ordini di grandezza delle molecole dei corpi e delle onde elettromagnetiche adoperate.

Infine, in un appendice, l'A. deduce in modo facile dalle equazioni di Hertz le formole della riflessione e della rifrazione sui dielettrici, spiegando l'apparente contraddizione tra i risultati di Fitgerald, J. G. Thomson, Rayleigh, Lorentz, ed Helmholtz.

A. Rovida.

DIE PRINZIPIEN DER MECHANIK IN NEUEM ZUSAMMENHANG DARGESTELLT

per A. HERTZ.

(Leipzig. I. A. Barth. 1894) [1]).

Conoscere le leggi della natura è essere in grado di dedurre dallo stato attuale delle cose lo stato loro per un istante qualunque. Ora la via che segue lo spirito umano per giungere a questa conoscenza è la seguente: noi ci formiamo degli oggetti esteriori delle imagini, e cerchiamo di formarcele in modo tale che le conseguenze logiche delle imagini siano alla loro volta imagini delle conseguenze naturali degli oggetti [2]).

Il solo tentare di raggiungere un simile risultato presuppone la nozione di un fatto che ci viene attestato dall'esperienza quotidiana, l'esistenza cioè di un certo accordo fra il modo di procedere della natura e il modo di procedere dello spirito umano. Constatiamo la cosa senza cercare di decidere se questa coincidenza sia data a priori o se invece non abbia l'uomo a poco a poco e quasi inconsciamente modellato la logica del suo intelletto sulla logica della natura.

La condizione imposta come necessaria alle imagini che noi ci formiamo degli oggetti esteriori non è sufficiente per determinarle in modo univoco; termine medio fra le imagini e la verificazione delle loro conseguenze è un sistema d'equazioni, ed è possibile giungere per diverse vie al medesimo sistema.

1) Il libro è citato nel seguito con la lettera P.
2) P. pag. 1.

Basterebbe ricordare l'esempio dell'ottica. Le teorie meccaniche e la teoria elettromagnetica rendono conto in modo ugualmente soddisfacente della maggior parte dei fenomeni luminosi. E la cosa si comprende facilmente, i simboli hanno cambiato significato ma le equazioni, nella maggior parte dei casi, sono rimaste le stesse: il vantaggio della teoria di Maxwell sulle altre si riduce a fornire un criterio sul valore numerico delle costanti.

L'Hertz ha svolto rigorosamente la questione di cui parlo: egli ha definito [1]) degli enti che chiama *modelli dinamici* di un sistema materiale, sono, per ogni sistema assegnato in numero infinito e godono delle proprietà seguenti:

1) il numero delle coordinate nel sistema proposto e nel modello è lo stesso;

2) se le coordinate del modello si fanno corrispondere a quelle del sistema in modo conveniente le equazioni dei vincoli sono le stesse nei due casi;

3) stabilita fra le coordinate la corrispondenza che s'è detto l'espressione che dà la grandezza di uno spostamento è la stessa per il sistema e per il suo modello.

Le teorie della fisica matematica sono in generale modelli dinamici delle cose, anzi, in un ordine di idee più largo si può dire che, ogni rappresentazione che noi ci formiamo dell'universo sensibile è un modello dinamico dell'universo medesimo. Come poi questi modelli siano costituiti, da un certo punto di vista, non importa. Bensì importano le equazioni.

Quello che è vero per le singole teorie della fisica matematica è vero anche per l'intero edifizio della meccanica razionale, che, in certo modo, le raccoglie tutte in sè.

Come quando si trattano i fenomeni elettromagnetici e luminosi ciò che vi è di essenziale sono le equazioni di Maxwell-Hertz, quando si parla di fatti meccanici in senso generalissimo l'essenziale si riduce pure ad un sistema di equazioni, alle equazioni di Lagrange.

1) P. pag. 197. Il concetto non è nuovo, almeno in casi particolari; basti accennare i modelli dell'etere costrutti da Fitzgerald e Ledge e quelli della legge dell'induzione elettrodinamica di Boltzmann ed Ebert.

*
* *

Dal riconoscere che le equazioni a cui una teoria conduce hanno un significato più largo e più profondo che le ipotesi da cui si sono ricavate, al respingere del tutto quelle prime ipotesi assumendo le equazioni, una volta trovate, come punto di partenza non vi è che un passo. E tale passo si è tentato di fare.

Se non erro fu il Lorenz il primo che espresse chiaramente quest'idea.

In un suo lavoro *Sulla teoria della luce* [1]), dopo aver ricavato da ipotesi convenienti le equazioni fondamentali dell'ottica egli osservava [2]): una volta trovate queste equazioni rimane, in sostanza, indifferente la strada per cui vi si è giunti; l'esattezza delle equazioni apparirà invece da ciò che esse saranno in grado di spiegare i fenomeni che presenta la luce...

Nello stesso ordine d'idee il Poincaré, esposte con molta chiarezza certe proprietà delle equazioni di Lagrange, ne conchiudeva [3]) che: se un fenomeno ammette una spiegazione meccanica completa ne ammette infinite che rendono conto ugualmente bene di tutte le particolarità rivelate dall'esperienza.

E soggiungeva: fra tutte le spiegazioni possibili come fare una scelta nella quale ci viene meno il soccorso della esperienza? verrà un giorno forse in cui i fisici si disinteresseranno di queste quistioni inaccessibili ai metodi positivi.

