis.

Capítulo 2

Estabilidad de soluciones para la ecuación de Navier-Stokes en ciertos espacios de Banach

En este capítulo estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones del sistema de Navier-Stokes en $\mathbb{R}^n$ en espacios de Banach abstractos, suponiendo la existencia de dichas soluciones globales. También mostramos la estabilidad asintótica de la solución nula.

2.1. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento de un fluido incompresible en $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, en ausencia de fuerzas externas se escriben:

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u + (u.\nabla)u + \nabla p &= 0 \\ \nabla.\ u &= 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aquí $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ es la velocidad desconocida del fluido en $x \in \mathbb{R}^n$ y en el tiempo $t \geq 0$, $p = p(x,t)$ es la presión desconocida.

Supongamos que el dato $u_0(x)$ satisface $\nabla.\ u_0 = 0$.

Introducimos la proyección $\mathbf{P}$ de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ sobre el subespacio $\mathbf{P}(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ de campos vectoriales solenoidales:

$$\mathbf{P}(u_1, ..., u_n) = (u_1 - R_1\sigma, ..., u_n - R_n\sigma),$$

donde R_j son las transformadas de Riesz con símbolos $\xi_j/|\xi_j|$ y $\sigma = R_1u_1 + ... + R_nu_n$.

Usando $\mathbf{P}$ podemos convertir la ecuaciones (2.1) en:

$$\begin{aligned} u_t &= \triangle u - \mathbf{P}\nabla(u \otimes u) \\ \nabla \,.\, u &= 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aquí reemplazamos $(u.\nabla)u$ por $\nabla(u \otimes u)$ pues $\nabla.\ u = 0$.

El semigrupo del calor $S(t)$ es dado por la convolución con el núcleo de Weierstrass, o núcleo del calor, $S(t) = e^{t\triangle} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\ e^{-|x|^2/4t} \,*$, entonces el problema (2.2) puede ser escrito como la siguiente forma integral

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbf{P}\nabla S(t-\tau)(u \otimes u)(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

donde las integrales son entendidas en el sentido de Bochner.

Las soluciones de esta ecuación integral son llamadas soluciones *mild*. Entonces, dado un espacio de Banach E una solución de (2.1) o (2.2) será interpretada como una aplicación a valores en E definida en $[0, \infty)$.

En este capítulo por soluciones de (2.1) queremos decir soluciones de (2.3).

2.2. Espacios abstractos de Banach

En esta sección recordamos todas las definiciones necesarias para construir un espacio de Banach adecuado al sistema de Navier-Stokes. Estas ideas fueron introducidas por Cannone et al [8], Karch [17] y también por Lemarié-Rieusset [20].

Definición 2.2.1 *Sea el espacio de Banach $(E, ||.||_E)$, se dice invariante por traslaciones y funcionales si las siguientes tres condiciones son satisfechas:*

(i) $S \subset E \subset S'$ *y las inclusiones son continuas.*

(ii) Para cada $f \in E$, $\tau : \mathbb{R}^n \to E$ *definida por* $\tau_y f(x) = f(x+y)$ *es medible en el sentido de Bochner con respecto a la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$.

(iii) La norma $||.||_E$ *sobre* E *es invariante por traslación:*

$$\forall f \in E, \ y \in \mathbb{R}^n \ ||\tau_y f||_E = ||f||_E.$$

Definición 2.2.2 *Llamamos al espacio* $(E, ||.||_E)$ *adecuado al problema (2.1) si*

(i) cumple la definición (2.2.1).

(ii) $\forall f, g \in E$ *el producto* $f \otimes g$ *está bien definido como una distribución temperada, y además existen* $T_0 > 0$ *y una función positiva* $w \in L^1(0, T_0)$ *tales que*

$$||\boldsymbol{P}\nabla S(\tau)(f \otimes g)||_E \leq w(\tau)||f||_E||g||_E, \ \forall f, g \in E, \tau \in (0, T_0).$$

Algunos ejemplos de espacios de Banach adecuados al sistema (2.1) son los subespacios de funciones solenoidales de los espacios de Lebesgue L^p, de Marcinkiewicz $L^{p,\infty}$, de Lorentz $L^{p,q}$ y de Morrey M^p_q, con $p > n$ y $q \geq 1$. Remitimos al lector al capítulo 1 para interiorizarse sobre la definición de los espacios mencionados anteriormente.

En este capítulo las normas de los espacios de Banach tienen propiedades adicionales de *scaling*.

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definimos la función rescalada

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \ \lambda > 0.$$

Extendemos esta definición para toda $f \in S'$ de manera usual.

Definición 2.2.3 *Sea* $(E, ||.||_E)$ *un espacio de Banach, el cual está sumergido continuamente en* S'. *Decimos que* $||.||_E$ *tiene grado de scaling* k *si*

$$||f_\lambda||_E = \lambda^k ||f||_E, \ \forall f \in E$$

tal que $f_\lambda \in E$ *y* $\forall \lambda > 0$.

Observación. Las normas usuales de los espacios L^p, $L^{p,\infty}$, $L^{p,q}$, M^p_q tienen grado de *scaling* $-n/p$. Por otro lado, la norma estándar en el espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^s = \{f \in S : |\xi|^s \hat{f}(\xi) \in L^2\}$ tiene grado de *scaling* $s - n/2$.

Un espacio de Banach E dotado con una norma con grado de *scaling* $k = -n/p,\ p > n$ será denotado por E_p.

2.3. Espacios de Banach tipo Besov

Sea $E \subset S'$ un espacio de Banach, introducimos un nuevo espacio de distribuciones BE^β el cual es un "espacio homogéneo de Besov modelado sobre E".

Definición 2.3.1 *Sea $\beta \geq 0$. Dado un espacio de Banach E sumergido continuamente en S', definimos*

$$BE^\beta = \{f \in S' : ||f||_{BE^\beta} = \sup_{t>0} t^{\beta/2} ||S(t)f||_E < \infty\}.$$

Si $E = L^p,\ ||.||_{BE^\beta}$ es equivalente a la norma de los espacios de Besov homogéneos $\dot{B}^{-\beta}_{p,\infty}$.

Es directo ver que si E tiene una norma con grado de *scaling* igual a k, entonces $||.||_{BE^\beta}$ tiene grado de *scaling* igual a $k - \beta$. Es decir, dados $f \in S'$ y $\lambda > 0$,

$$S(t)f_\lambda = (S(\lambda t^2)f)_\lambda$$

entonces,

$$\begin{aligned} ||f_\lambda||_{BE^\beta} &= \sup_{t>0} t^{\beta/2} ||S(t)f_\lambda||_E \\ &= \lambda^{k-\beta} \sup_{\lambda^2 t>0} (\lambda^2 t)^{\beta/2} ||S(\lambda^2 t)f||_E \\ &= \lambda^{k-\beta} ||f||_{BE^\beta}. \end{aligned}$$

Es sabido que, si E_p es tal que para algún $q \in [1, \infty],\ e^{t\triangle} : E_p \to L^q$ es un operador acotado para cada $t > 0$, entonces el espacio $(BE_p^\beta,\ ||.||_{BE_p^\beta})$ es un espacio de Banach.

Estas definiciones permiten construir soluciones globales en tiempo (para condiciones iniciales pequeñas) en $\chi \equiv \mathcal{C}([0, \infty), BE_p^\beta)$ definido como el espacio de todas las funciones medibles y esencialmente acotadas $v : [0, \infty) \to BE_p^\beta$ tales que $v(t) \to v(0)$ cuando $t \searrow 0$ en la topología de S'.

2.4. Soluciones globales en tiempo de las ecuaciones de Navier-Stokes

Comenzamos esta sección enunciando un lema auxiliar que muestra la acotación del operador
$\mathbf{P}\nabla S(t)(u \otimes v) = e^{t\triangle}B(u,v)$, siendo $B(u,v) = \mathbf{P}\nabla(u \otimes v)$.

Lema 2.4.1 *([17]) Supongamos que el espacio de Banach E_p es adecuado al problema (2.1) y que tiene una norma con grado de scaling igual a $-n/p$. Entonces*

1. *Existe una constante $C_1 > 0$ independiente de $t,\ u,\ v$ tal que*

$$||e^{t\triangle}B(u,v)||_{E_p} \leq C_1 t^{-(1+n/p)/2}||u||_{E_p}.||v||_{E_p}$$

para todos $u,\ v \in E_p$ y $t > 0$.

2. *Sea $0 \leq \beta \leq 1 + n/p$. Existe una constante $C_2 > 0$, independiente de $t,\ u,\ v$ tal que*

$$||e^{t\triangle}B(u,v)||_{BE_p^\beta} \leq C_2 t^{(\beta-1-n/p)/2}||u||_{E_p}.||v||_{E_p}$$

para todos $u,\ v \in E_p$ y $t > 0$.

En el siguiente teorema se construyen soluciones globales en tiempo de (2.1) en el espacio BE_p^β para condiciones iniciales pequeñas. La prueba de este resultado es obtenida aplicando herramientas introducidas en [17] y utilizadas por otros autores. Remitimos al lector a Barraza [1], Cannone [7], Cannone et al [8] o Lemarié-Rieusset [20].

Teorema 2.4.1 *([17]) Sea $p > n,\ n > 0$. Denotemos $\beta = 1 - n/p$. Sea E_p un espacio de Banach con las siguientes propiedades:*
(i) E_p es un espacio adecuado al problema (2.1);
(ii) la norma $||.||_{E_p}$ tiene grado de scaling $-n/p$;
(iii) existe un $q > 0$ tal que el operador $e^{t\triangle} : E_p \to L^q$ es acotado para cada $t > 0$.

Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que para toda $u_0 \in BE_p^\beta$ que satisface $||u_0||_{BE_p^\beta} < \epsilon$ hay una solución de (2.1) para todo $t > 0$ en el espacio

$$\chi \equiv \mathcal{C}([0,\infty), BE_p^\beta) \cap \{u : (0,\infty) \to E_p : \sup_{t>0} t^{\beta/2}||u(t)||_{E_p} < \infty\}.$$

Esta solución es la única que satisface la condición

$$\sup_{t>0} t^{\beta/2} ||u(t)||_{E_p} \leq 2\epsilon.$$

Teorema 2.4.2 *Supongamos válidas las hipótesis del teorema 2.4.1. Sea $M > 0$ y sean $u,\ v$ dos soluciones globales en tiempo de (2.1) en el espacio χ con condiciones iniciales $u_0,\ v_0 \in BE_p^\beta$ respectivamente, tales que $||u||_\chi \leq M$ y $||v||_\chi \leq M$.*

Sean $w_0 = u_0 - v_0$ y $w(t) = u(t) - v(t)$.

Entonces

$$||w(t)||_{E_p} \leq (||w_0||_{BE_p^\beta} + 4CM^2)t^{-\beta/2},\ t > 0.$$

Esto es $||u(t) - v(t)||_{E_p}$ tiene un decaimiento a 0 del orden de $t^{\beta/2}$.

Demostración: Dado el espacio

$$\chi \equiv \mathcal{C}([0,\infty), BE_p^\beta) \cap \{u : (0,\infty) \to E_p : \sup_{t>0} t^{\beta/2} ||u(t)||_{E_p} < \infty\}$$

lo dotamos de la norma

$$||u||_\chi = \text{máx}\{\sup_{t>0} ||u(t)||_{BE_p^\beta},\ \sup_{t>0} t^{\beta/2} ||u(t)||_{E_p}\}.$$

Sean $u,\ v$ dos soluciones globales en tiempo de (2.1) para las condiciones iniciales $u_0,\ v_0 \in BE_p^\beta$, respectivamente.

Sabemos que

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)u_0 - \int_0^t \mathbf{P}\nabla S(t-\tau)(u \otimes u)(\tau) d\tau \\ &= e^{t\triangle}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} B(u,u) d\tau. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$v(t) = e^{t\triangle}v_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} B(v,v) d\tau.$$

Luego

$$u(t) - v(t) = e^{t\triangle}(u_0 - v_0) \;-\; \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}[B(u,u) - B(v,v)]d\tau.$$

Es decir, la diferencia de las dos soluciones puede expresarse como

$t^{\beta/2}||u(t) - v(t)||_{E_p} = t^{\beta/2}||w(t)||_{E_p}$

$\leq t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0 - v_0)||_{E_p}$

$+t^{\beta/2}\displaystyle\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}[B(u,u-v) + B(u-v,v)]||_{E_p}d\tau$

$\leq ||w_0||_{BE_p^\beta}$

$+t^{\beta/2}\displaystyle\int_0^t [||e^{(t-\tau)\triangle}B(u,u-v)||_{E_p} + ||e^{(t-\tau)\triangle}B(u-v,v)||_{E_p}]d\tau.$

Aplicando el lema 2.4.1, podemos concluir

$t^{\beta/2}||u(t) - v(t)||_{E_p} = t^{\beta/2}||w(t)||_{E_p}$

$\leq ||w_0||_{BE_p^\beta}$

$+t^{\beta/2}\displaystyle\int_0^t C(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}[||u(\tau)||_{E_p}||(u-v)(\tau)||_{E_p}$

$+||v(\tau)||_{E_p}||(u-v)(\tau)||_{E_p}]d\tau$

$\leq ||w_0||_{BE_p^\beta}$

$+(||u||_\chi + ||v||_\chi)t^{\beta/2}\displaystyle\int_0^t C(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta}(\tau^{\beta/2}||(u-v)(\tau)||_{E_p})d\tau$

$\leq ||w_0||_{BE_p^\beta} + C(||u||_\chi + ||v||_\chi)(\sup_{\tau>0}\tau^{\beta/2}||(u-v)(\tau)||_{E_p})$

$\leq ||w_0||_{BE_p^\beta} + C(2M)^2.$

De donde obtenemos

$$||w(t)||_{E_p} = ||u(t) - v(t)||_{E_p} \leq (||w_0||_{BE_p^\beta} + 4CM^2)t^{-\beta/2}.$$

□

Lema 2.4.2 *([17]) Supongamos que las hipótesis del teorema 2.4.1 son válidas. Sean* $u,\ v$ *dos soluciones de (2.1) construidas en el teorema 2.4.1 correspondientes a los datos iniciales* $u_0,\ v_0 \in BE_p^\beta$ *respectivamente. Supongamos que*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0 - v_0)||_{E_p} = 0.$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta/2}||u(.,t) - v(.,t)||_{E_p} = 0,$$

siempre que $\epsilon > 0$ *sea suficientemente pequeño.*

Corolario 2.4.1 *Bajo las hipótesis del teorema 2.4.2 la solución nula es asintóticamente estable. Más precisamente, sea* u *una solución global acotada de (2.1) con condición inicial* u_0*, la norma* $||u||_{E_p}$ *tiende a cero como* $t^{-\beta/2}$*.*

Demostración: Tomando $v = 0$ en el teorema previo, la prueba es inmediata. □

Observación. Esta propiedad de la solución nula es válida en casi todos los espacios de soluciones conocidos para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Corolario 2.4.2 *Supongamos válidas las condiciones del teorema 2.4.2. Sean* $u,\ v$ *dos soluciones de (2.1) correspondientes a los datos iniciales* $u_0,\ v_0 \in BE_p^\beta$ *respectivamente. Supongamos que*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0 - v_0)||_{E_p} = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta/2}||u(.,t) - v(.,t)||_{E_p} = 0,$$

siempre que $M > 0$ *sea suficientemente pequeño.*

Antes de probar este enunciado, recordemos el siguiente lema técnico.

