Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Matemática

Algebras de Heyting con sucesor

Autor: Lic. Hernán Javier San Martín

Tesis para optar por el título de Doctor de la
Facultad de Ciencias Exactas especialidad Matemática

Directora: Dra. Marta Susana Sagastume
Codirector: Dr. José Luis Castiglioni

Año: 2011

Índice general

0.1. Introducción

En el cálculo proposicional intuicionista podemos considerar los símbolos de conectivos asociados a la implicación, conjunción, disyunción y negación respectivamente. Kuznetsov introdujo un símbolo de conectivo unario nuevo (al que denominamos sucesor), agregando este símbolo en las reglas de formación de fórmulas del intuicionismo y considerando un esquema particular de axiomas.

El sucesor constituye un caso particular de conectivo implícito nuevo del cálculo proposicional intuicionista (esta es una diferencia con respecto al cálculo proposicional clásico, en donde no existen conectivos implícitos nuevos). La contraparte algebraica del cálculo introducido por Kuznetsov son las álgebras de Heyting que admiten una función unaria S a la que llamamos sucesor (siendo S parte del lenguaje del álgebra). Esta función forma parte de una familia de operadores compatibles e implícitamente definidos en álgebras de Heyting.

Esta tesis se divide en las siguientes tres partes: primero se desarrolla una dualidad de Priestley para álgebras de Heyting con ciertos operadores unarios adicionales y en particular para álgebras de Heyting con sucesor; segundo, se utiliza como herramienta la última dualidad mencionada para obtener propiedades de ciertas subvariedades de la variedad de álgebras de Heyting con sucesor; por último se extienden algunos resultados para el caso de retículos residuados.

La dualidad clásica para retículos distributivos acotados dada por H.A. Priestley ([56]) ha sido restringida por L. Esakia ([22]), mostrando que hay una dualidad topológica para la categoría de álgebras de Heyting. Dicho resultado es conocido en la literatura con el nombre de *dualidad de Esakia*.

Comenzamos estudiando *operadores frontales* sobre álgebras de Heyting ([54], [23], [16]). Los mismos son siempre *compatibles*, pero no necesariamente *nuevos* o *implícitos* en el sentido de X. Caicedo y R. Cignoli ([11]). Ejemplos clásicos de operadores frontales implícitos son las funciones γ (Ejemplo 3.1 de [11]), el sucesor (Ejemplo 5.2 de [11]), y la operación de Gabbay (Ejemplo 5.3 de [11]). En este trabajo utilizamos la dualidad de Esakia, mostrando que existe una dualidad para la categoría cuyos objetos son álgebras de Heyting junto con un operador frontal. En particular, establecemos una dualidad para las subcategorías de álgebras de Heyting con cada uno de los operadores implícitos dados como ejemplos.

La tesis se centra básicamente en el estudio de la función *sucesor* sobre las álgebras de Heyting ([11], [16], [17], [23], [41], [50], [51], [52], [61]). También consideramos algunos aspectos lógicos de este operador: el mismo es un caso particular de un *conectivo definido axiomáticamente a partir de un conjunto de fórmulas* del cálculo proposicional intuicionista, razón por la cual posee varias propiedades interesantes ([11]). En 2 hacemos una descripción detallada de lo que actualmente se conoce con respecto al sucesor (también nos referimos a algunos problemas abiertos). La herramienta fundamental que utilizamos para el estudio de dicha función es la dualidad topológica desarrollada para la categoría cuyos objetos son álgebras de Heyting que admiten sucesor (como parte del tipo del álgebra). Estas álgebras se denominan *S-álgebras*.

En [14] X. Caicedo prueba, utilizando modelos de Kripke convenientes, que el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras posee la propiedad de modelo finito (se puede probar que esto es equivalente a decir que la variedad mencionada está generada por sus miembros finitos). En esta tesis damos una prueba algebraica de que el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras posee la propiedad de modelo finito.

Caracterizamos los espacios asociados a las S-álgebras prelineales (ver [34], [44], [46] para propiedades de las álgebras de Heyting prelineales) y probamos que la función sucesor preserva el supremo y la implicación en este caso, un hecho que no vale para cualquier S-álgebra. También probamos que dicha variedad posee la propiedad de modelo finito y que está generada por las cadenas finitas.

A continuación probamos que ciertas subvariedades de la variedad de S-álgebras (aquellas a las cuales podemos asignarle una altura finita) tienen la propiedad de amalgamación. Este resultado, junto con una versión apropiada del Teorema 1 de [43] (ver tambien [33]), nos permite demostrar la interpolación en el cálculo $IPC_S(n)$, que es el asociado a estas variedades. Utilizamos el hecho de que cada álgebra de estas variedades admite modelo canónico para mostrar un teorema de completud del cálculo $IPC_S(n)$ con respecto a modelos de Kripke apropiados. Por otro lado caracterizamos a las subálgebras dando un procedimiento geométrico (en el correspondiente espacio de representación) para determinarlas. También estudiamos el coproducto para ciertos casos particulares. Asimismo hacemos algunas observaciones sobre las álgebras subdirectamente irreducibles, vemos cómo se relacionan estas variedadades con ciertas variedades de Heyting y presentamos una descripción del álgebra libre en un generador para la variedad asociada al cálculo $IPC_S(2)$.

Otra cuestión que tratamos es el estudio de las variedades generadas por (H_n, S), siendo H_n la cadena de n elementos y n un número natural mayor o igual que 2. Comenzamos mostrando cómo se comparan las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$ (es decir, las generadas por (H_n, S)) con la variedad de S-álgebras prelineales y las variedades de S-álgebras de altura menor o igual que un número natural dado. Luego damos una presentación completa para el coproducto. Para finalizar esta parte damos una descripción del espacio de representación del álgebra libre en un generador para cada una de las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$, con lo cual tenemos un modo para construir el álgebra libre en cualquier cantidad de generadores de las variedades generadas por una cadena finita.

En el último capítulo extendemos a retículos residuados resultados de [15]. Sea L un retículo residuado, y $f : L^k \to L$ una función. Damos una condición necesaria y suficiente para la compatibilidad de f. Haciendo uso de la misma probamos que la variedad de retículos residuados es localmente afín completa. Asimismo damos una posible generalización en este contexto de los operadores frontales definidos sobre álgebras de Heyting.

0.2. Conocimientos básicos

En esta sección exponemos las nociones fundamentales del *álgebra universal* que son necesarias para este capítulo. Referencias sobre el tema pueden encontrarse, por ejemplo, en [9] (ver también [36]).

Sea A un conjunto no vacío y n un número natural. Una *operación n-aria sobre A* es una función $f : A^n \to A$, donde n se denomina la *aridad* o *rango* de f. Una *operación finitaria* sobre A es una operación de rango n, para cierto número natural n.

Un *lenguaje* o *tipo* de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *símbolos de función*, tal que un número natural n es asignado a cada miembro f de $\mathcal{F}$. Este número es llamado la *aridad* (o *rango*) de f, y f se dice un *símbolo de función n-aria* .

Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un *álgebra* de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\mathbf{A} = (A, F)$, donde A es un conjunto no vacío y F es un conjunto de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$ le corresponde una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}$ sobre A que pertenece a F. El conjunto A se llama *universo* de $\mathbf{A}$. En lo que sigue, cuando no haya lugar de confusión, escribiremos f en lugar de $f^{\mathbf{A}}$, y si $\mathcal{F}$ es finito, digamos $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_k\}$ (en donde la aridad de cada f_i es finita y aridad $f_1 \leq$ aridad $f_2 \leq$... aridad f_k), escribiremos $(A, f_1, ..., f_k)$ en lugar de $\mathbf{A}$. Diremos en tal caso que el tipo del álgebra es (aridad f_1, aridad f_2,..., aridad f_k).

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \to B$ se dice un *homomorfismo* si para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$, $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$ para cada n-upla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A. Si h es inyectiva, entonces h se dice un *monomorfismo* o una *inmersión* . Si h es suryectiva, entonces h se dice un *epimorfismo* y en tal caso diremos que $\mathbf{B}$ es una *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$. Si h es biyectiva, entonces h se dice un *isomorfismo*.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Diremos que $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathbf{B}}$ es la restricción de $f^{\mathbf{A}}$ a B.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $\theta \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Diremos que θ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si satisface la siguiente relación de *compatibilidad*: si f es un símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$, $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ y $(a_i, b_i) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., n$ entonces $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n) \in \theta$. Por lo tanto, para cada congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ y $f \in \mathcal{F}$ tenemos definido en el conjunto cociente A/θ una operación n-aria $f^{\mathbf{A}/\theta}$ que a cada n-upla de clases de equivalencia de elementos de A/θ le asigna el elemento $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$. Luego el *álgebra cociente* es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones fundamentales satisfacen la condición antes mencionada. Notemos que las álgebras cociente de $\mathbf{A}$ tienen el mismo tipo que $\mathbf{A}$.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra. Escribiremos $Con(\mathbf{A})$ para referirnos al retículo de congruencias de A (con la inclusión como orden). Si este retículo es distributivo, diremos que $\mathbf{A}$ es *congruencia distributiva*.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y $f : A^n \to A$ una función (no necesariamente un homomorfismo).

(a) Diremos que f es una *función compatible con una congruencia θ de* $\mathbf{A}$ si $(a_i, b_i) \in \theta$ para $i = 1, ..., n$ implica que $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$.

(b) Diremos que f es una *función compatible* de $\mathbf{A}$ si es compatible con todas las congruencias de $\mathbf{A}$.

Por esta razón, para cada congruencia θ sobre $\mathbf{A}$ tenemos definido en el conjunto cociente A/θ una operación n-aria $f^{\mathbf{A}/\theta}$ (no necesariamente un homomorfismo) que a cada n-upla de clases de equivalencia de elementos de A/θ le asigna el elemento $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$.

Sea $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. El *producto directo* $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es el producto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$, y si f es un símbolo de operación n-ario, definimos la operación $f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))$, donde $a_1, ..., a_n \in \prod_{i\in I} A_i$, y si $k = 1, .., n$, $a_k(i)$ denota la i-ésima coordenada del vector a_k.

Dada una clase de álgebras K de un mismo tipo, denotaremos como $\mathbb{H}(K)$, $\mathbb{I}(K)$, $\mathbb{S}(K)$ y $\mathbb{P}(K)$ a las clases de imágenes homomorfas, imágenes isomorfas, subálgebras y productos de álgebras de K, respectivamente. Diremos que K es una *variedad* si es cerrada bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos, es decir si $\mathbb{H}(K) \subseteq K$, $\mathbb{S}(K) \subseteq K$ y $\mathbb{P}(K) \subseteq K$. Denotaremos como $\mathbb{V}(K)$ a la menor variedad de álgebras que contiene a K. Si V y W son variedades tales que todo miembro de V es miembro de W, se dice que V es una *subvariedad* de W. Tarski probó que $\mathbb{V}(K) = \mathbb{HSP}(K)$ (Teorema 9.5 de [9]).

Sea X un conjunto cuyos elementos llamaremos *variables* y sea $\mathcal{F}$ un lenguaje de álgebras. El conjunto $T(X)$ de *términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre X* es el menor conjunto que contiene a las variables, a los símbolos de función 0-arios y tal que si $p_1, ..., p_n \in T(X)$ y f es un símbolo de función n-ario, entonces $f(p_1, ..., p_n) \in T(X)$. Sean $x_1, ..., x_n$ variables en X y sea $p(x_1, ..., x_n)$ un término de tipo $\mathcal{F}$ sobre las variables $x_1, .., x_n$. Entonces si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, se define una aplicación $p^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ como sigue:

(1) Si p es una variable x_i entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = a_i$.

(2) Si p es de la forma $f(p(x_1, ..., x_n), ..., p(x_1, ..., x_n))$, donde f es un símbolo de función k-ario, entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), ..., p_k^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n))$.

Una *identidad* de tipo $\mathcal{F}$ sobre X es una expresión de la forma $p = q$, donde p y q son términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre X. Se dice que un álgebra $\mathbf{A}$ satisface la identidad $p(x_1, ..., x_n) = q(x_1, ..., x_n)$ si para cada n-upla $a_1, ..., a_n$ de elementos de A, $p^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)$. Una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ se dice *ecuacional* si existe un conjunto de identidades Σ de tipo $\mathcal{F}$, tal que un álgebra está en K si y sólo si satisface todas las identidades de Σ. Un teorema fundamental del Algebra Universal debido a Birkhoff es el siguiente: *una clase K es ecuacional si y sólo si K es una variedad* (Teorema 11.9 de [9]).

Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice *producto subdirecto* de una familia de álgebras $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ del mismo tipo si verifica las siguientes condiciones:

(P1) Existe una inmersión $\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

(P2) Si $\pi_j : \mathbf{A}_j \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es la proyección sobre la j-ésima coordenada entonces $\pi_j\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ es surjectiva.

Un álgebra $\mathbf{A}$ es *subdirectamente irreducible* si siempre que $\mathbf{A}$ sea producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ mediante un monomorfismo α se tiene que existe $i \in I$ tal que $\pi_i\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo. Además se tiene que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible si y sólo si existe una congruencia mínima en $Con(\mathbf{A}) - \{\Delta\}$, siendo $\Delta = \{(a, b) \in A \times A : a = b\}$ (Teorema 8.4 de [9]).

La importancia del estudio de las álgebras subdirectamente irreducibles reside en el resultado de G. Birkhoff que afirma que toda álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles (Teorema 8.6 de [9]). Este resultado, aplicado al caso del estudio de una variedad en particular, afirma que toda álgebra de una variedad es isomorfa a un producto subdirecto de alguna familia de álgebras subdirectamente irreducibles que se hallan en la misma variedad.

Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Para cada término n-ario de tipo $\mathcal{F}$ y para cada $\mathbf{A} \in K$ tenemos una función $t^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ definida del modo natural. Una función *polinómica n-aria* de $\mathbf{A}$ es una función obtenida al evaluar $m - n$ variables de $t^{\mathbf{A}}$ por elementos fijos de A, para cierto término m-ario t ($m \geq n$). Las funciones polinómicas, en particular las constantes, constituyen los ejemplos más sencillos de funciones compatibles sobre un álgebra $\mathbf{A}$. Un álgebra $\mathbf{A}$ es *afín completa* (o afínmente completa) si toda función compatible de $\mathbf{A}$ está dada por una función polinómica de $\mathbf{A}$. Un álgebra $\mathbf{A}$ es *localmente afín completa* si toda función compatible está dada por una función polinómica sobre todo subconjunto finito de A. Si consideramos una función polinómica de un álgebra $\mathbf{A}$ haremos abuso de lenguaje y la vamos a llamar *polinomio* de $\mathbf{A}$.

Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\mathbf{U}(X)$ el álgebra de tipo $\mathcal{F}$ generada por X. Si para cada $\mathbf{A} \in K$ y para cada función $\alpha : X \to \mathbf{A}$ existe un homomorfismo $\beta : \mathbf{U}(X) \to \mathbf{A}$ que extiende α (es decir, $\beta(x) = \alpha(x)$ para cada $x \in X$), diremos que $\mathbf{U}(X)$ tiene la *propiedad universal para K sobre X*. En tal caso el conjunto X es llamado un *conjunto de generadores libres de* $\mathbf{U}(X)$, y $\mathbf{U}(X)$ se dice que está *libremente generado por X*. Si $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal para K sobre X entonces el homomorfismo α mencionado previamente es único (Lema 10.6 de [9]). Si X e Y son conjuntos que están en biyección, y $\mathbf{U}(X)$ y $\mathbf{U}(Y)$ tienen la propiedad universal de K sobre X e Y respectivamente, entonces $\mathbf{U}(X)$ y $\mathbf{U}(Y)$ son isomorfos (Teorema 10.7 de [9]).

Notemos que si K es una variedad de tipo $\mathcal{F}$, X un conjunto de variables $x_1, ..., x_n$, $\mathbf{U}(X)$ está libremente generado por X y p, q son identidades de tipo $\mathcal{F}$, entonces la identidad $p(x_1, ..., x_n) = q(x_1, ..., x_n)$ es satisfecha por $\mathbf{U}(X)$ si y sólo la identidad $p(x_1, ..., x_n) = q(x_1, ..., x_n)$ es satisfecha en cada $\mathbf{A} \in K$.

Sea V una variedad de álgebras de tipo F y sea $E(C)$ un conjunto de identidades de tipo $F \cup C$, siendo C una familia de símbolos de funciones nuevas. Diremos que $E(C)$ define *implícitamente* C, si en cada álgebra $A \in V$ existe a lo sumo una familia $\{f_A : A^n \to A\}_{f \in C}$ tal que $(A, f_A)_{f \in C}$ satisface la clausura universal de las ecuaciones de $E(C)$ ([13]). En este caso diremos, alternativamente, que cada $f \in C$ está dada por ecuaciones.

Capítulo 1

Preliminares

Exponemos en esta sección las definiciones y propiedades básicas sobre retículos distributivos acotados, álgebras de Heyting, álgebras de Boole, teoría de categorías, topología, espacios de Priestley y espacios de Esakia que nos serán necesarios más adelante.

1.1. Retículos, álgebras de Boole y álgebras de Heyting

Un estudio detallado de la teoría de retículos puede verse, por ejemplo, en [1].

Si $(L, \leq)$ es un poset y $x, y \in L$, denotaremos al supremo entre x e y como $x \vee y$, y al ínfimo de ellos como $x \wedge y$ (si es que existen). Un *retículo* es un poset $(L, \leq)$ en el cual $x \vee y$ y $x \wedge y$ existen para cualesquiera $x, y \in L$.

Si $(L, \leq)$ es un retículo entonces podemos definir el álgebra $(L, \wedge, \vee)$ a través de las siguientes identidades:

(i) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ **(v)** $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(ii) $x \vee y = y \vee x$ **(vi)** $x \wedge y = y \wedge x$

(iii) $x \vee x = x$ **(vii)** $x \wedge x = x$

(iv) $x \vee (x \wedge y) = x$ **(viii)** $x \wedge (x \vee y) = x$

Más aún, si $(L, \wedge, \vee)$ es un álgebra con dos operaciones binarias que satisfacen $(i) - (viii)$ entonces

(ix) $x \vee y = y$ sii $x \wedge y = x$.

La relación $\leq$ sobre L definida como $x \leq y$ sii $x \wedge y = x$ es tal que el poset $(L, \leq)$ es un retículo, siendo $\vee$ y $\wedge$ el supremo e ínfimo del mismo, respectivamente.

En un retículo L las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(I) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, para cada $x, y, z \in L$.

(II) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, para cada $x, y, z \in L$.

Un retículo L es *distributivo* si satisface una (y por lo tanto ambas) de (I) y (II). Diremos que un retículo L es *acotado* si existen elementos $0, 1 \in L$ tales que satisfacen las identidades

$$\textbf{(m)}\ x \wedge 0 = 0, \quad \textbf{(M)}\ x \wedge 1 = 1.$$

De la definición se desprende que 0 es el primer elemento de L y que 1 es el último elemento. Diremos que $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ es un *retículo distributivo acotado* si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo, y $0, 1$ satisfacen (m) y (M) respectivamente. Alternativamente, un retículo distributivo acotado es un álgebra de tipo $(2, 2, 0, 0)$ tal que las dos primeras operaciones satisfacen $(i) - (viii)$ junto con (I), y las últimas dos operaciones satisfacen (m) y (M). Por esta razón la clase de retículos distributivos acotados forma una variedad.

Si L es un retículo y $F \subseteq L$, diremos que F es un *filtro* de L si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $F \neq \emptyset$.

(b) Si $x \in F$, $y \in L$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$ (es decir, F es *creciente*).

(c) Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$.

Diremos que F es un filtro *propio* de L si $F \neq L$, y diremos que F es un *filtro primo* de L si F es un filtro propio que satisface la siguiente condición: para cada $x, y \in L$, si $x \vee y \in F$ entonces $x \in F$ ó $y \in F$. Si X es un subconjunto de L entonces el *filtro generado por* X (es decir, el menor filtro que contiene a X) es igual a

$$F(X) = \{x \in L : x \geq x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n, \text{ para ciertos } x_1, ..., x_n \in X\}.$$

Si $I \subseteq L$, diremos que I es un *ideal* de L si se satisafacen las siguientes condiciones:

(d) $I \neq \emptyset$.

(e) Si $y \in I$, $y \in L$ y $x \leq y$ entonces $x \in I$ (es decir, I es *decreciente*).

(f) Si $x, y \in I$ entonces $x \vee y \in I$.

El *ideal generado por* X (es decir, el menor ideal que contiene a X) es

$$I(X) = \{x \in L : x \leq x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n, \text{ para ciertos } x_1, ..., x_n \in X\}.$$

El siguiente resultado es conocido en la literatura con el nombre de *Teorema de Birkhoff-Stone* (o *Teorema del Filtro Primo*):

Teorema 1.1.1. *Si L es un retículo distributivo, F un filtro de L, I un ideal de L y $F \cap I = \emptyset$ entonces existe un filtro primo P de L tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Un retículo L se dice *completo* si todo subconjunto del mismo admite supremo e ínfimo.

Sea L un retículo acotado. Un elemento $x \in L$ es *complementado* si existe $y \in L$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$. En un retículo distributivo los complementos son únicos. Un *álgebra de Boole* es un retículo distributivo complementado. Si x es un elemento de un álgebra de Boole entonces escribiremos $\overline{x}$ para el complemento de x.

Diremos que H es un *álgebra de Heyting* si H es un retículo con 0 y para cada par de elementos $x, y \in H$ existe la operación binaria $\rightarrow$ dada por

$$x \rightarrow y = max\{z \in H : z \wedge x \leq y\}.$$

Toda álgebra de Heyting H tiene último elemento y verifica que

$$x \leq (y \rightarrow z) \text{ sii } y \wedge x \leq z,$$

para cada $x, y, z \in H$. Más aún, la operación $\rightarrow$ está caracterizada por esta propiedad.

Si H es un álgebra de Heyting y $\bigvee S$ existe para cierto $S \subseteq H$ entonces se satisface la siguiente ley distributiva generalizada:

$$x \wedge (\bigvee S) = \bigvee\{x \wedge y : y \in S\}.$$

Luego toda álgebra de Heyting es un retículo distributivo. En particular, si H es un retículo distributivo completo entonces H es un álgebra de Heyting si y sólo si satisface la condición $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I}(x \wedge x_i)$, para todo $x \in H$ y toda familia de elementos x_i de H. Luego un retículo finito es distributivo si y sólo si existe $\rightarrow$.

Alternativamente, un álgebra de Heyting es un álgebra $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ (es decir, un álgebra de tipo $(2, 2, 2, 0)$) tal que $(H, \vee, \wedge, 0)$ satisface las identidades de retículo con 0 y además se satisfacen las siguientes identidades:

(1) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$.

(2) $x \wedge (x \rightarrow z) = x \wedge ((x \wedge y) \rightarrow (x \wedge z))$.

(3) $z \wedge ((x \wedge y) \rightarrow x) = z$.

En particular tenemos que la clase de álgebras de Heyting forma una variedad. Notemos que toda álgebra de Boole es un álgebra de Heyting. En efecto, basta verificar que $x \rightarrow y = y \vee \overline{x}$.

1.2. Categorías

Los conceptos de categorías que utilizamos durante esta tesis se reducen básicamente a las definiciones clásicas para definir el concepto de *categorías equivalentes* ([47]).

Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de los siguientes datos:

1. Una colección de *objetos*.

2. Una colección de *morfismos*.

3. Para cada morfismo f, un objeto *dominio* de f y un objeto *codominio* de f (usaremos la notación $f : A \rightarrow B$ para abreviar la información: f es un morfismo que tiene dominio A y codominio f).

4. Para cada objeto A un morfismo distinguido id_A, al cual llamaremos la *identidad* (de A).

5. Para cualquier par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ un morfismo $gf : A \to C$ que llamaremos la composición de g con f, sujeta a las siguientes restricciones:

a) si $f : A \to B$ entonces $id_B f = f = f id_A$,

b) si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ entonces $(hg)f = h(gf)$.

Diremos que un morfismo $h : B \to C$ es un *monomorfismo* si para todo par $f, g : A \to B$, $hf = hg$ implica $f = g$. Diremos que h es un *epimorfismo* si para todo par $f, g : B \to C$, $fh = gh$ implica que $f = g$. Diremos que h es un *isomorfismo* si existe un morfismo $j : B \to A$ tal que $jh = id_A$ y $hj = id_B$ (las definiciones de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo que acabamos de introducir son con respecto a una categoría. En la sección *Introducción* definimos monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo con respecto a una variedad).

Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, definimos $\mathcal{C}^{op}$ como la categoría cuyos objetos son los mismos de $\mathcal{C}$ pero invierte los morfismos de $\mathcal{C}$.

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, diremos que $\mathcal{D}$ es una *subcategoría* de $\mathcal{C}$ si para todo par de objetos A, B de $\mathcal{D}$ y todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{D}$, tenemos que $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.

Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un *funtor* de F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ (notaremos $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) es una asignación, que envía objetos de $\mathcal{C}$ en objetos de $\mathcal{D}$ y morfismos de $\mathcal{C}$ en morfismos de $\mathcal{D}$, y que satisface las siguientes condiciones:

1. Si $f : A \to B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ entonces $F(f) : F(A) \to F(B)$ es un morfismo de $\mathcal{D}$.

2. $F(id_A) = id_{F(A)}$, para cada objeto A de $\mathcal{C}$.

3. $F(fg) = F(f)F(g)$ para todo para par de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que el dominio de f coincide con el codominio de g.

A un funtor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ se lo llama *contravariante* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

Dada una categoría $\mathcal{C}$ notaremos con $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ al funtor identidad, es decir al funtor tal que $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(A) = A$ para cada A objeto de $\mathcal{C}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(f) = f$ para cada morfismo f de $\mathcal{C}$.

Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una *transformación natural* ξ de F en G (notación $\xi : F \to G$) es una asignación tal que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ le asigna una flecha $\xi_A : F(A) \to G(A)$ en $\mathcal{D}$, cumpliendo que $\xi_B F(f) = G(f)\xi_A$ para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$. Si cada morfismo $\xi_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo entonces diremos que ξ es un *isomorfismo natural* entre F y G.

Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y dos isomorfismos naturales $\xi : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \to FG$ y $\sigma : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \to GF$. Si además para cada $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ vale que $GF(C) = C$ y $FG(D) = D$ entonces diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *isomorfas* .

Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *dualmente equivalentes* si y sólo si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}^{op}$ son equivalentes.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un *producto* de X, Y (si existe) es un objeto $X \times Y$ junto con morfismos $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ tales que para cada par de morfismos $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$, existe un único morfismo $\langle f, g \rangle : Z \to X \times Y$ tal que $\pi_1 \langle f, g \rangle = f$ y $\pi_2 \langle f, g \rangle = g$. Es decir, debemos pedir que el siguiente diagrama conmute:

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\langle f,g\rangle"] & \\
X & & Y \\
& X \times Y \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un *coproducto* de X, Y (si existe) es un objeto, al que denotaremos como $X \coprod Y$, junto con morfismos $i_1 : X \to X \coprod Y$ e $i_2 : Y \to X \coprod Y$ tales que para cada par de morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$, existe un único morfismo $[f, g] : X \coprod Y \to Z$ tal que $[f, g]i_1 = f$ y $[f, g]i_2 = g$.

1.3. Topología

Las nociones de topología general utilizadas en esta tesis se restringen a las definiciones básicas ([49]). Las propiedades utilizadas en este trabajo sobre espacios topológicos pertenecen a la teoría de espacios de Priestley y espacios de Esakia, respectivamente.

Una *topología* sobre un conjunto X es una familia σ de subconjuntos de X cerrada bajo intersecciones finitas, uniones arbitrarias y tal que $\emptyset, X \in \sigma$. Un *espacio topológico* es un par (X, σ), donde X es un conjunto y σ una topología sobre X. Los elementos $U \in \sigma$ son llamados *abiertos* del espacio topológico (X, σ). Un conjunto F se dirá *cerrado* si $F^c = \{x \in X : x \notin F\}$ es abierto. Un conjunto abierto y cerrado se llamará *clopen*. Si $x \in X$, diremos que U_x es un *entorno* de x si es un conjunto abierto que contiene al elemento x.

Si $A \subseteq X$ definimos $\mathrm{Int}(A)$, al cual denominaremos *interior* de A, como la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A. La *clausura de*A, a la que denotaremos como $\overline{A}$, se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. Si $x \in X$ diremos que x es un *punto de acumulación* (o *punto límite*) de A si cada entorno U_x de x es tal que $U_x \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Escribiremos A_l para referirnos al *conjunto de puntos límites de* A. Si $x \in X$ diremos que x es un *punto aislado* de A si existe un entorno U_x de x tal que $A \cap U_x = \{x\}$. Escribiremos A_a para referirnos al conjunto de puntos aislados de A. Las siguientes propiedades topológicas relacionan a los conjuntos que hemos definido:

$$A_l = A \cap (A_a)^c,$$

$$\overline{A} = A \cup A_l,$$

$$Int(A)^c = \overline{A^c}.$$

Si X es un conjunto, una *base* para una topología sobre X es una colección B de subconjuntos de X (llamados *elementos básicos*) tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elelemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Si B satisface estas dos condiciones, se define la topología σ generada por B como sigue: un subconjunto U de X se dice abierto en X, si para cada $x \in U$

existe un elemento básico B de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$. Se puede probar que σ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$ (Lema 13.1 de [49]).

Una *subbase* S para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X. La *topología generada por la subbase* S se define como la colección σ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de S (para probar que σ es una topología ver pág. 93 de [49]).

Dados dos espacios topológicos (X, σ) y (Y, υ), una función $f : X \to Y$ se dirá *continua* si $f^{-1}(U) \in \sigma$ para cada $U \in \upsilon$.

Un espacio topológico (X, σ) se dice *compacto* si para cada familia A de abiertos tal que $\bigcup_{U \in A} U = X$, existe una subfamilia finita $B \subseteq A$ tal que $\bigcup_{U \in B} U = X$.

1.4. Dualidad de Priestley y dualidad de Esakia

En esta sección describimos brevemente la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados ([56], [57]) y la dualidad de Esakia (o dualidad de Heyting) para las álgebras de Heyting ([22], [48]).

Denotamos como **BDL** a la categoría que tiene como objetos retículos distributivos acotados y como morfismos funciones entre retículos distributivos acotados que preservan todas las operaciones del álgebra. Denotaremos como **HA** a la categoría cuyos objetos son álgebras de Heyting y cuyos morfismos son funciones entre álgebras de Heyting que preservan las operaciones del álgebra.

Un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden* es una terna $(X, \leq, \sigma)$ tal que $(X, \leq)$ es un poset, y dados $x, y \in X$ tal que $x \nleq y$ existe un clopen creciente U tal que $x \in U$ e $y \notin U$. En tal caso diremos que $(X, \leq, \sigma)$ satisface el *axioma de separación de Priestley*. En lo que sigue escribiremos $(X, \leq)$ en lugar de $(X, \leq, \sigma)$.

Un *espacio de Priestley* es un espacio topológico compacto que satisface el axioma de separación de Priestley. Un espacio topológico X es *Hausdorff* si para x, $y \in X$ distintos existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ e $y \in V$. Se verifica que todo espacio de Priestley es Hausdorff y que además admite una base de clopens.

Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ posets y $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ una función. Diremos que f es *monótona* si para cada $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.

Denotaremos como **PS** a la categoría que tiene como objetos espacios de Priestley y como morfismos funciones monótonas y continuas entre espacios de Priestley.

Si L es un retículo distributivo acotado, $\mathbf{X}(L)$ denotará al conjunto de todos los filtros primos de L. Para cada $l \in L$ definimos $\varphi_L(l) = \{P \in \mathbf{X}(L) : l \in P\}$. Se define una topología sobre $\mathbf{X}(L)$ considerando a

$$S = \{\varphi_L(l) : l \in L\} \cup \{\varphi_L(l)^c : l \in L\}$$

como una subbase para la misma. Con esta topología $(\mathbf{X}(L), \subseteq)$ resulta ser un espacio de Priestley. Si $f : L \to M$ es un morfismo en la categoría de retículos distributivos acotados entonces la aplicación $\mathbf{X}(f) : (\mathbf{X}(M), \subseteq) \to (\mathbf{X}(L), \subseteq)$ dada por $\mathbf{X}(f)(P) = f^{-1}(P)$ es un morfismo en la categoría de espacios de Priestley. Por lo tanto tenemos definido un funtor $\mathbf{X} : \mathbf{BDL} \to \mathbf{PS}$.

Si $(X, \leq)$ es un espacio de Priestley, denotaremos por $\mathbf{D}(X)$ al conjunto de clopens crecientes de $(X, \leq)$. Tenemos que $\mathbf{D}(X)$ es un retículo distributivo acotado (considerando la unión como el supremo, la intersección como el ínfimo, $\emptyset$ como primer elemento y X como el último). Si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es un morfismo de espacios de Priestley entonces la aplicación $\mathbf{D}(f) : \mathbf{D}(Y) \to \mathbf{D}(X)$ dada por $\mathbf{D}(f)(U) = f^{-1}(U)$ es un morfismo de retículos distributivos acotados. Por lo tanto tenemos definido un funtor $\mathbf{D} : \mathbf{PS} \to \mathbf{BDL}$.

Si L es un retículo distributivo acotado entonces $\varphi_L : L \to \mathbf{D}(X(L))$ es un isomorfismo en **BDL**. Si $(X, \leq)$ es un espacio de Priestley entonces la función $\epsilon_X : (X, \leq) \to (\mathbf{X}(\mathbf{D}(X)), \subseteq)$ dada por $\epsilon_X(x) = \{U \in \mathbf{D}(X) : x \in U\}$ es un isomorfismo en **PS**.

Teorema 1.4.1. *Los funtores* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{D}$ *establecen una equivalencia dual entre las categorías* ***BDL*** *y* ***PS***.

Llamaremos al resultado previo *dualidad de Priestley* . La misma se restringe a la categoría de álgebras de Heyting.

Si $(X, \leq)$ es un poset y $U \subseteq X$, definimos

$$(U] = \{x \in X : x \leq u, \text{ para algún } u \in U\},$$

$$[U) = \{x \in X : x \geq u, \text{ para algún } u \in U\}.$$

Si $x \in X$ escribiremos $(x]$ en lugar de $(\{x\}]$ y $[x)$ en lugar de $[\{x\})$. Si $U, V \subseteq X$ son crecientes entonces definimos el siguiente subconjunto creciente de X:

$$U \to V = (U \cap V^c]^c. \tag{1.1}$$

El conjunto de crecientes de X, denotado como X^+, con la unión como supremo, la intersección como el ínfimo, la implicación dada por la ecuación (1.1) y el conjunto vacío como primer elemento forma un álgebra de Heyting.

Diremos que $(X, \leq)$ es un *espacio de Esakia* (o de Heyting) si es un espacio de Priestley tal que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ vale que $(U]$ es clopen (esto equivale a pedir que para cada abierto U, $(U]$ sea abierto). Sea $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ una función monótona. Esta función se dirá *p-morfismo* si para cada para $x \in X$ y $z \in Y$ tales que $f(x) \leq z$, existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $f(y) = z$ (alternativamente, si para cada $A \subseteq Y$ vale que $f^{-1}((A]) = (f^{-1}(A)])$. Denotaremos como **HS** la categoría que tiene como objetos espacios de Esakia y como morfismos funciones entre espacios de Esakia tales que son monótonas, continuas y p-morfismos.

Restringiendo la dualidad de Priestley se obtiene el siguiente

Teorema 1.4.2. *Los funtores* $\mathbf{X}$ *y* $\mathbf{D}$ *establecen una equivalencia dual entre las categorías* ***HA*** *y* ***HS***.

El resultado previo es conocido con el nombre de *dualidad de Esakia* (o *dualidad de Heyting*) . En particular, si $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia entonces la implicación del álgebra de Heyting $\mathbf{D}(X)$ está dada por la ecuación (1.1).

Capítulo 2

El conectivo sucesor en el intuicionismo

2.1. Reseña histórica

Consideremos una axiomatización para el *cálculo proposicional clásico*. El lenguaje es construido recursivamente por una cantidad numerable de variables $\pi_1,\ldots,\pi_n,\ldots$ y los conectivos $\wedge$, $\vee$,$\rightarrow$,$\neg$ en el modo usual. La única regla de deducción es *modus ponens* y los esquemas de axiomas son los siguientes:

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,
(2)$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,
(3) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$,
(4) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$,
(5) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$,
(6) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$,
(7) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$,
(8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$,
(9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$,
(10) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

Si reemplazamos el axioma (10) por el axioma $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, obtenemos una axiomatización para el *cálculo proposicional intuicionista*, al que denotaremos como IPC (ver [58], [59]). Definimos $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ y $\beta \rightarrow \alpha$ son teoremas de IPC. Luego, $\equiv$ es una relación de equivalencia en el conjunto de fórmulas del intuicionismo. Podemos definir entonces operaciones en el cociente del modo usual, obteniendo así el *álgebra de Lindenbaum del* IPC. Notemos que los axiomas involucrados son transformados en identidades que valen en todas las álgebras de Heyting. De la definición resulta inmediato que el álgebra de Lindenbaum del IPC es un álgebra de Heyting.

El cálculo I^S, estudiado por Kuznetsov en el artículo [41] y anunciado primero en [40] (ver también [30], [50] y [64]), se obtiene a partir del cálculo IPC junto con una regla de sustitución dada por un conectivo unario S y agregando los siguientes esquemas de axiomas:

(S1) $\alpha \rightarrow S(\alpha)$,

(S2) $(S(\alpha) \to \alpha) \to \alpha$,

(S3)* $((\beta \to \alpha) \to \beta) \to (S(\alpha) \to \beta)$.

El axioma $(S3)^*$ puede ser reemplazado por el axioma

(S3) $S(\alpha) \to (\beta \vee (\beta \to \alpha))$,

que da un cálculo equivalente a I^S (este conectivo va a ser denominado *sucesor* debido a que Caicedo y Cignoli observaron en conversaciones que era el sucesor en algebras de Heyting lineales). Esta variante fue construida, luego de varias discusiones preliminares (ver el final del trabajo [63]) en mayo de 1977. La posibilidad de reemplazar la ecuación $(S3)^*$ por $(S3)$ fue observada por Kuznetsov en diciembre de 1977. Asimismo descubrió que en I^S se podían deducir las fórmulas

$$(\alpha \to \beta) \to (S(\alpha) \to S(\beta)), \qquad (\alpha \leftrightarrow \beta) \to (S(\alpha) \leftrightarrow S(\beta)).$$

Por ejemplo, la validez de la segunda de estas fórmulas permitió, desde el punto de vista algebraico, establecer la propiedad de *compatibilidad* del sucesor en todas las álgebras de Heyting donde existe ([11]).

La interpretación básica del cálculo I^S se remonta al intento de Gödel ([30]) de interpretar la lógica IPC vía una inmersión en una lógica modal, la cual sistemáticamente utiliza la modalidad *demostrable* y refleja la idea intuicionista de que la *verdad* de las proposiciones matemáticas está en su demostrabilidad. Esta inmersión, luego trabajada en más detalle por Tarski y Novikov, quedó sin una interpretación precisa de la modalidad *demostrable*, dado que Gödel mismo ya había observado en [30] que el intentar interpretar directamente esto como una derivabilidad formal en la aritmética de Peano PA traía dificultades debido a la incompletitud de PA (ver también el Teorema de Löb [32]). Trabajos posteriores respecto del cálculo I^S y su contraparte algebraica pueden consultarse en [51], [52], [53] y [61].

La lógica intuicionista ha adquirido una importancia adicional a partir del descubrimiento de sus relaciones con la teoría de categorías, especialmente con la teoría de topos. Un problema que se plantea naturalmente es el de encontrar el análogo intuicionista de las funciones booleanas de la lógica clásica o, en otras palabras, una definición adecuada de *conectivo intuicionista*. Se han propuesto varias definiciones de conectivos intuicionistas, partiendo en cada caso de distintos puntos de vista. Gabbay y su escuela se basan en consideraciones puramente sintácticas, mientras que Caicedo llega a su definición a partir de la semántica dada por los haces sobre espacios topológicos, o, más generalmente, por los topos de Grothendieck. Caicedo y Cignoli han estudiado en [11] el concepto mencionado desde el punto de vista de la semántica algebraica natural, o sea, la de las álgebras de Heyting. Las funciones que merecen el nombre de conectivo intuicionista, ya sea desde el punto de vista de Gabbay o de Caicedo, satisfacen cierta propiedad básica que, mirada desde el punto de vista algebraico, expresa la *compatibilidad* de dichas funciones con todas las congruencias en cada álgebra de Heyting dada (en donde puedan definirse dichas funciones). Caicedo y Cignoli estudiaron extensiones axiomáticas de la lógica intuicionista por *conectivos implícitos* en relación a la *completitud algebraica* (en el sentido de [11]), que depende de la compatibilidad de las funciones asociadas a los conectivos dados. En particular, estudiaron el conectivo implícito *sucesor*. Algunas preguntas abiertas (que se desprenden de [11]) son las siguientes: para una lógica intermedia **I** dada, ¿es cierto que **I** admite una completación al agregar S? ¿Qué ocurre si **I** es la lógica intuicionista?

En el año 2006 Leo Esakia estudió al sucesor en el artículo [23] desde enfoques lógicos, algebraicos, topológicos y categoriales (ver también [54]).

2.2. Propiedades lógicas y algebraicas

Comenzamos estableciendo en marco teórico necesario para expresar algunas de las propiedades del sucesor (como conectivo intuicionista, desde la lógica, y como función, desde el álgebra). Las definiciones y propiedades que se enuncian a continuación fueron extraídas de [11]. Por otro lado, las mismas son necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Sea L el lenguaje de fórmulas del IPC, construido en el modo usual con los símbolos de los conectivos $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, correspondientes a la implicación, conjunción, disyunción y negación, respectivamente, y las variables proposicionales π_i, $i = 0, 1, ...$ Escribiremos $\varphi \leftrightarrow \psi$ como abreviatura para $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Sea ∇ un símbolo de conectivo nuevo (de aridad arbitraria), y $L(\nabla)$ denotará el lenguaje proposicional obtenido agregando ∇ en las reglas de formación de fórmulas. Para cada conjunto de fórmulas $A(\nabla) \subseteq L(\nabla)$, le asociamos el sistema axiomático teniendo a $A(\nabla) \cup I$ como esquema de axiomas, donde I es un sistema completo para el IPC (como el dado por ejemplo en [58] y [59]), con sustitución en los esquemas de axiomas y Modus Ponens como únicas reglas. Sólo consideraremos este tipo de sistemas. Dada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\nabla)$, la notación $\Gamma \vdash_{A(\Phi)} \varphi$ indicará que φ es *deducible* (o *derivable*) de Γ en este cálculo. Escribiremos $\vdash_{A(\nabla)} \varphi$ si $\Gamma = \emptyset$. Es inmediato que el *teorema de la deducción* se satisface:

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{A(\nabla)} \varphi \text{ implica } \Gamma \vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \varphi.$$

Cada fórmula $\varphi \in L(\nabla)$ pude ser vista como un término en el tipo $\tau \cup \nabla$ de álgebras de Heyting aumentadas con el conectivo ∇ de símbolo de operación, en las variables π_i. Por lo tanto, a cada extensión $A(\nabla)$ del cálculo intuicionista le podemos asociar el sistema de ecuaciones $E(\nabla) = \{\varphi = 1 : \varphi \in A(\nabla) \cup I\}$, y la correspondiente variedad de álgebras de Heyting

$$V(A(\nabla)) = V(E(\nabla)).$$

Definición 2.2.1. (Def. 4.2 of [11]) Un conjunto de fórmulas $A(\nabla)$ se dirá que *define axiomáticamente un conectivo* ∇ si vale que

$$\vdash_{A(\nabla) \cup A(\hat{\nabla})} \nabla(\pi_1, ..., \pi_n) \leftrightarrow \hat{\nabla}(\pi_1, ..., \pi_n),$$

donde $\hat{\nabla}$ es un conectivo n-ario nuevo y $A(\hat{\nabla}) = \{\varphi(\nabla/\hat{\nabla}) : \varphi \in A(\nabla)\}$.

Si $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo, escribiremos IPC_∇ para el cálculo proposicional intuicionista con los axiomas adicionales dados por las fórmulas de $A(\nabla)$. Para la lógica IPC_∇ consideraremos la variedad $V(A(\nabla))$.

Sea ∇ un símbolo de conectivo nuevo (de aridad arbitraria). Como $L(\nabla)$ con las operaciones sintácticas es el álgebra libre absoluta de tipo $\tau \cup \{\nabla\}$

sobre el conjunto de variables proposicionales $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, ...\}$, toda función $v : \Pi \to Dominio(H)$ con $H \in V(A(\nabla))$ (llamada H-valuación) puede ser extendida a un único homomorfismo $\overline{v} : F \to H$. Luego podemos definir para cada conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\nabla)$ una *relación de consecuencia algebraica* como sigue:

Definición 2.2.2. $\Gamma \Vdash_{A(\nabla)} \varphi$ si y sólo si para cada $H \in V(A(\nabla))$ y H-valuación v: $\overline{v}(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ implica que $\overline{v}(\varphi) = 1$.

Es sencillo chequear, por inducción en la longitud de las demostraciones, que $\vdash_{A(\nabla)}$ es correcta con respecto a esta semántica. Esto es,

$$(CT)\ \Gamma \vdash_{A(\nabla)} \varphi \text{ implica que } \Gamma \Vdash_{A(\nabla)} \varphi.$$

En particular, $\vdash_{A(\nabla)} \varphi$ implica que $\varphi = 1$ es una ecuación en la variedad $V(A(\nabla))$. La recíproca de (CT), la *completud algebraica fuerte* de $\vdash_{A(\nabla)}$, no es en general verdadera.

Teorema 2.2.3. *(Teorema 4.1 de [11]) Las siguientes condiciones son equivalentes para cada $A(\nabla) \subseteq L(\nabla)$:*

(1) $\vdash_{A(\nabla)}$ *es fuertemente completo para la relación de consecuencia algebraica. Es decir, $\Gamma \Vdash_{A(\nabla)} \varphi$ implica que $\Gamma \vdash_{A(\nabla)} \varphi$, para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq L(\nabla)$.*

(2) *Para cada $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$ se verifica*

$$\vdash_{A(\nabla)} \bigwedge_{i=1}^{n} (\alpha_i \leftrightarrow \beta_i) \to (\nabla(\alpha_1, ..., \alpha_n) \leftrightarrow \nabla(\beta_1, ..., \beta_n))$$

Teorema 2.2.4. *(Teorema 4.2 de [11]) Si $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo entonces se satisface la condición* (2) *del Teorema 2.2.3.*

Diremos que $A(\nabla)$ es una *extensión conservadora* del intuicionismo o, más generalmente, de una lógica intermedia $\mathbf{I}$, si $\vdash_{A(\nabla)} \mathbf{I}$, y $\vdash_{A(\nabla)} \varphi$ implica que $\vdash_{\mathbf{I}} \varphi$ para cada $\varphi \in L$.

Diremos que ∇ satisface la *propiedad de la disyunción* si $\vdash_{A(\nabla)} (\varphi \vee \psi)$ implica que $\vdash_{A(\nabla)} \varphi$ ó $\vdash_{A(\nabla)} \psi$.

Definición 2.2.5. Si $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo ∇ y este es una extensión conservadora de una lógica intermedia $\mathbf{I}$ entonces diremos que ∇ es un *conectivo implícito de* $\boldsymbol{I}$. Si además se satisface que

$$\nvdash_{A(\nabla)} \nabla(\pi_1, ..., \pi_n) \leftrightarrow \varphi,$$

para cada $\varphi \in L$, diremos que ∇ es un conectivo implícito *nuevo* de $\mathbf{I}$.

Un conjunto de ecuaciones $E(h)$ en el lenguaje de álgebras de Heyting aumentada con el símbolo de función n-aria h se dirá que define una *operación implícita de álgebras de Heyting* si para cada álgebra de Heyting H hay a lo sumo una función $h^H : H^n \to H$ (esto es equivalente a decir que $E(h)$ define implícitamente h). La función h se dirá que define una *operación implícita compatible* si todas las h^H son compatibles.

Corolario 2.2.6. *(Corolario 4.3 de [11]) Si un conjunto de fórmulas* $A(\nabla)$ *define axiomáticamente un conectivo entonces el correspondiente conjunto de ecuaciones define un operador implícito compatible de álgebras de Heyting. Más aún, el sistema* $\vdash_{A(\nabla)}$ *es fuertemente completo.*

Denominaremos $A(S)$ al conjunto que tiene como elementos los axiomas dados por (S1), (S2) y (S3). En [11] se prueban los siguientes hechos:

(1) $A(S)$ es una extensión conservadora de la lógica intuicionista.