E non era lontano il giorno. Quasi contemporaneamente all'opera del Poincaré venne in luce la memoria d'Hertz *Sulle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica per i corpi in riposo* che è, si può dire, lo svolgimento di queste parole, che si leggono nella introduzione [4]): Una volta che si è giunti a trovare queste equazioni (le equazioni del campo elettroma-

1) *Pogg. Ann.* CXXI, 579, 1864.

2) Loc. cit. pag. 584. È interessante osservare come le equazioni date da Lorenz in questa memoria coincidono anche per la forma con quelle dell'elettrodinamica d'Hertz per il caso dei corpi dielettrici, isotropi, in quiete.

3) H. Poincaré, *Electricité et optique*, I, pag. IX e seg. Paris, G. Carrè, 1890.

4) *Untersuchungen*, pag. 214.

gnetico) pare che non sia più opportuno di continuare a dedurle da ipotesi sulla costituzione dell'etere o sulla natura delle forze agenti, come se queste fossero cose meglio note. Sarà anzi più conveniente di prendere le equazioni stesse come punto di partenza per ulteriori indagini sulla costituzione dell'etere.

Malgrado il rispetto dovuto ad autorità come quelle che ho addotto mi sembra che il porre ad effetto ciò che Lorenz e Poincaré ed Hertz si propongono conduca in ogni caso a difficoltà gravi.

Non parlo di considerazioni didattiche benchè ritenga che ad un principiante debbono parere ostiche assai delle ipotesi date sotto forma di equazioni differenziali; vi sono delle difficoltà logiche di ben altra gravità. E consistono nel determinare il senso delle quantità scalari e vettoriali che compaiono nelle equazioni assunte.

L'esposizione che Hertz ha dato dell'elettrodinamica di Maxwell offre un esempio caratteristico di questo. Hertz infatti definisce fin da principio il vettore di componenti X, Y, Z per mezzo delle azioni ponderomotrici che s'esercitano in un campo elettrico sopra un piccolo corpo recante una certa quantità d'elettricità; ma più tardi la quantità d'elettricità vien definita con le X, Y, Z.

Anche meno opportuno si deve rivelare il metodo di cui parlo quando lo scopo dell'esposizione sia di dare rilievo a concetti ancora informi e poco chiari; e la cosa s'intende senz'altro.

Sono probabilmente considerazioni di questa natura che hanno indotto Hertz ad abbandonare la via prima battuta o meglio che hanno determinato una fase nuova del suo pensiero.

Accingendosi a rifare l'edifizio della meccanica razionale, dal riconoscere l'importanza capitale delle equazioni di Lagrange egli non deduce punto la necessità di cominciare da queste; solo ritiene che ogni esposizione della meccanica che conduce alle equazioni stesse rigorosamente costituisce un'imagine accettabile (*ein zulässiges Bild*) dell'universo sensibile.

Forse anche pensava egli che, come ha affermato il Lodge in quel suo curioso libro sopra le teorie moderne dell'elettri-

cità, un modello può riuscire di aiuto grande per la scoperta di fatti e relazioni nuove; ed è interessante vedere come l'Helmholtz nella prefazione che ha scritto per l'opera d'Hertz riconosca appunto il grande valore *euristico* di essa.

***

Se nell'esporre la meccanica non si tengono a punto di partenza le equazioni di Lagrange bisognerà in ogni caso ammettere come già noti alcuni concetti ed introdurre alcune proposizioni fondamentali (Principi) che si considereranno come dati dell'esperienza; la scelta che si è fatta di quei primi concetti e di quelle prime proposizioni servirà di criterio per giudicare dell'opportunità del modo d'esposizione adottato.

E dei modi di esposizione già impiegati o che si potrebbero impiegare Hertz, nella prefazione al suo libro ne esamina tre.

Il primo è il metodo classico [1]) che segue nell'insegnare la scienza l'ordine in cui essa si è andata formando attraverso i secoli. Qui sono quattro i concetti che si assumono come dati: tempo, spazio, massa e forza e sono quattro pure le proposizioni in cui si espongono i risultati dell'esperienza: le tre leggi di Newton e il principio di d'Alembert.

Ora, per quel che riguarda la forma di questo metodo l'Hertz osserva anzitutto, acutamente, come sia molto difficile di esporre nel modo consueto gli elementi della meccanica ad ascoltatori che pensino con la loro testa senza provare un certo imbarazzo, e prosegue [2]): Io credo che Newton stesso lo abbia sentito questo imbarazzo quando definiva, un po' violentemente, la massa come prodotto del volume per la densità. Credo che Thomson e Tait abbiano avuto un'impressione analoga quando osservavano essere quella di Newton una definizione della densità piuttosto che della massa. Credo che anche Lagrange si sia trovato nella medesima condizione di spirito, che anch'egli abbia sentito il desiderio di andare innanzi a qualunque costo quando scriveva essere la forza una causa che imprime un

1) P. pag. 5 e sgg.
2) P. pag. 8.

moto ad un corpo *o che tende ad imprimerglielo*, certo non senza sentire tutta la *durezza* di questa sopradeterminazione.

Quanto alla sostanza poi è certo che il contenuto della meccanica ordinaria è più ampio di quello della natura, vi sono dei movimenti che la meccanica contempla e che pure non si possono realizzare con meccanismi; noi possiamo affermare dei moti e delle forze e dei vincoli naturali molto più di quello che le leggi assunte a fondamento non dicono [1]).

Queste osservazioni non valgono certo a menomare il valore, specialmente didattico, che la meccanica classica ha; bastano però per mostrare l'opportunità di cercare altra via.

