



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

---

Trabajo de tesis Doctoral

Sobre la aplicación del método de entropía en el  
estudio de soluciones globales en tiempo de ecuaciones  
diferenciales de evolución de tipo parabólico

---

Laura Langoni

Director: Dr. Oscar Barraza

Codirectora: Dra. María Amelia Muschietti

2011

A mi familia

# Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a todas aquellas personas que de una u otra manera influyeron en la redacción de esta tesis.

Deseo agradecer especialmente a Marila por dedicar su tiempo a la lectura de este trabajo.

A las autoridades del Depto. de Cs. Básicas de la Facultad de Ingeniería donde trabajo desde hace tantos años.

A todos mis compañeros de la cátedra Matemática A, titulares, profesores y auxiliares.

Al departamento de Matemática de la Facultad de Cs. Exactas por brindarme el lugar de trabajo durante mis primeros años de beca.

A Marisa por su gran ayuda.

A mis amigos y compañeros de almuerzos, Corita, Laura, Ra, Ale y Nadia. Quienes me han hecho pasar almuerzos y cenas muy divertidas.

A mis amigas Claudia, Fer, Merce, Vero y Naty.

A mi familia y amigos de toda la vida por su apoyo constante. En especial a mi mamá, mis hermanas, sobrinos y cuñados, a mi hijo postizo, primos y tíos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice general</b>	<b>V</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contenido de la tesis . . . . .	5
<b>2. Antecedentes del tema</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. $u_t = \Delta u + u^p$ . . . . .	11
2.2.1. Existencia de solución global. Exponente de Fujita. . . . .	11
2.2.2. Condiciones sobre $u_0$ para la existencia de solución global . . . . .	13
2.2.3. Decaimiento de la solución en otras normas . . . . .	16
<b>3. Método de entropía</b>	<b>19</b>
3.1. Descripción del método . . . . .	19
3.2. Antecedentes de la aplicación del método . . . . .	21
3.2.1. Ecuaciones de difusión de tipo Fokker-Planck . . . . .	22
3.2.2. Ecuación parabólica no lineal de cuarto orden . . . . .	23
<b>4. Comportamiento asintótico de soluciones globales de <math>u_t = \Delta u + u^p</math></b>	<b>25</b>
4.1. Introducción . . . . .	25

4.2.	Preliminares . . . . .	27
4.3.	Método de entropía . . . . .	30
4.4.	Decaimiento de la funcional de entropía . . . . .	33
4.4.1.	Algunos lemas previos . . . . .	34
4.4.2.	Decaimiento de $I(v(s))$ y de $E(v(s))$ . . . . .	38
4.5.	Comportamiento asintótico de la solución . . . . .	39
<b>5.</b>	<b>Comportamiento asintótico de soluciones globales de <math>u_t = \Delta u + f(u)</math></b>	<b>44</b>
5.1.	Introducción . . . . .	44
5.2.	Existencia y unicidad de solución.	
	Cota de la norma $\ u(\cdot, t)\ _{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ . . . . .	46
5.2.1.	Preliminares . . . . .	46
5.2.2.	Hipótesis de $f$ . . . . .	47
5.2.3.	Decaimiento de la norma $\ u(x, t)\ _{L^\infty}$ . . . . .	49
5.3.	Existencia de supersolución estacionaria . . . . .	55
5.4.	Método de entropía. Decaimiento de $\ u\ _{L^2}$ . . . . .	57
5.4.1.	Cambio de variables. Nuevo problema . . . . .	57
5.4.2.	Descripción de los pasos del método . . . . .	61
5.4.3.	Funcional de Entropía . . . . .	62
5.4.4.	Decaimiento de la funcional de entropía . . . . .	65
5.4.5.	Comportamiento asintótico de la solución . . . . .	73
<b>6.</b>	<b>Comportamiento asintótico de soluciones globales de <math>u_t = \operatorname{div}(a\nabla u) + u^p</math></b>	<b>76</b>
6.1.	Introducción . . . . .	76
6.2.	Preliminares . . . . .	77
6.3.	Comportamiento asintótico de la solución . . . . .	80
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>85</b>
7.1.	Conclusiones . . . . .	85
7.2.	Trabajo a futuro . . . . .	86
	<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

3.1. Entropía relativa $E(u(t) u_\infty)$ . . . . .	20
4.1. Funcional de entropía $E(v(s))$ . . . . .	31
5.1. Gráficos de $f(t)$ y $f(1)t^p$ . . . . .	48
5.2. Gráficos de $G$ y $G^{-1}$ . . . . .	51



# Capítulo 1

## Introducción

Es un hecho conocido la creciente importancia y el amplio campo de aplicación que las ecuaciones en derivadas parciales tienen en la construcción de modelos matemáticos para la descripción de una gran variedad de problemas provenientes de diversas áreas del saber como, por ejemplo, la economía, la física, la biología. Muchos procesos de las ciencias aplicadas se pueden modelar matemáticamente por medio de ecuaciones de evolución. Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones de estado, describen los fenómenos físicos a estudio.

En las ecuaciones de estado de las teorías matemáticas clásicas intervienen operadores lineales. Sin embargo, algunos de los modelos más complejos utilizados por las distintas ramas de la ciencia involucran ecuaciones diferenciales no lineales. Esto es claro en el caso de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas dinámicos pero en el de las ecuaciones en derivadas parciales no fue siempre así, debido quizás a la ausencia de una teoría general para las mismas.

Un motivo por el cual los sistemas no lineales son más difíciles de analizar matemáticamente es que éstos presentan una serie de propiedades que no muestran las teorías lineales. Por otra parte, las características esenciales de ciertos fenómenos del mundo real que describen las ecuaciones de estado están relacionadas directamente con las propiedades originadas por el carácter no lineal de dichas ecuaciones.

Los problemas que típicamente se presentan en el estudio de ecuaciones diferenciales son los relativos a existencia de soluciones locales y globales en tiempo,



unicidad de las mismas, regularidad y dependencia de las condiciones iniciales, y comportamiento asintótico, para tiempo grande, de las soluciones globales en tiempo. De esto último será de lo que nos ocuparemos a lo largo de esta tesis.

Novedosos métodos en las áreas del análisis matemático y las ecuaciones diferenciales han sido introducidos por el estudio de los procesos no lineales estudiados durante el siglo XX, siendo uno de los campos de investigación más activos de la matemática de las últimas décadas. Aquí utilizaremos el conocido **método de entropía** para realizar el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de ciertas ecuaciones parabólicas no lineales.

Desde su planteo en la primera mitad del siglo XIX, las ecuaciones diferenciales de evolución de tipo parabólico se han utilizado para modelar distintos procesos de la física, la biología, mecánica, etc. Un caso especial, es el de las **ecuaciones de reacción-difusión** las cuales aparecen en el siglo XX. Estas ecuaciones en forma divergencia son del tipo

$$u_t = \operatorname{div}(A(u, \nabla u, x, t)) + B(u, \nabla u, x, t), \quad (1.1)$$

donde  $A$  satisface condiciones de elipticidad estándar, y tanto  $A$  como  $B$  satisfacen condiciones de crecimiento y regularidad. Podemos pensar que la ecuación (1.1) es un modelo no lineal de propagación del calor en un medio reactivo y que  $u \geq 0$  representa la temperatura,  $\operatorname{div}(A)$  la difusión y  $B$  modela la reacción.

Como caso especial de las ecuaciones (1.1) están aquellas que pueden escribirse en la forma

$$u_t = Au + f(u) \quad (1.2)$$

siendo  $A$  un operador elíptico de segundo orden, posiblemente no lineal y degenerado, y  $f$  una función superlineal que representa la reacción.

Los dos modelos escalares clásicos del tipo (1.2) son los que consideran  $f(u) = \lambda e^u$  y  $f(u) = u^p$ . El primero de ellos, el modelo de reacción exponencial

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u$$

donde  $\lambda > 0$ , es importante en la teoría de la combustión [49] bajo el nombre de modelo de combustible sólido o ecuación de Frank-Kamenetsky, como así también en geometría diferencial [32] entre otras aplicaciones. En este caso, la existencia

de solución global depende del parámetro  $\lambda$ , del dato inicial y del dominio. El otro caso,

$$u_t = \Delta u + u^p \tag{1.3}$$

donde  $p > 1$  es el modelo más simple en donde aparece el llamado **exponente de Fujita** [23] que describiremos después.

Hay numerosos modelos que generalizan (1.3). Uno de ellos es el que es representado por la ecuación de medios porosos

$$u_t = \Delta u^m + u^p,$$

donde  $m > 0$  y otro es el caso donde la difusión lineal es reemplazada por el operador  $q$ -laplaciano

$$u_t = \operatorname{div} \left( |\nabla u|^{q-2} \nabla u \right) + u^p,$$

donde  $q \geq 1$ .

Se han encontrado muchas aplicaciones importantes para ecuaciones del tipo (1.2) incluyendo la propagación de los genes ventajosos y dinámica de la población [1], el desarrollo de epidemias [39], la conducción nerviosa [18], sensibilidad celular [4] y otros fenómenos biológicos, además de las aplicaciones físicas, tales como la propagación de las llamas [49], superconductores [14], la solidificación [47] y los cristales líquidos [42].

Dentro de los casos más sencillos en los cuales la variable espacial es 1-dimensional podemos mencionar la ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov, que en la literatura también se puede encontrar como ecuación de Fisher-KPP o simplemente como la ecuación de Fisher. Su expresión es la siguiente

$$u_t = ku_{xx} + mu(1 - u).$$

Aquí  $k$  es el coeficiente de difusión, el cual es un número real positivo y  $m$  es una constante positiva. La ecuación de Fisher-KPP es el caso más simple de una reacción no lineal difuso-reactiva y ha sido extensamente estudiada tanto por la matemática, como por la física y la biología. Fisher y Kolmogorov la utilizaron para estudiar la propagación de genes mutantes que son cruciales para la supervivencia de poblaciones distribuidas en hábitats lineales.

Otro ejemplo es la ecuación de Fisher-Kolmogorov generalizada que también resulta importante para la biología, más específicamente en genética. Es la ecuación donde el término fuente es  $f(u) = u(1 - \alpha u^p)$ , es decir, que la ecuación es

$$u_t = ku_{xx} + u(1 - \alpha u^p),$$

con  $p \geq 1$ . Observemos que aquí  $f$  es continua,  $f'(0) \neq 0$  y  $f'' < 0$ .

Por último mencionamos un modelo específico de incendio forestal, en este caso el término de reacción utilizado es  $f(u) = u^\beta(1 - u)$ , con lo cual la ecuación es

$$u_t = u_{xx} + u^\beta(1 - u),$$

donde  $\beta > 1$ . Notemos que si  $\beta = 1$  tendríamos la ecuación de Fisher-KPP. El parámetro  $\beta$  cuantifica el número de árboles necesarios para prender fuego un espacio verde. Intuitivamente, se espera que para valores altos de  $\beta$  la velocidad del frente de fuego sea menor.

En este trabajo, nos enfocaremos al caso en que la ecuación (1.2) toma la forma

$$u_t = \Delta u + f(u) \tag{1.4}$$

donde  $f$  es una función no negativa y superlineal, es decir que estamos en presencia de una reacción. Es claro que la ecuación (1.4) generaliza el caso (1.3). Para empezar, aplicamos el método de entropía que mencionamos antes en el caso de la ecuación (1.3) obteniendo el decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$  de la solución  $u(x, t)$  de la ecuación. La aplicación del método en este caso, es utilizado como testeo para lo que será luego la aplicación del mismo en un caso más general (1.4).

Así mismo, estudiamos el comportamiento asintótico de soluciones globales de la ecuación parabólica no lineal en forma divergencia

$$u_t = \operatorname{div}(a(x, t)\nabla u) + u^p,$$

donde  $p > 1$  y la función  $a(x, t)$  cumple ciertas hipótesis de manera que dicha ecuación resulta ser una generalización de (1.3).

## 1.1. Contenido de la tesis

En esta sección hacemos una descripción sintética del contenido del trabajo por capítulos y los situamos en contexto con respecto a resultados relacionados.

En el **capítulo 2** damos algunas definiciones básicas y hacemos una reseña histórica de algunos de los resultados que se han obtenido sobre existencia y unicidad de soluciones, blow-up, exponentes críticos y comportamiento asintótico de soluciones de la ecuación  $u_t = \Delta u + u^p$ .

En el **capítulo 3** hacemos una breve descripción del método de entropía, puntualizando su aplicación en una serie de pasos generales. Mencionamos los dos tipos más frecuentes de tasa de decaimiento. Además, listamos cierto número de situaciones en las que se ha aplicado exitosamente el método y, a modo de ejemplo, detallamos los pasos de la aplicación del mismo a una ecuación de tipo Fokker-Planck y a una ecuación parabólica no lineal de cuarto orden.

En el **capítulo 4** el objetivo es aplicar el método de entropía al problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases}$$

donde  $p > 1$  y el dato inicial  $u_0$  es no negativo y no trivial. Para esto, primero damos una serie de preliminares, definiciones y resultados previos necesarios. Luego realizamos los distintos pasos de la aplicación del método de entropía para establecer el decaimiento de la solución global en tiempo  $u(x, t)$  del problema cuando  $t \rightarrow \infty$ . Empezamos realizando el cambio de variables adecuado para transformar el problema original al nuevo problema

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + v^p, & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = u_0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

A continuación definimos la funcional de entropía  $E(v(s))$  adecuada y la correspondiente producción de entropía  $I(v(s)) = -dE(v(s))/ds$ . Damos algunas propiedades de la funcional  $E(v(s))$  y de la funcional  $I(v(s))$  que nos lleva a probar el decaimiento exponencial de las mismas. Se prueba una desigualdad que acota la norma  $\|v(\cdot, s)\|_{L^p}$  en términos de la entropía y de la producción de entropía.

Mencionamos aquí que  $L^2_\rho(\mathbb{R}^N)$  es el espacio  $L^2(\mathbb{R}^N)$  con peso  $\rho = \exp(|y|^2/4)$ . Con esto se deduce que

$$\|v(\cdot, s)\|_{L^2_\rho} \leq C e^{-\gamma s}, \quad s \geq s_1,$$

para un tiempo  $s_1 > 0$ ,  $C$  una constante positiva y  $\gamma = \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}$ . A partir de esta cota, deducimos el decaimiento en la norma de  $L^2(\mathbb{R}^N)$  de  $u(\cdot, t)$ . Más específicamente, deducimos que la norma  $L^2$  de  $u(\cdot, t)$  decae según la tasa

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C (t+1)^{-\frac{N}{4}}, \quad t \geq t_1,$$

para cierto tiempo  $t_1 > 0$  y para  $C$  una constante positiva. Además deducimos el decaimiento de la norma  $L^q$  de  $u(x, t)$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q} \sim t^{-\frac{1}{p-1} - \frac{2}{q} \left( \frac{N}{4} - \frac{1}{p-1} \right)}.$$

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran publicados en el artículo [5].

En el **capítulo 5** estudiamos la existencia de soluciones globales no negativas de la ecuación de reacción-difusión

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0 \end{cases}$$

y el decaimiento de las normas  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$  y  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$ . Para esto mencionamos algunos resultados previos y algunas definiciones. Establecemos condiciones suficientes sobre  $u_0$  y  $f$  para la existencia de solución global del problema. En particular, mencionamos que las hipótesis requeridas a la función  $f$  son tales que generalizan al caso analizado en el capítulo anterior, esto es,  $f(u) = u^p$ . Además, damos otros ejemplos distintos de funciones  $f$  posibles. La segunda de estas hipótesis, que llamaremos hipótesis de subhomogeneidad, es esencial en el desarrollo del capítulo y por ello damos una serie de consecuencias que se obtienen a partir de la misma.

Uno de los dos resultados más importantes, establece que bajo ciertas hipótesis, se tiene garantizada la existencia global de solución y que, además, ésta decae de acuerdo con la tasa

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq G^{-1} \left( - \left( \lambda^{-p+1} - 1 \right) t \right),$$

donde  $G^{-1}$  es la función inversa de la función estrictamente creciente  $G(s) = \int_a^s \frac{d\tau}{f(\tau)}$  con  $a = \|u_0\|_{L^\infty}$  y además  $\lambda$  es una constante que está entre 0 y 1. Las hipótesis impuestas sobre  $f$  garantizan que efectivamente el lado derecho de la desigualdad de arriba tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Cabe mencionar que al calcular el decaimiento para el caso particular en que  $f(u) = u^p$ , se obtiene el conocido decaimiento dado por Wang [45]. Para el resto de las funciones de ejemplo, no obtenemos una cota explícita del decaimiento sino que queda en términos de  $G$ . Sin embargo, bajo una hipótesis adicional, podemos conseguir un decaimiento del tipo polinomial, esto es, un decaimiento de la forma  $t^{-\frac{1}{q-1}}$ .

En la obtención de la existencia global de solución y el decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$  utilizamos la suposición de existencia de una supersolución estacionaria de  $u_t = \Delta u + f(u)$ . Para esto, damos condiciones sobre  $f$  que garanticen la existencia de dicha supersolución estacionaria.

El otro de los dos resultados más importantes es el que provee el decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$  gracias a la aplicación del método de entropía. Para la aplicación de este método se asume una hipótesis adicional de la función  $f$ , la subhomogeneidad de  $f'$  con un grado menor que la subhomogeneidad de  $f$ .

Para empezar a aplicar el método, utilizamos un cambio de variables que nos lleva a trabajar con un nuevo problema que es

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v), & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = v_0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La aplicación del método de entropía para este problema no es tan directo como lo fue en el problema del capítulo anterior. Necesitaremos dar más resultados, como un criterio de comparación para el nuevo problema y un resultado que garantiza, bajo ciertas hipótesis, que el signo de  $v_s$  es negativo. Esta última propiedad será usada en forma continua durante la aplicación del método. Luego definimos la entropía  $E(v(s))$  y la producción de entropía  $I(v(s))$  y mostramos propiedades sobre  $E(v(s))$  e  $I(v(s))$  de las cuales deducimos el decaimiento exponencial de ambas funcionales. Aquí, otra de las diferencias en la aplicación del método con respecto al caso  $f(u) = u^p$  es que  $dE(v(s))/ds \geq -I(v(s))$ . Con esto

se deduce que

$$\|v(\cdot, s)\|_{L^2_\rho} \leq C e^{-\gamma s}, \quad s \geq 0,$$

donde  $C$  una constante positiva y  $\gamma$  es la constante positiva definida más arriba. Entonces, por medio del cambio de variables inverso, se tiene que el decaimiento de la norma  $L^2$  de  $u(\cdot, t)$  es

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C (t+1)^{-\frac{N}{4}}, \quad t \geq 0,$$

donde  $C$  es una constante positiva.

Los resultados de este capítulo han generado la redacción del artículo [6].

En el **capítulo 6** consideramos el problema parabólico

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(x, t)\nabla u) + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $p > 1$ . Damos hipótesis sobre la función  $a(x, t)$  y el dato inicial  $u_0$ , de manera que este problema generalice el problema tratado en el capítulo 4. Comenzamos aplicando el mismo cambio de variables de antes y pasamos a estudiar el problema

$$\begin{cases} v_s = \operatorname{div}(A(y)\nabla v) + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + v^p, & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = u_0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.6)$$

Obtenemos primero el decaimiento de la norma  $\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2$ , este es

$$\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2 \leq \|u_0\|_{L^2_\rho}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s},$$

donde  $\rho = \rho(y) > 0$  es una función positiva que cumple  $\rho \frac{y}{2} = A\nabla\rho$  y  $\tilde{\gamma} > 0$  es una constante definida por  $\tilde{\gamma} = \theta \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}$ .

Luego utilizamos el cambio de variables para obtener la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(x, t)\|_{L^2}^2$ . Ésta resulta ser

$$\|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C (t+1)^{-(2\theta-1)\frac{N}{4}} \quad t \geq t_1,$$

donde  $\theta$  es una constante positiva que acota la función  $A$  y  $C$  es una constante positiva.

Además, obtenemos el decaimiento de la norma en  $L^q(\mathbb{R}^N)$  de  $u(x, t)$

$$\|u(x, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sim (t + 1)^{-(\beta + \frac{1}{p-1}) - \frac{2}{q} \left[ (2\theta - 1) \frac{N}{4} - (\beta + \frac{1}{p-1}) \right]},$$

donde  $C$  es una constante positiva,  $\theta$  es una constante positiva que acota la función  $A$  y  $\beta$  es una constante positiva relacionada con la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$ .

En el **capítulo 7** damos algunas conclusiones sobre los resultados obtenidos en los capítulos precedentes. Además, trazamos el camino a seguir en un futuro próximo relacionado con el estudio del comportamiento asintótico de soluciones globales de ecuaciones diferenciales parabólicas.



## Capítulo 2

# Antecedentes del tema

En este capítulo daremos algunas definiciones básicas y mencionaremos algunos de los resultados que se han obtenido sobre existencia y unicidad de soluciones, blow-up, exponentes críticos y comportamiento asintótico de soluciones de algunas ecuaciones de reacción-difusión.

### 2.1. Introducción

Como mencionamos en el capítulo 1, las ecuaciones parabólicas del tipo

$$u_t = \operatorname{div}(A(x, u, \nabla u)) + B(x, u, \nabla u)$$

donde  $A$  cumple condiciones de elipticidad estándar, y donde tanto  $A$  como  $B$  cumplen condiciones de crecimiento y regularidad son utilizadas para modelar distintos fenómenos y procesos en física, mecánica, biología y otras ciencias. Podemos pensar que la ecuación es un modelo no lineal de propagación del calor en un medio reactivo y que  $u \geq 0$  representa la temperatura,  $\operatorname{div}(A)$  la difusión y  $B$  modela la reacción.

En el estudio de estas ecuaciones de evolución, el término **global** y **local** se refieren a la existencia de la solución para  $t > 0$  o en un intervalo finito a la derecha del cero respectivamente. El término **blow-up** se utiliza para indicar que la solución estalla en tiempo finito, esto es, cuando existe un tiempo  $T < \infty$ , llamado **tiempo de explosión**, tal que la solución  $u$  está bien definida para todo

$0 < t < T$ , mientras que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} = \infty.$$

Es decir que en este caso el intervalo de existencia es acotado.

La teoría matemática de explosión comenzó en los años 60 con los trabajos de Kaplan [29], Fujita [23, 24] y otros. Si bien no existe todavía una teoría completa, se han realizado estudios detallados de una serie de problemas de distinta complejidad, y se cuenta en la actualidad con una gran cantidad de trabajos sobre el tema.

Como mencionamos en la introducción, los dos modelos escalares clásicos son el modelo de reacción exponencial

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u$$

donde  $\lambda > 0$ , y el modelo de reacción potencial

$$u_t = \Delta u + u^p \tag{2.1}$$

donde  $p > 1$ .