Lema 2.4.3 *([1]) Sea* $w \in L^1(0,1)$ *y* $\int_0^1 w(x)dx < 1$. *Supongamos que* f *y* g *son dos funciones medibles, no negativas y acotadas, tales que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^1 w(\tau) f(\tau t) d\tau.$$

Entonces se tiene que $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ *implica* $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Damos ahora la prueba del corolario 2.4.2.
Demostración: Como en el teorema 2.4.2,

$$\begin{aligned} t^{\beta/2}||u(t)-v(t)||_{E_p} \quad &\leq t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0-v_0)||_{E_p} \\ &+t^{\beta/2}\int_0^t C_1(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}[||u(\tau)||_{E_p}||(u-v)(\tau)||_{E_p} \\ &+||v(\tau)||_{E_p}||(u-v)(\tau)||_{E_p}]d\tau. \end{aligned}$$

Debido a que las soluciones $u,\ v$ son acotadas por M, tenemos

$$\begin{aligned} t^{\beta/2}||u(t)-v(t)||_{E_p} \quad &\leq t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0-v_0)||_{E_p} \\ &+2MC_1 t^{\beta/2}\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta}(\tau^{\beta/2}||(u-v)(\tau)||_{E_p})d\tau. \end{aligned}$$

Luego de un cambio de variables, es posible escribir

$$\begin{aligned} t^{\beta/2}||u(t)-v(t)||_{E_p} \quad &\leq t^{\beta/2}||e^{t\triangle}(u_0-v_0)||_{E_p} \\ &+2MC_1\int_0^1 (1-s)^{-(1+n/p)/2}s^{-\beta}(ts)^{\beta/2}||(u-v)(ts)||_{E_p}ds. \end{aligned}$$

Eligiendo $f(t) = t^{\beta/2}||u(t)-v(t)||_{E_p}$ y usando el hecho que
$(1-s)^{-(1+n/p)/2}s^{-\beta} \in L^1(0,1)$, podemos aplicar el lema 2.4.3 para obtener $t^{\beta/2}||u(t)-v(t)||_{E_p} \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $M > 0$ suficientemente pequeño. $\square$

2.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la estabilidad de las soluciones globales en tiempo del sistema de Navier-Stokes (2.2), encontrando una tasa de decaimiento para la diferencia de dos de ellas, ya sea considerando el caso en que las soluciones sean acotadas o bien suponiendo que las condiciones iniciales de ambas soluciones son distintas pero que las normas de las soluciones son pequeñas. Para esto, hemos considerado espacios de Banach abstractos, llamados adecuados a este sistema y espacios de Banach "tipo Besov", donde pertenecen las condiciones iniciales. En la sección 2.2 recordamos la definición de los mismos y enumeramos los espacios más usuales en donde se investiga el problema de estabilidad de soluciones del sistema (2.2), que cumplen ser adecuados a dicho sistema. Este hecho muestra que nuestros resultados son generales.

Capítulo 3

Existencia y unicidad para el sistema viscoso de Boussinesq en espacios de Banach abstractos

En este capítulo estudiamos el sistema viscoso de Boussinesq en espacios de Banach abstractos. Probamos la existencia y unicidad de las soluciones globales en tiempo usando herramientas estándares basadas en la aplicación de la iteración de Picard y en el teorema de punto fijo en espacios de Banach.

Además, mostramos algunas propiedades del comportamiento asintótico de estas soluciones y brindamos una tasa de decaimiento para las mismas.

3.1. Introducción

En la transferencia natural convectiva, el calor es transportado entre una superficie sólida y un fluido que se mueve sobre ella. El movimiento del fluido puede ser laminar o turbulento, sin embargo, debido a las bajas velocidades que existen en el proceso de convección natural, generalmente el flujo laminar es el más frecuente. Este fenómeno puede ser modelizado por el siguiente sistema de ecuaciones denominado sistema de ecuaciones viscoso de Boussinesq. Remitimos a los lectores a [6], [19] para más información acerca del problema de transporte de calor y de este problema en particular.

Poniendo todas las constantes físicas iguales a 1 en el modelo presentado en [19], tenemos el siguiente sistema de ecuaciones que representa el fenómeno descripto anteriormente

$$\begin{aligned} v_t + (v \ . \ \nabla)v + \nabla p = \triangle v - \gamma T + F \\ \nabla \ . \ v = 0 \\ T_t + v \ . \ \nabla T = \triangle T \\ v(0,x) = v_0(x), \ T(0,x) = T_0(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

llamado sistema viscoso de Boussinesq. En este modelo,
$t \in [0, \infty)$ es la variable temporal,
$x \in \mathbb{R}^3$ es la variable espacial,
$v(t,x)$ es la velocidad desconocida del fluido,
$p(t,x)$ es la presión desconocida del fluido,
$T(t,x)$ es la temperatura desconocida del fluido,
$F = F(t,x)$ es una fuerza externa dada,
$\gamma \in \mathbb{R}^3$ es el vector proporcional al coeficiente de dilatación térmica del fluido y a la fuerza gravitacional,
v_0 and T_0 son condiciones iniciales dadas.

Las ecuaciones de Boussinesq han sido usadas como modelo en varias aplicaciones geofísicas, ver por ejemplo [25]. Hishida ha estudiado el buen planteo del problema a valores iniciales en un dominio exterior de $\mathbb{R}^3$ ([16]); Ferreira y Villamizar-Roa analizaron este problema en los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ([13]).

De aquí en adelante, consideraremos el mismo problema para $x \in \mathbb{R}^n$, el vector constante $\gamma \in \mathbb{R}^n$ y en ausencia de fuerzas externas. Como hicimos anteriormente, introducimos la proyección $\mathbf{P}$ de $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ en el subespacio $\mathbf{P}(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ de campos vectoriales solenoidales

$$\mathbf{P}(u_1, ..., u_n) = (u_1 - R_1\sigma, ..., u_n - R_n\sigma),$$

donde R_j son las transformadas de Riesz con símbolos $\xi_j/|\xi_j|$ y $\sigma = R_1u_1 + ... + R_nu_n$.

Usando el proyector de Leray $\mathbf{P}$ podemos eliminar la presión p y convertir la ecuaciones (3.1) en el sistema

$$
\begin{aligned}
v_t + \mathbf{P}\nabla(v \otimes v) &= \triangle v - \mathbf{P}(\gamma T) \\
\nabla \;.\; v &= 0 \\
T_t + v \;.\; \nabla T &= \triangle T \\
v(0,x) = v_0(x),\; T(0,x) &= T_0(x).
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Aquí reemplazamos $(v.\nabla)v$ por $\nabla(v \otimes v)$ pues $\nabla.\ v = 0$.

Como en el capítulo anterior, si llamamos $S(t) = e^{t\triangle} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/4t} \,*$ a la convolución con el núcleo del calor, entonces obtenemos el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
v(t) = S(t)v_0 - \int_0^t &\nabla S(t-\tau)\mathbf{P}(v \otimes v)(\tau)d\tau \\
&- \int_0^t S(t-\tau)\mathbf{P}\gamma T(\tau)d\tau, \\
T(t) = S(t)T_0 + \int_0^t &\nabla S(t-\tau)(vT)(\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

donde las integrales son entendidas en el sentido de Bochner.

Como hicimos anteriormente, llamamos *mild* a estas soluciones del sistema (3.1). En este trabajo por soluciones de (3.1) queremos decir soluciones de (3.3).

Este capítulo está organizado de esta forma, en la sección siguiente introducimos los espacios de Banach adecuados a este sistema y damos la estructura técnica para probar nuestros resultados. En la tercera sección, mostramos nuestro teorema principal de existencia y unicidad para las soluciones globales en tiempo de (3.1) usando el teorema de punto fijo en espacios de Banach.

La última sección es dedicada al estudio del comportamiento asintótico y de la estabilidad de estas soluciones.

3.2. Espacios adecuados al sistema viscoso de Boussinesq

En esta sección recordamos todas las definiciones necesarias para construir un espacio de Banach adecuado al sistema viscoso de Boussinesq. Estas ideas fueron introducidas por [7], [8] y también [20].

Definición 3.2.1 *Sean* E, F *dos espacios de Banach. Llamamos al par* $(E \times F, ||.||_E + ||.||_F)$ *adecuado al problema (3.1) si:*

(i) E, F *son espacios invariantes por traslaciones y funcionales, (ver definición 2.2.1).*

(ii) $\forall u,\ v \in E$ *el producto* $u \otimes v$ *está bien definido como una distribución temperada. Además, existen* $\delta > 0$, $w_1,\ w_2 \in L^1(0, \delta)$ *funciones positivas y una constante* $C > 0$ *tales que*

$$||\nabla S(\tau)\boldsymbol{P}(u \otimes v)||_E \leq w_1(\tau)||u||_E||v||_E,$$

$$||S(\tau)\nabla.(vT)||_F \leq w_2(\tau)||v||_E||T||_F,$$

$$||S(\tau)\gamma T||_E \leq C\tau^{\alpha}||T||_F,\ \alpha > -1,$$

$\forall u, v \in E, T \in F,\ \tau \in (0, \delta)$.

El número α será llamado exponente de continuidad del operador lineal

$$LT(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)d\tau.$$

Definición 3.2.2 *Se dice que una forma bilineal tiene orden de scaling* $b \in \mathbb{R}$ *si*

$$B(f_\lambda,\ g_\lambda) = \lambda^b(B(f, g))_\lambda.$$

Observación. Si denotamos $B(u, v) = \mathbf{P}\nabla(u \otimes v)$ y $\tilde{B}(v, T) = \nabla(vT)$, es fácil ver que estas formas bilineales tienen orden de *scaling* 1.

Como en el capítulo anterior, un espacio de Banach E dotado con una norma con grado de *scaling* $k = -n/p,\ p > n$ será denotado por E_p.

Consideraremos también espacios de Banach "tipo Besov" correspondientes a los espacios E_p y F_q, los denotamos $BE_p^{\beta_p}$ y $BF_q^{\beta_q}$, respectivamente.

Recordemos que $||f||_{BE^\beta} = \sup_{t>0} t^{\beta/2}||S(t)f||_E$.

3.3. Existencia y unicidad de soluciones

Comenzamos esta sección enunciando tres lemas auxiliares que muestran la acotación de las formas bilineales B *y* $\tilde{B}$ y del operador lineal L.

Lema 3.3.1 *Supongamos que el espacio de Banach* $E_p \times F_q$ *es adecuado al problema (3.1) y que* E_p *y* F_q *tienen normas con grado de scaling igual a* $-n/p$ *y* $-n/q$ *respectivamente.*

Entonces, existen dos constantes $C_1,\ C_2 > 0$*,* C_1 *independiente de* $t,\ v,\ T$ *y* C_2 *independiente de* $t,\ u,\ v$ *tales que*

$$||e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{F_q} \leq C_1 t^{-(1+n/p)/2}||v||_{E_p}.||T||_{F_q},$$

$$||e^{t\triangle}B(u,v)||_{E_p} \leq C_2 t^{-(1+n/p)/2}||u||_{E_p}.||v||_{E_p},$$

para todos $u,\ v \in E_p,\ T \in F_q$ *y* $t > 0$.

Demostración: Para $f \in S'$ y $\lambda > 0$ notemos que $e^{t\triangle}(f_\lambda) = (e^{\lambda^2 t\triangle} f)_\lambda$.

Sean $v \in E_p,\ T \in F_q$ fijos. Consideremos las funciones rescaladas v_λ, T_λ para todo $\lambda > 0$.

Entonces se cumple

$$e^{t\triangle}\tilde{B}(v_\lambda, T_\lambda) = \lambda(e^{\lambda^2 t\triangle}\tilde{B}(v,T))_\lambda$$

debido a la propiedad de *scaling* de la forma bilineal $\tilde{B}$.

Usando propiedades de *scaling* de las normas $||.||_{E_p}$ y $||.||_{F_q}$, tenemos

$$\lambda^{1-n/q}||e^{\lambda^2 t\triangle}\tilde{B}(v,T))||_{F_q} = ||e^{t\triangle}\tilde{B}(v_\lambda, T_\lambda)||_{F_q}$$

$$\leq w_2(t)||v_\lambda||_{E_p}||T_\lambda||_{F_q} = w_2(t)\lambda^{-n/p-n/q}||v||_{E_p}||T||_{F_q}.$$

Si fijamos ahora $t = t_0 < \delta$ y tomamos $\lambda = (t/t_0)^{1/2}$, obtenemos la primera desigualdad, donde $C_1 = w_2(t_0)t_0^{1+n/p}$.

La segunda desigualdad es obtenida de manera análoga. □

Lema 3.3.2 *Supongamos que el espacio de Banach* $E_p \times F_q$ *es adecuado al problema (3.1) y los espacios* E_p *y* F_q *tienen normas con grado de scaling* $-n/p,\ -n/q$*, respectivamente, con* $p > n > 0,\ q > n > 0$.

Sean $\beta_p = 1 - n/p$, $\beta_q = 1 - n/q$.

Existen dos constantes positivas C_3, C_4; C_3 independiente de t, v, T y C_4 independiente de t, u, v tales que

$$||e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{BF_q^{\beta_q}} \leq C_3 t^{-(n/p+n/q)/2}||v||_{E_p}.||T||_{F_q}$$

para todos $v \in E_p$, $T \in F_q$ $t > 0$, y

$$||e^{t\triangle}B(u,v)||_{BE_p^{\beta_p}} \leq C_4 t^{-n/p}||u||_{E_p}.||v||_{E_p}$$

para todos u, $v \in E_p$ y $t > 0$.