Un secondo metodo possibile, benchè ancora non sia stato svolto, consisterebbe [2]) nell' introdurre fin da principio come quarto in luogo del concetto di forza il concetto d' energia. Qui bisognerebbe dare come un fatto sperimentale l' esistenza di due specie d' energia e la sua indistruttibilità. Finalmente, per raccogliere i quattro concetti fondamentali in una relazione, si dovrebbe scegliere come dato dell' esperienza esteriore uno dei principi integrali della meccanica comune. Il principio di Hamilton, per esempio.

Ma, senza parlare delle difficoltà di forma, che certo si incontrerebbero in questa come nelle altre esposizioni, si andrebbe incontro a gravi ostacoli di altra natura.

Quando dalle leggi fondamentali della meccanica ordinaria si vuol dedurre il principio di Hamilton bisogna fare delle ipotesi le quali, benchè generalissime restringono pure l' applicabilità del principio stesso. Bisogna ammettere per esempio che le equazioni che esprimono i vincoli siano integrabili, e pure vi sono dei casi che si possono realizzare con meccanismi, almeno per approssimazione, nei quali non è possibile integrare tutte le equazioni dei vincoli, dei casi cioè in cui si può delle variazioni delle coordinate affermare qualche cosa di più che delle coordinate medesime [3]).

1) P. pag. 12.
2) P. pag. 16 e seg.
3) P. pag. 23.

Segue subito di qui che se si assume il principio di Hamilton a rappresentare i risultati dell'esperienza certi moti naturali resteranno, per questo solo, esclusi dalla trattazione.

E non si guadagnerebbe nulla sostituendo al principio di Hamilton, a mo' d'esempio, quello della minima azione.

***

Un terzo metodo è quello che Hertz svolge nel suo libro e di questo dirò naturalmente un poco più a lungo. Solo vorrei prima di passare all'esame minuto dell'opera dare un cenno delle due idee principali che la informano tutta.

Hertz introduce da principio tre soli concetti; di tempo, cioè, di spazio e di massa, di un quarto concetto non si può a rigore fare a meno, ma vi si può supplire nel modo che vedremo più tardi.

Si tratta di trovare anzitutto una legge che, come espressione dei risultamenti sperimentali, colleghi fra loro i tre concetti assunti come noti.

E vi si può arrivare per questa via.

Prendiamo le equazioni di Lagrange (della seconda forma) determinanti il moto di un sistema soggetto a nessuna forza; si potranno scrivere:

$$(1) \qquad d\left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial dp_i} \cdot \frac{1}{dt}\right) - \frac{1}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial p_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots r$$

essendo

$$\overline{E} = \sum_1^r{}_h \sum_1^r{}_k a_{hk}\, dp_h\, dp_k ;$$

le a sono, come si sa, funzioni delle p.

Il principio delle forze vive fornisce la relazione

$$\frac{\overline{E}}{dt^2} = C ,$$

da cui si ottiene

$$dt = \sqrt{\frac{\overline{E}}{C}} .$$

Sostituiamo questo valore di dt nelle (1) esse prenderanno la forma:

$$d\left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial dp_i} \cdot \sqrt{\frac{C}{\overline{E}}}\right) - \sqrt{\frac{C}{\overline{E}}} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial p_i} = 0 .$$

o, se si vuole:

$$d\left(\frac{1}{2\sqrt{\overline{E}}} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial dp_i}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\overline{E}}} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial p_i} = 0 ,$$

o, ancora:

$$d\,\frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial dp_i} - \frac{\partial \sqrt{\overline{E}}}{\partial p_i} = 0 .$$

Sono queste le condizioni perchè si annulli la prima variazione dell'integrale

$$\int \sqrt{\overline{E}}$$

preso fra due limiti che non si fanno variare.

Se definiamo $\sqrt{\overline{E}}$ come un *elemento lineare* si vede subito che la *linea* percorsa dal sistema nel moto naturale sarà una *linea minima*. L'equazione delle forze vive dice di più che il sistema si muove sulla sua traiettoria di moto equabile.

Invece di $\sqrt{\overline{E}}$ si può manifestamente definire come elemento lineare il prodotto di $\sqrt{\overline{E}}$ per una quantità costante, è facile trovare un valore conveniente per questa costante. Poichè $\overline{E}$ è, a meno del divisore dt^2, la forza viva del sistema, se si passa a coordinate cartesiane sarà:

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_\nu (dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + dz_\nu^2)\, m_\nu ;$$

di qui s'ottiene subito

$$(*) \qquad \frac{2\overline{E}}{m} = \frac{\sum_1^n{}_\nu (dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + dz_\nu^2)\, m_\nu}{m}$$

indicando con m la massa totale del sistema. Ora è appunto la quantità $\sqrt{\frac{2\overline{E}}{m}}$ che conviene definire come elemento lineare.

nel caso in cui il sistema si riduce ad un punto esso diventa

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

che è l'espressione ordinaria dell'arco elementare descritto dal punto (x, y, z).

Il procedimento seguito da Hertz per ricavare le equazioni del moto si riduce in sostanza a questo: egli definisce l'espressione (*) come il quadrato dell'elemento lineare ed assume come un postulato dedotto dall'esperienza la proprietà che un sistema libero (almeno in un caso di cui si dirà in seguito) percorre di moto uniforme una linea minima.

È chiaro che le equazioni di Lagrange e il principio della conservazione dell'energia seguono immediatamente da queste premesse.