Dentro de los trabajos que recopilan algunos resultados obtenidos para estas ecuaciones, podemos mencionar el de Levine [37] del año 1990, un trabajo de A. De Pablo [15] del año 2006 y otro trabajo de este mismo autor junto con Ferreira, Quirós y Vázquez [16] del año 2005.

En la próxima sección hacemos una síntesis de los resultados más importantes para el caso en que el término no lineal es  $u^p$ .

## 2.2. $u_t = \Delta u + u^p$

### 2.2.1. Existencia de solución global. Exponente de Fujita.

Mencionamos en esta sección los resultados más importantes que se han obtenido para el problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Recordemos que  $C_b(\mathbb{R}^N)$  es el espacio de todas las funciones continuas y acotadas definidas sobre  $\mathbb{R}^N$  y a valores reales.

Es conocido que para cualquier  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$  tal que  $u_0 \geq 0$ , existe un tiempo  $T_{u_0} > 0$  tal que (2.2) tiene una única solución clásica  $u$  sobre  $[0, T_{u_0})$  tal que  $u$  es acotada sobre  $\mathbb{R}^N \times [0, T']$  para cualquier  $0 < T' < T_{u_0}$ , y si  $T_{u_0} < \infty$ , entonces  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T_{u_0}^-$ . En el caso en que  $T_{u_0} < \infty$  tenemos que  $u$  estalla en tiempo finito y cuando  $T_{u_0} = \infty$  tenemos que  $u$  es solución global de (2.2).

En referencia a lo anterior, en primer lugar mencionamos un resultado obtenido por Fujita [23] en el cual se ve de qué manera influye el tamaño de la no linealidad  $p$  en la existencia de solución global y en la existencia de blow-up. Fujita estudió la existencia de soluciones globales no negativas del problema (2.2) para el caso  $p > 1$  y donde el dato inicial  $u_0$  es no negativo y no trivial obteniendo el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1** (Fujita, 1966). Sea  $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ . Entonces

1. Si  $1 < p < p^*$  entonces la única solución global no negativa de (2.2) es  $u = 0$ .
2. Si  $p > p^*$  entonces existen soluciones globales positivas de (2.2) si el dato inicial  $u_0$  es suficientemente chico.

**Definición 2.2.2.** Al exponente  $p^*$  lo llamamos **exponente crítico (de blow-up)**. Más tarde se llamó al mismo **exponente de Fujita**.

La afirmación 1. del teorema se llama **caso de blow-up** y la 2. se llama **caso de existencia global**.

Una pregunta natural, que surge inmediatamente, es la siguiente

**¿A qué caso corresponde el exponente crítico  $p^*$ ?**

Hubo varios autores que han dado respuesta, entre ellos Aronson y Weinberger [3], Hayakawa [28], Kobayashi, Siano y Tanaka [33] y Weissler [46]. La respuesta es que en el caso del exponente crítico  $p = p^*$ , no existe solución global no nula de (2.2).

**2.2.2. Condiciones sobre  $u_0$  para la existencia de solución global**

Por lo que observó Fujita, es de esperarse el resultado para datos iniciales pequeños. La explicación intuitiva es que si  $p$  es grande y el dato inicial es pequeño, entonces la tendencia de la solución al blow-up (que es lo que pasaría si el único término en la ecuación fuera  $u^p$ ), es inhibido por el efecto disipativo del laplaciano. Por otro lado, si  $p$  está cerca de 1, entonces no importa que tan chico sea el dato inicial pues el efecto disipativo del laplaciano es insuficiente para evitar el blow-up.

Sobre la condición para valores de  $p$  grandes, tenemos los siguientes resultados, el primero es de Fujita [23] y el segundo es de Levine [36].

**Teorema 2.2.3** (Fujita, 1966). Si  $p > 1 + \frac{2}{N}$ , para cualquier  $k > 0$ , existe un número  $\delta = \delta(p, N, k) > 0$  pequeño tal que cuando  $0 \leq u_0(x) \leq e^{-k|x|^2}$  sobre  $\mathbb{R}^N$ , entonces (2.2) tiene una solución global clásica que decae con una tasa  $t^{-\frac{N}{2}}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además, si la solución local puede ser extendida globalmente, entonces necesariamente

$$e^{t\Delta}u_0 \leq t^{-\frac{1}{p-1}} \left( \frac{1}{p-1} \right)^{1/(p-1)},$$

donde

$$e^{t\Delta}u_0 = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy.$$

Es decir que, si  $u_0$  es “grande”, entonces la solución local de (2.2) estalla en tiempo finito aún cuando  $p > 1 + \frac{2}{N}$ .

**Teorema 2.2.4** (Levine, 1977). Si el dato inicial es tan grande que

$$\frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_0^{p+1}(x) dx > \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_0(x))|^2 dx,$$

entonces la solución  $u$  de (2.2) no puede ser global, ya que no puede pertenecer a  $L^{p+1} \cap H^1$  para todo tiempo  $t$ , cualquiera sea el  $p > 1$ .

Con el fin de mejorar la condición suficiente de Fujita sobre el dato inicial para conseguir la existencia global de solución de (2.2), Weissler probó el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.5** (Weissler, 1981). Si  $p > 1 + \frac{2}{N}$  y el dato inicial  $u_0$  cumple

$$(p-1) \int_0^\infty \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty}^{p-1} dt \leq 1,$$

entonces (2.2) tiene una solución global clásica. En el caso en que la desigualdad sea estricta, la solución  $u$  converge a cero uniformemente sobre  $\mathbb{R}^N$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 2.2.6.** En el caso en que  $u_0$  esté acotado por un múltiplo pequeño de  $(1 + |x|)^{-m}$  para un  $m$  grande, entonces se cumple la condición del Teorema de Weissler.

Posterior a este trabajo, Lee y Ni [35], en relación a la condición suficiente que se le pide al dato inicial  $u_0$ , obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.7** (Lee-Ni, 1992). Sea  $p > 1 + \frac{2}{N}$ . Para cualquier  $k > 0$ , existe una constante  $b(p, N, k)$  pequeña tal que si

$$0 \leq u_0(x) \leq b(p, N, k) \left(k + |x|^2\right)^{-1/(p-1)},$$

entonces (2.2) tiene una solución global clásica que decae con la tasa  $t^{-1/(p-1)}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 2.2.8.** Lee y Ni también consiguieron una condición necesaria sobre  $u_0$  para la existencia global de soluciones clásicas de (2.2). Esta condición es

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{2/(p-1)} u_0(x) \leq (\lambda(B_1))^{1/(p-1)}.$$

donde  $B_1$  es la bola unitaria en  $\mathbb{R}^N$ , y  $\lambda(B_1)$  es el menor autovalor de  $-\Delta$  con la condición de borde 0 sobre  $\partial B_1$ . Este resultado indica que el decaimiento más lento de  $u_0$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$  que permite la existencia global de solución de (2.2) es  $|x|^{-2/(p-1)}$ .

Una pregunta interesante que surgió después es la siguiente

**¿Qué tan grande puede ser “b” en el teorema de Lee-Ni de manera que la existencia global de la solución de (2.2) quede garantizada?**

Para dar una respuesta, consideremos primero la **ecuación de Lane-Emden**

$$\Delta u + u^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad u > 0, \quad N \geq 3.$$

Es conocido que  $u_s = C(N, p) |x|^{-\frac{2}{p-1}}$  donde

$$C(N, p) = \left[ \frac{2}{p-1} \left( N - \frac{2p}{p-1} \right) \right]^{\frac{1}{p-1}},$$

es solución de la ecuación de Lane-Emden, esto es, es un equilibrio singular de (2.2). Este hecho sólo es posible para aquellos valores de  $p$  que verifican  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , pues Gidas y Spruck [25] probaron que no hay soluciones estacionarias en cualquier otro caso.

**Definición 2.2.9.** Definimos al número  $p_c$  por

$$p_c = \begin{cases} \frac{(N-2)^2 - 4N + 4\sqrt{N^2 - (N-2)^2}}{(N-2)(N-10)} & \text{cuando } N > 10 \\ \infty & \text{cuando } 3 \leq N \leq 10 \end{cases}$$

Notar que  $p_c > (N+2)/(N-2)$ . El siguiente resultado es de un trabajo de Wang [45] y da respuesta a nuestra pregunta.

**Teorema 2.2.10** (Wang, 1993). Supongamos que  $N \geq 3$ .

1. Cuando  $p > N/(N-2)$  y el dato inicial  $u_0$  cumple que  $0 \leq u_0(x) \leq \lambda u_s$ , donde  $0 < \lambda < 1$ , entonces (2.2) tiene una única solución global clásica  $u(x, t)$  con  $0 \leq u \leq \lambda u_s$ . Ésta también satisface que

$$u(x, t) \leq [(\lambda^{1-p} - 1)(p-1)t]^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

2. Cuando  $N/(N-2) < p < p_c$  y si  $0 \leq u_0 \leq u_s$ , entonces (2.2) tiene una solución global clásica  $u$  tal que  $0 \leq u \leq u_s$  y  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Respuesta:** Del teorema anterior podemos deducir que cuando  $N \geq 3$  y  $N/(N-2) < p < p_c$ ,  $b$  puede ser tan grande como  $C(N, p)$  para cualquier  $k > 0$ . Cuando  $N \geq 3$  y  $p \geq p_c$ ,  $b$  puede estar arbitrariamente cerca de  $(C(N, p))^-$ .

Antes de dar el siguiente resultado que relaciona la existencia de solución global  $u$  con el dato inicial  $u_0$ , recordemos el siguiente resultado de Fowler [21] sobre la existencia de equilibrios radiales de (2.2).

**Teorema 2.2.11** (Fowler, 1930). Supongamos que  $N \geq 3$ .

1. Si  $p > \frac{N+2}{N-2}$ , existe una familia  $(u_\alpha)_{\alpha>0}$  de soluciones regulares, positivas y radiales de la ecuación de Lane-Emden que satisface

a)  $u_\alpha(r)$  es decreciente en  $r$ , donde  $r = |x|$ ;

b)  $r^{2/(p-1)}u_\alpha(r) \rightarrow L$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , donde

$$L = \left[ \frac{2(N-2)}{(p-1)^2} \left( p - \frac{N}{N-2} \right) \right] ;$$

c)  $u_\alpha(0) = \alpha$ .

2. Si  $p = \frac{N+2}{N-2}$ , toda solución regular, positiva y radial de la ecuación de Lane-Emden está incluida en una familia  $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ ,

$$u_\lambda(r) = \left( \frac{\lambda \sqrt{N(N-2)}}{\lambda^2 + r^2} \right)^{(N-2)/2}.$$

**Teorema 2.2.12** (Wang, 1993). Supongamos que  $N \geq 3$  y que  $p \geq (N+2)/(N-2)$ .

1. Si el dato inicial  $u_0$  cumple que  $0 \leq u_0(x) \leq \lambda u_\alpha$ , para algún  $0 < \lambda < 1$  y algún equilibrio radial  $u_\alpha$ , entonces (2.2) tiene una única solución global clásica  $u(x, t)$  con

$$u(x, t) \leq [(\lambda^{1-p} - 1)(p-1)t]^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

2. Si  $u_0 \geq \lambda u_\alpha$  para algún  $\lambda > 1$  y algún  $u_\alpha$ , entonces las soluciones locales clásicas de (2.2) estallan en tiempo finito.

### 2.2.3. Decaimiento de la solución en otras normas

En esta sección mencionaremos un resultado en el cual se da el decaimiento de la solución global de (2.2) pero en la norma de  $L^q(\mathbb{R}^N)$ . Para esto damos previamente algunas definiciones.

**Definición 2.2.13.** Definimos el siguiente tiempo

$$t_{max}(u_0) = \sup \{T \in \mathbb{R}^+ / \text{la solución } u \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T']) \text{ para todo } T' < T\}.$$

**Definición 2.2.14.** Definimos el espacio  $X := \{g \in L^2_\rho \cap L^\infty / g \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N\}$  con la norma  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2_\rho} + \|\cdot\|_{L^\infty}$ .

El espacio  $L^2_\rho(\mathbb{R}^N)$  es el espacio  $L^2(\mathbb{R}^N)$  con peso  $\rho$ , donde  $\rho(x) = e^{|x|^2/4}$ .

**Definición 2.2.15.** Definimos ahora los conjuntos

$$K := \{u_0 \in X / t_{max}(u_0) = \infty\} \text{ y}$$

$$B := X - K = \{u_0 \in X / t_{max}(u_0) < \infty\}.$$

Al interior de  $K$  en  $X$  lo denotaremos  $\text{Int}(K)$  y al borde de  $K$  en  $X$  lo denotaremos  $\partial K$ .

El siguiente resultado fue probado por Kawanago [31].

**Teorema 2.2.16** (Kawanago, 1996). Supongamos que  $1 + \frac{2}{N} < p < \frac{N+2}{N-2}$ . Se tienen los siguientes resultados

1. El conjunto  $K$  es un conjunto convexo, cerrado y no acotado en  $X$  y  $0 \in \text{Int}(K)$ .
2. Para cualquier  $u_0 \in X - \{0\}$  existe un único  $\tau_0$  tal que
  - (a)  $\tau_0 u_0 \in \partial K$ ,
  - (b)  $\tau u_0 \in \text{Int}(K)$  si  $\tau \in (0, \tau_0)$ ,
  - (c)  $\tau u_0 \in B$  si  $\tau \in (\tau_0, \infty)$ .
3. Si  $u_0 \in \text{Int}(K) - \{0\}$ , entonces se tiene que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sim t^{-(1-\frac{1}{q})\frac{N}{2}} \text{ para } q \in [1, \infty].$$

Más precisamente, para  $q \in [1, \infty]$  se cumple que

$$t^{(1-\frac{1}{q})\frac{N}{2}} \left\| u(\cdot, t) - m_\infty (4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/(4t)} \right\|_{L^q} \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ , donde  $m_\infty = \sup_{t \geq 0} \|u(\cdot, t)\|_{L^1} \in \mathbb{R}^+$ .

4. Si  $u_0 \in \partial K$  entonces tenemos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sim t^{\frac{N}{2q} - \frac{1}{p-1}} \text{ para } q \in [1, \infty].$$



**Observación 2.2.17.** Para terminar, mencionamos que en el capítulo 4 estudiaremos el decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$  utilizando el método de entropía. Obtendremos la misma tasa que Kawanago para el caso  $q = 2$  pero para un rango de  $p$  mayor.

## Capítulo 3

# Método de entropía

### 3.1. Descripción del método

El método de entropía ha demostrado en los últimos años ser una herramienta eficaz para la comprensión de las propiedades cualitativas de modelos físicos y para una mayor comprensión matemática de las EDPs no lineales.

Para la aplicación del método es necesario contar con la existencia de soluciones no triviales globales en tiempo de la ecuación que se está estudiando y con la existencia de una solución de equilibrio, esto es, solución de la ecuación estacionaria correspondiente.

La idea principal de este método ha sido desarrollada en [2]. Básicamente consiste en aplicar una estrategia que puede resumirse en los siguientes pasos:

**Paso 1:** En los casos en los que sea conveniente, aplicar a la ecuación un cambio de variables adecuado que permita pasar a otro problema y estudiar, en principio, el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del nuevo problema. Este paso es opcional.

**Paso 2:** Identificar el equilibrio  $u_\infty$ .

**Paso 3:** Definir o construir una **funcional de entropía** (o más generalmente, **funcional de Lyapunov**),  $E$ , asociada a la ecuación.

**Paso 4:** Dado que la funcional de entropía  $E$  alcanza su mínimo en el equilibrio  $u_\infty$ , la diferencia entre una función  $u$  y el equilibrio  $u_\infty$  se mide con la

funcional  $E[u|u_\infty] = E(u) - E(u_\infty)$  llamada **entropía relativa**. Muchas veces no es sencillo probar directamente que una solución  $u$  converge a  $u_\infty$  sino que es más conveniente ver primero que  $E(u)$  converge a  $E(u_\infty)$ . Esta convergencia se llama **convergencia en entropía relativa**.

**Paso 5:** El principal objeto de estudio será la funcional llamada **producción de entropía** definida a partir de la derivada respecto del tiempo de la entropía por  $I(u(t)) = -dE(t)/dt$ .

**Paso 6:** La meta será obtener el decaimiento de la funcional de entropía relativa a partir del decaimiento de la producción de entropía. Para conseguir esto, se necesita una desigualdad del tipo  $\Theta(E[u|u_\infty]) \leq I(u)$  donde  $w \mapsto \Theta(w)$  es una función continua y positiva para  $w > 0$ . La idea es que la producción de entropía controla a la entropía relativa. Una desigualdad de este tipo, da una respuesta inmediata al problema de que  $u$  converge al equilibrio  $u_\infty$  en entropía relativa. Efectivamente, dicha desigualdad genera la inecuación diferencial  $\Theta(E[u|u_\infty]) \leq -dE[u|u_\infty]/dt$ . Luego, las técnicas usuales de ecuaciones diferenciales ordinarias, implican que  $E[u(t)|u_\infty] \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$

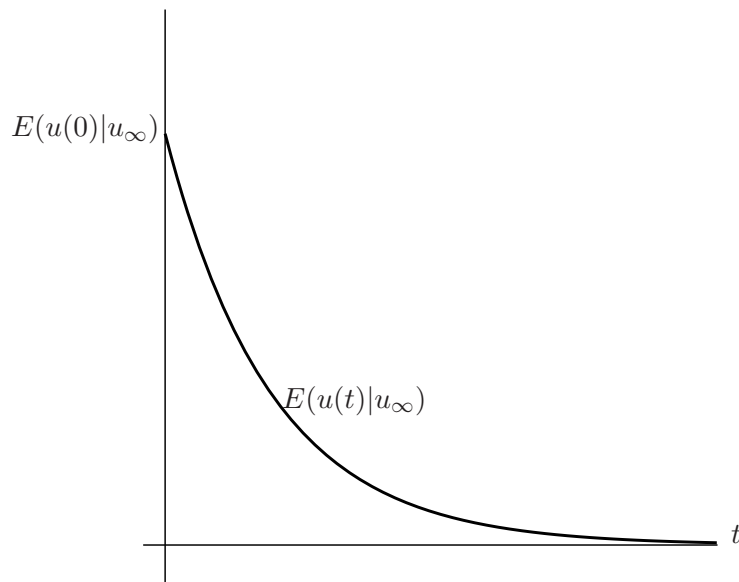


Figura 3.1: Entropía relativa  $E(u(t)|u_\infty)$

**Paso 7:** A partir del decaimiento de la entropía relativa tratar de deducir que  $u$  converge a  $u_\infty$ .

**Paso 8:** Finalmente, por medio del cambio de variables inverso, obtener la tasa de decaimiento para la solución del problema original.

**Observación 3.1.1.** En aquellos casos en los que  $\Theta$  se conoce, se puede obtener de manera explícita la tasa de decaimiento de la entropía relativa.

**Ejemplos 3.1.2.** Los siguientes ejemplos ilustran dos de las situaciones más frecuentes.

- Si  $\Theta(w) = Cw^{1+\alpha}$  donde  $C$  y  $\alpha$  son constantes positivas, la tasa de decaimiento es polinomial, esto es, la entropía relativa decae, al menos, con la tasa  $t^{-1/\alpha}$ .
- Si  $\Theta(w) = \alpha w$  donde  $\alpha$  es una constante positiva, la tasa de decaimiento es exponencial, esto es, la entropía relativa decae, al menos, con la tasa  $e^{-\alpha t}$ .

## 3.2. Antecedentes de la aplicación del método

Desde hace más de cien años, cuando Boltzmann introdujo la noción de entropía, ésta ha sido utilizada tanto por físicos como por matemáticos en el estudio de los sistemas de disipación. También ha ganado terreno en aplicaciones de la ingeniería a través del importante concepto de información desarrollado por Shannon [40], y en las estadísticas después de la invención de la información de Fisher [20].

En [2] los autores mencionan varios ejemplos de la utilización de la entropía. Por ejemplo, las aplicaciones que Lax [34] dio del concepto de entropía a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Además, el teorema de DiPerna y P.-L. Lions [17] sobre existencia global de soluciones renormalizadas de la ecuación de Boltzmann, tiene una demostración que está basada en el uso de la entropía de Boltzmann. Otro ejemplo es el uso de la entropía en un trabajo de Nash [38] sobre la regularidad de la solución de cierto proceso de difusión. En todas estas

obras, la entropía se presenta para un uso que no es su original, pero resulta ser de suma utilidad.

Los últimos años han visto el desarrollo del método de entropía aplicado al estudio de convergencia al estado de equilibrio. Mencionamos a continuación algunas de estas aplicaciones del método en relación con distintos tipos de EDPs.

### 3.2.1. Ecuaciones de difusión de tipo Fokker-Planck

En [11], Carrillo y Toscani aplicaron el método de entropía a la ecuación de medios porosos. El flujo de un gas en una ecuación de medios porosos  $N$ -dimensional está descrita por la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La función  $u$  representa la densidad del gas en el medio poroso y  $m > 1$  es una constante física. En lugar de trabajar con ese problema, aplicaron un cambio de variables adecuado para pasar al estudio del decaimiento asintótico hacia el estado de equilibrio de la solución de la ecuación del tipo Fokker-Planck

$$\begin{cases} v_s = \operatorname{div}(y v + \nabla v^m), & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = v_0(y) \geq 0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Además, el cambio de variables utilizado garantizaba que el dato inicial antes y después del cambio de variables sea el mismo. El cambio de variables fue determinado al plantear  $u(x, t) = (\alpha(t))^N v(\alpha(t), \beta(t))$  y encontrar las funciones  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  adecuadas que les permitan pasar de un problema al otro. La solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck es  $v_\infty = \left(C - \frac{m-1}{2m} |y|^2\right)^{1/(m-1)}$ . En este caso, se define la funcional de entropía por

$$H(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left( |y|^2 v + \frac{2}{m-1} v^m \right) dy$$

y la entropía relativa es  $H(v|v_\infty) = H(v) - H(v_\infty)$ . Luego calculan la producción de entropía que resulta ser  $2I(v(s))$ , donde

$$I(v(s)) = \int_{\mathbb{R}^N} v \left| y + \frac{m}{m-1} \nabla v^{m-1} \right|^2 dy.$$

Entonces, prueban que  $\frac{d}{ds}H(v(s)|v_\infty) = -2I(v(s))$  y además que

$$\frac{d}{ds}I(v(s)) = -2I(v(s)) - R(s),$$

donde  $R(s) \geq 0$ . Al combinar estos dos resultados, deducen que

$$0 \leq H(v(s)|v_\infty) \leq I(v(s)) \quad \text{para } t \geq 0.$$

Al utilizar esta desigualdad en la expresión de la derivada de la entropía relativa, se concluye el decaimiento exponencial de la entropía relativa. Después prueban que  $\|v - v_\infty\|_{L^1}$  se puede acotar en términos de la entropía relativa para deducir finalmente que

$$\|v - v_\infty\|_{L^1} \leq Ce^{-\frac{N(m-1)+2}{(N+2)m-N}t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Luego utilizan otra vez el cambio de variables para deducir el siguiente decaimiento para la solución del problema original

$$\|u(x, t) - MU(|x|, t)\|_{L^1} \leq C \left( \frac{1}{1 + (t/k)} \right)^{\frac{1}{(N+2)m-N}},$$

donde  $U(|x|, t) = t^{-kN} \left( Cte - \frac{(m-1)k}{2m} |x|^2 t^{-2k} \right)^{1/(m-1)}$  se llama solución de Barenblatt-Pattle y  $C$  es una constante que depende de  $m$  y  $H(v_0)$ .