Demostración:

Primero mostraremos que para todo $t > 0$ existe $C(t) > 0$ independiente de v, T tal que

$$||e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{BF_q^{\beta_q}} \leq C(t)||v||_{E_p}.||T||_{F_q}. \tag{3.4}$$

Tomando $0 < s \leq 1$, $s^{\beta_q} \leq 1$ pues $\beta_q > 0$. Entonces, aplicando la definición 2.3.1 tenemos

$$\begin{aligned} s^{\beta_q/2}||e^{s\triangle}e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{F_q} &\leq ||e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{F_q} \\ &\leq w_2(t)||v||_{E_p}||T||_{F_q}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si $s > 1$, el lema anterior nos permite calcular la siguiente estimación

$$\begin{aligned} s^{\beta_q/2}||e^{s\triangle}e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{F_q} &\leq s^{\beta_q/2}||e^{s\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{F_q} \\ &\leq s^{\beta_q/2}C_1 s^{-(1+n/p)/2}||v||_{E_p}||T||_{F_q} \\ &= C_1 s^{-1/2(n/p+n/q)}||v||_{E_p}||T||_{F_q} \\ &\leq C_1||v||_{E_p}||T||_{F_q}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6), obtenemos (3.4).

Ahora, repitiendo el argumento del lema 3.3.1 y usando el hecho de que

$$e^{t\triangle}\tilde{B}(v_\lambda, T_\lambda) = \lambda(e^{\lambda^2 t\triangle}\tilde{B}(v,T))_\lambda,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lambda^0 ||e^{\lambda^2 t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{BF_q^{\beta_q}} &= ||e^{t\triangle}\tilde{B}(v_\lambda,T_\lambda)||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&\leq C(t)||v_\lambda||_{E_p}||T_\lambda||_{F_q} \\
&\leq C(t)\lambda^{-(n/p+n/q)}||v||_{E_p}||T||_{F_q}.
\end{aligned}$$

Considerando $t = t_0$ y reemplazando $\lambda = \sqrt{t/t_0}$, tenemos

$$||e^{t\triangle}\tilde{B}(v,T)||_{BF_q^{\beta_q}} \leq C_3 t^{-1/2(n/p+n/q)}||v||_{E_p}.||T||_{F_q}$$

De manera análoga, obtenemos la segunda desigualdad. $\square$

Lema 3.3.3 *Sea el espacio de Banach $E_p \times F_q$ adecuado al problema (3.1) y donde los espacios E_p and F_q tienen normas con grado de scaling $-n/p$, $-n/q$, respectivamente, con $q > p > n > 0$.*

Sean $\beta_p = 1 - n/p$, $\beta_q = 1 - n/q$.

Supongamos que α, el exponente de continuidad del operador lineal T dado en la definición 3.2.1, verifica la desigualdad $\alpha \leq \frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1$.

Entonces existe una constante $C^* > 0$, independiente de t, T, tal que

$$||LT||_{BE_p^{\beta_p}} \leq t^{\alpha-\beta_q/2+\beta_p/2+1}C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T(t)||_{F_q},$$

$$||LT||_{E_p} \leq t^{\alpha-\beta_q/2+1}C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T(t)||_{F_q},$$

donde $|\gamma| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |\gamma_i|$.

Demostración: Sabemos que

$$||LT(t)||_{BE_p^{\beta_p}} = \sup_{s>0} s^{\beta_p/2}||e^{s\triangle}LT(t)||_{E_p}.$$

Para probar la primera desigualdad, estimamos

$$\begin{aligned}
s^{\beta_p/2}||e^{s\triangle}LT(t)||_{E_p} &= s^{\beta_p/2}||e^{s\triangle}\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)d\tau||_{E_p} \\
&\leq s^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(s+t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)||_{E_p}d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq s^{\beta_p/2}C\int_0^t (s+t-\tau)^\alpha|\gamma|||T(\tau)||_{F_q}d\tau$$
$$\leq s^{\beta_p/2}C|\gamma|(\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q})\int_0^t(s+t-\tau)^\alpha\tau^{-\beta_q/2}d\tau.$$

Después de realizar el cambio de variables $\tau = (t+s)u$ y llamando $C^* = C\displaystyle\int_0^1(1-u)^\alpha u^{-\beta_q/2}du < \infty$, debido a que $\alpha > -1$ y $\beta_q < 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
s^{\beta_p/2}||e^{s\triangle}LT(t)||_{E_p} &\leq C^* s^{\beta_p/2}|\gamma|(t+s)^{\alpha+1-\beta_q/2}\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q}\\
&\leq C^*|\gamma|(t+s)^{\alpha+1-\beta_q/2+\beta_p/2}\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q}\\
&\leq C^*|\gamma|t^{\alpha+1-\beta_q/2+\beta_p/2}\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q},
\end{aligned}$$

por las hipótesis acerca de α.

Tomando supremo para $s > 0$ obtenemos la primera desigualdad.

Para demostrar la segunda desigualdad del lema, estimamos

$$\begin{aligned}
||LT||_{E_p} &\leq \int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)||_{E_p}d\tau\\
&\leq C\int_0^t(t-\tau)^\alpha|\gamma|||T(\tau)||_{F_q}d\tau\\
&\leq C|\gamma|(\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q})\int_0^t(t-\tau)^\alpha\tau^{-\beta_q/2}d\tau\\
&= C^*|\gamma|(\sup_{\tau>0}\tau^{\beta_q/2}||T(\tau)||_{F_q})t^{\alpha+1-\beta_q/2}
\end{aligned}$$

siempre que $\alpha > -1,\ \beta_q < 2$. □

Estamos ahora en condiciones de enunciar un resultado acerca de la existencia y unicidad de las soluciones globales en tiempo del sistema (3.1) para condiciones iniciales pequeñas.

Teorema 3.3.1 *: Sean $q > p > n > 0$. Denotemos $\beta_p = 1 - n/p,\ \beta_q = 1 - n/q$. Sea $E_p \times F_q$ un espacio de Banach con las siguientes propiedades* *(i) $E_p \times F_q$ es adecuado al problema (3.1) con exponente de continuidad del operador lineal $\alpha = (\beta_q - \beta_p)/2 - 1$;*

(ii) las normas $||.||_{E_p}$, $||.||_{F_q}$ tienen grado de scaling $-n/p$, $-n/q$, respectivamente;

(iii) existen $p_1,\ q_1 > 0$ tales que los operadores , $e^{t\triangle} : E_p \to L^{p_1}$, $e^{t\triangle} : F_q \to L^{q_1}$, son acotados para cada $t > 0$.

Sea $C^* > 0$ la constante dada por el lema 3.3.3 y supongamos que $C^*|\gamma| < 1$.

Entonces, existe una constante positiva C^{**} tal que para todo par (v_0, T_0) que verifica $||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} < (1 - C^*|\gamma|)^2/4C^{**}$, hay una solución (v, T) de (3.3) para todo $t \geq 0$ en el espacio producto $\chi = X \times Y$, donde

$$X = \mathcal{C}([0,\infty), BE_p^{\beta_p}) \cap \{v : (0,\infty) \to E_p : \sup_{t>0} t^{\beta_p/2} ||v(t)||_{E_p} < \infty\},$$

$$Y = \mathcal{C}([0,\infty), BF_q^{\beta_q}) \cap \{T : (0,\infty) \to F_q : \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T(t)||_{F_q} < \infty\}.$$

Además, esta es la única solución que verifica

$$||(v,T)||_\chi < \frac{1 - C^*|\gamma|}{2C^{**}}.$$

Demostración:

Sea el espacio

$$X = \mathcal{C}([0,\infty), BE_p^{\beta_p}) \cap \{v : (0,\infty) \to E_p : \sup_{t>0} t^{\beta_p/2} ||v(t)||_{E_p} < \infty\}$$

dotado con la norma

$$||v||_X = \max\{\sup_{t>0} ||v(t)||_{BE_p^{\beta_p}},\ \sup_{t>0} t^{\beta_p/2} ||v(t)||_{E_p}\},$$

y el espacio

$$Y = \mathcal{C}([0,\infty), BF_q^{\beta_q}) \cap \{T : (0,\infty) \to F_q : \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T(t)||_{F_q} < \infty\}$$

dotado de manera análoga con la norma

$$||T||_Y = \text{máx}\{\sup_{t>0} ||T(t)||_{BF_q^{\beta_q}},\ \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T(t)||_{F_q}\}.$$

Definimos la norma en el espacio producto $\chi = X \times Y$ de manera usual por

$$||(v,T)||_\chi = ||v||_X + ||T||_Y$$

y construimos el operador

$$N(v,\ T) = (e^{t\triangle} v_0 - B_1(v,\ v) - LT,\ e^{t\triangle} T_0 - B_2(v,\ T)),$$

donde

$$B_1(v,\ v)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} B(v,v)(\tau) d\tau,$$

$$B_2(v,\ T)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} \tilde{B}(v,T)(\tau) d\tau,$$

$$LT(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} \mathbf{P} \gamma T(\tau) d\tau.$$

Mostraremos ahora que el operador $N(v,\ T)$ es una contracción estricta sobre la bola $\mathbf{B}(0,R) = \{(v,\ T) \in \chi : ||(v,T)||_\chi \leq R\}$ para algún $R > 0$ que será hallado.

Para esto, probaremos primero que este operador aplica la bola $\mathbf{B}(0,R)$ en sí misma.

Usando los lemas 3.3.2 y 3.3.3, el hecho de que $-n/p > -1,\ -\beta_p > -1$ y las suposiciones acerca de α, obtenemos la siguiente estimación para la primera coordenada del operador N, $N_1 = e^{t\triangle} v_0 - B_1(v,\ v) - LT$.

$$\begin{aligned}
||N_1||_{BE_p^{\beta_p}} &\leq ||e^{t\triangle} v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} B(v,v)(\tau) d\tau||_{BE_p^{\beta_p}} \\
&+ ||LT||_{BE_p^{\beta_p}} \\
&\leq ||e^{t\triangle} v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + \int_0^t C_4 (t-\tau)^{-n/p} ||v||_{E_p}^2 d\tau \\
&+ t^{\alpha - \beta_q/2 + \beta_p/2 + 1} C^* |\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T(t)||_{F_q} \\
&\leq ||e^{t\triangle} v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C_4 R^2 \int_0^t (t-\tau)^{-n/p} \tau^{-\beta_p} d\tau + C^* R |\gamma|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ||e^{t\triangle}v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C_4R^2t^{-n/p-\beta_p+1}K_4 + \ C^*R|\gamma| \\
&= ||e^{t\triangle}v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C_4K_4R^2 + + \ C^*R|\gamma|,
\end{aligned}
$$

donde $K_4 = \int_0^1 (1-\tau)^{-n/p}\tau^{-\beta_p}d\tau$.

Aplicando ahora los lemas 3.3.1 y 3.3.3, y considerando que $p > n,\ -\beta_p > -1,\ \alpha > -1,\ \beta_q < 2$, tenemos la segunda estimación para la primera coordenada de N.

$$
\begin{aligned}
t^{\beta_p/2}||N_1||_{E_p} &\leq t^{\beta_p/2}||e^{t\triangle}v_0||_{E_p} + t^{\beta_p/2}||B_1(v,\ v)||_{E_p} \\
&+ t^{\beta_p/2}||LT||_{E_p} \\
&\leq ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}B(v,v)(\tau)||_{E_p}d\tau \\
&+ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)||_{E_p}d\tau \\
&\leq ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} \\
&+ t^{\beta_p/2}\int_0^t C_2(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}||v||_{E_p}^2 d\tau \\
&+ t^{\beta_p/2}t^{\alpha-\beta_q/2+1}C^*|\gamma|\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T(t)||_{F_q} \\
&\leq ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} \\
&+ t^{\beta_p/2}C_2R^2\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p}d\tau \\
&+ C^*|\gamma|R \\
&= ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C_2K_2R^2t^{-(1+n/p)/2-\beta_p/2+1} + C^*|\gamma|R \\
&= ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C_2K_2R^2 + C^*|\gamma|R,
\end{aligned}
$$

donde $K_2 = \int_0^1 (1-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p}d\tau$.

Estudiaremos ahora la segunda coordenada del operador N, la denotamos $N_2 = e^{t\triangle}T_0 - B_2(v,\ T)$. Usando el lema 3.3.2 y las definiciones de β_p y β_q, damos una estimación para N_2

$$
\begin{aligned}
||N_2||_{BF_q^{\beta_q}} &\leq ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + ||B_2(v,\ T)||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&\leq ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + \int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\tilde{B}(v,T)(\tau)||_{BF_q^{\beta_q}}d\tau \\
&\leq ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^t C_3(t-\tau)^{-(n/p+n/q)/2}||v||_{E_p}\ ||T||_{F_q} d\tau \\
&\le ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&+ C_3R^2\int_0^t (t-\tau)^{-(n/p+n/q)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2}d\tau \\
&= ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C_3R^2K_3t^{-(n/p+n/q)/2-\beta_p/2-\beta_q/2+1} \\
&= ||e^{t\triangle}T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C_3K_3R^2,
\end{aligned}
$$

donde $K_3 = \int_0^1 (1-\tau)^{-(n/p+n/q)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2}d\tau$.

Análogamente, del lema 3.3.1 y las definiciones de β_p y β_q, tenemos

$$
\begin{aligned}
t^{\beta_q/2}||N_2||_{F_q} &\le t^{\beta_q/2}||e^{t\triangle}T_0||_{F_q} + t^{\beta_q/2}||B_2(v,\ T)||_{F_q} \\
&\le t^{\beta_q/2}||e^{t\triangle}T_0||_{F_q} + t^{\beta_q/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\tilde{B}(v,T)(\tau)||_{F_q}d\tau \\
&\le ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&+ t^{\beta_q/2}\int_0^t C_1(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}||v||_{E_p}\ ||T||_{F_q}d\tau \\
&\le ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&+ t^{\beta_q/2}C_1R^2\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2}d\tau \\
&= ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + t^{\beta_q/2}C_1R^2t^{-(1+n/p)/2-\beta_p/2-\beta_q/2+1}K_1 \\
&= ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C_1K_1R^2,
\end{aligned}
$$

donde $K_1 = \int_0^1 (1-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2}d\tau$.