Il concetto della traiettoria di un sistema e tutti quelli che ad esso si riattaccano sono nuovi e proprii dell'Hertz, ma molte delle proprietà che si dimostrano per queste traiettorie e molti dei calcoli che occorrono per le dimostrazioni si incontrano già in due memorie non recenti di Beltrami [1]) e di Lipschitz [2]).

L'espressione (*) si può prendere a rappresentare il quadrato dell'elemento di curva percorso da un punto in un iperspazio e i lavori citati si occupano appunto di studiare le leggi del moto in uno spazio superiore [3]). Resta ad ogni modo ad Hertz il merito di aver trasportato quelle considerazioni dal punto nell'iperspazio al sistema nello spazio ordinario, sicchè quelle che nei predecessori potevano parere eleganti ma vane generalizzazioni di formole vengono, per dirla con una frase del Lipschitz, ad assumere un significato nel campo della meccanica *reale*.

Un altro punto di capitale importanza nell'esposizione di Hertz consiste nell'introduzione di un'ipotesi la quale conduce

1) *E. Beltrami.* Sulla teorica generale dei parametri differenziali (memorie di Bologna (2) VIII 549 1868).

2) *R. Lipschitz.* Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung (Crelle's Journal LXXIV. 116. 1872).

3) Il problema trattato da Lipschitz è anzi più generale di quello di cui si occupa Hertz. Il Lipschitz ha considerato come elemento lineare la radice p — esima di una forma di grado p dei differenziali delle coordinate.

a dare della forza un'interpretazione dinamica. Traduco letteralmente [1]):

« Se ci proponessimo di comprendere i moti dei corpi che « ne circondano e di ridurli a regole semplici e chiare e se in « questo tentativo volessimo tener conto solamente di ciò che « cade sotto i sensi la nostra fatica, almeno in generale riu- « scirebbe a vuoto.

« Noi ci dovremmo ben tosto convincere che il complesso « di ciò che possiamo vedere e toccare non forma punto un « universo regolare, un universo nel quale da condizioni uguali « scaturiscono sempre le stesse conseguenze. Nè dovremmo « conchiudere che vi sono nel mondo più cose di quelle che « sono immediatamente osservabili coi sensi.

« Volendo formarci dell'universo una rappresentazione com- « pleta e chiusa in sè e regolare ci è giuocoforza dietro le cose « che vediamo supporne altre invisibili, dobbiamo, dietro le « barriere che il senso ci impone, ricercare ancora degli *enti* « *nascosti*.

« Queste influenze nascoste ci si sono presentate nelle due « prime esposizioni della meccanica di cui abbiamo discorso; là « erano intese come cose di una natura affatto particolare, per « rappresentare la loro parte nell'universo s'erano creati i « concetti di forza e d'energia.

« Ma questo modo di procedere non è il solo possibile, « un'altra via ci si offre.

« Si può ben ammettere che qualche cosa di nascosto per « noi ci sia, ma si può negare che questo qualche cosa appar- « tenga ad una categoria particolare.

« È sempre libero a noi di supporre che quel substrato « ignoto non sia a sua volta che massa e movimento; massa e « movimento che differiscono dagli osservabili non in sè, ma « solo per rispetto ai mezzi di cui ci serviamo per le nostre « osservazioni.

« Questo modo di considerare le cose è appunto l'ipotesi « che noi vogliamo introdurre.

1) P. par. 30.

« Noi supporremo cioè che, oltre alle masse sensibili ne « esistano nell'universo altre, rette dalle medesime leggi, in « modo tale che il tutto guadagni in regolarità e in compren- « sibilità; vogliamo anzi supporre che la cosa si verifichi affatto « in generale, che non vi sia dei fenomeni altra causa, da « questa in fuori. Ciò che si chiama di solito coi nomi di forza « e d'energia non sarà per noi altro che un'azione di masse « e di moti, solo ammetteremo che non sempre queste masse « e questi moti siano di natura tale che possano cadere sotto « la percezione immediata dei sensi ».

Il concetto non è e non poteva essere completamente nuovo. Si può osservare infatti come tutta l'ammirabile teoria dinamica del campo elettromagnetico di Maxwell è condotta nell'ordine di idee svolte da Hertz nel passo che ho riportato: e di vero bisogna ammettere tacitamente l'ipotesi fondamentale di Hertz per poter adoperare le equazioni di Lagrange nel modo in cui Maxwell le adopera.

La nozione più chiara poi e il termine di moto nascosto è di Helmholtz. Ma veramente, almeno da principio, il vocabolo ha presso di Hertz un senso più largo che in quel primo autore.

Se fra le variabili generali che determinano il moto d'un sistema ve ne sono σ per cui le equazioni di Lagrange si riducono alla forma

$$d\frac{\partial \overline{E}}{\partial dp_h} = 0 \qquad h = 1 \ldots \sigma \tag{2}$$

è chiaro che si ottengono subito i σ integrali

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial dp_h} = C_h .$$

Sono queste equazioni lineari non omogenee nelle dp_h e permettono di determinarle univocamente in funzione di quelle altre variabili che non soddisfano a relazioni del tipo (2) e dei rispettivi differenziali.

Per questa proprietà i moti che corrispondono al variare di quelle p che soddisfano ad equazioni come le (2) furono da Helmholtz chiamati nascosti [1]).

1) Crelle's Journal. C. 137, 1887.

Hertz dà del termine « moto nascosto » un'altra definizione meno esplicita.