### 3.2.2. Ecuación parabólica no lineal de cuarto orden

En [27], Gualdani, Jüngel y Toscani estudian el comportamiento asintótico para tiempo grande de las soluciones  $u = u(x, t)$  de la ecuación

$$\begin{cases} u_t = -(u(\log u)_{xx})_{xx}, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(\cdot, 0) = u_I \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

donde  $\Omega = (0, 1)$  y las condiciones de borde son

$$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_1, \quad u_x(0, t) = w_0, \quad u_x(1, t) = w_1, \quad t > 0.$$

Los autores probaron que si  $u_0, u_1 > 0$ ,  $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$  y  $u_I$  es integrable y satisface  $\int_0^1 u_I - \log u_I dx < \infty$  entonces existe una solución débil  $u$  del problema que satisface  $u(x, t) \geq 0$  en  $(0, 1) \times (0, \infty)$ ,  $u \in L_{loc}^{5/2}(0, \infty; W^{1,1}(0, 1)) \cap W_{loc}^{1,1}(0, \infty; H^{-2}(0, 1))$  y  $\log u \in L_{loc}^2(0, \infty; H^2(0, 1))$ .

También probaron que si  $u_0, u_1 > 0$ ,  $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ , entonces existe una única solución clásica de

$$(u(\log u)_{xx})_{xx} = 0 \quad \text{en } (0, 1), \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1, \quad u_x(0) = w_0, \quad u_x(1) = w_1,$$

tal que  $u(x) \geq m > 0$  para todo  $x \in [0, 1]$  y la constante  $m$  depende sólo de los datos de borde.

Si  $u_\infty$  es la única solución de la estacionaria, definen la entropía relativa por

$$E(t) = \int_0^1 \left( u \log \left( \frac{u}{u_\infty} \right) - u + u_\infty \right) dx.$$

Suponiendo que  $(\log u_\infty)_{xx} \leq 0$  prueban que

$$\frac{dE(t)}{dt} + I \leq 0,$$

donde  $I$  denota a la producción de entropía. Este término es estimado consiguiendo, en consecuencia, la siguiente desigualdad sobre la entropía

$$\frac{dE(t)}{dt} + 2\lambda E(t) \leq 0,$$

para cierto  $\lambda > 0$ . La desigualdad de Gronwall implica la convergencia en entropía relativa. Luego, la utilización de desigualdades del tipo Csiszar-Kullback da la tasa de decaimiento

$$\|u(\cdot, t) - u_\infty\|_{L^1(0,1)} \leq C e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t > 0,$$

donde  $\lambda$  y  $C$  son constantes que sólo dependen del dato inicial y de los datos de borde.

## Capítulo 4

# Comportamiento asintótico de soluciones globales de

$$u_t = \Delta u + u^p$$

Estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones no negativas del problema semilineal parabólico

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0. \end{cases}$$

A partir del trabajo [23] es conocido que la solución no negativa  $u(x, t)$  de este problema estalla en tiempo finito para  $1 < p < 1 + 2/N$ . Además, si  $p > 1 + 2/N$  y la norma de  $u_0$  es suficientemente pequeña, el problema admite una solución global. En este capítulo usamos el método de entropía para obtener la tasa de decaimiento de la solución global  $u(\cdot, t)$ .

### 4.1. Introducción

Consideramos al problema semilineal parabólico

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $p > 1$  y  $u_0$  es no negativa y no trivial. El interés en este capítulo es estudiar el comportamiento asintótico de soluciones globales en tiempo para obtener su



tasa de decaimiento. Este tema ha sido tratado por varios autores con una variedad de técnicas. Por una lado, herramientas estándar basadas en estimaciones a priori o algún tipo de principio del máximos han sido aplicadas, por ejemplo, en [23, 28, 30, 31, 45]. Por otro lado, autores como Bricmont, Kupiainen y Lin, basados en técnicas de renormalización, han desarrollado un método general para el estudio del comportamiento asintótico de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de tipo parabólico (ver [9]) y, también consideraron el problema clásico del blow-up de las soluciones de ecuaciones de calor no lineal (ver [8]). Acá, este tema será tratado usando el método de entropía. Este método ha sido aplicado exitosamente, por ejemplo, por J.A. Carrillo y G. Toscani [11] para el comportamiento asintótico de soluciones globales de una ecuación del tipo Fokker-Planck (ver capítulo 3, subsección 3.2.1).

En [23], Fujita consideró el problema de evolución (4.1) y probó la existencia de un exponente crítico  $p^* = 1 + \frac{2}{N}$ , el cual es llamado **exponente de Fujita**. Este exponente satisface

- para  $p > p^*$ , si la norma de  $u_0$  es suficientemente pequeña, existe una solución clásica positiva y global en tiempo de (4.1) la cual decae a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , en el otro caso la solución estalla en tiempo finito;
- para  $1 < p < p^*$  y cualquier elección de la condición inicial  $u_0$ , toda solución positiva de (4.1) estalla en tiempo.

En el caso  $p = p^*$  Hayakawa [28] probó que toda solución positiva de (4.1) tiene el mismo comportamiento que en el caso  $1 < p < p^*$ . Este hecho también ha sido probado por Kobayashi, Sirao y Tanaka [33].

El objetivo principal de este capítulo es obtener la tasa de decaimiento de la solución global  $u(x, t)$  del problema (4.1) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Más específicamente, deducimos que bajo ciertas hipótesis, la norma  $L^2$  de  $u(x, t)$  decae con la tasa

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C (t + 1)^{-\frac{N}{4}}, \quad t \geq t_1,$$

para cierto tiempo  $t_1 > 0$ , como también la norma  $L^q$  de  $u(x, t)$

$$\|u(x, t)\|_{L^q} \sim t^{-\frac{1}{p-1} - \frac{2}{q} \left( \frac{N}{4} - \frac{1}{p-1} \right)}.$$

La organización de este capítulo es como sigue. La sección 2 contiene notación y algunos resultados previos que son necesarios para las siguientes secciones. En la sección 3 damos un breve resumen acerca de los pasos del método de entropía. En la sección 4 obtenemos el decaimiento exponencial para la producción de entropía y para la entropía. La última sección está dedicada a deducir el comportamiento asintótico de la solución global mencionado arriba.

## 4.2. Preliminares

La idea es transformar la ecuación del problema (4.1) con el objetivo de obtener información importante sobre el comportamiento asintótico de la solución global. Para esto emplearemos el cambio de variables utilizado por Kavian [30] y Kawanago [31]. Este es,

$$\begin{aligned} v(y, s) &= (t+1)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t), \\ x = (t+1)^{1/2} y \quad y \quad t = e^s - 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Entonces,  $v(y, s)$  resulta ser solución del problema

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + v^p, & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = u_0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (4.3)$$

Notemos que el problema (4.3) tienen la misma condición inicial que el problema (4.1).

Trabajaremos con los siguientes espacios funcionales con peso.

**Definición 4.2.1.** Dado  $r \geq 1$ , el espacio  $L^r(\mathbb{R}^N)$  pesado, con peso  $\rho(y) = \exp(|y|^2/4)$ , es el espacio  $L^r_\rho(\mathbb{R}^N) = \{f / \int_{\mathbb{R}^N} |f|^r \rho \, dy < \infty\}$  y la norma en dicho espacio está dada por  $\|f\|_{L^r_\rho(\mathbb{R}^N)} = (\int_{\mathbb{R}^N} (f(y))^r \rho \, dy)^{1/r}$ .

En particular, para el caso  $r = 2$ , tenemos el espacio de Hilbert

$$L^2_\rho(\mathbb{R}^N) = \left\{ f / \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 \rho \, dy < \infty \right\}$$

con el producto interno definido por  $(f, g)_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} fg \rho \, dy$  y la norma dada por  $\|f\|_{L^2_\rho(\mathbb{R}^N)} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ .

**Definición 4.2.2.** Definimos el espacio de Hilbert  $H^1(\mathbb{R}^N)$  pesado, con peso  $\rho(y) = \exp(|y|^2/4)$ , al espacio de Hilbert  $H_\rho^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L_\rho^2 / \nabla f \in L_\rho^2\}$  con el producto interno  $(f, g)_{H_\rho^1(\mathbb{R}^N)} = (f, g)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla f, \nabla g)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}$  y la correspondiente norma  $\|f\|_{H_\rho^1(\mathbb{R}^N)} = \left[ \|f\|_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla f\|_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ .

**Definición 4.2.3.** El espacio  $H^2(\mathbb{R}^N)$  pesado, con peso  $\rho(y) = \exp(|y|^2/4)$ , es el espacio definido por

$$H_\rho^2(\mathbb{R}^N) = \{f \in L_\rho^2(\mathbb{R}^N) / \partial_i f, \partial_{ij}^2 f \in L_\rho^2(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } i, j = 1 \dots N\}.$$

A partir de ahora, los espacios  $L_\rho^r(\mathbb{R}^N)$ ,  $H_\rho^1(\mathbb{R}^N)$  y  $H_\rho^2(\mathbb{R}^N)$  serán notados simplemente por  $L_\rho^r$ ,  $H_\rho^1$  y  $H_\rho^2$  respectivamente. Como también las integrales  $\int_{\mathbb{R}^N} \cdot \rho \, dy$  serán notadas simplemente por  $\int \cdot \rho \, dy$ .

**Definición 4.2.4.** Para cada  $v \in H_\rho^2$  definimos al operador  $L$  por  $Lv = -\Delta v - \frac{y}{2} \cdot \nabla v$ .

El siguiente resultado sobre el operador  $L$  se encuentra en un artículo de Escobedo y Kavian [19].

**Teorema 4.2.5** (Escobedo-Kavian, 1987). Consideremos al operador  $L$  definido arriba, entonces

1. El operador  $L$  es autoadjunto y tiene inversa compacta.
2. Los autovalores de  $L$  son  $\frac{N+k-1}{2}$  para todo  $k \geq 1$  entero.

**Observación 4.2.6.** Debido a 2. del teorema 4.2.5,  $\lambda_1 = \frac{N}{2}$  es el menor autovalor de  $L$  y, por lo tanto, es válida la siguiente desigualdad

$$\frac{N}{2} \|v\|_{L_\rho^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \rho \, dy. \quad (4.4)$$

A partir de esta definición, notemos que la ecuación en (4.3) puede ser escrita en la forma

$$v_s = -Lv + \frac{v}{p-1} + v^p. \quad (4.5)$$

**Observación 4.2.7.** La ventaja de utilizar el cambio de variables (4.2) está en el hecho que el operador  $L$  definido arriba tiene inversa compacta y, por lo tanto, la ecuación (4.5) puede ser estudiada de la misma manera que la ecuación del calor  $u_t = \Delta u + u^p$  en una región acotada  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

Es conocido que  $u_s = C(N, p) |x|^{-\frac{2}{p-1}}$  donde  $C(N, p) = \left[ \frac{2}{p-1} \left( N - \frac{2p}{p-1} \right) \right]^{\frac{1}{p-1}}$ , es un equilibrio singular de (4.1), esto es,  $u_s$  es una solución de la **ecuación de Lane-Emden**

$$\Delta u + u^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad u > 0, \quad N \geq 3.$$

La ecuación de Lane-Emden surge en aplicaciones de astrofísica y geometría Riemanniana. Es conocido que este hecho sólo es posible para aquellos valores de  $p$  que verifican  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , dado que Gidas y Spruck [25] probaron que no hay soluciones estacionarias en cualquier otro caso.

El siguiente resultado es de un trabajo de Wang [45] y da el decaimiento de la solución  $u(x, t)$  de (4.1) en  $L^\infty$ .

**Teorema 4.2.8** (Wang, 1993). Supongamos que  $N \geq 3$ ,  $p > \frac{N}{N-2}$  y que el dato inicial  $u_0$  cumple que  $0 \leq u_0(x) \leq \lambda u_s$ , donde  $0 < \lambda < 1$ , entonces (4.1) tiene una única solución global clásica  $u(x, t)$  con  $0 \leq u \leq \lambda u_s$ . Ésta también satisface que

$$u(x, t) \leq [(\lambda^{1-p} - 1)(p - 1) t]^{-\frac{1}{p-1}},$$

para todo  $t > 0$ .

**Observación 4.2.9.** Esta desigualdad, en términos del problema (4.3), puede expresarse de la siguiente manera

$$v(y, s) \leq \frac{1}{[(\lambda^{1-p} - 1)(p - 1)]^{\frac{1}{p-1}}} \left[ \frac{e^s}{e^s - 1} \right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad (4.6)$$

para todo  $s > 0$ .

De ahora en adelante, asumiremos que se cumplen las hipótesis del teorema de Wang. Además, a partir de ahora trabajaremos en el conjunto de soluciones

globales  $v$  de (4.3) tales que  $v \in X$ , con

$$X = \left\{ f \in H_\rho^1 \cap L^\infty / f \geq 0 \text{ y } \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(s)|^2 \rho \, dy = 0 \right\}.$$

### 4.3. Método de entropía

Estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo del problema (4.3). Para esto, usaremos el método de entropía ya mencionado. La aplicación esencial de este método consistirá en los siguientes pasos.

- Definir una **funcional de entropía**  $E(v(s))$  adecuada para la ecuación (4.3) y estudiar sus propiedades.
- Calcular la **producción de entropía**

$$I(v(s)) = -\frac{d}{ds} E(v(s)).$$

- Calcular la derivada de la producción de entropía y obtener una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d}{ds} I(v(s)) = -C I(v(s)) - R(s),$$

para cierta constante  $C > 0$  y cierta función  $R(s)$ .

- Probar las propiedades de  $R(s)$  que nos permitan obtener un decaimiento exponencial de  $I(v(s))$ ,

$$I(v(s)) \leq A e^{-Cs}.$$

- Obtener la misma tasa de decaimiento para  $E(v(s))$  a partir de los items previos, más específicamente

$$E(v(s)) \leq B e^{-Cs}, \text{ para } s \geq s_1 \text{ y cierta } s_1 > 0.$$

- Dar una cota de  $\|v\|_{L_\rho^2}$  en términos de la entropía y de la producción de entropía la cual permita arriar a la conclusión sobre el decaimiento de la norma mencionado.

La misma funcional introducida por Kavian y Kawanago ([30] y [31] respectivamente) será usada en este caso como funcional de entropía. A continuación damos la definición de la misma.

**Definición 4.3.1.** Para todo  $v \in H^1_\rho \cap L^{p+1}_\rho$  la **funcional de entropía** está definida por

$$E(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{1}{2(p-1)} v^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1} \right] \rho \, dy .$$

**Observación 4.3.2.** Notar que  $v_\infty = 0$  es un equilibrio de (4.3) y, además,  $E(v_\infty) = 0$ . Por lo tanto, al definir la funcional de entropía relativa obtenemos que  $E(v(s)|v_\infty) = E(v(s)) - E(v_\infty) = E(v(s))$ . De esta manera, para ver que  $v \rightarrow v_\infty = 0$  en entropía relativa debemos ver que  $E(v(s)) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

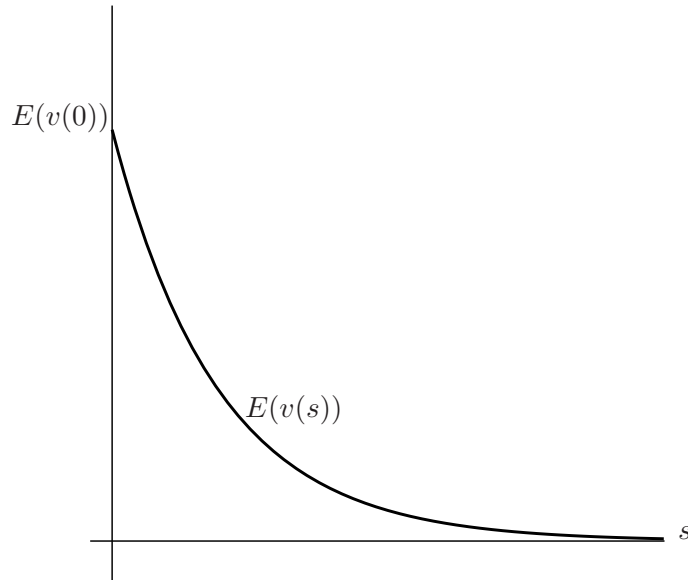


Figura 4.1: Funcional de entropía  $E(v(s))$

Con el fin de obtener el decaimiento anunciado arriba, son necesarias algunas propiedades de esta funcional. Estas propiedades están resumidas en la próxima proposición. La primera de ellas fue probada por Kavian en [30].

**Proposición 4.3.3.** Sea  $u_0 \in H_\rho^1 \cap L^\infty$ ,  $u_0 \geq 0$ ,  $E(u_0) < \infty$  y  $v = v(y, s)$  la solución global de (4.3),  $v \in X$ . Entonces

1. Existe  $s_0 \geq 0$  tal que  $E(v(s_0)) \leq 0$  y  $v(s_0) \neq 0$ ,  $v$  estalla en tiempo finito;
2.  $\frac{d}{ds}E(v(s)) = -I(v(s))$  donde  $I(v(s)) = \int_{\mathbb{R}^N} v_s^2 \rho \, dy$ ;
3. Existe  $M := \lim_{s \rightarrow \infty} E(v(s))$  y, además,  $M = 0$ .

**Definición 4.3.4.** La funcional  $I(v(s))$  de la proposición 4.3.3 es llamada **producción de entropía**.

*Demostración.* Para ver la demostración de la primer propiedad, ver [30]. Para ver la segunda, derivamos a  $E(v(s))$  con respecto a  $s$ , obteniendo que

$$\frac{d}{ds}E(v(s)) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \nabla v \cdot \nabla v_s - \frac{1}{p-1} v v_s - v^p v_s \right] \rho \, dy.$$

Ahora integramos por partes en el primer término de la integral de arriba para escribir la derivada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E(v(s)) &= - \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(\nabla v \rho) v_s \, dy - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{p-1} v v_s + v^p v_s \right] \rho \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} [\Delta v \rho + \nabla v \cdot \nabla \rho] v_s \, dy - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{p-1} v v_s + v^p v_s \right] \rho \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \Delta v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \frac{1}{p-1} v + v^p \right] v_s \rho \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} v_s^2 \rho \, dy = -I(v(s)) \end{aligned}$$

donde en el último paso utilizamos que  $v$  es la solución de (4.3) y la definición de la producción de entropía.

Para probar la tercer propiedad, primero observar que debido a la propiedad 2. tenemos que  $E(v(s))$  es no creciente. Debido a  $0 \leq E(v(s)) \leq E(v(0)) < \infty$ , la existencia del límite está garantizada. Por lo tanto, solamente debemos ver que el límite es igual a cero. Para esta cuestión, notamos que el primer término en la expresión de  $E(v(s))$  tiende a cero cuando  $s \rightarrow \infty$  dado que  $v \in X$ . El segundo término de esta expresión también va a cero cuando  $s \rightarrow \infty$  debido a la

desigualdad (4.4). Para ver el comportamiento del tercer término de la funcional de entropía usamos la desigualdad (4.6) y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p+1} v^{p+1} \rho \, dy \\ &\leq \left[ \frac{e^s}{e^s - 1} \right] \frac{1}{(\lambda^{1-p} - 1)(p^2 - 1)} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \rho \, dy. \end{aligned}$$

La última expresión puede ser acotada para valores grandes de  $s$  como sigue a continuación

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p+1} v^{p+1} \rho \, dy \leq C \frac{1}{(\lambda^{1-p} - 1)(p^2 - 1)} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \rho \, dy,$$

donde  $C$  es una constante positiva. Teniendo en cuenta la última desigualdad, obtenemos que el tercer término de  $E(v(s))$  tiende a cero cuando  $s \rightarrow \infty$ .  $\square$

Ahora, queremos probar el decaimiento de la producción de entropía y, como consecuencia, el decaimiento de la funcional de entropía. Esto será mostrado en la próxima sección.

#### 4.4. Decaimiento de la funcional de entropía

El cálculo de  $\frac{dI(v(s))}{ds}$  es necesario para obtener el decaimiento de la producción de entropía. Escribimos a esta derivada de manera conveniente usando que  $v$  es la solución de la ecuación (4.3). Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(v(s)) &= \int_{\mathbb{R}^N} 2 v_s v_{ss} \rho \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} 2 v_s \left[ \Delta v_s + \frac{y}{2} \cdot \nabla v_s + \frac{v_s}{p-1} + p v^{p-1} v_s \right] \rho \, dy \\ &= \frac{2}{p-1} I(v(s)) - 2 (Lv_s, v_s) + 2p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s^2 \rho \, dy \\ &= -2\gamma I(v(s)) - 2 R(s), \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde  $\gamma$  es la constante positiva definida por  $\gamma = \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}$  y  $R(s)$  es la función dada por

$$R(s) = (Lv_s, v_s)_{L^2_\rho} - \frac{N}{2} \|v_s\|_{L^2_\rho}^2 - p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s^2 \rho \, dy. \tag{4.8}$$



#### 4.4.1. Algunos lemas previos

Necesitamos tener más información acerca de  $R(s)$  que permita sacar alguna conclusión acerca del decaimiento de la producción de entropía. Este es el objetivo de los próximos tres lemas.

**Lema 4.4.1.** Sea  $v \in H_\rho^2$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto. Entonces

$$\int_{\Omega} (vLv - \frac{N}{2} v^2) \rho \, dy \geq 0 .$$

*Demostración.* Observemos que, si  $\mathcal{X}_\Omega$  es la función característica del conjunto  $\Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} vLv \, \rho \, dy &= \int_{\mathbb{R}^N} (vLv) \, \mathcal{X}_\Omega \, \rho \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v \, \mathcal{X}_\Omega (Lv) \, \mathcal{X}_\Omega \, \rho \, dy . \end{aligned}$$

Debido a  $(Lv) \, \mathcal{X}_\Omega = L(v \, \mathcal{X}_\Omega)$  en casi todo punto, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} vLv \, \rho \, dy &= \int_{\mathbb{R}^N} v \, \mathcal{X}_\Omega L(v \, \mathcal{X}_\Omega) \, \rho \, dy \\ &\geq \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (v \, \mathcal{X}_\Omega)^2 \, \rho \, dy \\ &= \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, \mathcal{X}_\Omega \, \rho \, dy \\ &= \frac{N}{2} \int_{\Omega} v^2 \, \rho \, dy, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde la desigualdad en (4.9) es una consecuencia directa de (4.4). A partir del último cálculo queda demostrada la afirmación del lema.  $\square$

**Lema 4.4.2.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  tal que  $\int_{\Omega} f \, dy \geq 0$  para todo conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Entonces,  $f \geq 0$  en casi todo punto en  $\mathbb{R}^N$ .