(2) $\vdash_{A(S)}$ tiene la propiedad de la disyunción.

(3) $A(S)$ define axiomáticamente un conectivo S, de lo cual se desprende que $\vdash_{A(S)}$ es fuertemente completo. En particular, la lógica I^S es correcta y completa.

(4) $A(S)$ define un conectivo implícito nuevo.

(5) Sea $\mathfrak{L}_n$ una axiomatización de la lógica intermedia con valores en H_n, la cadena de Heyting de longitud n, para $n \geq 3$ (ver [31], [45], [62]). La lógica $\mathfrak{L}_n + S$ la definimos como la unión de $\mathfrak{L}_n$ junto con el sistema de axiomas $A(S)$ para el conectivo S. Tenemos que el sistema $\mathfrak{L}_n + S$ es una extensión conservadora de $\mathfrak{L}_n$, fuertemente completa para valuaciones en el álgebra (H_n, S) (S resulta ser un conectivo implícito sobre $\mathfrak{L}_n$). Más aún, todo conectivo implícito nuevo sobre $\mathfrak{L}_n + S$ es equivalente en este sistema a una combinación de $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ y S (Teorema 6.1 de [11]).

(7) El sistema de ecuaciones asociado a los axiomas $(S1)$, $(S2)$ y $(S3)$ define un operador implícito compatible S de álgebras de Heyting.

(8) La función S no es un término, ya que no existe en toda álgebra de Heyting (por ejemplo no existe en el intervalo real $[0, 1]$).

Cabe destacar que la tercera propiedad dada en los ítems previos puede extenderse al caso de lógicas intermedias con el conectivo S.

Capítulo 3

Operadores frontales sobre álgebras de Heyting

Un *operador frontal* en un álgebra de Heyting es un operador expansivo que preserva ínfimos finitos el cual satisface además la ecuación

$$\tau(x) \leq y \vee (y \to x).$$

Los operadores frontales son siempre compatibles, pero no necesariamente nuevos o implícitos en el sentido de Caicedo y Cignoli ([11]). Entre los ejemplos conocidos de operadores frontales implícitos se hallan las funciones γ (Ejemplo 3.1 de [11]), el sucesor (Ejemplo 5.2 de [11]), y la operación de Gabbay (Ejemplo 5.3 de [11]).

En este capítulo estudiaremos una dualidad para la categoría de álgebras de Heyting frontales (basándonos en la dualidad de Esakia) y en particular para las subcategorías de álgebras de Heyting con cada uno de los operadores implícitos dados como ejemplos. La mayor parte de los resultados que expondremos fueron publicados en [16].

3.1. Introducción

Si consideramos al intuicionismo y a los cálculos proposicionales intermedios como lógicas con valores de verdad en álgebras de Heyting, es natural considerar nuevos conectivos para estas lógicas como operaciones en álgebras. En particular nos interesamos por el cálculo considerado por Esakia en [23], llamado *cálculo de Heyting modalizado* mHc, el cual consiste en aumentar el cálculo proposicional de Heyting con un operador modal. Los modelos algebraicos de mHc son álgebras de Heyting con un operador unario sujeto a identidades adicionales. Estas identidades deben ser la contraparte algebraica de los axiomas que el operador modal satisface en la lógica.

Un *operador frontal* τ en un álgebra de Heyting es un operador unario que satisface las siguientes ecuaciones:

(f1) $\tau(x \wedge y) = \tau(x) \wedge \tau(y)$,

(f2) $x \leq \tau(x)$,

(f3) $\tau(x) \leq y \vee (y \to x)$.

Un *álgebra de Heyting frontal* es un álgebra $(H, \wedge, \vee, \to, \tau, 0)$, en donde τ es un operador frontal. Para las álgebras de Heyting frontales $(H, \wedge, \vee, \to, \tau, 0)$ escribiremos (H, τ) para abreviar.

Observación 3.1.1. *Notemos que las ecuaciones $(f1)$ y $(f2)$ son equivalentes a $(f2)$ junto con la ecuación adicional*

(a) $\tau(x \to y) \leq \tau(x) \to \tau(y)$.

En efecto, supongamos que $(f1)$ y $(f2)$ valen. Luego por $(f1)$ se tiene que $\tau(x \to y) \leq \tau(x) \to \tau(y)$ (ya que τ es monótona). Recíprocamente, supongamos que valen las ecuaciones $(f2)$ y (a). En particular resulta que τ es monótona. Para probarlo consideremos $x \leq y$, es decir, $x \to y = 1$. Por $(f2)$ y (a) resulta que $1 = x \to y \leq \tau(x \to y) \leq \tau(x) \to \tau(y)$, es decir, $\tau(x) \to \tau(y) = 1$. Esto último es equivalente a decir que $\tau(x) \leq \tau(y)$. Como τ es monótona resulta que vale la ecuación $\tau(x \wedge y) \leq \tau(x) \wedge \tau(y)$. Por otro lado, dado que $x \to y = x \to (x \wedge y)$ e $y \to x = y \to (x \wedge y)$ tenemos por $(f2)$ que

$$\tau(x) \wedge \tau(x \to y) \leq \tau(x \wedge y),$$

$$\tau(y) \wedge \tau(y \to x) \leq \tau(x \wedge y).$$

Tomando ínfimo en ambos miembros y utilizando la monotonía de τ llegamos a que $\tau(x) \wedge \tau(y) \leq \tau(x \wedge y)$.

Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si $\delta(A) = A_l$, el operador dual τ (co-derivado) será definido como sigue: $\tau(A)$ es el conjunto de todos los *puntos frontales* de A, en donde x es un punto frontal de A si existe un entorno U_x de x tal que $U_x \subseteq A \cup \{x\}$. El álgebra de Heyting $H(X)$ de todos los abiertos de un espacio topológico X junto con el operador τ definido previamente forma un álgebra de Heyting frontal, en donde si $A, B \in H(X)$ entonces $A \to B = \text{Int}\,(B \cup A^c)$. Para más detalles ver [23].

Para cada $A \in H(X)$ se verifica que

$$\tau(A) = A \cup (A^c)_a.$$

En efecto, sea $x \in \tau(A) - A$. Veamos que x es un punto aislado de A^c. Tenemos que existe U_x entorno de x tal que $U_x \subseteq A \cup \{x\}$, por lo cual $U_x \cap A^c = \{x\}$. Luego, x es un punto aislado aislado de A^c. Recíprocamente consideremos $x \in (A \cup (A^c)_a) - A$, es decir, x un punto aislado de A^c. Luego existe un abierto U tal que $U \cap A^c = \{x\}$. De este modo tenemos que $U = U \cap (A \cup A^c) = (U \cap A) \cup \{x\} \subseteq A \cup \{x\}$. Por lo tanto x es un punto frontal de A.

Si $(X, \leq)$ es un poset y $A \subseteq X$, A_M denotará al *conjunto de elementos maximales de A*. Dado un poset $(X, \leq)$ podemos considerar $H(X) = X^+$, obteniendo así la siguiente correspondencia:

Espacio topológico $H(X)$	Caso particular X^+
Abiertos	Crecientes
Cerrados	Decrecientes
Entornos de x	Crecientes que contienen a $[x)$
Int(A)	$\{x \in X :\ [x) \subseteq A\} = (A^c]^c$
$\overline{A}$	$\{x \in X :\ [x) \cap A \neq \emptyset\} = (A]$
A_l	$\{x \in X :\ ([x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$
A_a	A_M

Probaremos que si $A \subseteq X$ entonces $A_a = A_M$. Sea $x \in A_M$, con lo cual $[x) \cap V_a = \{x\}$ y por ende $x \in V_a$. Recíprocamente sea $x \in V_a$, con lo cual existe U_x entorno de x tal que $U_x \cap V = \{x\}$. Sea $x \leq y$ con $y \in V$. En particular $y \in [y) \cap V \subseteq [x) \cap V = \{x\}$, es decir $y = x$.

Observación 3.1.2. *Si X es un espacio topológico podemos definir el operador $\Box : H(X) \to H(X)$ como $\Box(A) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Int}(A \cup \{x\})$ ([53]). Notemos que si A es un abierto de X entonces $\Box(A) = \tau(A)$. En efecto, la inclusión $\tau(A) \subseteq \Box(A)$ es inmediata. Recíprocamente sea $y \in \Box(A)$, por lo cual existe $x \in X$ tal que $y \in \mathrm{Int}(A \cup \{x\})$. Luego existe un entorno U_y de y tal que $U_y \subseteq A \cup \{x\}$. Si $y \in A$ entonces $y \in \tau(A)$. Sea $y \notin A$. Vamos a probar que $U_y \subseteq A \cup \{y\}$. Consideremos $z \in U_y$, lo que implica que $z \in A \cup \{x\}$. Si $z \in A$ entonces $z \in A \cup \{y\}$. Sea $z \notin A$, por lo cual $z = x$. Como $y \in U_y$ e $y \notin A$ se tiene que $y = x$, es decir, $x = y = z \in \{y\} \subseteq A \cup \{y\}$. Por lo tanto $y \in \tau(A)$ y en consecuencia $\Box(A) \subseteq \tau(A)$.*

Observación 3.1.3. *Dado un poset $(X, \leq)$ podemos considerar el álgebra de Heyting $H(X) = X^+$. Si $U, V \in X^+$ entonces $U \to V = (U \cap V^c]^c$. Para cada $U \in X^+$, si $\tau(U)$ denota el conjunto de puntos frontales de U entonces vale la igualdad*

$$\tau(U) = U \cup (U^c)_M.$$

La clase de todas las álgebras de Heyting frontales será denotada como **fHA**. Esta clase puede ser vista como una categoría, en la cual los objetos son álgebras de Heyting frontales y los morfismos son homomorfismos de álgebras de Heyting que preservan el operador frontal.

En [11] (Lema 2.1) se probó que una función $h : H \to H$ (donde H es un álgebra de Heyting) es una función compatible de H si y sólo si $h(x \wedge y) \wedge y = h(x) \wedge y$, para cada $x, y \in H$ (de modo alternativo, h es compatible si y sólo si $x \leftrightarrow y \leq h(x) \leftrightarrow h(y)$ para cada $x, y \in H$). Por esta razón tenemos que si (H, τ) es un álgebra de Heyting frontal, τ es una función compatible de H, por $(f1)$ y $(f2)$.

En el caso de que un operador implícito τ sea frontal diremos que (H, τ) es una *τ-álgebra*. Para cada τ implícita particular, τ**HA** denotará la subcategoría de **fHA** cuyos objetos son τ-álgebras.

En este capítulo daremos una condición suficiente para que un operador sea frontal y estudiaremos algunos ejemplos de ellos: S, γ y G (ver [11]). Además probaremos algunas propiedades de estas funciones. Luego construiremos una dualidad de tipo Priestley para la categoría **fHA**. Finalmente, como aplicación, daremos una sencilla descripción de la teoría de representación de las álgebras de Heyting con cada uno de los operadores frontales dados como ejemplos.

El caso particular de la teoría de representación que daremos para las S-álgebras nos será de gran utilidad para esta tesis.

3.2. Algebras de Heyting frontales

En esta parte del trabajo daremos una condición necesaria y suficiente para que un operador resulte frontal y estudiaremos algunos ejemplos de ellos. Notemos que para cada álgebra de Heyting H existe al menos una función $\tau : H \to H$ tal que el álgebra (H, τ) es un álgebra de Heyting frontal: la función identidad.

Proposición 3.2.1. *Sean H un álgebra de Heyting y $P : H \times H \to H$ una función tal que satisface las siguientes condiciones para cada $x, y, z \in H$:*

(a) $x \leq P(x, y)$,

(b) $P(x, y) \leq y \vee (y \to x)$,

(c) $P(x \wedge y, z) = P(x, z) \wedge P(y, z)$,

(d) *Si* $y \geq z$ *entonces* $P(x, y) \leq P(x, z)$.

Si $\tau : H \to H$ *dada por*

$$\tau(x) = min\{y \in H : P(x, y) \leq y\}$$

define una función entonces τ es un operador frontal. Recíprocamente, si $\tau : H \to H$ es un operador frontal entonces existe una función $P : H \times H \to H$ tal que satisface las condiciones (a)-(d) y tal que $\tau(x) = min\{y \in H : P(x, y) \leq y\}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Por (a) tenemos que $x \leq P(x, \tau(x)) \leq \tau(x)$, con lo cual $x \leq \tau(x)$. Por (b) se tiene que

$$P(x, y \vee (y \to x)) \leq y \vee (y \to x) \vee ((y \vee (y \to x)) \to x)) = y \vee (y \to x),$$

por lo cual $\tau(x) \leq y \vee (y \to x)$. Por (c) tenemos que si $z \leq w$ entonces $P(z, \tau(w)) \leq P(w, \tau(w)) \leq \tau(w)$ y por ende $\tau(z) \leq \tau(w)$. Como τ es monótona tenemos que $\tau(x \wedge y) \leq \tau(x) \wedge \tau(y)$. Por otro lado, tenemos que

$$\tau(x) \leq \tau(x \wedge y) \vee P(x, \tau(x \wedge y)), \tag{3.1}$$

$$\tau(y) \leq \tau(x \wedge y) \vee P(y, \tau(x \wedge y)). \tag{3.2}$$

En efecto, por (d) tenemos que $P(x, a \vee P(x, a)) \leq a \vee P(x, a)$ y $P(x, b \vee P(y, b)) \leq b \vee P(y, b)$, para cada $a, b \in H$ (en particular vale para $a = b = \tau(x \wedge y)$). Tomando ínfimo en ambos miembros de las desigualdades (3.1) y (3.2) obtenemos, utilizando (c), que $\tau(x) \wedge \tau(y) \leq \tau(x \wedge y)$. Por lo tanto $\tau(x) \wedge \tau(y) = \tau(x \wedge y)$.
$\Leftarrow$) Basta considerar $P(x, y) = \tau(x)$. □

El sistema $E(S)$ que consiste de las siguientes ecuaciones dadas en [11] define una operación implícita compatible S de álgebras de Heyting:

(S1) $x \leq S(x)$,

(S2) $S(x) \leq y \vee (y \to x)$,

(S3) $S(x) \to x = x$.

La operación S será llamada *función sucesor*. Equivalentemente, el sucesor puede ser definido como

$$S(x) = min\ \{y : y \to x \leq y\}.$$

Es decir: si consideramos un álgebra de Heyting que admite sucesor entonces para cada x existe el mínimo del conjunto $\{y : y \to x \leq y\}$ y además $S(x) = min\ \{y : y \to x \leq y\}$; recíprocamente, si consideramos un álgebra de Heyting tal que para cada x existe el mínimo del conjunto $\{y : y \rightarrow x \leq y\}$ entonces existe función sucesor y además $S(x) = min\ \{y : y \rightarrow x \leq y\}$.

Para probar esto recordemos que en toda álgebra de Heyting vale el siguiente hecho:

$$y \rightarrow x \leq y \text{ sii } y \rightarrow x = x \text{ y } x \leq y. \tag{3.3}$$

Para cada x podemos definir el conjunto

$$S_x = \{y : y \rightarrow x \leq y\}.$$

Supongamos que $S(x)$ satisface las ecuaciones $(S1)$, $(S2)$ y $(S3)$. Por $(S1)$ y $(S3)$ tenemos que $S(x) \in S_x$. Si $y \in S_x$ entonces por $(S2)$ tenemos que $S(x) \leq y \vee (y \rightarrow x) = y$, con lo cual $S(x) = min\ S_x$. Recíprocamente, sea $S(x) = min\ S_x$. Como $S(x) \in S_x$, por (3.3), las ecuaciones $(S1)$ y $(S3)$ valen. Notemos que $(y \vee (y \rightarrow x)) \rightarrow x \leq y \vee (y \rightarrow x)$, con lo cual $S(x) \leq y \vee (y \rightarrow x)$. Por lo tanto vale $(S2)$.

Notemos que las ecuaciones $(S1)$ y $(S3)$ equivalen a la ecuación

$$S(x) \rightarrow x \leq S(x).$$

Como consecuencia de la Proposición 3.2.1 y el hecho de que para S, $P(x, y) = y \rightarrow x$, tenemos el siguiente

Lema 3.2.2. *Sea H un álgebra de Heyting tal que la función S existe. Luego para cada $x, y \in H$ vale que $S(x \wedge y) = S(x) \wedge S(y)$.*

Como consecuencia del lema previo, tenemos la siguiente

Proposición 3.2.3. *La función sucesor está también implícitamente definida por las ecuaciones $(f1)$,$(f2)$, $(f3)$ y $(S3)$.*

Ejemplo 3.2.4. *Si consideramos una cadena finita, o el conjunto de los números naturales con un top (con la estructura usual de álgebra de Heyting), tenemos que*

$$S(x) = \begin{cases} x^+ & si\ x \neq \omega \\ \omega & si\ x = \omega, \end{cases}$$

en donde x^+ es el siguiente de x y ω representa al último elemento del álgebra. Más áun, si C es un álgebra de Heyting tal que es una cadena entonces C admite sucesor si y sólo si para cada $x \neq 1$ el conjunto C_x admite mínimo, siendo $C_x = \{y : y > x\}$. Dado que $S_1 = \{1\}$, para probar la afirmación anterior bastaría ver que para cada $x \neq 1$ vale que $S_x = C_x$. Tenemos que $y \in S_x$ sii $y \rightarrow x = x$ y $x \leq y$ sii $x = y = 1$ ó $y > x$ sii $y > x$ sii $y \in C_x$.

Para un álgebra de Heyting dada escribiremos $\neg x$ en lugar de $x \rightarrow 0$.

El sistema $E(\gamma)$, que consiste de las siguientes ecuaciones dadas en [11] define una operación implícita compatible γ de álgebras Heyting:

(γ_1) $\neg\gamma(0) = 0$,

(γ_2) $\gamma(0) \leq (x \vee \neg x)$,

(γ_3) $\gamma(x) = x \vee \gamma(0)$.

La operación γ será llamada *función gamma*.

Para cada x definimos el conjunto

$$\gamma_x = \{y : \neg y \vee x \leq y\}.$$

De un modo equivalente, esta operación puede ser definida como

$$\gamma(x) = min\ \gamma_x.$$

En efecto, supongamos que γ satisface las ecuaciones (γ_1)-(γ_3). Por (γ_1) y (γ_3) tenemos que $\neg\gamma(x) \vee x = (\neg x \wedge \neg\gamma(0)) \vee x = x \leq \gamma(x)$, con lo cual $\gamma(x) \in \gamma_x$. Si $y \in \gamma_x$ entonces por (γ_2) y (γ_3) tenemos que $\gamma(x) = x \vee \gamma(0) \leq x \vee y \vee \neg y = y$, es decir, $\gamma(x) \leq y$. Recíprocamente veremos que $\gamma(x) = min\ \gamma_x$ satisface (γ_1)-(γ_3). Como $\gamma(0) \in \gamma_0$ tenemos que $\neg\gamma(0) \leq \gamma(0)$, es decir, $\neg\gamma(0) = 0$. Además como $x \vee \neg x \in \gamma_0$ tenemos que vale (γ_2). Finalmente tenemos que $x \leq \gamma(x)$ (se deduce de que $\gamma(x) \in \gamma_x$) y que $\gamma(0) \leq \gamma(x)$ (esta condición se deduce de la monotonía de γ. Si $x_1 \leq x_2$ entonces $\gamma_{x_2} \leq \gamma_{x_1}$, lo que a su vez implica que $\gamma(x_1) \leq \gamma(x_2)$). Por lo tanto $x \vee \gamma(0) \leq \gamma(x)$. Para la otra desigualdad utilizamos el hecho de que $x \vee \gamma(0) \in \gamma_x$.

La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 3.2.5. *Sea H un álgebra de Heyting. La función γ está también implícitamente definida por las ecuaciones* ($f1$)*,* ($f2$)*,* ($f3$) *y las siguientes ecuaciones adicionales:*

(γ_4) $\neg\gamma(0) = 0$,

(γ_5) $\gamma(x) \leq x \vee \gamma(0)$.

El sistema $E(G)$, que consiste de las siguientes ecuaciones dadas en [26], definen una operación implícita compatible G de álgebras Heyting:

(G1) $G(x) \leq y \vee (y \to x)$,

(G2) $x \to y \leq G(x) \to G(y)$,

(G3) $x \leq G(x)$,

(G4) $G(x) \leq \neg\neg x$,

(G5) $G(x) \to x \leq \neg\neg x \to x$.

Esta operación será llamada *función de Gabbay*. En [65] se probó que ($G2$) es consecuencia de las restantes ecuaciones. De un modo equivalente, G puede ser definida como la función unaria

$$G(x) = min\ \{y : (y \to x) \wedge \neg\neg x \leq y\}.$$

Para probar este hecho recordemos que en toda álgebra de Heyting vale la siguiente propiedad:

$$(y \to x) \wedge \neg\neg x \leq y \text{ sii } y \to x \leq \neg\neg x \to x \text{ y } x \leq y. \tag{3.4}$$

Sea
$$G_x = \{y : (y \to x) \wedge \neg\neg x \leq y\}.$$
Luego por (3.4) concluimos que $G_x = \{y : y \to x \leq \neg\neg x \to x \text{ y } x \leq y\}$. Supongamos que G existe. Por $(G3)$ y $(G5)$ tenemos que $G(x) \in G_x$. Si $y \in G_x$ entonces por $(G1)$ y $(G4)$ concluímos que $G(x) \leq (y \wedge \neg\neg x) \vee ((y \to x) \wedge \neg\neg x) \leq (y \wedge \neg\neg x) \vee y = y$, así que $G(x) = min\ G_x$. Recíprocamente, sea $G(x) = min\ G_x$. Luego $(G1)$ y $(G5)$ es consecuencia de que $G(x) \in G_x$. Como $\neg\neg x \in G_x$ tenemos que $(G4)$ vale. Como $x \leq y \vee (y \to x)$ y $(y \vee (y \to x)) \to x \leq \neg\neg x \to x$ se tiene que $y \vee (y \to x) \in G_x$, por lo cual $(G1)$ vale.

Teniendo en cuenta la Proposición 3.2.1 y el hecho de que para G, $P(x, y) = (y \to x) \wedge \neg\neg x$, se concluye el siguiente

Lema 3.2.6. *Sea H un álgebra de Heyting tal que la función G existe. Luego para cada $x, y \in H$, $G(x \wedge y) = G(x) \wedge G(y)$.*

Observación 3.2.7. *La función de Gabbay está implícitamente definida por las ecuaciones $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$, $(G4)$ y $(G5)$.*

Tenemos otra posible caracterización para la función de Gabbay, que es la que se enuncia a continuación:

Proposición 3.2.8. *Sea H un álgebra de Heyting. La función de Gabbay existe si y sólo si satisface las ecuaciones de operador frontal junto con la ecuación adicional*
$$G(x) \to x = \neg\neg x \to x. \tag{3.5}$$

Demostración. Sea G la función de Gabbay. En virtud del Lemma 3.2.6, G es un operador frontal. Por $(G4)$ y $(G5)$ se tiene que $G(x) \to x = \neg\neg x \to x$. Recíprocamente, sea G un operador frontal que satisface además la ecuación (3.5). Sólo necesitamos probar la ecuación $(G4)$. Tenemos que $G(\neg\neg x) \to \neg\neg x = 1$, con lo cual $G(\neg\neg x) \leq \neg\neg x$. Por $(f1)$ se tiene que G es monótona, lo cual implica que $G(x) \leq G(\neg\neg x) \leq \neg\neg x$. $\square$

En [11] Caicedo y Cignoli probaron que las funciones γ y G son definibles en términos de S como
$$\gamma(x) = x \vee S(0) \text{ y } G(x) = S(x) \wedge \neg\neg x.$$
Más aún, probaron que G y γ definen a S como
$$S(x) = G(x) \vee \gamma(x).$$
La función S no es definible a partir de G ó de γ. Para verlo consideremos el álgebra de Heyting totalmente ordenada $H_e = \mathbb{N}_0 \cup \{\alpha, \beta\}$ obtenida al agregar dos nuevos elementos α, β al conjunto de números naturales con cero $\mathbb{N}_0$, de modo tal que $n < \alpha < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En el álgebra de Heyting H_e^{op} (el álgebra de Heyting H_e con el orden inverso) existe γ pero no S. Consideremos el álgebra de Heyting $\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$, siendo $n < \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En el álgebra de Heyting $(\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\})^{op}$ (el álgebra de Heyting $\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ con el orden inverso) hay G pero no hay S.

Las funciones G y γ no son mutuamente definibles: en $(\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\})^{op}$ hay G pero no hay γ y en H_e^{op} hay γ pero no hay G.

El sucesor existe en todas las álgebras de Heyting finitas. Este hecho es mencionado en [11]; un modo alternativo de probarlo sería verificando que si H es un álgebra de Heyting y $x \in H$ entonces S_x es un filtro (para ello ver proposiciones 4 y 5 de [23]). Como S existe en toda álgebra de Heyting finita tenemos que γ y G también existen en toda álgebra de Heyting finita.

Consideremos la función unaria compatible definida sobre H_e como (ver Ejemplo 2.1 de [11]):

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \text{ es par o } x = \alpha, \\ \beta & \text{si } x \text{ es impar o } x = \beta. \end{cases}$$

En [11] se probó que f es una función compatible que no es un polinomio, con lo cual variedad de álgebras de Heyting no es afín completa.

El siguiente lema nos permite demostrar que el álgebra de Heyting H_e enriquecida en su lenguaje por ciertos operadores frontales implícitos no es afín completa.

Lema 3.2.9. *Si p es un polinomio en (H_e, S) entonces existen n y $x_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $p(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$, donde $S^{(0)}(x) = x$, o existe $x_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $p(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ (siendo $a \in H_e$).*

Demostración. La demostración será hecha por inducción sobre la complejidad de los polinomios en (H_e, S).

Si p tiene complejidad cero entonces la propiedad vale. Sea p un polinomio de complejidad $m+1$ y supongamos que la propiedad vale para polinomios de complejidad menor que $m+1$. Si x_0, x_1 y $a \in \mathbb{N}_0$, definimos $x_2 = max\{x_0, x_1\}$ y $x_3 = max\{x_0, x_1, a+1\}$. Sean q y r polinomios de complejidad menor que $m+1$.

(i) Sea $p(x) = q(x) \wedge r(x)$. Sea $q(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = S^{(p)}(x)$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Luego $p(x) = S^{(l)}(x)$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$, con $l = min\ \{n, p\}$. Sea $q(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = a$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $p(x) = a$ para cada $x_3 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \notin \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Sea $q(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = b$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Luego $p(x) = c$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$, con $c = a \wedge b$. El caso $p(x) = q(x) \vee r(x)$ se razona análogamente.

(ii) Sea $p(x) = q(x) \rightarrow r(x)$. Sea $q(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = S^{(p)}(x)$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $n \leq p$ entonces $p(x) = \beta$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $n > p$ entonces $p(x) = S^{(p)}(x)$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Sea $q(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = a$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \in \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = a$ para cada $x_3 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \notin \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = \beta$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Sea $q(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \in \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = \beta$ para cada $x_3 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \notin \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = S^{(n)}(x)$ para todo $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Sea $q(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ y $r(x) = b$ para cada $x_1 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a \leq b$ entonces $p(x) = \beta$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $a > b$ entonces $p(x) = b$ para cada $x_2 \leq x \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sea $p(x) = S(q(x))$. Si $q(x) = S^{(n)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = S^{(n+1)}(x)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$. Si $q(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ entonces $p(x) = S^{(n)}(a)$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Como $G(x) = S(x)$ en H_e para $x > 0$, del lema anterior se deduce que f no es un polinomio en (H_e, F), siendo $F = S$ ó G. En particular, (H_e, S) no es afín completa, y por ende H_e tampoco lo es.

Como S, γ y G no existen en el intervalo real $[0, 1]$ (con la estructura usual de álgebra de Heyting), tenemos que no son términos en el lenguaje de álgebras de Heyting. Sin embargo γ es un polinomio en toda álgebra de Heyting donde exista, dado que $\gamma(x) = x \vee \gamma(0)$. Las funciones S y G no son polinomios en H_e. En efecto, se puede probar (análogamente a lo hecho para el Lema 3.2.9) que si p es un polinomio en H_e entonces existen n y $x_0 \in \mathbb{N}_0$ tales que $p(x) = x$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ ó bien existe $x_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $p(x) = a$ para cada $x_0 \leq x \in \mathbb{N}_0$ (siendo $a \in H_e$).

3.3. Un caso interesante de álgebras de Heyting con sucesor

Un espacio topológico X es *disperso* si todo subconjunto no vacío de X no es *denso en sí mismo*, es decir, si todo subconjunto no vacío de X tiene al menos un punto aislado.

Para un espacio topológico X enunciamos la siguiente condición, a la que denominaremos (M): para todo cerrado T en X se tiene que $T \subseteq \overline{T_a}$.

Luego tenemos la siguiente

Proposición 3.3.1. *Sea X un espacio topológico. Luego*

1. *X es disperso si y sólo si satisface la condición* (M).

2. *Si $\tau : H(X) \to H(X)$ está dado por $\tau(U) = \{$Puntos frontales de $U\}$ entonces τ es el sucesor en $H(X)$ si y sólo si X es disperso ([42]).*

Demostración. 1. Sea X disperso, T cerrado, $t \in T$ y U_t entorno de t. Consideremos $Y = U_t \cap T$, que tiene puntos aislados. Es decir, $t \in \overline{T_a}$. Luego, vale la condición (M).

Recíprocamente, supongamos que vale (M) y sea $Y \subseteq X$. Por hipótesis vale que $\overline{Y} \subseteq \overline{\overline{Y}_a}$. El conjunto $\overline{Y}$ cumple la condición: para todo elemento t en $\overline{Y}$ vale que todo entorno de t contiene puntos aislados de $\overline{Y}$. En particular vale si $t \in Y$. Pero como $\overline{Y} = Y \cup Y_l$, los puntos aislados de $\overline{Y}$ deben estar en Y (pues no pueden ser puntos límite). Luego Y tiene puntos aislados.

2. Probaremos que τ cumple $(S3)$ si y sólo si vale (M). Calculemos $\tau A \to A$, para un abierto A. Se tiene:

$$\tau A \to A =$$

$$(A \cup (A^c)_a) \to A = \mathrm{Int}((A \cup (A^c)_a)^c \cup A) =$$

$$\mathrm{Int}((A^c \cap ((A^c)_a)^c) \cup A) = \mathrm{Int}(((A^c)_a)^c \cup A).$$

Luego la ecuación $(S3)$ se traduce en

$$\mathrm{Int}(((A^c)_a)^c \cup A) \subseteq A,$$

que es equivalente a

$$(\mathrm{Int}(((A^c)_a)^c \cup A))^c \supseteq A^c,$$

que a su vez equivale a:

$$\overline{(((A^c)_a)^c \cup A))^c} \supseteq A^c,$$

es decir:

$$\overline{(A^c)_a \cap A^c} \supseteq A^c.$$

Pero $(A^c)_a \cap A^c = (A^c)_a$, de donde la condición deviene:

$$\overline{(A^c)_a} \supseteq A^c.$$

Podemos enunciarla para cerrados y es la condición (M). □

Sea $(X, \leq)$ un poset y $H(X) = X^+$. Un cálculo directo prueba que si $V \subseteq X$ entonces $(V_M] = \overline{V_a}$ (es consecuencia de que $V_a = V_M$). Luego la condición (M) de la proposición previa se traduce en la siguiente condición:

(P) **Para cada subconjunto decreciente V en X, si $x \in V$ entonces existe $y \in V_M$ tal que $x \leq y$.**

Corolario 3.3.2. *Sean $(X, \leq)$ un poset y $\tau : X^+ \to X^+$ dada por $\tau(U) = \{$Puntos frontales de $U\} = U \cup (U^c)_M$. Luego τ es el sucesor en X^+ si y sólo si $(X, \leq)$ satisface la condición* (P).

Un poset satisface la *condición de cadena ascendente* (ACC) si toda cadena ascendente de elementos eventualmente termina, es decir, si $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$ entonces existe un número natural n tal que $x_n = x_m$ para todo $m \geq n$. Esta condición es equivalente a pedir que todo subconjunto no vacío admita maximales, lo que a su vez es equivalente a pedir que todo subconjunto decreciente no vacío admita maximales (esto último se deduce del hecho de que para cada subconjunto V de X se verifica que $(V]_M = V_M$).

Observación 3.3.3. *Las condiciones* (ACC) *y* (P) *son equivalentes.*

Teorema 3.3.4. *Sea $(X, \leq)$ un poset.*

El álgebra de Heyting X^+ admite sucesor si y sólo $(X, \leq)$ satisface la (ACC). *Más aún, $S : X^+ \to X^+$ está dada por $S(U) = U \cup (U^c)_M$.*

Demostración. En virtud del Corolario 3.3.2 y de la Observación 3.3.3, bastaría ver que si X^+ admite sucesor y $\tau : X^+ \to X^+$ está dada por $\tau(U) = \{$Puntos frontales de $U\} = U \cup (U^c)_M$ entonces $\tau(U) = S(U)$ para cada creciente U. Hagamos las siguientes observaciones:

1. En toda álgebra de Heyting con sucesor, si existe un operador frontal τ entonces $\tau(x) \leq S(x)$ para todo x.

   En efecto, $\tau(x) \leq S(x) \vee (S(x) \to x) = S(x) \vee x = S(x)$.

2. En toda álgebra de Heyting completa H con sucesor, para cada familia $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq H$ vale que $S(\bigwedge_{i \in I} x_i) \leq \bigwedge_{i \in I} S(x_i)$ (ya que S es una función monótona).

3. En X^+ el operador frontal τ preserva ínfimos arbitrarios.

   Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos crecientes de X. Veremos que $\tau(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} \tau(U_i)$. La inclusión $\tau(\bigcap_{i\in I} U_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \tau(U_i)$ es consecuencia de la monotonía de τ. Recíprocamente, sea $x \in \bigcap_{i\in I} \tau(U_i)$, con lo cual para cada $i \in I$ vale que $x \in \tau(U_i) = U_i \cup (U_i^c)_M$. Si $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$ entonces $x \in \tau(\bigcap_{i\in I} U_i)$. Consideremos el caso en que $x \notin \bigcap_{i\in I} U_i$, y sea $x \leq y$ con $y \notin \bigcap_{i\in I} U_i$. Por esta razón existe $j \in I$ tal que $y \notin U_j$. En particular $x \notin U_j$ y por ende $x \in (U_j^c)_M$. De esto último inferimos que $x = y$ y por ende $x \in ((\bigcap_{i\in I} U_i)^c)_M$, siendo así $x \in \tau(\bigcap_{i\in I} U_i)$.

4. Para cada $x \in X$ se verifica que $S((x]^c) = \tau((x]^c) = (x]^c \cup \{x\}$ (un cálculo directo prueba que para cada $x \in X$, $\tau((x]^c)$ satisface $(S3)$).

5. Para cada decreciente V se verifica que $V = \bigcup_{x\in V} (x]$.

Luego para cada creciente U tenemos que

$$\tau(U) \subseteq S(U) = S(\bigcap_{x\in U^c} (x]^c) \subseteq \bigcap_{x\in U^c} S((x]^c) = \bigcap_{x\in U^c} \tau((x]^c) = \tau(\bigcap_{x\in U^c} (x]^c) = \tau(U).$$

Por lo tanto $\tau(U) = S(U)$, que es lo que queríamos probar. □

Observación 3.3.5. *En general no es cierto que si $(X, \leq)$ es un poset entonces X^+ es un álgebra de Heyting que admite sucesor (ver Ejemplo 4.4.10).*

3.4. Teoría de representación

En este sección extenderemos la dualidad de Esakia a la categoría **fHA** completando resultados dados en [23] y [54] (Sección 5).

Definición 3.4.1. Un *Rf-espacio* es una terna $(X, \leq, R)$, donde $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia y R es una relación binaria en X tal que satisface las siguientes condiciones:

(RF1) Para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ vale que $\{x \in X : R(x) \subseteq U\} \in \mathbf{D}(X)$, siendo $R(x) = \{y \in X : xRy\}$;

(RF2) $R \subseteq \leq$;

(RF3) $< \subseteq R$.

Aquí $<$ es el orden estricto asociado al orden $\leq$.

Definiremos los *morfismos de Rf-espacios* como funciones $g : (X_1, \leq_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, R_2)$, en donde $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ es un morfismo de espacios de Esakia tal que para cada $U \in \mathbf{D}(X_2)$ y $x \in X_1$ vale la siguiente condición:

$$(C) \quad R_1(x) \subseteq g^{-1}(U) \text{ sii } R_2(g(x)) \subseteq U.$$

La categoría **fSH** consiste de todos los Rf-espacios y morfismos de Rf-espacios.

Si X es un conjunto y R es una relación binaria en X, para cada $U \subseteq X$ definimos el siguiente subconjunto de X:

$$\tau_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\}.$$

Observación 3.4.2. *Si $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia, consideraremos las siguientes condiciones, para cada $U, V \in \mathbf{D}(X)$:*

(Rf2) $U \subseteq \tau_R(U)$,

(Rf3) $\tau_R(U) \subseteq V \cup (V \to U)$.

Las condiciones $(RF2)$ y $(Rf2)$ son equivalentes. En efecto, supongamos que vale la ecuación $(Rf2)$ y sea $(x, y) \in R$, es decir, $y \in R(x)$. Si $x \nleq y$ entonces existiría $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Como $x \in U$ tenemos que $R(x) \subseteq U$ y por ende $y \in U$, una contradicción. Recíprocamente, sean $U \in \mathbf{D}(X)$, $x \in U$ e $y \in R(x)$. Luego $x \leq y$, y como U es creciente, $y \in U$.

La condición $(RF3)$ implica la condición $(Rf3)$. En efecto, sea $U \in \mathbf{D}(X)$ y $x \in X$ tales que $R(x) \subseteq U$. Supongamos que existe $V \in \mathbf{D}(X)$ tal que $x \notin V \cup (V \to U)$. Luego existe $y \in V \cap U^c$ tal que $x \leq y$. Si $x = y$ entonces $x \in V$, una contradicción. Si $x < y$ entonces por hipótesis $y \in R(x)$, y en particular $y \in U$, nuevamente una contradicción.

La condición $(Rf3)$ no implica la condición $(RF3)$. Más aún, las condiciones $(RF1)$, $(RF2)$ y $(Rf3)$ simultáneamente no implican la condición $(RF3)$. Para ello basta considerar el poset $X = \{x, y, z\}$ con el orden $x < y < z$, y la relación binaria $R = \{(x, y), (y, z)\}$. Para este ejemplo tenemos la siguiente tabla:

U	$\tau_R(U)$
$\emptyset$	$\{z\}$
$\{z\}$	$\{y, z\}$
$\{y, z\}$	X
X	X

La condición $(RF3)$ no se cumple porque $x < z$ y $(x, z) \notin R$.

Consideremos el funtor contravariante $\mathbf{D} : \mathbf{HS} \to \mathbf{HA}$ extendido a $\mathbf{fHS}$.

Comenzaremos con algunos lemas preliminares.

Lema 3.4.3. *Si $(X, \leq, R)$ es un Rf-espacio entonces $(\mathbf{D}(X), \tau_R)$ es un álgebra de Heyting frontal.*

Demostración. La buena definición de τ_R es consecuencia de $(RF1)$. Las condiciones $(Rf2)$ y $(Rf3)$ nos dan las ecuaciones $(f2)$ y $(f3)$ respectivamente. Finalmente $(f1)$ es consecuencia de la definición de τ_R. □

Observación 3.4.4. *Sean $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo de espacios de Heyting y $(X_1, \leq, R_1)$, $(X_2, \leq, R_2)$ Rf-espacios. Luego g es un morfismo de Rf-espacios si y sólo para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ tenemos que*

$$\tau_{R_1}(\mathbf{D}(g)(U)) = \mathbf{D}(g)(\tau_{R_2}(U))$$

En efecto,

$$g \text{ satisface la condición } (C) \text{ sii}$$
$$\{x \in X : R_1(x) \subseteq g^{-1}(U)\} = \{x \in X : R_2(g(x)) \subseteq U\} \text{ sii}$$
$$\{x \in X : R_1(x) \subseteq \mathbf{D}(g)(U)\} = \mathbf{D}(g)(\{y \in Y : R_2(y) \subseteq U\}) \text{ sii}$$
$$\tau_{R_1}(\mathbf{D}(g)(U)) = \mathbf{D}(g)(\tau_{R_2}(U)).$$

Como consecuencia de la observación previa tenemos el siguiente

Lema 3.4.5. *Si $g : (X_1, \leq_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, R_2)$ es un morfismo de Rf-espacios entonces $\mathbf{D}(g) : (\mathbf{D}(X_2), \tau_{R_2}) \to (\mathbf{D}(X_1), \tau_{R_1})$ es un morfismo en **fHA**.*

Los dos lemas previos implican que $\mathbf{D}$ es un funtor contravariante de **fHS** a **fHA**. En lo que sigue consideraremos al funtor contravariante $\mathbf{X} : \mathbf{HA} \to \mathbf{HS}$ restringido a **fHA**.

Lema 3.4.6. *Sea (H, τ) un álgebra de Heyting frontal y $P \in \mathbf{X}(H)$. Luego:*

(a) *$\tau^{-1}(P)$ es un filtro.*

(b) *$\tau(x) \notin P$ si y sólo si existe $Q \in \mathbf{X}(H)$ tal que $\tau^{-1}(P) \subseteq Q$ y $x \notin Q$.*

Demostración. (a) Es consecuencia de $(f1)$ y $(f2)$.
(b) Supongamos que $\tau(x) \notin P$, es decir, que $x \notin \tau^{-1}(P)$. Luego por (a) y por el Teorema del Filtro Primo, existe $Q \in \mathbf{X}(H)$ tal $\tau^{-1}(P) \subseteq Q$ y $x \notin Q$. Recíprocamente, sea $Q \in \mathbf{X}(H)$ tal que $\tau^{-1}(P) \subseteq Q$ y $x \notin Q$. De este modo tenemos que $x \notin \tau^{-1}(P)$, es decir, $\tau(x) \notin P$. □

Sea (H, τ) un álgebra de Heyting frontal. Definimos en $\mathbf{X}(H)$ la siguiente relación binaria:
$$(P, Q) \in R_\tau \text{ sii } \tau^{-1}(P) \subseteq Q.$$

Lema 3.4.7. *Si (H, τ) es un álgebra de Heyting frontal entonces para cada $x \in H$ vale que*
$$\varphi_H(\tau(x)) = \{P \in \mathbf{X}(H) : R_\tau(P) \subseteq \varphi_H(x)\}.$$

Demostración. Tenemos que $R_\tau(P) \subseteq \varphi_H(x)$ es equivalente a $(\tau^{-1}(P) \subseteq Q \Rightarrow Q \in \varphi_H(x))$, y por definición de φ_H, esto es equivalente a $(\tau^{-1}(P) \subseteq Q \Rightarrow x \in Q)$. Por el Lema 3.4.6 esta última expresión es equivalente a $\tau(x) \in P$. Por lo tanto concluimos que $R_\tau(P) \subseteq \varphi_H(x)$ sii $P \in \varphi_H(\tau(x))$. □

Lema 3.4.8. *Si (H, τ) es un álgebra de Heyting frontal entonces $(\mathbf{X}(H), \subseteq, R_\tau)$ es un Rf-espacio.*

Demostración. $(RF1)$ Sea U un clopen creciente en $(\mathbf{X}(H), \subseteq)$, por lo cual existe $a \in H$ tal que $U = \varphi_H(a)$. Por el Lema 3.4.7 la condición $(RF1)$ vale.

$(RF2)$ Sea $P \in U$ y $Q \in R_\tau(P)$. Por esta razón $a \in P$ y $\tau^{-1}(P) \subseteq Q$. Por $(f2)$ tenemos que $\tau(a) \in P$, por lo cual $a \in Q$. Luego $Q \in U$, y así $R_\tau(P) \subseteq U$. Por este motivo vale $(Rf2)$.

$(RF3)$ Supongamos que $(RF3)$ no vale. Luego existen $P, Q \in \mathbf{X}(H)$ tales que $P \subset Q$ y $\tau^{-1}(P) \nsubseteq Q$. Luego existen $x, y \in H$ tales que $\tau(x) \in P$, $x \notin Q$, $y \in Q$ e $y \notin P$. Utilizando $(f3)$ llegamos a que $y \to x \in Q$, y utilizando que $y \in Q$ inferimos que $x \in Q$, una contradicción. □

Lema 3.4.9. *Si $f : (H_1, \tau_1) \to (H_2, \tau_2)$ es un morfismo en* ***fHA*** *entonces $\mathbf{X}(f) : (\mathbf{X}(H_2), \subseteq, R_{\tau_2}) \to (\mathbf{X}(H_1), \subseteq, R_{\tau_1})$ es un morfismo de Rf-espacios.*

Demostración. Sean $X_i = \mathbf{X}(H_i)$ y $R_i = R_{\tau_i}$ para $i = 1, 2$. Sabemos que $\varphi_{H_2} f \varphi_{H_1}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{X}(f))$. Sea $U \in \mathbf{D}(\mathbf{X}(H_1))$, con lo cual existe $x \in H_1$ tal que $U = \varphi_{H_1}(x)$. Por el Lema 3.4.7 inferimos que $\varphi_{H_1}(\tau_1(x)) = \{P \in \mathbf{X}(H_1) : R_1(P) \subseteq U\}$, con lo cual hemos probado que $\varphi_{H_1}(\tau_1(x)) = \tau_{R_1}(U)$. Luego por hipótesis se concluye que

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}(f))(\tau_{R_1}(U)) = (\varphi_{H_2} f \varphi_{H_1}^{-1})(\varphi_{H_1} \tau_1(x)) = \varphi_{H_2} f \tau_1(x) = \varphi_{H_2} \tau_2 f(x). \quad (3.6)$$

Además, nuevamente por el Lema 3.4.7, se tiene que

$$\tau_{R_2}(\mathbf{D}(\mathbf{X}(f))(U)) = \tau_{R_2}(\varphi_{H_2} f \varphi_{H_1}^{-1}) \varphi_{H_1}(x) = \tau_{R_2} \varphi_{H_2} f(x) =$$
$$\{P \in \mathbf{X}(H_2) : R_{\tau_2}(P) \subseteq \varphi_{H_2} f(x)\} = \varphi_{H_2}(\tau_2 f(x)). \quad (3.7)$$

Por (3.6) y (3.7) deducimos que

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}(f))(\tau_{R_1}(U)) = \tau_{R_2}(\mathbf{D}(\mathbf{X}PF(f))(U)). \quad (3.8)$$

Por (3.8) y la Observación 3.4.4 (considerando $g = \mathbf{X}(f)$) tenemos que $\mathbf{D}(g)$ es un morfismo en **fHS**. $\square$

Los dos lemas previos nos aseguran que $\mathbf{X}$ es un funtor contravariante de **fHA** en **fHS**. Probaremos ahora que estas categorías son dualmente equivalentes.

Proposición 3.4.10. *Si $(X, \leq, R)$ un Rf-espacio entonces $\epsilon_X : (X, \leq, R) \to (\mathbf{X}(\mathbf{D}(X)), \subseteq, R_{\tau_R})$ es un isomorfismo en* ***fHS***.

Demostración. Escribiremos R_R en lugar de R_{τ_R}. Para cada clopen creciente V en $\mathbf{X}(\mathbf{D}(X))$ debemos probar que

$$R(x) \subseteq \epsilon_X^{-1}(V) \text{ sii } R_R(\epsilon_X(x)) \subseteq V.$$

$\Rightarrow$) Sea $P \in R_R(\epsilon_X(x))$, con lo cual

$$\tau_R^{-1}(\epsilon(x)) \subseteq P. \quad (3.9)$$

Notemos que (3.9) vale sii $[U \in \tau_R^{-1}(\epsilon(x))$ implica $U \in P]$ sii $[\tau_R(U) \in \epsilon_X(x)$ implica $U \in P]$ sii $[x \in \tau_R(U)$ implica $U \in P]$ sii $[R(x) \subseteq U$ implica $U \in P]$.

Por hipótesis $R(x) \subseteq \epsilon_X^{-1}(V)$, con lo cual $\epsilon_X^{-1}(V) \in P$. Como $P \in \mathbf{X}(\mathbf{D}(X))$ existe $y \in X$ tal que $\epsilon_X(y) = P$. Como $\epsilon_X^{-1}(V) \in \epsilon_X(y)$ tenemos que $y \in \epsilon_X^{-1}(V)$, y así $\epsilon_X(y) = P \in V$.