« Si dice, scrive egli [1]), che un sistema contiene delle « masse nascoste quando, dando i valori di tutte quelle coor- « dinate che sono accessibili all'osservazione, non si determina « ancora la posizione di tutte le masse del sistema ».

Quelle masse la cui posizione rimane così ignota si chiamano nascoste e i loro moti prendono il nome di moti nascosti e le coordinate quello di coordinate nascoste.

All'incontro le altre masse del sistema si diranno visibili, i loro moti moti visibili e le coordinate coordinate visibili.

I moti che rientrano in sè, vale a dire i moti ciclici, sono spesso nascosti, poichè essi da soli non producono alterazioni nella distribuzione delle masse, cioè nell'aspetto dell'universo esteriore.

Reciprocamente i moti che rimangono nascosti sono quasi sempre ciclici, poichè se non lo fossero avrebbero presto o tardi per conseguenza un'alterazione nella distribuzione delle masse del sistema che si considera.

Ma anche i moti ciclici possono diventare visibili se ci si porge un mezzo di agire sopra le coordinate cicliche e di variare ad arbitrio le intensità.

Questo caso è escluso se il sistema ciclico è, a priori, sottratto all'azione di cause esteriori, ciò si verifica se il sistema è adiabatico vale a dire se è tale che sulle coordinate cicliche non possa agire alcuna forza [2]).

Conviene dunque considerare i moti nascosti come moti di sistemi ciclici adiabatici, e così si ricade nella definizione di Helmholtz.

*
* *

Nella divisione del suo libro Hertz ha seguito la consuetudine, vi sono infatti due parti la prima delle quali è dedicata alla geometria ed alla cinematica dei sistemi materiali, la

1) P. pag. 252.
2) P. pag. 254.

seconda alla dinamica. La statica è ridotta ad un capitolo di dinamica.

Però la cinematica di Hertz è più larga della cinematica ordinaria; egli vi ha introdotto infatti la nozione di massa la quale, secondo lui, si può stabilire indipendentemente da ogni esperienza.

Una particella materiale è per lui [1]) « una caratteristica « per mezzo della quale ad un punto dato nello spazio in un « certo istante si fa corrispondere in ogni istante un punto « univocamente determinato ».

Questa definizione della massa e i due concetti di tempo e di spazio che si ammettono come dati della considerazione interiore *(die innere Anschauung)* bastano per trattare la prima parte della meccanica.

È notevole che fin da principio viene introdotta la nozione di sistema, e non si tratta a parte del punto materiale. Hertz ne dà la ragione osservando [2]) che, in realtà, l'esperienza ci pone in rapporto con sistemi e non con punti isolati, la meccanica del sistema ha dunque un interesse più grande che la meccanica del punto, e d'altra parte questa è compresa in quella come caso particolare.

E per trattare la meccanica dei sistemi Hertz definisce anzitutto lo *spostamento di un sistema* è [3]) la media quadratica degli spostamenti delle particelle materiali che lo compongono.

Ciò posto si prova facilmente che, se si trasporta un sistema da una prima posizione in una seconda, da questa in una terza e dalla terza daccapo nella prima la somma di due qualunque degli spostamenti subiti dal sistema è minore del terzo. Dunque con tre spostamenti che riconducono un sistema nella posizione iniziale si può sempre costruire un triangolo [4]).

Dei tre spostamenti che s'è detto due qualunque partono da una stessa posizione del sistema; si dice che questi due spo-

1) P. pag. 54.

2) P. pag. 37.

3) P. pag. 62. Per media quadratica di una serie di grandezze si intende la radice quadrata della media aritmetica dei loro quadrati.

È facile vedere come da questa definizione segua per l'elemento lineare l'espressione a cui s'è accennato più su.

4) P. pag. 63 e seg.

stamenti *concorrenti* hanno, in generale, una certa differenza di direzione, a misurare la quale si prende l'angolo che i due segmenti rappresentanti gli spostamenti che si considerano racchiudono nel triangolo dei tre spostamenti [1]).

Si dice che due spostamenti (non concorrenti) sono *paralleli* quando in essi gli spostamenti dei singoli punti sono paralleli e rispettivamente proporzionali; si chiama poi *angolo* di due spostamenti non concorrenti l'angolo che uno dei due fa con uno spostamento che ha comune con esso l'origine ed è parallelo all'altro [2]).

Un sistema si può trasportare da una prima ad una seconda posizione, in generale, in una infinità di modi. Si chiama *traiettoria* seguita dal sistema il complesso delle posizioni che esso occupa nel suo moto [3]).

Elemento di traiettoria è una porzione della traiettoria limitata da due posizioni infinitamente vicine del sistema. Un elemento di traiettoria è in realtà uno spostamento (infinitamente corto); come tale ha una lunghezza ed una direzione.

Arco di traiettoria compreso fra due posizioni qualunque è la somma delle lunghezze degli elementi di traiettoria che stanno fra quelle due posizioni [4]). Si chiama *curvatura* della traiettoria in una certa posizione il limite del rapporto fra la differenza di direzione e la distanza (contata sulla traiettoria) di due elementi che s'avvicinano indefinitamente a quella posizione [5]).

Si danno le *equazioni della traiettoria* di un sistema se si esprimono le coordinate del sistema in funzione di una variabile indipendente; in particolare può essere utile di scegliere come variabile l'arco della traiettoria stessa [6]).