Estas cuatro acotaciones nos permiten estimar la norma

$$||N(v,\ T)||_{\mathcal{X}} \le ||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C^{**}R^2 + C^*|\gamma|R.$$

siendo $C^{**} = 2\,\text{máx}_{1\le i\le 4}\{K_iC_i\}$.

Si $||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} < (1-C^*|\gamma|)^2/4C^{**}$ y $0 < 1-C^*|\gamma| < 1$, entonces existe

$$R = \frac{(1 - C^*|\gamma|) - \sqrt{(1 - C^*|\gamma|)^2 - 4C^{**}(||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}})}}{2C^{**}} > 0,$$

tal que $||N(v,\ T)||_\chi\ \leq R$.

Veremos que N es una contracción estricta sobre la bola $B(0,\ R)$ para el R hallado. Para esto, estudiaremos la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo. Sean $(v,\ T)$, $(u,\ \theta)$ dos soluciones que pertenecen al espacio producto χ correspondientes al mismo dato inicial $(v_0,\ T_0)$, que satisface $||v_0||_{BE_p^{\beta_p}} + ||T_0||_{BF_q^{\beta_q}} < (1 - C^*|\gamma|)^2/4C^{**}$.

Entonces tenemos las siguientes cuatro estimaciones

$$\begin{aligned}
& ||(e^{t\triangle}v_0 - B_1(u,\ u) - L\theta) - (e^{t\triangle}v_0 - B_1(v,\ v) - LT)||_{BE_p^{\beta_p}} \\
\leq\ & \int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u)(\tau) - B(v,v)(\tau))||_{BE_p^{\beta_p}} d\tau \\
+\ & ||\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma(\theta - T)(\tau)d\tau||_{BE_p^{\beta_p}} \\
\leq\ & \int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u-v)(\tau) - B(v,v-u)(\tau))||_{BE_p^{\beta_p}} d\tau \\
+\ & C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||(\theta - T)(t)||_{F_q} \\
\leq\ & \int_0^t C_4(t-\tau)^{-n/p}(||u||_{E_p}||u-v||_{E_p} + ||v||_{E_p}||u-v||_{E_p})d\tau \\
+\ & C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||(\theta - T)(t)||_{F_q} \\
\leq\ & C_4 2R \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||u-v||_{E_p} \int_0^t (t-\tau)^{-n/p}\tau^{-\beta_p}d\tau \\
+\ & C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||\theta - T||_{F_q} \\
=\ & K_4 C_4 2R \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||u-v||_{E_p} + C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||\theta - T||_{F_q}
\end{aligned}$$

debido a la definición de β_p y $-n/p > -1,\ -\beta_p > -1$,

$$t^{\beta_p/2}||(e^{t\triangle}v_0 - B_1(u,\ u) - L\theta) - (e^{t\triangle}v_0 - B_1(v,\ v) - LT)||_{E_p}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u)(\tau) - B(v,v)(\tau))||_{E_p} d\tau \\
&+ \ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma(T-\theta)(\tau)||_{E_p} d\tau \\
&\leq \ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u-v)(\tau) - B(v,v-u)(\tau))||_{E_p} d\tau \\
&+ \ C^*|\gamma|t^{\alpha+1-\beta_q/2+\beta_p/2}\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||(T-\theta)(t)||_{F_q} \\
&\leq \ 2C_2R\sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||u-v||_{E_p}\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p} d\tau \\
&+ \ C^*|\gamma|\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q} \\
&= \ 2K_2C_2R\sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p} \\
&+ \ C^*|\gamma|\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q}
\end{aligned}
$$

pues $p > n > 0$, $\alpha + 1 + (\beta_p - \beta_q)/2 = 0$ y la definición de β_p,

$$
\begin{aligned}
& \quad ||(e^{t\triangle}T_0 - B_2(v,\ T)) - (e^{t\triangle}T_0 - B_2(u,\ \theta))||_{BF_q^{\beta_q}} \\
&\leq \ \int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(\tilde{B}(v, T-\theta)(\tau) - \tilde{B}(v-u,\theta)(\tau))||_{BF_q^{\beta_q}} d\tau \\
&\leq \ \int_0^t C_3(t-\tau)^{-(n/p+n/q)/2}(||v||_{E_p}\ ||T-\theta||_{F_q} + ||v-u||_{E_p}||\theta||_{F_q}) d\tau \\
&\leq \ C_3R[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q} \\
&+ \ \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}]\int_0^t (t-\tau)^{-(n/p+n/q)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2} d\tau \\
&= \ C_3K_3Rt^{-(n/p+n/q)/2-\beta_p/2-\beta_q/2+1}[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q} \\
&+ \ \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}] \\
&= \ C_3K_3R[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q} + \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}]
\end{aligned}
$$

puesto que $p > n,\ q > n,\ -(n/p + n/q)/2 - \beta_p/2 - \beta_q/2 + 1 = 0$,
y, por último,

$$
t^{\beta_q/2}||(e^{t\triangle}T_0 - B_2(v,\ T)) - (e^{t\triangle}T_0 - B_2(u,\ \theta))||_{F_q}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad t^{\beta_q/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(\tilde{B}(v,T-\theta)(\tau)-\tilde{B}(v-u,\theta)(\tau))||_{F_q}d\tau \\
&\leq \quad t^{\beta_q/2}\int_0^t C_1(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}(||v||_{E_p}\ ||T-\theta||_{F_q}+||v-u||_{E_p}||\theta||_{F_q})d\tau \\
&\leq \quad C_1Rt^{\beta_q/2}[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q} \\
&+ \quad \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}]\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p/2-\beta_q/2}d\tau \\
&= \quad C_1K_1Rt^{-\beta_p/2-(1+n/p)/2+1}[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q}+\sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}] \\
&= \quad C_1K_1R[\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T-\theta||_{F_q}+\sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v-u||_{E_p}]
\end{aligned}
$$

pues $p > n,\ q > 0$ y la definición de β_p.

Entonces, usando dichas estimaciones, vemos que

$$||N(v,T)-N(u,\theta)||_{\chi} \leq (2C^{**}R+C^*|\gamma|)||(v,T)-(u,\theta)||_{\chi}$$

donde $2C^{**}R+C^*|\gamma|<1$.

Aplicando ahora el teorema de punto fijo en espacios de Banach, encontramos una solución única al problema $N(v,T)=(v,T)$ en la bola $B(0,R)$. Además, observando que $R < [2(||v_0||_{BE_p^{\beta_p}}+||T_0||_{BF_q^{\beta_q}})]/(1-C^*|\gamma|)$ obtenemos la última estimación para la solución hallada. □

3.4. Comportamiento asintótico de soluciones

Los siguientes resultados muestran el comportamiento de las soluciones globales en tiempo acotadas del sistema (3.1) para valores grandes del tiempo t. Este comportamiento es independiente del método utilizado para obtener las soluciones consideradas. Además mostramos una tasa de decaimiento para las mismas.

Teorema 3.4.1 *Sean E_p, F_q dos espacios de Banach en las condiciones del teorema 3.3.1.*

Sean (v,T), (u,θ) dos soluciones globales en tiempo del sistema (3.1) acotadas, con datos iniciales (v_0,T_0), (u_0,θ_0), u_0, $v_0 \in BE_p^{\beta_p}$; θ_0, $T_0 \in BF_q^{\beta_q}$ respectivamente.

Sean $w(t)=u(t)-v(t)$, $w_0=u_0-v_0$, $z(t)=\theta(t)-T(t)$ y $z_0=\theta_0-T_0$.

Entonces,

$$||w(t)||_{E_p} \leq (||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C)t^{-\beta_p/2},$$

$$||z(t)||_{F_q} \leq (||z_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C')t^{-\beta_q/2},$$

para C, C' constantes positivas independientes de t. Es decir, $||w(t)||_{E_p}$ tiende asintóticamente a 0 como $t^{-\beta_p/2}$ y $||z(t)||_{F_q}$ tiende asintóticamente a 0 como $t^{-\beta_q/2}$.

Demostración: Como en el teorema 3.3.1, sea X el espacio dado por

$$\mathcal{C}([0,\infty), BE_p^{\beta_p}) \cap \{v : (0,\infty) \to E_p : \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v(t)||_{E_p} < \infty\},$$

dotado de la norma

$$||v||_X = \max\{\sup_{t>0}||v(t)||_{BE_p^{\beta}}, \ \sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||v(t)||_{E_p}\}$$

Análogamente, el espacio

$$Y = \mathcal{C}([0,\infty), BF_q^{\beta_q}) \cap \{T : (0,\infty) \to F_q : \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T(t)||_{F_q} < \infty\}$$

es dotado con la norma

$$||T||_Y = \max\{\sup_{t>0}||T(t)||_{BF_q^{\beta_q}}, \ \sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||T(t)||_{F_q}\}.$$

Sean (v,T), (u,θ) dos soluciones globales en tiempo de (3.1) con condiciones iniciales (v_0,T_0), (u_0,θ_0), u_0, $v_0 \in BE_p^{\beta_p}$; θ_0, $T_0 \in BF_q^{\beta_q}$ respectivamente, que satisfacen la hipótesis del teorema, esto es, $||(v,T)||_{\mathcal{X}} \leq M$ y $||(u,\theta)||_{\mathcal{X}} \leq M$ para algún $M > 0$.

Denotemos $w(t) = u(t) - v(t)$, $w_0 = u_0 - v_0$, $z(t) = \theta(t) - T(t)$ y $z_0 = \theta_0 - T_0$.

Sabemos que

$$v(t) \ = \ e^{t\triangle}v_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}B(v,v)d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma T(\tau)d\tau.$$

$$T(t) \quad = \quad e^{t\triangle}T_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\tilde{B}(v,T)d\tau.$$

Análogamente,

$$u(t) \quad = \quad e^{t\triangle}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}B(u,u)d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma\theta(\tau)d\tau.$$

$$\theta(t) \quad = \quad e^{t\triangle}\theta_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\tilde{B}(u,\theta)d\tau.$$

Entonces

$$\begin{aligned} v(t)-u(t) \quad &= e^{t\triangle}(v_0-u_0) \ - \ \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}[B(v,v)-B(u,u)]d\tau \\ &- \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma(T-\theta)(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Esto nos permite estimar

$$\begin{aligned} t^{\beta_p/2}||w||_{E_p} &= t^{\beta_p/2}||u-v||_{E_p} \\ &\leq t^{\beta_p/2}||e^{t\triangle}(v_0-u_0)|| \\ &+ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u)(\tau)-B(v,v)(\tau))||_{E_p}d\tau \\ &+ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}\mathbf{P}\gamma(T-\theta)(\tau)||_{E_p}d\tau \\ &\leq ||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} \\ &+ t^{\beta_p/2}\int_0^t ||e^{(t-\tau)\triangle}(B(u,u-v)(\tau)-B(v,v-u)(\tau))||_{E_p}d\tau \\ &+ C^*|\gamma|t^{\alpha+1-\beta_q/2+\beta_p/2}\sup_{t>0} t^{\beta_q/2}||(T-\theta)(t)||_{F_q} \\ &\leq ||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} \\ &+ 2C_2M\sup_{t>0} t^{\beta_p/2}||u-v||_{E_p}\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-\beta_p}d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T-\theta||_{F_q} \\
&= \quad ||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} + 2K_2C_2M \sup_{t>0} t^{\beta_p/2} ||v-u||_{E_p} \\
&+ \quad C^*|\gamma| \sup_{t>0} t^{\beta_q/2} ||T-\theta||_{F_q} \\
&\leq \quad ||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} + K_2C_2(2M)^2 + C^*|\gamma| 2M.
\end{aligned}
$$

Debido a las hipótesis $p > n > 0$ y $\alpha + 1 + (\beta_p - \beta_q)/2 = 0$, podemos concluir,

$$
||w(t)||_{E_p} = ||u(t) - v(t)||_{E_p} \leq (||w_0||_{BE_p^{\beta_p}} + C) t^{-\beta_p/2},
$$

donde C es una constante positiva independiente de t.

Del mismo modo, puede ser probado que

$$
||z(t)||_{F_q} \leq (||z_0||_{BF_q^{\beta_q}} + C') t^{-\beta_q/2},
$$

siendo C' una constante positiva independiente de t. □

Corolario 3.4.1 *Bajo las hipótesis del teorema 3.4.1, la solución nula es asintóticamente estable. Más precisamente, sea $(v,\ T)$ una solución global acotada de (3.1) con condición inicial $(v_0,\ T_0)$, la norma $||v||_{E_p}$ tiende a cero como $t^{-\beta_p/2}$ y la norma $||T||_{F_q}$ tiende a cero como $t^{-\beta_q/2}$.*

Demostración: Es suficiente elegir $u = 0,\ \theta = 0$ en el teorema anterior. □

3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado el comportamiento asintótico de soluciones globales en tiempo del sistema viscoso de Boussinesq. Como en el capítulo anterior, hemos trabajado en espacios de Banach abstractos, definiendo en la sección 3.2 los espacios adecuados ahora al sistema de ecuaciones (3.2) y sus respectivos espacios de Banach "tipo Besov", donde viven las funciones consideradas como condiciones iniciales del problema planteado. En la siguiente sección mostramos varias estimaciones válidas para las formas bilineales $B(u,v)$, $\tilde{B}(v,T)$ y la transformación lineal L, tanto en la norma de los espacios adecuados correspondientes, como en la norma de las espacios de Banach "tipo Besov" respectivos. Estos resultados nos permitieron demostrar la existencia y unicidad de las soluciones globales en tiempo, bajo ciertas suposiciones, pero considerando condiciones iniciales con norma pequeña. En la sección 3.4, estudiamos el comportamiento asintótico de la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo acotadas, ambas correspondientes a la misma condición inicial y hemos hallado una tasa de decaimiento para dicha perturbación.

Capítulo 4

Estabilidad en cierta clase de ecuaciones de evolución de tipo parabólico

Como es bien conocido, el estudio de la estabilidad de soluciones de una PDE presenta un destacado interés debido a estar estrechamente vinculado a diversas propiedades de las soluciones de la misma, como por ejemplo la unicidad de solución o el cálculo de soluciones aproximadas obtenidas mediante algún algoritmo numérico.

En este capítulo se estudia la estabilidad de las soluciones de cierta clase de ecuación de evolución de tipo parabólico. Se establecen condiciones suficientes bajo las cuales dichas soluciones resultan (exponencialmente) estables suponiendo la existencia de las mismas. Además, en el mismo se exponen las estimaciones que presentan las soluciones perturbadas.