$\Leftarrow$) Sea $y \in R(x)$. Nuestra hipótesis es equivalente a la condición

$$\epsilon_X^{-1} R_R(\epsilon_X(x)) \subseteq \epsilon_X^{-1}(V).$$

Si probáramos que $y \in \epsilon_X^{-1} R_R(\epsilon_X(x))$ entonces tendríamos que $y \in \epsilon_X^{-1}(V)$, que es lo que queremos demostrar. Notemos que

$$y \in \epsilon_X^{-1} R_R(\epsilon_X(x)) \text{ sii } \epsilon_X(x) R_R \epsilon_X(y) \text{ sii } \tau_R^{-1}(\epsilon_X(x)) \subseteq \epsilon_X(y) \text{ sii}$$
$$[U \in \tau_R^{-1}(\epsilon_X(x)) \text{ implica } U \in \epsilon_X(y)] \text{ sii } [\tau_R(U) \in \epsilon_X(x) \text{ implica } U \in \epsilon_X(y)] \text{ sii}$$
$$[x \in \tau_R(U) \text{ implica } y \in U] \text{ sii } [R(x) \subseteq U \text{ implica } y \in U].$$

Como $y \in R(x)$, de la observación previa deducimos que $y \in \epsilon_X^{-1} R_R(\epsilon_X(x))$. $\square$

Como consecuencia del Lemma 3.4.7 se sigue la siguiente

Proposición 3.4.11. *Si (H, τ) es un álgebra de Heyting frontal entonces $\varphi_H : (H, \tau) \to (\mathbf{D}(\mathbf{X}(H)), \tau_{R_\tau})$ es un isomorfismo en **fHA**.*

Como **fHA** y **fHS** son subcategorías de **HA** y **HS** (respectivamente) el siguiente resultado se sigue de las proposiciones 3.4.10 y 3.4.11.

Teorema 3.4.12. *Los funtores **D** y **X** establecen una equivalencia categorial dual entre **fHA** y **fHS**.*

3.4.1. Teoría de representación para S-álgebras

Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia y R una relación binaria en X. Definimos la siguiente condición para cada $U \in \mathbf{D}(X)$:

(RF4) Si $x \notin U$ entonces existe $y \in U^c$ tal que $x \leq y$ y $R(y) \subseteq U$.

La condición previa es equivalente a la condición $\tau_R(U) \to U \subseteq U$.

En el caso de que $(X, \leq)$ sea un espacio de Esakia y R una relación binaria en X tal que satisface $(RF4)$, escribiremos S_R en lugar de τ_R.

Definimos la categoría **SHS** como aquella cuyos objetos son Rf-espacios $(X, \leq, R)$ tales que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ se satisface la condición $(RF4)$, y cuyos morfismos son los mismos de **fHS**.

Como consecuencia de la Proposición 3.2.3 y del Teorema 3.4.12, tenemos el siguiente

Teorema 3.4.13. *Existe una equivalencia categorial dual entre **SHA** y **SHS**.*

En lo que sigue daremos algunos resultados que nos permitirán describir más sencillamente a la categoría **SHS**.

Diremos que un espacio de Esakia $(X, \leq)$ es un S-*espacio* si para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ el conjunto $U \cup (U^c)_M$ es clopen. Notemos que $(X, \leq)$ es un S-espacio sii es un espacio de Esakia tal que para cada clopen decreciente V, V_M es clopen.

El siguiente resultado es conocido (ver por ejemplo Lema 2.4 de [4]).

Lema 3.4.14. *Si $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia y F es un subconjunto cerrado de X entonces $F \subseteq (F_M]$. Más aún, F_M es un subconjunto cerrado de X.*

El lema previo implica que un espacio de Esakia $(X, \leq)$ es un S-espacio sii para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ el conjunto $U \cup (U^c)_M$ es abierto sii para cada clopen decreciente V, V_M es abierto.

Lema 3.4.15. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Si existe una relación binaria R en X tal que satisface las condiciones $(RF2)$, $(RF3)$ y $(RF4)$ entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ vale que $S_R(U) = U \cup (U^c)_M$.*

Demostración. Sea $x \in S_R(U)$, $x \in U^c$ y $x \leq y$, con $y \in U^c$. Supongamos que $y \nleq x$. Luego existe $V \in \mathbf{D}(X)$ tal que $y \in V$ y $x \notin V$. Por $(Rf3)$, $x \in V \to U$. Sin embargo, como $x \leq y$ con $y \in U^c \cap V$, tenemos que $x \notin V \to U$, una contradicción. Por esta razón $x \in (U^c)_M$.

Recíprocamente, sea $x \in U \cup (U^c)_M$. Si $x \in U$, por $(Rf2)$ tenemos que $x \in S_R(U)$. Si $x \in (U^c)_M$, por $(RF4)$ se tiene que $x \notin S_R(U) \to U$. Por lo tanto $x \leq y$ para cierto $y \in U^c$ y $R(y) \subseteq U$. Como $x \in (U^c)_M$ resulta que $x = y$. Por lo tanto $R(x) \subseteq U$.

Hemos probado la igualdad $S_R(U) = U \cup (U^c)_M$. □

Proposición 3.4.16. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Existe una relación binaria R en X que satisface las condiciones $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$ y $(RF4)$ si y sólo si $(X, \leq)$ es un S-espacio.*

Demostración. $\Rightarrow$) Para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ vale que $U \cup (U^c)_M$ es clopen, en virtud de $(RF1)$ y del Lema 3.4.15.
$\Leftarrow$) Definimos la siguiente relación binaria R en X:

$$(x, y) \in R \text{ sii Para todo } V \in \mathbf{D}(X), \text{ si } x \in V \cup (V^c)_M \text{ entonces } y \in V. \quad (3.10)$$

Probaremos que R satisface $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$ y $(RF4)$:

Sea $U \in \mathbf{D}(X)$, $x \in U$ e $y \in R(x)$. Por definición de R se tiene que $y \in U$ y por esta razón $R(x) \subseteq U$, con lo cual $(Rf2)$ vale.

Supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $x < y$ e $y \notin R(x)$. Luego existe $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que $x \in U \cup (U^c)_M$ e $y \notin U$. Tenemos de este modo que $x \notin U$, con lo cual $x \in (U^c)_M$. Sin embargo $x < y$ e $y \notin U$, una contradicción con la maximalidad de x. Luego $(RF3)$ vale.

Sea $U \in \mathbf{D}(X)$ y $x \in U^c$. Por el Lema 3.4.14 existe $y \in (U^c)_M$ tal que $x \leq y$. En particular, $x \leq y$ e $y \in U^c$. Además $R(y) \subseteq U$. En efecto, sea $z \in R(y)$. Como $y \in (U^c)_M$ vale que $z \in U$. Por esta razón $x \notin S_R(U) \to U$, y por lo tanto vale $(RF4)$.

Por el Lema 3.4.15 inferimos que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $S_R(U) = U \cup (U^c)_M$. Por hipótesis resulta que $S_R(U)$ es clopen y por definición este conjunto es creciente. Por lo tanto tenemos que vale $(RF1)$. □

Luego tenemos que si $(X, \leq, R)$ es un objeto de **SHS** entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $S(U) = S_R(U) = U \cup (U^c)_M$, y si $(X, \leq)$ es un S-espacio entonces S existe en $\mathbf{D}(X)$ y está dado por la fórmula

$$S(U) = U \cup (U^c)_M.$$

Sean $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ S-espacios y $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo en **HS**. Diremos que g es un S-morfismo sii para cada V clopen decreciente en $(X_2, \leq_2)$,

$$g^{-1}(V_M) = [g^{-1}(V)]_M.$$

Proposición 3.4.17. *Sea $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo en **HS**. Existen relaciones binarias R_1 y R_2 en X_1 y X_2 respectivamente tales que la función $g : (X_1, \leq_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, R_2)$ es un morfismo en **SHS** si y sólo si g es un S-morfismo.*

Demostración. Es consecuencia de la Observación 3.4.4, la Proposición 3.4.16 y el hecho de que para cada $U \subseteq X_2$, $g^{-1}[U \cup (U^c)_M] = g^{-1}(U) \cup [g^{-1}(U^c)]_M$ sii $[g^{-1}(U^c)]_M = g^{-1}[(U^c)_M]$. □

Observación 3.4.18. *Si $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ son S-espacios, entonces $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ es un S-morfismo si y sólo si para cada V clopen decreciente en $(X_1, \leq_1)$ vale que*

$$g^{-1}(V_M) \subseteq [g^{-1}(V)]_M.$$

En efecto, sean $x \in [g^{-1}(V)]_M$ y $g(x) \leq z$, con $z \in V$. Como g es p-morfismo existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $g(y) = z$. Como $y \in g^{-1}(V)$ tenemos que $x = y$, con lo cual $g(x) = g(y) = z$. Por lo tanto $x \in g^{-1}(V_M)$.

Sea $\mathbf{SH}_S$ la categoría cuyos objetos son S-espacios y cuyos morfismos son S-morfismos.

Como consecuencia de las proposiciones 3.4.16 y 3.4.17 tenemos el siguiente

Teorema 3.4.19. *Existe una equivalencia categorial entre **SHS** y $\boldsymbol{SH}_S$.*

En lo que sigue haremos una observación acerca de la Proposición 3.4.16.

Observación 3.4.20. *Sean H la S-álgebra $\mathbb{N}_0 \cup \{\omega\}$ y $X = \mathbf{X}(H)$. Los elementos de X son de la forma $p_n = [n)$ (para $n \geq 1$) y $p_\omega = \{\omega\}$. Luego los elementos de $\mathbf{D}(X)$ son de la forma $U_0 = \emptyset$, $U_n = [p_n)$ (para $n \geq 1$) y $U_\omega = [p_\omega) = X$. Llamemos R a la relación definida en (3.10) de la Proposición 3.4.16. Luego valen las siguientes afirmaciones:*

- $(X, \leq, R) \in$ ***SHS*** *y* $(X, \leq, <) \in$ ***SHS***.

  *Para probar que $(X, \leq, <)$ satisface las condiciones **(RF1)** y **(RF4)** notemos que:*

  $$< (p_1) = \emptyset,$$
  $$< (p_{n+1}) = p_n,$$
  $$< (p_\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n,$$
  $$\tau_<(U_n) = U_{n+1},$$
  $$\tau_<(U_\omega) = U_\omega.$$

  *Las condiciones **(RF2)** y **(RF3)** son inmediatas.*

- $< \subseteq R$.

  *Veamos primero que $< \subseteq R_S \subseteq R$. La inclusión $< \subseteq R_S$ es consecuencia de la Proposición 3.4.13. Para probar que $R_S \subseteq R$, supongamos que existe $(x, y) \in R_S$ tal que $(x, y) \notin R$. Luego existe $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que $x \in U \cup (U^c)_M$ e $y \in U^c$. Como $y \notin U$, por la condición **(RF4)** existe $z \in U^c$ tal que $y \leq z$ y $R(z) \subseteq U$. Como $(x, y) \in R \subseteq \leq$, resulta que $x \leq y \leq z$. Si $x \in U$ entonces $z \in U$ (pues U es creciente), una contradicción. Si $x \in (U^c)_M$ entonces $x = y = z$. Luego $y \in R(x) \subseteq U$, con lo cual $y \in U$, una contradicción nuevamente. De este modo $R_S \subseteq R$. Más aún, $R = R_S$. En efecto, por la demostración de la Proposición 3.4.16 tenemos que para cada $U \in \mathbf{D}(X), S_R(U) = S_{R_S}(U)$. Supongamos que existe $(x, y) \in R$ tal que $(x, y) \notin R_S$. De la definición de R_S se infiere que $R_S(x)$ es cerrado y creciente. Como $y \notin R_S(x)$, existe $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que $R_S(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. En particular, se tiene que $R(x) \subseteq U$. Como $y \in R(x)$ vale que $y \in U$, una contradicción.*

- *$R \not\subseteq <$.*

  En efecto, $(p_\omega, p_\omega) \in R$ y $(p_\omega, p_\omega) \notin <$.

*Por lo tanto la Proposición 3.4.16 no nos asegura la unicidad de las relaciones: es decir, si $(X, \leq, R_1) \in$ **SHS** entonces $(X, \leq)$ es un S-espacio, lo que a su vez implica que existe una relación R_2 (construida del modo hecho en la proposición mencionada) tal que $(X, \leq, R_2) \in$ **SHS**. Sin embargo, puede ocurrir que $R_1 \neq R_2$, como ocurre con en el ejemplo dado considerando $R_1 =<$ y $R_2 = R$.*

3.4.2. Teoría de representación para γ-álgebras

Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia y R una relación binaria en X. Definimos las siguientes condiciones:

($R\gamma_4$) Para cada $x \in X$ existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $R(y) = \emptyset$.

($R\gamma_5$) Para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, si $R(x) \subseteq U$ entonces $R(x) = \emptyset$ ó $x \in U$.

Las condiciones previas son equivalentes, respectivamente, a las siguientes:

(i) $\neg\tau_R(\emptyset) = \emptyset$;

(ii) $\tau_R(U) \subseteq U \cup \tau_R(\emptyset)$, para cada $U \in \mathbf{D}(X)$.

En el caso de que $(X, \leq)$ sea un espacio de Esakia y R una relación binaria tal que satisface las dos condiciones anteriores, escribiremos γ_R en lugar de τ_R.

Definiremos como γ**SH** a la categoría que tiene como objetos Rf-espacios $(X, \leq, R)$ tales que satisfacen las condiciones $(R\gamma_4)$ y $(R\gamma_5)$, y cuyos morfismos son los mismos que los de la categoría **fHS**.

Como consecuencia de la Proposición 3.2.5 y del Teorema 3.4.12 tenemos el siguiente

Teorema 3.4.21. *Existe una equivalencia categorial dual entre γ**HA** y γ**HS**.*

En lo que sigue daremos algunos resultados que nos permitirán dar una descripción sencilla de la categoría γ**HA**.

Diremos que un espacio de Esakia $(X, \leq)$ es un γ-espacio si $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia tal que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $U \cup X_M$ es clopen. Notemos que el espacio de Esakia $(X, \leq)$ es un γ-espacio sii X_M es clopen.

Lema 3.4.22. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Si existe una relación binaria R en X tal que satisface las condiciones $(RF2)$, $(RF3)$, $(R\gamma_4)$ y $(R\gamma_5)$ entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ tenemos que*

$$\gamma_R(U) = U \cup X_M.$$

Demostración. Sea $A = \{x \in X : R(x) = \emptyset\}$. Probaremos primero que $A = X_M$. Sean $x \in A$. Supongamos que existe $y \in X$ tal que $x < y$. Por $(RF3)$ tenemos que $(x, y) \in R$, es decir $y \in R(x) = \emptyset$, una contradicción. Recíprocamente, sea $x \in X_M$. Por $(R\gamma_4)$ existe $y \in X$ tal que $R(y) = \emptyset$ y $x \leq y$. Como $x \in X_M$ resulta que $x = y$, y así $R(x) = \emptyset$. Por lo tanto $A = X_M$.

Por lo que acabamos de probar, por $(Rf2)$ y por $(R\gamma_5)$, para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ tenemos que $\gamma_R(U) = U \cup X_M$. □

Proposición 3.4.23. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Existe una relación binaria R en X tal que satisface las condiciones $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$, $(R\gamma_4)$ y $(R\gamma_5)$ si y sólo si $(X, \leq)$ es un γ-espacio.*

Demostración. $\Rightarrow$) Por $(RF1)$ y el Lema 3.4.22 se tiene que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $U \cup X_M$ es clopen.

$\Leftarrow$) Definimos a R del siguiente modo:

$$(x, y) \in R \text{ sii Para todo } V \in \mathbf{D}(X), \text{ si } x \in V \cup X_M \text{ entonces } y \in V.$$

Probaremos que R satisface $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$, $(R_{\gamma 4})$ y $(R_{\gamma 5})$.

Las mismas ideas de la demostración de la Proposición 4.4.8 prueban $(RF2)$ y $(RF3)$.

Para probar $(R\gamma_4)$ consideremos $x \in X$. Por el Lema 3.4.14, existe $y \in X_M$ tal que $x \leq y$. Veremos que $R(y) = \emptyset$. Supongamos que $R(y) \neq \emptyset$, con lo cual existe $z \in R(y)$. Luego como $y \in (X_M \cup \emptyset)$, se tiene que $z \in \emptyset$, una contradicción.

Para probar $(R\gamma_5)$, consideremos $R(x) \subseteq U$ con $U \in \mathbf{D}(X)$. Si $x \notin U$ entonces $x \notin R(x)$ y así $x \in X_M$. Luego se tiene, por el razonamiento que prueba $(R\gamma_4)$, que $R(x) = \emptyset$.

Finalmente, por el Lema 3.4.22 se tiene que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $\gamma_R(U) = U \cup X_M$. Luego $\gamma_R(U)$ es clopen, y por definición es creciente. De este modo vale $(RF1)$. □

Tenemos que si $(X, \leq, R)$ es un objeto de $\gamma\mathbf{HS}$ entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $\gamma(U) = \gamma_R(U) = U \cup X_M$, y si $(X, \leq)$ es un γ-espacio, γ existe en $\mathbf{D}(X)$ y está dado por la fórmula

$$\gamma(U) = U \cup X_M.$$

Sean $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ γ-espacios y $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo de espacios de Esakia. Diremos que g es un γ-morfismo si

$$(X_2)_M = g^{-1}((X_1)_M)$$

Proposición 3.4.24. *Sea $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo de espacios de Esakia. Existen relaciones binarias R_1 y R_2 en X_1 y X_2 respectivamente tales que la función $g : (X_1, \leq_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, R_2)$ es un morfismo en $\gamma\boldsymbol{HS}$ si y sólo si g es un γ-morfismo.*

Demostración. Se sigue de la Observación 3.4.4, la Proposición 3.4.23 y de que vale la siguiente afirmación: $g^{-1}[U \cup (X_2)_M] = g^{-1}(U) \cup (X_1)_M$ sii $(X_1)_M = g^{-1}((X_2)_M)$. □

Sea $\mathbf{SH}_\gamma$ la categoría cuyos objetos son γ-espacios y cuyos morfismos son γ-morfismos.

Como consecuencia de las proposiciones 3.4.23 y 3.4.24 tenemos el siguiente

Teorema 3.4.25. *Existe una equivalencia categorial entre $\gamma\boldsymbol{HS}$ y $\boldsymbol{SH}_\gamma$.*

3.4.3. Teoría de representación para G-álgebras

Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia y R una relación binaria en X. Definimos las siguientes condiciones para cada $U \in \mathbf{D}(X)$:

(RG4) $\tau_R(U) \subseteq \neg\neg U$;

(RG5) $\tau_R(U) \to U \subseteq \neg\neg U \to U$.

En el caso de que $(X, \leq)$ sea un espacio de Esakia y R una relación binaria que satisface $(RG4)$ y $(RG5)$, escribiremos G_R en lugar de τ_R.

Denotaremos como **GHS** a la categoría que tiene como objetos son Rf-espacios $(X, \leq, R)$ tales que satisfacen las condiciones $(RG4)$ y $(RG5)$, y cuyos morfismos son los mismos de **fHS**.

Como consecuencia de la Observación 3.2.7 y del Teorema 3.4.12 tenemos el siguiente

Teorema 3.4.26. *Existe una equivalencia categorial entre* ***GHA*** *y* ***GHS****.*

Daremos algunos resultados que nos darán una descripción sencilla de la categoría **GHS**.

Diremos que $(X, \leq)$ es un G-espacio si es un espacio de Esakia tal que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$ es clopen. Equivalentemente, $(X, \leq)$ es un G-espacio si es un espacio de Esakia tal que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $\neg\neg U \cap (U^c)_M$ es clopen.

Lema 3.4.27. *Sea H un álgebra de Heyting y $(X, \leq) = (\mathbf{X}(H), \subseteq)$. Definimos en $(X, \leq)$ la siguiente relación binaria:*

$$(P, Q) \in R \text{ sii Para todo } U \in \mathbf{D}(X), \text{ si } P \in U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M] \text{ entonces } Q \in U.$$

Para cada $P \in \mathbf{X}(H)$ se verifica que $R(P) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $P \in \mathbf{X}(H)$. Definimos el filtro $N = \{y \in H : \neg\neg y \in P\}$ y luego el filtro $F = F(P \cup N)$. Tenemos que $0 \notin F$. En efecto, supongamos que $0 \in F$. Luego existe $p \in P$ y $n \in N$ tales que $p \leq \neg n$, y por ende $\neg n \in P$. Como $n \in N$, tenemos que $\neg\neg n \in P$ y así $0 \in P$, una contradicción porque P es primo. Luego por el Teorema del Filtro Primo existe $Q \in \mathbf{X}(H)$ tal que $P \subseteq F \subseteq Q$. Sea $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que $P \in U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$. En particular existe $x \in H$ tal que $\varphi_H(x) = U$. Luego $Q \in U$. Hemos así probado que $R(P) \neq \emptyset$. □

Como consecuencia del lema previo tenemos el siguiente

Corolario 3.4.28. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia y R la siguiente relación binaria:*

$$(x, y) \in R \text{ sii Para todo } U \in \mathbf{D}(X), \text{ si } x \in U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M] \text{ entonces } y \in U. \tag{3.11}$$

Para cada $x \in X$ se verifica que $R(x) \neq \emptyset$.

Lema 3.4.29. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Si existe una relación binaria R en X tal que satisface $(RF2)$, $(RF3)$, $(RG4)$ y $(RG5)$ entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$ tenemos que*

$$G_R(U) = U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M].$$

Demostración. Sea $U \in \mathbf{D}(X)$, $R(x) \subseteq U$, $x \in U^c$ y $x \leq y$, con $y \in U^c$. Supongamos que $y \nleq x$. Luego existe $V \in \mathbf{D}(X)$ tal que $y \in V$ y $x \notin V$. Por $(Rf3)$, $x \in V \to U$. Sin embargo, como $x \leq y$ con $y \in U^c \cap V$ tenemos que $x \notin V \to U$, una contradicción. Por esta razón $x \in (U^c)_M$. Por otro lado, de $(RG4)$ se deduce que $x \in \neg\neg U$.

Recíprocamente, tomemos $x \in U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$. Si $x \in U$, por $(Rf2)$ tenemos que $x \in G_R(U)$. Si $x \in (U^c)_M \cap \neg\neg U$ entonces por $(RG5)$ existe $y \in U^c$ tal que $x \leq y$ y $R(y) \subseteq U$. Luego $x = y$ y por lo tanto $R(x) \subseteq U$. $\square$

Lema 3.4.30. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Esakia. Existe una relación binaria R en X tal que satisface $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$, $(RG4)$ y $(RG5)$ si y sólo si $(X, \leq)$ es un G-espacio.*

Demostración. $\Rightarrow$) Por $(RF1)$ y el Lema 3.4.29 tenemos que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$ es clopen.

$\Leftarrow$) Definimos relación binaria R en X dada en (3.11) del Corolario 3.4.28. Probaremos que R satisface $(RF1)$, $(RF2)$, $(RF3)$, $(RF4)$ y $(RG5)$.

Las mismas ideas de la demostración de la Proposición 4.4.8 prueban $(RF2)$ y $(RF3)$.

Para probar $(RG4)$, consideremos $U \in \mathbf{D}(X)$ y $R(x) \subseteq U$. Supongamos que $x \notin \neg\neg U$. Luego $x \in (\neg U]$. Por esta razón existe $y \in \neg U$ tal que $x \leq y$. En particular, $y \notin U$. De este modo, por hipótesis vale que $y \notin R(x)$. Luego existe $V \in \mathbf{D}(X)$ tal que $x \in V \cup [(\neg\neg V \cap (V^c)_M]$ e $y \notin V$. Como $x \leq y$ deducimos que $x = y$. Como $y \in \neg U$, $x \in \neg U$.

Por otro lado, por el Corolario 3.4.28 existe $z \in R(x)$. Luego, por hipótesis, $z \in U$. Como $x \in \neg U$ y $z \in R(x)$, $z \in \neg U$. De este modo $U \cap \neg U \neq \emptyset$, una contradicción.

Para probar $(RG5)$ supongamos que $U \in \mathbf{D}(X)$ y que $x \notin \neg\neg U \to U$. Luego $x \leq z$ para algún $z \in \neg\neg U \cap U^c$. Por el Lema 3.4.14 existe $y \in (U^c)_M$ tal que $x \leq z \leq y$. Probaremos que $R(y) \subseteq U$. Consideremos $w \in R(y)$. Como $z \leq y$, $y \in \neg\neg U \cap (U^c)_M$. Por este motivo $w \in U$.

Finalmente, por el Lema 3.4.29 tenemos que para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $G_R(U) = U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$. Usando la hipótesis inferimos que $G_R(U)$ es clopen. Un cálculo directo prueba que $G_R(U)$ es creciente. Por lo tanto vale $(RF1)$. $\square$

Notemos que si $(X, \leq, R)$ es un objeto de **GHS** entonces para cada $U \in \mathbf{D}(X)$, $G(U) = G_R(U) = U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M]$, y si $(X, \leq)$ es un G-espacio entonces G existe en $\mathbf{D}(X)$ y

$$G(U) = U \cup [\neg\neg U \cap (U^c)_M].$$

Sean $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ G-espacios y $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo de espoacios de Esakia. Diremos que g es un G-morfismo si para cada U clopen decreciente en $(X_2, \leq_2)$ se tiene que

$$g^{-1}[\neg\neg U \cap (U^c)_M] = g^{-1}(\neg\neg U) \cap [g^{-1}(U^c)]_M.$$

Proposición 3.4.31. *Sea $g : (X_1, \leq_1) \to (X_2, \leq_2)$ un morfismo de espacios de Esakia. Existen relaciones binarias R_1 y R_2 en X_1 y X_2 respectivamente tales que la función $g : (X_1, \leq_1, R_1) \to (X_2, \leq_2, R_2)$ es un morfismo en* ***GHS*** *si y sólo si g es un G-morfismo.*

Demostración. Es consecuencia de la Observación 3.4.4, la Proposición 3.4.30 y del siguiente hecho:

$$g^{-1}[U \cup (\neg\neg U \cap (U^c)_M)] = g^{-1}(U) \cup [g^{-1}(\neg\neg U) \cap [(g^{-1}(U^c)]_M]$$

sii

$$[g^{-1}(U^c)]_M \cap g^{-1}(\neg\neg U) = g^{-1}[(U^c)_M \cap \neg\neg U].$$

$\square$

Sea $\mathbf{SH}_G$ la categoría cuyos objetos son G-espacios y cuyos morfismos son G-morfismos.

Se sigue de las proposiciones 3.4.30 y 3.4.31 el siguiente

Teorema 3.4.32. *Existe una equivalencia categorial entre* $\boldsymbol{GHS}$ *y* $\boldsymbol{SH}_G$.

Capítulo 4

Subvariedades de la variedad de S-álgebras

4.1. Introducción

En [14] X. Caicedo prueba, utilizando modelos de Kripke convenientes, que el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras posee la propiedad de modelo finito (notemos que esto es equivalente a decir que la variedad mencionada está generada por sus miembros finitos). Comenzaremos el capítulo dando una prueba algebraica de que el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras posee la propiedad de modelo finito.

Continuaremos el capítulo presentando una caracterización para los espacios asociados a S-álgebras prelineales. Probaremos la propiedad de modelo finito para el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras prelineales, cuya demostración implicará que dicha variedad está generada por las cadenas finitas.

En la cuarta sección probaremos que ciertas subvariedades de la variedad de S-álgebras (a las que podemos asignarle una altura finita) tienen amalgamación. Este resultado junto con una versión apropiada del Teorema de interpolación de Craig nos permitirá demostrar la interpolación en el cálculo $IPC_S(n)$, que es el asociado a estas variedades. Utilizaremos el hecho de que cada álgebra de estas variedades admite modelo canónico para mostrar un teorema de completud del cálculo $IPC_S(n)$ con respecto a modelos de Kripke apropiados. Por otro lado caracterizaremos a las subálgebras dando un procedimiento geométrico (en el respectivo espacio de representación) para determinarlas. También estudiaremos el coproducto para ciertos casos particulares. Finalmente haremos algunas observaciones sobre las álgebras subdirectamente irreducibles, veremos la relación que tienen estas variedadades con ciertas variedades de Heyting y daremos una descripción del álgebra libre en un generador para la variedad asociada al cálculo $IPC_S(2)$.

Por último vamos estudiaremos las variedades generadas por (H_n, S) (con n un número natural, $n \geq 3$), siendo H_n la cadena de n elementos. Comenzaremos mostrando cómo se vinculan las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$ con la variedad de S-álgebras prelineales y las variedades de S-álgebras de altura finita. Luego daremos una presentación completa para el coproducto. Finalmente daremos una descripción del espacio de representación del álgebra libre en un generador para cada una de las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$, con lo cual tendremos un modo para construir el álgebra libre en cualquier cantidad de generadores de las variedades generadas por una cadena finita.

4.2. Propiedad de modelo finito para la variedad de S-álgebras

En [14] X. Caicedo probó, utilizando modelos de Kripke convenientes, que el cálculo proposicional asociado a la variedad de S-álgebras posee la propiedad de modelo finito. En lo que sigue haremos una demostración puramente algebraica de este resultado. Luego de haber desarrollado la prueba que daremos aquí hallamos un artículo de A. Yu. Muravistkii [52] que siguiendo una línea semejante a la nuestra demuestra este resultado.

Definición 4.2.1. Diremos que I^S tiene la *propiedad de modelo finito* (PMF) si para cada $\varphi \in L(S)$ tal que $\nvdash_{A(S)} \varphi$ se tiene que existe una S-álgebra finita H y una valuación $v : \Pi \to H$ tales que la extensión de v a un único homomorfismo $\overline{v} : L(S) \to H$ satisface que $\overline{v}(\varphi) \neq 1$.

En lo que sigue enunciaremos y probaremos algunos lemas técnicos que nos permitirán luego demostrar que la variedad de S-álgebras posee la PMF. La prueba de este resultado está inspirada en la prueba que dan Dunn y Hardegree en [21] para demostrar que el cálculo proposicional intuicionista posee la propiedad de modelo finito.

Si M es un retículo distributivo acotado y $T \subseteq M$, denotaremos como $\langle T \rangle$ al subretículo acotado generado por T (en particular el 0 y 1 de $\langle T \rangle$ y de M coinciden). Recordemos que si M es un retículo distributivo finito entonces M es un álgebra de Heyting. Más aún, M es una S-álgebra. Si $\{M_i\}_i$ es una familia de S-álgebras entonces llamaremos $\to_i$ a la implicación en M_i y S^i al sucesor en M_i.

Lema 4.2.2. *Sean M_1 un retículo distributivo finito y M_2 una S-álgebra tal que M_1 es un subretículo acotado de M_2. Si $x, y, x \to_2 y \in M_1$ entonces $x \to_2 y = x \to_1 y$.*

Demostración. Ver demostración del Teorema 11.9.1 de [21]. □

Lema 4.2.3. *Sean M_1 un retículo distributivo finito y M_2 una S-álgebra tales que M_1 es un subretículo acotado de M_2. Si $x, S^2(x) \in M_1$ entonces $S^1(x) \leq S^2(x)$.*

Demostración. Sean $x, S^2(x) \in M_1$. Para cada $y \in M_1$ tenemos que $S^1(x) \leq y \vee (y \to_1 x)$. En particular vale para $y = S^2(x)$. Luego tenemos que

$$S^1(x) \leq S^2(x) \vee (S^2(x) \to_1 x). \tag{4.1}$$

Como $x, S^2(x), S^2(x) \to_2 x = x \in M_1$, tenemos por el Lema 4.2.2 que $S^2(x) \to_1 x = S^2(x) \to_2 x = x$. Luego de la ecuación (4.1) se deduce que $S^1(x) \leq S^2(x) \vee x = S^2(x)$. □

Si H es un álgebra de Heyting y $a, b \in H$ $(a \leq b)$ escribiremos $[a, b]$ para referirnos al conjunto $\{x \in H : a \leq x \leq b\}$.

Lema 4.2.4. *Sea H un álgebra de Heyting y supongamos que $a \leq b$ en H son tales que $[a, b]$ como subretículo de H es booleano (i.e., para cada $x \in [a, b]$ existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $x \wedge \overline{x} = a$ y $x \vee \overline{x} = b$). Luego si $x \in [a, b]$ entonces $\overline{x} = b \wedge (x \to a)$.*

Demostración. Sea $x \in [a, b]$. Es inmediato que $x \wedge (b \wedge (x \to a)) = a$. Por otro lado $x \vee (b \wedge (x \to a)) = x \vee ((x \vee \overline{x}) \wedge (x \to a)) = x \vee (\overline{x} \wedge (x \to a)) = x \vee \overline{x} = b$. $\square$

Lema 4.2.5. *Si H es una S-álgebra y $a \in H$ entonces $[a, S(a)]$ como subretículo de H es booleano. En particular, para cada $x \in [a, S(a)]$ el complemento de x, al que denominaremos x^a, coincide con $(x \to a) \wedge S(a)$.*

Demostración. Sea $x \in [a, S(a)]$. Luego se tiene que $x \wedge x^a = x \wedge (x \to a) \wedge S(a) = x \wedge a \wedge S(a) = a$ y $x \vee x^a = x \vee ((x \to a) \wedge S(a)) = (x \vee (x \to a)) \wedge (x \vee S(a)) = S(a)$. $\square$

Definición 4.2.6. Sean $\Psi \in L(S)$, H una S-álgebra y $\overline{v} : L(S) \to H$ un homomorfismo. Sean $\to$ y S la implicación y el sucesor de H respectivamente. Si $\Psi_1, ..., \Psi_n$ son todas las subfórmulas de Ψ definimos $\hat{a}_i$ como $v(\Psi_i)$ (para $i = 1, .., n$) y luego consideramos los conjuntos $A = \{\hat{a}_1, ..., \hat{a}_n\} \subseteq H$, $\mathrm{L_0} = \langle A \rangle$ y $B = \{a \in A : S(a) \in A\}$. Disponiendo los elementos de B en una lista a_1,..., a_k podemos definir recursivamente los conjuntos

$$K_i = \{(x \to a_i) \wedge S(a_i) : x \in \mathrm{L_{i-1}} \cap [a_i, S(a_i)]\},$$

$$\mathrm{L_i} = \langle \mathrm{L_{i-1}} \cup K_i \rangle,$$

para $i = 1, ...k$. Notemos que cada $a_i, S(a_i) \in \mathrm{L_0}$.

Notemos además que cada $\mathrm{L_i}$ es un retículo distributivo finito, $K_i \subseteq \mathrm{L_i}$ y $\mathrm{L_{i-1}} \subseteq \mathrm{L_i}$.

Lema 4.2.7. *Sea H una S-álgebra. Para cada $i = 1, ..., k$, $\mathrm{L_i} \cap [a_i, S(a_i)]$ como subretículo de $\mathrm{L_i}$ es booleano. En particular, para cada $x \in [a_i, S(a_i)] \cap \mathrm{L_i}$ se tiene que el complemento de x en $[a_i, S(a_i)] \cap \mathrm{L_i}$ coincide con x^{a_i}. Más aún, $x^{a_i} = (x \to_i a_i) \wedge S(a_i)$.*

Demostración. Para $i = 1, ..., k$ definimos $B_i = \mathrm{L_i} \cap [a_i, S(a_i)]$ y sea $z \in B_i$. Luego z se puede escribir como $\bigvee_l \bigwedge_m x_{lm}$, para finitos $x_{lm} \in \mathrm{L_{i-1}} \cup K_i$. Notemos que en particular $z = \bigvee_l \bigwedge_m z_{lm}$, con $z_{lm} = (x_{lm} \vee a_i) \wedge S(a_i)$, por lo cual cada $z_{lm} \in B_i$. Como cada $z_{lm} \in [a_i, S(a_i)]$, por el Lema 4.2.5 tenemos que $(z_{lm})^{a_i}$ es el complemento de z_{lm} en el álgebra de Boole $[a_i, S(a_i)]$. A continuación probaremos que cada $(z_{lm})^{a_i} \in B_i$.

Si $x_{lm} \in \mathrm{L_{i-1}}$ entonces $z_{lm} \in \mathrm{L_{i-1}}$. Luego $z_{lm} \in \mathrm{L_{i-1}} \cap [a_i, S(a_i)]$, con lo cual $(z_{lm})^{a_i} = (z_{lm} \to a_i) \wedge S(a_i) \in K_i \subseteq \mathrm{L_i}$ y por ende también pertenece a B_i.

Si $x_{lm} \in K_i$ entonces $x_{lm} = (x \to a_i) \wedge S(a_i)$, para cierto $x \in \mathrm{L_{i-1}} \cap [a_i, S(a_i)]$. Luego $z_{lm} = (x \to a_i) \wedge S(a_i) = x^{a_i}$, por lo cual $(z_{lm})^{a_i} = (x^{a_i})^{a_i} = x \in \mathrm{L_{i-1}} \cap [a_i, S(a_i)] \subseteq B_i$.

Hemos probado que $(z_{lm})^{a_i}$ es el complemento de z_{lm} en B_i. Un cálculo directo prueba que $\bigwedge_l \bigvee_m (z_{lm})^{a_i}$ es el complemento de z en B_i, por ende B_i es un álgebra de Boole. Además como B_i es un subretículo booleano de $\mathrm{L_i}$ tenemos que $z^{a_i} = (z \to_i a_i) \wedge S(a_i)$, en virtud del Lema 4.2.4. $\square$

Proposición 4.2.8. *Sea H una S-álgebra. Para cada $i, j = 1, ..., k$ tales que $i \leq j$ se tiene que $\mathrm{L_j} \cap [a_i, S(a_i)]$ como subretículo de $\mathrm{L_j}$ es booleano. En particular, para cada $x \in \mathrm{L_j} \cap [a_i, S(a_i)]$ se tiene que el complemento de x en $\mathrm{L_j} \cap [a_i, S(a_i)]$ coincide con x^{a_i}. Más aún, $x^{a_i} = (x \rightarrow_i a_i) \wedge S(a_i)$.*

Demostración. Fijemos un número natural i, $i \leq k$. Probaremos por inducción que la propiedad deseada vale para todo j tal que $i \leq j \leq k$. El caso $j = i$ es consecuencia del Lema 4.2.7. Supongamos ahora que $\mathrm{L_h} \cap [a_i, S(a_i)]$ es un álgebra de Boole para cierto h tal que $i \leq h < k$. Probaremos que $\mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$ es un álgebra de Boole.

Un cálculo directo prueba que la función $f_h : \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_{h+1}, S(a_{h+1})] \rightarrow \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$ dada por $f_h(x) = (x \vee a_i) \wedge S(a_i)$ es un homomorfismo de retículos. Sea $z \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$, con lo cual z se puede escribir como $\bigvee_l \bigwedge_m x_{lm}$, para finitos $x_{lm} \in \mathrm{L_h} \cup K_{h+1}$. En particular $z = \bigvee_l \bigwedge_m z_{lm}$, con $z_{lm} = (x_{lm} \vee a_i) \wedge S(a_i)$. Para probar que $\mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$ es un álgebra de Boole basta probar que cada z_{lm} tiene complemento en $\mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$.

Si $x_{lm} \in \mathrm{L_h}$ entonces $z_{lm} \in \mathrm{L_h} \cap [a_i, S(a_i)]$. Por hipótesis inductiva $\mathrm{L_h} \cap [a_i, S(a_i)]$ es un álgebra de Boole, con lo cual $z_{lm}^{a_i} \in \mathrm{L_h} \cap [a_i, S(a_i)] \subseteq \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$.

Consideremos el caso en que $x_{lm} \in K_{h+1}$. En particular, $x_{lm} \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_{h+1}, S(a_{h+1})]$. Por esta razón $z_{lm} = f_h(x_{lm}) \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$. Definimos los elementos

$$\alpha = f_h(a_{h+1}),\ \omega = f_h(S(a_{h+1})),\ u = z_{lm} = f_h(x_{lm}),\ \overline{u} = f_h(x_{lm}^{a_{h+1}}),$$

$$v = (\omega^{a_i} \vee \overline{u}) \wedge \alpha^{a_i}.$$

El elemento v pertenece a $\mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$. En efecto, es claro que $v \in [a_i, S(a_i)]$. Además como $a_{h+1}, a_i, S(a_{h+1}), S(a_i) \in \mathrm{L_0}$ tenemos que $\alpha, \omega \in \mathrm{L_i}$, con lo cual $\alpha, \omega \in \mathrm{L_i} \cap [a_i, S(a_i)]$. Usando el Lema 4.2.7 se tiene que $\alpha^{a_i}, \omega^{a_i} \in \mathrm{L_i} \cap [a_i, S(a_i)] \subseteq \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$. Como además $\overline{u} \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$ se infiere que $v \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$. Veremos a continuación que $u \vee v = S(a_i)$ y que $u \wedge v = a_i$, lo que va a implicar que $z_{lm}^{a_i} = u^{a_i} = v \in \mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$.

Como $a_{h+1} \leq x_{lm} \leq S(a_{h+1})$, usando la monotonía de f_h se tiene que

$$\alpha \leq u \leq \omega$$

Luego usando que f_h es homomorfismo de retículos se llega a que

$$v \vee u = ((\omega^{a_i} \vee \overline{u}) \wedge \alpha^{a_i}) \vee u = (\omega^{a_i} \vee \overline{u} \vee u) \wedge (\alpha^{a_i} \vee u) = (\omega^{a_i} \vee \omega) \wedge (\alpha^{a_i} \vee u) =$$

$$S(a_i) \wedge (\alpha^{a_i} \vee u) \geq S(a_i) \wedge (\alpha^{a_i} \vee \alpha) = S(a_i) \wedge S(a_i) = S(a_i).$$

De esta manera llegamos a que $u \vee v = S(a_i)$. Por otro lado,

$$v \wedge u = ((\omega^{a_i} \vee \overline{u}) \wedge \alpha^{a_i}) \wedge u = \alpha^{a_i} \wedge ((\omega^{a_i} \wedge u) \vee (\overline{u} \wedge u)) = \alpha^{a_i} \wedge ((\omega^{a_i} \wedge u) \vee \alpha) \leq$$

$$\alpha^{a_i} \wedge ((u^{a_i} \wedge u) \vee \alpha) = \alpha^{a_i} \wedge (a_i \vee \alpha) = \alpha^{a_i} \wedge \alpha = a_i.$$

De esta manera $u \wedge v = a_i$. Por lo tanto $\mathrm{L_{h+1}} \cap [a_i, S(a_i)]$ es un álgebra de Boole. □

Teorema 4.2.9. *I^S posee la PMF.*

Demostración. Sean $\Psi \in L(S)$, H una S-álgebra y $\overline{v} : L(S) \to H$ un homomorfismo tal que $\overline{v}(\Psi) \neq 1$. Sean $\to$ y S la implicación y el sucesor de H respectivamente. Queremos hallar una S-álgebra finita L y un homomorfismo $\overline{w} : L(S) \to \mathrm{L}$ tales que $\overline{w}(\Psi) \neq 1$.

Sean $\Psi_1, ..., \Psi_n$ todas las subfórmulas de Φ. Definimos a_i como $v(\Psi_i)$, para $i = 1, .., n$. En lo que sigue usaremos la notación dada en la Definición 4.2.6.

Cada $\mathrm{L_i}$ es una S-álgebra finita. Veamos que $S^1(a_1) = S(a_1)$. Como $S(a_1) \in \mathrm{L_0}$ entonces $S(a_1) \in \mathrm{L_1}$. Luego por el Lema 4.2.3 tenemos que $S^1(a_1) \leq S(a_1)$, por lo cual $S^1(a_1) \in \mathrm{L_1} \cap [a_1, S(a_1)]$. Por la Proposición 4.2.8 tenemos que

$$(S^1(a_1))^{a_1} = (S^1(a_1) \to_1 a_1) \wedge S(a_1) = a_1 \wedge S(a_1) = a_1. \tag{4.2}$$

Luego concluimos que $(S^1(a_1))^{a_1} = a_1$. Esto es equivalente a decir que $S^1(a_1) = S(a_1)$ (ya que en toda álgebra de Boole el sucesor de todo elemento coincide con el top), que es lo que deseábamos probar.

Similarmente se prueba que $S^2(a_2) = S(a_2)$. Además notemos que por el Lema 4.2.3 y por la Proposición 4.2.8 se tiene (razonando como lo hicimos previamente) que $S(a_1) = S^2(a_1)$. Iterando este proceso llegamos a que $\mathrm{L} = \mathrm{L_k}$ es un subretículo acotado (y finito) de H tal que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Si $a, b, a \to b \in \mathrm{L}$ entonces $a \to b = a \to_k b$ (por el Lema 4.2.2).

2. Para cada $i = 1, ..., k$, $S(a_i) = S^k(a_i)$.

Sea V el conjunto de variables proposicionales que aparecen en la fórmula Ψ. Definimos una función $w : \Pi \to \mathrm{L}$ del siguiente modo:

$$w(\pi) = \begin{cases} v(\pi) & \text{si } \pi \in V, \\ 0 & \text{si } \pi \notin V. \end{cases}$$

Sabemos que w se puede extender a un único homomorfismo $\overline{w} : L(S) \to \mathrm{L}$. Por la construcción que hemos hecho para L y para w, haciendo inducción sobre cada subfórmula de Ψ se llega a que $\overline{w}(\Psi_i) = \overline{v}(\Psi_i)$ para $i = 1, ..., n$. En particular se concluye que $\overline{w}(\Psi) = \overline{v}(\Psi) \neq 1$. $\square$

Corolario 4.2.10. *La variedad de S-álgebras está generada por sus miembros finitos.*

4.3. S-álgebras prelineales

En esta sección daremos una caracterización para los espacios asociados a S-álgebras prelineales y probaremos que la función sucesor preserva supremos finitos en este caso, un hecho que no vale para cualquier S-álgebra. Luego probaremos la propiedad de modelo finito para el cálculo proposicional que está asociado a la variedad de S-álgebras prelineales, cuya demostración implicará que dicha variedad está generada por las cadenas finitas.

Las *álgebras de Heyting prelineales* fueron consideradas por Horn en [34] como un paso intermedio entre la lógica clásica y la intuicionista, y fueron estudiadas también por Monteiro [46], G. Martínez [44] y otros. Esta es la subvariedad de álgebras de Heyting generada por todas las cadenas, y puede ser axiomatizada con un conjunto de ecuaciones que caractericen a las álgebras de Heyting más la ecuación de prelinealidad

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$$

En ([1], ch.IX) y en [46] se dan caracterizaciones para las álgebras de Heyting prelineales.

4.3.1. Teoría de representación

Diremos que un espacio de Esakia $(X, \leq)$ es un *root system* si para cada $x \in X$, el conjunto $[x) = \{y \in X : y \geq x\}$ es una cadena. Monteiro probó en [46] (ver también [34]) que las álgebras de Heyting prelineales están caracterizadas en términos de los filtros primos. Específicamente, un álgebra de Heyting H es prelineal si y sólo si $(\mathbf{X}(H), \subseteq)$ es un root system.

Sea SLH la subcategoría de **SHA** cuyos objetos son S-álgebras prelineales (vamos a utilizar la misma notación para referirnos a la variedad subyacente a dicha categoría). Un *SL-espacio* es un S-espacio $(X, \leq)$ el cual es también un root system. La categoría SLS es la subcategoría de **SHS** cuyos objetos son SL-espacios.

Por la dualidad dada entre **SHA** y $\mathbf{SH}_S$ (ver teoremas 3.4.13 y 3.4.19) tenemos el siguiente

Teorema 4.3.1. *Existe una equivalencia categorial dual entre* SLH *y* SLS*.*

En lo que sigue daremos un modo equivalente de describir al sucesor en la S-álgebra de clopens crecientes de un SL-espacio.

Sean $(X, \leq)$ un SL-espacio y V un clopen decreciente no vacío de $(X, \leq)$. Para cada $x \in V$ existe máximo del conjunto $[x) \cap V$, el cual será denotado como x_V. Primero veremos que el conjunto $[x) \cap V$ admite maximales. Para ello es suficiente probar que si $H = \mathbf{D}(X)$, $P \in \mathbf{X}(H)$ y V es un clopen decreciente de $\mathbf{X}(H)$ no vacío tal que $P \in V$, entonces el conjunto $[P) \cap V$ admite maximales. Este hecho se deduce de que $V^c = \varphi_H(a)$ para cierto $a \in H$, y del Lema de Zorn. Ahora veremos que existe máximo del conjunto $[x) \cap V$. Sea $y \in [x) \cap V$ tal que y es un elemento maximal en dicho conjunto. Si $z \in [x) \cap V$ entonces $x \leq z$ y $x \leq y$. Luego $y \leq z$ ó $z \leq y$. Como $y, z \in [x) \cap V$ e y es maximal en este conjunto, si $y \leq z$ entonces $y = z$. En cualquier caso $z \leq y$, por lo cual $[x) \cap V$ tiene elemento máximo.