Fissate le nozioni che s'è detto è chiaro che, nel modo che si segue nell'ordinaria meccanica del punto, si potranno definire semplicemente la *velocità* del sistema sulla sua traiet-

1) P. pag. 64. Per questa definizione e per il teorema che conduce ad essa confronta: Beltrami *l. c.* pag. 559 e seg.

2) P. pag. 66.

3) P. pag. 83.

4) P. pag. 83.

5) P. pag. 84.

6) P. pag. 83. Confronta: Beltrami *l. c.* pag. 561.

toria e l'*energia* che il sistema possiede (energia cinetica della meccanica classica [1]).

Le coordinate di un sistema possono essere sottoposte a certe condizioni le quali a priori escludono dalla trattazione alcuni spostamenti; Hertz non si occupa che dei sistemi per i quali le condizioni si possono mettere sotto la forma di equazioni lineari omogenee fra i differenziali delle coordinate, a simili sistemi attribuisce in particolare il nome di *sistemi materiali* [2]).

Qui viene anche introdotta una nozione che è propria dell'Hertz e che si ravvisa nel seguito molto importante, quella cioè di sistema *olonomo* [3]); con questo termine si designa un sistema per il quale tutte le equazioni di condizione sono integrabili.

Esistendo equazioni di condizione segue subito che per un dato sistema non tutte le traiettorie pensabili sono possibili; fra le possibili ve n'ha alcune che godono di proprietà speciali, una è importantissima fra tutte.

Hertz chiama *elemento direttissimo* un elemento di traiettoria possibile la cui curvatura è minore che la curvatura di ogni altro elemento di traiettoria possibile avente la stessa origine e la stessa direzione [4]).

Traiettoria direttissima (geradeste Bahn) è una traiettoria di cui tutti gli elementi sono direttissimi [5]). Si prova che partendo da una data posizione in una certa direzione vi è sempre per un sistema assegnato una ed una sola traiettoria direttissima, è facile ricavarne le equazioni [6]).

Questo nelle linee generalissime il contenuto del primo libro.

***

Nel secondo libro che, come dissi, contiene la dinamica il tempo è definito per mezzo del cronometro, la massa per mez-

1) P. pag. 144 e 150.
2) P. pag. 90 e seg.
3) P. pag. 91, 95 e seg.
4) P. pag. 100.
5) P. pag. 101.
6) P. pag. 105.

zo della bilancia, lo spazio è come prima quello euclideo. L'A. si riserva di introdurre a suo luogo l'ipotesi delle masse nascoste.

Qui è necessario ricorrere all'esperienza per ricavarne una legge che leghi fra loro i tre concetti fondamentali. Hertz propone la legge seguente: « *Ogni sistema libero o rimane in quiete o si muove di moto uniforme in una traiettoria direttissima* » [1]).

Questa legge e le equazioni già trovate della traiettoria direttissima permettono di ottenere senz'altro le equazioni del moto; si trovano le equazioni di Lagrange [2]).

Se un sistema materiale libero si considera come risultante da due riuniti in qualche modo fra loro, si vedrà che in generale nessuno dei due sistemi componenti segue la sua traiettoria direttissima, mentre la segue il sistema risultante. Vuol dire che, appunto in virtù della legge fondamentale, il moto di uno dei sistemi componenti è alterato per la presenza dell'altro; si suol esprimere questo fatto *dicendo* che due sistemi così accoppiati esercitano uno sull'altro delle *forze*. Di queste si può dare una definizione analitica conveniente.

È chiaro che, introdotta a questo modo, la forza non è più che un artificio di calcolo, una quantità ausiliare le cui proprietà sono immediatamente in nostro potere [3]).

Hertz deduce con facilità dalla sua definizione le proposizioni che si danno ordinariamente per precisare la nozione della forza; per esempio le equazioni di Mac Laurin [4]), la legge di Newton dell'uguaglianza fra azione e reazione [5]).

Dimostrate le equazioni di Lagrange e introdotto il concetto di forza si passa allo studio dei sistemi ciclici e qui

1) P. pag. 162. " Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam „. Le equazioni di Lagrange che regolano il moto d'un sistema si possono mettere tutte sotto la forma (1) (confronta più su) solamente nel caso dei sistemi olonomi, per questi soli si può dire dunque che la traiettoria, quando il sistema è libero, è una linea minima. Hertz dimostra appunto che per un sistema olonomo la traiettoria direttissima è traiettoria minima; questo però non è vero in generale (P. pag. 116 e seg.).

2) P. pag. 180 e seg.

3) P. pag. 33.

4) P. pag. 220.

5) P. pag. 213.

l'esposizione di Hertz si avvicina molto a quella ben nota di Helmholtz; sono considerati in particolare i sistemi ciclici adiabatici a cui ho già accennato più su, di questi si dimostra che possiedono sempre una funzione delle forze [1]). Si prova anche che la funzione delle forze è uguale alla diminuzione che l'energia (cinetica) del sistema ha subito a partire da un istante arbitrario [2]).

È a questo punto che, nel modo che ho detto, Hertz introduce la nozione dei moti nascosti. E ristringe le sue considerazioni, come sappiamo, al caso in cui le masse nascoste costituiscono un sistema ciclico adiabatico. Ad un sistema così composto dà Hertz il nome di *conservativo*, un nome che è già nell'uso comune; e chiama energia *potenziale* del sistema conservativo l'energia (cinetica) del sistema delle masse nascoste [3]).