*Demostración.* Suponemos que  $f$  no es no negativa en casi todo punto, entonces existe un conjunto medible  $\Omega$  tal que  $m(\Omega) > 0$  y  $f < 0$  en  $\Omega$ . Acá,  $m(\Omega)$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$  del conjunto  $\Omega$ . Entonces,

$$\alpha = \int_{\Omega} f \, dy < 0.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un conjunto abierto  $G_n \subset \mathbb{R}^N$  tal que  $\Omega \subset G_n$  y  $m(G_n - \Omega) < \frac{1}{n}$ . Podemos elegir a estos conjuntos abiertos  $G_n$  de manera que la sucesión  $(G_n)_n$  sea decreciente con la inclusión. Entonces, observemos que

$$\begin{aligned} \int_{G_n} f \, dy &= \alpha + \int_{G_n - \Omega} f \, dy \\ &= \alpha + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \, dy \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $\varphi_n = \mathcal{X}_{(G_n - \Omega)} f$ . Es bastante claro que las funciones  $\varphi_n$  son funciones integrables, satisfacen  $|\varphi_n| \leq |f|$  y, además, verifican que  $\varphi_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  en casi todo punto. Entonces, debido al teorema de convergencia dominada, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \, dy = 0.$$

Gracias a la última igualdad deducimos que existe un número natural  $N_0$ , tal que para todo  $n \geq N_0$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \, dy \right| < \frac{|\alpha|}{2}. \quad (4.11)$$

Usando esta desigualdad en (4.10), vemos que esta verifica

$$\begin{aligned} \int_{G_n} f \, dy &\leq \alpha + \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \, dy \right| \\ &< \alpha + \frac{|\alpha|}{2} = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

para todo  $n \geq N_0$ . Esto es, la integral de la función  $f$  sobre los conjuntos abiertos  $G_n$ , para  $n \geq N_0$ , es negativa. Este hecho contradice la hipótesis del lema.  $\square$

El siguiente lema provee una cota de  $R(s)$  en términos de una nueva función no negativa con decaimiento exponencial.

**Lema 4.4.3.** Bajo las mismas hipótesis del teorema de Wang y si además se cumple que  $\lambda < \left[ \frac{3p-1}{\gamma(p-1)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{1-p}}$ , entonces la función  $R(s)$  definida por (4.8) satisface  $R(s) \geq -\frac{1}{2} K(s)$  para cierta función  $K(s)$  que verifica

1.  $K(s) \geq 0$ ,
2. existe una constante  $a > 0$  y un tiempo  $s_1 > 0$ , el cual depende de  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ , tal que

$$K(s) \leq K(s_1) e^{-(2\gamma+a)s}, \quad \text{para } s \geq s_1, \quad y$$

3.  $\int_0^\infty e^{2\gamma s} K(s) ds \leq C$ , para  $C$  una constante positiva adecuada.

*Demostración.* Definimos la función  $K(s)$  como sigue

$$K(s) = 2p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s^2 \rho dy.$$

Es claro que  $K(s)$  es no negativa. Para ver 2., calculamos la derivada de la función  $K(s)$  y la escribimos convenientemente utilizando que es solución de (4.3).

$$\begin{aligned} \frac{dK(s)}{ds} &= 2p \int_{\mathbb{R}^N} [(p-1) v^{p-2} v_s^3 + 2 v^{p-1} v_s v_{ss}] \rho dy \\ &= 2p(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-2} v_s^2 \left( -Lv + \frac{v}{p-1} + v^p \right) \rho dy \\ &\quad + 4p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s \left( -Lv_s + \frac{v_s}{p-1} + p v^{p-1} v_s \right) \rho dy \\ &= \left( 1 + \frac{2}{p-1} \right) K(s) + 2p(3p-1) \int_{\mathbb{R}^N} v^{2p-2} v_s^2 \rho dy \quad (4.12) \\ &\quad - 2p(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-2} v_s^2 Lv \rho dy - 4p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s Lv_s \rho dy. \end{aligned}$$

Para conseguir una cota del segundo de los cuatro términos de (4.12), usamos la desigualdad (4.6) para obtener que

$$2p(3p-1) \int_{\mathbb{R}^N} v^{2p-2} v_s^2 \rho dy \leq \frac{3p-1}{(\lambda^{1-p}-1)(p-1)} \frac{e^s}{e^s-1} K(s). \quad (4.13)$$

Para la cota del tercer término, aplicamos primero los lemas 4.4.1 y 4.4.2 para deducir que  $vLv - \frac{N}{2} v^2 \geq 0$  a.e., recordando que  $v^{p-3} v_s^2 \geq 0$  concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (vLv - \frac{N}{2} v^2) v^{p-3} v_s^2 \rho dy \geq 0.$$

Esta desigualdad conduce rápidamente a una cota del tercer término de (4.12) la cual es un múltiplo de  $K(s)$ .

$$\begin{aligned} 2p(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-2} v_s^2 Lv \rho dy &\geq 2p(p-1) \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s^2 \rho dy \\ &= (p-1) \frac{N}{2} K(s). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Para el último término de (4.12), usamos  $v_s Lv_s - \frac{N}{2} v_s^2 \geq 0$  a.e. (esto se debe a los lemas 4.4.1 y 4.4.2) y  $v^{p-1} \geq 0$ . Obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v_s Lv_s - \frac{N}{2} v_s^2) v^{p-1} \rho dy \geq 0.$$

Esta desigualdad permite acotar al último término de (4.12) por un múltiplo de  $K(s)$  como sigue

$$\begin{aligned} 4p \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s L v_s \rho \, dy &\geq 2p N \int_{\mathbb{R}^N} v^{p-1} v_s^2 \rho \, dy \\ &= N K(s). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Entonces, tomando en cuenta (4.13), (4.14) y (4.15), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dK(s)}{ds} &\leq - \left( N - \frac{2}{p-1} \right) K(s) + \left( 1 - (p-1) \frac{N}{2} \right) K(s) \\ &\quad + \frac{3p-1}{(\lambda^{1-p}-1)(p-1)} \frac{e^s}{e^s-1} K(s) \\ &= -2\gamma K(s) - \mu(s) K(s). \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu(s) &= -1 + (p-1) \frac{N}{2} - \frac{(3p-1)}{(\lambda^{1-p}-1)(p-1)} \frac{e^s}{e^s-1} \\ &= (p-1) \gamma - \frac{(3p-1)}{(\lambda^{1-p}-1)(p-1)} w(s), \end{aligned} \quad (4.16)$$

con  $w(s) = \frac{e^s}{e^s-1}$ . Ahora, debemos probar que  $\mu(s) > 0$  para  $s \geq s_1$ , donde  $s_1$  es un tiempo que depende de  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ . Es claro que, debido a (4.16), es equivalente pedir que para  $w(s) < B$ , donde  $B$  es la constante definida por

$$B = \frac{\gamma (p-1)^2 (\lambda^{1-p}-1)}{3p-1}.$$

Podemos tomar  $s_1 = w^{-1}(\frac{1+B}{2})$  consiguiendo que  $\mu(s) > 0$  para  $s \geq s_1$ , dado que  $B > 1$  debido a la hipótesis del lema. Entonces, una cota de la derivada de  $K(s)$  es obtenida a partir de

$$\frac{dK(s)}{ds} \leq -(2\gamma + a) K(s), \quad s \geq s_1,$$

donde  $a$  es una constante positiva (es posible elegir, por ejemplo,  $a = \frac{\mu(s_1)}{2}$ ). Por lo tanto, a partir de un cierto  $s_1 > 0$ , la función  $K(s)$  tiene una tasa de decaimiento exponencial. Esto es,

$$K(s) \leq K(s_1) e^{-(2\gamma+a)s}. \quad (4.17)$$

Esta afirmación prueba la segunda parte del lema. La última parte del lema puede ser deducida inmediatamente a partir de las partes previas.  $\square$

**4.4.2. Decaimiento de  $I(v(s))$  y de  $E(v(s))$** 

Aplicando el lema anterior a (4.7), obtenemos el decaimiento mencionado para la producción de entropía tal como será probado en el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.4.** Bajo las hipótesis del lema 4.4.3 y si, además,  $I(u_0) < \infty$ , entonces  $I(v(s))$  tiene una tasa de decaimiento exponencial. Más precisamente,

$$I(v(s)) \leq [I(u_0) + C] e^{-2\gamma s}.$$

*Demostración.* A partir de la expresión (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned} e^{2\gamma s} \frac{d}{ds} I(v(s)) + 2\gamma e^{2\gamma s} I(v(s)) &= -2R e^{2\gamma s} \\ \frac{d}{ds} (e^{2\gamma s} I(v(s))) &= -2 e^{2\gamma s} R(s). \end{aligned}$$

Utilizamos ahora el lema 4.4.3, para encontrar una cota en términos de  $K(s)$ , esto es

$$\frac{d}{ds} (e^{2\gamma s} I(v(s))) \leq e^{2\gamma s} K(s).$$

Integrando entre 0 y  $s$  y utilizando la propiedad 3. del lema 4.4.3 obtenemos

$$\begin{aligned} e^{2\gamma s} I(v(s)) - I(v(0)) &\leq \int_0^s e^{2\gamma\sigma} K(\sigma) d\sigma \\ &\leq \int_0^\infty e^{2\gamma\sigma} K(\sigma) d\sigma \leq C. \end{aligned}$$

De la última desigualdad se deduce directamente que

$$I(v(s)) \leq [I(u_0) + C] e^{-2\gamma s}.$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar que la funcional de entropía decae exponencialmente. Esto es lo que se probará en el próximo teorema.

**Teorema 4.4.5.** Bajo las hipótesis del teorema 4.4.4, la funcional de entropía  $E(v(s))$  tiene decaimiento exponencial, esto es,

$$E(v(s)) \leq C e^{-2\gamma s}, \quad \text{para todo } s \geq s_1,$$

para cierto  $s_1 > 0$  el cual depende de  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ , y para cierta constante positiva  $C$  que depende de  $I(u_0)$ ,  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ .

*Demostración.* A partir de 2. de la proposición 4.3.3 y la expresión (4.7), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dE(v(s))}{ds} &= \frac{1}{2\gamma} \frac{dI(v(s))}{ds} + \frac{1}{\gamma} R \\ &\geq \frac{1}{2\gamma} \frac{dI(v(s))}{ds} - \frac{1}{2\gamma} K(s), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde la desigualdad en (4.18) es debido a la cota de  $R(s)$  en términos de  $K(s)$ . Ahora, integrando por partes entre  $s$  y  $b$  en (4.18) y usando la parte 2. del lema 4.4.3 obtenemos

$$\begin{aligned} E(v(b)) - E(v(s)) &\geq \\ &\geq \frac{1}{2\gamma} [I(v(b)) - I(v(s))] - \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{K(s_1)}{2\gamma + a} e^{-(2\gamma+a)s} \right) \Big|_s^b, \end{aligned}$$

for every  $s \geq s_1$ . Tomando límite para  $b \rightarrow \infty$  y usando la parte 3. de la proposición 4.3.3, conseguimos que

$$E(v(s)) \leq \frac{1}{2\gamma} I(v(s)) + \frac{K(s_1)}{2\gamma(2\gamma+a)} e^{-(2\gamma+a)s},$$

para todo  $s \geq s_1$ . Por lo tanto, debido al teorema (4.4.4), se llega al decaimiento anunciado para la funcional de entropía

$$E(v(s)) \leq C e^{-2\gamma s}, \quad \text{para todo } s \geq s_1.$$

□

## 4.5. Comportamiento asintótico de la solución

Para finalizar con la aplicación de este método, debemos obtener una cota de la norma de la solución  $v(s)$  en términos de la entropía  $E(v(s))$  y de la producción de entropía  $I(v(s))$ . Para este propósito definimos la siguiente función  $g(s)$

$$g(s) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2(s) \rho \, dy. \quad (4.19)$$

El siguiente lema provee una cota de la función  $g(s)$  en términos de  $E(v(s))$  y de  $I(v(s))$ , esto es, una cota de la norma de  $v(s)$  en el espacio  $L^2_\rho$ .

**Teorema 4.5.1.** Bajo las hipótesis del teorema (4.4.4) y si, además,  $p > \tilde{p}$ , donde  $\tilde{p}$  está definido por

$$\tilde{p} = \begin{cases} \frac{N}{N-2}, & N = 3, \\ 1 + \frac{4}{N}, & N \geq 4, \end{cases}$$

entonces

1.  $\left(\frac{p-1}{2} N - 2\right) g(s) \leq \frac{1}{2} I(v(s)) + (p+1) E(v(s))$  y
2.  $g(s) \leq C e^{-2\gamma s}$  para todo  $s \geq s_1$ , donde  $s_1$  es un número positivo que depende de  $p, N$  y  $\lambda$ , y  $C$  es cierta constante positiva que depende de  $I(u_0), p, N$  y  $\lambda$ .

*Demostración.* Observemos que la derivada de la función  $g(s)$  satisface

$$g'(s) = \int_{\mathbb{R}^N} v v_s \rho \, dy \quad (4.20)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} v_s^2 \right] \rho \, dy = g(s) + \frac{1}{2} I(v(s)). \quad (4.21)$$

Por otro lado, podemos obtener otra expresión para  $g'(s)$  reemplazando  $v_s$  en (4.20) de acuerdo al problema (4.3) e integrando por partes en el primer término de la integral llegamos a

$$\begin{aligned} g'(s) &= \int_{\mathbb{R}^N} v \left( -Lv + \frac{v}{p-1} + v^p \right) \rho \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( -|\nabla v|^2 + \frac{v^2}{p-1} + v^{p+1} \right) \rho \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( -|\nabla v|^2 + \frac{v^2}{p-1} + \frac{2}{p+1} v^{p+1} \right) \rho \, dy + \\ &\quad + \left( 1 - \frac{2}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} v^{p+1} \rho \, dy \\ &= -2E(v(s)) + \frac{p-1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} v^{p+1} \rho \, dy \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos a  $v^{p+1}$  utilizando la ecuación (4.3), obteniendo que

$$\begin{aligned} g'(s) &= -2E(v(s)) + \frac{p-1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} \left( v v_s + v L v - \frac{v^2}{p-1} \right) \rho \, dy \\ &= -2E(v(s)) + \frac{p-1}{p+1} g'(s) + \frac{p-1}{p+1} (Lv, v) - \frac{1}{p+1} g(s) \end{aligned}$$

de donde deducimos la siguiente igualdad

$$g'(s) = -(p+1) E(v(s)) + \frac{p-1}{2} (Lv, v) - g(s). \quad (4.22)$$

Debido a (4.4), (4.21) y (4.22), tenemos que

$$\left( \frac{p-1}{2} N - 2 \right) g(s) \leq \frac{1}{2} I(v(s)) + (p+1) E(v(s)).$$

Como  $p > \frac{4}{N} + 1$  y usando las cotas de la entropía y la producción de entropía en los teoremas 4.4.4 y 4.4.5, respectivamente, conseguimos

$$g(s) \leq C e^{-2\gamma s} \quad \text{for } s \geq s_1,$$

donde  $C$  es una constante positiva la cual depende de  $N$ ,  $p$ ,  $\lambda$  y  $I(v(0))$ .  $\square$

Gracias a la definición (4.19), podemos deducir el decaimiento de la norma de  $v(s)$  en el espacio  $L_\rho^2$  el cual es el objetivo del siguiente teorema.

**Teorema 4.5.2.** Bajo las hipótesis del teorema 4.5.1, se tiene que

$$\|v(y, s)\|_{L_\rho^2} \leq C e^{-\gamma s}, \quad s \geq s_1,$$

para  $s_1 > 0$  que depende de  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ , y para cierta constante positiva  $C$  que depende de  $I(u_0)$ ,  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ .

Ahora podemos usar nuevamente el cambio de variables (4.2) con el fin de obtener el decaimiento de la solución  $u(x, t)$  de (4.1), consiguiendo el próximo resultado.

**Teorema 4.5.3.** Bajo las hipótesis del teorema 4.5.1, se tiene que

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C (t+1)^{-\frac{N}{4}}, \quad t \geq t_1,$$

para  $t_1 > 0$  que depende de  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ , y para cierta constante positiva  $C$  que depende de  $I(u_0)$ ,  $p$ ,  $N$  y  $\lambda$ .



*Demostración.* Observemos que por el cambio de variables (4.2)

$$\begin{aligned}
\|v(y, s)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (v(y, s))^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (t+1)^{\frac{2}{p-1}} (u(x, t))^2 \frac{dx}{(t+1)^{\frac{N}{2}}} \\
&= e^{(\frac{2}{p-1} - \frac{N}{2})s} \int_{\mathbb{R}^N} (u(x, t))^2 dx \\
&= e^{(-2\gamma + \frac{N}{2})s} \|u(x, t)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

De esta igualdad junto al teorema 4.5.2 llegamos a

$$\begin{aligned}
\|u(x, t)\|_{L^2}^2 &= e^{(2\gamma - \frac{N}{2})s} \|v(y, s)\|_{L^2}^2 \\
&\leq e^{(2\gamma - \frac{N}{2})s} \|v(y, s)\|_{L^p}^2 \\
&\leq C e^{(2\gamma - \frac{N}{2})s} e^{-2\gamma s} = C e^{-\frac{N}{2}s},
\end{aligned}$$

para todo  $s \geq s_1$ . De la última desigualdad podemos deducir que

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C(t+1)^{-\frac{N}{4}},$$

para  $t \geq t_1$  como queríamos ver.  $\square$

**Corolario 4.5.4.** Bajo las hipótesis del teorema 4.5.1 y si  $q \geq 2$ , la norma  $\|u(t)\|_{L^q}$  decae con la siguiente tasa

$$\|u(x, t)\|_{L^q} \sim t^{-\frac{1}{p-1} - \frac{2}{q} \left( \frac{N}{4} - \frac{1}{p-1} \right)}, \quad (4.23)$$

for  $t \geq t_1$ .

*Demostración.* Simplemente se utiliza el teorema de interpolación entre  $L^\infty$  y  $L^2$ , ya que tenemos los decaimientos en estos espacios debido al teorema de Wang 4.2.8 y al teorema 4.5.3.  $\square$

**Observación 4.5.5.** Notar que, si bien el decaimiento de la norma  $\|u\|_{L^q} \sim t^{-\frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)}$  obtenido por Kawanago en [31] es mejor que (4.23) en el caso  $q > 2$  y es el mismo para  $q = 2$ , el resultado obtenido en [31] es válido para  $\frac{N+2}{N} < p < \frac{N+2}{N-2}$  y el resultado obtenido en este capítulo corresponde al rango más amplio  $p > \tilde{p}$ .

**Observación 4.5.6.** El decaimiento obtenido en el teorema 4.5.3 es a partir de un tiempo  $t_1$  en adelante. En el capítulo 5 vamos a conseguir que tal decaimiento sea para todo  $t > 0$  para el caso en que  $u(x, t)$  sea solución de la ecuación  $u_t = \Delta u + f(u)$ , donde la función  $f$  cumple determinadas hipótesis que generalizan el caso  $f(u) = u^p$ . Esto va a ser posible ya que en ese capítulo estudiaremos el signo de  $v_s$  que nos permitirá prescindir de la utilización de la cota de la norma  $\|v(\cdot, s)\|_{L^\infty}$  en la aplicación del método de entropía.

## Capítulo 5

# Comportamiento asintótico de soluciones globales de

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

Estudiamos la existencia de soluciones no negativas de la ecuación de reacción-difusión

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases}$$

y damos condiciones suficientes sobre  $u_0$  y  $f$  para la existencia de solución global del problema. Además, bajo dichas hipótesis, estudiamos la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$  y utilizamos el método de entropía para obtener la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$ .

### 5.1. Introducción

Consideramos el problema parabólico

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $u_0$  es no negativo y no trivial y la función  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . El término  $f(u)$  de la ecuación en (4.1) es usualmente llamado término de reacción. Este

nombre cambia a término de absorción si se pide que  $f(u) \leq 0$ . Un caso más general de la ecuación (4.1), cuando  $f$  depende de  $(x, u, \nabla u)$ , es usado para modelos de convección los cuales aparecieron en el siglo XX para modelar procesos principalmente en física y biología. Con especial aplicación a la mecánica, tecnología, biofísica y ecología. Ver por ejemplo [7, 41].

Tenemos que mencionar dos artículos de Phuoc y Véron [43, 44]. Uno de ellos, [43] contiene el estudio de las propiedades globales y locales de las soluciones de la ecuación de calor pero con absorción superlineal. El segundo [44], más reciente, trata sobre el estudio de una clase de ecuación de calor degenerada con absorción. En estos dos papers los autores aplican la conocida aproximación de Galerkin para obtener la existencia de soluciones y sus propiedades. En este capítulo, utilizamos el método de entropía para deducir el decaimiento en tiempo de la norma de las soluciones en  $L^2$ .

Por un lado, el objetivo principal de este capítulo es obtener la tasa de decaimiento de las soluciones globales  $u(x, t)$  del problema (4.1) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Más específicamente, deducimos que, bajo ciertas condiciones, la solución satisface

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq G^{-1}(-(\lambda^{-p+1} - 1)t)$$

donde  $\lambda$  es una constante entre 0 y 1 y la función  $G$  es tal que el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por otro lado, como mencionamos antes, usamos el método de entropía para deducir que, bajo ciertas hipótesis, la norma en  $L^2$  de  $u(x, t)$  decae con la tasa

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C(t+1)^{-\frac{N}{4}}.$$

La organización de este capítulo es como sigue. En la sección 2 damos algunos preliminares y las hipótesis sobre  $f$  con algunos ejemplos de tal función. Esta sección también contiene la existencia y unicidad de la solución del problema (5.1) y la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}$ . La sección 3 está dedicada a obtener la existencia de supersolución estacionaria. En la última sección aplicamos el método de entropía para deducir el comportamiento asintótico de la solución global pero en la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}$ .

**5.2. Existencia y unicidad de solución.****Cota de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$** **5.2.1. Preliminares**

En primer lugar, el objetivo será dar los resultados necesarios que garanticen la existencia de solución global de (5.1). Para esto, damos algunas definiciones.

**Definición 5.2.1.**  $C_b(\mathbb{R}^N)$  es el espacio de las funciones definidas sobre  $\mathbb{R}^N$  a valores reales, continuas y acotadas.

El siguiente lema es un resultado conocido, el lector puede ver la demostración en [3, 45].