Si $(X, \leq)$ es un SL-espacio y V es un clopen decreciente no vacío de $(X, \leq)$, para cada $x \in V$ escribiremos x_V para el máximo del conjunto $[x) \cap V$.

Proposición 4.3.2. *Si $(X, \leq)$ es un root system y V es un clopen decreciente no vacío entonces $V_M = \bigcup_{x \in V}\{x_V\}$.*

En particular, si $(X, \leq)$ es un SL-espacio, $U \in \mathbf{D}(X)$ y $U \neq X$ entonces

$$S(U) = U \cup (\bigcup_{x \in U^c} \{x_{U^c}\}).$$

Demostración. Si $x \in V_M$ entonces $x \in [x) \cap V$. Sea $y \in [x) \cap V$, por lo cual $x \leq y$ con $y \in V$. Usando que $x \in V_M$ se llega a que $x = y$. Luego $[x) \cap V = \{x\}$ y así $x \in \bigcup_{x \in V}\{x_V\}$. Recíprocamente, sea $y \in \bigcup_{x \in V}\{x_V\}$. Luego $y = x_V$ para cierto $x \in V$ y en particular $y \in V$. Sea $y \leq z$ con $z \in V$. Luego $y \in [x) \cap V$ y por ende $y = z$. Por lo tanto $y \in V_M$. □

El siguiente resultado nos permitirá demostrar que toda S-álgebra prelineal preserva supremos finitos.

Lema 4.3.3. *Sea $(X, \leq)$ un poset con la propiedad de que para cada $x \in X$ el conjunto $[x)$ es una cadena. Luego para cada A y B subconjuntos decrecientes de X tenemos que $(A \cap B)_M \subseteq A_M \cup B_M$.*

Demostración. Sean A, B decrecientes y $x \in (A \cap B)_M$. Supongamos que $x \notin A_M$, por lo cual existe $y \in A$ tal que $x < y$. Sea $z \in B$ con $x \leq z$. Veremos que $x = z$ y por esta razón será $x \in B_M$. Notemos que $y, z \in [x)$, por lo cual por hipótesis tenemos que $y \leq z$ ó $z \leq y$. Si $y \leq z$ entonces $y \in A \cap B$. Sin embargo $x \leq y$, con lo cual $x = y$, una contradicción. Luego $x \leq z \leq y$, por lo cual $z \in A \cap B$ y así $x = z$, que era lo que deseábamos probar. □

Corolario 4.3.4. *En toda S-álgebra prelineal vale la ecuación*

$$S(x \vee y) = S(x) \vee S(y).$$

Demostración. La ecuación $S(x) \vee S(y) \leq S(x \vee y)$ se sigue de la monotonía de la función sucesor (dado que S es un operador frontal, ver Lema 3.2.2). La otra desigualdad es una consecuencia directa del Lema 4.3.3 y del Teorema 4.3.1. En efecto, si U y V son clopens crecientes de un SL-espacio entonces

$$S(U \cup V) = U \cup V \cup (U^c \cap V^c)_M \subseteq U \cup V \cup (U^c)_M \cup (V^c)_M = S(U) \cup S(V).$$

□

4.3.2. Propiedad de modelo finito

Sea LI^S el cálculo I^S con el axioma adicional $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$.

Definición 4.3.5. LI^S tiene la *propiedad de modelo finito* (PMF) si para cada $\varphi \in L(S)$ tal que $\nvdash_{A(S)} \varphi$ existe una S-álgebra prelineal finita H y una valuación $v : \Pi \to H$ tal que la extensión de v a un único homomorfismo $\overline{v} : L(S) \to H$ satisface que $\overline{v}(\varphi) \neq 1$.

En lo que sigue probaremos que LI^S tiene la PMF.

Lema 4.3.6. *(Lema 1.1 de [34]) Sea H un álgebra de Heyting prelineal. Si P es un filtro primo de H entonces H/P es una cadena.*

Sea C una S-álgebra que es una cadena (llamaremos $\to$ y S a la implicación y al sucesor de C, respectivamente), y sea L un subconjunto finito de C tal que contiene al primer y al último elemento de C. El siguiente resultado es inmediato.

Lema 4.3.7. L *es un subretículo acotado de C tal que tiene implicación $\to_{\mathrm{L}}$ y sucesor S_{L}. Más aún, se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

1. *Si $x, y \in \mathrm{L}$ entonces $x \to y = x \to_{\mathrm{L}} y$.*

2. *Si $x, S(x) \in \mathrm{L}$ entonces $S_{\mathrm{L}}(x) = S(x)$.*

Proposición 4.3.8. *LI^S posee la PMF.*

Demostración. Sean $\Psi \in L(S)$, H una S-álgebra prelineal y $\overline{v} : L(S) \to H$ un homomorfismo tal que $\overline{v}(\Psi) \neq 1$. Sean $\to$ y S la implicación y el sucesor de H respectivamente. Vamos a hallar una cadena finita L y un homomorfismo $\overline{t} : L(S) \to \mathrm{L}$ tal que $\overline{t}(\Psi) \neq 1$.

Como $\overline{v}(\Psi) \neq 1$, por el Teorema del Filtro Primo se tiene que existe un filtro primo P de H tal que $\overline{v}(\Psi) \notin P$, es decir, tal que $\overline{v}(\Psi)/P \neq 1$. Llamando C a H/P, se tiene que C es una cadena, en virtud del Lema 4.3.6.

Por otro lado, dado que el sucesor es un operador compatible, tenemos que la aplicación cociente $\rho : H \to C$ es un homomorfismo de S-álgebras y por ende $w = \rho\overline{v} : L(S) \to C$ también lo es. Notemos que $w(\Psi) = \overline{v}(\Psi)/P \neq 1$.

Sean $Sub_\Phi = \{\Psi_1, ..., \Psi_n\}$ el conjunto de todas las subfórmulas de Φ y L el subconjunto de C dado por $\{0, 1\} \cup \{w(\alpha) : \alpha \in Sub_\Phi\}$. Si V es el conjunto de variables proposicionales que aparecen en Ψ, podemos definir la función $t : \Pi \to L$ del siguiente modo:

$$t(\pi) = \begin{cases} w(\pi) & \text{si } \pi \in V, \\ 0 & \text{si } \pi \notin V. \end{cases}$$

Sabemos que t se puede extender a un único homomorfismo $\overline{t} : L(S) \to \mathrm{L}$. Por la construcción que hemos hecho para L y para t, utilizando el Lema 4.3.7 y haciendo inducción sobre las subfórmulas de Ψ se llega a que $\overline{t}(\Psi_i) = w(\Psi_i)$ para $i = 1, ..., n$. En particular se concluye que $\overline{t}(\Psi) = w(\Psi) \neq 1$. $\square$

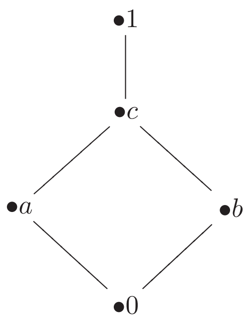
La demostración de la propiedad anterior nos permite enunciar el siguiente

Corolario 4.3.9. *La variedad de S-álgebras prelineales está generada por las cadenas finitas.*

Observación 4.3.10. *Notemos que como en todas las cadenas finitas el sucesor preserva supremos finitos, esta propiedad vale también en toda S-álgebra prelineal (esto es una prueba inmediata del Corolario 4.3.4). Un argumento análogo prueba que en toda S-álgebra prelineal vale la ecuación $S(x \to y) = S(x) \to S(y)$.*

Si bien en toda S-álgebra valen las desigualdades $S(x) \vee S(y) \leq S(x \vee y)$ y $S(x \to y) \leq S(x) \to S(y)$, tenemos que las igualdades no valen en general, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.11. *Consideremos la siguiente S-álgebra:*



Tenemos que $S(a) \vee S(b) = c < 1 = S(c) = S(a \vee b)$ *y que* $S(a \to 0) = S(b) = c < 1 = c \to c = S(a) \to S(0)$.

4.4. S-álgebras de altura finita

En esta sección probaremos que ciertas subvariedades de la variedad de S-álgebras tienen amalgamación. Este resultado, junto con una versión apropiada del Teorema 1 de [43], nos permitirá demostrar la interpolación en el cálculo $IPC_S(n)$, que es el que está asociado a estas variedades. Utilizaremos el hecho de que cada álgebra de estas variedades admite modelo canónico para probar un teorema de completitud del cálculo $IPC_S(n)$ con respecto a modelos de Kripke apropiados. Por otro lado caracterizaremos a las subálgebras dando un procedimiento geométrico (en el respectivo espacio de representación) para determinarlas. También estudiaremos el coproducto para ciertos casos particulares. Finalmente haremos algunas observaciones sobre las álgebras subdirectamente irreducibles, veremos la relación que tienen estas variedades con ciertas variedades de Heyting y daremos una descripción del álgebra libre en un generador para la variedad asociada al cálculo $IPC_S(2)$.

Parte de estos resultados fueron publicados en [17] y en [19].

4.4.1. La altura en posets, espacios topológicos y álgebras

Sea $(X, \leq)$ un poset y $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales . Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la siguiente sucesión de conjuntos $\{X_n\}_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned} X_1 \quad &= X_M, \\ X_{n+1} &= X_n \cup (X_n^c)_M. \end{aligned}$$

Luego para $n \geq 2$ definimos los conjuntos $\hat{X}_n$ como

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= X_1 \ , \\ \hat{X}_n &= (X_{n-1}^c)_M = X_n - X_{n-1}. \end{aligned}$$

Diremos que un *poset* $(X, \leq)$ *tiene altura* n si $X = X_n$ y n es el mínimo de los números naturales con esta propiedad.

Observación 4.4.1. *Sea* $(X, \leq)$ *un poset y* $n \in \mathbb{N}$.

(i) X_n *es un conjunto creciente.*

(ii) $X_n = \bigcup_{i=1}^n \hat{X}_i$. *En efecto,*

$$X_n = \hat{X}_n \cup X_{n-1} = \hat{X}_n \cup \hat{X}_{n-1} \cup X_{n-2} = ... = \bigcup_{i=1}^{n} \hat{X}_i,$$

con lo cual de manera equivalente podemos decir que un poset $(X, \leq)$ *tiene altura menor o igual que* n *si y sólo si* $X = \bigcup_{i=1}^n \hat{X}_i$.

Definimos la *altura de un S-espacio* como la altura de su poset subyacente. Escribiremos $\mathrm{TSH_n}$ para la categoría cuyos objetos son S-espacios de altura menor o igual que n y cuyos morfismos son los mismos de $\mathbf{SH}_S$.

Diremos que una *S-álgebra H tiene altura n* si $S^{(n)}(0) = 1$ y n es el menor número natural con esta propiedad. Escribiremos $\mathrm{SH_n}$ para la clase de S-álgebras de altura menor o igual que n. Esta clase es una variedad caracterizada por las ecuaciones de S-álgebras y la ecuación adicional

$$S^{(n)}(0) = 1,$$

o, de manera equivalente, la ecuación $S^{(n)}(x) = 1$. Notemos que $\mathrm{SH_1}$ es justamente la variedad de álgebras de Boole (en este caso el sucesor coincide con el último elemento del álgebra), y además

$$\mathrm{SH_1} \subseteq \mathrm{SH_2} \subseteq \ldots \mathrm{SH_n} \subseteq \ldots$$

También escribiremos $\mathrm{SH_n}$ para la categoría cuyos elementos son S-álgebras de altura menor o igual que n y cuyos morfismos son los mismos de **SHA**.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de los teoremas 3.4.13 y 3.4.19.

Teorema 4.4.2. *Existe una equivalencia categorial dual entre* $\mathrm{SH_n}$ *y* $\mathrm{TSH_n}$.

El siguiente lema y la siguiente proposición nos permitirán dar una mejor descripción para los morfismos de la categoría $\mathrm{TSH_n}$.

Lema 4.4.3. *Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ S-espacios, y sea $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ un morfismo en $\boldsymbol{SH}_S$. Luego las siguientes condiciones valen:*

(a) $f^{-1}(Y_i) = X_i$.

(b) $f^{-1}(\hat{Y}_i) = \hat{X}_i$.

(c) *Si $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ son S-espacios de altura k y l respectivamente entonces $k \leq l$.*

(d) *Si f es suryectiva en (c) entonces $k = l$.*

Demostración. (a) Haremos la demostración por inducción.

Caso $i = 1$: tenemos que $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_M) = X_M = X_1$. Supongamos ahora que la propiedad vale para cierto $i \in \mathbb{N}$. Luego

$$f^{-1}(Y_{i+1}) = f^{-1}(S(Y_i)) = S(f^{-1}(Y_i)) = S(X_i) = X_{i+1}.$$

(b) Es consecuencia de (a). El caso $i = 1$ es immediato. Para $i > 1$ tenemos que $f^{-1}(Y_i) = X_i$, con lo cual $f^{-1}(Y_{i-1}) \cup f^{-1}(\hat{Y}_i) = X_{i-1} \cup \hat{X}_i$. Tomando la intersección con respecto a $\hat{X}_i$ en ambos miembros (y utilizando (a)) se tiene que $\hat{X}_i \subseteq f^{-1}(\hat{Y}_i)$. Tomando la intersección con respecto a $f^{-1}(\hat{Y}_i)$ en ambos miembros (y utilizando (a) nuevamente) llegamos a que $f^{-1}(\hat{Y}_i) \subseteq \hat{X}_i$.

(c) Por (a) tenemos que $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(Y_l) = X_l$, con lo cual $k \leq l$.

(d) Por (c) sólo necesitamos probar que $l \leq k$. Sea $y \in Y$. Como f es suryectiva existe $x \in X = X_k$ tal que $y = f(x)$. Por el ítem (a) tenemos que $y \in Y_k$. Luego $Y = Y_k$ y por ende $l \leq k$. $\square$

Sea $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ un morfismo en **HS** y sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ S-espacios. Consideremos la siguiente condición:

(E) Para cada $x, y \in X$, $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$.

Proposición 4.4.4. *Si f satisface la condición (E) entonces f es un morfismo en $\boldsymbol{SH}_S$. Recíprocamente, si $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es un morfismo en* $\mathrm{TSH_n}$ *entonces f satisface la condición (E).*

Demostración. Supongamos que f satisface la condición (E) y sea $U \in \mathbf{D}(X)$. Por la Observación 3.4.18 sólo necesitamos probar que $f^{-1}(U_M^c) \subseteq (f^{-1}(U^c))_M$. Sean $x \in f^{-1}(U_M^c)$ y $x \leq z$ con $z \in f^{-1}(U^c)$. Si $x < z$ entonces $f(x) < f(z)$ (por la condición (E)), una contradicción. Luego f es un morfismo en $\mathbf{SH}_S$.

Recíprocamente, supongamos que $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ es un morfismo en $\mathrm{TSH_n}$ y sea $x < y$. En particular, $f(x) \leq f(y)$, así que supongamos que $f(x) = f(y)$. Luego existe un número natural i tal que $f(x) \in \hat{Y}_i$. Por (b) del Lema 4.4.3 tenemos $x, y \in \hat{X}_i$, una contradicción ya que $x < y$. $\square$

Corolario 4.4.5. *Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ S-espacios y $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ un morfismo en $\boldsymbol{HS}$. Luego f es un morfismo en* $\mathrm{TSH_n}$ *si y sólo si f satisface la condición (E).*

4.4.2. Extensión canónica

Las extensiones canónicas de retículos distributivos con operadores fueron introducidas por Gehrke y Jónsson en [29] como una generalización natural de extensiones canónicas de las álgebras de Boole con operadores (ver también [28]).

Supongamos que L es un retículo. Un par (C, e) es una *completación* de L si C es un retículo completo y $e : L \to C$ es un monomorfismo de retículos.

Una completación (C, e) de un retículo L se dice *densa* si cada elemento c de C es un supremo de ínfimos y un ínfimo de supremos de elementos de $e(L)$.

Una completación (C, e) de un retículo L se dice *compacta* si para cada par de subconjuntos A y B de L tales que $\bigwedge e(A) \leq \bigvee e(B)$ se tiene que existen subconjuntos finitos A_0 y B_0 de A y B respectivamente tales que $\bigwedge e(A_0) \leq \bigvee e(B_0)$.

Una *extensión canónica* de un retículo L es una completación densa y compacta de L. La misma es única salvo isomorfismo (ver [3]).

De modo análogo podemos definir extensión canónica de álgebras cuyos reductos sean retículos.

Si H es un álgebra de Heyting, una extensión canónica de H es el par $(\mathbf{X}(H)^+, \varphi_H)$.

En lo que sigue veremos que todas las álgebras en $\mathrm{SH_n}$ tienen una extensión canónica.

Lema 4.4.6. *Sea $(X, \leq)$ un poset. Luego*

(a) *Si $i \neq j$ entonces $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j = \emptyset$.*

(b) *Si $x \leq y$, $x \in \hat{X}_i$ e $y \in \hat{X}_j$ entonces $j \leq i$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\hat{X}_i \cap \hat{X}_j \neq \emptyset$ y que $i < j$. Luego existe $x \in X$ tal que $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$, siendo $i \leq j-1$. En particular $x \notin X_{j-1}$, con lo cual $x \notin X_i$. Luego $x \notin \hat{X}_i$, una contradicción.

(b) Sean $x \leq y$, $x \in \hat{X}_i$ e $y \in \hat{X}_j$. Tenemos que $x \in X_i$ y por ende, que $y \in X_i$. Luego existe $k \leq i$ tal que $y \in \hat{X}_k$. Por (a) inferimos que $j = k \leq i$. $\square$

Lema 4.4.7. *Sea $(X, \leq)$ un poset. Si $i \geq 2$ y $x \in \hat{X}_i$ entonces existe $y \in \hat{X}_{i-1}$ tal que $x < y$.*

Demostración. Consideraremos dos casos.

Caso $i = 2$: supongamos que $x \in \hat{X}_2$, por lo cual $x \notin X_M$. Luego existe $y \in X$ tal que $x < y$. Usando que $x \in X_2$ llegamos a que $y \in X_2$. De este modo como $x < y$ se concluye que $y \in \hat{X}_1$.

Caso $i > 2$: sea $x \in \hat{X}_i$. Por (a) del Lema 4.4.6 tenemos que $x \notin \hat{X}_{i-1} = (X_{i-2}^c)_M$. Luego como además $x \notin X_{i-2}$ se tiene que existe $y \notin X_{i-2}$ tal que $x < y$. Por otro lado existe $j = 1, ..., i$ tal que $y \in \hat{X}_j$. Si $j = i$, usando que $x, y \in \hat{X}_i$ y que $x < y$ tenemos una contradicción. Supongamos que $j \leq i-2$. Usando que $y \notin X_{i-2}$ tenemos que $y \notin \hat{X}_k$ para cada $k = 1, ..., i-2$. En particular $y \notin \hat{X}_j$, una contradicción. Por lo tanto $j = i-1$. $\square$

Ahora probaremos la siguiente

Proposición 4.4.8. *Sea $(X, \leq)$ un poset. Si $(X, \leq)$ tiene altura $n \in \mathbb{N}$ entonces X^+ es una S-álgebra de altura n. Más aún, para cada $U \in X^+$ tenemos que*

$$S(U) = U \cup (U^c)_M.$$

Demostración. Por el Corolario 3.3.2, para probar que X^+ admite sucesor sólo necesitamos probar la condición (P). Sea V un conjunto decreciente en $(X, \leq)$ y sea $x \in V$. Tenemos que existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in \hat{X}_i$. Luego $[x) \cap V \cap \hat{X}_i \neq \emptyset$. Consideremos el conjunto

$$M = \{k = 1, ..., n : [x) \cap V \cap \hat{X}_k \neq \emptyset\}.$$

Como $i \in M$ se concluye que $M \neq \emptyset$. Sea $j = min\ M$. Luego $[x) \cap V \cap \hat{X}_j \neq \emptyset$, por lo cual existe $v \in [x) \cap V \cap \hat{X}_j$. Por esta razón $x \leq v$ y $v \in V$. Supongamos que $v \leq w$ para cierto $w \in V$. Existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $w \in \hat{X}_k$, y por esto $w \in [x) \cap V \cap \hat{X}_k$. Luego $[x) \cap V \cap \hat{X}_k \neq \emptyset$, y $k \in M$. Por lo tanto $j \leq k$.

Por otro lado por (b) del Lema 4.4.6 tenemos que $k \leq j$; por ende $k = j$. Usando que $v \leq w$ con $v, w \in \hat{X}_k$ se tiene que $v = w$, y así $v \in V_M$. Luego $x \in (V_M]$.

Finalmente por hipótesis tenemos que $S^{(n)}(\emptyset) = X_n = X$. Si $S^{(k)}(\emptyset) = X_k = X$ entonces $n \leq k$ ya que $X = X_n = X_k$. $\square$

Observación 4.4.9. *La demostración de la proposición previa nos dice que si un poset tiene altura finita entonces satisface la condición* (P). *Sin embargo la recíproca no es cierta en general. Si consideramos el poset $\mathbb{N}^0$ (recordemos que este es el poset de números naturales con cero con el orden inverso) se tiene que satisface la condición* (P) *y sin embargo no tiene altura finita.*

En general, si H es una S-álgebra entonces $\mathbf{X}(H)^+$ no es necesariamente una S-álgebra, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.10. *Notemos que si $\oplus$ es la suma ordinal de posets (ver [1], pág. 39) entonces $\mathbb{N}_0 \oplus \mathbb{N}^0$ es una S-álgebra. Sin embargo $(X(\mathbb{N}_0 \oplus \mathbb{N}^0))^+$ no es una S-álgebra.*

Llamaremos: $[\omega) = p_\omega,\ [i) = p_i,\ [^{-}i) = p_{-i},\ p = \mathbb{N}^0.$

Algebra $H = \mathbb{N}_0 \oplus \mathbb{N}^0$ *Poset* P *de primos*   *Algebra* P^+

$$
\begin{array}{c}
\omega \\ \vert \\ {}^{-}1 \\ \vert \\ {}^{-}2 \\ \vert \\ {}^{-}3 \\ \vert \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \vert \\ 3 \\ \vert \\ 2 \\ \vert \\ 1 \\ \vert \\ 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
p_1 \\ \vert \\ p_2 \\ \vert \\ p_3 \\ \vert \\ \vdots \\ \\ p \\ \\ \vdots \\ \\ p_{-3} \\ \vert \\ p_{-2} \\ \vert \\ p_{-1} \\ \vert \\ p_\omega
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
[p_\omega) \\ \vert \\ [p_{-1}) \\ \vert \\ [p_{-2}) \\ \vert \\ \vdots \\ \\ [p) \\ \vert \\ (p]^c \\ \\ \vdots \\ \\ [p_3) \\ \vert \\ [p_2) \\ \vert \\ [p_1)
\end{array}
$$

4.4.3. Propiedad de amalgamación

La propiedad de amalgamación fue considerada primero por Schrwier en [60], donde la misma fue investigada para grupos. En una forma general, la propiedad de amalgamación fue formulada primero por Fraïssé ([24]) en conexión con ciertas propiedades de inmersiones.

Definición 4.4.11. Sea K una clase de álgebras. Para $H_0, H_1 H_2 \in K$, e inmersiones $i_1 : H_0 \to H_1$ y $i_2 : H_0 \to H_2$, la estructura $\langle H_0; i_1, H_1; i_2, H_2\rangle$ es llamada una K-*amalgama*. Diremos que esta K-amalgama puede ser amalgamada en K si existe algún $H \in K$ e inmersiones $\epsilon_1 : H_1 \to H$ y $\epsilon_2 : H_2 \to H$, tales que $\epsilon_1 i_1 = \epsilon_2 i_2$. Esto es, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} H_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & H_1 \arrow[d, "\epsilon_1"] \\ H_2 \arrow[r, "\epsilon_2"'] & H \end{tikzcd}$$

Diremos que K tiene la *propiedad de amalgamación* (o bien que K es amalgamable) si cada K-amalgama puede ser amalgamado en K. La terna $(H, \epsilon_1, \epsilon_2)$ será llamada una extensión común de H_1 y H_2 sobre H_0.

En esta parte del trabajo probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{SH_n}$ tiene la propiedad de amalgamación. Para ello utilizaremos la equivalencia categorial dual dada en el Teorema 4.4.2, y el Corolario 4.4.5.

Para $j = 1, 2$, sea $i_j : H_0 \to H_j$ un monomorfismo en la categoría SH_n. Si consideramos $\alpha : \mathbf{X}(H_1) \to \mathbf{X}(H_0)$, dada por $\alpha = \mathbf{X}(i_1)$ y $\beta : \mathbf{X}(H_2) \to \mathbf{X}(H_0)$, dada por $\beta = \mathbf{X}(i_2)$, tenemos que α y β son epimorfismos en la categoría $\mathrm{TSH_n}$. Tomemos $X = \mathbf{X}(H_1)$, $Y = \mathbf{X}(H_2)$, $Z = \mathbf{X}(H_0)$ y consideremos el conjunto

$$W = \{(x, y) \in X \times Y : \alpha(x) = \beta(y)\}.$$

Por (d) del Lema 4.4.3 tenemos que X, Y y Z son S-espacios de la misma altura $h \leq n$. Notemos que

$$W \subseteq \bigcup_{i=1}^{h} \hat{X}_i \times \hat{Y}_i. \tag{4.3}$$

En efecto, sea $\alpha(x) = \beta(y)$. Luego existe $i \in \{1, ..., h\}$ tal que $x \in \hat{X}_i$. Por (b) del Lema 4.4.3 tenemos que $\beta(y) = \alpha(x) \in \hat{Z}_i$. Por esta razón $y \in \hat{Y}_i$, y $(x, y) \in \hat{X}_i \times \hat{Y}_i$.

Con la notación de arriba, tenemos la siguiente

Proposición 4.4.12. *El poset $(W, \leq)$ tiene altura h.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre el índice de nivel $i \in \mathbb{N}$ que

$$W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) \subseteq \hat{W}_i. \tag{4.4}$$

Sea $(x, y) \in W, x \in X_M$ e $y \in Y_M$. Supongamos que $(z, w) \in W$ y que $(x, y) \leq (z, w)$. Usando que $x \in X_M$ e $y \in Y_M$ tenemos que $(x, y) = (z, w)$, y por lo tanto $(x, y) \in W_M$. Luego

$$W \cap (\hat{X}_1 \times \hat{Y}_1) \subseteq \hat{W}_1.$$

Supongamos ahora que $W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) \subseteq \hat{W}_i$ para todo $i \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$). Tomemos $(x, y) \in W \cap (\hat{X}_{k+1} \times \hat{Y}_{k+1})$. Luego $\alpha(x) = \beta(y)$, $x \in \hat{X}_{k+1}$ e $y \in \hat{Y}_{k+1}$. Supongamos que $(x, y) \in W_k$. En particular existe $i \leq k$ tal que $(x, y) \in \hat{W}_i$. Por otro lado, por el Lema 4.4.7 existe $x_i \in \hat{X}_i$ tal que $x < x_i$, y por la Proposición 4.4.5 se deduce que $\alpha(x) < \alpha(x_i)$. Como β es suryectiva existe $z_i \in Y$ tal que $\alpha(x_i) = \beta(z_i)$. Por (*b*) del Lema 4.4.3 tenemos que $z_i \in \hat{Y}_i$. Usando que β es un *p*-morfismo y que $\beta(y) < \beta(z_i)$, llegamos a que existe $y_i \in Y$ tal que $y \leq y_i$ y $\beta(y_i) = \beta(z_i)$. Nuevamente por (*b*) del Lema 4.4.3 tenemos que $y_i \in \hat{Y}_i$. De este modo se concluye que $(x, y) < (x_i, y_i) \in W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) \subseteq \hat{W}_i$, una contradicción dado que $(x, y) \in \hat{W}_i$. Luego $(x, y) \in (W_k)^c$. Sea $(x, y) \leq (z, w)$ con $(z, w) \in (W_k)^c$. Supongamos que $x < z$, con lo cual por el Lema 4.4.7 tenemos que $z \in \hat{X}_i$ para algún $i \leq k$. Luego por (4.3) y (*a*) del Lema 4.4.6 se tiene que $w \in \hat{Y}_i$, con lo cual $(z, w) \in W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) \subseteq \hat{W}_i$, una contradicción porque $(z, w) \in W_k^c$. Luego $(x, y) \in \hat{W}_{k+1}$, y por lo tanto

$$W \cap (\hat{X}_{k+1} \times \hat{Y}_{k+1}) \subseteq \hat{W}_{k+1}.$$

De este modo la condición (4.4) vale para todo $i \in \mathbb{N}$. Por (4.3) y (*a*) del Lema 4.4.6, llegamos a que

$$W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) = \hat{W}_i$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Por (4.3) se obtiene que

$$W = \bigcup_{i=1}^{h} (W \cap (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)) = \bigcup_{i=1}^{h} \hat{W}_i.$$

En particular, $W_h = W$. Sea m un número natural tal que $W_m = W$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que h es la altura de $(X, \leq)$. Probaremos primero que $X = X_h = X_m$. Sea $x \in X_h$, con lo cual existe $i \in \{1, ..., h\}$ tal que $x \in \hat{X}_i$. Por (*b*) del Lema 4.4.3 tenemos que $\alpha(x) \in \hat{Z}_i$. Como β es suryectiva existe $y \in Y$ tal que $\alpha(x) = \beta(y)$, siendo en particular $y \in \hat{Y}_i$. Luego $(x, y) \in W = W_m$. Por esta razón existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $(x, y) \in \hat{W}_j$, de lo cual se deduce que $x \in \hat{X}_j$, y así, $x \in X_m$. De este modo $X = X_h \subseteq X_m$, es decir, $X = X_h = X_m$. Como la altura de $(X, \leq)$ es h inferimos que $h \leq m$, con lo cual la altura de $(W, \leq)$ es h. □

Por las proposiciones 4.4.12, 4.4.8 y con la notación de arriba, tenemos el siguiente

Corolario 4.4.13. *W^+ es una S-álgebra de altura h.*

Para $i = 1, 2$ definimos las funciones $f_i : H_i \to W^+$ como

$$f_i(b) = \{(P_1, P_2) \in W : b \in P_i\}.$$

Estas funciones son monomorfismos de álgebras de Heyting tales que $f_1 i_1 = f_2 i_2$ (ver [33], Sección 2.5). Como $\varphi_{H_i}(Sb) = \varphi_{H_i}(b) \cup (\varphi_{H_i}(b))^c_M$ y $S(f_i(b)) = f_i(b) \cup (f_i(b)^c)_M$, se puede probar que

$$f_i(S(b)) = S(f_i(b)).$$

Para probarlo fijemos $i \in \{1, 2\}$. Sea $(P_1, P_2) \in f_i(S(b))$, con lo cual $(P_1, P_2) \in W$ y $S(b) \in P_i$. Luego $P_i \in \varphi_{H_i}(S(b)) = \varphi_{H_i}(b) \cup (\varphi_{H_i}(b)^c)_M$. Queremos probar que $(P_1, P_2) \in S(f_i(b)) = f_i(b) \cup (f_i(b)^c)_M$. Si $P_i \in \varphi_{H_i}(b)$ entonces $b \in P_i$ y por ende $(P_1, P_2) \in f_i(b)$. Sea $P_i \in (\varphi_{H_i}(b)^c)_M$ y sea $(Q_1, Q_2) \in (f_i(b))^c$ (es decir,

$(Q_1, Q_2) \in W$ y $b \notin Q_i$) tales que $P_1 \subseteq Q_1$ y $P_2 \subseteq Q_2$. Como $P_i \in (\varphi_{H_i}(b)^c)_M$ se tiene que $P_i = Q_i$. Luego por (4.3) se infiere que $P_1 = Q_1$ y $P_2 = Q_2$. Por esta razón $(P_1, P_2) \in (f_i(b)^c)_M$, y así $f_i(S(b)) \subseteq S(f_i(b))$.

Recíprocamente sea $(P_1, P_2) \in S(f_i(b)) = f_i(b) \cup (f_i(b)^c)_M$. Debemos probar que $(P_1, P_2) \in f_i(S(b))$, es decir, que $P_i \in \varphi_{H_i}(S(b)) = \varphi_{H_i}(b) \cup (\varphi_{H_i}(b)^c)_M$. Si $(P_1, P_2) \in f_i(b)$ entonces $b \in P_i$. Luego $P_i \in \varphi_{H_i}(b)$ y por ende $P_i \in \varphi_{H_i}(S(b))$. Consideremos el caso en que $(P_1, P_2) \in (f_i(b)^c)_M$. Sea $P_i \subseteq Q_i$ tal que $b \notin Q_i$. Supongamos que $i = 1$ (el caso $i = 2$ se prueba de modo similar), con lo cual $P_1 \subseteq Q_1$ y $b \notin Q_1$. Notemos que $\beta(P_2) = \alpha(P_1) \subseteq \alpha(Q_1)$. Utilizando el hecho de que β es p-morfismo se tiene que existe un filtro primo Q_2 de H_2 tal que $P_2 \subseteq Q_2$ y $\beta(Q_2) = \alpha(Q_1)$. Luego $(P_1, P_2) \leq (Q_1, Q_2)$ y $(Q_1, Q_2) \in f_i(b)^c$. Por esta razón $P_1 = Q_1$ y $P_2 = Q_2$. En particular, $P_1 \in (\varphi_{H_i}(b)^c)_M$. Por ende $(P_1, P_2) \in f_i(S(b))$, quedando así probado que $S(f_i(b)) \subseteq f_i(S(b))$.

Por lo tanto tenemos el siguiente

Teorema 4.4.14. $\mathrm{SH_n}$ *tiene la propiedad de amalgamación.*

4.4.4. Teorema de interpolación de Craig

Esta parte del trabajo tiene como meta principal probar que el cálculo proposicional correspondiente a la la variedad $\mathrm{SH_n}$ satisface el Teorema de Interpolación de Craig.

Definición 4.4.15. Supongamos que $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo ∇. Por el *Teorema de Interpolación de Craig* (CIT) en la lógica IPC_∇ nos referiremos a la siguiente proposición: para cada par de fórmulas α, $\beta \in L(\nabla)$, si $\vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \beta$ entonces existe γ en $L(\nabla)$ tal que $\vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \gamma$, $\vdash_{A(\nabla)} \beta \to \gamma$ y γ contiene sólo aquellas variables las cuales ocurren simultáneamente en α y β.

Supongamos que K es una clase arbitraria de álgebras. Si x es un conjunto de k variables y $p(x)$ es una ecuación en K, escribiremos $\models_K p(x)$ en caso de que para cada $H \in K$ y para cada $a_1, ..., a_k \in H$ tengamos que la ecuación dada por $p(a_1, ..., a_k)$ es verdadera en H.

Si K es una clase de álgebras parcialmente ordenadas y x tiene k variables, definimos $\models_K t(x) \leq u(x)$ (donde t y u son términos) en caso de que para cada $H \in K$ y para cada $a_1, ..., a_k \in H$ tengamos que la desigualdad dada por $t(a_1, ..., a_k) \leq u(a_1, ..., a_k)$ es verdadera en H.

Sea K una clase de álgebras. Si p y q son igualdades (podemos suponer con igual cantidad de variables k) escribiremos $\models_K p \wedge q$ para indicar $\models_K p$ y $\models_K q$. Escribiremos $\models_K p \Rightarrow q$ para referirnos a la siguiente afirmación: para cada $H \in K$ y $a_1, ..., a_k \in H$, si $p(a_1, ..., a_k)$ vale en H entonces $q(a_1, ..., a_k)$ vale en H.

Por el *principio de interpolación para igualdades* (IPE) en la clase K nos referiremos a la siguiente proposición: dados conjuntos de variables x, y, z disjuntos de a pares e igualdades $p_1(x, y)$,...,$p_n(x, y)$, $q(x, z)$, si

$$\models_K \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x, y) \Rightarrow q(x, z)$$

entonces existen m igualdades $\tau_1(x), ..., \tau_m(x)$ tales que

$$\models_K \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x,y) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^{m} \tau_j(x) \text{ y } \models_K \bigwedge_{j=1}^{m} \tau_j(x) \Rightarrow q(x,z).$$

Si todas las álgebras en K están parcialmente ordenadas, definimos el *principio de interpolación para desigualdades* (IPI): para cada par de términos $t(x,y)$ y $u(x,z)$, si $\models_K t(x,y) \leq u(x,z)$ entonces existe un término $v(x)$ tal que $\models_K t(x,y) \leq v(x) \leq u(x,z)$.

Una clase K de álgebras es llamada *fuertemente amalgamable* si para cada $H_0, H_1 H_2 \in K$ la Definición 4.4.11 se satisface y $\epsilon_1(H_1) \cap \epsilon_2(H_2) = \epsilon_1 i_1(H_0)$. Si todas las álgebras en K están parcialmente ordenadas, K es llamada *superamalgamable* si la Definición 4.4.11 se satisface para $H_0, H_1, H_2 \in K$, y si para $j,k \in \{0,1\}$, si $\epsilon_j(x) \leq \epsilon_k(y)$ entonces existe $z \in H_0$ tal que $x \leq_j i_j(z)$ e $i_k(z) \leq_k y$ (donde $\leq_i$ es el orden en H_i para $i = 1,2$).

Sea K una clase de álgebras tal que en cada $H \in K$ podemos definir el supremo de dos elementos. Diremos que H está *completamente conectada* si para todos $x, y \in H$, si $x \vee y = 1$ entonces $x = 1$ ó $y = 1$.

El siguiente teorema es consecuencia de una reformulación del Teorema 1 dado en [43], cuya prueba utiliza también el Teorema 4.1, el Teorema 4.2 y el Corolario 4.4 de [11], respectivamente.

Teorema 4.4.16. *Supongamos que $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo ∇. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *CIT es verdadero en IPC_∇;*

2) *La variedad $V(A(\nabla))$ satisface la IPI;*

3) *La variedad $V(A(\nabla))$ satisface la IPE;*

4) *$V(A(\nabla))$ es superamalgamable;*

5) *$V(A(\nabla))$ es fuertemente amalgamable;*

6) *$V(A(\nabla))$ tiene la propiedad de amalgamación;*

7) *La Definición 4.4.11 is satisface para cualesquiera álgebras totalmente conectadas $H_0, H_1, H_2 \in V(A(\nabla))$.*

Sea $n \in \mathbb{N}$. El siguiente conjunto $A(S)_n$ de esquema de axiomas define axiomáticamente un conectivo del cálculo intuicionista (ver Ejemplo 5.2 de [11]):

(Sn1) $\alpha \to S(\alpha)$,

(Sn2) $S(\alpha) \to (\beta \vee (\beta \to \alpha))$,

(Sn3) $(S(\alpha) \to \alpha) \to \alpha$,

(Sn4) $S^{(n)}(\alpha)$.

En particular, tenemos $V(A(S)_n) = \mathrm{SH_n}$. Escribiremos $IPC_S(n)$ para el cálculo proposicional intuicionista con los axiomas adicionales $(Sn1)$-$(Sn4)$, con Modus Ponens y sustitución como únicas reglas. Luego por los teoremas 4.4.14 y 4.4.16 tenemos el siguiente

Corolario 4.4.17. *$IPC_S(n)$ satisface CIT.*

Queda abierta la pregunta de si el cálculo I^S posee el CIT (o equivalentemente, si la variedad de S-álgebras satisface la propiedad de amalgamación).

Lo que haremos en lo que sigue es demostrar una serie de lemas que probarán luego en detalle el Teorema 4.4.16. Antes de hacer esto aclararemos algunas cosas. Los lemas que daremos son la adaptación de los lemas que da Maksimova en [43] para demostrar el Teorema 1 del trabajo citado (para demostrar estos lemas utilizaremos el Teorema 4.1, el Teorema 4.2 y el Corolario 4.4 de [11], los cuales fueron enunciados en la sección 2). Por una cuestión de completitud del trabajo haremos en detalle las respectivas demostraciones, las cuales son esencialmente las mismas que han sido hechas originalmente por Maksimova.

Supongamos que p es la igualdad de términos $u = v$. Luego $\overline{p}$ denotará al término $(u \to v) \wedge (v \to u)$.

Lema 4.4.18. *Sea f un operador implícito compatible de álgebras de Heyting.*

La cuasi-identidad $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \Rightarrow q$ es verdadera en $V(E(f))$ si y sólo si la identidad $(\overline{p_1} \wedge ... \wedge \overline{p_n}) \to \overline{q} = 1$ es verdadera en $V(E(f))$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que la identidad $(\overline{p_1} \wedge ... \wedge \overline{p_n}) \to \overline{q} = 1$ no vale en $V(E(f))$. Sean $x_1, ..., x_m$ las variables que aparecen en esta identidad. Luego, existe $\mu \in V(E(f))$ y $a_1, ..., a_m \in \mu$ tales que $((\overline{p_1} \wedge ... \wedge \overline{p_n}) \to \overline{q})(a_1, ..., a_m) \neq 1$. Sea Φ el filtro generado por el elemento $(\overline{p_1} \wedge ... \wedge \overline{p_n})(a_1, ..., a_m)$. Como f es un operador implícito compatible de álgebras de Heyting concluimos que $\mu_1 = \mu/\Phi \in V(E(f))$. Luego tenemos que

$$\overline{p_i}(a_1/\Phi, ..., a_m/\Phi) = 1 \text{ para } i = 1, ..., n,$$

$$\overline{q}(a_1/\Phi, ..., a_m/\Phi) \neq 1.$$

Por lo tanto obtenemos que $\models_{V(E(f))} (p_1 \wedge ... \wedge p_n) \Rightarrow q$ no vale, una contradicción.

$\Leftarrow$) Se sigue de que $\models_{V(E(f))} (x = 1 \wedge (x \to y = 1)) \Rightarrow (y = 1)$.

$\square$

Lema 4.4.19. *Sean* $1), 2), 3), 4), 5), 6)$ *y* $7)$ *los ítems del Teorema 4.4.16.*

Luego $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$ *y* $4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6) \Rightarrow 7)$.

Demostración. $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$. Se deduce del siguiente hecho válido para fórmulas de la lógica L_∇: $\vdash_{V(A(\nabla))} \alpha \to \beta$ sii (por teoremas 2.2.3 y 2.2.4) $\Vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \beta$ sii $\models_{V(A(\nabla))} \alpha \to \beta$, con lo cual vale que

$$\vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \beta \text{ sii } \models_{V(A(\nabla))} \alpha \to \beta.$$

$1) \Leftrightarrow 2)$. $\Rightarrow$) Supongamos que $t(x, y)$ y $u(x, z)$ son términos tales que $\models_{V(A(\nabla))} t(x, y) \leq u(x, z)$, con lo cual $\vdash_{A(\nabla)} t(x, y) \leftrightarrow u(x, z)$. Por hipótesis tenemos que existe un término $c(x)$ tal que $\vdash_{A(\nabla)} t(x, y) \to c(x)$ y $\vdash_{A(\nabla)} c(x) \to u(x, z)$, es decir $\models_{V(A(\nabla))} t(x, y) \leq c(x) \leq u(x, z)$. La recíproca es similar.

$2) \Leftrightarrow 3)$. $\Rightarrow$) Sean x, y, z conjuntos de variables disjuntos dos a dos. Sean $p_1(x, y)$,...,$p_n(x, y)$, $q(x, z)$ igualdades tales que

$$\models_{V(A(\nabla))} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x, y) \Rightarrow q(x, z).$$

Por el Lemma 4.4.18 tenemos que $\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{p_i}(x,y) \to \overline{q}(x,z) = 1$ en $V(A(\nabla))$, es decir $\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{p_i}(x,y) \leq q(x,z)$. Luego por hipótesis existe un término $v(x)$ tal que $\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{p_i}(x,y) \leq v(x) \leq q(x,z)$, con lo cual $\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{p_i}(x,y) \to v(x) = 1$ y $v(x) \to q(x,z) = 1$. Si $V(x)$ es la igualdad de términos $v(x) = 1$ entonces $\overline{V}(x) = v(x)$. Aplicando el Lema 4.4.18 deducimos que $\models_{V(A(\nabla))} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i(x,y) \Rightarrow V(x)$ y $\models_{V(A(\nabla))} V(x) \Rightarrow q(x,z)$.

3) $\Rightarrow$ 2). $\Rightarrow$). Sean $t(x,y)$ y $u(x,z)$ términos tales que $\models_{V(A(\nabla))} t(x,y) \leq u(x,z)$, siendo x, y, z conjuntos de variables disjuntos dos a dos, con lo cual $\models_{V(A(\nabla))} t(x,y) \to u(x,z) = 1$. Sean $T(x,y)$ y $U(x,z)$ las igualdades de términos $t(x,y) = 1$ y $U(x,z) = 1$, respectivamente. Luego $\overline{T}(x,y) = t(x,y)$ y $\overline{U}(x,z) = u(x,z)$, con lo cual $\overline{T}(x,y) \to \overline{U}(x,z) = 1$ vale en $V(A(\nabla))$. Por el Lema 4.4.18 tenemos que $\models_{V(A(\nabla))} T(x,y) \Rightarrow U(x,z)$. Por hipótesis existen m y términos $\tau_1(x), ..., \tau_m(x)$ tales que $\models_{V(A(\nabla))} T(x,y) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} \tau_i(x)$ y $\models_{V(A(\nabla))} \bigwedge_{i=1}^{m} \tau_i(x) \Rightarrow U(x,z)$. En particular, para cada $i = 1, ..., m$ tenemos que

$$\models_{V(A(\nabla))} T(x,y) \Rightarrow \tau_i(x).$$

$\square$

Notemos que $\overline{(\bigwedge_{i=1}^{m} \tau_i(x))} = (\bigwedge_{i=1}^{m} \overline{\tau_i}(x))$ y llamemos $v(x)$ a este término. Aplicando el Lema 4.4.18 tenemos que

$$\models_{V(A(\nabla))} t(x,y) \Rightarrow \overline{\tau_i}(x) = 1 \text{ (para cada } i = 1, ..., m),$$

$$\models_{V(A(\nabla))} v(x) \Rightarrow u(x,z),$$

de lo cual se deduce en particular que $\models_{V(A(\nabla))} t(x,y) \Rightarrow v(x) = 1$. Por lo tanto concluimos que $\models_{V(A(\nabla))} t(x,y) \leq v(x) \leq u(x,z)$.

4) $\Rightarrow$ 5). Sean $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in V(A(\nabla))$ e $i_1 : \mu_0 \to \mu_1$, $i_2 : \mu_0 \to \mu_2$ monomorfismos tales que satisfacen la condición de superamalgamabilidad. La inclusióm $\epsilon_1(\mu_0) \subseteq \epsilon_1(\mu_1) \cap \epsilon_2(\mu_2)$ se deduce de manera inmediata de la condición (A). Recíprocamente, sea $a \in \epsilon_1(\mu_1) \cap \epsilon_2(\mu_2)$, con lo cual $a = \epsilon_1(x) = \epsilon_2(y)$, para ciertos $x \in \mu_1$ e $y \in \mu_2$. Por hipótesis existen $z, w \in \mu_0$ tales que $x \leq_1 i_1(z)$, $i_1(z) \leq_2 y$, $y \leq_2 i_2(w)$, $i_2(w) \leq_1 x$. Dado que $\epsilon_1(x) = \epsilon_2(y)$ tenemos que $a = \epsilon_1(x) = \epsilon_1 i_1(z)$, con $z \in \mu_0$. Es decir, $a \in \epsilon_1 1_1(\mu_0)$.

5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 7). Se deduce de manera inmediata a partir de las definiciones.