4.1. Regularidad de soluciones

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} u_t + L(u) + B(u,u) + \nabla p &= f \\ \nabla .\ u = 0, &\quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(0) = a, &\quad u\,|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde Ω es un dominio acotado de dos o tres dimensiones, con borde $\partial\Omega$ Lipschitz continuo.

En este sistema u representa la velocidad de un fluido viscoso incompresible, p la presión, f describe la fuerza externa y a es la velocidad inicial dada.

En este capítulo denotamos a C^∞ como el espacio de funciones continuamente diferenciables de cualquier orden en Ω, y C_0^∞ consiste en aquellos elementos de C^∞ con soporte compacto en Ω.

Como es usual, $L^p(\Omega)$, o simplemente L^p, denota el espacio de funciones de $p-$ésima potencia sumables en Ω, y $||.||_{L^p}$ su norma. Denotamos el producto interno de L^2 por $(.,.)$ y $||.|| = ||.||_{L^2}$.

El espacio de Sobolev H^m es obtenido por la completación de la norma

$$||u||_m = (\Sigma_{0\leq|\alpha|\leq m}\ ||D^\alpha u||^2)^{1/2}$$

siendo α un multi-índice, de aquellos elementos de C^∞ para los cuales la norma es finita. H_0^1 es la clausura de C_0^∞ en H^1. Todos estos espacios son de funciones a valores reales. Los espacios de funciones a valores en $\mathbb{R}^n$ son denotados en letra negrita, aunque no hacemos distinción en la notación de sus normas y sus productos internos; así $\mathbf{H^1} \equiv [H^1]^n$ tiene norma

$$||u||_1 = (\Sigma_{1\leq i\leq n}\Sigma_{0\leq|\alpha|\leq 1}\ ||D^\alpha u_i||^2)^{1/2}.$$

Finalmente, denotamos por J y J_1 a los siguientes espacios de funciones solenoidales

$J = \{\phi \in \mathbf{L^2} : \nabla.\ \phi = 0\ en\ \Omega\ \}$,

$J_1 = \{\phi \in \mathbf{C_0^\infty} : ||T\phi|| < \infty,\ \nabla.\ \phi = 0\ en\ \Omega\ \}$.

Por simplicidad, a lo largo de este capítulo, todas las constantes serán denotadas por C.

Suposiciones acerca de la regularidad de los datos del problema (4.1):

(A1) El operador lineal L está dado por $L(u) = T^*Tu$, donde T es un operador lineal $T : \mathbf{H^1}(\Omega) \to \mathbf{L^1}(\Omega)$ y T^* su adjunto.

(A2) Por $B(u,u)$ simbolizamos a una forma bilineal tal que cumple las siguientes propiedades:

- La aplicación $B : \mathbf{H^1}(\Omega) \times \mathbf{H^1}(\Omega) \to \mathbf{L^1}(\Omega)$ verifica la siguiente desigualdad:

$$||B(u,v)||_{L^p} \leq C_{B,p,q,r}||Tu||_{L^q}||v||_{L^r},$$

con $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ y $C_{B,p,q,r} = C = constante$.

- La forma trilineal definida por $b(u,v,w) = (B(u,v),w)$ satisface la propiedad antisimétrica, es decir: $b(u,v,w) = -b(u,w,v)$.

(A3) La solución fuerte del problema (4.1) existe globalmente y satisface $\sup_{t\in[0,\infty)} ||Tu(.,t)|| \leq M$, para alguna constante M.

(A4) Existe una constante $\gamma > 0$ tal que el operador T verifica:

$$||\phi|| \leq \gamma||T\phi||, \forall\ \phi \in J_1.$$

4.2. Perturbaciones

La estabilidad de una solución u, dependerá del comportamiento de las soluciones perturbadas, es decir, cualquier solución v del problema

$$\begin{aligned} v_t + L(v) + B(v,v) + \nabla q = f \\ \nabla.v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ v(t_0) = v_0, \quad v\ |_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

comenzando en un tiempo inicial $t_0 \geq 0$, con valor inicial $v_0 \in J$ cerca de $u(t_0)$. Decimos que $w = v - u$ es una perturbación de u, y t_0 y $w_0 = v_0 - u(t_0)$ son el tiempo inicial y el valor inicial, respectivamente.

Llamamos solución débil del problema (4.2) a v sii satisface las siguientes condiciones:

- $v \in \mathbf{L^2}(t_0,t,J_1),\ \forall t > t_0$
- Sea $\phi(x,t)$ una función solenoidal con soporte $sop\ \phi = K \subset \Omega \times [t_0,\infty),\ K$ compacto. Para $t \geq t_0$ se cumple

$$\int_{t_0}^{t} [(v,\phi_t) - (Tv,T\phi) - (B(v,v),\phi) + (f,\phi)]d\tau = (v(t),\phi(t)) - (v(t_0),\phi(t_0)). \tag{4.3}$$

- $$\frac{1}{2}||v(t_1)||^2 + \int_{t_1}^{t}(f,v)d\tau \geq \frac{1}{2}||v(t)||^2 + \int_{t_1}^{t}||Tv||^2 d\tau, \tag{4.4}$$

  para casi todos los valores de $t_1 \geq t_0$, incluyendo a $t_1 = t_0$ y para todos los valores de $t > t_1$.

Es fácil ver que si una solución fuerte existe, entonces es también solución débil. En el lema siguiente, probaremos un resultado de estabilidad, comparando una solución fuerte con una débil. Si consideramos el caso en que $B(u,v) = u\nabla.v$ y $L(v) = -\triangle v$, el sistema de ecuaciones que se obtiene de (4.1) es el sistema de Navier-Stokes. Remitimos al lector al trabajo [15], para el estudio detallado de este caso.

Lema 4.2.1 *Supongamos que las condiciones (A1), (A2), (A3) y (A4) son satisfechas por los datos y la solución del problema (4.1).*

Sea w una perturbación de u. Entonces, para cada valor de t_1 tal que $v = w + u$ satisface (4.4), vale:

$$||w(t)||^2 + \int_{t_1}^{t}||Tw||^2 d\tau \ \leq \ ||w(t_1)||^2 e^{CM^2(t-t_1)},$$

para todo $t \geq t_1$.

Demostración: Si tomamos $\phi = u$ y $t_0 = t_1$ en (4.3), tenemos

$$\int_{t_1}^{t}[(v,u_t) - (Tv,Tu) - (B(v,v),u) + \ (f,u)]d\tau = (v(t),u(t)) - (v(t_1),u(t_1)),$$

A esta igualdad le restamos

$$\int_{t_1}^{t}[(u_t,v) \ + \ (Tu,Tv) \ + \ (B(u,u),v) \ - \ (f,v)]d\tau = 0,$$

que es obtenida a partir de la suposición de que u es solución fuerte del problema (4.1). Luego se verifica

$$\int_{t_1}^{t}[-2\,(Tv,Tu) - (B(w,w),u) + \ (f,u) + (f,v)]d\tau = (v(t),u(t)) - (v(t_1),u(t_1)).$$

Sumando esta última ecuación con (4.4) y la desigualdad análoga de (4.4) para u, obtenemos

$$\frac{1}{2}||w(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||Tw||^2 d\tau \leq \frac{1}{2}||w(t_1)||^2 + \int_{t_1}^{t} (B(w,w),u)\ d\tau.$$

Sabemos, por las suposiciones hechas sobre el operador bilinear B, que

$$|(B(w,w),u| \leq C||w||_{L^3}\ ||Tw||\ ||u||_{L^6} \leq \frac{1}{2}||Tw||^2\ +\ C||Tu||^2||w||^2$$

donde la última estimación se obtiene puesto que $|\Omega| < \infty$ y aplicando la hipótesis (A4). Esto nos permite escribir

$$\frac{1}{2}||w(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||Tw||^2 d\tau \leq \frac{1}{2}||w(t_1)||^2 + \int_{t_1}^{t} [\frac{1}{2}||Tw||^2 + C||Tu||^2||w||^2] d\tau,$$

luego, debido a la hipótesis (A3), vale

$$||w(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||Tw||^2 d\tau \leq ||w(t_1)||^2 +\ CM^2 \int_{t_1}^{t} ||w||^2 d\tau.$$

Usando la desigualdad de Gronwall concluimos la tesis. □

Observación. Aquí y en lo que sigue, usaremos la desigualdad de Gronwall que se aplica en desigualdades integrales o diferenciales de la forma:

$$\phi(t) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \phi_0 + \int_0^t G(\phi(\tau),\tau) d\tau,$$

donde ψ es no negativa y G es no decreciente en su primer argumento. Además suponemos que G es continua en su primer argumento e integrable en el segundo, y que ϕ y ψ son funciones medibles con $G(\phi(.),.)$ y ψ integrables en un intervalo $[0,S)$, $S > 0$. Remitimos al lector a [12] para consultas sobre las distintas desigualdades de Gronwall.

El teorema anterior es esencialmente un resultado de unicidad, al que también se puede llegar de manera más sencilla suponiendo que tanto u como v son soluciones fuertes del sistema (4.1). Como consecuencia de este resultado, se obtiene que si una solución fuerte existe entonces cada solución débil debe coincidir con ella.

Lema 4.2.2 *Supongamos que las condiciones (A1), (A2), (A3) y (A4) son satisfechas. Entonces para cada $S > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ con la siguiente propiedad:*

para cada perturbación w de u y cada tiempo $t_1 \geq t_0$ tal que $w(t_1) \in J_1$ con $||Tw(t_1)|| < \delta$, suponiendo que existe solución fuerte en $t = t_1$, y tal que $v = u + w$ satisface (4.4), vale

$$||Tw(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||T^*Tw||^2 d\tau \leq ||Tw(t_1)||^2 e^{C(1+M)^2(t-t_1)},$$

para $t \in [t_1, t_1 + S]$.

Además todo punto de este intervalo (sobre el cual v es solución fuerte) puede ser usado como tiempo inicial t_1 de (4.4)

Demostración: Debido a que existe una solución fuerte $\bar{v}$ en algún intervalo $[t_1, t')$ se tiene que $\bar{v}(t_1) = u(t_1) + w(t_1)$. Su intervalo de existencia incluye a cada intervalo cerrado $[t_1, t'']$ donde $||T\bar{v}||$ se mantiene acotada.

La restricción de v a $[t_1, t')$ coincide con $\bar{v}$ (usando el lema 4.2.1 para $\bar{w} = v - \bar{v}$).

Concluimos que v es también una solución fuerte en $[t_1, t')$ y que este intervalo incluye a cada intervalo $[t_1, t'']$ donde $||Tw||$ se mantiene acotada.

Para $t \in [t_1, t')$ podemos escribir la ecuación de perturbación para $w = v - u$ en su forma fuerte

$$w_t + L(w) + B(w, w) + B(w, u) + B(u, w) \in J^{\perp}.$$

Multiplicando por T^*Tw obtenemos

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||Tw||^2 + ||T^*Tw||^2 = -(B(w, u), T^*Tw) - (B(w, w), T^*Tw)$

$-(B(u, w), T^*Tw).$

De la misma forma que lo hecho en el lema 4.2.1,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||Tw||^2 + ||T^*Tw||^2 \leq \frac{1}{2}||T^*Tw||^2 + C(||Tw|| + ||Tu||)^2||Tw||^2.$$

Si $||Tw(t_1)||$ es suficientemente pequeña, existe $S > 0$ tal que $||Tw(t)|| \leq 1$ para $t \in [t_1, t_1+S]$. Esta estimación junto con la hipótesis (A3) nos permite escribir

$$\frac{d}{dt}||Tw||^2 + ||T^*Tw||^2 \leq C(1 + M)^2||Tw||^2.$$

Usando la desigualdad de Gronwall anteriormente mencionada, tenemos:

$$||Tw(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||T^*Tw||^2 d\tau \leq ||Tw(t_1)||^2 e^{C(1+M)^2(t-t_1)},$$

para $t \in [t_1, t_1 + S]$. □

Lema 4.2.3 *Supongamos que las condiciones (A1), (A2), (A3) y (A4) son satisfechas. Entonces, para todo $S > 0$, existen $\rho,\ B > 0$ con la siguiente propiedad:*
para cada perturbación w de u y para cada tiempo $t_1 \geq t_0$ tal que
$\lim_{t \to t_1^+} \sup ||w(t)|| < \rho$ *se tiene*

$$||Tw(t_1 + S)|| \leq B \lim_{t \to t_1^+} \sup ||w(t)||.$$

Además, $u + w = v$ satisface (4.4) con tiempo inicial $t_1 + S$ en lugar de t_1.

Demostración: Sea w una perturbación de u y $t_1 \geq t_0$, entonces v satisface (4.4) para casi todo $t_1 \geq t_0$.

Por el lema 4.2.1

$$||w(t)||^2 + \int_{t_1}^{t} ||Tw||^2 d\tau \leq ||w(t_1)||^2 e^{CM^2(t-t_1)} \leq \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2(t-t_1)}, \tag{4.5}$$

para todo $t_1 \geq t_0$ y para todo $t > t_1$.

Si $t = t_1 + S$ obtenemos

$$||w(t_1 + S)||^2 + \int_{t_1}^{t_1+S} ||Tw||^2 d\tau \leq \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2 S}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+S} ||Tw||^2 d\tau \leq ||w(t_1 + S)||^2 + \int_{t_1}^{t_1+S} ||Tw||^2 d\tau \leq \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2 S}$$

$$S||Tw(\mu)||^2 \leq \int_{t_1}^{t_1+S} ||Tw||^2 d\tau \leq \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2 S},$$

para algún $\mu,\ t_1 < \mu < t_1 + S$. Es decir,

$$||Tw(\mu)||^2 \leq \frac{1}{S} \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2 S}$$

$$\text{ínf ess}_{(t_1,t_1+S)}||Tw||^2 \leq \frac{1}{S} \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2 S},$$

para todo $t_1 \geq t_0,\ S > 0$.

Dado $S > 0$, sea δ elegido de acuerdo con el lema 4.2.2 y tomemos $\rho^2 = S\delta^2 e^{-CM^2S}$, $B^2 = S^{-1}e^{CM^2S}e^{C(1+M)^2S}$ con C las ctes del lema 4.2.1 y (4.5).