Dalle premesse seguono immediatamente le proprietà ben note dei sistemi conservativi. Perchè il principio della conservazione dell'energia, nella sua forma consueta, è una conseguenza immediata della legge fondamentale, ed è chiaro che le forze che per la presenza delle masse nascoste agiscono sulle coordinate visibili si otterranno derivando la funzione delle forze (dal sistema delle masse nascoste) senza che sia necessario aggiungere nulla circa i moti che queste masse compiono per loro conto [4]).

***

Nell'esporre succintamente il contenuto dei due libri della meccanica di Hertz ho evitato di parlare di un argomento che vi è anche trattato ma che non ha nesso necessario con il rimanente. Voglio dire dei capitoli che sono dedicati alla funzione caratteristica di Hamilton e al metodo che riconduce al ritrovamento di questa funzione lo studio dei problemi meccanici.

In alcune ricerche di geometria si presentano certe funzioni che godono delle proprietà della funzione caratteristica,

1) P. pag. 241.
2) P. pag. 241.
3) P. pag. 255 e seg.
4) P. pag. 259.

in particolare che soddisfano alla stessa equazione alle derivate parziali. I risultati a cui conduce la soluzione di questi problemi geometrici sono perfettamente paralleli ai risultati che s' ottengono risolvendo il problema della meccanica.

Nelle « Disquisitiones generales circa superficies curvas », Gauss ha dimostrato il teorema seguente [1]: Se nei diversi punti di una curva qualunque descritta sopra una superficie si conducono le linee minime ortogonali alla curva e sopra questa a partire dalla intersezione con la curva stessa e sempre dalla medesima banda si prendono dei tratti tutti uguali il luogo delle estremità è una curva che è pure ortogonale a tutte le linee minime.

Questo teorema è suscettibile di generalizzazione. Se con Hertz si chiama *superficie di posizioni* o semplicemente superficie [2]) il luogo delle posizioni di un sistema le cui coordinate soddisfano ad una determinata equazione (finita); se si dice che una traiettoria è ortogonale in una certa posizione ad una superficie quando è ortogonale a tutte le traiettorie che giacciono nella superficie e passano per quella posizione, si può enunciare la proposizione seguente [3]): Se in tutte le posizioni che contiene una superficie si conducono le traiettorie minime [4]) normali alla superficie, e sopra queste a partire dalla intersezione con la superficie stessa si prendono dei tratti tutti uguali il luogo della estremità è una superficie che è pure ortogonale a tutte le traiettorie minime.

Ora si dimostra che se R = cost. rappresenta la famiglia di superfici che si costruiscono nel modo ora detto, la funzione R soddisfa ad una certa equazione alle derivate parziali; è, per la forma, l' equazione ben nota della funzione caratteristica.

Reciprocamente ogni integrale completo della equazione alle derivate parziali, uguagliato ad una costante rappresenta una famiglia di superfici della natura che ho detto.

1) V. p. e. il *Darboux Théorie des Surfaces*. Lib. V, cap. IV, § 522.
2) P. pag. 120.
3) P. pag. 130.
4) Vale a dire le traiettorie direttissime se il sistema è olonomo.

Le funzioni R godono della proprietà notevole che le loro derivate parziali rispetto alle costanti arbitrarie non additive, uguagliate a nuove costanti danno le equazioni delle traiettorie ortogonali alle superfici R = cost., vale a dire delle linee minime [1]).

Si riconosce in questo enunciato la proprietà fondamentale della funzione caratteristica.

Se si rammenta che le linee minime sono (per i sistemi olonomi) le traiettorie naturali del moto, si vede subito che la funzione caratteristica deve avere una grande analogia di significato con le R. Ma, come si riconosce senz' altro, R è la lunghezza dell' arco percorso dal sistema a partire da una posizione assegnata o qualche cosa che, analiticamente, può tenerne le veci.

Non credo sia il caso di dire qui come si possa precisare meglio la relazione che corre fra la funzione caratteristica e l' arco di traiettoria minima e come l' una si possa esprimere per mezzo dell' altro; per questo mi è giuocoforza rimandare al libro di Hertz [2]).

***

Ho cercato in quello che precede di dare un' idea del contenuto di quest' opera postuma dell' Hertz e vi sarò riuscito probabilmente solo in parte. Il libro ha altri pregi che non

1) P. pag 134.

2) P. pag. 193. È questa forse la parte meno originale dell' opera di Hertz; molte dell' idee e dei calcoli che vi si incontrano sono già nelle memorie citate del Beltrami e del Lipschitz, nella prima in ispecie.

Così per esempio nel lavoro di Beltrami a pag. 562 è data la generalizzazione del teorema di Gauss; a pag. 567 (eq. 12) si incontra l'equazione alle derivate parziali a cui soddisfa la funzione R (U di Beltrami); ivi ancora a pag. 568 e seg. è dimostrato per la R e le equazioni che si ottengono uguagliando a nuove costanti le sue derivate parziali rispetto alle costanti arbitrarie il teorema che corrisponde a quello della funzione caratteristica.

Il Lipschitz poi al luogo citato pag. 119 riproduce i risultati del Beltrami indicandone il significato meccanico. Ritorna sulle stesse cose nel modo più esplicito a pag. 129 e seguenti.

Si noti anche che di alcune delle proposizioni dimostrate nel capitolo 6 del primo libro dell' opera di Hertz non si trova fatto uso nel seguito quando si viene a trattare di proposito della funzione caratteristica e della funzione principale. Questa è forse una delle parti che avrebbero subito ulteriori modificazioni se l' autore avesse potuto curare egli stesso la stampa del suo libro.

sono quelli della sostanza, discorrere di questi mi pare che sarebbe più che inutile inopportuno; le cose belle vanno ammirate nell' originale.