Lema 4.4.20. *Supongamos que el conjunto de fórmulas $A(\nabla)$ define axiomáticamente un conectivo ∇. Si L_∇ satisface el teorema de interpolación de Craig entonces $V(A(\nabla))$ es superamalgamable.*

Demostración. Supongamos que $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in V(A(\nabla))$ y que $i_1 : \mu_0 \to \mu_1$ e $i_2 : \mu_0 \to \mu_2$ son monomorfismos, siendo μ_0 subálgebra de μ_1 y μ_2. Lo primero que debemos probar es que se satisface la condición (B). Sea $i = 0, 1, 2$. A cada $a \in \mu_i$ le asociamos una variable x_a^i de modo tal que $x_a^0 = x_a^1 = x_a^2$ en caso de que $a \in \mu_0$ y el resto de las variables son distintas. Sean F_i el conjunto de variables proposicionales en las variables x_a^i y F el conjunto de fórmulas formadas por las variables proposicionales en las variables x_a^0, x_a^1, x_a^2. Si $H \in V(A(\nabla))$ y $a \in H$ fijamos una interpretación de las variables, asignando a cada x_a^i el valor a, y escribiremos $H \models_{V(A(\nabla))} \alpha = \beta$ si la igualdad $\alpha = \beta$ es verdadera en la interpretación dada. Para $i = 1, 2$ definimos los conjuntos

$$T_i = \{\alpha : \alpha \in F_i \text{ y } \mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha = 1\}.$$

Notemos que T_i es cerrada bajo MP y que $F_i \cap L \subseteq T_i$, siendo L el conjunto de teoremas asociado a la lógica L_∇. Ahora definamos el conjunto

$$T = \{\alpha : \alpha \in F \text{ y } T_1 \cup T_2 \vdash_{A(\nabla)} \alpha\}.$$

Para $\{i, j\} = \{1, 2\}$, $\alpha \in F_i$ y $\beta \in F_j$, probaremos que

$$T \vdash_{A(\nabla)} (\alpha \to \beta) \text{ sii existe } \gamma \in F_0 \text{ tal que } (\mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha \leq \gamma \text{ y}$$
$$\mu_j \models_{V(A(\nabla))} \gamma \leq \beta. \tag{4.5}$$

Supongamos que existe $\gamma \in F_0$ tal que $\mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha \leq \gamma$ y $\mu_j \models_{V(A(\nabla))} \gamma \leq \beta$, es decir, $\mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha \to \gamma = 1$ y $\mu_j \models_{V(A(\nabla))} \gamma \to \beta) = 1$. Luego, $\alpha \to \gamma, \gamma \to \beta \in T$, por lo cual $\alpha \to \beta \in T$. Recíprocamente, supongamos que $\alpha \to \gamma \in T$. Luego existen subconjuntos finitos $A_i \subseteq T_i$ y $A_j \subseteq T_j$ tales que $A_i, A_j \vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \beta$. Denotemos por φ_k a la conjunción de todas fórmulas de T_k, para $k = i, j$. Aplicando el teorema de la deducción se tiene que

$$\vdash_{A(\nabla)} A_i \to (A_j \to (\alpha \to \beta)),$$

lo cual es equivalente a

$$\vdash_{A(\nabla)} (A_i \wedge \alpha) \to (A_j \to \beta).$$

Por el teorema de interpolación de Craig en L_∇, existe una fórmula $\gamma \in F_0$ tal que $\vdash_{A(\nabla)} (A_i \wedge \alpha) \to \gamma)$ y $\gamma \to (A_j \to \beta)$. Luego, $A_i \vdash_{A(\nabla)} \alpha \to \gamma$ y $A_j \vdash_{A(\nabla)} \gamma \to \beta$. Como $A_i \in T_i$ (por definición de T_i) tenemos que $\alpha \to \gamma \in T_i$. Por lo tanto, $\mu_i \models_{V(A(\nabla))} (\alpha \to \gamma) = 1$, es decir, $\mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha \leq \gamma$. Similarmente, $\mu_j \models_{V(A(\nabla))} \gamma \leq \beta$.

Poniendo $\alpha = 1$ en la ecuación (4.5) obtenemos lo siguiente, para $j = 1, 2$ y $\beta \in F_j$:

$$T \vdash_{A(\nabla)} \alpha = 1 \text{ sii existe } \gamma \in F_0 \text{ tal que } \mu_i \models_{V(A(\nabla))} 1 \leq \gamma \text{ y } \mu_j \models_{V(A(\nabla))} \gamma \leq \beta$$
$$\text{sii } \mu_j \models_{V(A(\nabla))} \beta = 1. \tag{4.6}$$

Sobre el conjunto de fórmulas F definimos la relación de equivalencia

$$\alpha \approx \beta \text{ sii } T \vdash_{A(\nabla)} (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Consideremos $\alpha, \beta \in F_i$ (con $i = 1, 2$). Luego, usando la ecuación (4.6) deducimos que

$$T \vdash_{A(\nabla)} (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ sii } \mu_i \models_{V(A(\nabla)} \alpha \leftrightarrow \beta = 1 \text{ sii } \mu_i \models_{A(\nabla)} \alpha = \beta,$$

y por esta razón tenemos que

$$\alpha \approx \beta \text{ sii } \mu_i \models_{V(A(\nabla))} \alpha = \beta. \tag{4.7}$$

Sea $\mu = F/\approx$. Notemos que $\mu \in V(A(\nabla))$, ya que ∇, considerado algebraicamente, es compatible y dado por ecuaciones, por Corolario 2.2.6.

Definimos las funciones $\epsilon_i : \mu_i \to \mu$ $(i = 1, 2)$ como

$$\epsilon_i(a) = x_a^i/\approx .$$

Por la ecuación (4.7) y por cómo definimos la interpretación de las variables en μ_i, tenemos que ϵ_i son monomorfismos. Si $a \in \mu_0$ entonces $x_a^0 = x_a^1 = x_a^2$, por lo cual $\epsilon_1(a) = \epsilon_1(b)$. De este modo se satisface la condición (B).

Falta ver que vale la superamalgamación. Supongamos que $j, k \in \{0, 1\}$, $a \in \mu_j$, $b \in \mu_k$, $\epsilon_j(a) \leq \epsilon_k(b)$. Luego $\epsilon_j(a) \to \epsilon_k(b) = 1$, es decir, $x_a^j \to x_b^k \approx 1$, i.e., $T \vdash_{A(\nabla)} x_a^j \to x_b^k \approx 1$ y por lo tanto $T \vdash_{A(\nabla)} x_a^j \leq x_b^k$ (en donde el orden parcial se define del modo usual, como en el caso del cálculo proposicional intuicionista). Por la ecuación (4.5) tenemos que existe $\gamma \in F_0$ tal que $\mu_j \models_{V(A(\nabla))} x_a \leq \gamma$ y $\mu_k \models_{V(A(\nabla))} \gamma \leq x_b$. Luego el valor c de la fórmula γ ocurre bajo la interpretación en μ_0 y $a \leq_j c$, $c \leq_k b$.

$\square$

La demostración del siguiente lema podría omitirse ya que es consecuencia directa del Lema 3 de [43].

Lema 4.4.21. *Sean f un operador implícito compatible de álgebras de Heyting, $\mu_1, \mu_2 \in V(E(f))$ y μ_0 una subálgebra de μ_1 y μ_2. Si para cada $a \in \mu_1$ y $b \in \mu_2$ no existe $c \in \mu_0$ tal que $a \leq_1 c$ y $c \leq_2 b$ entonces existen filtros primos Φ_1 en μ_1 y Φ_2 en μ_2 tales que $a \in \Phi_1$, $b \in \Phi_2$ y $\Phi_1 \cap \mu_0 = \Phi_2 \cap \mu_0$.*

Demostración. Definamos los conjuntos $\nabla = \{z \in \mu_0 : a \leq_1 z\}$ y $\Delta = \{z \in \mu_0 : z \leq_2 b\}$. Definamos ahora el conjunto

$$\Sigma_1 = \{J : J \text{ es un ideal de } \mu_2, \{b\} \cup \Delta \subseteq J, J \cap \nabla = \emptyset\}.$$

Es inmediato notar (por nuestra hipótesis) que $\{x \in \mu_2 : x \leq_2 b\} \in \Sigma_1$, por lo cual $\Sigma_1 \neq \emptyset$. Por el lema de Zorn tenemos que existe J_2 un elemento maximal en Σ_1. En particular, J_2 es un ideal primo de μ_2. Para probar esto, supongamos que no lo es, por lo cual existen $x, y \in J_2$ tales que $x \wedge y \in J_2$, $x \notin J_2$ e $y \notin J_2$. Sea I_1 el ideal generado por $\{x\} \cup J_2$ e I_2 el ideal generado por $\{y\} \cup J_2$. Si $I_1 \cap \nabla = \emptyset$ ó $I_2 \cap \nabla = \emptyset$, como $I_1, I_2 \in \Sigma_1$ y $J_2 \subseteq I_1, I_2$, tendríamos que $J_2 = I_1$ ó $J_2 = I_2$ y por esta razón $x \in J_2$ ó $y \in J_2$, una contradicción. Luego debe valer que $I_1 \cap \nabla \neq \emptyset$ e $I_2 \cap \nabla \neq \emptyset$. De este modo, existen $i_1, i_2 \in J_2$, $m, k \in \nabla$ tales que $a \leq_2 m \leq_2 x \vee i_1$ y $a \leq_2 k \leq_2 y \vee i_2$, con lo cual

$$a \leq_2 m \wedge k \leq_2 (x \wedge y) \vee (i_1 \wedge y) \vee (x \wedge i_2) \vee (i_1 \wedge i_2).$$

Como $x \wedge y, i_1 \wedge y, x \wedge i_2, i_1 \wedge i_2 \in J_2$, tenemos que $(x \wedge y) \vee (i_1 \wedge y) \vee (x \wedge i_2) \vee (i_1 \wedge i_2) \in J_2$, lo que a su vez implica que $m \wedge k \in J_2$. Pero $m \wedge k \in \nabla$ (pues ∇ es un filtro), por lo cual $J_2 \cap \nabla \neq \emptyset$, una contradicción nuevamente. Por lo tanto J_2 es un ideal primo de μ_2. Ahora definamos los siguientes conjuntos:

$$\Phi_2 = \mu_2 - J_2,$$

$$\Phi_0 = \Phi_2 \cap \mu_0,$$

$$J_0 = J_2 \cap \mu_0.$$

Notemos que $\nabla \subseteq \Phi_0$ ya que $\nabla \cap J_2 = \emptyset$. Consideremos el conjunto

$$\Sigma_2 = \{\Phi : \Phi \text{ es filtro de } \mu_1, \{a\} \cup \Phi_0 \subseteq \Phi, \Phi \cap J_0 = \emptyset\}.$$

Probaremos que el conjunto Φ definido como $\{x \in \mu_1 : \text{existe } z \in \mu_0 \text{ tal que } z \leq_1 a \to x\}$ es tal que $\Phi \in \Sigma_2$. Es inmediato probar que Φ es un filtro de μ_1 tal que $\{a\} \cup \Phi_0 \subseteq \Phi$. Veamos que $\Phi \cap J_0 = \emptyset$. Supongamos que esto no vale, con lo cual tenemos que existe $x \in \mu_1$ tal que $x \in \Phi \cap J_0$. Luego hay un $z \in \mu_0$ tal que $a \leq_1 z \to x$. Como $x \in J_0$, vale que

$$x \in J_2. \tag{4.8}$$

y que $x \in \mu_0$. Como μ_0 es subálgebra y $z \in \mu_0$, resulta que $z \to x \in \mu_0$ y así $z \to x \in \nabla \subseteq \Phi_0$. Pero $z \in \Phi_0$ y Φ_0 es un filtro de μ_0, con lo cual $x \in \Phi_0$, es decir, $x \notin J_2$, una contradicción con la ecuación (4.8). Por esta razón tenemos que $\Phi \cap J_0 = \emptyset$ y de esto se deduce que $\Phi \in \Sigma_2$. Por lo tanto $\Sigma_2 \neq \emptyset$. Luego por el Lema de Zorn Σ_2 contiene un elemento maximal Φ_1. Probaremos que Φ_1 es un ideal primo de μ_1. Para probar esto, supongamos que no lo es, por lo cual existen $x, y \in \mu_1$ tales que $x \wedge y \in \Phi_1$, $x \notin \Phi_1$ e $y \notin \Phi_1$. Sea F_1 el filtro generado por $\{x\} \cup \Phi_1$ y F_2 el filtro generado por $\{y\} \cup \Phi_1$. Si $F_1 \cap J_0 = \emptyset$ ó $F_2 \cap J_0 = \emptyset$, como $F_1, F_2 \in \Sigma_2$ y $\Phi_1 \subseteq F_1, F_2$, tendríamos que $\Phi_1 = F_1$ ó $\Phi_1 = F_2$ y por esta razón $x \in \Phi_1$ ó $y \in \Phi_1$, una contradicción. Luego debe valer que $F_1 \cap J_0 \neq \emptyset$ y $F_2 \cap J_0 \neq \emptyset$. De este modo, existen $f_1, f_2 \in \Phi_1$, $m, k \in J_0$ tales que $m \geq_1 x \wedge f_1$ y $k \geq_1 y \wedge f_2$, con lo cual

$$m \vee k \geq_1 (x \vee y) \wedge (f_1 \vee y) \wedge (x \vee f_2) \wedge (f_1 \vee f_2).$$

Como $x \vee y, f_1 \vee y, x \vee f_2, f_1 \vee f_2 \in \Phi_1$, tenemos que $(x \vee y) \wedge (f_1 \vee y) \wedge (x \vee f_2) \wedge (f_1 \vee f_2) \in \Phi_1$, lo que a su vez implica que $m \vee k \in \Phi_1$. Pero $m \vee k \in J_0$ (pues J_0 es un ideal y $x, y \in J_0$), por lo cual $m \vee k \in J_0 \cap \Phi_1$ y así $J_0 \cap \Phi_1 \neq \emptyset$, una contradicción nuevamente. Queda así probado que Φ_1 es un filtro primo de Σ_2.

Observemos lo siguiente: como $\Phi_1 \in \Sigma_2$ entonces $a \in \Phi_1$. Como $J_2 \in \Sigma_1$ entonces $b \in J_2$ y así $b \notin \Phi_2$. Por último, supongamos que $x \in \Phi_1 \cap \mu_0$. Luego $x \in \mu_0$ y $x \in \Phi_1$. Como $\Phi_1 \cap J_0 = \emptyset$, concluimos que $x \notin J_0$, por lo cual $x \in \Phi_2$. De este modo $\Phi_1 \cap \mu_0 \subseteq \mu_0 \cap \Phi_2$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \mu_0 \cap \Phi_2 = \Phi_0$. Como $\Phi_1 \in \Sigma_2$ tenemos que $x \in \Phi_0 \subseteq \Phi_1$. De este modo, $\mu_0 \cap \Phi_2 \subseteq \mu_0 \cap \Phi_1$. Por lo tanto $\Phi_1 \cap \mu_0 = \Phi_2 \cap \mu_0$.

□

Lema 4.4.22. *Sea f un operador implícito compatible de álgebras de Heyting. Si en la variedad $V(E(f))$ se satisface la Definición 4.4.11 para cualesquiera álgebras completamente conectadas μ_0, μ_1 y μ_2 entonces el principio de interpolación para desigualdades vale en $V(E(f))$.*

Demostración. Sean x, y, z conjuntos de variables disjuntos dos a dos, y sean $t(x, y), u(x, z)$ términos. Supongamos que no existe ningún término $v(x)$ tal que $\models_{V(E(f))} t(x, y) \leq v(x) \leq u(x, z)$. Sean F_0 un álgebra libre con generadores x en la variedad $V(E(f))$ y F_1 un álgebra libre con generadores x, y, z en la misma variedad. Como F_0 es una subálgebra de F_1, $t(x, y), u(x, z) \in F_1$ y no existe $v(x) \in F_0$ tal que $t(x, y) \leq v(x) \leq u(x, z)$, por el Lema 4.4.21 existen filtros primos Φ_1, Φ_2 de F tales que $t(x, y) \in \Phi_1$, $u(x, z) \notin \Phi_2$ y $\Phi_1 \cap F_0 = \Phi_2 \cap F_0$. Como f es implícito compatible, $\mu_1 = F/\Phi_1$ y $\mu_2 = F/\Phi_2$ pertenecen a $V(E(f))$. Además, como Φ_1 y Φ_2 son filtros primos las álgebras μ_1, μ_2 son completamente conectadas tales que $t(x, y)/\Phi_1 = 1$, $u(x, z)/\Phi_2 \neq 1$. Del hecho de que $\Phi_1 \cap F_0 = \Phi_2 \cap F_0$ se desprende que para $v_1, v_2 \in F_0$ vale que

$$v_1/\Phi_1 = v_2/\Phi_1 \Leftrightarrow v_1/\Phi_2 = v_2/\Phi_2.$$

Luego, definiendo el álgebra $\mu_0 = \{v/\Phi_1 : v \in F_0\}$, la cual pertenece a $V(E(f))$, tenemos que $i_1 : \mu_0 \to \mu_1$ e $i_2 : \mu_0 \to \mu_2$ dadas por $i_1(v/\Phi_1) = v/\Phi_1$ e $i_2(v/\Phi_1) = v/\Phi_2$ son monomorfismos (más aún, $\imath_2$ es un isomorfismo). Por hipótesis del lema, existe $\mu \in V(E(f))$ y monomorfismos $\epsilon_1 : \mu_1 \to \mu$ y $\epsilon_2 : \mu_2 \to \mu$ tales que $\epsilon_1 i_1 = \epsilon_2 i_2$. Sea X el conjunto cuyos elementos son las variables de x, y, z respectivamente. Definimos la función $h : X \to \mu$ como $h(x) = \epsilon_1(x/\Phi_1)$, $h(y) = \epsilon_1(y/\Phi_1)$, $h(z) = \epsilon_2(z/\Phi_2)$ (notemos que estamos haciendo abuso de notación). Esta función se extiende a un único homomorfismo $H : F \to \mu$ (por definición de un álgebra libre). Luego $H(t(x, y)) = \epsilon_1(t(x, y)/\Phi_1)$ y $H(u(x, z)) = \epsilon_2(u(x, z)/\Phi_2) \neq 1$ (ya que $t(x, y)/\Phi_1 = 1$, $u(x, z)/\Phi_2 \neq 1$ y ϵ_2 es monomorfismo). Por lo tanto, $\models_{V(E(f))} t(x, y) \leq u(x, z)$ no vale en $V(E(f))$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Observación 4.4.23. *Queremos remarcar una cuestión algebraica utilizada en la demostración de los lemas previos. Si f es un operador compatible definido en un álgebra de Heyting H y θ es una congruencia de H, entonces es posible definir una función $\hat{f} : H/\theta \to H/\theta$ como $\hat{f}([x]_\theta) = [f(x)]_\theta$. Si además f es implícito, dado que $\hat{f}$ y f satisfacen las mismas ecuaciones entonces definen el mismo operador, y en particular $H/\theta \in V(E(f))$. Si f estuviese presentado a partir de un esquema de ecuaciones pero no fuera implícito (es decir, si no estuviese caracterizado por las mismas), tendríamos de todas maneras que $H/\theta \in V(E(f))$ ya que las ecuaciones se trasladan al álgebra cociente: lo que ocurre en este caso es que no podemos asegurar a priori que f y $\hat{f}$ coincidan.*

Los lemas previos implican automáticamente el Teorema 4.4.16. En efecto, 1), 2) y 3) son equivalentes por el Lema 4.4.19. El hecho de que 3) implica 4) se sigue del Lema 4.4.20 y del hecho de que 1) y 3) son equivalentes; 4) implica 3) se sigue de que 4) implica 6), de que 6) implica 7) por el Lema 4.4.19, de que 7) implica 2) por el Lema 4.4.22 y de que 2) implica 3) por el Lema 4.4.19. De este modo 3) y 4) son equivalentes. Luego por el Lema 4.4.19 y las observaciones previas tenemos que 4) implica 5) y que 5) implica 6), 6) implica 2), 2) implica 3) y 3) implica 4), con lo cual 4) y 5) son equivalentes. Luego por el Lema 4.4.19 y las observaciones previas tenemos que 5) implica 6) y que 6) implica 4), 4) implica 5), con lo cual 5) y 6) son equivalentes. Por el Lema 4.4.19 vale que 6) implica 7) y 7) implica 6) se sigue del Lema 4.4.22 y de que 2) y 6) son equivalentes. De este modo 6) y 7) son equivalentes.

4.4.5. Modelos de Kripke

En [14] X. Caicedo propone una semántica de Kripke para I^S. En esta parte del trabajo aplicaremos una variación de esta semántica para estudiar resultados de completitud de $IPC_S(n)$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M} = ((X, \leq), K)$, donde $(X, \leq)$ es un poset de altura menor o igual que n y $K : L(S) \to X^+$ es una función. Escribiremos

$$K(\alpha) = \{p \in X : \mathcal{M} \models_p \alpha\},$$

donde la relación $\models_p$ satisface las siguientes condiciones para cada α, β en $L(S)$:

(1)	$\models_p \neg\alpha$	si y sólo si	$q \geq p$ implica que $\not\models_q \alpha$,
(2)	$\models_p \alpha \vee \beta$	si y sólo si	$\models_p \alpha$ ó $\models_p \beta$,
(3)	$\models_p \alpha \wedge \beta$	si y sólo si	$\models_p \alpha$ y $\models_p \beta$,
(4)	$\models_p \alpha \to \beta$	si y sólo si	para $q \geq p$: si $\models_q \alpha$ entonces $\models_q \beta$,
(5)	$\models_p S(\alpha)$	si y solo si	para cada $q > p$ tenemos que $\models_q \alpha$.

El ítem (5) se puede traducir como $K(S(\alpha)) = \{p :$ si $q > p$ entonces $q \in K(\alpha)\}$.

En este caso diremos que $\mathcal{M}$ es un *modelo de Kripke* de $IPC_S(n)$ (ver [25] para resultados generales de modelos de Kripke para IPC).

Las condiciones $(1) - (5)$ son equivalentes, respectivamente, a las siguientes:

(I) $K(\neg\alpha) = \neg K(\alpha)$,

(II) $K(\alpha \vee \beta) = K(\alpha) \cup K(\beta)$,

(III) $K(\alpha \wedge \beta) = K(\alpha) \cap K(\beta)$,

(IV) $K(\alpha \to \beta) = (K(\alpha) \cap K(\beta)^c]^c$.

(V) $K(S(\alpha)) = K(\alpha) \cup (K(\alpha)^c)_M$.

Veremos en detalle la demostración de que las condiciones (5) y (V) son equivalentes, es decir, que

$$\{p : \text{ si } q > p \text{ entonces } q \in K(\alpha)\} = K(\alpha) \cup (K(\alpha)^c)_M.$$

Sea $p \in \{p :$ si $q > p$ entonces $q \in K(\alpha)\}$. Si $p \notin K(\alpha)$ y $q > p$ entonces $p \in (K(\alpha)^c)_M$. Recíprocamente, sea $p \in K(\alpha) \cup (K(\alpha)^c)_M$. Sea q tal que $q > p$. Si $p \notin K(\alpha)$ entonces $p \in (K(\alpha)^c)_M$, con lo cual q no está en $(K(\alpha))^c$, es decir, $q \in K(\alpha)$. Si $p \in K(\alpha)$ entonces $q \in K(\alpha)$ dado que $K(\alpha)$ es creciente.

En lo que sigue daremos algunas definiciones conocidas. Sea T una *teoría* de $IPC_S(n)$ (es decir, un subconjunto de $L(S)$ cerrado por Modus Ponens). Luego definimos la siguiente relación de equivalencia en $L(S)$:

$$\alpha \equiv_T \beta \text{ sii } T \vdash_{A(S)_n} \alpha. \leftrightarrow \beta$$

Escribiremos $[\alpha]_T$ para la clase de equivalencia de α. Notemos que la relación binaria en $L(S)$ dada por $\alpha \leq \beta$ sii $T \vdash_{A(S)_n} (\alpha \to \beta)$ es un *preorden* (i.e es reflexiva y transitiva). Luego es posible definir el siguiente orden en el conjunto cociente: $[\alpha]_T \leq [\beta]_T$ sii $\alpha \leq \beta$.

Lema 4.4.24. *Sea $\alpha \in L(S)$ y T una teoría de $IPC_S(n)$. Luego*

(a) $[\alpha]_T = 1$ *sii* $T \vdash_{A(S)_n} \alpha$.

(b) $L(S)/\equiv_T$ *es una S-álgebra de altura menor o igual que n. En particular tenemos que*

$$S([\alpha]_T) = [S(\alpha)]_T.$$

Demostración. La primera afirmación se prueba del mismo modo que para el caso intuicionista. El segundo hecho se sigue de que el esquema de ecuaciones dado por el conjunto $A(S)_n$ define axiomáticamente un conectivo (ver Teorema 2.2.4). $\square$

Definición 4.4.25. Sean $\alpha \in L(S)$ y T una teoría. Diremos que la fórmula α vale en un modelo de Kripke $\mathcal{M} = ((X, \leq), K)$ de T sii para cada $p \in X$, tenemos que si para toda $\gamma \in T$, $p \in K(\gamma)$ entonces $p \in K(\alpha)$.

Luego tenemos la siguiente

Proposición 4.4.26. *Sean $\alpha \in L(S)$ y T una teoría de $IPC_S(n)$. Luego*

$$T \vdash_{A(S)_n} \alpha \textit{ sii } \alpha \textit{ vale en todo modelo de Kripke de } T.$$

Demostración. Sea $\mathcal{M} = ((X, \leq), K)$ un modelo de Kripke de T y supongamos que $T \vdash_{A(S)_n} \alpha$. Luego tenemos que $T \Vdash_{A(S)_n} \alpha$ (ver Definición 2.2.2). Usando que $(X, \leq)$ es un poset de altura menor o igual que n y la Proposición 4.4.8, tenemos que $X^+ \in \mathrm{SH_n}$, donde $S(U) = U \cup (U^c)_M$ para cada $U \in X^+$. Luego $K(S(\alpha)) = S(K(\alpha))$. Por esta razón, $K : L(S) \to X^+$ es un homomorfismo. Sea $p \in X$ tal que $p \in K(\gamma)$ para todo $\gamma \in T$. Definamos el conjunto $Y = \{Z \cap [p) : Z \in X^+\}$. Como K es un homomorfismo, un cálculo directo prueba que la aplicación $K_p : L(S) \to Y$ dada por $K_p(\beta) = K(\beta) \cap [p)$ es también un homomorfismo. Dado que $p \in K(\gamma)$ para todo $\gamma \in T$ se tiene que $p \in K_p(\gamma)$ para todo $\gamma \in T$. Esto último implica que $p \in K_p(\alpha)$, es decir, que $p \in K(\alpha)$. Por lo tanto α vale en todo modelo de Kripke $\mathcal{M}$ de T.

Para la recíproca utilizaremos el Teorema 4.4.2 y la Proposición 4.4.8. Sea α una fórmula que vale en todo modelo de Kripke $\mathcal{M}$ de T. Sea $\rho : L(S) \to L(S)/\equiv_T$ dada por $\rho(\beta) = [\beta]_T$. Por (b) del Lema 4.4.24 tenemos que $L(S)/\equiv_T \in \mathrm{SH_n}$, con lo cual en particular $\mathbf{X}(L(S)/\equiv_T)$ es un poset de altura menor o igual que n. Sea $i : \mathbf{D}(\mathbf{X}(L(S)/\equiv_T)) \to (\mathbf{X}(L(S)/\equiv_T))^+$ el morfismo inclusión, y definamos $K : L(S) \to (\mathbf{X}(L(S)/\equiv_T))^+$ como $K = i\varphi\rho$, siendo $\varphi = \varphi_{L(S)/\equiv_T}$. Por (b) del Lema 4.4.24 tenemos que

$$K(S(\alpha)) = i\varphi\rho(S(\alpha)) = i\varphi(S(\rho(\alpha))) =$$

$$i(\varphi(\rho(\alpha)) \cup [\varphi(\rho(\alpha))]^c_M) = \varphi(\rho(\alpha)) \cup [\varphi(\rho(\alpha))]^c_M.$$

Por otro lado tenemos que

$$S(K(\alpha)) = K(\alpha) \cup (K(\alpha)^c)_M = i(\varphi(\rho(\alpha)) \cup [i(\varphi(\rho(\alpha))]^c_M = \varphi(\rho(\alpha)) \cup [\varphi(\rho(\alpha))]^c_M.$$

Luego $\mathcal{M} = (\mathbf{X}(L(S)/\equiv_T), K)$ es un modelo de Kripke de T. Supongamos que $T \vdash_{A(S)_n} \gamma$ para todo $\gamma \in T$. Por (a) del Lema 4.4.24 tenemos que $[\gamma]_T = 1$ para cada $\gamma \in T$. En particular vale que $K(\gamma) = \mathbf{X}(L(S)/\equiv_T)$ para cada $\gamma \in T$, y por ende $K(\alpha) = \mathbf{X}(L(S)/\equiv_T)$. Usando que $\varphi_{L(S)/\equiv_T}$ es inyectiva tenemos que $[\alpha]_T = 1$. Luego en virtud (a) del Lema 4.4.24 nuevamente se concluye que $T \vdash_{A(S)_n} \alpha$. $\square$

4.4.6. Subálgebras

La variedad de S-álgebras es cerrada bajo imágenes homomorfas y productos cartesianos, pero no lo es con respecto a subálgebras de Heyting. Por ejemplo, si tomamos la cadena de tres elementos, considerada como S-álgebra, tiene a $\{0, 1\}$ como subálgebra de Heyting pero la misma no es una subálgebra como S-álgebra dado que $S(0) \notin \{0, 1\}$.

Sea H una S-álgebra y $M \subseteq H$. Diremos que M es una *S-subálgebra* de H si es una subálgebra de Heyting cerrada por la operación sucesor. Para una

S-álgebra de altura finita construiremos una biyección entre las S- subálgebras y ciertas relaciones de equivalencia definidas en el conjunto de filtros primos. Dicha construcción nos dará un procedimiento geométrico para determinar las S-álgebras de una S-álgebra de altura finita dada. Los resultados que veremos generalizan los que hemos dado en la Sección 4.1 de [17], en donde estudiamos sólo el caso de S-álgebras finitas (que resultan un caso particular de S-álgebras de altura finita).

Sean X un conjunto y R una relación de equivalencia definida sobre X. Para cada $x \in X$ escribiremos $[x]_R$ para la clase de equivalencia de x con respecto a R y consideraremos la función $\rho_R : X \to X/R$ dada por $\rho_R(x) = [x]_R$. Luego si $(X, \leq)$ es un poset y R una relación de equivalencia definida sobre X podemos definir en X/R (el espacio cociente de X) el siguiente *preorden*:

$$[x]_R \leq_R [y]_R \text{ sii para cada } z \in [x]_R \text{ existe } w \in [y]_R \text{ tal que } z \leq w \tag{4.9}$$

Para más detalles sobre este preorden ver [§1, Ejercicio 2] de [8] y la sección 4 de [57].

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribiremos $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ para las siguientes condiciones:

$(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, siendo $R_i = R \cap (\widehat{X}_i \times \widehat{X}_i)$ (para $i = 1, ..., n$).

$(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ Sean $x, y \in X$. Si $x \leq y$ entonces $[x]_R \leq_R [y]_R$.

Notemos que si $(X, \leq)$ es un poset y R una relación de equivalencia definida sobre X tal que satisface $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ ó $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ entonces el preorden definido en (4.9) es un orden. Notemos también que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que si R es una relación de equivalencia definida sobre un poset $(X, \leq)$ tal que satisface la condición $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ entonces para cada $x, y \in X$ se tiene que vale la siguiente condición: si $(x, y) \in R$ y $x \in \hat{X}_i$ entonces $y \in \hat{X}_i$ (en virtud de (a) del Lema 4.4.6). Además en este caso se verfica que $x \in \hat{X}_m$ sii $[x]_R \in \rho_R(\hat{X}_m)$.

Luego tenemos el siguiente

Lema 4.4.27. *Si* $(X, \leq)$ *es un poset de altura* n *y* R *una relación de equivalencia sobre* X *tal que satisface las condiciones* $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ *y* $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ *entonces cada* $m \leq n$ *tenemos que*

$$\rho_R(\hat{X}_m) = (X\hat{/}R)_m.$$

Demostración. Para cada $x \in X$ escribiremos $[x]$ en lugar de $[x]_R$ y ρ en lugar de ρ_R.

Supongamos que $m = 1$ y sea $[x] \in (X/R)_M$. Si $x \leq y$ para cierto $y \in X$, por la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ tenemos que $[x] \leq_R [y]$. Por esta razón $[x] = [y]$ y en particular $x = y$ (por la condición $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ y la desigualdad $x \leq y$), con lo cual $x \in X_M$. Recíprocamente sean $[x] \in \rho(X_M)$ y $[x] \leq [y]$. Como $x \in X_M$ y $x \leq z$ para cierto $z \in [y]$, tenemos que $x = z$ y por ende $[x] = [z] = [y]$, siendo así $[x] \in (X/R)_M$. Por lo tanto $(X/R)_M = \rho(X_M)$. Sea $i \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\rho(\hat{X}_l) = (X\hat{/}R)_l$ para cada $l \leq i < n$. Probaremos que

$$\rho(\hat{X}_{i+1}) = (X\hat{/}R)_{i+1}.$$

Sea $[x] \in \rho(\hat{X}_{i+1})$. Luego $x \in \hat{X}_{i+1} = (X_i^c)_M$ y en particular $[x] \notin (X/R)_i$ (en efecto, supongamos que $[x] \in (X/R)_i$, con lo cual $[x] \in (X\hat{/}R)_j$ para cierto

$j \leq i$, es decir, $x \in \hat{X}_j$. Esto es un absurdo por (a) del Lema 4.4.6). Sea $[x] \leq_R [y]$, con $[y] \notin (X/R)_i$. Luego $x \leq z$ para cierto $z \in [y]$. Usando que $z \in \hat{X}_j$ para cierto j (dado que $(X, \leq)$ es un poset de altura finita) y (b) del Lema 4.4.6, obtenemos que $j \leq i+1$. Probaremos ahora que $x = z$. Para ello supongamos que $x < z$. Si $j = i+1$ entonces $z \in \hat{X}_{i+1}$, una contradicción porque $x < z$ y $x \in \hat{X}_{i+1}$. Luego $j \leq i$ e $[y] = [z] \in (\widehat{X/R})_j$. Sin embargo, $(\widehat{X/R})_j \subseteq (X/R)_j \subseteq (X/R)_i$. Luego $[y] \in (X/R)_i$, una contradicción. Por ende $x = z$ y $[x] = [z] = [y]$, por lo cual

$$\rho(\hat{X}_{i+1}) \subseteq (\widehat{X/R})_{i+1}. \tag{4.10}$$

Recíprocamente, sea $[x] \in (\widehat{X/R})_{i+1}$. Probar que $[x] \in \rho(\hat{X}_{i+1})$ es equivalente a probar que $x \in \hat{X}_{i+1}$. Es claro que $x \notin X_i$ (si no fuera así existiría $j \leq i$ tal que $x \in \hat{X}_j$, una contradicción por (a) del Lema 4.4.6). Sea $x \leq y$, $y \notin X_i$. Por la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ se tiene que $[x] \leq_R [y]$ y además vale que $[y] \notin (\widehat{X/R})_i$. Luego $[x] = [y]$ y por la condición $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ y la desigualdad $x \leq y$ llegamos a que $x = y$, es decir, $x \in \hat{X}_{i+1}$. Por lo tanto

$$(\widehat{X/R})_{i+1} \subseteq \rho(\hat{X}_{i+1}). \tag{4.11}$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) implican que $(\widehat{X/R})_{i+1} = \rho(\hat{X}_{i+1})$. $\square$

Si X es un conjunto, R una relación de equivalencia sobre X y $U \subseteq X$, diremos que U es *R-saturado* si $U = \rho_R^{-1}(\rho_R(U))$. En particular tenemos que si X es un espacio topológico entonces la familia dada por

$$B_R = \{U \subseteq X/R : \rho_R^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

es una base de para una topología sobre X/R, denominada *topología cociente*([49]). Haremos abuso de notación y escribiremos X/R para referirnos a este espacio topológico. Notemos que si $A \subseteq X/R$ entonces A es abierto en X/R sii $\rho^{-1}(A)$ es abierto en X.

Si $(X, \leq)$ es un espacio topológico ordenado y R una relación de equivalencia definida sobre X, vamos a considerar la siguiente condición:

$(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$ Sean $x, y \in X$. Si $[x]_R \not\leq_R [y]_R$ entonces para cada $z \in [x]_R$ y $w \in [y]_R$ existe $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que U es R-saturado, $z \in U$ y $w \notin U$.

Lema 4.4.28. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $(X, \leq)$ es un S-espacio de altura n y R una relación de equivalencia sobre X tal que satisface las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$, $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$ entonces $(X/R, \leq_R)$ es un S-espacio de altura n. Más aún, la función ρ_R es un S-morfismo.*

Demostración. Como en el lema previo, escribiremos $[x]$ en lugar de $[x]_R$ y ρ en lugar de ρ_R.

Paso 1: $(X/R, \leq_R)$ es un espacio topológico compacto. Sea $X/R = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ con $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq B_R$. Luego $X = \bigcup_{\alpha \in I} \rho^{-1}(U_\alpha)$. Como X es compacto y $\rho^{-1}(U_\alpha)$ son abiertos en X, tenemos que $X = \bigcup_{i=1}^m \rho^{-1}(U_{\alpha_i})$ para cierto $m \in \mathbb{N}$. Luego $X/R = \bigcup_{i=1}^m U_{\alpha_i}$.

Paso 2: $(X/R, \leq_R)$ satisface el axioma de separación de Priestley. Sean $x, y \in X$ tales que $[x] \not\leq_R [y]$. Por la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ tenemos que $x \not\leq y$. Por la condición $(\mathbf{R3})_{\mathbf{n}}$ existe $U \in \mathbf{D}(X)$ tal que U es R-saturado, $x \in U$ e $y \notin U$. Como U es R saturado tenemos que $[x] \in \rho(U)$, $[y] \notin \rho(U)$ y $\rho(U)$ es clopen en X/R. Además $\rho(U)$ es un conjunto creciente. En efecto, sea $[p] \leq [q]$, con $[p] \in \rho(U)$. Luego existe $r \in U$ tal que $[p] = [r]$, por lo cual $r \leq s$ para cierto $s \in [q]$. Como U es creciente se tiene que $s \in U$, con lo cual $[q] = [s] \in \rho(U)$.

Los pasos 1 y 2 implican que $(X/R, \leq_R)$ es un espacio de Priestley.

Paso 3: $(X/R, \leq_R)$ es un espacio de Esakia. Primero probaremos que si V es un subconjunto de X/R entonces

$$(\rho^{-1}(V)] = \rho^{-1}((V]). \tag{4.12}$$

Sea $x \in \rho^{-1}((V])$. Luego $[x] \in (V]$, es decir, $[x] \leq_R [y]$, para cierto $[y] \in V$. En particular, $x \leq z$, para cierto $z \in [y]$. Luego $x \leq z$ y $[z] \in V$. Por ende $x \in (\rho^{-1}(V)]$. Recíprocamente, sea $x \in (\rho^{-1}(V)]$. Luego $x \leq y$, para cierto $[y] \in V$. Por $(\mathbf{R2})_{\mathbf{n}}$ tenemos que $[x] \leq_R [y]$ y así $x \in \rho^{-1}((V])$.

Sea U un clopen en X/R. Luego tenemos que $\rho^{-1}(U)$ es clopen. Usando que $(X, \leq)$ es un espacio de Esakia inferimos que $(\rho^{-1}(U)] = \rho^{-1}((U])$ es clopen y por ende $(U]$ es clopen en X/R. Por lo tanto $(X/R, \leq_R)$ es un espacio de Esakia.

Paso 4: $(X/R, \leq_R)$ es un S-espacio. Primero probaremos que si U es un subconjunto de X/R entonces

$$\rho^{-1}(U_M) = (\rho^{-1}(U))_M. \tag{4.13}$$

En efecto, sea $x \in \rho^{-1}(U_M)$. Luego $[x] \in U_M$. Sea $x \leq y$, con $[y] \in U$. Por $(\mathbf{R2})_{\mathbf{n}}$ tenemos que $[x] \leq_R [y]$ y por ende $[x] = [y]$. Luego $x \leq y \leq z$, para cierto $z \in [x]$. Por $(\mathbf{R1})_{\mathbf{n}}$ se tiene que $x = z$. Por esta razón $x = y$. Luego $x \in (\rho^{-1}(U))_M$. Recíprocamente, sean $x \in (\rho^{-1}(U))_M$ y $[x] \leq_R [y]$, para cierto $[y] \in U$. Luego $x \leq z$ para cierto $z \in [y]$, y así $[z] = [y] \in U$. Por lo tanto $x = z$ y $[x] = [y]$, por lo cual $x \in \rho^{-1}(U_M)$.

Sea U un clopen decreciente en $(X/R, \leq_R)$. Luego $\rho^{-1}(U_M) = (\rho^{-1}(U))_M$ es clopen en X dado que $(X, \leq)$ es un S-espacio. Por lo tanto U_M es clopen en X/R y por ello $(X/R, \leq_R)$ es un S-espacio.

Paso 5: $(X/R, \leq_R)$ es un S-espacio de altura n. Por el Lema 4.4.27, tenemos que $X/R = \bigcup_{i=1}^{n} \rho(\hat{X}_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \widehat{(X/R)}_i = (X/R)_n$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $(X/R)_j = X/R$. Nuevamente por el Lema 4.4.27 tenemos que $X = X_j$. Por lo tanto $n \leq j$.

Finalmente probaremos que ρ es un S-morfismo. Un cálculo inmediato prueba que ρ es un morfismo de espacios de Esakia. Por la condición dada en (4.13) tenemos que ρ es un S-morfismo. $\square$

Sea H una S-álgebra y M una S-subálgebra de H. En $\mathbf{X}(H)$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$(P, Q) \in R^M \text{ sii } P \cap M = Q \cap M.$$

Definimos a continuación el siguiente orden parcial en $\mathbf{X}(H)/R^M$:

$$[P]_{R^M} \leq_M [Q]_{R^M} \text{ sii } P \cap M \subseteq Q \cap M.$$

Lema 4.4.29. *Sean H una S-álgebra de altura n y M una S-subálgebra de H. Se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *La función $f : (\mathbf{X}(H), \subseteq) \to (\mathbf{X}(M), \subseteq)$ dada por $f(P) = P \cap M$ es un epimorfismo en la categoría de S-espacios.*

(b) *Si $\leq_{R^M}$ es el preorden en $\mathbf{X}(H)/R^M$ dado por (4.9) entonces $\leq_M = \leq_{R^M}$. Más aún, R^M satisface $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$, $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$. En particular $\leq_{R^M}$ es un orden.*

(c) *$(\mathbf{X}(H)/R^M, \leq_{R^M})$ es un S-espacio de altura n. Más aún, la función $g_M : M \to \mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R^M)$ dada por $g_M(x) = \{[P]_{R^M} : x \in P \cap M\}$ es un isomorfismo en la categoría de S-álgebras.*

Demostración. (a) La función inclusión $i : M \to H$ es un monomorfismo en la categoría de S-álgebras. Definiendo a f como $\mathbf{X}(i)$ tenemos que $f(P) = P \cap M$ y que es un epimorfismo en la categoría de S-espacios.

(b) Sean $P, Q \in \mathbf{X}(H)$. Escribiremos $[P]$ en lugar de $[P]_{R^M}$, y ρ en lugar de ρ_{R^M}. Debemos probar lo siguiente:

$$[P] \leq_M [Q] \text{ sii } [P] \leq_{R^M} [Q].$$

Sea $[P] \leq_M [Q]$, por lo cual $P \cap M \subseteq Q \cap M$. Sea $T \in [P]$. Consideremos la aplicación f dada en (a). Como $T \cap M \subseteq Q \cap M$ se tiene que $f(T) \subseteq f(Q)$. Dado que f es un p-morfismo, existe $Z \in \mathbf{X}(H)$ tal que $T \subseteq Z$ y $Z \cap M = f(Z) = f(Q) = Q \cap M$. Luego $[P] \leq_{R^M} [Q]$. Recíprocamente, sea $[P] \leq_{R^M} [Q]$. Por definición tenemos que $[P] \leq_M [Q]$. Por lo tanto $\leq_M = \leq_{R^M}$. A continuación probaremos que R^M satisface las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$, $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$.

$(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$. Sean $P \in (\mathbf{X}(\hat{H}))_i$ y $(P, Q) \in R^M$, para cierto $i \in \{1, ..., n\}$. Por (a) de este lema y (b) del Lema 4.4.3 concluimos que $Q \in (\mathbf{X}(\hat{H}))_i$. En efecto, como $P \in (\mathbf{X}(\hat{H}))_i$, si f es la función dada en (a) entonces $f(P) \in (\mathbf{X}(\hat{M}))_i$. Como $(P, Q) \in R^M$, $f(P) = f(Q)$, con lo cual $f(Q) \in (\mathbf{X}(\hat{M}))_i$. Luego $Q \in (\mathbf{X}(\hat{H}))_i$. Por lo tanto $(P, Q) \in (R^M)_i$.

$(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$. Esta condición vale porque $\leq_M = \leq_{R^M}$.

$(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$. Sean $P, Q \in \mathbf{X}(H)$ tales que $[P] \nleq_M [Q]$, y sean $Z \in [P]$ y $W \in [Q]$. Tenemos que $Z \cap M \nsubseteq W \cap M$. Por esta razón existe $x \in Z, x \in M$ y $x \notin W$. Consideremos $U = \varphi_H(x)$, y notemos que $U \in \mathbf{D}(X)$, $Z \in U$ y $W \notin U$. Veamos que U es R^M-saturado. Como siempre vale que $U \subseteq \rho^{-1}(\rho(U))$ sólo necesitamos probar la inclusión contraria. Sea $P_1 \in \rho^{-1}(\rho(U))$, con lo cual $[P_1] = [P_2]$ para cierto $P_2 \in U$. De este modo $x \in P_2 \cap M = P_1 \cap M$, por lo cual $P_1 \in U$. Por lo tanto U es R^M-saturado.

(c) Por (b) y Lema 4.4.28 tenemos que $(\mathbf{X}(H)/R^M, \leq_{R^M})$ es un S-espacio de altura n. Sea $g : (\mathbf{X}(H)/R^M, \leq_{R^M}) \to (\mathbf{X}(M), \subseteq)$ la función dada por $g([P]) = f(P)$. Notemos que (a) y (b) implican que la función g es biyectiva, preserva el orden y es un p-morfismo. Además g es continua. En efecto, sea U un abierto de $\mathbf{X}(M)$. Luego tenemos que $\rho^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$. Usando que f es una función continua se concluye que $g^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbf{X}(H)/R^M$. Por ende g es una función continua. Luego tenemos que g es un morfismo de espacios de Esakia y en particular es un isomorfismo de S-espacios (esto es consecuencia de la dualidad dada para S-álgebras y del hecho de que si tenemos un isomorfismo de álgebras de Heyting entre S-álgebras entonces el mismo es un isomorfismo de S-álgebras, ya que el sucesor está caracterizado por ecuaciones). Definimos $g_1 = \mathbf{D}(g) : \mathbf{D}(\mathbf{X}(M) \to \mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R^M)$. Como g_1 y $\varphi_M : M \to \mathbf{D}(\mathbf{X}(M))$ son isomorfismos de S-álgebras, tenemos que $g_M : M \to \mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R^M)$ dada por $g_M = g_1\varphi_M$ es un isomorfismo de S-álgebras. Más aún, $g_M(x) = g_1(\varphi_M(x)) = \{[P] : x \in P \cap M\}$. $\square$

Lema 4.4.30. *Si H es una S-álgebra n y R una relación de equivalencia definida en $\mathbf{X}(H)$ tal que satisface las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$, $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$ entonces $\mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R)$ es isomorfa a cierta S-subálgebra M de H. Más aún, $R = R^M$.*

Demostración. Definimos $X = \mathbf{X}(H)$. En virtud del Lema 4.4.28 (y de la equivalencia entre las categorías de S-álgebras de altura n y la de S-espacios de altura n) tenemos que ρ_R es un epimorfismo de S-espacios, por lo cual $h_1 = \mathbf{D}(\rho_R) : \mathbf{D}(X/R) \to \mathbf{D}(X)$ es un monomorfismo de S-álgebras. Luego la función $g_R = \varphi_H^{-1}h_1 : \mathbf{D}(X/R) \to \varphi_H^{-1}h_1(\mathbf{D}(X/R))$ es un isomorfismo de S-álgebras. Más aún, se tiene que $g_R(U) = \varphi_H^{-1}(\rho_R^{-1}(U))$ (notemos que estamos haciendo abuso de notación ya que φ_H^{-1} se refiere a la función inversa de φ_H y ρ_R^{-1} se refiere a $\mathbf{D}(\rho_R)$). Definimos la siguiente S-subálgebra de H:

$$M = \varphi_H^{-1}h_1(\mathbf{D}(X/R)).$$

Con la nueva notación tenemos que $g_R : \mathbf{D}(X/R) \to M$. Notemos además que

$$x \in M \text{ sii existe } U \in \mathbf{D}(X/R) \text{ tal que } \varphi_H(x) = \rho_R^{-1}(U)$$

Por otro lado se tiene que las aplicaciones $h_2 = \mathbf{X}(g_R) : \mathbf{X}(M) \to \mathbf{X}(\mathbf{D}(X/R))$ y $\epsilon_{X/R} : (X/R, \leq_R) \to \mathbf{X}(\mathbf{D}(X/R))$ son isomorfismos de S-espacios. Por esta razón $h_3 = \epsilon_{X/R}^{-1}h_2 : \mathbf{X}(M) \to (X/R, \leq_R)$ es también un isomorfismo de S-espacios tal que $h_3(P \cap M) = [P]_R$. Veamos este hecho más en detalle. Probar que h_3 está definida del modo en que se explicitó equivale a probar que

$$h_2(P \cap M) = \epsilon_{X/R}([P]_R).$$

Luego, $V \in h_2(P \cap M)$ sii $g_R(V) \in P \cap M$ sii $g_R(V) \in P$ y $g_R(V) \in M$ sii $g_R(V) \in P$. Para $V \in \mathbf{D}(X/R)$ tenemos que $\rho_R^{-1}(V) \in \mathbf{D}(X)$, por lo cual existe $x \in H$ tal que $\varphi_H(x) = \rho_R^{-1}(V)$. Por esta razón $g_R(V) \in P$ sii $\varphi_H^{-1}(\rho_R^{-1}(V)) \in P$ sii $x \in P$ sii $P \in \varphi_H(x)$ sii $[P]_R \in V$. Luego

$$g_R(V) \in P \text{ sii } [P]_R \in V \text{ sii } V \in \epsilon_{X/R}([P]_R),$$

por lo cual $h_2(P \cap M) = \epsilon_{X/R}([P]_R)$. Por otro lado, por argumentos similares a los utilizados en la demostración de (c) del Lema 4.4.29 concluimos que $g : (X/R^M, \leq_{R^M}) \to \mathbf{X}(M)$ dada por $g([P]_{R^M}) = P \cap M$ es un isomorfismo de S-espacios. Luego $h = h_3g : (X/R^M, \leq_{R^M}) \to (X/R, \leq_R)$, dada por $h([P]_{R^M}) = [P]_R$, es un isomorfismo de S-espacios también. Por lo tanto tenemos que

$$(P, Q) \in R \text{ sii } [P]_R = [Q]_R \text{ sii } [P]_{R^M} = [Q]_{R^M} \text{ sii } (P, Q) \in R^M.$$

En consecuencia, $R = R^M$. $\square$

Finalmente tenemos el siguiente

Teorema 4.4.31. *Sea H una S-álgebra de altura n. Existe una biyección*

$$M \mapsto R^M$$

entre las S-subálgebras de H y las relaciones de equivalencia en $\mathbf{X}(H)$ que satisfacen las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$, $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$.