Supongamos que $\lim\limits_{t \to t_1^+} \sup ||w(t)|| < \rho$, se sigue que ínf $\text{ess}_{(t_1,t_1+S)}||Tw|| < \delta$ y entonces existe un punto en $(t_1, t_1 + S)$ que nos sirve como punto inicial para la desigualdad del lema 4.2.2.

$$||Tw(t_1 + S)||^2 \leq \inf_{(t_1,t_1+S)} \text{ess } ||Tw||^2 e^{C(1+M)^2S}$$

$$\leq S^{-1} \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2 e^{CM^2S} e^{C(1+M)^2S} = B^2 \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2$$

vemos entonces que

$$||Tw(t_1 + S)||^2 \leq B^2 \lim_{\tau \to t_1^+} \sup ||w(\tau)||^2$$

Claramente v es solución fuerte en un intervalo abierto que contiene a $t_1 + S$, luego vale (4.4) en $t_1 + S$. $\square$

4.3. Estabilidad exponencial

Definición 4.3.1 *La solución u del problema (4.1) se dice "estable" si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que cada perturbación w, con $w_0 \in J_1$ y $||Tw_0|| < \delta$ satisface*

$$\sup_{[t_0,+\infty)} ||w|| < \epsilon.$$

Definición 4.3.2 *La solución u del problema (4.1) se dice "exponencialmente estable" si existen números $S,\ \delta > 0$ tales que cada perturbación w, con $w_0 \in J_1$ y $||Tw_0|| < \delta$ satisface*

$$||w(t_0 + S)|| \leq \frac{1}{2}||w_0||.$$

Proposición 4.3.1 *Supongamos que las condiciones (A1),(A2), (A3) y (A4) son satisfechas y que u es estable.*

Entonces para toda perturbación w con $||Tw_0||$ suficientemente pequeña, la solución peturbada $v = u + w$ existe globalmente como solución fuerte de (4.1) y satisface

$$\sup_{[t_0,+\infty)} ||T(v-u)|| \leq 1.$$

Demostración: Observar que la definición 4.3.1 es equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0 / \forall w, w_0 \in J_1, \ ||Tw_0|| < \delta \text{ satisface } \sup_{[t_0,\infty)} ||Tw|| < \epsilon.$$

□

Teorema 4.3.1 *Supongamos que las condiciones (A1),(A2), (A3) y (A4) son satisfechas.*

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes a la estabilidad exponencial en el sentido de la definición 4.3.2

(i) Existen números $\delta, S > 0$ tales que cada perturbación w, con $w_0 \in J$ y $||w_0|| < \delta$, satisface

$$||w(t_0 + S)|| \leq \frac{1}{2}||w_0||.$$

(ii) Existen números $\delta, \alpha, A > 0$ tales que cada perturbación w con $w_0 \in J$ y $||w_0|| < \delta$, satisface:

$$||w(t)|| \leq Ae^{-\alpha(t-t_0)}||w_0||, \forall t \geq t_0.$$

(iii) Existen números $\delta, \alpha, A > 0$ tales que cada perturbación w con $w_0 \in J_1$ y $||Tw_0|| < \delta$, satisface:

$$||Tw(t)|| \leq Ae^{-\alpha(t-t_0)}||Tw_0||, \forall t \geq t_0.$$

Demostración: Def 4.3.2 $\Rightarrow$ (i)
Sean δ y S como en la definición 4.3.2. Por el lema 4.2.1, existe una constante D tal que $||w(t_0 + S)|| \leq D||w_0||$ para cada perturbación w de u.
Sea $N \geq 1$ tal que $2^{1-N}D \leq \frac{1}{2}$

Por los lemas 4.2.2 y 4.2.3, existe un número positivo σ tal que $||w_0|| < \sigma$ implica

$$||Tw(t)|| < \delta \text{ para } t_0 + S \leq t \leq t_0 + (N-1)S$$

y entonces todo punto de ese intervalo puede servir como punto inicial de (4.4).

Entonces podemos aplicar repetidamente la definición 4.3.2 para tiempos iniciales $t_0 + kS$, $k = 1, ..., N-1$

$$||w_0(t_0 + NS)|| \leq 2^{1-N}||w(t_0 + S)|| \leq 2^{1-N}D||w_0|| \leq \frac{1}{2}||w_0||$$

$\Rightarrow$ vale (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Sean S y δ como en (i), entonces elegimos ρ como en el lema 4.2.3. Entonces si $||w_0|| < \min(\delta, \rho)$ se sigue que $||w(t_0 + nS)|| \leq 2^{-n}||w_0||$ y que (4.4) vale para tiempos iniciales $t_1 = t_0 + nS$, $n = 0, 1, 2, ...$

Aquí la idea principal es usar (i) repetidamente con tiempos iniciales $t_0 + nS$, $n = 0, 1, 2, ...$
Pero esto es posible si consideramos a w como una perturbación con cada uno de estos tiempos como tiempo inicial.
Es decir, que se satisfaga (4.4) para $t_1 = t_0 + nS$, $n = 0, 1, ...$
Esto se obtiene inductivamente a partir del lema 4.2.3 que junto con el lema 4.2.1 implican (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sean ρ, B como en el lema 4.2.3 para $S = 1$ y sean δ, α, A las constantes de la condición (ii).
Entonces, para $w_0 \in J_1$ con $||Tw_0||$ suficientemente pequeña uno tiene

$$||Tw(t)|| \leq ||Tw_0||e^{C(1+M)^2} \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + 1 \tag{4.6}$$

por el lema 4.2.2 y

$$||w(t)|| \leq Ae^{-\alpha(t-t_0)}||w_0|| < A\rho \;\forall\; t \geq t_0$$

en virtud de la condición (ii) y de la desigualdad (A4).
Usando esta última desigualdad y el lema 4.2.3 tenemos

$$
\begin{aligned}
||Tw(t)|| &\leq B \lim_{\tau \to t-1} \sup ||w(\tau)|| \\
&\leq BAe^{-\alpha(t-1-t_0)}||w_0|| \\
&\leq \gamma BAe^{-\alpha}e^{-\alpha(t-t_0)}||Tw_0|| \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

para $t \geq t_0 + 1$, donde γ es la constante de la desigualdad (A4). Juntas (4.6) y (4.7) implican (iii).

(iii) $\Rightarrow$ definición 4.3.2

Es obvio que (iii) implica la existencia de $\delta, S > 0$ tales que cada perturbación w, con $w_0 \in J_1$ y $||Tw_0|| < \delta$ satisface $||Tw(t_0 + S)|| \leq \frac{1}{2}||Tw_0||$
Para esta S elegimos ρ, B como en el lema 4.2.3 y tomamos N tal que $2^{1-N}\gamma B \leq \frac{1}{2}$.
Entonces para $||Tw_0||$ suficientemente pequeña, tenemos $||w_0|| \leq \gamma\ ||Tw_0|| < \rho$ y por el lema 4.2.2 $||Tw(t)|| < \delta$ para $t \in [t_0, t_0 + NS]$ con (4.4) válida para toda elección de t_1 en este intervalo.
Así obtenemos

$$
\begin{aligned}
||w(t_0 + NS)|| &\leq \gamma||Tw(t_0 + NS)|| \\
&\leq 2^{1-N}\gamma||Tw(t_0 + S)|| \\
&\leq 2^{1-N}\gamma B||w_0|| \\
&\leq \frac{1}{2}||w_0||
\end{aligned}
$$

lo que completa la prueba del teorema. □

4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado un sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que generaliza al sistema de Navier-Stokes. Suponiendo la existencia de soluciones fuertes del mismo, hemos demostrado distintos resultados que relacionan la norma $||.||_{L^2(\Omega)}$ de una perturbación w con la norma $||.||_{L^2(\Omega)}$ de Tw y muestran además la dependencia continua de las soluciones de sus condiciones iniciales. También hemos probado que si una solución fuerte existe, toda solución débil debe coincidir con ella. Además hemos definido un tipo de estabilidad, la exponencial, y hemos dado distintas definiciones equivalentes a ella.

Capítulo 5

Comportamiento asintótico para fluidos hiperviscosos

En este capítulo estudiamos las soluciones globales en tiempo para un modelo hiperviscoso de un fluido incompresible. Estas funciones pueden ser pensadas como soluciones aproximadas del sistema de Navier-Stokes. Probamos que las soluciones del modelo perturbado convergen hacia las soluciones del sistema de Navier-Stokes en la norma de los espacios L^p. Además mostramos algunas propiedades del comportamiento asintótico de dichas soluciones y damos una tasa de decaimiento para las mismas.

5.1. Introducción

Es bien conocido que las ecuaciones de Navier-Stokes son un modelo razonable para predecir el comportamiento de un fluido incompresible en $\mathbb{R}^n$. Desde el trabajo de Leray [22], varios métodos han sido desarrollados para probar la existencia y unicidad de las soluciones globales en tiempo de este sistema de ecuaciones.

El método de hiperviscosidad propuesto por J. -L. Lions [23], consiste en reemplazar el Laplaciano $-\triangle$ por la suma $-\triangle + \alpha(-\triangle)^{\ell/2},\ \ \ell > 2,\ \alpha > 0$. En un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$, J. -L. Lions probó la existencia de una única solución regular siempre que $\ell \geq 5/2$, o en un caso más general $\ell \geq (n+2)/2$ para el problema en $\mathbb{R}^n$. Las soluciones de este modelo perturbado pueden ser interpretadas como aproximaciones a las soluciones del sistema de Navier-Stokes.

En este capítulo estudiamos las soluciones *mild* del modelo perturbado, que hemos llamado "modelo hiperviscoso", y mostramos diferentes formas de aproximación entre los dos modelos, teniendo en cuenta el coeficiente hiperviscoso α, la viscosidad absoluta ν y el tiempo t. También investigamos la tasa de decaimiento de la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo de ambos modelos en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p > n$.

Por simplicidad, en este contexto damos primero algunas notaciones.Para $1 \leq p \leq \infty$, la norma L^p de las funciones definidas a valores reales en $\mathbb{R}^n$, medibles Lebesgue, es denotada por $||.||_p$. La norma en los espacios L^p-débiles, $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, es denotada por $||.||_{p,\infty}$, $1 < p < \infty$.

Como es usual, denotamos la transformada espacial de Fourier de una función $f(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ por

$$\hat{f}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(\xi,t)d\xi \text{ y } \check{f}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi,t)d\xi$$

es la Transformada Inversa de Fourier.

Recordemos que el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que describe el movimiento de un fluido incompresible, en ausencia de fuezas externas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} v_t - \nu \triangle v + (v.\nabla)v + \nabla p &= 0 \\ \nabla . v &= 0 \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $v(x,t) = (v_1(x,t), ..., v_n(x,t))$ es la velocidad desconocida del fluido, $p = p(x,t)$ es la presión desconocida en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ y en el tiempo $t \geq 0$ y $\nu > 0$ es la viscosidad absoluta del fluido.

Sea $v_0(x)$ una condición inicial que verifica $\nabla .\ v_0 = 0$.

Aplicando el proyector de Leray $\mathbf{P}$ a las ecuaciones (5.1) podemos reescribirlas como

$$\begin{aligned} v_t &= \nu \triangle v - \mathbf{P}\nabla(v \otimes v) \\ \nabla . v &= 0 \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

en donde reemplazamos $(v.\nabla)v$ por $\nabla(v \otimes v)$, debido a que $\nabla .\ v = 0$.

Trabajando de manera análoga a la de los capítulos anteriores, podemos escribir la forma integral del problema (5.2)

$$v(t) = S(\nu t)v_0 - \int_0^t S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(v \otimes v)(\tau)d\tau \tag{5.3}$$

donde las integrales son entendidas en el sentido de Bochner. Llamaremos, como antes, soluciones *mild* a las soluciones de dicha ecuación integral y nos referiremos a ellas cuando hablemos de soluciones globales en tiempo.

Recordemos la siguiente estimación para el término bilineal de las soluciones *mild* en los espacios L^p

$$||S(t-\tau)\mathbf{P}\nabla(f \otimes g)(\tau)||_p \leq \eta_p(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}||f||_p||g||_p,$$

para $p > n$ y $0 < \tau < t$ ([17]).

Una estimación análoga es también válida para los espacios L^p- débiles. Remitimos a los lectores a [2].

5.2. Modelo hiperviscoso para un fluido incompresible

En esta sección presentamos el modelo hiperviscoso y mostramos algunas propiedades interesantes del núcleo del calor generalizado. El modelo hiperviscoso propuesto por J. -L. Lions consiste en perturbar la ecuaciones de Navier-Stokes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_t - \nu\triangle u + \alpha(-\triangle)^{\frac{\ell}{2}}u + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 \\ \nabla.\ u = 0 \\ u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

siendo $\ell > 2,\ \alpha > 0$.

La existencia de las soluciones globales en tiempo de este sistema en el espacio $L^{3,\infty}$ y en espacios de Banach adecuados fue probada en [9]. Trabajaremos ahora en la búsqueda de las soluciones *mild* del sistema perturbado. Para esto, denotemos $p_\ell(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^\ell + ix.\xi}d\xi$ al núcleo del calor generalizado. Este núcleo satisface varias propiedades útiles, las que enunciamos y demostramos a continuación.

Propiedades del núcleo del calor generalizado

- $p_2(x,t)$ corresponde al núcleo del calor o de Gauss-Weierstrass.
- Si definimos $f(x) = e^{-t|x|^\ell}$, para $t > 0$ fijo y $\ell > 2$, entonces $f \in \mathcal{S}$, el espacio de las funciones de Schwartz.

Este hecho se debe a que, dados $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ dos multi-índices, se tiene

$$x^\alpha \; D^\beta f(x) = x^{\alpha_1} ... x^{\alpha_n} \frac{\partial^{|\beta|} e^{-t|x|^\ell}}{\partial^{\beta_1} ... \partial^{\beta_n}} = \frac{x^{\alpha_1} ... x^{\alpha_n} x^{\beta_1} ... x^{\beta_n} |x|^{\ell - 2\beta}}{e^{t|x|^\ell}} \; g(x,t),$$

donde $g(x,t)$ es un función acotada para $x \in \mathbb{R}^n$.

Esto nos permite afirmar que la Transformada de Fourier de la función f, $\hat{f}(x) = (2\pi)^{n/2} p_\ell(x,t) \in \mathcal{S}$ para $t > 0$ fijo, por lo tanto está definida por una integral absolutamente convergente, para todo $\ell > 2$ y $t > 0$.