**Lema 5.2.2** ([3, 45]). Supongamos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $\bar{u}(x, t), \underline{u}(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  son acotadas en  $\mathbb{R}^N \times [0, T']$  para todo  $T' < T$ . Si  $\bar{u}(x, 0) \geq \underline{u}(x, 0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \Delta \bar{u} \geq f(\bar{u}), & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ \underline{u}_t - \Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}), & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, T), \end{cases} \quad (5.2)$$

entonces  $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$  para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ . Además, para cualquier  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N)$  con  $\bar{u}(x, 0) \geq \varphi(x) \geq \underline{u}(x, 0)$  en  $\mathbb{R}^N$ , existe una única solución clásica  $u(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  del problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (5.3)$$

con la propiedad  $\bar{u} \geq u \geq \underline{u}$  en  $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ .

**Definición 5.2.3.** Decimos que una función  $\bar{u}$  que satisface  $\bar{u}_t - \Delta \bar{u} \geq f(\bar{u})$  en  $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ , es una **supersolución** de (5.3).

**Definición 5.2.4.** Decimos que una función  $\underline{u}$  que satisface  $\underline{u}_t - \Delta \underline{u} \leq f(\underline{u})$  en  $\mathbb{R}^N \times (0, T)$ , es una **subsolución** de (5.3).

**Definición 5.2.5.** Decimos que una función  $u$  es una **solución clásica** de (5.3) si  $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  y satisface (5.3).

**5.2.2. Hipótesis de  $f$** 

Para garantizar la existencia de solución global para (5.1) debemos ver un resultado análogo al obtenido por Wang (ver [45]) para el caso en que  $f(x, t, u) = |x|^l u^p$ , pero acá se obtiene para  $f(x, t, u) = f(u)$  con  $f$  cumpliendo las condiciones

**Hip 1.**  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continua en  $[0, \infty)$  y dos veces derivable en  $(0, \infty)$ .

**Hip 2.** Existe  $p > 1$  tal que  $f(\lambda t) \leq \lambda^p f(t)$ , para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  y para todo  $t \geq 0$ .

**Hip 3.**  $f' \geq 0$  en  $(0, \infty)$ .

**Hip 4.**  $f'' \geq 0$  en  $(0, \infty)$ .

**Observación 5.2.6.** Notar que **Hip 2** implica que

$$\text{Si } \mu \geq 1 \text{ entonces } f(\mu x) \geq \mu^p f(x) \text{ para todo } x \geq 0.$$

En efecto, basta con tomar  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  y  $t = \mu x$  y luego aplicar **Hip 2**.

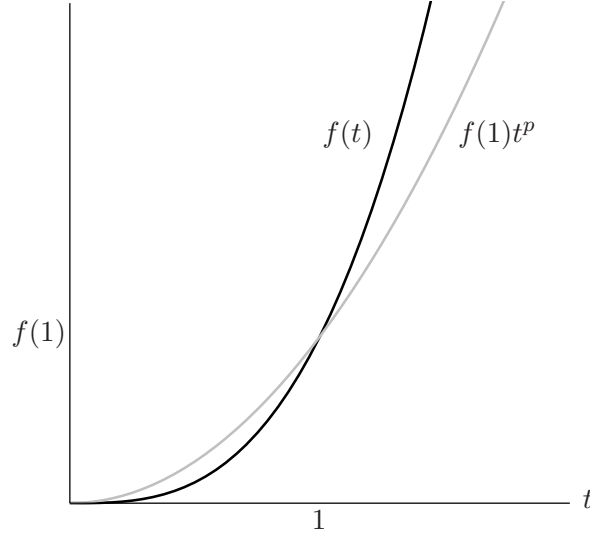
**Observación 5.2.7.** Debido a **Hip 2** y a la observación 5.2.6 se tiene el siguiente comportamiento de  $f$ :

- Para todo  $t \leq 1$  se cumple que  $f(t) \leq f(1)t^p$ .
- Para todo  $t \geq 1$  se cumple que  $f(t) \geq f(1)t^p$ .

En la figura 5.1 pueden verse a las funciones  $f(t)$  y  $f(1)t^p$  en un mismo gráfico.

**Observación 5.2.8.** Si suponemos que  $f$  es continua, se puede verificar fácilmente que **Hip 2** es equivalente a pedir que  $f(0) = 0$  y que la función  $\frac{f(t)}{t^p}$  sea no decreciente. Además, bajo estas condiciones y suponiendo la derivabilidad de  $f(t)$ , se tiene que

$$f'(t) t \geq p f(t). \tag{5.4}$$

Figura 5.1: Gráficos de  $f(t)$  y  $f(1)t^p$ 

En efecto, supongamos que se cumple **Hip 2** y sean  $t_1, t_2 > 0$  tales que  $t_1 < t_2$ , entonces

$$f(t_1) = f\left(\frac{t_1}{t_2} t_2\right) \leq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^p f(t_2).$$

De esta desigualdad deducimos que

$$\frac{f(t_1)}{t_1^p} \leq \frac{f(t_2)}{t_2^p},$$

de donde deducimos que  $\frac{f(t)}{t^p}$  es no decreciente. La condición  $f(0) = 0$  se deduce inmediatamente de **Hip 2** y de la continuidad de  $f$ .

Supongamos ahora que  $f(0) = 0$  y que  $\frac{f(t)}{t^p}$  es no decreciente. Si  $\lambda = 0$  o  $t = 0$  entonces la desigualdad en **Hip 2** es válida por ser  $f(0) = 0$ . Ahora supongamos que  $\lambda \in (0, 1]$  y que  $t > 0$ , entonces  $\lambda t \leq t$  y, por lo tanto,

$$\frac{f(\lambda t)}{(\lambda t)^p} \leq \frac{f(t)}{t^p}.$$

De la última desigualdad obtenemos que  $f(\lambda t) \leq \lambda^p f(t)$ , es decir, se satisface **Hip 2**. Para verificar que se cumple (5.4) calculamos  $\left(\frac{f(t)}{t^p}\right)'$  para todo  $t > 0$ , obteniendo la siguiente expresión

$$\left(\frac{f(t)}{t^p}\right)' = \frac{f'(t)t - pf(t)}{t^{p+1}}.$$

Usando ahora que  $\frac{f(t)}{t^p}$  es no decreciente se prueba la desigualdad (5.4).

**Ejemplos 5.2.9.** Algunos ejemplos de posibles funciones  $f$

- Un ejemplo conocido de función  $f$  es  $f(u) = u^p$ , donde  $p > 1$  y donde el  $p$  que garantiza Hip. 2 es el mismo  $p$  de la definición de  $f$ . Este caso fue tratado por varios autores a partir del famoso paper de Fujita [23], ver [5, 30, 31, 45].
- La función  $f(u) = e^{u^\alpha} - 1$  donde  $\alpha > 1$  y el  $p$  que garantiza Hip. 2 es cualquier valor de  $p$  que cumpla  $1 < p < \alpha$ .
- La función  $f(u) = u^\alpha e^u$  donde  $\alpha > 1$  y el  $p$  que garantiza Hip. 2 es cualquier valor de  $p$  que cumpla  $1 < p < \alpha$ .

### 5.2.3. Decaimiento de la norma $\|u(x, t)\|_{L^\infty}$

El siguiente lema da condiciones bajo las cuales se puede determinar el signo de  $u_t$ .

**Lema 5.2.10.** Consideramos al problema (5.1) donde  $f$  satisface **Hip 1-Hip 4**. Supongamos que  $u$  es una solución clásica sobre  $\mathbb{R}^N \times [0, T)$ . Entonces, si  $u_0$  es una supersolución (respectivamente subsolución) pero no una solución de  $\Delta u + f(u) = 0$ , entonces  $u_t(x, t) < 0$  (respectivamente  $> 0$ ),  $t > 0$ .

*Demostración.* Lo demostramos para el caso en que  $u_0$  es supersolución. Primero usamos el lema 5.2.2 para ver  $u_0 \geq u$ . Para esto, tomamos a  $u_0$  como  $\bar{u}$  del lema ya que es una supersolución de  $\Delta u + f(u) = 0$ . Por otro lado, podemos tomar a la solución  $u$  como  $\underline{u}$ . Por lo tanto, tenemos que  $u_0(x) \geq u(x, t)$ .

Ahora, para  $h > 0$  pequeño, definimos  $u_h(x, t) = u(x, t + h)$ . Entonces,  $u_h$  cumple

$$u_h(x, 0) = u(x, h) \leq u_0(x) = u(x, 0).$$

Como  $u_h$  es solución de  $u_t = \Delta u + f(u)$  entonces podemos tomar a  $u_h$  como  $\underline{u}$  y a  $u$  como  $\bar{u}$ . Por el lema 5.2.2, tenemos que  $u(x, t) \geq u_h(x, t)$  para cada  $h > 0$ . Por lo tanto,  $u_t \leq 0$  si  $t > 0$ , de donde se deduce la desigualdad estricta a partir del principio del máximo fuerte.  $\square$



El teorema siguiente contiene el resultado principal de la sección. En él se deduce la existencia y unicidad de solución del problema (5.1) y, además, el decaimiento de la norma  $\|u(x, t)\|_{L^\infty}$ .

**Teorema 5.2.11.** Consideremos al problema (5.1). Supongamos que  $\psi$  es una supersolución, no negativa y acotada de  $\Delta u + f(u) = 0$ , donde  $f$  satisface **Hip 1-Hip 4**. Si el dato inicial  $0 \leq u_0 \leq \lambda\psi$  para algún  $0 < \lambda < 1$  y  $u_0$  es no trivial, entonces (5.1) tiene una única solución global clásica  $u$  que cumple  $0 \leq u \leq \lambda\psi$  y para todo  $t > 0$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq G^{-1}(-(\lambda^{-p+1} - 1)t), \quad (5.5)$$

donde  $G^{-1}$  es la función inversa de la función estrictamente creciente  $G(s) = \int_a^s \frac{d\tau}{f(\tau)}$  con  $a = \|u_0\|_{L^\infty}$ .

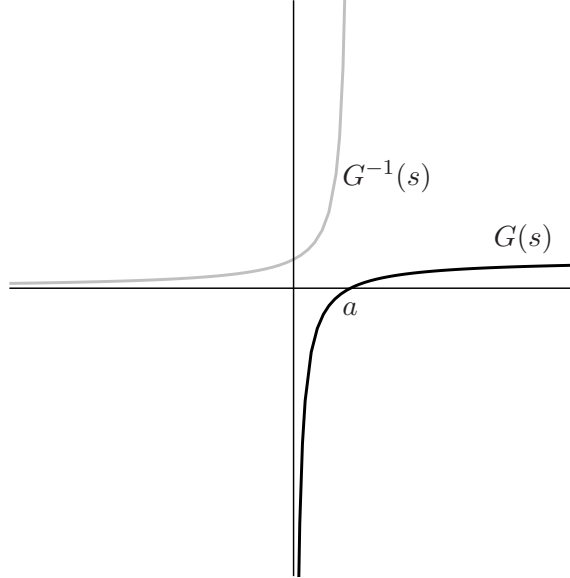
Antes de ver la demostración del teorema 5.2.11, vemos algunas propiedades de la función  $G(s)$  definida arriba.

**Proposición 5.2.12.** Bajo las hipótesis **Hip 1-Hip 4** se tienen las siguientes propiedades de  $G(s)$

1.  $G : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(s) \leq 0$  si  $s \leq a$  y  $G(s) \geq 0$  si  $s \geq a$ .
2.  $G(s) \rightarrow -\infty$  cuando  $s \rightarrow 0^+$ .
3. Existe  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \ell > 0$ .
4.  $G(s)$  es estrictamente creciente.
5.  $G(s)$  es cóncava.

Como para tener una visualización de la gráfica de  $G$  y de su inversa, ver la figura 5.2.

*Demostración.* (Proposición 5.2.12) La definición de  $G$  e **Hip 1** garantizan la validez de 1. Deducimos 4. y 5. de **Hip 1**, **Hip 3** y de las expresiones  $G'(s) = \frac{1}{f(s)}$

Figura 5.2: Gráficos de  $G$  y  $G^{-1}$ 

y  $G''(s) = -\frac{f'(s)}{(f(s))^2}$ . Para ver 2., sea  $s > 0$  chico y supongamos además que  $s < a$  y  $s < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_a^s \frac{d\tau}{f(\tau)} \\ &= -\int_s^1 \frac{d\tau}{f(\tau)} + G(1) \\ &\leq -\int_s^1 \frac{d\tau}{f(1)\tau^p} + G(1). \end{aligned}$$

De la última desigualdad deducimos que

$$G(s) \leq \left[ \frac{1 - s^{-p+1}}{f(1)(p-1)} + G(1) \right] \rightarrow -\infty \quad \text{cuando } s \rightarrow 0^+.$$

Para probar 3., sea  $s$  tal que  $s > 1$  y  $s > a$ , entonces

$$\begin{aligned} G(s) &= G(1) + \int_1^s \frac{d\tau}{f(\tau)} \\ &\leq G(1) + \int_1^s \frac{d\tau}{f(1)\tau^p}, \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$0 \leq G(s) \leq \left( G(1) + \frac{1 - s^{-p+1}}{f(1)(p-1)} \right) \rightarrow \left( G(1) + \frac{1}{f(1)(p-1)} \right),$$

cuando  $s \rightarrow \infty$ . De la última expresión y del hecho de ser  $G$  creciente tenemos probado 3.  $\square$

**Observación 5.2.13.** Observemos que  $[-(\lambda^{-p+1} - 1)t] \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y, por lo tanto, por las propiedades de  $G$  en (5.5) tenemos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq G^{-1}(-(\lambda^{-p+1} - 1)t) \rightarrow 0, \quad \text{para } t \rightarrow \infty.$$

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 5.2.11.

*Demostración. (teorema 5.2.11)* Primero veamos que  $\lambda\psi$  es una supersolución de (5.1) usando las hipótesis sobre  $\psi$ . Para esto vemos la siguiente desigualdad donde hemos utilizado **Hip 2** y que  $p > 1$

$$\begin{aligned} (\lambda\psi)_t - \Delta(\lambda\psi) - f(\lambda\psi) &= -\lambda\Delta\psi - f(\lambda\psi) \\ &\geq -\lambda\Delta\psi - \lambda^p f(\psi) \\ &> -\lambda(\Delta\psi + f(\psi)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

de donde deducimos que  $\lambda\psi$  es supersolución como queríamos ver. La existencia global y la unicidad se siguen del lema 5.2.2 con  $\bar{u} = \lambda\psi$  y  $\underline{u} = 0$ . Sólo resta entonces demostrar (5.5). Observemos primero que es suficiente probarlo para el caso en que  $u_0 = \lambda\psi$  pues en otro caso, se usa el principio de comparación del lema 5.2.2 y se tiene (5.5).

Para probarlo, consideramos la función  $w = u_t + \delta f(u)$  con  $\delta > 0$  a determinar (la función  $w$  es similar a las usadas en [22, 45] por Friedman-McLeod y Wang respectivamente). Por un lado, usando que  $u_0 = \lambda\psi$ , **Hip 2** y que  $\psi$  es supersolución de  $\Delta u + f(u) = 0$ , se deduce que

$$\begin{aligned} w|_{t=0} &= [u_t + \delta f(u)]|_{t=0} \\ &= [\Delta u + (1 + \delta)f(u)]|_{t=0} \\ &= \Delta(\lambda\psi) + (1 + \delta)f(\lambda\psi) \\ &\leq \lambda\Delta\psi + (1 + \delta)\lambda^p f(\psi) \\ &\leq -\lambda f(\psi) + (1 + \delta)\lambda^p f(\psi) \\ &= \lambda f(\psi) [-1 + (1 + \delta)\lambda^{p-1}] \end{aligned} \tag{5.6}$$

Si se pide que  $\delta = \lambda^{-p+1} - 1$ , entonces en (5.6) se puede concluir que

$$w|_{t=0} = 0. \quad (5.7)$$

Por otro lado, al calcular  $w_t - \Delta w$  se obtiene que

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= u_{tt} + \delta f'(u)u_t - \Delta u_t - \delta \Delta f(u) \\ &= \Delta u_t + f'(u)u_t + \delta f'(u)u_t - \Delta u_t \\ &\quad - \delta \left[ f''(u) |\nabla u|^2 + f'(u) \Delta u \right] \\ &= f'(u)u_t + \delta f'(u)u_t - \delta f''(u) |\nabla u|^2 - \delta f'(u) \Delta u \\ &= f'(u)w - \delta f''(u) |\nabla u|^2 \\ &\leq f'(u)w. \end{aligned}$$

Por el lema 5.2.10, se deduce que  $u_t \leq 0$  y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} w &\leq \delta f(u) \\ &\leq \delta f(\lambda\psi) \\ &\leq \delta f(\psi), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a **Hip 3**. Además se tiene que

$$\begin{aligned} f'(u) &\leq f'(\lambda\psi) \\ &\leq f'(\psi), \end{aligned}$$

debido a **Hip 4**. Entonces, de lo anterior y por un principio de tipo Phragmén-Lindelöf (ver por ejemplo [45], lema 1.3) se obtiene que  $w \leq 0$ . Esto es,

$$u_t + \delta f(u) \leq 0.$$

De esta última desigualdad se deduce que

$$\begin{aligned} \int_0^s \left( \frac{u_t}{f(u)} + \delta \right) dt &\leq 0 \\ \int_0^s \left[ \frac{d}{dt} (G(u(x, t)) + \delta t) \right] dt &\leq 0, \end{aligned}$$

de donde se llega a que

$$\begin{aligned} G(u(x, t)) &\leq G(u_0(x)) - \delta t \\ G(u(x, t)) &\leq -\delta t. \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que  $u_0(x) \leq a$  y a las propiedades de  $G$ . Utilizando ahora que  $G^{-1}$  es creciente se deduce que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq G^{-1}(-(\lambda^{-p+1} - 1)t),$$

quedando demostrado (5.5).  $\square$

**Observación 5.2.14.** Notemos que para el caso  $f(u) = u^p$  tenemos que  $G(s) = \frac{a^{-p+1} - s^{-p+1}}{p-1}$  y, por lo tanto,  $G^{-1}(s) = [-(p-1)s + a^{-p+1}]^{\frac{-1}{p-1}}$ . De esta manera, se obtiene el conocido decaimiento  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq [(\lambda^{1-p} - 1)(p-1)t]^{-\frac{1}{p-1}}$  (ver [45]).

**Proposición 5.2.15.** Supongamos que  $a = \|u_0\|_{L^\infty} \leq 1$ . Si la función  $f$  satisface la hipótesis adicional

$$\text{existen } q > p \text{ y } C > 0 \text{ tales que } C t^q \leq f(t) \text{ para } 0 \leq t \leq 1,$$

entonces, para  $t \geq \frac{1}{(\lambda^{-p+1} - 1)C(q-1)}$ , se tiene que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ((\lambda^{-p+1} - 1)C(q-1))^{-\frac{1}{q-1}} t^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (5.8)$$

*Demostración.* En efecto, sea  $s < 1$ , entonces

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_a^s \frac{1}{f(\tau)} d\tau \\ &= G(1) - \int_s^1 \frac{1}{f(\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Como  $a \leq 1$  entonces  $G(1) \geq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} G(s) &\geq - \int_s^1 \frac{1}{C\tau^q} d\tau \\ &= -\frac{1}{C(1-q)} (1 - s^{1-q}) \\ &\geq -\frac{1}{C(q-1)} s^{1-q}. \end{aligned}$$

De esta última desigualdad y usando que  $G^{-1}$  es creciente, podemos deducir que

$$G^{-1}(-\theta) \leq (C(q-1)\theta)^{\frac{1}{1-q}}, \quad \text{para } \theta > \frac{1}{C(q-1)}.$$

Finalmente, si usamos la desigualdad anterior en (5.5), llegamos a (5.8).  $\square$

**Observación 5.2.16.** Aplicamos el resultado de la proposición anterior a dos de las funciones ejemplo que venimos mencionando.

- Cuando  $f(u) = e^{u^\alpha} - 1$ , se cumple la hipótesis adicional con  $C = 1$  y  $q = \alpha$  y, por lo tanto, para  $t \geq \frac{1}{(\lambda^{-p+1}-1)(\alpha-1)}$  se tiene que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ((\lambda^{-p+1} - 1)(\alpha - 1))^{-\frac{1}{\alpha-1}} t^{-\frac{1}{\alpha-1}} .$$

- Cuando  $f(u) = u^\alpha e^u$  también se pueden tomar  $C = 1$  y  $q = \alpha$  obteniendo el mismo decaimiento que se obtuvo en el caso anterior.

Hasta el momento tenemos garantizada la existencia de solución global de (5.1) bajo ciertas condiciones para la función  $f$  y, además, obtuvimos una cota para  $\|u\|_{L^\infty}$ . Esto fue hecho utilizando la existencia de una supersolución estacionaria de  $u_t = \Delta u + f(u)$ . En la siguiente sección, damos condiciones suficientes para la existencia de dicha supersolución.

### 5.3. Existencia de supersolución estacionaria

Con el objeto de mostrar que para una función  $f$  que satisface **Hip 1-Hip 4** se tiene garantizada la existencia de una supersolución estacionaria de  $u_t = \Delta u + f(u)$ , recordemos el siguiente resultado de Fowler [21] sobre existencia de soluciones estacionarias regulares de  $u_t = \Delta u + u^p$ , es decir, soluciones de la ecuación de Lane-Emden

$$\Delta u + u^p = 0 . \tag{5.9}$$

**Teorema 5.3.1** ([21], 1930). Si  $p > \frac{N+2}{N-2}$  y  $N \geq 3$ , existe una familia  $(u_\alpha)_{\alpha>0}$  de soluciones regulares, positivas y radiales de (5.9) que satisface

1.  $u_\alpha(r)$  es decreciente en  $r$ , donde  $r = |x|$ ;
2.  $r^{2/(p-1)}u_\alpha(r) \rightarrow L$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , donde

$$L = \left[ \frac{2(N-2)}{(p-1)^2} \left( p - \frac{N}{N-2} \right) \right] ;$$

3.  $u_\alpha(0) = \alpha$ .

Utilizamos este resultado para deducir la existencia de supersolución estacionaria de  $u_t = \Delta u + f(u)$ .

**Corolario 5.3.2.** Sea  $f$  una función que satisface **Hip 1-Hip 4** y, además,  $f(1) \leq 1$ . Sea  $p$  el parámetro que corresponde a la **Hip 2** tal que  $p > \frac{N+2}{N-2}$  con  $N \geq 3$ . Existe, al menos, una supersolución estacionaria  $u_\infty$  regular, positiva y radial de  $u_t = \Delta u + f(u)$  que satisface

1.  $u_\infty(r)$  es decreciente en  $r$ , donde  $r = |x|$ ;
2.  $r^{2/(p-1)}u_\infty(r) \rightarrow L$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ;
3.  $u_\infty(0) = 1$

*Demostración.* Definimos  $u_\infty(|x|) := u_1(|x|)$  donde  $u_1$  es como en teorema 5.3.1. Sólo debemos verificar que  $u_\infty$  es supersolución estacionaria ya que, claramente,  $u_\infty$  satisface 1., 2. y 3. del enunciado.