Demostración. Por (b) del Lema 4.4.29 tenemos que la función dada por $M \mapsto R^M$ está bien definida. Sean M y N S-subálgebras de H tales que $R^N = R^M$. Luego $\mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R^M)$ coincide con la S-subálgebra $\mathbf{D}(\mathbf{X}(H)/R^N)$. Sea $x \in M$. Por (c) del Lema 4.4.29 existe $y \in N$ tal que $g_M(x) = g_N(y)$. Queremos probar que $x = y$. Para ello supongamos que $x \nleq y$. Luego por el Teorema del Filtro Primo existe $P \in \mathbf{X}(H)$ tal que $x \in P$ e $y \notin P$, por lo cual $x \in P \cap M$ e $y \notin P \cap N$. En consecuencia, $[P]_{R^M} \in g_M(x)$ y $[P]_{R^N} \notin g_N(y)$. Como $[P]_{R^M} = [P]_{R^N}$ tenemos que $g_M(x) \neq g_N(y)$, una contradicción. Luego $x = y \in N$ y de este modo vale que $M \subseteq N$. La otra inclusión se prueba igual. Por lo tanto $M = N$. La suryectividad de la aplicación es consecuencia del Lema 4.4.30. $\square$

Sea $(X, \leq)$ un poset y R una relación de equivalencia definida sobre X tal que satisface la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$. Sean $x, y \in X$ tales que $[x]_R \nleq [y]_R$, y sean $z \in [x]_R$ y $w \in [y]_R$. Sea $U = \{t \in X : [t]_R \geq_R [x]_R\}$. Notemos que $z \in U$ y $w \notin U$. Además U es un conjunto creciente. En efecto, sea $t \leq r$, con $t \in U$. Luego por la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ tenemos que $[x]_R \leq_R [t]_R \leq_R [r]_R$, es decir, $r \in U$. Veamos ahora que U es R-saturado. Sea $t \in \rho_R^{-1}(\rho_R(U))$, por lo cual $[t]_R = [r]_R$ para cierto $r \in U$. Luego $[x]_R \leq_R [r]_R = [t]_R$, es decir, $t \in U$.

En particular, hemos probado que si $(X, \leq)$ es un poset finito y R una relación de equivalencia definida sobre X tal que satisface la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ entonces R satisface la condición $(\mathbf{R3})_\mathbf{n}$, considerando a X como un espacio topológico con la topología discreta. Por lo tanto en virtud del Teorema 4.4.31 tenemos el siguiente

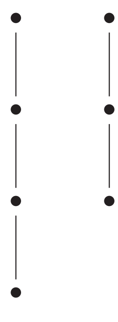
Corolario 4.4.32. *Sea H una S-álgebra finita de altura n. Existe una biyección*

$$M \mapsto R^M$$

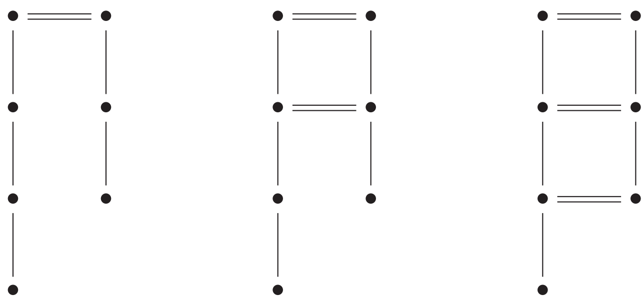
entre las S-subálgebras de H y las relaciones de equivalencia en $\mathbf{X}(H)$ que satisfacen las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$.

La descripción dada sobre las S-subálgebras de una S-álgebra de altura finita nos proporciona un procedimiento geométrico para determinarlas.

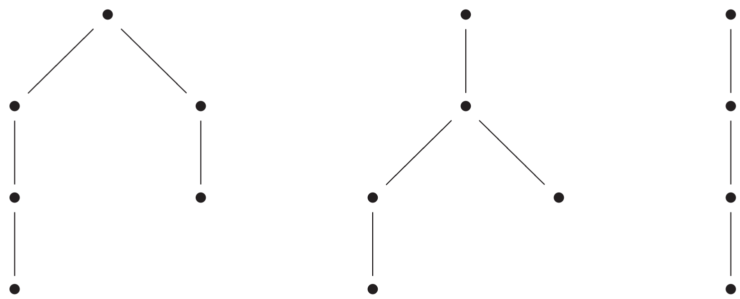
Ejemplo 4.4.33. *Consideremos el siguiente ejemplo concreto: encontrar todas las S-subálgebras de $H_5 \times H_4$, siendo H_n la cadena de n elementos. El S-espacio asociado a esta S-álgebra es el siguiente:*



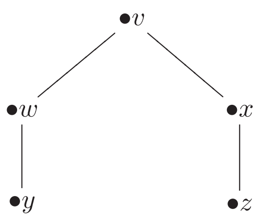
Notemos que debemos preservar la estructura de nivel del espacio. Como consecuencia del corolario previo, las posibles relaciones de equivalencia asociadas a las S-subálgebras son la trivial y aquellas descriptas a continuación:



Los S-espacios asociados a las S-subálgebras distinta de la total son:



Observación 4.4.34. *Sea $(X, \leq)$ el poset dado por*



Si consideramos la relación de equivalencia cuyas clases son $\{v\}$, $\{w\}$, $\{x\}$ y $\{y, z\}$ entonces la misma satisface la condición $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ pero no satisface la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$. En cambio, si consideramos la relación de equivalencia cuyas clases son $\{y, w\}$, $\{z, x\}$ y $\{v\}$, la misma satisface la condición $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ pero no satisface la condicióm $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$. Por lo tanto, dado un poset $(X, \leq)$ y una relación de equivalencia R definida sobre él, en general las condiciones $(\mathbf{R1})_\mathbf{n}$ y $(\mathbf{R2})_\mathbf{n}$ son independientes.

4.4.7. Caracterizaciones para los posets de altura finita

En esta sección daremos algunas caracterizaciones para los posets de altura finita.

Esta parte no es esencial para el desarrollo de este trabajo, sin embargo me parece interesante ya que gran parte de esta tesis se centra en el estudio de posets de altura finita.

Definición 4.4.35. Sean $(X, \leq)$ un poset y $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $(X, \leq)$ tiene nivel n si la cadena más larga posee n elementos.

Veremos que la Definición 4.4.35 coincide con la definición que hemos dado nosotros para un poset de altura finita (de hecho, la definición que hemos dado de poset de nivel n es la definición stándard de poset de altura n. Ver, por ejemplo, la Definición 8.29 del Capítulo 8 de [66]).

Comenzaremos viendo algunos lemas previos.

Lema 4.4.36. *En toda S-álgebra vale que $S(x) = x$ si y sólo si $x = 1$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las ecuaciones $(S1)$ y $(S3)$. □

Lema 4.4.37. *Si $(X, \leq)$ es un poset de altura n y $X \neq \emptyset$, entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $\hat{X}_i \neq \emptyset$.*

Demostración. En lo que sigue utilizaremos la Proposición 4.4.8. Si $n = 1$ entonces $\hat{X}_1 \neq \emptyset$ porque $X \neq \emptyset$. Consideremos el caso $n > 1$. Supongamos que $\hat{X}_n = \emptyset$. Luego tenemos que $S(X_{n-1}) = X_{n-1}$, con lo cual por el Lema 4.4.36 llegamos a que $X = X_{n-1}$, una contradicción pues la altura de $(X, \leq)$ es n. Luego $\hat{X}_n \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $\hat{X}_{n-1} = \emptyset$. Por esta razón $S(X_{n-2}) = X_{n-2}$ y por ende $X = X_{n-2}$, nuevamente una contradicción. Iterando este razonamiento se concluye que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ vale que $\hat{X}_i \neq \emptyset$. □

Observación 4.4.38. *Si $n > 1$ y $(X, \leq)$ es un poset de altura n entonces $X \neq \emptyset$.*

Lema 4.4.39. *Sea $(X, \leq)$ un poset tal que toda cadena tiene a lo sumo n elementos. Si $Y \subseteq X$ e $y \in Y$ entonces existe $z \in Y_M$ tal que $y \leq z$.*

Demostración. Si $y \in Y_M$ nada hay que probar. Si $y \notin Y_M$ entonces existe $y_1 \in Y$ tal que $y < y_1$. Si $y_1 \in Y_M$ terminamos acá, y de no ser así repetimos este proceso. Usando la hipótesis e iterando este razonamiento (que es finito) llegamos a que existe $z \in Y_M$ tal que $y \leq z$, que es lo que deseábamos probar. □

Luego se tiene la siguiente

Proposición 4.4.40. *Sea $(X, \leq)$ un poset tal que $X \neq \emptyset$. Luego $(X, \leq)$ tiene altura n si y sólo si $(X, \leq)$ tiene nivel n.*

Demostración. Supongamos que $(X, \leq)$ tiene altura n. Por el Lema 4.4.37 se tiene que existe $x_n \in \hat{X}_n$. Luego por el Lema 4.4.7 existen $x_{n-1} \in \hat{X}_{n-1}$,..., $x_1 \in \hat{X}_1$ tales que $x_n < x_{n-1} < ... < x_1$, siendo esta cadena de longitud n. Por otro lado, sean $x_1, ..., x_k \in X$ tales que $x_1 < x_2 < ... < x_k$, para cierto $k \in \mathbb{N}$. Como $x_1, ..., x_k \in X = X_n$, tenemos que existen $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ tales que $x_1 \in \hat{X}_{i_1}$,..., $x_k \in \hat{X}_{i_k}$. Luego por (b) del Lema 4.4.6 se tiene que $i_k < i_{k-1} < ... < i_1$. Por lo tanto $k \leq n$ y por esta razón $(X, \leq)$ tiene nivel n.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \leq)$ tiene nivel n y sea $x \in X$. Probaremos primero que $x \in X_n$. Supongamos que $x \notin X_n$. Luego en virtud del Lema

4.4.39 existe $x_{n+1} \in \hat{X}_{n+1}$ tal que $x \leq x_{n+1}$. Si $x = x_{n+1}$ entonces por el Lema 4.4.7 existen $x_i \in \hat{X}_i$ (con $i = 1, ..., n$) tales que $x = x_{n+1} < x_n < ... < x_1$. Sin embargo esta cadena tiene $n+1$ elementos, esto es una contradicción. Si $x < x_{n+1}$ entonces razonando de un modo análogo a lo hecho anteriormente se puede construir una cadena de $n+2$ elementos, una contradicción nuevamente. Luego $x \in X_n$ y por ende $X = X_n$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = X_k$. Queremos probar que $n \leq k$. Supongamos que $\hat{X}_n = \emptyset$ (con lo cual $n > 1$ dado que $X \neq \emptyset$), lo que implica que $X = X_{n-1}$. Sea $x_1 < x_2 < ... < x_n$ una cadena de n elementos (que existe por hipótesis), por lo cual existen $i_1, i_2, ..., i_n \leq n-1$ tales que $x_1 \in \hat{X}_{i_1}, x_2 \in \hat{X}_{i_2}, ..., x_n \in \hat{X}_{i_n}$. Usando (b) del Lema 4.4.6 se concluye que $i_n < i_{n-1} < ... < i_1$. Esto contradice el hecho de que $i_1 \leq n-1$. Por esta razón $\hat{X}_n \neq \emptyset$. Consideremos $x \in \hat{X}_n$. Como $x \in X_k$ se tiene que existe $j \leq k$ tal que $x \in \hat{X}_j$. Luego $x \in \hat{X}_n \cap \hat{X}_j$, por lo cual en virtud de (a) del Lema 4.4.6 se concluye que $n = j \leq k$. Por lo tanto hemos probado que el poset $(X, \leq)$ tiene altura n. $\square$

Sean $(X, \leq)$ un poset y $n \in \mathbb{N}$. Observando la demostración anterior se deduce que toda cadena de X tiene a lo sumo n elementos si y sólo si X tiene altura a lo sumo n.

Sea $(X, \leq)$ un poset tal que $X \neq \emptyset$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos la siguiente

Proposición 4.4.41. *El poset $(X, \leq)$ tiene altura n si y sólo si existe una familia de subconjuntos $\{Y_i\}_{i=1}^n$ de X tal que satisface las siguientes condiciones:*

(1) *$\{Y_i\}_{i=1}^n$ es una partición de X.*

(2) *Si $x < y$ y $x \in Y_i$ entonces existe $j < i$ tal que $y \in Y_j$.*

(3) *Si $i \geq 2$ y $x \in Y_i$ entonces existe $y \in Y_{i-1}$ tal que $x < y$.*

Demostración. Supongamos que el poset $(X, \leq)$ tiene altura n, y definamos los conjuntos $Y_i = \hat{X}_i$, para $i = 1, ..., n$. Veremos que esta familia satisface las condiciones (1), (2) y (3).

(1) Se sigue de la hipótesis, del ítem (a) del Lema 4.4.6 y del Lema 4.4.37.

(2) Sea $x < y$, $x \in \hat{X}_i$. Por hipótesis existe j tal que $y \in \hat{X}_j$, por lo cual en virtud del ítem (b) del Lema 4.4.6 se tiene que $j \leq i$. Si fuese $j = i$ entonces sería $x = y$, una contradicción. Luego $j < i$.

(3) Es consecuencia del Lema 4.4.7.

Recíprocamente, supongamos que $\{Y_i\}_{i=1}^n$ es una familia de subconjuntos de X tal que satisface las condiciones (1), (2) y (3). Probaremos primero por inducción que para cada $i = 1, ..., n$ vale que $Y_i = \hat{X}_i$.

Sea $x \in X_M = \hat{X}_1$. Por (1) sabemos que existe $i = 1, ..., n$ tal que $x \in Y_i$. Si $i \geq 2$ entonces por (3) se tiene que existe $y \in Y_{i-1}$ tal que $x < y$, una contradicción. Por lo tanto $i = 1$, quedando así probado que $\hat{X}_1 \subseteq Y_1$. Recíprocamente, sea $x \in Y_1$. Si $x \notin \hat{X}_1$ entonces existe $y \in X$ tal que $x < y$. Luego por (2) esto es una contradicción. De este modo queda probado que

$$Y_1 = \hat{X}_1.$$

Supongamos que $Y_j = \hat{X}_j$, para todo $j < i$ $(i \geq 2)$. Vamos a probar que $Y_i = \hat{X}_i$. Para ello consideremos $x \in Y_i$. Debemos probar que $x \in \hat{X}_i = (X_{i-1}^c)_M$. Supongamos que $x \in X_{i-1}$, con lo cual existe $j \leq i-1$ tal que $x \in \hat{X}_j = Y_j$. Por

(1) se tiene que $i = j \leq i - 1$, una contradicción. Luego $x \in X_{i-1}^c$. Sea $x \leq y$ con $y \in X_{i-1}^c$. Queremos probar que $x = y$. Supongamos que $x < y$, con lo cual por (2) existe $j < i$ tal que $y \in Y_j = \hat{X}_j$. Por otro lado $y \notin X_{i-1}$, con lo cual en particular $y \notin \hat{X}_j$, una contradicción. Luego $x = y$ y por lo tanto

$$Y_i \subseteq \hat{X}_i. \tag{4.14}$$

Recíprocamente, sea $x \in \hat{X}_i$. Por (1) existe j tal que $x \in Y_i$. Veremos que $j = i$. Supongamos primero que $j < i$. Luego dado que $x \in Y_j = \hat{X}_j$ se tiene que $x \in \hat{X}_i \cap \hat{X}_j$. Por el ítem (a) del Lema 4.4.6 se llega a que $i = j$, una contradicción. Supongamos ahora que $j > i$, con lo cual $j \geq 2$. Como $x \in Y_j$ se tiene por la condición (3) (iterando) que existe $y \in Y_i$ tal que $x < y$. En particular, $y \in Y_i \subseteq \hat{X}_i$ (esta última inclusión ya fue probada), por lo cual $x < y$ con $x, y \in \hat{X}_i$, una contradicción. De este modo queda probado que

$$\hat{X}_i \subseteq Y_i. \tag{4.15}$$

Por las condiciones (4.14) y (4.15) se concluye que $Y_i = \hat{X}_i$.

Por la condición (1) sabemos que $X = X_n$. Veremos a continuación que n es el menor de los números naturales con esta propiedad. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = X_k$. En particular sabemos que $\hat{X}_n \neq \emptyset$, por lo cual existe $x \in \hat{X}_n$. Como $x \in X_k$ se tiene que existe $j \leq k$ tal que $x \in \hat{X}_j$. Luego $x \in \hat{X}_n \cap \hat{X}_j$. Esto último implica, por la condición (1), que $n = j \leq k$. Por lo tanto hemos probado que el poset $(X, \leq)$ tiene altura n. $\square$

Definición 4.4.42. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribiremos $[\mathbf{n}]$ para referirnos a la cadena $\{1, ..., n\}$ con el orden inverso al usual (escribiremos $\preceq$ para este orden). Sean $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ posets y $f : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ una función monótona suryectiva. Diremos que f es de *fibra disconexa* si para cada $q \in Y$, $f^{-1}(q)$ es una anticadena de $(X, \leq)$. Diremos que $(X, \leq)$ es un $n^{\bullet}$-poset si existe una función $\alpha : (X, \leq) \to [\mathbf{n}]$ tal que para cada $p \in X$ la restricción de α a $[p)$ induce una función monótona de fibra disconexa $\alpha_p : [p) \to [\alpha(p))$, en donde $[\alpha(p))$ posee el orden inducido por $[\mathbf{n}]$. Si α es suryectiva diremos que $(X, \leq)$ es un n-poset.

Sea $(X, \leq)$ un poset tal que $X \neq \emptyset$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Luego tenemos la siguiente

Proposición 4.4.43. *$(X, \leq)$ tiene altura n si y sólo si $(X, \leq)$ es un n-poset.*

Demostración. Supongamos que $(X, \leq)$ tiene altura n.

Definamos $\alpha : (X, \leq) \to [\mathbf{n}]$ como

$$\alpha(p) = i \text{ si y sólo si } i \in \hat{X}_i.$$

Supongamos que $p \leq q$. Sabemos que existen i, j tales que $p \in \hat{X}_i$ y $q \in \hat{X}_j$, con lo cual por el Lema 4.4.6 tenemos que $j \leq i$. Luego $\alpha(p) \preceq \alpha(q)$. Por lo tanto α es monótona. Si $i \in \{1, ..., n\}$ entonces por el Lema 4.4.37 existe $p \in \hat{X}_i$. Luego $\alpha(p) = i$ y así α es suryectiva. Para $p \in X$ consideramos la función α_p. Usando que α es monótona vemos que α_p está bien definida, así que probaremos que es surjectiva. Sea $i \in [\alpha(p))$, es decir, $\alpha(p) \geq i$. Si $p \in \hat{X}_1$ entonces $\alpha(p) = 1$. Supongamos que $p \in \hat{X}_j$ con $j \geq 2$. Si $i = j$ entonces $\alpha(p) = i$. Si $i < j$, por el Lema 4.4.7 tenemos que existe $q \in \hat{X}_i$ tal que $p < q$, con lo cual $q \in [p)$ y

$\alpha_p(q) = i$. Por lo tanto α_p es suryectiva. Finalmente tenemos que si $i \in \{1, ..., n\}$ y $p \in X$ entonces $\alpha_p^{-1}(i)$ es una anticadena de $(X, \leq)$ ya que $\alpha_p^{-1}(i) = \hat{X}_i$.

Recíprocamente probaremos que si $(X, \leq)$ es un n-poset entonces para cada $k \in \{1, ..., n\}$ tenemos que

$$\alpha^{-1}(k) = \hat{X}_k. \tag{4.16}$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que el codominio de α es $\mathbb{N}$ y haremos la prueba por inducción.

Supongamos que $p \in \alpha^{-1}(1)$, con lo cual $\alpha(p) = 1$, y sea $q \in X$ tal que $p \leq q$. Como α_p es monótona, tenemos que $1 = \alpha(p) \geq \alpha(q)$, con lo cual $\alpha(q) = 1$, es decir, $q \in \alpha^{-1}(1)$. Además $p \leq q$, y así $p, q \in \alpha_p^{-1}(1)$. Luego usando que $\alpha_p^{-1}(1)$ es una anticadena se infiere que $p = q$. Por ende $p \in \hat{X}_1$ y en consecuencia $\alpha^{-1}(1) \subseteq \hat{X}_1$. Recíprocamente consideremos $p \in \hat{X}_1$. Como la función α_p es suryectiva y $1 \in [\alpha(p))$, existe $q \in X$ tal que $p \leq q$ y $\alpha_p(q) = 1$. Luego $p \leq q$ y $p \in \hat{X}_1$, por lo cual $p = q$. Por lo tanto $\alpha_p(p) = 1$ y así $\alpha(p) = 1$. Luego

$$\alpha^{-1}(1) = \hat{X}_1.$$

Supongamos ahora que para cada $j \leq i$ tenemos que $\alpha^{-1}(j) = \hat{X}_j$. Probaremos que $\alpha^{-1}(i+1) = \hat{X}_{i+1}$. Para probar esto consideremos $p \in \alpha^{-1}(i+1)$. Si $p \in X_i$ tenemos que existe $l \leq i$ tal que $p \in \hat{X}_l$, y así $i + 1 = \alpha(p) = l \leq i$, una contradicción. Luego $p \notin X_i$. Sea $p \leq q$ con $q \notin X_i$. Usando que α_p es monótona vemos que $i + 1 = \alpha_p(p) \geq \alpha_p(q)$. Si $\alpha_p(q) = l \leq i$ entonces $q \in \hat{X}_l$. Sin embargo $q \notin X_i$, con lo cual $q \notin \hat{X}_l$, una contradicción. Luego $\alpha_p(q) = i + 1$ y así $p, q \in \alpha_p^{-1}(i + 1)$. Como $p \leq q$ y $\alpha_p^{-1}(i + 1)$ es una anticadena se infiere que $p = q$. Por lo tanto

$$\alpha^{-1}(i + 1) \subseteq \hat{X}_{i+1}.$$

Recíprocamente, sea $p \in \hat{X}_{i+1}$. Por el Lema 4.4.7 tenemos que existe $q \in \hat{X}_i$ tal que $p < q$. Usando que α_p es monótona tenemos que $i = \alpha_p(q) < \alpha_p(p)$ (notemos que si $\alpha_p(q) = \alpha_p(p)$ entonces $p \in \hat{X}_i$, pero $p < q$ con $q \in \hat{X}_i$, una contradicción). Usando que $i + 1 \leq \alpha_p(p)$ y que α_p es suryectiva, tenemos que existen $r \geq p$ tales que $i + 1 = \alpha_p(r)$, por lo cual $r \in \alpha^{-1}(i + 1) \subseteq \hat{X}_{i+1}$. Luego $p = r$ porque $p \leq r$ y $p, r \in \hat{X}_{i+1}$, y así $\alpha(p) = i + 1$. En consecuencia $p \in \alpha^{-1}(i + 1)$, y por ende

$$\hat{X}_{i+1} \subseteq \alpha^{-1}(i + 1).$$

Luego tenemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(i) = \bigcup_{i=1}^{n} \hat{X}_i = X_n.$$

Finalmente tenemos que $n = min\ \{k \in \mathbb{N}\colon X_k = X\}$. Supongamos que existe $k < n$ tal que $X_k = X$. En particular $k \leq n - 1$, y por esto $X_k \subseteq X_{n-1}$. Luego $\hat{X}_n = \emptyset$ y así $\alpha^{-1}(n) = \emptyset$. Esto es una contradicción ya que α es suryectiva. $\square$

Notemos que de un modo similar puede probarse que si $(X, \leq)$ es un poset $(X \neq \emptyset)$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces el mismo tiene altura menor o igual que n si y sólo si es un $n^{\bullet}$-poset.

4.4.8. Coproducto

Sea n un número natural. En esta parte del trabajo daremos una descripción para el coproducto de dos S-álgebras de altura a lo sumo n, en donde al menos una de ellas es prelineal (es decir, satisface la ecuación $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$). Para tal fin utilizaremos la equivalencia categorial obtenida entre S-álgebras y S-espacios, dando una descripción para el producto de dos S-espacios de altura a lo sumo n, en donde al menos uno de ellos es un root system.

Si $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ son posets, consideraremos en $X \times Y$ el orden usual.

Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ S-espacios de altura menor o igual que n. Definamos como k al mínimo de las alturas entre $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$, y sea $K = \{1, 2, ..., k\}$. Además consideremos $B_X = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $B_Y = \{B_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ dos bases de clopens de X e Y respectivamente, y definamos los conjuntos $E_{i,\,\alpha,\,\beta} = (\hat{X}_i \cap A_\alpha) \times (\hat{Y}_i \cap B_\beta)$. Finalmente definamos al conjunto

$$B = \{E_{i,\,\alpha,\,\beta}\}_{i\in K,\,\alpha\in\Delta,\,\beta\in\Omega}.$$

Observación 4.4.44. *B es una base para una topología sobre $\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$. En efecto, sea $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$. Luego existe $i \in K$ tal que $x \in \hat{X}_i$ e $y \in \hat{Y}_i$. En particular existe $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Omega$ tales que $x \in A_\alpha$ e $y \in B_\beta$. Luego $(x, y) \in E_{i,\,\alpha,\,\beta}$. Por otro lado sean $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \Delta$, $\beta_1, \beta_2 \in \Omega$ e $i_1, i_2 \in \Omega$ tales que $(x, y) \in E_{i_1,\,\alpha_1,\,\beta_1} \cap E_{i_2,\,\alpha_2,\,\beta_2}$. Por (a) del Lema 4.4.6 tenemos que $i_1 = i_2$ (definamos $i = i_1$). En particular, existen $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Omega$ tales que $x \in A_\alpha \subseteq A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$ e $y \in B_\beta \subseteq B_{\beta_1} \cap B_{\beta_2}$. Luego $(x, y) \in E_{i,\,\alpha,\,\beta} \subseteq E_{i,\,\alpha_1,\,\beta_1} \cap E_{i,\,\alpha_2,\,\beta_2}$.*

Más áun, B es una base de clopens para una topología sobre $\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$. Para probarlo consideremos $i \in K$, $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Omega$. Veremos que $(E_{i,\,\alpha,\,\beta})^c$ es abierto. Para ello consideremos $(x, y) \in (E_{i,\,\alpha,\,\beta})^c$. Luego $x \in \hat{X}_i^c \cup A_\alpha^c$ ó $y \in \hat{Y}_i^c \cup B_\beta^c$. Supongamos que $x \in \hat{X}_i^c \cup A_\alpha^c$. En consecuencia existe $j \in K$ tal que $x \in \hat{X}_j \cap (\hat{X}_i^c \cup A_\alpha^c)$. Usando que A_α y $\hat{X}_i$ son clopens en X se tiene que existe $\alpha_1 \in \Delta$ tal que $x \in A_{\alpha_1} \subseteq (\hat{X}_i^c \cup A_\alpha^c) \cap \hat{X}_j$. Además existe $\beta_1 \in \Omega$ tal que $y \in \hat{Y}_j \cap B_{\beta_1}$. Luego

$$(x, y) \in E_{j,\,\alpha_1,\beta_1} \subseteq (E_{i,\,\alpha,\,\beta})^c$$

En efecto, supongamos que existe $(a, b) \in E_{j,\,\alpha_1,\beta} \cap E_{i,\,\alpha,\beta}$. En particular, $a \in A_{\alpha_1}$ y por ende $a \in \hat{X}_i^c \cup A_\alpha^c$. Luego $(a, b) \notin E_{i,\,\alpha,\,\beta}$, una contradicción. Por lo tanto $(E_{i,\,\alpha,\,\beta})^c$ es abierto en $\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbf{0}_n$ para la n-upla $(0, ..., 0)$ y

$$K_n = \{(k_1, ..., k_n) : (k_1, ..., k_n) \in (\{0, 1\}^n - \mathbf{0}_n\})\}.$$

Si $(X, \leq)$ es un poset y $U \subseteq X$ entonces definimos $U^0 = U^c$ y $U^1 = U_M$.

El siguiente resultado nos será útil en lo que sigue:

Lema 4.4.45. *Sea $(X, \leq)$ un poset. Si U_j son decrecientes en $(X, \leq)$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$ entonces*

$$(\bigcup_{j=1}^{n} U_j)_M = \bigcup_{(k_1,...,k_n)\in K_n} (U_1^{k_1} \cap ... \cap U_n^{k_n}).$$

Demostración. Haremos esta demostración por inducción.

Veremos primero que si U_1, U_2 son decrecientes en $(X, \leq)$ entonces

$$(i) \ (U_1 \cup U_2)_M = ((U_1)_M \cap U_2^c) \cup (U_1^c \cap (U_2)_M) \cup ((U_1)_M \cap (U_2)_M).$$

Sea $x \in (U_1 \cup U_2)_M$ y supongamos que $x \in U_1 \cap U_2^c$. Sea $x \leq y$ con $y \in U_1$. En particular, $y \in U_1 \cup U_2$. Luego $x = y$ y $x \in (U_1)_M \cap U_2^c$. Ahora supongamos que $x \in U_1 \cap U_2$. Sea $x \leq y$ con $y \in U_1$. En particular, $y \in U_1 \cup U_2$, por lo cual $x = y$ y $x \in (U_1)_M$. Del mismo modo se prueba que $x \in (U_2)_M$, siendo así $x \in (U_1)_M \cap (U_2)_M$. De un modo similar se puede considerar el caso que $x \notin U_1$. Recíprocamente, sea $x \in ((U_1)_M \cap U_2^c)$ y $x \leq y$, con $y \in U_1 \cup U_2$. Tenemos que $y \notin U_2$ porque $x \notin U_2$. Luego $y \in U_1$. Por esta razón $x = y$ y $x \in (U_1 \cup U_2)_M$. De modo análogo se prueba que si $x \in U_1^c \cap (U_2)_M$ entonces $x \in (U_1 \cup U_2)_M$. Finalmente supongamos que $x \in ((U_1)_M \cap (U_2)_M)$. Sea $x \leq y$ con $y \in U_1 \cup U_2$. En particular $x \in U_1 \cup U_2$ y $x = y$. Luego tenemos que $x \in (U_1 \cup U_2)_M$.

Supongamos ahora que la propiedad vale para cierto m y veamos que vale para $m + 1$. Sean U_i subconjuntos decrecientes de X, con $i = 1, ..., m + 1$. En particular,

$$(\bigcup_{j=1}^{m+1} U_j)_M = ((\bigcup_{j=1}^{m} U_j) \cup U_{m+1})_M. \tag{4.17}$$

Definimos a continuación los siguientes conjuntos:

$A_m = \bigcup_{(k_1,...,k_n) \in K_n} (U_1^{k_1} \cap ... \cap U_n^{k_n} \cap U_{m+1}^c)$,

$B_m = \bigcap_{j=1}^{m} (U_j^c \cap (U_{m+1})_M)$,

$C_m = \bigcup_{(k_1,...,k_n) \in K_n} (U_1^{k_1} \cap ... \cap U_n^{k_n} \cap (U_{m+1})_M)$,

$D_m = \bigcup_{(k_1,...,k_m,k_{m+1}) \in K_{m+1}} (U_1^{k_1} \cap ... \cap U_m^{k_m} \cap U_{m+1}^{k_{m+1}})$.

Por (i), la ecuación (4.17) e hipótesis inductiva tenemos que

$$(\bigcup_{j=1}^{m+1} U_j)_M = A_m \cup B_m \cup C_m.$$

Necesitamos probar que $A_m \cup B_m \cup C_m = D_m$.

Sea $x \in A_m$. Luego existe $(k_1, ..., k_m) \in K_m$ tal que $x \in U_1^{k_1} \cap ... \cap U_m^{k_m} \cap U_{m+1}^c$. En particular, $(k_1, ..., k_m, 0) \in K_{m+1}$. Por esto, $x \in D_m$. De un modo similar podemos probar que si $x \in C_m$ entonces $x \in D_m$. Sea $x \in B_m$. Usando que $(0, ..., 0, 1) \in K_{m+1}$ se concluye que $x \in D_m$.

Recíprocamente, sea $x \in D_m$. Luego existe $(k_1, ..., k_m, k_{m+1}) \in K_{m+1}$ tal que $x \in U_1^{k_1} \cap ... \cap U_m^{k_m} \cap U_{m+1}^{k_{m+1}}$. Si $k_{m+1} = 0$ entonces $(k_1, ..., k_m) \in K_m$ y $x \in A_m$. Si $k_{m+1} = 1$ y $k_1 = k_2 = ... = k_m = 0$ entonces $x \in B_m$. Si $k_{m+1} = 1$ y existe $k_l \neq 0$ para cierto $l \in \{1, ..., m\}$ entonces $(k_1, ..., k_m) \in K_m$. Luego $x \in C_m$.

Por lo tanto hemos probado que

$$(\bigcup_{j=1}^{m+1} U_j)_M = \bigcup_{(k_1,\ldots,k_{m+1})\in K_{m+1}} (U_1^{k_1} \cap \ldots \cap U_{m+1}^{k_{m+1}}).$$

□

En lo que sigue consideraremos en $\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$ el orden inducido por $(X \times Y, \leq)$.

Proposición 4.4.46. *Si* $(X, \leq), (Y, \leq) \in \mathrm{TSH_n}$ *entonces* $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq) \in \mathrm{TSH_n}$.

Demostración. Sea k el mínimo entre las alturas de $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$.

(i) $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ satisface el axioma de separación de Priestley.

Sean $(x, y), (z, w) \in \bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$ tales que $(x, y) \nleq (z, w)$. Supongamos que $x \nleq z$. Luego existen $U \in \mathbf{D}(X)$ e $i \in K$ tales que $(x, y) \in (\hat{X}_i \cap U) \times \hat{Y}_i$ y $(z, w) \notin (\hat{X}_i \cap U) \times \hat{Y}_i$ (ya que $z \notin U$). Definimos el conjunto $V = \bigcup_{j=1}^k (\hat{X}_j \cap U) \times \hat{Y}_j$. En particular tenemos que $(x, y) \in V$, $(z, w) \notin V$ y V es un creciente. El hecho de que $\hat{Y}_i$ es clopen en Y implica que $\hat{Y}_j = \bigcup_{m_j=1}^{s_j} B_{\beta_{m_j}}$ para cierto $s_j \in \mathbb{N}$, y el hecho de que $U \in \mathbf{D}(X)$ implica que $U = \bigcup_{t=1}^l A_{\alpha_t}$ para cierto $l \in \mathbb{N}$. Luego

$$V = \bigcup_{j,t}(\bigcup_{m_j}(\hat{X}_j \cap A_{\alpha_t}) \times (\hat{Y}_j \cap B_{\beta_{m_j}})).$$

Por lo tanto V es un clopen creciente de $\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$ es compacto.

Sean $\Phi \subseteq \Delta$ y $\Gamma \subseteq \Omega$ tales que $\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) = \bigcup_{i\in K,\, \alpha\in\Phi,\, \beta\in\Gamma} E_{i,\,\alpha,\,\beta}$. Supongamos que k es la altura del S-espacio $(X, \leq)$. En particular, tenemos que $X = \bigcup_{\alpha\in\Phi} A_\alpha$ e $Y_k = \bigcup_{\beta\in\Gamma} B_\beta$. Por ser X e Y_k compactos (Y_k es compacto ya que es un subconjunto cerrado del espacio topológico compacto Y) tenemos que $X = \bigcup_{\alpha\in P} A_\alpha$ e $Y_k = \bigcup_{\beta\in\Sigma} B_\beta$, para ciertos subconjuntos finitos $P \subseteq \Phi$ y $\Sigma \subseteq \Gamma$. Luego

$$\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i) = \bigcup_{i\in K,\, \alpha\in P,\, \beta\in\Sigma} E_{i,\,\alpha,\,\beta}.$$

(iii) $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ es un espacio de Esakia.

Sea V un clopen de $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$. Luego $V = \bigcup_{i\in K,\, \alpha\in P,\, \beta\in\Sigma} E_{i,\,\alpha,\,\beta}$ para ciertos subconjuntos finitos P, Σ de Δ y Φ respectivamente. Luego tenemos que $(V] = \bigcup_{i,\, \alpha\in P,\, \beta\in\Sigma} (E_{i,\,\alpha,\,\beta}]$ y $(E_{i,\,\alpha,\,\beta}] = ((\hat{X}_i \cap A_\alpha] \times (\hat{Y}_i \cap B_\beta]) \cap (\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$. Usando que $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ son espacios de Esakia inferimos que $(E_{i,\,\alpha,\,\beta}]$ es clopen. Por lo tanto $(V]$ es clopen en $\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$.

(iv) $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ es un S-espacio de altura k.

Sea V un clopen decreciente de $(\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$. Usando la notación de (iii) tenemos que $V = \bigcup_{i\in K,\, \alpha\in P,\, \beta\in\Sigma} (E_{i,\,\alpha,\,\beta}]$. Un cálculo directo prueba que

$$(E_{i,\,\alpha,\,\beta}]_M = [(\hat{X}_i \cap A_\alpha]_M \times (\hat{Y}_i \cap B_\beta]_M) \cap (\bigcup_{i=1}^n (\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)).$$

Como $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ son S-espacios entonces $(\hat{X}_i\cap A_\alpha]_M$ y $(\hat{Y}_i\cap B_\beta]_M$ son clopens en X e Y respectivamente. Luego $(E_{i,\,\alpha,\,\beta}]_M$ es clopen. En consecuencia por el Lema 4.4.45 tenemos que V_M es clopen en $(\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)$. Finalmente se deduce de la Proposición 4.4.40 el hecho de que $(\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)$ es un poset de altura k. $\square$

Corolario 4.4.47. *Si* $(X,\leq),(Y,\leq)\in \mathrm{TSH_n}$ *entonces las aplicaciones* $\pi_1: (\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)\to(X,\leq)$ *dada por* $\pi_1(x,y)=x$ *y* $\pi_2:(\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)\to (Y,\leq)$ *dada por* $\pi_2(x,y)=y$ *son morfismos en* $\mathrm{TSH_n}$.

Demostración. Un cálculo directo prueba que para $i=1,2$, π_i son morfismos en la categoría de espacios de Priestley (la monotonía es inmediata, y la continuidad de por ejemplo π_1 se deduce de la igualdad $\pi_1^{-1}(E_{i,\,\alpha,\,\beta})=A_\alpha\cap\hat{X}_i$). Para probar que π_1 es un p-morfismo, sean $(x,y)\in\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i)$ y $z\in X$ tales que $\pi_1(x,y)\leq z$. En particular $(x,y)\in\hat{X}_i\times\hat{Y}_i$ para cierto $i\in\{1,...,n\}$ y $z\in\hat{X}_j$ para cierto $j\in\{1,...,n\}$. Más aún, por (b) del Lema 4.4.6 tenemos que $j\leq i$. Si $i=1$, $x\in X_M$ y así $x=z$. Luego $(x,y)\leq(z,y)\in X_M\times Y_M$ y $z=\pi_1(z,y)$. Si $i>1$, por el Lema 4.4.8 tenemos que existe $w\in\hat{Y}_j$ tal que $y\leq w$. Luego $(x,y)\leq(z,w)\in\hat{X}_j\times\hat{Y}_j$ y $z=\pi_1(z,w)$. Por lo tanto π_1 es un p-morfismo. Finalmente supongamos que $(x,y),(z,w)\in\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i)$ y que $(x,y)<(z,w)$. Si $x=z$ entonces $y=w$, una contradicción. Por lo tanto en virtud del Corolario 4.4.5 tenemos que $\pi_1\in\mathrm{TSH_n}$. Una demostración análoga prueba que $\pi_2\in\mathrm{TSH_n}$. $\square$

Proposición 4.4.48. *Sean* $(X,\leq),(Y,\leq)\in\mathrm{TSH_n}$*, en donde* $(X,\leq)$ *ó* $(Y,\leq)$ *son* S*-espacios asociados a* S*-álgebras prelineales (es decir, donde al menos uno de ellos es un root system). Luego* $(\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)$ *es el producto en la categoría* $\mathrm{TSH_n}$.

Demostración. Sean $f:(Z,\leq)\to(X,\leq)$, $g:(Z,\leq)\to(Y,\leq)\in\mathrm{TSH_n}$. Luego definimos $h:Z\to(\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i),\leq)$ como $h(z)=(f(z),g(z))$. Notemos que esta función está bien definida. En efecto, sea $z\in Z$. Luego existe $i\in\{1,...,n\}$ tal que $z\in\hat{Z}_i$. Por (b) del Lema 4.4.3 tenemos que $h(z)\in\hat{X}_i\times\hat{Y}_i$. Luego $h(z)\in\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i)$. Más aún, probaremos que $h\in\mathrm{TSH_n}$. Es claro que h es monótona (esto se desprende de la monotonía de f y g). Si $(\hat{X}_i\cap A_\alpha)\times(\hat{Y}_i\cap B_\beta)$ es un elemento básico de $\bigcup_{i=1}^n(\hat{X}_i\times\hat{Y}_i)$ entonces tenemos que $h^{-1}((\hat{X}_i\cap A_\alpha)\times(\hat{Y}_i\cap B_\beta))=f^{-1}(\hat{X}_i\cap A_\alpha)\cap g^{-1}(\hat{Y}_i\cap B_\beta)$, que resulta ser un clopen en Z por la continuidad de f y de g; por ende h es una función continua. Veamos que h es p-morfismo, suponiendo por ejemplo que $(Y,\leq)$ es un S-espacio asociado a una S-álgebra prelineal (es decir, un root system). Sea $h(z)=(f(z),g(z))\leq(t,s)$. Luego existen $a,b\in Z$ tales que $z\leq a, z\leq b$, $f(a)=t$ y $g(b)=s$. En particular, $g(z)\leq g(a)$ y $g(z)\leq s$. Como $(Y,\leq)$ es un root system, $g(a)\leq s$ ó $s\leq g(a)$. Por otro lado, existe $i\in\{1,...,n\}$ tal que $(t,s)\in\hat{X}_i\times\hat{Y}_i$. Por (b) del Lema 4.4.3 tenemos que $a,b\in\hat{Z}_i$ y por el mismo resultado se tiene que $g(a),s\in\hat{Y}_i$. Luego $g(a)=s$ (puesto que $g(a)\leq s$ ó $s\leq g(a)$). De este modo, $z\leq a$ y $h(z)\leq(t,s)=(f(a),g(a))=h(a)$, i.e. la función h es p-morfismo. El hecho de que h es S-morfismo se sigue del Corolario 4.4.5. $\square$

4.4.9. Algebras subdirectamente irreducibles

Un álgebra subdirectamente irreducible está caracterizada a partir de sus congruencias (ver por ejemplo Teorema 8.4 de [9]). Como la función sucesor es compatible en toda álgebra de Heyting, si (H, S) es una S-álgebra entonces H es subdirectamente irreducible en la variedad de álgebras de Heyting si y sólo si (H, S) es subdirectamente irreducible en la variedad de S-álgebras. Es sabido que un álgebra de Heyting es subdirectamente irreducible si y sólo si es trivial (es decir, consta de un único elemento) o existe un elemento $u \neq 1$ tal que si $x \neq 1$ entonces $x \leq u$ (ver por ejemplo Ejercicio 9 de [9]). Lo que haremos a continuación es dar una descripción explícita del elemento u para las álgebras subdirectamente irreducibles en la variedad de S-álgebras de altura n, en donde n es un número natural dado.

Sea $H \in \mathrm{SH_n}$ subdirectamente irreducible. Veremos que si la altura de H es k $(k \geq 2)$ entonces el elemento u es $S^{(k-1)}(0)$. En efecto, por $(S2)$ tenemos que

$$1 = S^{(k)}(0) = u \vee (u \rightarrow S^{(k-1)}(0)).$$

En particular, $u \rightarrow S^{(k-1)}(0) = 1$, por lo cual $u \leq S^{(k-1)}(0)$. Por otro lado $S^{(k-1)}(0) \neq 1$, por lo cual $S^{(k-1)}(0) \leq u$. Luego $u = S^{(k-1)}(0)$.

Proposición 4.4.49. *Sea $H \in \mathrm{SH_n}$ y supongamos que la altura de H es k $(k \geq 2)$. Luego H es subdirectamente irreducible sii H es trivial o bien no existe ningún elemento entre $S^{(k-1)}(0)$ y el último elemento del álgebra.*

4.4.10. Relación con ciertas variedades de Heyting

En el contexto de un álgebra de Heyting, podemos definir inductivamente $P_1 = y_1 \vee \neg y_1$ y $P_n = y_n \vee (y_n \rightarrow P_{n-1})$ (para $n \geq 2$). Sea $\mathcal{H}_n$ la variedad de álgebras de Heyting que satisface la ecuación adicional $P_n = 1$. Estas variedades se utilizan, por ejemplo, para caracterizar las variedades de álgebras de Heyting finitamente generadas (ver por ejemplo Teorema 4.1 de [2], [37] y [38]).

Analizaremos cómo se relacionan estas variedades con $\mathrm{SH_n}$.

(I) Si $(H, S) \in \mathrm{SH_n}$ entonces $H \in \mathcal{H}_n$.

Basta probar que para cada $m \geq 1$ se tiene que

$$S^{(m)}(0) \leq P_m.$$

El caso $m = 1$ es inmediato (se desprende de la ecuación (S2)). Supongamos que vale para cierto m y probemos que vale para $m+1$. Por $(S2)$ y por hipótesis inductiva tenemos que

$$S^{(m+1)}(0) = S(S^{(m)}(0)) \leq y_{m+1} \vee (y_{m+1} \rightarrow S^{(m)}(0)) \leq .$$

$$y_{m+1} \vee (y_{m+1} \rightarrow P_m) = P_{m+1}$$

(II) Si $H \in \mathcal{H}_n$ y H admite sucesor entonces $(H, S) \in \mathrm{SH_n}$.

En efecto, si consideramos $y_k = S^{(k)}(0)$ tenemos por (S1) y por (S3) que

$$P_k \leq S^{(k)}(0) \vee (S^{(k)}(0) \rightarrow P_{k-1}) = S^{(k)}(0) \vee (S(S^{(k-1)}(0)) \rightarrow P_{k-1}) =$$

$$S^{(k)}(0) \vee S^{(k-1)}(0) = S^{(k)}(0).$$

Luego $P_k = S^{(k)}(0)$ (la otra desigualdad se desprende del ítem previo). Por lo tanto si $P_n = 1$ entonces $S^{(n)}(0) = 1$.