Además, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |p_\ell(x,t)| dx < \infty$, pues $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Siguiendo un razonamiento análogo, podemos concluir que la función $|x| \hat{f}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x| |p_\ell(x,t)| dx < \infty. \tag{5.5}$$

- El núcleo generalizado del calor cumple la siguiente propiedad de *scaling*,

  $p_\ell \; (x,t) = t^{-n/\ell} \; p_\ell \; (x/t^{1/\ell}, 1)$ para todo $\ell > 0$ y $t > 0$.

  Dados $\ell > 0$ y $t > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} p_\ell \; (x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^\ell + ix.\xi} \; d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|t^{1/\ell}\xi|^\ell + ix.\xi} \; d\xi \\ &= \frac{t^{-n/\ell}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^\ell + i \frac{x}{t^{1/\ell}}.u} \; du \\ &= t^{-n/\ell} \; p_\ell \; (x/t^{1/\ell}, \; 1), \end{aligned}$$

  donde la penúltima desigualdad se obtiene realizando el cambio de variables $u = t^{1/\ell}\xi$.

  Esta propiedad nos permite acotar la norma L^1 de p_ℓ por

  $||p_\ell(t)||_{L^1(\mathbb{R}^n, |x|dx)} \leq C t^{1/\ell}$, donde C es una constante positiva independiente de t. Esta última estimación se obtiene del cálculo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |p_\ell(x,t)| \; |x| \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/\ell} \; |p_\ell \; (x/t^{1/\ell}, 1)| \; |x| \; dx \\ &= t^{1/\ell} \int_{\mathbb{R}^n} |p_\ell \; (z,1)| \; |z| \; dz, \end{aligned}$$

y de (5.5).

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} p_\ell(x,t)dx = 1.$

  La prueba de esta igualdad está basada en que $p_\ell \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y algunas propiedades de la función Delta de Dirac (aplicando que $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-its}ds.$)

Lema 5.2.1 *Para cada par $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ sea $u(x,t)$ una función tal que $u(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la cual es solución de la siguiente ecuación*

$$\begin{aligned} u_t &= -(-\triangle)^{\frac{\ell}{2}}u \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{5.6}$$

para $\ell > 0$. Entonces $u(x,t) = p_\ell(x,t) * u_0(x)$.

Demostración: Para encontrar la solución de la ecuación (5.6), aplicamos la Transformada de Fourier

$$\frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} = -(\Sigma_{i=1}^n \xi_i^2)^{\ell/2}\hat{u}(\xi,t) = -|\xi|^\ell \hat{u}(\xi,t)$$

obteniendo

$$\hat{u}(\xi,t) = K(\xi)e^{-t|\xi|^\ell},$$

donde $K(\xi) = \hat{u_0}(\xi)$. Entonces,

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}u_0(y)dy\ e^{-t|\xi|^\ell}.$$

Tomando ahora la transformada Inversa de Fourier,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi,t)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^\ell + i(x-y)\xi}u_0(y)d\xi dy \\ &= p_\ell(x,t) * u_0(x). \end{aligned}$$

□

Si llamamos $S_\ell(t) = p_\ell(x,t)*$ a la convolución con el núcleo del calor generalizado, la solución *mild* del problema proyectado

$$\begin{aligned} u_t - \nu\triangle u + \alpha(-\triangle)^{\frac{\ell}{2}} u + \mathbf{P}\nabla(u \otimes u) = 0 \\ u(0) = u_0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

para $\alpha > 0$ y $\ell > 2$, está dada por

$$u(x,t) = S_\ell(\alpha t)S(\nu t)u_0(x) - \int_0^t S_\ell(\alpha(t-\tau))S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u \otimes u)(\tau)d\tau. \tag{5.8}$$

5.3. Estabilidad asintótica en $L^p(\mathbb{R}^n)$

En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del problema (5.7), para este fin usaremos el siguiente lema. En el mismo se enuncia que el semigrupo generado por el operador $\triangle - (-\triangle)^{\ell/2}$ puede ser aproximado en el espacio L^1 por el semigrupo del calor.

Lema 5.3.1 *([9])Sea $\ell > 0$. Existe una constante $C > 0$ independiente de t tal que*

$$||p_\ell(t) * p(t/2) - p(t/2)||_1 \leq Ct^{-(1/2-1/\ell)},$$

para todo $t > 0$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de este capítulo en el cual se comparan soluciones globales en tiempo del sistema de Navier-Stokes con aquellas del sistema hiperviscoso para valores grandes de la viscosidad absoluta, enfocando nuestro análisis en fluidos laminares. Desde el punto de vista físico, tal comparación muestra que la aproximación del modelo hiperviscoso al de Navier-Stokes es suficientemente buena cuando consideramos fluidos laminares con viscosidad grande.

Teorema 5.3.1 *Sea $v(x,t)$ una solución global en tiempo de (5.2) y $u(x,t)$ una solución global en tiempo de (5.7), correspondientes a la misma condición inicial $v_0(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Supongamos que u, v son soluciones acotadas pertenecientes al espacio

$$\chi_p = \{u \in \mathcal{C}([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^n)) : \sup_{t>0} t^{(1-n/p)/2}||u(t)||_p < \infty\}$$

para $p > n$. *Entonces, para* $p > \frac{n\ell}{2}$,

$$\lim_{\nu \to +\infty} ||u(t) - v(t)||_p = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Demostración: Supongamos que $\alpha > 0,\ \ell > 2,\ p > \frac{n\ell}{2}$.

Sea

$$v(t) = S(\nu t)v_0 - \int_0^t S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(v \otimes v)(\tau)d\tau, \tag{5.9}$$

una solución del sistema

$$\begin{aligned} v_t - \nu\triangle v + \mathbf{P}\nabla(v \otimes v) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x); \end{aligned}$$

y sea

$$u(x,t) = S_\ell(\alpha t)S(\nu t)v_0(x) - \int_0^t S_\ell(\alpha(t-\tau))S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u \otimes u)(\tau)d\tau, \tag{5.10}$$

una solución del sistema

$$\begin{aligned} u_t - \nu\triangle u + \alpha(-\triangle)^{\frac{\ell}{2}}u + \mathbf{P}\nabla(u \otimes u) = 0 \\ u(x,0) = v_0(x). \end{aligned}$$

Entonces la diferencia entre ambas puede ser expresada por

$$\begin{aligned} ||u(t) - v(t)||_p &\leq ||S(\nu t)v_0 - S_\ell(\alpha t)S(\nu t)v_0||_p \\ &+ \int_0^t ||S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(v \otimes v)(\tau) \\ &- S_\ell(\alpha(t-\tau))S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u \otimes u)(\tau)||_p \, d\tau \\ &\leq ||[S(\nu t) - S_\ell(\alpha t)S(\nu t)]v_0||_p \\ &+ \int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla(v \otimes v)(\tau) - \mathbf{P}\nabla(u \otimes u)(\tau)]\ ||_p \, d\tau \end{aligned}$$

$$+\int_0^t ||[I - S_\ell(\alpha(t-\tau))]S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)||_p \, d\tau$$

Llamemos a los tres términos de la desigualdad anterior de la siguiente manera,

$$\text{A} = ||[S(\nu t) - S_\ell(\alpha t)S(\nu t)]v_0||_p \tag{5.11}$$

$$\text{B} = \int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla(v\otimes v)(\tau) - \mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)] \; ||_p \, d\tau \tag{5.12}$$

$$\text{C} = \int_0^t ||[I - S_\ell(\alpha(t-\tau))]S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)||_p \, d\tau \tag{5.13}$$

Ahora, trabajaremos sobre cada uno de ellos. Aplicando el lema previo al primer término, obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{A} &= ||[S(\nu t) - S_\ell(\alpha t)S(\nu t)]v_0||_p \\
&\leq ||p_\ell(\alpha t) * p(\nu t/2) - p(\nu t/2)||_1 ||S(\nu t/2)v_0||_p \\
&\leq C_1(\nu t)^{-1/2} \; (\alpha t)^{1/\ell} \; ||v_0||_p \\
&\leq C_1 \nu^{-1/2} \; \alpha^{1/\ell} \; t^{-1/2+1/\ell} ||v_0||_p,
\end{aligned}$$

donde $C_1 > 0$ es una constante independiente de t, α, ν.

Haciendo uso de la propiedad de acotación del término bilineal de la ecuación de Navier-Stokes y teniendo en cuenta que las soluciones $u,\ v \in \chi_p$ están acotadas por una constante M, para $p > n$ el segundo término está controlado por

$$\text{B} \;=\; \int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla(v\otimes v)(\tau) - \mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)] \; ||_p \, d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla((v-u)\otimes v)(\tau) - \mathbf{P}\nabla(u\otimes(v-u))(\tau)]\ ||_p\ d\tau \\
&\leq C_2\int_0^t [\nu(t-\tau)]^{-(1+n/p)/2}||u(\tau)-v(\tau)||_p(||u(\tau)||_p + ||v(\tau)||_p)\ d\tau \\
&\leq \ C_2\nu^{-(1+n/p)/2}(2M)^2\int_0^t (t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-(1-n/p)}\ d\tau \\
&\leq \ C_2\nu^{-(1+n/p)/2}(2M)^2 t^{-(1-n/p)/2},
\end{aligned}
$$

donde $C_2 > 0$ es una constante independiente de t, ν.

Análogamente, usando la condición $p > n\ell/2$ el tercer término puede ser estimado de la siguiente forma,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C} \ &= \ \int_0^t ||[I - S_\ell(\alpha(t-\tau))]S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)||_p\ d\tau \\
&\leq \ \int_0^t ||p_\ell(\alpha(t-\tau)) * p(\nu(t-\tau)/2) - p(\nu(t-\tau)/2)||_1 \times \\
&\times \ \ ||S(\nu(t-\tau)/2)\mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)||_p\ d\tau \\
&\leq C_3\nu^{-1/2}\ \alpha^{1/\ell}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2+1/\ell}||S(\nu(t-\tau)/2)\mathbf{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)||_p\ d\tau \\
&\leq \ \ C_3\nu^{-1-n/(2p)}\ \alpha^{1/\ell}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2+1/\ell-(1+n/p)/2}||u(\tau)||_p^2\ d\tau \\
&\leq C_3\nu^{-1-n/(2p)}\ \alpha^{1/\ell}\ M^2\ t^{-1+1/\ell+n/(2p)}\int_0^1 (1-s)^{-1+1/\ell-n/(2p)}s^{-1+n/p}ds \\
&\leq \ \ C_3\nu^{-1-n/(2p)}\ \alpha^{1/\ell}\ M^2\ t^{-1+1/\ell+n/(2p)},
\end{aligned}
$$

donde $C_3 > 0$ es una constante independiente de $t, \nu,\ \alpha$.

Sumando estas desigualdades, concluimos $\lim_{\nu\to+\infty} \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C} = 0$, para todo tiempo $t > 0$. □

Observación. Este teorema muestra que no es necesario que el tiempo t crezca demasiado para producir una buena aproximación a las soluciones del sistema de Navier-Stokes considerando las soluciones perturbadas siempre que el parámetro viscoso ν sea suficientemente grande.

Antes de enunciar el siguiente resultado, denotemos $u_\alpha(x,t) = u(x,t)$ a la solución *mild* de (5.8). Mostraremos que tanto el sistema hiperviscoso como el de Navier-Stokes conducen a soluciones *mild* equivalentes para valores pequeños del parámetro α. Es decir, bajo esta hipótesis la equivalencia de los sistemas (5.2) y (5.7) se vuelve evidente, pero este hecho se ve reflejado a través de la proximidad de sus soluciones.

Proposición 5.3.1 *Sean* $u_\alpha(x,t),\ v(x,t)$ *dos soluciones en las mismas condiciones del teorema (5.3.1). Entonces,*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} t^{(1-n/p)/2} ||u_\alpha(t) - v(t)||_p \leq \tilde{C}. \tag{5.14}$$

Demostración: Razonando del mismo modo que en el teorema (5.3.1) es posible escribir la siguiente expresión

$$t^{(1-n/p)/2} ||u_\alpha(t) - v(t)||_p \leq t^{(1-n/p)/2} (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}),$$

donde A, B, C fueron definidos en el teorema previo. Teniendo en cuenta las estimaciones de las expresiones A, C en términos de α y la estimación del término B, tenemos

$$\begin{aligned}
t^{(1-n/p)/2}\mathrm{A} &\leq C_1 \nu^{-1/2}\ \alpha^{1/\ell}\ t^{-n/(2p)+1/\ell} ||v_0||_p, \\
t^{(1-n/p)/2}\mathrm{B} &\leq C_2 \nu^{-(1+n/p)/2} (2M)^2, \\
t^{(1-n/p)/2}\mathrm{C} &\leq C_3 \nu^{-1-n/(2p)}\ \alpha^{1/\ell}\ M^2\ t^{-1/2+1/\ell},
\end{aligned}$$

donde las constantes $C_1,\ C_2,\ C_3$ son independientes de $t,\ \alpha$ y ν.

Estas expresiones nos permiten calcular

$$t^{(1-n/p)/2} ||u_\alpha(t) - v(t)||_p \leq \alpha^{1/\ell} F(t) + \tilde{C},$$

siendo F una función de t independiente de α y $\tilde{C}$ es una constante independiente de t y α.

La tesis se obtiene tomando límite para α tendiendo a 0. □

Para mejorar este último resultado, necesitamos suponer que las soluciones involucradas tienen norma suficientemente pequeña en el espacio χ_p.