De la condiciones 1. y 3., tenemos que  $\|u_\infty\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1$ . Entonces, por **Hip 2**, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta u_\infty + f(u_\infty) &\leq \Delta u_\infty + u_\infty^p f(1) \\ &\leq \Delta u_\infty + u_\infty^p \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Observación 5.3.3.** ¿Qué ocurre con las funciones ejemplo que habíamos mencionado antes?

- Para la función  $f(u) = u^p$  donde  $p > 1$ , con la restricción suplementaria  $p > \frac{N+2}{N-2}$ .
- En lugar de la función  $f(u) = e^{u^\alpha} - 1$  donde  $\alpha > 1$ , podemos considerar  $f(u) = \frac{e^{u^\alpha} - 1}{e - 1}$  con la restricción adicional  $\alpha > \frac{N+2}{N-2}$ .
- En lugar de la función  $f(u) = u^\alpha e^u$  donde  $\alpha > 1$ , podemos considerar  $f(u) = u^\alpha e^{u-1}$  con la restricción suplementaria  $\alpha > \frac{N+2}{N-2}$ .

### 5.4. Método de entropía. Decaimiento de $\|u\|_{L^2}$

En esta sección utilizaremos el método de la entropía para obtener el decaimiento de la  $\|u\|_{L^2}$ . Para esto necesitaremos una hipótesis adicional sobre la función de reacción  $f(t)$ . Lo que pedimos es la subhomogeneidad de la derivada de  $f$ , es decir

**Hip 5.** Para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  y para todo  $t \geq 0$  se cumple que  $f'(\lambda t) \leq \lambda^{p-1} f'(t)$ , donde  $p$  es el mismo de **Hip 2**.

**Observación 5.4.1.** Así como **Hip 2** generó ciertas desigualdades para la función  $f$ , la hipótesis anterior garantiza las siguientes propiedades de  $f'$  que serán usadas en los resultados siguientes.

- Para todo  $\mu \geq 1$  y para todo  $t \geq 0$  se cumple que  $f'(\mu t) \geq \mu^{p-1} f'(t)$ .
- Si  $t \leq 1$  entonces  $f'(t) \leq f'(1)t^{p-1}$ .  
Si  $t \geq 1$  entonces  $f'(t) \geq f'(1)t^{p-1}$ .
- La función  $\frac{f'(t)}{t^{p-1}}$  es no decreciente y, por lo tanto,

$$f''(t)t \geq (p-1)f'(t).$$

**Observación 5.4.2.** Las funciones ejemplo satisfacen **Hip 5**.

#### 5.4.1. Cambio de variables. Nuevo problema

Usamos el cambio de variables que fue utilizado en el capítulo 4 para el caso en que  $f(u) = u^p$ , este es

$$\begin{aligned} v(y, s) &= (t+1)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t), \\ x = (t+1)^{1/2} y \quad y \quad t = e^s - 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Entonces,  $v(y, s)$  resulta ser solución del problema

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v), & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = v_0, & y \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5.11}$$



Notar que el dato inicial del problema (5.11) es igual al dato inicial del problema (5.1), esto es  $u_0 = v_0$ . Observemos que la ecuación en (5.11) puede escribirse en la forma

$$v_s = -Lv + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v) ,$$

donde  $L$  es el operador autoadjunto dado por  $Lv = -\Delta v - \frac{y}{2} \cdot \nabla v$ . Recordemos que por el teorema 4.2.5, tenemos que se cumple la desigualdad

$$\frac{N}{2} \|v\|_{L^2_p} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \rho \, dy . \quad (5.12)$$

Ahora nuestra intención es obtener el signo de  $v_s$  para poder utilizarlo cuando definamos la funcional de entropía. Para esto veamos los siguientes lemas.

**Lema 5.4.3.** A partir de la consideración de los problemas (5.1) y (5.11) se tiene que

1.  $\bar{u}$  es una supersolución de (5.1) sii  $\bar{v}$  es una supersolución de (5.11), donde  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  se obtienen una de la otra por medio del cambio de variables (5.10).
2.  $\underline{u}$  es una subsolución de (5.1) sii  $\underline{v}$  es una subsolución de (5.11), donde  $\underline{u}$  y  $\underline{v}$  se obtienen una de la otra por medio del cambio de variables (5.10).

*Demostración.* Para demostrarlo utilizar el cambio de variables (5.10) y las definiciones de sub y supersolución de una ecuación.  $\square$

Ahora veremos un lema análogo al lema 5.2.2 pero para el problema (5.11), esto es, un criterio de comparación para dicho problema.

**Lema 5.4.4.** Supongamos que  $f$  satisface **Hip 1** e **Hip 3**,  $\bar{v}(y, 0) \geq \underline{v}(y, 0)$  y que  $\bar{v}(y, s)$  y  $\underline{v}(y, s)$  son super y subsolución de (5.11) respectivamente. Entonces  $\bar{v}(y, s) \geq \underline{v}(y, s)$  para todo  $(y, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ . Además para cualquier  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N)$  con  $\bar{v}(y, 0) \geq \varphi(y) \geq \underline{v}(y, 0)$  en  $\mathbb{R}^N$ , existe una única solución  $v(y, s)$  del problema (5.11) con la propiedad  $\bar{v} \geq v \geq \underline{v}$  en  $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ .

*Demostración.* Por el lema anterior,  $\bar{u}(x, t) = (t+1)^{-\frac{1}{p-1}} \bar{v}(y, s)$  donde  $x$  y  $t$  se definen según (5.10), es supersolución de (5.1). De la misma manera,  $\underline{u}(x, t) = (t+1)^{-\frac{1}{p-1}} \underline{v}(y, s)$  es subsolución de (5.1).

Además,  $\bar{u}(x, 0) = \bar{v}(y, 0) \geq \underline{v}(y, 0) = \underline{u}(x, 0)$ . Entonces por el lema 5.2.2 tenemos que  $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$  para todo  $(x, t)$ , de donde por el cambio de variables deducimos que

$$\begin{aligned} (t+1)^{-\frac{1}{p-1}} \bar{v}(y, s) &\geq (t+1)^{-\frac{1}{p-1}} \underline{v}(y, s) \\ \bar{v}(y, s) &\geq \underline{v}(y, s), \end{aligned}$$

como queríamos ver. Ahora supongamos que tenemos  $\varphi$  tal que  $\bar{v}(y, 0) \geq \varphi(y) \geq \underline{v}(y, 0)$ . Entonces usando otra vez el cambio de variables vemos que  $\varphi$  también cumple que  $\bar{u}(x, 0) \geq \varphi(x) \geq \underline{u}(x, 0)$ . Por el lema 5.2.2 sabemos que existe un única solución  $u(x, t)$  de

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.13)$$

con la propiedad

$$\bar{u}(x, t) \geq u(x, t) \geq \underline{u}(x, t) \quad \text{para todo } (x, t). \quad (5.14)$$

Si definimos  $v(y, s) = (t+1)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t)$  entonces  $v$  resulta ser solución de

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v), & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = \varphi, & y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

y cumple que  $\bar{v}(y, s) \geq v(y, s) \geq \underline{v}(y, s)$  para todo  $(y, s)$ . Además,  $v$  debe ser única pues en otro caso tendríamos otra solución  $u(x, t)$  de (5.13) que cumpla (5.14).  $\square$

El siguiente lema da condiciones bajo las cuales se puede determinar el signo de  $v_s$ .

**Lema 5.4.5.** Consideramos al problema (5.11) donde  $f$  satisface **Hip 1-Hip 4**. Supongamos que  $v$  es una solución clásica sobre  $\mathbb{R}^N \times [0, T)$ . Entonces, si  $v_0$  es una supersolución pero no una solución de

$$\Delta v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v) = 0,$$

entonces  $v_s(y, s) < 0, s > 0$ .

*Demostración.* Primero usamos el lema 5.4.4 para ver que  $v_0 \geq v$ . Para esto, tomamos a  $v_0$  como  $\bar{v}$  del lema ya que es una supersolución continua débil de  $\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v) = 0$ . Por otro lado, podemos tomar a la solución  $v$  como  $\underline{v}$ . Por lo tanto, tenemos que  $v_0(y) \geq v(y, s)$ .

Ahora, para  $h > 0$  pequeño, definimos  $v_h(y, s) = v(y, s + h)$ . Entonces,  $v_h$  cumple

$$v_h(y, 0) = v(y, h) \leq v_0(y) = v(y, 0).$$

Veamos ahora que  $v_h$  es subsolución de (5.11), es decir, debemos ver que

$$\Delta v_h + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v_h + \frac{v_h}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v_h) \geq (v_h)_s.$$

Empezamos calculando el lado izquierdo de la última desigualdad

$$\begin{aligned} & \Delta v_h(y, s) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v_h(y, s) + \frac{v_h(y, s)}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v_h(y, s)) = \\ &= \Delta v(y, s + h) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v(y, s + h) + \frac{v(y, s + h)}{p-1} + \\ & \quad + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v(y, s + h)) \\ &= \Delta v(y, s + h) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v(y, s + h) + \frac{v(y, s + h)}{p-1} + \\ & \quad + e^{\frac{p}{p-1}(s+h)} e^{-\frac{p}{p-1}h} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v(y, s + h)). \end{aligned}$$

Si usamos **Hip 2** tenemos que

$$\begin{aligned} & \Delta v(y, s + h) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v(y, s + h) + \frac{v(y, s + h)}{p-1} + \\ & \quad + e^{\frac{p}{p-1}(s+h)} e^{-\frac{p}{p-1}h} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v(y, s + h)) \\ & \geq \Delta v(y, s + h) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v(y, s + h) + \frac{v(y, s + h)}{p-1} + \\ & \quad + e^{\frac{p}{p-1}(s+h)} f(e^{-\frac{s+h}{p-1}}v(y, s + h)) \\ & = v_s(y, s + h) = (v_h)_s(y, s), \end{aligned}$$

con lo cual queda probado que  $v_h$  es subsolución como queríamos ver. En consecuencia se puede aplicar el lema 5.4.4 con  $v_h = \underline{v}$  y  $v = \bar{v}$ . Entonces, por dicho lema, tenemos que  $v(y, s) \geq v_h(y, s) = v(y, s + h)$  para cada  $h > 0$  chico. Por lo tanto,  $v_s \leq 0$  si  $s > 0$ , de donde se deduce la desigualdad estricta a partir del principio del máximo fuerte.  $\square$

Desde ahora en adelante, trabajaremos en el conjunto de soluciones  $v$  de (5.11) tales que  $v \in X$ , con

$$X = \left\{ f \in H_\rho^1 \cap L^\infty / f \geq 0 \text{ y } \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(s)|^2 \rho \, dy = 0 \right\}.$$

Además, para garantizar la existencia de supersolución estacionaria, suponemos que  $f(1) \leq 1$  y  $p > \frac{N+2}{N-2}$  con  $N \geq 3$ .

### 5.4.2. Descripción de los pasos del método

En este caso, la aplicación del método, nos llevará a seguir los siguientes pasos.

- Definir una **funcional de entropía**  $E(v(s))$  adecuada para la ecuación (4.3) y estudiar sus propiedades. La funcional de entropía que definiremos generalizará a la utilizada en el caso  $f(u) = u^p$ .
- Calcularemos la derivada de la entropía la cual cumplirá que

$$\frac{d}{ds} E(v(s)) \geq -I(v(s)),$$

para cierta funcional positiva  $I(v(s))$  a la que llamaremos **producción de entropía**.

- Calcular la derivada de la producción de entropía y obtener una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{d}{ds} I(v(s)) = -C I(v(s)) - R(s),$$

para cierta constante  $C > 0$  y cierta función  $R(s)$ .

- Probar las propiedades de  $R(s)$  que nos permitan obtener un decaimiento exponencial de  $I(v(s))$ ,

$$I(v(s)) \leq A e^{-Cs}.$$

- Obtener la misma tasa de decaimiento para  $E(v(s))$  a partir de los items previos, más específicamente

$$E(v(s)) \leq B e^{-Cs}, \text{ para } s \geq 0.$$

Notar que aquí, a diferencia de lo hecho en el capítulo 4, conseguiremos que el decaimiento para  $E$  sea para todo tiempo  $s \geq 0$ .

- A partir de una cota de  $\|v\|_{L^2_\rho}$  en términos de la entropía, llegar a la conclusión sobre el decaimiento de la norma mencionada.

### 5.4.3. Funcional de Entropía

A diferencia de lo que nos pasaba para el caso particular  $f(u) = u^p$  (ver capítulo 4), para este caso no conocíamos una funcional de Lyapunov que pudiésemos utilizar como candidata a funcional de entropía. A continuación definimos la funcional de entropía para este caso más general.

**Definición 5.4.6.** Para cada  $v \in H^1_\rho$  tal que  $vf(v) \in L^1_\rho$  la **funcional de entropía** está definida por

$$E(v(s)) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{1}{2(p-1)} v^2 - \frac{v}{p+1} f(v) \right] \rho \, dy$$

donde  $\rho(y) = \exp(|y|^2/4)$ .

**Observación 5.4.7.** Notar que si calculamos  $E$  para el caso particular en que  $f(u) = u^p$  obtenemos la misma funcional de entropía utilizada en el capítulo 4 para dicho caso.

**Observación 5.4.8.** Se puede pedir que  $v \in H^1_\rho \cap L^{p+1}_\rho$  para garantizar que se pueda definir  $E(v(s))$ , ya que si  $v \in L^{p+1}_\rho$  entonces se satisface  $vf(v) \in L^1_\rho$ . Esto se debe a que

$$\begin{aligned} v(s)f(v(s)) &= v(s)f\left(\frac{v(s)}{v(0)}v(0)\right) \\ &\leq v(s)\left(\frac{v(s)}{v(0)}\right)^p f(v(0)) \\ &= \frac{f(v(0))}{v(0)^p} (v(s))^{p+1} \end{aligned} \tag{5.15}$$

donde la desigualdad en (5.15) se debe a **Hip 2** y al lema 5.4.5.

**Proposición 5.4.9.** Supongamos que  $f$  satisface **Hip 1-Hip 4**. Sean  $v_0 \in H_\rho^1 \cap L^\infty$ ,  $v_0 \geq 0$ ,  $E(v_0) < \infty$  y  $v = v(y, s)$  la solución global de (5.11),  $v \in X$ . Supongamos, además, que  $v_0$  es una supersolución pero no una solución de

$$\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v) = 0$$

y que  $f'(\|v_0\|_{L^\infty}) < \gamma$  siendo  $\gamma = \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1} > 0$ . Entonces

1.  $E(v(s)) \geq \left[ \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{p+1} \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right] \|v\|_{L_\rho^2}^2 > 0$ ;
2.  $\frac{d}{ds}E(v(s)) \geq -I(v(s))$  donde  $I(v(s)) = \int_{\mathbb{R}^N} v_s^2 \rho \, dy \geq 0$ ;
3. Existe  $M := \lim_{s \rightarrow \infty} E(v(s))$  y, además  $M = 0$ .

**Definición 5.4.10.** A la funcional  $I(v(s))$  de arriba la llamamos **producción de entropía**.

*Demostración.* Para probar 1. primero se obtiene la siguiente cota que se deduce del lema 5.4.5

$$\begin{aligned} f(v(s)) &\leq \frac{f(v(0))}{(v(0))^p} (v(s))^p \\ &\leq \frac{f(v(0))}{v(0)} v(s). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si se acota la expresión de  $E(v(s))$  utilizando (5.16) y la desigualdad (5.12) se deduce que

$$\begin{aligned} E(v(s)) &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{N}{2} \|v\|_{L_\rho^2}^2 \right) - \frac{1}{2(p-1)} \|v\|_{L_\rho^2}^2 - \frac{1}{p+1} \frac{f(v(0))}{v(0)} \int v^2 \rho \, dy \\ &= \left[ \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{p+1} \frac{f(v(0))}{v(0)} \right] \|v\|_{L_\rho^2}^2. \end{aligned}$$

A partir de la convexidad de  $f$  tenemos que  $\frac{f(v(0))}{v(0)} \leq f'(v(0)) \leq f'(\|v_0\|_{L^\infty}) < \gamma$  y, por lo tanto,  $\left[ \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{p+1} \frac{f(v(0))}{v(0)} \right] > 0$  quedando demostrado 1.

Para demostrar 2., calculamos la derivada de la entropía respecto de  $s$

$$\begin{aligned} \frac{dE(v(s))}{ds} &= \int \left[ \nabla v \cdot \nabla v_s - \frac{v v_s}{p-1} - \frac{v_s f(v) + v f'(v) v_s}{p+1} \right] \rho \, dy \\ &= - \int v_s \operatorname{div}(\rho \nabla v) \, dy - \int \left[ \frac{v v_s}{p-1} + \frac{v_s f(v) + v f'(v) v_s}{p+1} \right] \rho \, dy \end{aligned}$$

Calculando la divergencia en la primer integral y usando que  $\nabla\rho = \frac{1}{2}y\rho$  llegamos a

$$\frac{dE(v(s))}{ds} = - \int \left[ \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v \right] v_s \rho \, dy - \int \left[ \frac{vv_s}{p-1} + \frac{v_s f(v) + v f'(v) v_s}{p+1} \right] \rho \, dy$$

Por otro lado, por (5.4) tenemos que

$$\begin{aligned} f(v) + v f'(v) &\geq f(v) + p f(v) \\ \frac{f(v) + v f'(v)}{p+1} &\geq f(v). \end{aligned}$$

Como además, por **Hip 2**,  $f(v) \geq e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v)$ , podemos deducir que

$$\frac{f(v) + v f'(v)}{p+1} \geq e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v).$$

Teniendo en cuenta el signo de  $v_s$  y a esta última desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dE(v(s))}{ds} &\geq - \int \left[ \Delta v + \frac{y}{2} \cdot \nabla v \right] v_s \rho \, dy \\ &\quad - \int \left[ \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v) \right] v_s \rho \, dy \\ &= - \int v_s^2 \rho \, dy \\ &= -I(v(s)) \end{aligned}$$

Para probar 3., analicemos cada uno de los términos de la funcional de entropía. El primer término de  $E(v(s))$  tiende a 0 cuando  $s \rightarrow \infty$  pues  $v \in X$ . Debido a (5.12) el segundo término se puede acotar por un múltiplo del primero de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2(p-1)} \int v^2 \rho \, dy \\ &\leq \frac{1}{(p-1)N} \int |\nabla v|^2 \rho \, dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Para el tercer término, utilizamos (5.15) para conseguir la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{p+1} \int v f(v) \rho \, dy \\ &\leq \frac{1}{p+1} \int \frac{f(v(0))}{(v(0))^p} (v(s))^{p+1} \rho \, dy \\ &\leq \frac{f(v(0))}{(p+1)v(0)} \int (v(s))^2 \rho \, dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe al lema 5.4.5.  $\square$

#### 5.4.4. Decaimiento de la funcional de entropía

Para simplificar la notación de los cálculos que siguen, definimos a la función  $g(s)$  por

$$g(s) = e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v).$$

Con esta notación, la ecuación del problema con el cambio de variable, puede escribirse de la siguiente manera

$$v_s = -Lv + \frac{v}{p-1} + g(s).$$

Se necesita calcular  $\frac{dI(v(s))}{ds}$  para obtener el decaimiento de la producción de entropía. Escribimos a esta derivada de manera conveniente usando que  $v$  es solución de la ecuación (5.11). Ésta es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(v(s)) &= \int_{\mathbb{R}^N} 2 v_s v_{ss} \rho \, dy \\ &= \frac{2}{p-1} I(v(s)) - 2 (Lv_s, v_s) + 2 \int v_s g'(s) \rho \, dy \\ &= -2\gamma I(v(s)) - 2 (Lv_s, v_s) + N \|v_s\|_{L^2_\rho}^2 + 2 \int v_s g'(s) \rho \, dy \\ &= -2\gamma I(v(s)) - 2 R(s), \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $\gamma$  es la constante positiva definida en Proposición 5.4.9 y  $R(s)$  es la función definida por

$$R(s) = (Lv_s, v_s)_{L^2_\rho} - \frac{N}{2} \|v_s\|_{L^2_\rho}^2 - \int v_s g'(s) \rho \, dy. \quad (5.18)$$

Necesitamos tener más información sobre  $R(s)$  que nos permita sacar alguna conclusión acerca del decaimiento de la producción de entropía. El próximo lema da una cota de  $R(s)$  en términos de una nueva función que es no negativa.

**Lema 5.4.11.** Supongamos que se cumplen **Hip 1-Hip 5** y supongamos que  $v_0 \geq 0$  es una supersolución estacionaria pero no una solución de

$$\Delta v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v) = 0$$

y que  $f'(\|v_0\|_{L^\infty}) < \min \left\{ 1, \left[ \frac{N(p-1)-2}{2(p+\sqrt{3})} \right]^2 \right\}$ , entonces la función  $R(s)$  definida por (5.18) satisface  $R(s) \geq -K(s)$  para cierta función  $K(s)$  que cumple



1.  $K(s) \geq 0$ ,
2. Existe una constante  $\mu > 0$  la cual depende de  $p$ ,  $N$  y  $\|v_0\|_{L^\infty}$ , tal que

$$K(s) \leq C e^{-(2\gamma+\mu)s}, \quad \text{para } s \geq 0,$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $p$ ,  $N$  y  $\|v_0\|_{L^\infty}$ , y

3.  $\int_0^\infty e^{2\gamma s} K(s) ds \leq C$ , para cierta constante positiva  $C$ .

**Observación 5.4.12.** Una proposición similar a la anterior se dio en el capítulo 4 pero para el caso  $f(u) = u^p$ . Notar que en dicho capítulo el decaimiento de  $K(s)$  es para todo  $s \geq s_1$  mientras que aquí es para todo  $s \geq 0$ . Esto se ha conseguido aprovechando que conocemos que  $v(y, s)$  es decreciente en  $s$ .

*Demostración.* (lema 5.4.11) Definimos a  $K(s)$  de la siguiente manera

$$K(s) = \int v_s g'(s) \rho dy.$$

Debido a la desigualdad (5.12), tenemos que  $(Lv_s, v_s)_{L^2_\rho} - \frac{N}{2} \|v_s\|_{L^2_\rho}^2 \geq 0$ , con lo cual obtenemos que  $R(s) \geq -K(s)$ .

Para ver que  $K(s) \geq 0$  es suficiente con ver que  $g'(s) \leq 0$  pues ya conocemos el signo de  $v_s$ . Para esto calculamos  $g'(s)$  y la escribimos de manera conveniente.