(III) Sea $n \geq 2$. Existe $H \in \mathcal{H}_n$ tal que H no admite sucesor.

En efecto, supongamos que esto no es así. Luego por **(I)** y por **(II)** tenemos que

$$\mathcal{H}_n = \{H : (H, S) \in SH_n\}.$$

(llamemos V al miembro derecho de la igualdad previa). De este modo V es una variedad de álgebras de Heyting. Sea H la cadena de tres elementos $\{0, x, 1\}$. Es claro que $H \in V$. Luego, por el Teorema 3.1 de [11], tenemos que existe un término de Heyting unario t tal que $S_H = t^H$; en particular, $x = S_H(0) = t^H(0)$. Esto es absurdo ya que $t^H(0) \in \{0, 1\}$ (esto último sale de la descripción del álgebra libre en un generador en la variedad de álgebras de Heyting. Para una descripción de la misma ver [1]).

4.4.11. El problema de la completud afín

Como SH_1 es esencialmente la variedad de álgebras de Boole, tenemos que dicha variedad es afín completa. Sin embargo, para cada $n > 1$ la variedad $\mathrm{SH_n}$ *no es afín completa*. En efecto, supongamos que sí lo es. La S-álgebra dada en el Ejemplo 4.3.11 es subdirectamente irreducible en $\mathrm{SH_n}$ (para $n > 1$). Luego, por el Corolario 4.2.6 de [36] tenemos que esta álgebra no admite subálgebras propias. Pero $\{0, z, 1\}$ es una subálgebra propia, una contradicción. De este modo tenemos la siguiente

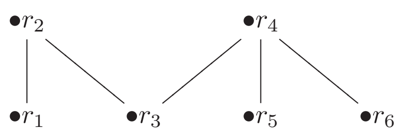
Proposición 4.4.50. *Para cada $n > 1$ la variedad $\mathrm{SH_n}$ no es afín completa.*

Notemos que el resultado previo nos da una prueba alternativa (no constructiva) de que la variedad de S-álgebras no es afín completa.

4.4.12. Libre en un generador en la variedad SH_2

En lo que sigue daremos una descripción del espacio de representación del álgebra libre en un generador en la variedad SH_2.

Consideremos el siguiente poset, al que denominaremos Ω:



Como Ω tiene altura 2 se tiene que $\Omega^+ \in \mathrm{SH}_2$, en virtud de la Proposición 4.4.8. Definiendo $U = \{r_4, r_6\}$ se verifican las siguientes igualdades:

a. $[r_1) = \neg U$,

b. $\{r_4\} = S(\emptyset) \cap U$,

c. $\{r_2\} = S(\emptyset) \cap \neg U$,

d. $[r_5) = \neg\neg U \cap ((U \cup \{r_2\}) \to S(\emptyset))$,

e. $[r_3) = (\neg U \cup \neg\neg U) \to S(\emptyset)$.

Por lo tanto tenemos que U es un generador de la S-álgebra Ω^+. En efecto todos los elementos de Ω^+ se pueden escribir en términos de U porque todos los subconjuntos crecientes principales de Ω, es decir aquellos que admiten mínimo, se escriben en términos de U y la S-álgebra Ω^+ es finita.

Probaremos a continuación que Ω^+ es el álgebra de libre en un generador para la variedad SH_2. Para ello daremos algunos resultados previos.

Lema 4.4.51. *Sea V una variedad. Si F es el álgebra libre en un generador sobre la clase de las álgebras subdirectamente irreducibles de V entonces F es el álgebra libre en un generador sobre V.*

Demostración. Sean $A \in V$ y $a \in A$. Definimos la función $f : \{x\} \to A$ como $f(x) = a$. Por el Teorema 8.6 de [9] tenemos que A es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles $\{A_i\}_i$ de V (a cada elemento b de A lo identificaremos con el elemento $(b_i)_i$ de $\prod_i A_i$). Por la definición de álgebra libre tenemos que existen morfismos $f_i : F \to A_i$ tales que $f_i(x) = a_i$. Luego $f : F \to \prod_i A_i$ dada por $f(y) = (f_i(y))_i$ es un morfismo tal que $f(x) = a$. Continuando con el abuso de notación es claro que $Imf = \langle f(x) \rangle = \langle a \rangle \subseteq A$ (en donde $\langle f(x) \rangle$ indica la subálgebra generada por $f(x)$). Por esta razón podemos considerar que f tiene como codominio A. $\square$

Como consecuencia de la Proposición 4.4.49 tenemos el siguiente

Lema 4.4.52. *Las álgebras subdirectamente irreducibles de* SH_2 *son la trivial y las que tienen la forma* $[0, S(0)] \oplus 1$.

Lema 4.4.53. *Las álgebras subdirectamente irreducibles monogeneradas (i.e, generadas por un elemento) en* SH_2 *son la trivial, la cadena de dos elementos, la cadena de tres elementos y* $4 \oplus 1$*, siendo* 4 *el álgebra libre en un generador en la variedad de álgebras de Boole.*

Demostración. Se sigue de los lemas 4.4.52 y 4.2.5 (ya que un elemento genera, como álgebra de Boole, el álgebra trivial, la cadena de dos elementos, o la libre en un generador en Boole). $\square$

Lema 4.4.54. *Sea $(Y, \leq)$ un S-espacio finito de altura 2 tal que $X \subseteq Y$. Si X es un subconjunto creciente de Y entonces la función $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x$ es un morfismo en la categoría de S-espacios de altura 2.*

Demostración. La monotonía de i es inmediata, la continuidad se sigue del hecho de que X e Y son conjuntos finitos ,y el hecho de ser p-morfismo es consecuencia de que X es un subconjunto creciente de Y. Finalmente, el hecho de que i es un morfismo en la categoría de S-espacios de altura 2 se sigue del Corolario 4.4.5. $\square$

Proposición 4.4.55. Ω^+ *es el álgebra libre en un generador sobre la clase de álgebras subdirectamente irreducibles monogeneradas en* SH_2*. En particular,* Ω^+ *es el álgebra libre en un generador sobre la clase de álgebras subdirectamente irreducibles en* SH_2.

Demostración. En esta demostración utilizaremos el Lema 4.4.54. Por el Lema 4.4.53 sólo necesitamos considerar los siguientes casos:

a) Cadena de dos elementos: definimos las funciones $i_1 : \{r_2\} \to \Omega$, $i_2 : \{r_4\} \to \Omega$ dadas por la inclusión. Como $\{r_2\}$ y $\{r_4\}$ son crecientes de Ω, tenemos que i_1, i_2 son monomorfismos en la categoría de S-espacios. Luego $X(i_1) : \Omega^+ \to \{r_2\}^+$ y $X(i_2) : \Omega^+ \to \{r_4\}^+$ son epimorfismos en la categoría de S-álgebras tales que $X(i_1)(U) = \emptyset$ y $X(i_2)(U) = \{r_4\} = S(\emptyset)$.

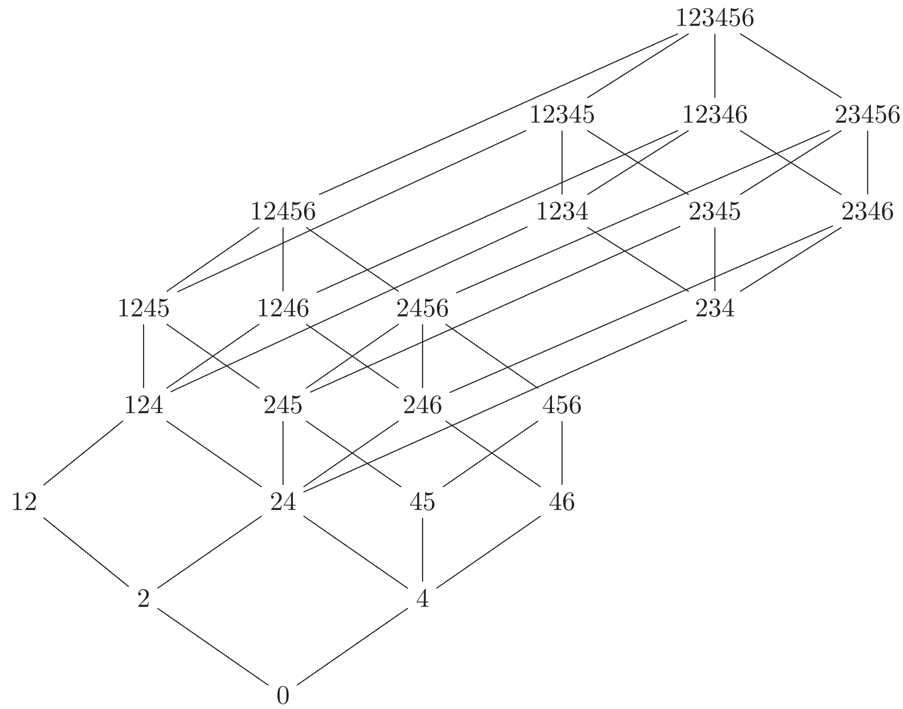
b) Cadena de tres elementos: definimos las funciones $i_3 : \{r_1, r_2\} \to \Omega$, $i_4 : \{r_4, r_5\} \to \Omega$, $i_5 : \{r_4, r_6\} \to \Omega$ dadas por la inclusión. Como los conjuntos $\{r_1, r_2\}, \{r_4, r_5\}, \{r_5, r_6\}$ son crecientes de Ω, tenemos que i_3, i_4, i_5 son monomorfismos en la categoría de S-espacios. Por lo tanto $X(i_3) : \Omega^+ \to \{r_1, r_2\}^+$, $X(i_4) : \Omega^+ \to \{r_4, r_5\}^+$ y $X(i_5) : \Omega^+ \to \{r_4, r_6\}^+$ son epimorfismos en la categoría de S-álgebras tales que $X(i_3)(U) = \emptyset$, $X(i_4)(U) = S(\emptyset)$, $X(i_5)(U) = S^{(2)}(\emptyset) = \{r_4, r_6\}$.

c) S-álgebra $4 \oplus 1$: definimos la función $i_6 : \{r_2, r_3, r_4\} \to \Omega$ dada por la inclusión. Como $\{r_2, r_3, r_4\}$ es un creciente de Ω, tenemos que i_6 es un monomorfismo en la categoría de S-espacios, por lo cual $X(i_6) : \Omega^+ \to \{r_2, r_3, r_4\}^+$ es un epimorfismo en la categoría de S-espacios tal que $X(i_6)(U) = \{r_4\}$, siendo r_4 el elemento y del dibujo del Ejemplo 4.3.11. Este es el único caso que necesitamos considerar ya que la cadena de tres elementos es una subálgebra de $4 \oplus 1$ y ese caso fue considerado. $\square$

Teorema 4.4.56. Ω^+ *es el álgebra libre en un generador de la variedad* SH_2.

Demostración. Se sigue del Lema 4.4.51 y de la Proposición 4.4.55. $\square$

Dado el poset Ω escribiremos i en lugar de r_i, para $i = 1, ..., 6$. Por lo tanto Ω^+ es la S-álgebra cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:



4.5. Variedades de S-álgebras generadas por una cadena finita

En esta sección estudiaremos las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$, siendo H_n la cadena de n elementos y n un número natural ($n \geq 3$). Parte de los resultados que mencionaremos han sido publicados en [17]. Comenzaremos dando una motivación para estas variedades (ver [11]). Notemos que $\mathbb{V}(H_2, S)$ coincide con la variedad de álgebras de Boole (ya que S coincide con el top en toda álgebra de Boole, y la variedad de álgebras de Boole está generada por la cadena de dos elementos).

Sea $\mathfrak{L}_n$ una axiomatización de la lógica intermedia con valores en H_n, para $n \geq 3$. Por ejemplo, podemos agregar a IPC el siguiente esquema de axiomas ([31], ver [62] para una axiomatización diferente):

$$(\phi \to \psi) \vee (\psi \to \phi),$$

$$(\phi_1 \to \phi_2) \vee ... \vee (\phi_n \to \phi_{n+1}).$$

La lógica $\mathfrak{L}_n + S$ la definimos como la unión de $\mathfrak{L}_n$ junto con el sistema de axiomas $\mathcal{A}(S)$ para el conectivo S. Tenemos que el sistema $\mathfrak{L}_n + S$ es una extensión conservadora de $\mathfrak{L}_n$, fuertemente completo para valuaciones en el álgebra (H_n, S) (S resulta ser un conectivo implícito nuevo sobre $\mathfrak{L}_n$). Más aún, todo conectivo implícito nuevo sobre $\mathfrak{L}_n + S$ es equivalente en este sistema a una combinación de $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ y S (Teorema 6.1 de [11]).

Comenzaremos mostrando cómo se relacionan las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$ con la variedad de S-álgebras prelineales y las variedades de S-álgebras de altura menor o igual que $n + 1$. Luego daremos una presentación completa para el coproducto (utilizando resultados de la sección previa). Finalmente daremos una descripción del espacio de representación del álgebra libre en un generador para las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$.

4.5.1. Coproducto

Sea $n \geq 3$. La variedad $\mathbb{V}(H_n, S)$ está caracterizada por las ecuaciones de álgebras de Heyting, las ecuaciones de la función sucesor y las siguientes ecuaciones:

(P) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$,

(S) $\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \to x_{i+1}) = 1$.

Recordemos que SLH es la subvariedad de S-álgebras que satisface la ecuación adicional **(P)**. Probaremos en lo que sigue que

$$\mathbb{V}(H_n, S) = \mathrm{SLH} \cap \mathrm{SH_{n-1}}.$$

Para ello daremos primero el siguiente

Lema 4.5.1. *Sea $n \geq 3$. Sea E_1 un conjunto de ecuaciones para las álgebras de Heyting, ecuaciones del sucesor, ecuaciones **(P)** y **(S)**. Sea E_2 un conjunto de ecuaciones para las álgebras de Heyting, ecuaciones del sucesor, ecuaciones **(P)** y $S^{(n-1)}(0) = 1$. Luego $E_1 = E_2$.*

Demostración. Supongamos primero que valen las ecuaciones de E_1, con lo cual tenemos que

$$S^{(n-1)}(0) = S^{(n-1)}(0) \vee S^{(n-2)}(0) \vee ... \vee S(0) \vee 0 =$$

$$(1 \to S^{(n-1)}(0)) \vee (S^{(n-1)}(0) \to S^{(n-2)}(0)) \vee ... \vee (S^{(2)}(0) \to S(0)) \vee$$

$$(S(0) \to 0) = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que valen las ecuaciones de E_2. Luego $S(x_{n+1}) \leq x_n \vee (x_n \to x_{n+1})$, con lo cual por el Corolario 4.3.4 se tiene que

$$S^{(2)}(x_{n+1}) \leq S(x_n \vee (x_n \to x_{n+1})) = S(x_n) \vee S(x_n \to x_{n+1}). \tag{4.18}$$

Por otro lado, usando que

$$(x_{n-1} \to x_n) \to (x_n \to x_{n+1}) = [(x_n \wedge (x_{n-1} \to x_n)] \to x_{n+1} = x_n \to x_{n+1},$$

tenemos que

$$S(x_n \to x_{n+1}) \leq (x_{n-1} \to x_n) \vee [(x_{n-1} \to x_n) \to (x_n \to x_{n+1})] =$$

$$(x_{n-1} \to x_n) \vee (x_n \to x_{n+1}). \tag{4.19}$$

Usando que $x_{n-1} \leq x_{n-2} \to x_{n-1}$ se llega a que $x_{n-1} \to x_n \geq (x_{n-2} \to x_{n-1}) \to x_n$, con lo cual

$$S(x_n) \leq (x_{n-2} \to x_{n-1}) \vee [(x_{n-2} \to x_{n-1}) \to x_n] \leq (x_{n-2} \to x_{n-1}) \vee (x_{n-1} \to x_n). \tag{4.20}$$

Utilizando las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20) inferimos que

$$S^{(2)}(x_{n+1}) \leq (x_{n-2} \to x_{n-1}) \vee (x_{n-1} \to x_n) \vee (x_n \to x_{n+1})$$

Iterando el razonamiento anterior, utilizando la ecuación $(x \to y) \to (y \to z) = y \to z$ (válida en toda álgebra de Heyting) y el Corolario 4.3.4, se tiene que si k es tal que $2 \leq k \leq n-1$ entonces

$$S^{(k)}(x_{n+1}) \leq (x_{n-k} \to x_{n-(k-1)}) \vee ... \vee (x_n \to x_{n+1}).$$

Luego en particular tenemos que

$$1 = S^{(n-1)}(x_{n+1}) \leq (x_1 \to x_2) \vee ... \vee (x_n \to x_{n+1}).$$

□

Dado que es inmediato que $\mathbb{V}(H_2, S) = \mathrm{SLH} \cap \mathrm{SH_1}$, tenemos el siguiente

Corolario 4.5.2. *Para cada $n \geq 2$, $\mathbb{V}(H_n, S) = \mathrm{SLH} \cap \mathrm{SH_{n-1}}$.*

Observación 4.5.3. *Para cada $n \geq 3$ se tiene que $\mathbb{V}(H_n, S) \subset \mathrm{SH_{n-1}}$. En efecto, consideremos el Ejemplo 4.3.11. Se tiene que dicha S-álgebra pertenece a $\mathrm{SH_{n-1}}$. Sin embargo $(x \to y) \vee (y \to x) = z \neq 1$, por lo cual la misma no pertenece a $\mathbb{V}(H_n, S)$. Además $\mathbb{V}(H_n, S) \subset \mathrm{SLH}$ (para verlo basta considerar el conjunto $\mathbb{N}_0 \cup \{\alpha\}$, siendo $n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Es claro que esta S-álgebra es prelineal y no tiene altura finita).*

Sea n un número natural. Consideremos dos S-espacios $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ de altura a lo sumo n que además forman un root system. Sabemos, en virtud de la Proposición 4.4.46, que $(\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ es un S-espacio de altura a lo sumo n (con la topología dada en 4.4.8). Notemos además que este poset es un root system. En efecto, si $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$ entonces $[(x, y))$ es una cadena. Para probarlo consideremos $(a, b), (c, d) \in \bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i)$ tales que $(x, y) \leq (a, b)$ y $(x, y) \leq (c, d)$. Es decir, $x \leq a, x \leq c, y \leq b$ e $y \leq d$. Luego ($a \leq c$ ó $c \leq a$) y ($b \leq d$ ó $d \leq b$). Supongamos que $a \leq c$. Si $b \leq d$ nada hay que probar. Si $d \leq b$ entonces $d = b$ y en particular $b \leq d$. En efecto, $a \leq c$, $a \in \hat{X}_i$ y $c \in \hat{X}_j$, para ciertos $i, j = 1, ..., n$. Luego por la parte (b) del Lema 4.4.6 tenemos que $j \leq i$. Además como $d \leq b$, por el mismo lema tenemos que $i \leq j$. Luego $i = j$ y por ende $b = d$. De esta manera $(\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ es un root system. Por lo tanto, en virtud del Corolario 4.5.2 y de la Proposición 4.4.48, tenemos el siguiente

Teorema 4.5.4. *Sean $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ S-espacios de altura a lo sumo $n \geq 3$ tales que forman un root system. Luego $(\bigcup_{i=1}^{n}(\hat{X}_i \times \hat{Y}_i), \leq)$ es el producto en la categoría asociada (por la dualidad de Priestley) a la variedad $\mathbb{V}(H_n, S)$.*

El resultado anterior nos da una descripción del espacio de representación del coproducto en la categoría cuya variedad subyacente es $\mathbb{V}(H_n, S)$.

4.5.2. Algebras libres

Sea $n \geq 3$. En [11] (Teorema 6.1) fue probado que los conectivos implícitos de $\mathcal{L}_n + S$ son términos (i.e una combinación de $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ y S).

La demostración de este teorema muestra también que la clase de conectivos implícitos de $\mathcal{L}_n$ coincide con el conjunto de polinomios de Heyting sobre H_n (en particular, coincide con el conjunto de términos sobre H_n); idénticamente, por completud afín, con el conjunto de funciones compatibles de H_n. Caicedo probó en [10] que estas funciones (para el caso unario) son exactamente las funciones $f : H_n \rightarrow H_n$ satisfaciendo, para algún $a \in H_n$, que $f(x) \geq x$, para $x \in [0, a]$ y $f(x) = a$ sobre $(a, 1]$.

Un diagrama del álgebra libre en un generador de $\mathbb{V}(H_3, S)$ es descripta en la Figura 2 de [11].

En esta parte del trabajo daremos una caracterización completa para las álgebras libres en un generador para las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$ (para $n \geq 3$). Dado que tenemos una descripción del coproducto en $\mathbb{V}(H_n, S)$ se tendrá automáticamente una descripción del álgebra libre en cualquier cantidad de generadores para las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$. Comenzaremos con algunos resultados previos.

Sean M y N retículos distributivos acotados. Si M y N son finitos entonces $M \oplus N$ es también finito (recordemos que $\oplus$ indica la suma ordinal como posets, ver [1], p. 39), y por ende una S-álgebra. Escribiremos $\mathbf{0}$ para el retículo con un único elemento. Además para cada $n \geq 2$ escribiremos F_n para referirnos al álgebra libre en un generador, x_n, en la variedad $\mathbb{V}(H_n, S)$.

Lema 4.5.5. *El cardinal del universo de F_n es*

$$|\mathrm{F}_n| = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!}. \tag{4.21}$$

Demostración. El caso $n = 2$ es inmediato. El caso $n \geq 3$ es consecuencia de un argumento de conteo directo basado en la descripción explícita de los elementos del álgebra libre en un generador de $\mathbb{V}(H_n, S)$ como las funciones $f : H_n \to H_n$ dadas previamente. $\square$

Notemos que para cada $n \geq 2$ tenemos que $\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n \in \mathbb{V}(H_{n+1}, S)$; por ende tenemos un único morfismo de S-álgebras $\alpha_{n+1} : \mathrm{F}_{n+1} \to \mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n$ tal que $\alpha_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$. También tenemos que $H_{n+1} \in \mathbb{V}(H_{n+1}, S)$, y en consecuencia un único morfismo de S-álgebras $\beta_{n+1} : \mathrm{F}_{n+1} \to H_{n+1}$ con $\beta_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Por la propiedad universal del producto en $\mathbb{V}(H_{n+1}, S)$, tenemos un único morfismo de S-álgebras δ haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{F}_{n+1} \arrow[dl, "\alpha_{n+1}"'] \arrow[dr, "\beta_{n+1}"] \arrow[dd, "\delta"] & \\
\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n & & H_{n+1} \\
 & (\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1} \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.22}$$

Como F_{n+1} y $(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1}$ tienen ambos finitos cardinal (y es el mismo, en virtud del Lema 4.5.5), para probar que hay un isomorfismo de S-álgebras entre ellos será suficiente ver que δ es una función suryectiva.

Lema 4.5.6. $(1, 0) \in \operatorname{im} \delta$.

Demostración. Por definición de δ,

$$\delta(x_{n+1}) = (\pi_1 \delta(x_{n+1}), \pi_2 \delta(x_{n+1})) = (\alpha_{n+1}(x_{n+1}), \beta_{n+1}(x_{n+1})) = (x_n, 0)$$

Consideremos el término de S-álgebras $\tau(x) = S(0) \to x$. Un cálculo directo nos muestra que

$$\tau^{\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n}(x_n) = 1, \tag{4.23}$$
$$\tau^{H_{n+1}}(0) = 0. \tag{4.24}$$

(la primer ecuación es consecuencia de que $S(0) \leq x_n$, y la segunda se deduce de la ecuación $S(0) \to 0 = 0$). Consideremos ahora el elemento $y_0 = \tau^{\mathrm{F}_{n+1}}(x_{n+1}) \in \mathrm{F}_{n+1}$. Por (4.23) y (4.24), este elemento es tal que

$$\delta(y_0) = \delta(\tau(x_{n+1})) = \tau^{(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1}}(x_n, 0) = (\tau^{\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n}(x_n), \tau^{H_{n+1}}(0)) = (1, 0).$$

$\square$

Lema 4.5.7. *El morfismo δ de* (4.22) *es suryectivo.*

Demostración. Consideremos $(x, m) \in (\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1}$. Como $(x, m) = (x, 0) \vee (0, m)$, consideraremos separadamente los casos $x = 0$ y $m = 0$.

Si $x = 0$, tomemos $y_1 = S^{(m)}(0) \wedge (x_{n+1} \to 0)$. Tenemos que

$$\delta(y_1) = S^{(m)}(0, 0) \wedge [(x_n, 0) \to (0, 0)] = S^{(m)}(0, 0) \wedge (x_n \to 0, 1) =$$
$$S^{(m)}(0, 0) \wedge (0, 1) = (0, S^{(m)}(0)) = (0, m).$$

Por otro lado, supongamos que $m = 0$ y $x \geq S(0)$. Como F_n es libre, existe un término t de S-álgebras tal que $x = t(x_n)$. Sea $\bar{t}$ el término que se obtiene reemplazando por $S(0)$ toda ocurrencia de 0 en t. Tenemos que $x = \bar{t}^{\,\mathbf{0}\oplus \mathrm{F}_n}(x_n)$. Tomando ahora $y_2 = \bar{t}(x_{n+1})$ e y_0 como en el Lema 4.5.6, tenemos que $u = y_0 \wedge y_2$ es tal que

$$\delta(u) = \delta(y_0) \wedge \delta(y_2) = (1,0) \wedge \delta(\bar{t}(x_{n+1})) = (1,0) \wedge \bar{t}(\delta(x_{n+1})) =$$

$$(1,0) \wedge \bar{t}(x_n, 0) = (1,0) \wedge (x, \bar{t}(0)) = (x,0).$$

Por esta razón, si $x = 0$ entonces $(x,m) = (0,m) = \delta(y_1)$. Si $x \neq 0$ (es decir si $x \leq S(0)$), dado que $(x,0) = \delta(u)$ se tiene que $(x,m) = (0,m) \vee (x,0) = \delta(y_1) \vee \delta(u) = \delta(y_1 \vee u)$. Por lo tanto hemos probado que la imagen de δ es $(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1}$. $\square$

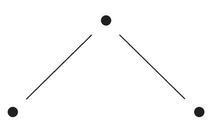
Como una consecuencia inmediata de los lemas 4.5.5 y 4.5.7, tenemos el siguiente

Teorema 4.5.8. *Para cada $n \geq 2$ existe un isomorfismo de S-álgebras entre F_{n+1} y $(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n) \times H_{n+1}$.*

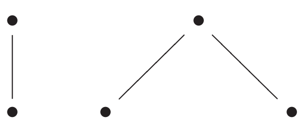
Hemos probado en este trabajo que existen dualidades entre las categorías asociadas a las variedades $\mathbb{V}(H_n, S)$, $n = 2, 3, \ldots$, y ciertas categorías de espacios de Esakia. Utilizando las "buenas" propiedades de esta dualidad categorial es posible explicitar construcciones para los espacios topológicos asociados.

La condición $S(0) = 1$ fuerza a una S-álgebra a ser un álgebra de Boole. Luego $\mathbb{V}(H_2, S) = $ Boole, y en consecuencia F_2 es el álgebra de Boole libre en un generador, cuyo espacio de Stone es

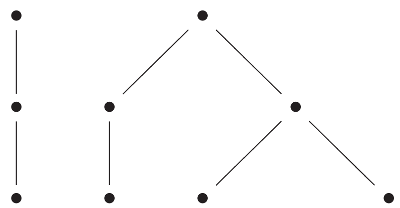
Hemos visto que $\mathrm{F}_3 \cong (\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_2) \times H_3$. Como $\mathbf{X}$ es parte de una dualidad categorial, envía productos en coproductos, y $\mathbf{X}(\mathrm{F}_3) \cong \mathbf{X}(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_2) \coprod \mathbf{X}(H_3)$, que es simplemente el coproducto de espacios topológicos. Por otro lado, $\mathbf{X}(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_2)$ puede ser visto como



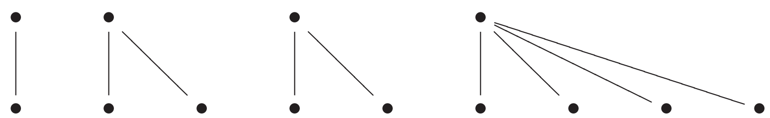
Luego, $\mathbf{X}(\mathrm{F}_3)$ es



Observemos que en general $\mathbf{X}(\mathbf{0} \oplus \mathrm{F}_n)$ se construye a partir de $\mathbf{X}(\mathrm{F}_n)$ agregando un nuevo punto sobre él. Luego, por ejemplo, tenemos que $\mathbf{X}(\mathrm{F}_4)$ es



Este procedimiento nos permite hacer una construcción efectiva para los espacios asociados a cada una de las álgebras libres en un generador de las variedades generadas por una cadena finita. De este modo, en virtud del Teorema 4.5.4 tenemos un modo de construir el álgebra libre en cualquier cantidad de generadores de las variedades generadas por una cadena finita. Por ejemplo, calculemos el álgebra libre en dos generadores de $\mathbb{V}(H_3, S)$. Llamemos ${}_2\mathrm{F}_3$ a dicha álgebra. Como ${}_2\mathrm{F}_3 \cong \mathrm{F}_3 \coprod \mathrm{F}_3$ y $\mathbf{X}$ es parte de una dualidad, $\mathbf{X}({}_2\mathrm{F}_3) \cong \mathbf{X}(\mathrm{F}_3) \times \mathbf{X}(\mathrm{F}_3)$. Un cálculo inmediato muestra que $\mathbf{X}({}_2\mathrm{F}_3)$ puede ser descripta como



Capítulo 5

Operadores frontales sobre retículos residuados

5.1. Preliminares

Las definiciones y propiedades que daremos a continuación fueron extraídas de [7] y [35].

Un *retículo residuado* (RL para abreviar) es una estructura algebraica

$$\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \cdot, e, \backslash, / \rangle$$

tal que $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ es un retículo, $\langle L, \cdot, e \rangle$ es un monoide, $\backslash$ y $/$ son operaciones binarias para las cuales las equivalencias

$$x \cdot y \leq z \text{ si y sólo si } x \leq z/y \text{ si y sólo si } y \leq x \backslash z$$

valen para cada $x, y, z \in L$. Las operaciones $\backslash$ y $/$ son llamadas el *residuo a derecha* y a *izquierda* de $\cdot$, respectivamente. Se sigue de la definición que $\cdot$ es *residuado* (es decir, residuado a derecha y a izquierda) si y sólo si preserva el orden en cada argumento, y para cada $x, y, z \in L$, la desigualdad $x \cdot y \leq z$ tiene un elemento máximo para x (llamado z/y) y para y (llamado $x \backslash z$). En particular, los residuos están unívocamente determinados por $\cdot$ y el orden. Si el retículo subyacente a un retículo residuado $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ dado tiene último elemento 1 y $1 = e$, entonces llamaremos a este retículo residuado *integral* . En lo que sigue para un retículo residuado y elementos x, y del mismo, escribiremos xy en lugar de $x.y$.

La clase de todos los retículos residuados será denotada como $\mathcal{RL}$. Es sencillo verificar que las equivalencias que definen al residuo pueden ser dadas por ecuaciones y que $\mathcal{RL}$ forma una variedad (Proposición 4.1 de [7]). Si L es un retículo residuado cuya estructura de monoide es commutativa, diremos que es un *retículo residuado conmutativo* (CRL para abreviar); la variedad de $CRLs$ será denotada como $\mathcal{CRL}$.

Proposición 5.1.1. *(Lema 3.2 de [7]) Sea $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \cdot, e, \backslash, / \rangle$ un RL. Para cada $x, y, z \in L$ valen las siguientes condiciones:*

1. $x(y \vee z) = xy \vee xz$, $(x \vee y)z = xz \vee yz$.

2. $(x \wedge y)/z = (x/z) \wedge (y/z)$, $x\backslash(y \wedge z) = (x\backslash y) \wedge (x\backslash z)$.

3. $x/(y \vee z) = (x/z) \wedge (x/y)$, $(x \vee y)\backslash z = (x\backslash z) \wedge (x\backslash y)$.

4. $(x/y)y \leq x$, $x(x\backslash y) \leq y$.

5. $x(y/z) \leq xy/z$, $(x\backslash y)z \leq x\backslash yz$.

6. $(x/y)(y/z) \leq x/z$, $(x\backslash y)(y\backslash z) \leq x\backslash z$.

7. $x/e = e\backslash x = x$.

8. $e \leq x/x$, $e \leq x\backslash x$.

Sea L un RL. Para cada $a \in L$, definimos $\rho_a(x) = (ax/a) \wedge e$ y $\lambda_a(x) = (a\backslash xa) \wedge e$. Luego definimos $P = \{\rho_a : a \in L\}$ and $\Lambda = \{\lambda_a : a \in L\}$.

Un subconjunto $X \subseteq L$ es llamado *convexo* si para cada $x, y \in X$ y $a \in L$, si $x \leq a \leq y$ entonces $a \in X$; X es llamado *normal* si X es cerrado con respecto a todo $\rho \in P$ y $\lambda \in \Lambda$. La colección de todas las subálgebras convexas y normales de un retículo residuado L será denotada como $CN(L)$.

Si H es una subálgebra convexa normal de un retículo residuado L, definimos $\theta_H = \{(x, y) \in L \times L : \exists h \in H, hx \leq y \text{ y } hy \leq x\}$. En particular, tenemos que $\theta_H = \{(x, y) \in L \times L : (x/y) \wedge e \in H \text{ y } (y/x) \wedge e \in H\} = \{(x, y) \in L \times L : (x\backslash y) \wedge e \in H \text{ y } (y\backslash x) \wedge e \in H\}$ es una congruencia sobre L ([7], Lema 4.11). Si θ es una congruencia de L y $x \in L$, escribiremos $\theta(x)$ para referirnos al conjunto $\{y \in L : (x, y) \in \theta\}$.

Teorema 5.1.2. *([7], Teo. 4.12) El retículo $CN(L)$ de subálgebras convexas y normales de un retículo residuado L es isomorfo a su retículo de congruencias $Con(L)$. El isomorfismo está dado por las funciones mutuamente inversas $H \mapsto \theta_H$ y $\theta \mapsto \theta(e)$.*

La subálgebra convexa normal generada por un subconjunto S en un retículo residuado L es denotada como $cn(S)$. Si $S = \{s\}$, escribiremos $cn(s)$ en lugar de $cn(\{s\})$. Para $u = (u_1, ..., u_{2n})$ (con $u_i \in L$ para $i = 1, ..., 2n$) usaremos la notación γ_u para denotar a $\lambda_{u_1} \circ \rho_{u_2} \circ \lambda_{u_3} \circ ... \circ \rho_{u_{2n}}$ ($\circ$ denota la composición usual de funciones). En el lema siguiente, escribiremos L^- para el *cono negativo* de L; i.e., $L^- = \{x \in L \mid x \leq e\}$.

Lema 5.1.3. *([35], Cor. 3.7) Sea L un RL y $r, s \in L^-$. Luego $r \in cn(s)$ si y sólo si existen m y n números naturales para los cuales existen $u_i \in L^{2n} (i = 1, ..., m)$ tales que*

$$\gamma_{u_1}(s)\gamma_{u_2}(s)....\gamma_{u_m}(s) \leq r.$$

Definimos los términos $d(x, y) = x\backslash y \wedge y\backslash x \wedge e$ y $\bar{d}(x, y) = x/y \wedge y/x \wedge e$. Los mismos serán útiles para la descripción de congruencias.

Lema 5.1.4. *([35], Lema 3.1) Sea L un RL. Para cada congruencia θ de L, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $x\theta y$.

(ii) $d(x, y)\theta e$.

(iii) $\bar{d}(x, y)\theta e$.

5.2. Funciones compatibles sobre retículos residuados

La lógica intuicionista fue introducida como un sistema de secuentes por Gentzen en 1934 (ver [27]). Las lógicas subestructurales se obtienen omitiendo del sistema algunas de las reglas subestructurales (ver [55]). Existen también algunas versiones axiomáticas de tales sistemas. Luego, la lógica clásica, la intuicionista, la multivaluada, la básica, la relevante y fragmentos de la lógica lineal pueden ser consideradas como lógicas subestructurales. Es bien conocido que, con una adecuada definición de operador de consecuencia, estas lógicas son algebrizables en el sentido de Blok-Pigozzi (ver [55], [5]). Luego, para cada lógica subestructural existe una semántica algebraica equivalente, la cual se corresponde con cierta subvariedad de la variedad de retículos residuados.

El problema de agregar conectivos para extender una lógica en un modo "natural" ha sido estudiado por un largo tiempo. Para el cálculo intuicionista el paper [11] de Caicedo y Cignoli enfatiza el aspecto algebraico del problema a través de la noción de función implícita compatible, que es la noción algebraica de lo que ellos denominan un conectivo definido axiomáticamente a partir de un sistema de axiomas. En general, diremos que un conectivo unario k es compatible si y sólo si $A \leftrightarrow B \vdash kA \leftrightarrow kB$, para todas las fórmulas A, B. Los resultados dados en [11] son extendidos por Caicedo para lógicas algebrizables en [12]. Sin embargo, no es claro qué puede ser considerado como una extensión natural o buena de la lógica subestructural en términos de conectivos buenos.

Haremos un estudio algebraico del problema antes mencionado, análogo al dado en [15] para el caso conmutativo, cuya idea básicamente se sigue de la caracterización dada en [11] para operadores compatibles en términos de la relación entre las congruencias y ciertas subálgebras particulares.

Surge naturalmente la pregunta acerca de la completud afín. La variedad de álgebras de Boole $\mathcal{B}$ es afín completa (ver [36]) y la variedad de álgebras de Heyting $\mathcal{H}$ no lo es, aunque sí es localmente afín completa (ver [11]). Más aún, la variedad $\mathcal{CRL}$ es localmente afín completa (ver [15]).

El objetivo de esta parte del trabajo es extender a retículos residuados resultados de [15]. Asimismo daremos una posible generalización en este contexto para los operadores frontales definidos sobre álgebras de Heyting.

Sean L un retículo residuado, y $f : L^k \to L$ una función. Daremos una condición suficiente y necesaria para la compatibilidad de f. Haciendo uso de dicha caracterización probaremos que la variedad de retículos residuados es localmente afín completa. Luego estudiaremos algunas funciones compatibles sobre retículos residuados las cuales generalizan a los operadores frontales. También daremos condiciones sobre dos funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ sobre un retículo residuado L las cuales implican que la función $x \mapsto min\{y \in L : P(x, y) \leq Q(x, y)\}$ (cuando está definida) es ecuacional y compatible. Finalmente discutiremos sobre la completud afín de ciertas subvariedades de retículos residuados equipadas con ciertas operaciones adicionales.

Los resultados de este capítulo fueron publicados en [18].

5.3. Caracterización de funciones compatibles

Si L es un RL y $x, y \in L$, el subconjunto $\theta_{(x,y)}$ de $L \times L$ denota la menor congruencia que contiene al elemento (x, y).

Lema 5.3.1. *Sea L un RL y $x, y \in L$. Luego $\theta_{(x,y)}(e) = cn[d(x,y)] = cn[\bar{d}(x,y)]$.*

Demostración. Se sigue del Lema 5.1.4 y del Teorema 5.1.2. En efecto, para $x, y \in L$ tenemos que

$$\theta_{(x,y)}(e) = \bigcap_{(x,y)\in\theta} \theta(e) = \bigcap_{d(x,y)\in\theta(e)} \theta(e) = cn[d(x,y)].$$

□

Lema 5.3.2. *Sean L un RL, $f : L \to L$ una función y $x, y \in L$.*
Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *Para cada $\theta \in Con(L)$, si $x\theta y$ entonces $(f(x), f(y)) \in \theta$.*

(ii) $d(f(x), f(y)) \in \theta_{(x,y)}(e)$.

(iii) $d(f(x), f(y)) \in cn[d(x,y)]$.

(iv) *Existen números naturales m, n para los cuales existen $u_i \in L^{2n}(i = 1, ..., m)$ tales que*

$$\gamma_{u_1}(d(x,y))\gamma_{u_2}(d(x,y))....\gamma_{u_m}(d(x,y)) \leq d(f(x), f(y)).$$

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii) es consecuencia del Lema 5.1.4. En efecto, supongamos que vale la condición (i). Como $(x, y) \in \theta_{(x,y)}$ tenemos que $(f(x), f(y)) \in \theta_{(x,y)}$, lo que a su vez implica la condición (ii). Recíprocamente, supongamos que vale la condición (ii) y sea $\theta \in Con(L)$ tal que $(x, y) \in \theta$, por lo cual $\theta_{(x,y)} \subseteq \theta$. Por otro lado nuestra hipótesis implica que $(f(x), f(y)) \in \theta_{(x,y)}$, y por ende $(f(x), f(y)) \in \theta$. La equivalencia entre (ii) y (iii) se sigue del Lema 5.3.1. Finalmente, la equivalencia entre (iii) y (iv) se deduce del Lema 5.1.3. □

Notemos que el lema previo sigue valiendo si escribimos $\overline{d}(x, y)$ en lugar de $d(x, y)$. Notemos también que como consecuencia inmediata del lema previo tenemos el siguiente

Teorema 5.3.3. *Sea L un RL y $f : L \to L$ una función.*
Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *f es compatible.*

(2) *Para cada $x, y \in L$ existen números naturales m, n para los cuales existen $u_i \in L^{2n}(i = 1, ..., m)$ tales que*

$$\gamma_{u_1}(d(x,y))\gamma_{u_2}(d(x,y))....\gamma_{u_m}(d(x,y)) \leq d(f(x), f(y)).$$

(3) *Para cada $x, y \in L$ existen números naturales m, n para los cuales existen $u_i \in L^{2n}(i = 1, ..., m)$ tales que*

$$\gamma_{u_1}(\bar{d}(x,y))\gamma_{u_2}(\bar{d}(x,y))....\gamma_{u_m}(\bar{d}(x,y)) \leq \bar{d}(f(x), f(y)).$$

Corolario 5.3.4. *Sean L un RL y $f : L \to L$ una función. Si para cada $x, y \in L$ existe un número natural m tal que $d(x,y)^m \leq d(f(x), f(y))$ ó $\bar{d}(x,y)^m \leq \bar{d}(f(x), f(y))$ entonces f es compatible.*

Demostración. Notemos que para cada $x \in L^-$ tenemos que $\lambda_e(x) = \rho_e(x) = x$. Consideremos $u_i = (e, e) \in L^2$, para $i = 1, ...m$. De este modo $\gamma_{u_i}(d(x,y)) = d(x,y)$ para $i = 1, ..., m$. Por lo tanto, utilizando la hipótesis y el Teorema 5.3.3 (tomando $n = 1$) se concluye que f es compatible. □

Sea L un RL y $f : L^k \to L$ una función. Para cada $x_i \in L$ $(i = 1, ..., k)$ definimos $\overline{x} = (x_1, ..., x_k)$ y $\overline{x}(i) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1} ..., x_k)$. Luego definimos las funciones $f_{\overline{x}(i)} : L \to L$ como $f_{\overline{x}(i)}(a) = f(x_1, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ..., x_k)$.

Lema 5.3.5. *Sea L un RL y $f : L^k \to L$ una función.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *f es compatible.*

(b) *Para cada $\overline{x} \in L^k$ las funciones $f_{\overline{x}(i)}$ son compatibles.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sean $x_i \in L$ (para $i = 1, ..., k$), $\theta \in Con(L)$ y $(a, b) \in \theta$. En particular, $(x_i, x_i) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., k$. Luego usando que f es compatible se concluye que $(f_{\overline{x}(i)}(a), f_{\overline{x}(i)}(b)) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., k$. De este modo las funciones $f_{\overline{x}(i)}$ son compatibles.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sea $\theta \in Con(L)$ y $x_i, y_i \in L$ tales que $(x_i, y_i) \in \theta$ para cada $i = 1, ..., k$. Usando el hecho de que $f_{\overline{x}(i)}$ es compatible se deduce que

$$f(x_1, ..., x_k)\theta f(y_1, x_2, ..., x_k)\theta f(y_1, y_2, x_3, ..., x_k)\theta ...\theta f(y_1, ..., y_k),$$

con lo cual f es compatible. □

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema 5.3.3 y del lema previo.

Corolario 5.3.6. *Sea L un RL y $f : L^k \to L$ una función.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *f es compatible.*

(ii) *Para cada $\overline{x} \in L^k$ las funciones $f_{\overline{x}(i)}$ satisfacen la condición* (2) *del Teorema 5.3.3.*

(iii) *Para cada $\overline{x} \in L^k$ las funciones $f_{\overline{x}(i)}$ satisfacen la condición* (3) *del Teorema 5.3.3.*

5.3.1. Completud local afín

En esta sección aplicaremos el Corolario 5.3.6 para demostrar la completud local afín de la variedad $\mathcal{RL}$. Si $a_1, ...a_k$ son elementos de un retículo residuado dado entonces escribiremos $\prod_{i=k}^{1} a_i$ para indicar al producto $a_k a_{k-1} ... a_1$.

Sea $f : L^k \to L$ una función compatible. Fijemos $\overline{x} \in L^k$. Para cada $i = 1, ...k$ y para cada $\overline{b} \in B$ (siendo B un subconjunto de L^k), definimos los siguientes elementos de L:

$$A(\overline{x}, b_i) = \gamma_{u_{1_{b_i}}}(d(b_i, x_i))\gamma_{u_{2_{b_i}}}(d(b_i, x_i))....\gamma_{u_{m_{b_i}}}(d(b_i, x_i)),$$

donde n_{b_i}, m_{b_i} y $u_{1_{b_i}}, ..., u_{m_{b_i}}$ son los números naturales y los elementos de $L^{2n_{b_i}}$ respectivamente asociados para cada (b_i, x_i) por el Corolario 5.3.6. Luego definimos $A(\overline{x}, \overline{b}) = \prod_{i=k}^{1} A(\overline{x}, b_i)$ y el conjunto $T_{\overline{x}} = \{f(\overline{b})A(\overline{x}, \overline{b}) : \overline{b} \in B\}$.

Teorema 5.3.7. *Sea $f : L^k \to L$ una función compatible, B un subconjunto de L^k y $\overline{x} \in B$. Luego $f(\overline{x}) = \bigvee T_{\overline{x}}$.*

Demostración. Sea $\overline{x} \in B$. Por el Corolario 5.3.6, para cada $\overline{b} \in B$ existen números naturales n_{b_i}, m_{b_i} para los cuales existen $u_{1_{b_i}}, ..., u_{m_{b_i}} \in L^{2n_{b_i}}$ tales que

$$A(\overline{x}, b_i) \leq d(f_{\overline{x}(i)}(b_i), f_{\overline{x}(i)}(x_i)). \tag{5.1}$$

Probaremos este teorema por inducción sobre k.

Consideremos $k = 1$. Usando la ecuación (5.1) para este caso se concluye que $f(b_1)A(x_1, b_1) \leq f(x_1)$. Luego $f(x_1)$ es una cota superior de T_{x_1}. Por otro lado, como $d(x_1, x_1) = e$ y $\gamma_u(e) = \rho_u(e) = e$ para cada $u \in L^{2n_{b_1}}$, tomando $b_1 = x_1$ se tiene que $f(x_1)A(x_1, x_1) = f(x_1)e = f(x_1) \in T_{x_1}$, con lo cual $f(x_1) = \bigvee T_{x_1}$.

Supongamos que el teorema vale para $k = n$. Vamos a probar que vale para el caso $k = n + 1$. Sea $f : L^{n+1} \to L$ una función compatible. Definimos

$$B((x_1, ..., x_n), (b_1, ..., b_n)) = \prod_{i=n}^{1} A(\overline{x}, b_i).$$

Usando la ecuación (5.1) para este caso tenemos que

$$f(\overline{b})A(\overline{x}, b_{n+1}) \leq f(b_1, ..., b_n, x_{n+1}). \tag{5.2}$$

Análogamente a lo hecho en la demostración del Lema 5.3.5, se prueba que la función $f : L^n \to L$ dada por $g(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n, x_{n+1})$ es compatible. Luego utilizando la ecuación (5.2), el hecho de que g es compatible y la hipótesis inductiva, se concluye que

$$f(\overline{b})A(\overline{x}, \overline{b}) = f(\overline{b})A(\overline{x}, b_{n+1})B((x_1, ..., x_n)), (b_1, ..., b_n)) \leq$$

$$f(b_1, ..., b_n, x_{n+1})B((x_1, ..., x_n), (b_1, ..., b_n)) \leq f(\overline{x}),$$

con lo cual $f(\overline{x})$ es una cota superior de $T_{\overline{x}}$. Por otro lado, como $d(x_i, x_i) = e$ y $\gamma_u(e) = \rho_u(e) = e$ para cada $u \in L^{2n_{b_i}}$, tomando $b_i = x_i$ (para $i = 1, ..., n$) se deduce que $f(\overline{x}) \in T_{\overline{x}}$, de lo cual se desprende lo que deseábamos probar. $\square$

Corolario 5.3.8. *La variedad $\mathcal{RL}$ es localmente afín completa.*

5.4. Generalización de operadores frontales en retículos residuados

Recordemos que $\mathcal{H}$ denota la variedad de álgebras de Heyting.