Teorema 5.3.2 *Sea $v(x,t)$ una solución global de (5.2) y $u_\alpha(x,t)$ una solución global de (5.7) pertenecientes al espacio $\chi_p,\ p>n$, correspondientes a la misma condición inicial $v_0(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Supongamos que $v,\ u_\alpha$ tienen norma suficientemente pequeña. Entonces, para $p>\frac{n\ell}{2}$,

$$\lim_{\alpha\to 0^+} t^{(1-n/p)/2}||u_\alpha(t)-v(t)||_p = 0.$$

Demostración: Sabemos, por hipótesis, que existe una constante $\delta>0$, tal que las soluciones $v,\ u_\alpha$ verifican que $t^{(1-n/p)/2}||u_\alpha||_p\le\delta$ y $t^{(1-n/p)/2}||v||_p\le\delta$. Trabajaremos ahora en la diferencia entre las soluciones u_α y v en la norma del espacio χ_p, esto es

$$t^{(1-n/p)/2}||(u_\alpha-v)(t)||_p \le t^{(1-n/p)/2}||S(\nu t)v_0 - S_\ell(\alpha t)S(\nu t)v_0||_p$$

$$+\ t^{(1-n/p)/2}\int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla(v\otimes v)(\tau)-\mathbf{P}\nabla(u_\alpha\otimes u_\alpha)(\tau)]\ ||_p\ d\tau$$

$$+\ t^{(1-n/p)/2}\int_0^t ||[I-S_\ell(\alpha(t-\tau))]S(\nu(t-\tau))\mathbf{P}\nabla(u_\alpha\otimes u_\alpha)(\tau)||_p\ d\tau.$$

Razonando de manera análoga a la del teorema anterior, podemos estimar la suma del primer y tercer término por una función

$$g(\alpha,t)=\alpha^{1/\ell}(C_1 t^{1/\ell-n/(2p)}+C_3 t^{-1/2+1/\ell}),$$

donde $C_1,\ C_3>0$ son constantes independientes de t y α. El segundo término puede ser estimado por

$$t^{(1-n/p)/2}\int_0^t ||S(\nu(t-\tau))[\mathbf{P}\nabla(v\otimes v)(\tau)-\mathbf{P}\nabla(u_\alpha\otimes u_\alpha)(\tau)]\ ||_p\ d\tau$$

$$\le t^{(1-n/p)/2}\int_0^t C_2\delta(t-\tau)^{-(1+n/p)/2}\tau^{-(1-n/p)/2}||(u_\alpha-v)(\tau)||_p\ d\tau$$

$$\le t^{(1-n/p)/2}\int_0^1 C_2\delta(1-s)^{-(1+n/p)/2}s^{-(1-n/p)/2}||(u_\alpha-v)(ts)||_p\ ds$$

$$= \int_0^1 C_2\delta(1-s)^{-(1+n/p)/2} s^{-(1-n/p)} (ts)^{(1-n/p)/2} ||(u_\alpha - v)(ts)||_p \; ds,$$

siendo $C_2 > 0$ una constante independiente de $t,\ \alpha$. Esta última desigualdad fue obtenida después de realizar el cambio de variables $\tau = t.s$.

Si llamamos $w_0(s) = C_2\delta(1-s)^{-(1+n/p)/2} s^{-(1-n/p)}$ es directo ver que $w_0 \in L^1([0,1])$, pues $p > n$. Además, si $\delta > 0$ es pequeño, si es necesario, podemos hacer $\int_0^1 w_0(s)ds = \eta < 1$. Esto nos permite escribir

$$t^{(1-n/p)/2} ||(u_\alpha - v)(t)||_p \leq g(\alpha, t) + \int_0^1 w_0(s)(ts)^{(1-n/p)/2} ||(u_\alpha - v)(ts)||_p \; ds.$$

Denotemos $L(t) = \limsup\limits_{\alpha \to 0^+} t^{(1-n/p)/2} ||(u_\alpha - v)(t)||_p$ y usemos la acotación de $L(t)$ debida a que $u,\ v \in \chi_p$. Si llamamos M a esta cota, entonces la desigualdad anterior nos muestra

$$L(t) \leq \int_0^1 w_0(s) L(ts) \; ds.$$

Esto implica que $L(t) \leq M \displaystyle\int_0^1 w_0(s) \; ds$. Por lo tanto, inductivamente, tenemos que $L(t) \leq M\eta^j$, para todo $j \geq 0$ y todo $t \geq 0$.

Tomando límite para $j \to +\infty$, obtenemos la tesis. □

Observación. La hipótesis adicional requerida en el último teorema no es demasiado restrictiva. En efecto, las soluciones que han sido construidas a partir del algoritmo de Picard con condiciones iniciales suficientemente pequeñas, satisfacen dicha suposición. Remitimos al lector a [18].

La siguiente proposición nos muestra una tasa de decaimiento para el comportamiento asintótico de la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo correspondientes a ambos modelos. Sólo suponemos la acotación de las mismas. Si dichas soluciones fueron obtenidas a partir del método de Picard, la tasa de decaimiento puede ser mejorada en una forma más precisa.

Proposición 5.3.2 *Sea $v(x,t)$ una solución global en tiempo de (5.2) y $u(x,t)$ una solución global en tiempo de (5.7), bajo las mismas condiciones que en el teorema 5.3.1. Entonces, existe una constante $\gamma < 0$ tal que*

$$||u(t) - v(t)||_p \leq t^{\gamma}(C' + h(t)),$$

donde $\lim_{t\to+\infty} h(t) = C''||v_0||_p$ *y* C', C'' *son constantes positivas independientes de* t.

Esto significa que $||u(t) - v(t)||_p$ *tiene un decaimiento a 0 como* $t^{-\gamma}$.

La prueba de esta proposición es directa a partir del teorema 5.3.1 tomando $\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell}$.

Observación. En la proposición previa hemos encontrado una tasa de decaimiento para la diferencia de dos soluciones globales en tiempo de sendos modelos. Sin embargo, aunque esta tasa no parece ser mejor que la tasa conocida para la diferencia de dos soluciones obtenidas a partir del teorema de punto fijo (ver [9]), nuestro resultado se aplica a cualquier par de soluciones acotadas, independientemente del método usado para hallarlas.

5.4. Conclusiones

En este capítulo hemos comparado dos modelos que describen el movimiento de un fluido incompresible en $\mathbb{R}^n$. Uno es representado por las ecuaciones de Navier-Stokes (5.1) y el otro es representado por las ecuaciones hiperviscosas dadas en (5.4). Nuestra comparación es realizada desde diferentes puntos de vista.

Primero estudiamos la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo de ambos modelos, concentrando nuestro estudio en fluidos laminares. El teorema 5.3.1 muestra que la solución del modelo hiperviscoso aproxima a la solución del sistema de Navier-Stokes para valores grandes de la viscosidad absoluta, sin tener en cuenta el valor de t. Además, hemos visto que si el parámetro α toma valores muy pequeños, entonces el modelo hiperviscoso aproxima al modelo de Navier-Stokes y la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo de ambos modelos es del orden de $t^{-(1-n/p)/2}$. Esta es la misma tasa de decaimiento que hemos encontrado para la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo acotadas del sistema de Navier-Stokes (ver [3] o cap.2). Finalmente, en la proposición 5.3.2 hemos mostrado el comportamiento asintótico entre dos soluciones globales en tiempo correspondientes a ambos modelos. Para esto, hemos hallado la tasa de decaimiento para la diferencia entre dichas soluciones y hemos visto que la misma es del orden de $t^{-\gamma}$, $\gamma = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\ell}$. Es importante enfatizar que nuestro resultado puede ser aplicado a cualquier para de soluciones acotadas, independientemente del método usado para hallarlas.

Capítulo 6

Conclusiones generales

6.1. Síntesis del trabajo relizado

En esta tesis hemos analizado el comportamiento asintótico de distintos problemas de evolución parabólicos.

En el capítulo 2 hemos estudiado la estabilidad de las soluciones globales en tiempo del sistema de Navier-Stokes, encontrando una tasa de decaimiento para la diferencia de dos de ellas. Hemos investigado el caso en que las soluciones sean acotadas y también el caso en que las condiciones iniciales de ambas soluciones sean distintas pero tienen normas pequeñas.

Para esto, hemos considerado espacios de Banach abstractos, llamados adecuados a este sistema y espacios de Banach "tipo Besov", donde pertenecen las condiciones iniciales. También hemos visto como ejemplos de espacios adecuados a estas ecuaciones a la mayoría de los espacios en donde usualmente se estudia la regularidad de las soluciones globales de este problema.

Este hecho muestra que nuestros resultados son generales.

En el capítulo siguiente hemos abordado el estudio del comportamiento asintótico de soluciones globales en tiempo del sistema viscoso de Boussinesq. Como en el capítulo anterior, hemos trabajado en espacios de Banach abstractos, definiendo los espacios adecuados para este sistema de EDP y sus respectivos espacios de Banach "tipo Besov", donde viven las condiciones iniciales del problema planteado. El objetivo de este capítulo fue demostrar la existencia y unicidad de las soluciones globales en tiempo, bajo la suposición de que las condiciones iniciales tienen norma pequeña. También hemos estudiamos el comportamiento asintótico de la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo acotadas, ambas correspondientes a la misma condición inicial y hemos hallado una tasa de decaimiento para dicha perturbación.

En el capítulo 4 nos hemos dedicado a analizar las propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que generaliza al sistema de Navier-Stokes. Suponiendo la existencia de soluciones fuertes del mismo, hemos demostrado distintos resultados que relacionan la norma $||.||_{L^2(\Omega)}$ de una perturbación w con la norma $||.||_{L^2(\Omega)}$ de Tw y muestran además la dependencia continua de las soluciones de sus condiciones iniciales. Además hemos definido un tipo de estabilidad, la exponencial, y hemos dado distintas definiciones equivalentes a dicha definición. Con estos resultados esperamos aportar al estudio de estabilidad desde el punto de vista numérico de este tipo de problemas parabólicos.

En el último capítulo hemos comparado dos modelos que describen el movimiento de un fluido incompresible en $\mathbb{R}^n$. Uno es representado por las ecuaciones de Navier-Stokes y el otro es representado por las ecuaciones hiperviscosas. Nuestra comparación es realizada desde diferentes puntos de vista, representados por los valores de distintos parámetros.

Primero estudiamos la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo de ambos modelos focalizando nuestro trabajo en valores grandes de la viscosidad absoluta, sin tener en cuenta el valor del tiempo. Luego hemos visto, para valores pequeños del parámetro α, cómo el modelo hiperviscoso aproxima al modelo de Navier-Stokes encontrando que la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo de ambos modelos tiene la misma tasa de decaimiento que la hallada para la diferencia entre dos soluciones globales en tiempo acotadas del sistema de Navier-Stokes en el capítulo 2.

Finalmente, hemos mostrado el comportamiento asintótico entre dos soluciones globales en tiempo acotadas correspondientes a ambos modelos. Para esto, hemos hallado la tasa de decaimiento para la diferencia entre dichas soluciones, independientemente del método usado para hallarlas.

6.2. Trabajo a futuro

Como continuación natural del trabajo realizado en esta tesis, se pueden mencionar diversos temas pendientes, como por ejemplo

- Investigar la existencia de soluciones autosimilares del sistema de Navier-Stokes en distintos espacios funcionales abstractos.
- Estudiar los fenómenos de “blow-up” en distintos problemas de evolución parabólicos.

- Analizar las propiedades de regularidad de las soluciones globales en tiempo de la ecuación de Navier-Stokes, considerando a las mismas como soluciones de un problema de evolución temporal.

- Estudiar la relación entre las soluciones globales en tiempo de la ecuación de Navier-Stokes con hiperviscosidad y las soluciones globales en tiempo de la ecuación que describe la dinámica de un fluido no Newtoniano.

Con el estudio de los temas citados esperamos contribuir a la teoría de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, por cierto aún incompleta.

Bibliografía

[1] O. Barraza, *Regularity and stability for the solutions of the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces*, Nonlinear Analysis, Vol. 35, 1999, 747-764.

[2] O. Barraza, *Self-imilar solutions in weak L^p spaces of Navier-Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 12, 1996, 411-439.

[3] O. Barraza, C. Ruscitti, *Stability of bounded global solutions for Navier-Stokes equations*, Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 48, No. 1, 2008, 141-148. ISSN 1311-8080

[4] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dymamics*, Cambridge Univ. Press, 1967.

[5] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 35, 1982, 771-837.

[6] J. Cannon, E. Di Benedetto, *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p, Approximation Methods for Navier-Stokes Problems*, (Lectures Notes in Math.), ed R Rautmann, Vol. 771, Berlin (Springer), 1980.

[7] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot, Paris, 1995.

[8] M. Cannone, G. Karch, *Incompressible Navier-Stokes equations in abstract Banach spaces*, in "Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Mathematical Physics", Edited by H. Fujita, S. T. Kuroda, and H. Okamoto, 2001.

[9] M. Cannone, G. Karch, *About the regularized Navier-Stokes equations*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 1, 2005, 1-28.

[10] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[11] L. Euler, *Principies géneraux du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Berlin, Vol. 11, 1755, 274-315.

[12] L. Evans, *Partial differential equations*, Graduates Studies in Mathematics, Vol. 19, A.M.S., 1998.

[13] L. C. F. Ferreira, E. J. Villamizar Roa, *Well-posedness and asymptotic behaviour for the convection problem in* $\mathbb{R}^n$, Nonlinearity, Vol. 19 ,2006, 2169-2191.

[14] D. Fuyiwara, A. Morimoto, *An* L_r *theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields*, J. Fac. Univ. Tokyo, Sec. I, Vol. 24, 1977, 685-700.

[15] J. G. Heywood, R. Rannacher, *An analysis of stability concepts for Navier-Stokes equations*, Journal für Mathematik, Band 372, 1986, 1-33.

[16] T. Hishida, *On a class of stable flows to the exterior convection problem*, J. Differential Equations Vol. 141, 1997, 54-85.

[17] G. Karch, *Scaling in nonlinear parabolic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 234, 1999, 534-558.

[18] T. Kato, *Strong* L^p*-solutions of the Navier-Stokes equation in* $\mathbb{R}^m$ *with applications to weak solutions*, Math. Z., Vol. 187, 1984, 471-480.

[19] L. D. Landau, E. M. Lifchitz, *Fluid Mechanics*, Theorical Physics, vol IV, Pergamon Press, 2nd. edition, 1987.

[20] P. G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall/ CRC Press, 2002.

[21] J. Leray, *Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose lh́ydrodynamique*, J. Math. Pure et Appl., Vol. 12, 1933, 1-82.

[22] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., Vol. 63, 1934, 193-248.

[23] J.-L. Lions, *Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[24] C. L. M. H. Navier, *Mémorie sur les lois du mouvement de fluides*, Mém. Acad. Sci. Inst. France, Vol. 6, 1822, 389-440.

[25] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[26] C. B. Ruscitti, *Existence and uniqueness for viscous Boussinesq system in abstract Banach spaces*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, Vol. 17, 2010, 659-675.

[27] G. G. Stokes, *On the theories of internal friction of fluids in motion*, Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol 8, 1845.

[28] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1983.

[29] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Monograph in Mathematics, Vol. 78, Birkhuser, Basel, 1983.

[30] H. Triebel, *Theory of Function Spaces, II*, Monograph in Mathematics, Vol. 84, Birkhuser, Basel, 1992.