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{p}{p-1} e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) + e^{\frac{p}{p-1}s} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \frac{d}{ds} \left( e^{-\frac{s}{p-1}v} \right) \\ &= \frac{p}{p-1} e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) + e^{\frac{p}{p-1}s} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) e^{-\frac{s}{p-1}v} \left( -\frac{v}{p-1} + v_s \right) \\ &= \frac{p}{p-1} e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) - \frac{e^{\frac{p}{p-1}s}}{p-1} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) e^{-\frac{s}{p-1}v} + \\ &\quad + e^s f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) v_s \\ &= \frac{e^{\frac{p}{p-1}s}}{p-1} \left[ p f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) - e^{-\frac{s}{p-1}v} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \right] + \\ &\quad + e^s f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) v_s \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

donde la desigualdad de arriba se debe al lema 5.4.5 y a la desigualdad (5.4). Por lo tanto  $g'(s) \leq 0$  y entonces  $K(s) \geq 0$ .

Para ver que se cumple 2. la idea es mostrar que  $K(s) \leq C\tilde{K}(s)$  siendo  $\tilde{K}(s) = \int v^{p-1}v_s^2\rho dy$  y  $C$  una constante positiva, probar el decaimiento de  $\tilde{K}(s)$  y obtener entonces el de  $K(s)$ . Para ver la desigualdad  $K(s) \leq C\tilde{K}(s)$  lo hacemos por pasos, primero vemos que  $K(s) \leq C \int f'(v)v_s^2\rho dy$  y después veremos que  $\int f'(v)v_s^2\rho dy \leq C \int v^{p-1}v_s^2\rho dy$ .

Para deducir la desigualdad  $K(s) \leq C \int f'(v)v_s^2\rho dy$  veremos que  $g'(s) \geq C f'(v)v_s$ . Miremos entonces cómo acotar por abajo a  $g'(s)$

$$\begin{aligned} g'(s) &= \frac{p}{p-1} e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) + e^{\frac{p}{p-1}s} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \frac{d}{ds} \left( e^{-\frac{s}{p-1}v} \right) \\ &\geq e^{\frac{p}{p-1}s} f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \left( e^{-\frac{s}{p-1}v} \frac{v}{p-1} + e^{-\frac{s}{p-1}v} v_s \right) \\ &= e^s f'(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \left[ -\frac{v}{p-1} + v_s \right]. \end{aligned}$$

Si ahora utilizamos **Hip 5**, tenemos que

$$g'(s) \geq f'(v) \left[ -\frac{v}{p-1} + v_s \right]. \quad (5.19)$$

Por lemas 4.4.1 y 4.4.2 de capítulo 4 sabemos que  $vLv - \frac{N}{2}v^2 \geq 0$  en casi todo punto, con lo cual

$$-Lv \leq -\frac{N}{2}v$$

en casi todo punto. Si usamos esto y que  $v$  es solución de (5.11) tenemos que

$$\begin{aligned} v_s &= -Lv + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \\ &\leq -\frac{N}{2}v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}v}) \\ &\leq -\gamma v + f(v), \end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a la definición de  $\gamma$  y a **Hip 2**. Si utilizamos la cota de  $v_s$  recién obtenida y la cota de  $f(v(s))$  deducida en (5.16), tenemos que

$$\begin{aligned} v_s &\leq -\gamma v(s) + \frac{f(v(0))}{v(0)} v(s) \\ &= \left[ -\gamma + \frac{f(v(0))}{v(0)} \right] v(s) \\ &\geq \left[ -\gamma + \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right] v(s) \\ &= (p-1) \left[ \gamma - \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right] \left( -\frac{v(s)}{p-1} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sea  $\beta = (p-1) \left[ \gamma - \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right]$ . Veamos que  $\beta > 0$ , para esto usamos que  $f$  es convexa y la hipótesis sobre  $f'(v(0))$

$$\begin{aligned} \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} &\leq f'(\|v_0\|_{L^\infty}) < (f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^{1/2} \\ &< \frac{N(p-1)-2}{2(p+\sqrt{3})} < \gamma, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que  $\beta$  es una constante positiva. Esto nos permite despejar en (5.20) y obtener que  $-\frac{v}{p-1} \geq \frac{1}{\beta}v_s$ , de donde

$$-\frac{v}{p-1} + v_s \geq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) v_s.$$

Ahora utilizamos esto en (5.19), llegando a

$$g'(s) \geq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f'(v)v_s,$$

con lo cual tenemos la primera desigualdad que queríamos probar, ésta es

$$K(s) \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \int f'(v)v_s^2 \rho \, dy.$$

Ahora veamos la segunda desigualdad, para esto utilizamos **Hip 5**

$$\begin{aligned} f'(v(s)) &= f'\left(\frac{v(s)}{v(0)}v(0)\right) \\ &\leq \left(\frac{v(s)}{v(0)}\right)^{p-1} f'(v(0)) \\ &\leq \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} (v(s))^{p-1}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Entonces deducimos que

$$\int f'(v)v_s^2 \rho \, dy \leq \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy.$$

Si entonces juntamos estas dos desigualdades, tenemos que

$$\begin{aligned} K(s) &= \int g'(s)v_s \rho \, dy \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy \\ &= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} \tilde{K}(s), \end{aligned}$$

como queríamos ver. Ahora veamos el decaimiento de esta nueva función  $\tilde{K}(s)$  para lo cual calculamos su derivada respecto de  $s$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{ds} &= \int [(p-1)v^{p-2}v_s v_s^2 + 2v^{p-1}v_s v_{ss}] \rho \, dy \\ &= \int \left[ (p-1)v^{p-2} \left( -Lv + \frac{v}{p-1} + g(s) \right) v_s^2 \right] \rho \, dy \\ &\quad + \int \left[ 2v^{p-1}v_s \left( -Lv_s + \frac{v_s}{p-1} + g'(s) \right) \right] \rho \, dy \end{aligned}$$

y reacomodando los términos obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{ds} &= -(p-1) \int v^{p-2}Lv v_s^2 \rho \, dy + \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy \\ &\quad + (p-1) \int v^{p-2}e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v) v_s^2 \rho \, dy \tag{5.22} \\ &\quad - 2 \int v^{p-1}v_s Lv_s \rho \, dy + \frac{2}{p-1} \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy \\ &\quad + 2 \int v^{p-1}v_s g'(s) \rho \, dy. \end{aligned}$$

Necesitamos acotar los seis términos de (5.22) en términos de  $\tilde{K}$ . Notar que el 2° término de (5.22) es exactamente  $\tilde{K}(s)$  y el 5° término es  $\frac{2}{p-1}\tilde{K}(s)$ . Además, los lemas 4.4.1 y 4.4.2 de capítulo 4 nos permiten acotar al 1° y al 4° término de (5.22) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ término} &\leq -(p-1) \frac{N}{2} \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy \\ &= -(p-1) \frac{N}{2} \tilde{K}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ \text{ término} &\leq -2 \frac{N}{2} \int v^{p-1}v_s^2 \rho \, dy \\ &= -N \tilde{K}(s). \end{aligned}$$

Para acotar el 3° término de (5.22) utilizamos **Hip 2** y (5.16) de la siguiente

manera

$$\begin{aligned}
3^\circ \text{ término} &\leq (p-1) \int v^{p-2} e^{\frac{p}{p-1}s} \left( e^{-\frac{s}{p-1}} \right)^p f(v) v_s^2 \rho \, dy \\
&= (p-1) \int v^{p-2} f(v) v_s^2 \rho \, dy \\
&\leq (p-1) \frac{f(v(0))}{v(0)} \int v^{p-2} v v_s^2 \rho \, dy \\
&= (p-1) \frac{f(v(0))}{v(0)} \tilde{K}(s).
\end{aligned}$$

Para el 6° y último término de (5.22) utilizamos la cota del integrando de  $K(s)$  en términos del integrando de  $\tilde{K}(s)$  y llegamos a

$$\begin{aligned}
6^\circ \text{ término} &\leq 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} \int v^{2p-2} v_s^2 \rho \, dy \\
&\leq 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{f'(v(0))}{(v(0))^{p-1}} (v(0))^{p-1} \int v^{p-1} v_s^2 \rho \, dy \\
&\leq 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(v(0)) \int v^{p-1} v_s^2 \rho \, dy \\
&= 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(v(0)) \tilde{K}(s).
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando estas cotas en la desigualdad (5.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{K}}{ds} &\leq \left[ -(p-1) \frac{N}{2} + 1 + (p-1) \frac{f(v(0))}{v(0)} - N + \frac{2}{p-1} + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(v(0)) \right] \tilde{K}(s) \\
&= - \left( N - \frac{2}{p-1} \right) \tilde{K}(s) + \left( 1 - (p-1) \frac{N}{2} \right) \tilde{K}(s) + \\
&\quad + \left[ (p-1) \frac{f(v(0))}{v(0)} + 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(v(0)) \right] \tilde{K}(s) \\
&= -2\gamma \tilde{K}(s) - \mu \tilde{K}(s),
\end{aligned}$$

donde

$$\mu = -1 + (p-1) \frac{N}{2} - \left[ (p-1) \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} + 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(\|v_0\|_{L^\infty}) \right]$$

y  $\gamma$  es como antes. Veamos que bajo las hipótesis dadas tenemos que  $\mu > 0$ . Para

esto, escribimos a  $\mu$  de manera más conveniente

$$\begin{aligned}\mu &= (p-1) \left( \gamma - \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right) - 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(\|v_0\|_{L^\infty}) \\ &= \beta - 2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) f'(\|v_0\|_{L^\infty}) \\ &= \frac{\beta^2 - 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})\beta - 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})}{\beta}\end{aligned}$$

Si calculamos las raíces de la cuadrática en el numerador de la expresión de  $\mu$  encontramos  $\beta_1 = f'(\|v_0\|_{L^\infty}) - \sqrt{(f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^2 + 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})} < 0$  y  $\beta_2 = f'(\|v_0\|_{L^\infty}) + \sqrt{(f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^2 + 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})} > 0$ . Tenemos entonces que

$$\mu = \frac{(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)}{\beta}.$$

Como además sabemos que  $\beta > 0$  tenemos que  $\mu > 0$  cuando  $\beta > \beta_2$ . Esto es,

$$(p-1) \left[ \gamma - \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right] > f'(\|v_0\|_{L^\infty}) + \sqrt{(f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^2 + 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})},$$

es decir que  $\mu > 0$  si se cumple que

$$\gamma > \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} + \frac{1}{p-1} \left[ f'(\|v_0\|_{L^\infty}) + \sqrt{(f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^2 + 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})} \right].$$

Veamos que esto se cumple usando la hipótesis sobre  $f'(v(0))$  y que  $f$  es convexa

$$\begin{aligned}& \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} + \frac{1}{p-1} \left[ f'(\|v_0\|_{L^\infty}) + \sqrt{(f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^2 + 2f'(\|v_0\|_{L^\infty})} \right] \\ & < f'(\|v_0\|_{L^\infty}) + \frac{1}{p-1} \left[ (f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^{1/2} + \sqrt{3} (f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^{1/2} \right] \\ & < \left( 1 + \frac{1 + \sqrt{3}}{p-1} \right) (f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^{1/2} \\ & = \frac{p + \sqrt{3}}{p-1} (f'(\|v_0\|_{L^\infty}))^{1/2} < \gamma.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mu > 0$  como queríamos ver. Entonces, volviendo a la cota de la derivada de  $\tilde{K}(s)$  tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{K}}{ds} &\leq -(2\gamma + \mu)\tilde{K}(s) \\ \tilde{K}(s) &\leq C e^{-(2\gamma + \mu)s}.\end{aligned}$$

Si ahora usamos la cota de  $K(s)$  en términos de  $\tilde{K}(s)$ , tenemos que

$$K(s) \leq C e^{-(2\gamma+\mu)s},$$

donde la constante  $C$  depende de  $p$ ,  $N$  y  $\|v_0\|_{L^\infty}$ . Con esto tenemos probado 2. del lema. El ítem 3. se deduce directamente del anterior.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de obtener el decaimiento de la producción de entropía.

**Teorema 5.4.13.** Supongamos que se cumplen las hipótesis **Hip 1-Hip 5** y supongamos que  $v_0 \in H_p^1 \cap L^\infty$  es una supersolución estacionaria pero no una solución de  $\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}}v) = 0$  y que  $f'(\|v_0\|_{L^\infty}) < \min \left\{ 1, \left[ \frac{N(p-1)-2}{2(p+\sqrt{3})} \right]^2 \right\}$ . Si además se cumple que  $v_0 \geq 0$ ,  $I(v_0) < \infty$  y  $E(v_0) < \infty$  entonces  $I(v(s))$  tiene decaimiento exponencial. Éste es

$$I(v(s)) \leq (I(v(0)) + C) e^{-2\gamma s},$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $p$ ,  $N$ ,  $\|v_0\|_{L^\infty}$  y  $I(v_0)$ .

*Demostración.* Como calculamos en 5.17

$$\frac{d}{ds} I(v(s)) = -2\gamma I(v(s)) - 2(Lv_s, v_s) + N \|v\|_{L_p^2}^2 + 2K(s).$$

Si utilizamos que  $\frac{N}{2}$  es el menor autovalor de  $L$  y la cota de  $K(s)$  obtenida en el lema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(v(s)) &\leq -2\gamma I(v(s)) + 2K(s) \\ &\leq -2\gamma I(v(s)) + 2C e^{-(2\gamma+\mu)s}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(v(s)) + 2\gamma I(v(s)) &\leq 2C e^{-(2\gamma+\mu)s} \\ \frac{d}{ds} (e^{2\gamma s} I(v(s))) &\leq 2C e^{-\mu s}. \end{aligned}$$

Si ahora integramos entre 0 y  $s$  tenemos que

$$\begin{aligned} e^{2\gamma s} I(v(s)) - I(v(0)) &\leq 2C \int_0^s e^{-\mu t} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\mu t} dt = \tilde{C}. \end{aligned}$$

Despejando la producción de entropía en la desigualdad anterior obtenemos lo que esperábamos

$$I(v(s)) \leq \left( I(v(0)) + \tilde{C} \right) e^{-2\gamma s}.$$

□

El siguiente teorema muestra que la entropía decae en forma exponencial.

**Teorema 5.4.14.** Bajo las condiciones del teorema 5.4.13, se cumple que la entropía  $E(v(s))$  tiene el siguiente decaimiento exponencial

$$E(v(s)) \leq C e^{-2\gamma s}.$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $p$ ,  $N$ ,  $\|v_0\|_{L^\infty}$  y  $I(v_0)$ .

*Demostración.* Sabemos por 2. de la proposición 5.4.9 que  $\frac{d}{ds}E(v(s)) \geq -I(v(s))$ . Con esta desigualdad y por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E(v(s)) &\geq -I(v(s)) \\ &\geq -C e^{-2\gamma s}. \end{aligned}$$

Si ahora integramos entre  $s$  y  $b$  donde  $s < b$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_s^b \frac{d}{ds}E(v(\tau))d\tau &\geq -C \int_s^b e^{-2\gamma\tau}d\tau \\ E(v(b)) - E(v(s)) &\geq \frac{C}{2\gamma}e^{-2\gamma b} - \frac{C}{2\gamma}e^{-2\gamma s} \end{aligned}$$

Si hacemos  $b \rightarrow \infty$  y usando 3. de la proposición 5.4.9 tenemos que

$$E(v(s)) \leq \frac{C}{2\gamma}e^{-2\gamma s}.$$

□

### 5.4.5. Comportamiento asintótico de la solución

Para terminar de aplicar el método de entropía la idea es utilizar la cota de la norma de  $v(s)$  en términos de la entropía  $E(v(s))$  (ver proposición 5.4.9) y el teorema 5.4.14 para así llegar al decaimiento que buscábamos.



**Teorema 5.4.15.** Supongamos que se cumplen las hipótesis **Hip 1-Hip 5** y supongamos que  $v_0$  cumple  $0 \leq v_0 \leq \lambda\psi$  donde  $0 < \lambda < 1$  y  $\psi$  es una supersolución estacionaria pero no una solución de

$$\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v) = 0$$

y que  $f'(\psi) < \min \left\{ 1, \left[ \frac{N(p-1)-2}{2(p+\sqrt{3})} \right]^2 \right\}$ . Si además se cumple que  $\psi \in H_\rho^1 \cap L^\infty$ ,  $I(\psi) < \infty$  y  $E(\psi) < \infty$  se tiene que

$$\|v(y, s)\|_{L_\rho^2} \leq C e^{-\gamma s},$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $p$ ,  $N$  y  $\|v_0\|_{L^\infty}$ .

*Demostración.* Primero observar que  $\lambda\psi$  es supersolución de

$$\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} v) = 0.$$

Para esto se usa **Hip 2** y que  $\psi$  es supersolución de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda\psi) + \frac{1}{2}y \cdot \nabla(\lambda\psi) + \frac{\lambda\psi}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} \lambda\psi) &\leq \\ &\leq \lambda \left[ \Delta\psi + \frac{1}{2}y \cdot \nabla\psi + \frac{\psi}{p-1} \right] + \lambda^p e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} \psi) \\ &\leq \lambda \left[ \Delta\psi + \frac{1}{2}y \cdot \nabla\psi + \frac{\psi}{p-1} + e^{\frac{p}{p-1}s} f(e^{-\frac{s}{p-1}} \psi) \right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se concluye que  $\lambda\psi$  es supersolución. Si se supone que  $v(0) = \lambda\psi$ , se puede utilizar 1. de la proposición 5.4.9 y teorema 5.4.14 deduciendo que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_\rho^2}^2 &\leq \frac{1}{\left[ \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{p+1} \frac{f(\|v_0\|_{L^\infty})}{\|v_0\|_{L^\infty}} \right]} E(v(s)) \\ &\leq C e^{-2\gamma s}, \end{aligned}$$

como queríamos ver. Si en cambio  $v(0) \neq \lambda\psi$  se utiliza el lema 5.4.4 para llegar también a la misma conclusión.  $\square$

Ahora sólo nos resta aplicar el cambio de variables nuevamente para obtener el decaimiento de la solución del problema (5.1).

**Teorema 5.4.16.** Bajo las hipótesis del teorema 5.4.15 tenemos que

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq C(t + 1)^{-\frac{N}{4}},$$

donde  $C$  es una constante que depende de  $p$ ,  $N$  y  $u(0)$ .

**Observación 5.4.17.** El decaimiento obtenido en el teorema 5.4.16 es el mismo que se obtuvo en el capítulo 4 para el caso  $f(u) = u^p$ .

## Capítulo 6

# Comportamiento asintótico de soluciones globales de

$$u_t = \operatorname{div}(a \nabla u) + u^p$$

En este capítulo estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones no negativas del problema parabólico no lineal en forma divergencia

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(x, t) \nabla u) + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0. \end{cases}$$

Bajo la hipótesis de existencia global y existencia de una cota de  $\|u(x, t)\|_{L^\infty}$ , obtenemos la tasa de decaimiento de dicha solución en norma  $\|\cdot\|_{L^2}$ .

### 6.1. Introducción

Consideramos el problema parabólico

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(x, t) \nabla u) + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $p > 1$ ,  $a(x, t) = A((t+1)^{-1/2}x)$  con  $A$  una función radial escalar para la cual existe  $\theta > \frac{1}{2}$  tal que  $A(y) \geq \theta, \forall y$  y el dato inicial  $u_0$  es no negativo y no trivial.

Claramente es una generalización del problema estudiado en el capítulo 4, ya que (4.1) se obtiene de (6.1) haciendo  $a(x, t) = 1$ .

El objetivo en este capítulo es obtener la tasa de decaimiento de la solución global en tiempo  $u(x, t)$  del problema (6.1) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Más precisamente, deducimos que, bajo ciertas hipótesis, la norma en  $L^2(\mathbb{R}^N)$  de  $u(x, t)$  decae con la tasa

$$\|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C (t+1)^{-(2\theta-1)\frac{N}{4}} \quad t \geq t_1,$$

donde  $\theta$  es la constante positiva que acota a la función  $A$  y  $C$  es una constante positiva. Como también la norma en  $L^q(\mathbb{R}^N)$  de  $u(x, t)$

$$\|u(x, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \sim (t+1)^{-(\beta+\frac{1}{p-1})-\frac{2}{q}\left[(2\theta-1)\frac{N}{4}-(\beta+\frac{1}{p-1})\right]},$$

donde  $\theta$  es la ya mencionada constante positiva y  $\beta$  es una constante positiva que definiremos en la sección siguiente.

## 6.2. Preliminares

Para conseguir el decaimiento de (6.1) supondremos que se cumplen las siguientes hipótesis

**Hip 6.** Existe  $u(x, t)$  solución global de (6.1).

**Hip 7.** Existen constantes  $C, \beta > 0$  de modo que

$$\|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(t+1)^{-(\beta+\frac{1}{p-1})}.$$

El siguiente paso será transformar la ecuación del problema (6.1) en otra ecuación que nos permita obtener información sobre el comportamiento asintótico de las soluciones globales. Para esto, usamos el cambio de variables utilizado en los capítulos 4 y 5. Este es,

$$\begin{aligned} v(y, s) &= (t+1)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t), \\ x &= (t+1)^{1/2}y \quad y \quad t = e^s - 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Entonces,  $v(y, s)$  resulta ser solución del problema

$$\begin{cases} v_s = \operatorname{div}(A(y)\nabla v) + \frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{v}{p-1} + v^p, & y \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \\ v(y, 0) = u_0, & y \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6.3}$$

donde  $A = A(y)$  es la función definida arriba. Notemos que el problema (6.3) tiene la misma condición inicial que el problema (6.1).