Sea L un retículo residuado y $\tau : L \to L$ una función. Diremos que τ es un T-*operador pre frontal a izquierda* (Tlp para abreviar) si existe un término binario T en el lenguaje de retículos residuados tal que para cada $H \in \mathcal{H}$ tenemos que $T^H(x, y) = y \to x$ y para cada $x, y \in L$ valen las siguientes ecuaciones:

(l1) $\tau(x) \leq y \vee T(x, y)$,

(l2) $e \leq \tau(e)$,

(l3) $(x\backslash y) \wedge e \leq \tau(x)\backslash\tau(y)$.

Si τ satisface la ecuación adicional

(f) $\tau(x) \wedge \tau(y) \leq \tau(x \wedge y)$,

diremos que τ es un *T-operador frontal a izquierda* (Tlf para abreviar).

Similarmente definimos *T-operador pre frontal a derecha* (Trp para abreviar) y *T-operador frontal a derecha* (Trf para abreviar). Por el Corolario 5.3.4 (tomando $m = 1$) tenemos que Tlp y Trp son funciones compatibles.

Sea L un CRL y $\tau : L \to L$ una función. Diremos que τ es un *T-operador pre frontal* (Tp para abreviar) si es un Tlp y diremos que τ es un *T-operador frontal* (Tf para abreviar) si es un Tlf.

Teorema 5.4.1. *Sea H un álgebra de Heyting y $\tau : H \to H$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *τ es un Tf.*

(b) *τ es un operador frontal*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. La condición $(f3)$ se sigue de $(l1)$. Por $(l2)$ y $(l3)$ tenemos que $x = 1 \to x \leq \tau(1) \to \tau(x) = 1 \to \tau(x) = \tau(x)$, con lo cual $x \leq \tau(x)$ (esta es la condición $(f2)$). Si $x \leq y$ entonces (por $(l3)$) tenemos que $1 = x \to y \leq \tau(x) \to \tau(y)$, y así $\tau(x) \leq \tau(y)$. Por esta razón τ es monótona. Luego por (f) se concluye la condición $(f1)$.

$(b) \Rightarrow (a)$. La condición $(l1)$ es consecuencia de $(f3)$ y la condición $(l2)$ se sigue de $(f2)$. Por $(f1)$, τ es monótona. Usando este hecho, $(f1)$ y $(f2)$ tenemos que $\tau(x) \wedge (x \to y) \leq \tau(x) \wedge \tau(x \to y) = \tau(x \wedge (x \to y)) \leq \tau(y)$, con lo cual $x \to y \leq \tau(x) \to \tau(y)$ (esta es la condición $(l3)$). La condición (f) se sigue de $(f1)$. $\square$

El resultado anterior nos dice que si un retículo residuado dado es un álgebra de Heyting entonces la definición de T-operador frontal a izquierda (o a derecha, en este caso ambas definiciones coinciden) equivale a la definición de operador frontal dada sobre álgebras de Heyting.

5.4.1. Una generalización para la función sucesor

Sea L un RL y fijemos un número natural n. Definimos las funciones $\overleftarrow{S}_n : L \to L$ y $\overrightarrow{S}_n : L \to L$ a través de las siguientes ecuaciones:

$(LS1n)$	$\overleftarrow{S}_n(x)^n\backslash x \leq \overleftarrow{S}_n(x)$.	$(RS1n)$	$x/\overrightarrow{S}_n(x)^n \leq \overrightarrow{S}_n(x)$.
$(LS2n)$	$\overleftarrow{S}_n(x) \leq y \vee (y^n\backslash x)$.	$(RS2n)$	$\overrightarrow{S}_n(x) \leq y \vee (x/y^n)$.

Proposición 5.4.2. *Sea L un RL. Luego las siguientes condiciones valen:*

(a) *$\overleftarrow{S}_n$ es un Tlp tomando $T(x, y) = y^n\backslash x$. Más aún, $\overleftarrow{S}_n(e) = e$.*

(b) *Si el retículo subyacente de L es distributivo entonces $\overleftarrow{S}_n$ es un Tlf.*

(c) $\overleftarrow{S}_n$ *está caracterizado como*

$$\overleftarrow{S}_n(x) = min\{y \in L : y^n\backslash x \leq y\}.$$

Demostración. (a) Las condiciones $(l1)$ y $(l2)$ son inmediatas. Luego usando el hecho previo se infiere que $e \leq \overleftarrow{S}_n(e)^n\backslash e \leq \overleftarrow{S}_n(e)$, con lo cual $\overleftarrow{S}_n(e) = e$. La condición $(l3)$ es equivalente a probar que $\overleftarrow{S}_n(x)((x\backslash y) \wedge e) \leq \overleftarrow{S}_n(y)$, y esto vale ya que

$$\overleftarrow{S}_n(x).((x\backslash y) \wedge e) \leq (\overleftarrow{S}_n(y) \vee (\overleftarrow{S}_n(y)^n\backslash x))((x\backslash y) \wedge e) =$$

$$(\overleftarrow{S}_n(y)((x\backslash y) \wedge e)) \vee (\overleftarrow{S}_n(y)^n\backslash x)((x\backslash y) \wedge e)) \leq \overleftarrow{S}_n(y) \vee (\overleftarrow{S}_n(y)^n\backslash y) = \overleftarrow{S}_n(y).$$

(b) Tenemos que

$$\overleftarrow{S}_n(x) \leq \overleftarrow{S}_n(x \wedge y) \vee (\overleftarrow{S}_n(x \wedge y)^n\backslash x)$$

y que

$$\overleftarrow{S}_n(y) \leq \overleftarrow{S}_n(x \wedge y) \vee (\overleftarrow{S}_n(x \wedge y)^n\backslash y)$$

Tomando el ínfimo en ambas desigualdades, utilizando que el retículo subyacente de L es distributivo, la propiedad $a\backslash(b \wedge c) = (a\backslash b) \wedge (a\backslash c)$ y la ecuación $(LS1n)$ se concluye que $\overleftarrow{S}_n(x) \wedge \overleftarrow{S}_n(y) \leq \overleftarrow{S}_n(x \wedge y)$.

En efecto,

$$\overleftarrow{S}_n(x) \wedge \overleftarrow{S}_n(y) \leq \overleftarrow{S}_n(x \wedge y) \vee ((\overleftarrow{S}_n(x \wedge y)^n\backslash y) \wedge (\overleftarrow{S}_n(y \wedge x)^n\backslash x)) =$$

$$\overleftarrow{S}_n(x \wedge y) \vee (\overleftarrow{S}_n(x \wedge y)^n\backslash(x \wedge y)) = \overleftarrow{S}_n(x \wedge y).$$

(c) Definamos $E_x = \{y \in L : y^n\backslash x \leq y\}$ y supongamos que $\overrightarrow{S}_n(x) = min\ E_x$. Probaremos las condiciones $(LS1n)$ y $(LS2n)$. Como $\overleftarrow{S}_n(x) \in E_x$ tenemos que vale $(LS1n)$. Por otro lado como $y \vee (y^n\backslash x) \in E_x$ vale la condición $(LS2n)$. En efecto, $(y \vee (y^n\backslash x))^n \geq y^n$, por lo cual

$$(y \vee (y^n\backslash x))^n\backslash x \leq y^n\backslash x \leq y \vee (y^n\backslash x).$$

La recíproca es consecuencia de un cálculo inmediato. □

Hay una propiedad similar para el caso $\overrightarrow{S_n}$.

Si L es un CRL, notemos que existe S_n (ver Sección 5 de [15]) si y sólo si existen $\overrightarrow{S}_n$ y $\overleftarrow{S}_n$, siendo $S_n = \overrightarrow{S}_n = \overleftarrow{S}_n$. Notemos que en el caso de estar en un álgebra de Heyting, todos estos operadores colapsan en el sucesor.

5.4.2. Una generalización para la función gamma

Sea L un RL con primer elemento, al que llamaremos 0, y fijemos un número natural n. Definimos las funciones $\overleftarrow{\gamma_n} : L \to L$ y $\overrightarrow{\gamma_n} : L \to L$ a través de las ecuaciones:

$(Lg1n)$	$\overleftarrow{\gamma_n}(0)^n\backslash 0 \leq \overleftarrow{\gamma_n}(0)$.	$(Rg1n)$	$0/\overrightarrow{\gamma_n}(0)^n \leq \overrightarrow{\gamma_n}(0)$.
$(Lg2n)$	$\overleftarrow{\gamma_n}(0) \leq y \vee (y^n\backslash 0)$.	$(Rg2n)$	$\overrightarrow{\gamma_n}(0) \leq y \vee (0/y^n)$.
$(Lg3n)$	$\overleftarrow{\gamma_n}(x) = x \vee \overleftarrow{\gamma_n}(0)$.	$(Rg3n)$	$\overrightarrow{\gamma_n}(x) = x \vee \overrightarrow{\gamma_n}(0)$.

Proposición 5.4.3. *Sean L un RL con primer elemento y n un número natural. Las siguientes condiciones valen:*

(a) $\overleftarrow{\gamma_n}$ *es un Tlp considerando $T(x,y) = x \vee (y^n \backslash x)$.*

(b) *Si el retículo subyacente de L es distributivo entonces $\overleftarrow{\gamma_n}$ es un Tlf. Más aún, en este caso $\overleftarrow{\gamma_n}$ preserva ínfimos finitos.*

(c) *La función $\overleftarrow{\gamma_n}$ está caracterizada como*

$$\overleftarrow{\gamma_n}(x) = min\{y \in L : (y^n \backslash 0) \vee x \leq y\}.$$

Demostración. (a) Es claro que $e \leq \overleftarrow{\gamma_n}(e)$. Además usando que $y^n \backslash 0 \leq y^n \backslash x$ se obtiene que $\overleftarrow{\gamma_n}(x) \leq x \vee y \vee (y^n \backslash x) = y \vee T(x,y)$. Finalmente tenemos que

$$\overleftarrow{\gamma_n}(x)((x\backslash y) \wedge e) = x((x\backslash y) \wedge e) \vee \overleftarrow{\gamma_n}(0)((x\backslash y) \wedge e) \leq y \vee \overleftarrow{\gamma_n}(0) = \overleftarrow{\gamma_n}(y).$$

(b) Se sigue de un cálculo directo.

(c) Para cada $x \in L$ definimos el conjunto $\gamma_x = \{y \in L : (y^n \backslash 0) \vee x \leq y\}$. Supongamos que existe la función $\overleftarrow{\gamma_n}$. Tenemos que $\overleftarrow{\gamma_n}(0) \leq \overleftarrow{\gamma_n}(x)$, con lo cual

$$(\overleftarrow{\gamma_n}(x)^n \backslash 0) \vee x \leq (\overleftarrow{\gamma_n}(0)^n \backslash 0) \vee x \leq \overleftarrow{\gamma_n}(0) \vee x = \overleftarrow{\gamma_n}(x).$$

Luego $\overleftarrow{\gamma_n}(x) \in \gamma_x$. Por otro lado, si $y \in \gamma_x$ entonces $\overleftarrow{\gamma_n}(x) \leq y$, por lo cual $\overleftarrow{\gamma_n}(x) = min\ \gamma_x$. Recíprocamente, supongamos que $\overleftarrow{\gamma_n}(x) = min\ \gamma_x$. Usando que $\overleftarrow{\gamma_n}(0) \in \gamma_0$, se concluye que $\overleftarrow{\gamma_n}(0)^n \backslash 0 \leq \overleftarrow{\gamma_n}(0)$. Como $y^n \leq (y \vee (y^n \backslash 0))^n$ tenemos que $y \vee (y^n \backslash 0) \in \gamma_0$. En efecto, $(y \vee (y^n \backslash 0))^n \backslash 0 \leq y^n \backslash 0 \leq y^n \backslash 0 \vee y$. Luego $\overleftarrow{\gamma_n}(0) \leq y \vee (y^n \backslash 0)$. Finalmente,

$$((x \vee \overleftarrow{\gamma_n}(0))^n \backslash 0) \vee x \leq (\overleftarrow{\gamma_n}(0)^n \backslash 0) \vee x \leq \overleftarrow{\gamma_n}(0) \vee x,$$

y así $\overleftarrow{\gamma_n}(0) \vee x \in \gamma_x$. Esto prueba que $\overleftarrow{\gamma_n}(x) \leq \gamma_n(0) \vee x$. Es inmediato probar que si $y \in \gamma_x$ entonces $\overleftarrow{\gamma_n}(0) \vee x \leq y$. Luego considerando $y = \overleftarrow{\gamma_n}(x)$ tenemos que $\gamma_n(0) \vee x \leq \overleftarrow{\gamma_n}(x)$. Por lo tanto $\overleftarrow{\gamma_n}(x) = \gamma_n(0) \vee x$. $\square$

Hay un resultado similar para el caso $\overrightarrow{\gamma_n}$.

Cuando L sea un CRL con primer elemento, escribiremos γ_n en lugar de $\overleftarrow{\gamma_n}$ ó $\overrightarrow{\gamma_n}$; para $n = 1$ escribiremos γ. Notemos que en el caso de que L sea un álgebra de Heyting todas estas funciones colapsan al operador γ.

5.4.3. Una generalización para el operador de Gabbay

Sea L un RL con primer elemento. Para cada $x \in L$ definimos $l(x) = x\backslash 0$ y $r(x) = 0/x$. En lo que sigue escribiremos rl en lugar de $r \circ l$ y lr en lugar de $l \circ r$.

Fijemos un número natural n. Definimos las funciones $\overleftarrow{G_n} : L \to L$ y $\overrightarrow{G_n} : L \to L$ a través de las siguientes ecuaciones:

$(LG1n)$ $(\overleftarrow{G_n}(x)^n \backslash x) \wedge rl(x) \leq \overleftarrow{G_n}(x)$. $(RG1n)$ $(x \backslash \overrightarrow{G_n}(x)^n) \wedge lr(x) \leq \overrightarrow{G_n}(x)$.

$(LG2n)$ $\overleftarrow{G_n}(x) \leq y \vee ((y^n \backslash x) \wedge rl(x))$. $(RG2n)$ $\overrightarrow{G_n}(x) \leq y \vee ((x/y^n) \wedge lr(x))$.

Lema 5.4.4. *Sea L un RL con primer elemento. Luego para cada $x, y \in L$ se verifican las siguientes condiciones:*

(a) $x\backslash y \leq l(x)/l(y)$.

(b) $x/y \leq r(x)\backslash r(y)$.

Demostración. Se sigue de los siguientes hechos: $x\backslash y \leq l(x)/l(y)$ si y sólo si $x.(x\backslash y)l(y) = 0$, y $x/y \leq r(x)\backslash r(y)$ si y sólo si $r(x)(x/y)y = 0$. $\square$

Observación 5.4.5. *Por el lema previo tenemos que si L es un RL con primer elemento entonces para cada $x, y \in L$ vale que $x\backslash y \leq rl(x)\backslash rl(y)$, $x/y \leq lr(x)/lr(y)$ y $e \leq rl(e)$.*

Proposición 5.4.6. *Sea L un RL con primer elemento. Fijemos un número natural n.*

Se verifican las siguientes condiciones:

(a) *$\overleftarrow{G_n}$ es un Tlp considerando $T(x, y) = y^n\backslash x$. Más aún, $\overleftarrow{G_n}(e) = e$.*

(b) *La función $\overleftarrow{G_n}$ está caracterizada como*

$$\overleftarrow{G_n}(x) = min\{y \in L : (y^n\backslash x) \wedge rl(x) \leq y\}.$$

Demostración. (a) Usando la Observación 5.4.5 se sigue que $\overleftarrow{G_n}(e) \leq e \vee ((e^n\backslash e) \wedge rl(e)) = e$, con lo cual $\overleftarrow{G_n}(e) \leq e$. Por esto (y por la Observación 5.4.5 nuevamente) tenemos que $e \leq \overleftarrow{G_n}(e)^n\backslash e$, con lo cual

$$e = e \wedge (\overleftarrow{G_n}(e)^n\backslash e) \leq (\overleftarrow{G_n}(e)^n\backslash e) \wedge rl(e) \leq \overleftarrow{G_n}(e).$$

Luego $\overleftarrow{G_n}(e) = e$. Es claro que $\overleftarrow{G_n}(x) \leq y \vee (y^n\backslash x)$. Finalmente usando la Observación 5.4.5 una vez más tenemos que

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{G_n}(x)((x\backslash y) \wedge e) \leq (\overleftarrow{G_n}(y) \vee ((\overleftarrow{G_n}(y)^n\backslash x) \wedge rl(x)))((x\backslash y) \wedge e) \leq \\
&\overleftarrow{G_n}(y) \vee ((\overleftarrow{G_n}(y)^n\backslash x) \wedge (x\backslash y)) \wedge (rl(x)((x\backslash y) \wedge e))) \leq \\
&\overleftarrow{G_n}(y) \vee ((\overleftarrow{G_n}(y)^n\backslash y) \wedge (rl(x)((x\backslash y) \wedge e))) \leq \\
&\overleftarrow{G_n}(y) \vee ((\overleftarrow{G_n}(y)^n\backslash y) \wedge rl(y)) = \overleftarrow{G_n}(y),
\end{aligned}$$

y por lo tanto $(x\backslash y) \wedge e \leq \overleftarrow{G_n}(x)\backslash\overleftarrow{G_n}(y)$.

(b) Para cada $x \in L$ definimos el conjunto $G_x = \{y \in L : (y^n\backslash x) \wedge rl(x) \leq y\}$. Supongamos que existe la función $\overleftarrow{G_n}$. La ecuación $(LG1n)$ implica que $\overleftarrow{G_n}(x) \in G_x$ y luego la ecuación $(LG2n)$ implica que $\overleftarrow{G_n}(x) = min\, G_x$. Recíprocamente, supongamos que $\overleftarrow{G_n}(x) = min\ G_x$. Usando que $\overleftarrow{G_n}(x) \in G_x$ se deduce la ecuación $(LG1n)$. Sea $z_{(x,y)} = y \vee ((y^n\backslash x) \wedge rl(x))$. Como $y \leq z_{(x,y)}$ tenemos que $(z_{(x,y)}^n\backslash x) \wedge rl(x) \leq (y^n\backslash x) \wedge rl(x) \leq z_{(x,y)}$, con lo cual $z_{(x,y)} \in G_x$. Por lo tanto $\overleftarrow{G_n}(x) \leq z_{(x,y)}$, que es la ecuación $(LG2n)$. $\square$

Hay un resultado similar para el caso $\overrightarrow{G_n}$.

Cuando L sea un CRL con primer elemento, escribiremos G_n en lugar de $\overleftarrow{G_n}$ ó $\overrightarrow{G_n}$; para $n = 1$ escribiremos G. Notemos que si L es un álgebra de Heyting entonces todas estas funciones colapsan a la función de Gabbay.

5.4.4. Algunos ejemplos

Ejemplo 5.4.7. *Sea L la cadena $\{0, a, b, 1\}$ con las siguientes operaciones:*

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
1	0	a	1	1

/	0	a	b	1
0	1	a	a	0
a	1	1	a	a
b	1	1	b	b
1	1	1	1	1

$\backslash$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

Luego $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, ., 1, \backslash, / \rangle$ es un RL.

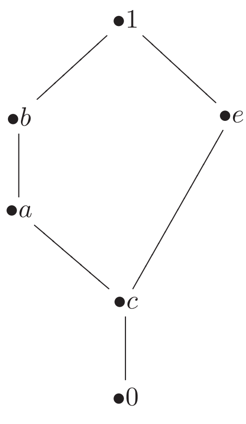
Tenemos las siguientes tablas (en el lado izquierdo $n \geq 1$; en el lado derecho $n \geq 2$):

x	$\overleftarrow{S}_n(x)$	$\overrightarrow{S}(x)$	$\overleftarrow{\gamma}_n(x)$	$\overrightarrow{\gamma}(x)$
0	b	a	b	a
a	b	b	b	a
b	1	b	b	b
1	1	1	1	1

x	$\overrightarrow{S}_n(x)$	$\overrightarrow{\gamma}_n(x)$
0	b	b
a	b	b
b	b	b
1	1	1

x	$rl(x)$	$lr(x)$	$\overleftarrow{G}_n(x)$	$\overrightarrow{G}_n(x)$
0	0	0	0	0
a	a	b	a	b
b	1	0	1	0
1	1	0	1	0

Ejemplo 5.4.8. *Sea L el siguiente retículo:*



Definimos las siguientes operaciones:

.	0	a	b	c	e	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	c	0	0	a	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	0	0	0	c	c
e	0	a	b	c	e	e
1	0	a	b	c	1	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	e	1
0	1	1	1	1	1	1
a	b	c	a	a	a	1
b	a	1	1	a	a	1
c	a	1	1	1	1	1
e	0	a	b	c	e	1
1	0	a	b	c	c	1

Luego $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, ., e, \rightarrow \rangle$ es un CRL. En este caso las operaciones S_1, S_2, γ_1, γ_2 y G_n no existen (para S_1, S_2 no podemos definir estas operaciones en 0, y para G_n no podemos definir estas operaciones en c). Para $n \geq 3$ tenemos que

x	$S_n(x)$	$\gamma_n(x)$
0	e	e
a	1	1
b	1	1
c	e	e
e	e	e
1	1	1

Ejemplo 5.4.9. *En el l-grupo $(\mathbb{Q}, \wedge, \vee, +, -, 0)$ (siendo $\mathbb{Q}$ el conjunto de números racionales) tenemos que $S_n(x) = \frac{x}{n+1}$, $\gamma_n(x) = x$ y que $G_n(x) = x \vee S_n(x)$. En la MV-álgebra $[0,1]$ tenemos que $S_n(x) = \frac{x+n}{n+1}$, $\gamma_n(x) = x \vee \frac{n}{n+1}$ y que $G_n(x) = x \vee S_n(x)$ (para la definición de l-grupo y de MV-álgebra ver [20]).*

5.5. Operaciones dadas por el operador mínimo

En [15] (secciones 4 y 5) para un retículo residuado conmutativo L y una función $P : L \times L \rightarrow L$ se da una condición que implica que la función dada por $x \mapsto min\{y \in L : P(x,y) \leq y\}$ es ecuacional y compatible (cuando dicha función puede ser definida). En particular, $P(x,y) = y^n \rightarrow x$, para un número natural n dado, define la familia S_n. Inspirados por [15] buscamos condiciones sobre funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ en un retículo residuado L que implican que la función dada por

$$x \mapsto min\{y \in L : P(x,y) \leq Q(x,y)\}$$

es ecuacional y compatible cuando está definida. Presentamos además una condición suficiente para ecuacionalidad y compatibilidad. Finalmente damos algunos ejemplos de estas funciones.

5.5.1. Ecuacionalidad y compatibilidad

Definición 5.5.1. Sean $P : L \times L \rightarrow L$ y $Q : L \times L \rightarrow L$ funciones definidas sobre un orden parcial con supremo $(L, \vee)$ tales que

1. si $y \geq z$ entonces $P(x,y) \leq P(x,z)$,

2. $P(x, P(x,y) \vee Q(x,y)) \leq Q(x, P(x,y) \vee Q(x,y))$,

3. $Q(x,y) \leq y$.

En este caso diremos que P es Q-pre-compatible.

Observación 5.5.2. (a) *Si P y Q son dos funciones binarias sobre un orden parcial con supremo $(L, \vee)$ tales que satisfacen las condiciones 1. y 3. de la Definición 5.5.1 con la condición adicional*

$$P(x, Q(x,y)) \leq Q(x, P(x,y) \vee Q(x,y)),$$

entonces P es Q-pre-compatible. En efecto, $P(x,y) \leq P(x,y) \vee Q(x,y)$, con lo cual aplicando la condición 1. se tiene que $P(x, P(x,y) \vee Q(x,y)) \leq P(x, Q(x,y)) \leq Q(x, P(x,y) \vee Q(x,y))$, que es la condición 2.

(b) *Si $Q(x,y) = y$ y vale la condición 1. entonces las condiciones 2. y 3. de la Definición 5.5.1 son trivialmente verdaderas. En efecto, dado que $P(x,y) \vee y \geq y$, por la condición 1. tenemos que*

$$P(x, P(x,y) \vee Q(x,y)) = P(x, P(x,y) \vee y) \leq P(x,y) \leq P(x,y) \vee y =$$

$$Q(x, P(x,y) \vee Q(x,y)),$$

que es la condición 2. El hecho de que la condición 3. es verdadera resulta inmediato.

Si P es Q-pre-compatible, denotaremos como $f_{(P,Q)} : L \to L$ a la función que a cada x en L le asigna el primer elemento del conjunto $E_{(P,Q)}(x)$, donde

$$E_{(P,Q)}(x) := \{y \in L : P(x,y) \leq Q(x,y)\}.$$

Luegon tenemos el siguiente

Lema 5.5.3. *Sean $P : L \times L \to L$ y $Q : L \times L \to L$ funciones binarias sobre un orden parcial con supremo $(L, \vee)$ tales que P es Q-pre-compatible.*

Luego las siguientes condiciones son equivalentes.

1. *Existe la función $f_{(P,Q)}$.*

2. *Existe una función $g : L \to L$ tal que*

(PQ1) $P(x, g(x)) \leq Q(x, g(x))$,

(PQ2) $g(x) \leq P(x,y) \vee Q(x,y)$.

Más aún, en este caso $g = f_{(P,Q)}$.

Demostración. Definimos $g : L \to L$ como $g(x) = f_{(P,Q)}(x)$. Luego $f_{(P,Q)}(x) \in E_{(P,Q)}(x)$, con lo cual $(PQ1)$ vale. Por 2. de la Definición 5.5.1 tenemos que $P(x, Q(x,y) \vee P(x,y)) \leq Q(x, Q(x,y) \vee P(x,y))$. En consecuencia $f_{(P,Q)}(x) \leq Q(x,y) \vee P(x,y)$, con lo cual tenemos la condición $(PQ2)$.

Recíprocamente, asumamos que g satisface las ecuaciones mencionadas en el enunciado del lema. La condición $(PQ1)$ nos dice que $g(x)$ pertenece al conjunto $E_{(P,Q)}(x)$. Por otro lado, sea $y \in E_{(P,Q)}(x)$. Luego $(PQ2)$ y 3. de la Definición 5.5.1 implican que $g(x) \leq P(x,y) \vee Q(x,y) = Q(x,y) \leq y$. Por ende $g(x)$ es el primer elemento de $E_{(P,Q)}(x)$. Por lo tanto $g = f_{(P,Q)}$. □

Ahora podemos presentar la condición suficiente para la compatibilidad.

Teorema 5.5.4. *Sea L un RL y $P : L \times L \to L$, $Q : L \times L \to L$, P una función Q-pre-compatible y $g : L \to L$ la función dada en el Lema 5.5.3.*

Si para cada $y \in L$ la función dada por $P(., g(y)) : L \to L$ es compatible entonces g es compatible.

Demostración. Sean $x, y \in L$. Definimos la función $F : L \to L$ dada por $F(z) = P(z, g(y))$; esta función es compatible por hipótesis. Luego por el Teorema 5.3.3 existen m, n números naturales para los cuales existen $u_i \in L^{2n} (i = 1, ..., m)$ tales que

$$\gamma_{u_1}(d(x,y))\gamma_{u_2}(d(x,y)) .... \gamma_{u_m}(d(x,y)) \leq d(F(x), F(y)).$$

Definimos $A(x,y) = \gamma_{u_1}(d(x,y))\gamma_{u_2}(d(x,y))....\gamma_{u_m}(d(x,y))$. Luego $F(x).A(x,y) \leq F(y)$. Por esta razón, $(PQ1)$, $(PQ2)$ y 3. de la Definición 5.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
&g(x)A(x,y) \leq P(x,g(y))A(x,y) \vee Q(x,g(y))A(x,y) \leq \\
&F(x)A(x,y) \vee g(y) \leq F(y) \vee g(y) = P(y,g(y)) \vee g(y) \leq \\
&Q(y,g(y)) \vee g(y) = g(y).
\end{aligned}$$

En consecuencia $g(x).A(x,y) \leq g(y)$, con lo cual $A(x,y) \leq g(x)\backslash g(y)$. Razonando análogamente y utilizando que $F(y).A(x,y) \leq F(x)$ se tiene que $A(x,y) \leq g(y)\backslash g(x)$. Por lo tanto $A(x,y) \leq d(g(x),g(y))$. Usando nuevamente el Teorema 5.3.3 se obtiene que g es compatible. $\square$

Observando la demostración del resultado previo se tiene el siguiente

Corolario 5.5.5. *Sea L un RL. Sean P, Q y g como en el Teorema 5.5.4. Si P es compatible en la primer variable entonces g es compatible.*

5.5.2. Algunos ejemplos

Daremos algunos ejemplos en donde P es Q-pre-compatible sobre retículos residuados, con P compatible en la primer variable.

Ejemplo 5.5.6. *Observemos que los ejemplos de Tlp y Trp dados antes se ajustan a este contexto también. Tomemos $Q(x,y) = y$ y consideremos un número natural n. Las funciones que consideraremos a continuación satisfacen la condición 1. de la Definición 5.5.1, razón por lo cual van a resultar ser Q-pre compatibles, en virtud de la Observación 5.5.2. Si $P_r(x,y) = x/y^n$ y $P_l(x,y) = y^n\backslash x$ entonces $g_r = \overrightarrow{S}_n$ y $g_l = \overleftarrow{S}_n$. Si $P_r(x,y) = (0/y^n) \vee x$ y $P_l(x,y) = x \vee (y^n\backslash 0)$ entonces $g_r = \overrightarrow{\gamma}_n$ y $g_l = \overleftarrow{\gamma}_n$. Finalmente, si $P_r(x,y) = (x/y^n) \wedge lr(x)$ y $P_l(x,y) = (y^n\backslash x) \wedge rl(x)$ entonces $g_r = \overrightarrow{G}_n$ y $g_l = \overleftarrow{G}_n$.*

Ejemplo 5.5.7. *Sean n, m números naturales. Consideremos*

$$Q(x,y) = y,$$

$$P_r(x,y) = x^m/y^n,$$

$$P_l(x,y) = y^n\backslash x^m.$$

La condición 1. de la Definición 5.5.1 es inmediata. Luego por la Observación 5.5.2 tenemos que P_r y P_l son Q-pre compatibles. Notemos que si $m = 1$ se sigue que $g_r = \overrightarrow{S}_n$ y $g_l = \overleftarrow{S}_n$.

(a) *Sean L el álgebra del Ejemplo 5.4.7, y $n = 2$. Luego tenemos que*

x	$g_l(x)$	$g_r(x)$
0	b	b
a	b	b
b	1	b
1	1	1

(b) *Consideremos el l-grupo* $(\mathbb{Q}, \wedge, \vee, +, -, 0)$. *Luego* $g(x) = \frac{n}{m+1}x$.

En los siguientes ejemplos consideraremos que el retículo subyacente de cada retículo residuado dado es distributivo.

Ejemplo 5.5.8. *Sea* n *un número natural. Consideremos*

$$Q(x, y) = y \wedge e,$$

$$P_r(x, y) = e \wedge (x/(y \wedge e)^n),$$
$$P_l(x, y) = e \wedge ((y \wedge e)^n \backslash x).$$

Las condiciones 1. y 3. de la Definición 5.5.2 son inmediatas. Por otro lado utilizando la distributividad del retículo subyacente al retículo residuado dado vemos que

$$P_r(x, Q(x, y)) = P_r(x, y) \leq P_r(x, y) \vee Q(x, y) = Q(x, P_r(x, y) \vee Q(x, y)).$$

Luego en virtud de la Observación 5.5.2 tenemos que P_r *es* Q*-pre compatible. Un razonamiento análogo prueba que* P_l *es* Q*- pre compatible.*

Notemos que si L *es un retículo residuado integral entonces* $g_r = \overrightarrow{S}_n$ *y* $g_l = \overleftarrow{S}_n$.

(a) *Consideremos la cadena* $L = \{0, a, e, 1\}$ *con las siguientes operaciones*

$.$	0	a	e	1
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
e	0	a	e	1
1	0	a	1	1

$\to$	0	a	e	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
e	0	a	e	1
1	0	a	a	1

Luego $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, ., e, \to \rangle$ *es un CRL.*

Para $n = 1$ *tenemos que*

x	gx
0	a
a	e
e	e
1	e

En este caso tenemos además que $S(0) = a$, $S(a) = e$, $S(e) = e$ *y* $S(1) = 1 \neq e = g(1)$. *Esto prueba que* g *y* S *no son iguales. Para* $n \geq 2$ *tenemos que* $g(x) = e$, *para cada* $x \in L$.

(b) *Consideremos el l-grupo* $(\mathbb{Q}, \wedge, \vee, +, -, 0)$. *Luego* $g(x) = (\frac{x}{n+1}) \wedge 0$.

Notemos que $y \in E_{(P,Q)}(x)$ *si y sólo si* $y \geq 0$ *o* $x - (ny \wedge 0) \leq y$. *Primero consideremos* $x \geq 0$. *Sea* $y \in E_{(P,Q)}(x)$. *Si* $y < 0$ *entonces* $x - ny \leq y$, *y así* $x \leq (n+1)y < 0$, *una contradicción. Por ende* $y \geq 0$, *con lo cual* $E_{(P,Q)}(x) \subseteq [0, \infty)$. *La inclusión recíproca resulta inmediata. Luego* $E_{(P,Q)}(x) = [0, \infty)$ *para el caso* $x \geq 0$. *Consideremos* $x < 0$. *Sea* $y \in E_{(P,Q)}(x)$. *Supongamos que* $(n+1)y < x$, *en particular* $y < 0$.

Luego $x - (ny \wedge 0) \leq y$, con lo cual $x \leq (n+1)y$, una contradicción. Por ende $E_{(P,Q)}(x) \subseteq [\frac{x}{n+1}, \infty)$ para el caso $x < 0$. Sea $y \geq \frac{x}{n+1}$, de lo cual se sigue que $x - ny \leq y$. Si $y \geq 0$ entonces $y \in E_{(P,Q)}(x)$. Si $y < 0$ entonces $x - (ny \wedge 0) = x - ny \leq y$, con lo cual $y \in E_{(P,Q)}(x)$. En consecuencia $[\frac{x}{n+1}, \infty) \subseteq E_{(P,Q)}(x)$ para el caso $x < 0$. Por lo tanto $E_{(P,Q)}(x) = [\frac{x}{n+1}, \infty)$ para el caso $x < 0$.

Ejemplo 5.5.9. *Sean n, m números naturales. Consideremos*

$$Q(x, y) = y \wedge x,$$

$$P_r(x, y) = x^n \wedge (x^m/(y \wedge x)),$$

$$P_l(x, y) = x^n \wedge ((y \wedge x)\backslash x^m).$$

Si L es integral entonces P_r es Q-pre compatible y también lo es P_l (notemos que si $n = m = 1$ entonces $g_r = g_l = Id$, la función identidad). En efecto, las condiciones 1. y 3. de la Definición 5.5.1 son inmediatas. Además tenemos que

$$P_r(x, Q(x, y)) = P_r(x, y). \tag{5.3}$$

Como L es integral, $x^n \leq x$. Utilizando el hecho previo junto con la distributividad del retículo subyacente de L se tiene que

$$Q(x, P_r(x, y) \vee Q(x, y)) = P_r(x, y) \vee Q(x, y). \tag{5.4}$$

Luego las ecuaciones (5.3) y (5.4) implican que P_r es Q-pre-compatible, en virtud de la Observación 5.5.2. Un cálculo análogo prueba que P_l es Q-pre compatible.

Sea L como en el Ejemplo 5.4.7, y $n, m \geq 2$. Tenemos que

x	$g_l(x)$	$g_r(x)$
0	0	0
a	0	0
b	b	b
1	1	1

Notemos que si P_r y P_l son las funciones que hemos considerado previamente con $n = 1$ entonces ambas funciones son Q-pre compatibles para todo retículo residuado.

5.6. Consideraciones finales

Nos preguntamos bajo qué condiciones dado un retículo residuado finito L y una familia $\{f_i\}_i$ de funciones ecuacionales y compatibles definidas sobre L se tiene que la variedad $\mathbb{V}(L, \{f_i\}_i)$ es afín completa.

Lema 5.6.1. *(Teorema 4.1.1 de [36]). Sea V una variedad que es congruencia distributiva, que está generada por un álgebra finita que no tiene subálgebras propias y tal que todos los miembros finitos de V resultan ser álgebras afín completas. Luego V es afín completa.*

Proposición 5.6.2. *Sea L un retículo residuado finito y $\{f_i\}_i$ una familia de funciones compatibles dadas por ecuaciones tales que $(L, \{f_i\}_i)$ no posee subálgebras propias. Luego la variedad $\mathbb{V}(L, \{f_i\}_i)$ es afín completa.*

Demostración. Sean B un álgebra finita de $\mathbb{V}(L, \{f_i\}_i)$ y $g : B^n \to B$ una función compatible. Si C es el álgebra reducto de B en la signatura de RL entonces $g : C^n \to C$ es compatible porque $Con(C) = Con(C, \{f_i\}_i)$. Luego por el Corolario 5.3.8 tenemos que g es un polinomio en la signatura de RL, con lo cual en particular es un polinomio en la signatura de RL con los símbolos de función $\{f_i\}_i$. Usando que $\mathbb{V}(L, \{f_i\}_i)$ es congruencia distributiva y el Lema 5.6.1 se concluye que la variedad $\mathbb{V}(L, \{f_i\}_i)$ es afín completa. □

Ejemplo 5.6.3. *Las siguientes variedades están bajo las hipótesis de la Proposición 5.6.2:*

a. $\mathbb{V}(H_n, S)$ *(ver también la demostración del Teorema 6.1 de [11]).*

b. $\mathbb{V}(L, 0, \overrightarrow{S})$, $\mathbb{V}(L, 0, \overrightarrow{\gamma})$, $\mathbb{V}(L, 0, \overrightarrow{G_n}, \overleftarrow{G_n})$, $\mathbb{V}(L, 0, \overleftarrow{G_n}, \overleftarrow{\gamma_n})$, *con* L, γ, $\overrightarrow{G_n}$ *y* $\overleftarrow{\gamma_n}$ *como en el Ejemplo 5.4.7.*

c. $\mathbb{V}(L, 0, g_l)$ *y* $\mathbb{V}(L, 0, g_r)$, *con* L, g_l *y* g_r *como en el Ejemplo 5.5.7.*

d. $\mathbb{V}(L, 0, S_n)$ *y* $\mathbb{V}(L, 0, \gamma_n)$ *con* $n \geq 3$ *y* L, S_n *y* γ_n *como en el Ejemplo 5.4.8.*

Bibliografía

[1] Balbes R. and Dwinger P., *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Miss, 1974.

[2] Bezhanishvili G. and Grigolia R. *Locally finite varieties of Heyting algebras*. Algebra Universalis, 54, 465-473, 2005.

[3] Bezhanishvili G., Gehrke, M., Mines, R. and Morandi, P. *Profinite completions and canonical extensions of Heyting algebras*. Order 23: 143-161, 2006.

[4] Bezhanishvili G. and Bezhanishvili N., *An Algebraic Approach to Canonical Formulas: Intuitionistic Case*. Review of Symbolic Logic 2 (3):517-549, 2009.

[5] Blok W.J. and Pigozzi D., *Algebraizable Logics*, Memoirs of the A.M.S. **77** Nro. 396, 1989.

[6] Blok W.J. and Pigozzi D., *Abstract Algebraic Logic*. SLALM, Bogotá, 279-293, 1995.

[7] Blount K. and Tsinakis C., *The Structure of Residuated Lattices*. Internat. J. Algebra Comput. 13(4), 437-461, 2003.

[8] Bourbaki N, *Théorie des ensembles*, ch. 3, 2ième édition (Hermann, Paris), 1963.

[9] Burris H. and Sankappanavar H.P, *A Course in Universal Algebra*. Springer Verlag, New York, 1981.

[10] Caicedo X., *Conectivos sobre espacios topológicos*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol 21, pp. 521-534, 1997.

[11] Caicedo X. and Cignoli R., *An algebraic approach to intuitionistic connectives*. Journal of Symbolic Logic, 66, Nro. 4, 1620-1636, 2001.

[12] Caicedo X., *Implicit connectives of algebraizable logics*, Studia Logica. Vol. 78, pp. 155-170, 2004.

[13] Caicedo X. *Implicit operations in MV-algebras and the connectives of Lukasiewicz logic*. Lecture Notes in Computer Science 4460, 50-68, 2007.

[14] Caicedo X., *Kripke semantics for Kuznetsov connective*. Personal comunication, 2008.

[15] Castiglioni J.L, Menni M. and Sagastume M, *Compatible operations on commutative residuated lattices*. JANCL, vol 18, 413-425, 2008.

[16] Castiglioni J.L, Sagastume M. and San Martín H.J, *On frontal Heyting algebras*. Reports on Mathematical Logic, vol 45, 201-224, 2010.

[17] Castiglioni J.L and San Martín H.J, *On the variety of Heyting algebras with successor generated by all finite chains*. Reports on Mathematical Logic, vol 45, 225-248, 2010.

[18] Castiglioni J.L and San Martín H.J, *Compatible operations on residuated lattices*, Studia Logica 98 (1-2):203-222, 2011.

[19] Castiglioni J.L and San Martín H.J, *On some classes of Heyting algebras with successor that have the amalgamation property*, Studia Logica (por aparecer en 2011).

[20] Cignoli R, D'Ottaviano I., Mundici D, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Trends in Logic-Studia Logica library.

[21] Dunn J.M. and Hardegree G.M, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. Oxford University Press, ISBN 0-19-853192-3, 2005.

[22] Esakia L., *Topological Kripke Models*. Soviet. Math. Dokl., 15:147-151, 1974.

[23] Esakia L., *The modalized Heyting calculus: a conservative modal extension of the Intuitionistic Logic*. Journal of Applied Non-Classical Logics. Vol 16-Nro.3-4, 349-366, 2006.

[24] Fraïssé R., *Sur léxtension aux relations de quelques propriétés des ordres*. Ann. Sci. École Norm. Sup., 71(3):363-388, 1954.

[25] Fitting M.C, *Intuitionistic Logic Model Theory and Forcing*. North-Holland, 1969.

[26] Gabbay D.M., *On some new intuitionistic propositional connectives*. I. Studia Logica. vol 36, 127-139, 1977.

[27] Gentzen G., Untersuchungen über das logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210, 405-413, 1934.

[28] Gehrke M. and Harding, *Bounded lattice expansions*. J. Algebra, 238(1):345-371, 2001.

[29] Gehrke M. and Jónsson B, *Bounded distributive lattices with operators*. Math. Jpn., 40(2):207-215, 1994.

[30] Gödel, K., *Ergebnisse eines -mathematischen Kolloquiums 4* (1931/32), 39-40 (1933).

[31] Hecht T. and Katrinák T, *Equational classes of relative Stone algebras*. Notre Dame Journal of Formal Logic, vol 13, 248-254, 1972.

[32] Hinman P., *Fundamentals of Mathematical Logic,* ISBN 1-56881-262-0 (2005).

[33] Hoogland Eva, *Definability and Interpolation. Model-theoretic investigations*, Institute for Logic, Language and Computation, 2001.

[34] Horn A., *Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra*. J. Symbolic Logic 34, 395-408, 1969.

[35] Jipsen P. and Tsinakis C., *A Survey of Residuated Lattices*. Ordered algebraic structures, 19-16, Dev. Math., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[36] Kaarli K. and Pixley A.F. *Polynomial completeness in algebraic systems*. Chapman and Hall/CRC, Boca Ratón, FL, 2001.

[37] Komori, Y. *The finite model property of the intermediate propositional logics on finite slices*. Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Sec. I 22, 117-120, 1975.

[38] Kuznetsov, A. *Some classification problems for superintuitionistic logics* (in Russian). Proceedings of the third USSR Conference on Mathematical Logic, Novosibirsk, 119-122, 1974.

[39] Kuznetsov A. V., Modal and Intensional Logics (Abstracts, Coordinated Conf.), Moscow (Russian), pp. 75-79, 1978.

[40] Kuznetsov A. V. and Muravitskii, Fourth AA-Union Conf. Math. Logic, Abstracts of Reports Shtiintsa, Kishinev (Russian), p.73, 1976.

[41] Kuznetsov , A. V. *On the Propositional Calculus of Intuitionistic Provability*, Soviet Math. Dokl. vol. 32, pp. 18-21, 1985.

[42] Kuznetsov, A.V., *On algebras of open sets*, in The 4th Tiraspol Symposium on General Topology and Its Applications, Abstracts, Shtiintsa, Kishinev, 1979 (in Russian).

[43] Maksimova L., *Craig´s theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-boolean algebras*. Translated from Algebra i Logika, Vol. 16, No. 6, pp. 643-681, 1977.

[44] Martínez G. and Priestley H., *On Priestley Spaces of Lattice-Ordered Algebraic Structures*. Order 15, 297-323, 1998.

[45] Monteiro, *Algebre du calcul propositionnel trivalent di Heyting*. Fundamenta Mathematicae, vol 74, pp. 99-109, 1972.

[46] Monteiro A., *Sur les algebres de Heyting symétriques*, Portugal. Math. 39, 1980.

[47] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, 5 (segunda edición). Springer-Verlag. ISBN 0-387-98403-8, 1998.

[48] Morandi P., *Dualities in lattice theory* (apuntes personales). Página web http://sierra.nmsu.edu/morandi/.

[49] Munkres, J.R, *Topología* (segunda edición). Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[50] Muravitsky A. Yu., Algebra i Logika 21 (1981), p.p. 165-182; English. transl. in Algebra and Logic 20, 1981.

[51] Muravitsky, A. Yu., *An algebraic proof of the separation property for an intuitionistic provability calculus*, Matem. Sbornik 131, 3 (173), 403-412, 1986. English translation: Math. SSSR Sbornik 59, 2, 397-406, 1988.

[52] Muravitskii, A. Yu., *Finite approximability of the the $I^{\triangle}$ calculus and the existence of an extension having no model.* Mathematics Institute and Computing Center, Academy of Sciences of the Moldavian SSR. Translated from Matematicheskie Zametki, vol. 29, Nro. 6, pp. 907-916, June, 1981. Original article submitted September 14, 1979.

[53] Muravitsky, A. Yu., *The contribution of A.V. Kuznetsov to the theory of modal systems and structures*, Logical and Logical Philosophy, vol 17, 41-58, 2008.

[54] Orlawska, E. and Rewitzki I., *Discrete Dualities for Heyting algebras with Operators.* Fundamenta Informaticae 81, 275-295, 2007.

[55] Ono, H. *Substructural Logics and Residuated Lattices- an Introduction*, Trends in Logic, **20**, 177-212, 2003.

[56] Priestley H.A., *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces.* Bull. London Math Soc. 2, 186-190, 1970.

[57] Priestley H.A., *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices.* Proceedings London Math Soc. 3(24), 507-530, 1972.

[58] Rasiowa H., *An algebraic approach to non-clasical logics*, North Holland, Amsterdam, 1974.

[59] Rasiowa H. and Sikorski R., *The mathematics of methamathematics*, Polish Scientific Publishers, Warsae, 1963. Tercera edición en 1970.

[60] Schreier O., *Die Untergruppen der freien Gruppen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5:161-183, 1927.

[61] Simonova, I.G., *On the interpolation property for extensions of proof-intuitionistic logic*, Mathematical Notes 47, 5-6, 483-490, 1990.

[62] Thomas T. *Finite limitations on Dummett´s LC*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol 3, 170-174, 1962.

[63] -, Current Problems in the Logic and Methodology of Science (Inst. Filos. Akad. Nauk Ukrain. SSR; M. V. Popovich et al., editors), Naukova Dumka, Kiev, pp. 1993-230 (Russian), 1980.

[64] -, Mat. Zametki 29 (1981), pp. 907-916, English transl. in Math. Notes 29, 1981.

[65] Yashin A.D., *New solutions to Novikov´s problem for intuitionistic connectives.* Journal of Logic and Computation. Vol 8, 637-664, 1998.

[66] Yriarte Vicente. Apuntes personales, http://ldc.usb.ve/ yriarte/.

Índice alfabético