**Observación 6.2.1.** A partir de las hipótesis **Hip 6** y **Hip 7** sobre la solución  $u$  de (6.1) obtenemos las siguientes hipótesis sobre la solución  $v(y, s)$  de (6.3), éstas son

**Hip 6'** Existe  $v(y, s)$  solución global de (6.3).

**Hip 7'** Existen constantes  $C, \beta > 0$  de modo que

$$\|v(y, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C e^{-\beta s}.$$

**Definición 6.2.2.** Definimos los siguientes espacios

$$L_\rho^r(\mathbb{R}^N) = \left\{ f / \int_{\mathbb{R}^N} |f|^r \rho \, dy < \infty \right\},$$

$$H_\rho^1(\mathbb{R}^N) = \{f \in L_\rho^2 / \nabla f \in L_\rho^2\}, \quad H_\rho^2(\mathbb{R}^N) = \{f \in H_\rho^1 / \nabla f \in H_\rho^1\},$$

donde  $\rho = \rho(y) > 0$  es una función que satisface  $\rho(y) \frac{y}{2} = A(y) \nabla_y \rho(y)$  y  $r \geq 1$  es una constante. Relacionadas a estos espacios están las siguientes normas y productos internos

$$(f, g)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} f g \rho \, dy, \quad \|f\|_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)} = (f, f)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{2}},$$

$$(f, g)_{H_\rho^1(\mathbb{R}^N)} = (f, g)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla f, \nabla g)_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$\|f\|_{H_\rho^1(\mathbb{R}^N)} = \left[ \|f\|_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|\nabla f\|_{L_\rho^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Observación 6.2.3.** Notemos que debido a que  $A$  es radial podemos garantizar la existencia de una función  $\rho$  que satisface  $\rho(y) \frac{y}{2} = A(y) \nabla_y \rho(y)$ , es decir que cumpla

$$\rho_{y_i}(y) = \frac{\rho(y)}{2A(y)} y_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N. \quad (6.4)$$

En efecto, por ser  $A(y)$  una función radial, se cumple que

$$y_j A_{y_i} = y_i A_{y_j}. \quad (6.5)$$

Definamos, por ejemplo, la función  $\rho$  de la siguiente manera

$$\rho(y) = e^{\int_0^{y_1} \frac{s}{2A(s, y_2, \dots, y_N)} ds}.$$

Entonces, claramente si  $i = 1$  se cumple (6.4). Si  $i \neq 1$ , usando (6.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_{y_i}(y) &= \rho(y) \int_0^{y_1} \frac{s}{2(A(s, y_2, \dots, y_N))^2} A_{y_i}(s, y_2, \dots, y_N) ds \\ &= \rho(y) \int_0^{y_1} \frac{y_i}{2(A(s, y_2, \dots, y_N))^2} A_s(s, y_2, \dots, y_N) ds.\end{aligned}$$

De donde podemos deducir que

$$\begin{aligned}\rho_{y_i}(y) &= \frac{\rho(y)y_i}{2} \int_0^{y_1} \frac{d}{ds} [(A(s, y_2, \dots, y_N))^{-1}] ds \\ &= \frac{\rho(y)}{2A(y)} y_i,\end{aligned}$$

como queríamos ver.

**Definición 6.2.4.**  $L_A$  es el operador dado por

$$(L_A(v))(y) = -\operatorname{div}(A(y)\nabla_y v(y)) - \frac{y}{2} \cdot \nabla_y v(y), \text{ definido sobre } D(L_A) := H_\rho^2.$$

**Observación 6.2.5.** Observemos que la ecuación en (6.3) puede ser escrita bajo la forma

$$v_s = -L_A(v) + \frac{v}{p-1} + v^p.$$

**Proposición 6.2.6.** El operador  $L_A$  satisface

1.  $L_A$  es un operador autoadjunto.
2.  $\langle L_A(v), v \rangle \geq \theta \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \rho \, dy$ .

*Demostración.* Para ver que 1. es válido, veamos que se cumple la igualdad  $(L_A(v), w)_{L_\rho^2} = \int A \nabla v \cdot \nabla w \, \rho \, dy$  con lo cual tendremos que  $(L_A(v), w)_{L_\rho^2} = (v, L_A(w))_{L_\rho^2}$  como queremos ver. Calculemos entonces  $(L_A v, w)_{L_\rho^2}$

$$\begin{aligned}(L_A(v), w)_{L_\rho^2} &= \int L_A(v) w \rho \, dy \\ &= - \int \operatorname{div}(A \nabla v) w \rho \, dy - \int \left( \frac{y}{2} \cdot \nabla v \right) w \rho \, dy \\ &= \int A \nabla v \cdot \nabla (w \rho) \, dy - \int \left( \frac{y}{2} \cdot \nabla v \right) w \rho \, dy \\ &= \int A \nabla v \cdot (\rho \nabla w + w \nabla \rho) \, dy - \int \left( \frac{y}{2} \cdot \nabla v \right) w \rho \, dy.\end{aligned}$$

Si ahora usamos que  $\rho(y)\frac{y}{2} = A(y)\nabla_y\rho(y)$  tenemos la igualdad

$$(L_A(v), w)_{L^2_\rho} = \int A\nabla v \cdot \nabla w \rho \, dy$$

como queríamos ver.

Para ver que se cumple 2. calculamos  $(L_A(v), v)_{L^2_\rho}$  y acotamos usando la hipótesis sobre la función  $A$ .

$$\begin{aligned} (L_A(v), v)_{L^2_\rho} &= \int_{\mathbb{R}^N} A(y)|\nabla v|^2 \rho \, dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \theta |\nabla v|^2 \rho \, dy \\ &\geq \theta \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v^2 \rho \, dy, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debido a que  $\frac{N}{2}$  es el menor autovalor del operador  $L(v) = -\Delta v - \frac{y}{2} \cdot \nabla v$  (ver teorema 4.2.5).  $\square$

### 6.3. Comportamiento asintótico de la solución

El siguiente teorema da la tasa de decaimiento de la solución  $v(y, s)$  del problema (6.3).

**Teorema 6.3.1.** Consideremos el problema (6.3) y supongamos que se cumplen **Hip 6'** y **Hip 7'**. Supongamos además que el dato inicial  $u_0$  es no negativo y no trivial, la función  $A$  es una función radial para la cual existe una constante  $\theta > \frac{1}{2}$  tal que  $A(y) \geq \theta$  para todo  $y$  y que  $p > 1 + \frac{2}{\theta N}$ . Entonces,

$$\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2 \leq \|u_0\|_{L^2_\rho}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s},$$

donde  $\tilde{\gamma}$  es una constante positiva definida por  $\tilde{\gamma} = \theta \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}$ .

*Demostración.* Si  $v(y, s)$  es una solución de (6.3), entonces multiplicando a ambos lados de la ecuación por  $v\rho$  y luego integrando por partes con respecto a  $y$ , queda

$$\begin{aligned} \int vv_s \rho \, dy &= \int \operatorname{div}(A(y)\nabla v)v\rho \, dy + \int v\left(\frac{y}{2} \cdot \nabla v + \frac{1}{p-1}v + v^p\right)\rho \, dy \\ &= - \int A(y)|\nabla v|^2 \rho \, dy + \int \left(\frac{1}{p-1}v^2 + v^{p+1}\right)\rho \, dy \end{aligned}$$

De donde, debido a 2. de la proposición 6.2.6, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \int v^2 \rho dy \right) &= - \int A(y) |\nabla v|^2 \rho dy + \int \left( \frac{1}{p-1} v^2 + v^{p+1} \right) \rho dy \\ &\leq -\theta \frac{N}{2} \int v^2 \rho dy + \int \left( \frac{1}{p-1} v^2 + v^{p+1} \right) \rho dy. \end{aligned}$$

Expresando a esta desigualdad de una manera más conveniente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left( \int v^2 \rho dy \right) &\leq \left( -\theta \frac{N}{2} + \frac{1}{p-1} \right) \|v\|_{L_\rho^2}^2 + \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1} \\ \frac{d}{ds} \left( \int v^2 \rho dy \right) &\leq -2\tilde{\gamma} \|v\|_{L_\rho^2}^2 + 2 \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1}, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\gamma} = \theta \frac{N}{2} - \frac{1}{p-1} > 0$ , debido a la hipótesis sobre  $p$ . Ahora multiplicamos a la última desigualdad por  $e^{2\tilde{\gamma}s}$  y obtenemos

$$\frac{d}{dw} (e^{2\tilde{\gamma}w} \|v\|_{L_\rho^2}^2) \leq 2e^{2\tilde{\gamma}w} \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1}.$$

Si ahora integramos respecto de  $w$ , entre 0 y  $s$ , nos queda

$$e^{2\tilde{\gamma}s} \|v\|_{L_\rho^2}^2 - \|u_0\|_{L_\rho^2}^2 \leq 2 \int_0^s e^{2\tilde{\gamma}w} \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1} dw.$$

Por lo tanto, podemos deducir que

$$\|v\|_{L_\rho^2}^2 \leq \|u_0\|_{L_\rho^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} + 2 \int_0^s e^{-2\tilde{\gamma}(s-w)} \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1} dw.$$

Si usamos la cota de  $\|v(y, s)\|_{L^\infty}$  podemos acotar la norma dentro de la última integral como sigue

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_\rho^{p+1}}^{p+1} &= \int v^{p+1} \rho dy \leq \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \int v^2 \rho dy \\ &= \|v\|_{L^\infty}^{p-1} \|v\|_{L_\rho^2}^2. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos una cota de  $\|v(y, s)\|_{L_\rho^2}^2$  en términos de  $\|v_0\|_{L_\rho^2}^2$  y de una función  $V(s)$  como vemos a continuación.

$$\|v(y, s)\|_{L_\rho^2}^2 \leq \|u_0\|_{L_\rho^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} + 2V(s), \quad (6.6)$$

donde la función  $V(s)$  está definida por

$$V(s) = \int_0^s e^{-2\tilde{\gamma}(s-w)} \|v(y, w)\|_{L^\infty}^{p-1} \|v(y, w)\|_{L_\rho^2}^2 dw$$



Lo que buscamos ahora es una cota para esta nueva función  $V(s)$  que nos permita acotar después a la norma  $\|v\|_{L^2}^2$ . Para esto calculamos  $V'(s)$  como sigue

$$V'(s) = \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} \|v(y, s)\|_{L^2}^2 - 2\tilde{\gamma}V(s) \quad (6.7)$$

Si usamos (6.6) en (6.7), queda

$$V'(s) \leq \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} + 2\|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} V(s) - 2\tilde{\gamma}V(s).$$

Ahora buscamos escribir a esta desigualdad de manera de poder conseguir una cota de  $V(s)$ . Para esto,

$$V'(s) + 2\left(\tilde{\gamma} - \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1}\right)V(s) \leq \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{2(\tilde{\gamma}s - \int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau)} \left[ V'(s) + 2\left(\tilde{\gamma} - \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1}\right)V(s) \right] &\leq \\ &\leq e^{-2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{d}{ds} \left( e^{2(\tilde{\gamma}s - \int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau)} V(s) \right) \leq e^{-2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \|v(y, s)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Integramos entre 0 y  $s$  a ambos lados de la última desigualdad y usamos que  $V(0) = 0$  para deducir que

$$e^{2(\tilde{\gamma}s - \int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau)} V(s) \leq \int_0^s e^{-2\int_0^w \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \|v(y, w)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 dw. \quad (6.8)$$

Obtenemos entonces la cota de  $V(s)$  que buscábamos. Ésta es

$$V(s) \leq e^{-2\tilde{\gamma}s} e^{2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \int_0^s e^{-2\int_0^w \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \|v(y, w)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 dw. \quad (6.9)$$

Veamos como escribir de una manera más conveniente esta cota de  $V(s)$ .

$$\begin{aligned} V(s) &\leq e^{-2\tilde{\gamma}s} \int_0^s e^{2(\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau - \int_0^w \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau)} \|v(y, w)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 dw \\ &= e^{-2\tilde{\gamma}s} \int_0^s e^{2\int_w^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \|v(y, w)\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_0\|_{L^2}^2 dw \\ &= e^{-2\tilde{\gamma}s} \int_0^s -\frac{1}{2} \frac{d}{dw} \left[ e^{2\int_w^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \right] \|u_0\|_{L^2}^2 dw \\ &= -\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} \int_0^s \frac{d}{dw} \left[ e^{2\int_w^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \right] dw \\ &= -\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} \left[ 1 - e^{2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ahora usamos (6.10) para acotar la norma  $\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2$  en (6.6), llegando a

$$\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2 \leq \|u_0\|_{L^2_\rho}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s} e^{2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau}.$$

Utilizamos la cota de  $\|v(y, s)\|_{L^\infty}$ , podemos deducir que

$$e^{2\int_0^s \|v(y, \tau)\|_{L^\infty}^{p-1} d\tau} \leq 1.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\|v(y, s)\|_{L^2_\rho}^2 \leq \|u_0\|_{L^2_\rho}^2 e^{-2\tilde{\gamma}s}.$$

□

Ahora podemos usar el cambio de variables (6.2) para deducir el decaimiento de la solución  $u(x, t)$  de (6.1).

**Teorema 6.3.2.** Consideremos el problema (6.1) y supongamos que se cumplen **Hip 6** y **Hip 7**. Supongamos además que el dato inicial  $u_0$  es no negativo y no trivial, la función  $A$  es una función radial para la cual existe una constante  $\theta > \frac{1}{2}$  tal que  $A(y) \geq \theta$  para todo  $y$  y que  $p > 1 + \frac{2}{\theta N}$ . Entonces,

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \leq \|v_0\|_{L^2_\rho} (t+1)^{-(2\theta-1)\frac{N}{4}}.$$

**Observación 6.3.3.** Como mencionamos en la introducción, la ecuación (4.1) se obtiene como caso particular de (6.1) haciendo que  $a(x, t) = 1$  y, por lo tanto,  $A(y) = 1$  y la constante  $\theta = 1$ . Entonces, si aplicamos teorema 6.3.2 en este caso, obtenemos que

$$\|u(x, t)\|_{L^2} \sim (t+1)^{-\frac{N}{4}},$$

que es la misma tasa que se había obtenido en el capítulo 4 para este caso particular.

En el próximo corolario vemos que utilizando las cotas para las normas de  $u(x, t)$  en  $L^\infty$  y  $L^2$  dadas por **Hip 7** y teorema 6.3.2 respectivamente, obtenemos el decaimiento de la norma  $\|u(x, t)\|_{L^q}$  para  $q \geq 2$ .

**Corolario 6.3.4.** Bajo las hipótesis del teorema 6.3.2 y si  $q \geq 2$  tenemos que

$$\|u(x, t)\|_{L^q} \sim (t + 1)^{-(\beta + \frac{1}{p-1}) - \frac{2}{q} \left[ (2\theta - 1) \frac{N}{4} - (\beta + \frac{1}{p-1}) \right]}$$

*Demostración.* Para demostrarlo se debe usar simplemente la desigualdad de interpolación, teorema 6.3.2 e **Hip 7**. □

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo a futuro

### 7.1. Conclusiones

En síntesis, los aportes de esta tesis son los siguientes.

- La aplicación del método de entropía al problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

para obtener la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$  y, en consecuencia, la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$ . La aplicación de este método permitió ampliar el rango de  $p$  para el cual se obtiene el decaimiento respecto al rango obtenido por Kawanago [31].

- La obtención de la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$  de la solución global en tiempo del problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Las condiciones impuestas sobre  $f$  hacen que este problema generalice el problema (7.1). La tasa obtenida para este problema en el caso particular en que  $f(u) = u^p$  recupera la tasa obtenida por Wang.

- La aplicación del método de entropía para obtener la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$  de la solución de (7.2). Aquí introducimos una funcional de entropía adecuada para este problema más general.

- La obtención de la tasa de decaimiento de la norma  $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$  de las soluciones globales en tiempo del problema

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(x, t)\nabla u) + u^p, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, la obtención de la tasa de decaimiento de  $\|u(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$ .

## 7.2. Trabajo a futuro

Entre los problemas que consideramos interesantes como para abordar en el futuro mencionamos:

- La aplicación del método de entropía a otras ecuaciones parabólicas de evolución que generalicen a (7.1) como puede ser la ecuación del capítulo 6, es decir,

$$u_t = \operatorname{div}(a(x, t)\nabla u) + u^p$$

o la ecuación de medios porosos

$$u_t = \Delta u^m + u^p.$$

- Estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones globales en tiempo de la ecuación

$$u_t = \Delta u - f(u),$$

es decir, cuando la ecuación presenta un término de absorción. En [43], los autores aplican la conocida aproximación de Galerkin para obtener la existencia de soluciones y sus propiedades. Nuestro interés es encontrar la tasa de decaimiento de las soluciones de la ecuación.

- En varias ecuaciones diferenciales, estrechamente vinculado al comportamiento asintótico de las soluciones está el problema de la búsqueda de las llamadas soluciones autosemejantes que poseen una propiedad de “rescaling”, a saber, si  $u(x, t)$  es una solución, entonces la función  $u_\lambda(x, t) = \lambda^p u(x\lambda^r, t\lambda^s)$  también lo es para todo valor de  $\lambda > 0$ , y ciertos parámetros

$p, r, s$ . En aquellas ecuaciones diferenciales de evolución de tipo parabólico que lo permitan, explotar la existencia de soluciones autosimilares para el estudio del comportamiento asintótico para  $t \rightarrow \infty$  de las mismas.



# Bibliografía

- [1] A.J. Ammerman and Cavalli-Sforza, *The Neolithic Transition and the Genetics of Population in Europe*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1984).
- [2] A. Arnold, J.A. Carrillo, L. Desvillettes, J. Dolbeault, A. Jüngel, C. Lederman, P.A. Markowich, G. Toscani C. Villani, *Entropies and Equilibria of Many-Particle Systems: An Essay on Recent Research* Monatsh. Math. **142** (2004) 35-43.
- [3] D. G. Aronson, H. F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. in Math. **30** (1978) 33-76.
- [4] N. Barkai, M.D. Rose, N.S. Wingreen, *Protease helps yeast find mating partners*, Nature 396 (1998) 422-423
- [5] O. Barraza, L. Langoni, *Asymptotic behavior of global solutions of a semilinear parabolic problem*, Nonlinear Analysis **70** (2009) 1465-1474.
- [6] O. Barraza, L. Langoni, *Asymptotic behavior of global solutions of  $u_t = \Delta u + f(u)$* , enviado a publicar.
- [7] J. Bebernes, D. Eberly, *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Appl. Math. Sci. **83**, Springer-Verlag, New York (1989).
- [8] Bricmont, J.; Kupiainen, A. Universality in blow-up for nonlinear heat equations. Nonlinearity **7**, N° **2** (1994), 539-575.



- 
- [9] Bricmont, J.; Kupiainen, A.; Lin, G. Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **47**, N° 6 (1994), 893-922.
- [10] J.D. Buckmaster, G.S.S. Ludford. *Lectures on Mathematical Combustion*, CBMS-NSF Regional Conf. Series Appl. Math. **43** SIAM, Philadelphia, 1983.
- [11] J.A. Carrillo, G. Toscani, *Asymptotic  $L^1$ -decay of Solutions of the Porous Medium Equation to Self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal **49**, N° 1 (2000) 113-142.
- [12] J.A. Carrillo, A. Jüngel, P.A. Markowich, G. Toscani, A. Unterreiter, *Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities*, *Monatsh. Math.* **133** (2001) 1-82.
- [13] T. Cazenave, P. L. Lions, *Solutions globales de l'équation de la chaleur semilinéaires*, *Comm. in PDE*, **9** N°10 (1984), 955-978.
- [14] S. J. Di Bartolo and A. T. Dorsey, *Velocity selection for propagating fronts in superconductors*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4442 (1996).
- [15] A. De Pablo, *An introduction to the problem of blow-up for semilinear and quasilinear parabolic equations*, *MAT, serie A*, **12** (2006), 1-28.
- [16] A. De Pablo, R. Ferreira, F. Quirós, J. L. Vázquez, *Blow-up. El problema matemático de explosión para ecuaciones y sistemas de reacción-difusión*, *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* **32** (2005), 75-111.
- [17] R.J. DiPerna, *Compensated compactness and general systems of conservation laws*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985), 383-420.
- [18] Engelbrecht, J. *On Theory of Pulse Transmission in a Nerve Fibre*, *Proc. R. Soc. Lond. A* March 13, (1981) 375:195-209.
- [19] M. Escobedo, O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation*, *Nonlinear Analysis T.M.A.* **11** (1987), 1103-1133.

- 
- [20] R. Fisher, *Theory of statistical estimation*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **22** (1925), 700-725.
- [21] R. Fowler, *The solution of Emden's and similar differential equations*, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **91** (1930), 63-91.
- [22] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 425-447.
- [23] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac., Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966) 109-124.
- [24] H. Fujita, *On the nonlinear equations  $\Delta u + e^u = 0$  and  $v_t = \Delta v + e^v$* , Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 132-135.
- [25] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981) 525-598.
- [26] Y. Giga, *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys. **vol 103** (1986) 415-421.
- [27] M.P. Gualdani, A. Jüngel, G. Toscani, *A nonlinear fourth-order parabolic equation with nonhomogeneous boundary conditions*, SIAM J. MATH. ANAL., **37**, No. 6, pp. 1761-1779.
- [28] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973) 503-525.
- [29] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 305-330.
- [30] Otared Kavian, *Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation*, Annales de L'I.H.P., **section c, tome 4 N° 5** (1987) 423-452.
- [31] Tadashi Kawanago, *Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity*, Annales de L'I.H.P., **section c, tome 13 N° 1** (1996) 1-15.
- [32] J.L. Kazdan, F. W. Warner, *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Annals of Math. **99** (1974), 14-47.
-

- 
- [33] K. Kobayashi, T. Tiraio and H. Tanaka, *On the blowing up problem for semilinear heat equations*, J. Mat. Soc. Japan **29** (1977) 407-424.
- [34] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, 11. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., (1973), v+48.
- [35] T.Y. Lee, W. M. Ni, *Global existence, large time behavior and life span of solutions of semilinear parabolic Cauchy problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 365-371.
- [36] A. H. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), 423-452.
- [37] A. H. Levine, *The role of critical exponents in blowup theorems*, SIAM, **32**, N°2 (1990), 262-288.
- [38] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*. Amer. J. Math. 80 (1958), 931-954.
- [39] J.V. Noble, *Geographic and temporal development of plagues*. Nature 250 (1974), 726-728. 31.
- [40] C. E. Shannon, *Collected papers*. Edited by N. J. A. Sloane and Aaron D. Wyner. IEEE Press, New York, 1993.
- [41] J. Smoller, *Shock-Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [42] W. van Saarloos, M. van Hecke and R. Holyst, *Front propagation into unstable and metastable states in smectic-C\* liquid crystals: Linear and nonlinear marginal-stability analysis*, (1995) Phys. Rev. E 52 1773.
- [43] Tai Nguyen Phuoc, Laurent Véron, *Local and global properties of solutions of heat equation with superlinear absorption*, Adv. Diff. Equ., to appear.
- [44] Tai Nguyen Phuoc, Laurent Véron, *Initial trace of positive solutions of a class of degenerate heat equation with absorption*, arxiv 1101.1576v2.
-

- [45] Xuefeng Wang, *On the Cauchy Problem for Reaction-Diffusion Equations*, Transactions of the American Mathematical Society **337** (1993) 549-590.
- [46] F. B. Weissler, *Existence and nonexistence of global solutions for a semi-linear heat equations*, Israel J. Math, **38** (1981), 173-193.
- [47] A.A. Wheeler, W.J. Boettinger, G.B. McFadden, *Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys*, Phys Rev A. (1992) May 15;45(10) 7424-7439.
- [48] Ya.B. Zel'dovich, D.A. Frank-Kamenetskii, *The theory of thermal propagation of flames*, Zh. Fiz. Khim. **12** (1938), 100-105 (in Russian). English transl. in *Collected Works of Ya. B. Zeldovich*, Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1992.
- [49] Ya. B. Zel'dovich, G.I. Barenblatt, V.B. Librovich, G.M. Makhviladze *The Mathematical theory of Combustion and Explosions*, Consultants Bureau, New York, 1985.