Ed è bello veramente questo lavoro, bello per la poderosa unità, per la forma esteriore perfetta, bello anche per lo studio costante di mantenere la ricerca, per quanto è possibile vicina alle cose della natura.

È il libro questo di un grande matematico che fu grandissimo fisico ed ebbe anima d' artista [1]).

A. GARBASSO.

RISPOSTA ALLE OSSERVAZIONI DEL DOTTOR LUSSANA

« *A proposito della Nota del Sig. Déguisne* » [2]).

di C. DÉGUISNE.

Mi permetto, a proposito delle osservazioni del Dott. Lussana, pubblicate nel luglio 1894, nel *Nuovo Cimento*, di dichiarare che io non posso, in alcun modo, approvare l'interpretazione che il Dott. Lussana dà alle mie osservazioni.

Sembrami che il Dott. Lussana creda che io abbia voluto provargli che il potere conduttore elettrico delle soluzioni acquee, sia una funzione lineare della temperatura.

Che ciò non sia, è noto; dovrebbe però essere anche noto che, trattandosi di un intervallo di temperatura di 5° (da 1,5° a 6,5°) e di una determinazione di resistenze della precisione di circa $^1/_2$ per 1000, non si può, colla richiesta precisione, determinare il coefficente del termine al quadrato di una formola.

Ciò del resto non ha a che fare colle anomalie asserite dal Dott. Lussana.

Per le ragioni ora esposte io ho posto al calcolo, come

1) L' esecuzione materiale del libro è buona, la stampa molto accurata, solo qua e la è sfuggito qualche rarissimo errore di impressione: noto p. es. l' equazione 63 nella quale fu scambiato un segno, davanti al terzo termine del secondo membro si deve porre il segno meno.

2) *Nuovo Cimento*, Serie 3, Vol. XXXVI, 1894.

fondamento, una dipendenza lineare, *dal che risulta un « errore » che non raggiunge mai* $^1/_{1000}$ *del valore.*

L'andamento regolare delle differenze il quale corrisponde alla *curvatura* delle curve (non ad un flesso come asserisce il Dott. Lussana) prova il noto fatto, da me sopra citato, che cioè l'aggiunta di un termine al quadrato, ancora meglio corrisponderebbe alle mie osservazioni.

Una tale differenza si mostrerà, con osservazioni di temperatura ugualmente prese, dovunque, nel medesimo intervallo di temperatura, per es. anche fra 10° e 15°, non solamente intorno a 4°, dove dovrebbe sussistere l'anomalia osservata dal Dott. Lussana. Per confermare l'osservazione del Dott. Lussana, le differenze dovrebbero raggiungere non $^1/_{1000}$ ma $^1/_{100}$ del potere conduttore, ed inoltre, l'andamento delle medesime, come si vede dalle curve (Tav. III), dovrebbe essere ben diverso.

Come ordinate furono per le curve posti i poteri conduttori. Nelle curve del Dott. Lussana, le ordinate furono calcolate dalle resistenze da lui date e riferite ad una unità la quale, per temperature più elevate, porta le sue curve a coincidere colle mie. Se il potere conduttore delle sue soluzioni fosse stato un po' maggiore od un po' minore, se cioè la concentrazione della sua soluzione fosse stata un po' diversa dalla concentrazione della mia soluzione, in tal caso la direzione delle curve sarebbe stata di poco differente; giacchè per m=0,01 gr=Aeq. in litri, il coefficente della temperatura è quasi indipendente dalla concentrazione.

Le curve deviano sino a 10 unità, per KNO_3 sino a più di 30 unità, ossia a più di $^1/_{100}$ del potere conduttore, l'una dall'altra.

Questa divergenza dimostra chiaramente che qui si tratta, non di una differenza di calcolo, o del modo di intendere le osservazioni, ma bensì di una differenza delle osservazioni stesse. O le mie, o le osservazioni del Dott. Lussana sono false.

I punti riportati delle mie curve sono la media di 5 osservazioni, e per KNO_3 di 10, delle quali nessuna devia di $^1/_{1000}$ dalla curva.

Del resto anche il Prof. Kohlrausch ed il Dott. Heydweiler nella loro monografia « Ueber reines Wasser » [1]) rimarcano che

1) *Sitzungber. der Akademie de Wissensch. zu Berlin.* 1894, p. 295.

a 1° nulla di eccezionale si ha da osservare sul potere conduttore dell'acqua.

Quanto poi alla osservazione, che le mie resistenze siano state troppo piccole, devesi rispondere che per la determinazione del coefficente di temperatura, ciò che importa si è la precisione relativa della misura, non già la grandezza assoluta delle resistenze, sempre quando queste siano appropriate alle misure.

Strassburg. dall'Istituto Fisico.

RIVISTA

Comptes Rendus, Decembre 1894.

23. — J. VIOLLE. *Sulla temperatura dell'arco elettrico* (pagine 949-950). — L'A. ricorda che il Moissan ha indicato che la temperatura dell' arco sembra aumentare coll' intensità della corrente. Le sue esperienze che sono state spinte fino a 1000 e a 1200 ampères confermano il fatto, mentre provano che la temperatura del cratere positivo è la medesima a 10 come a 1200 ampères.

24. — D. HURMUZESCU. *Forza elettromotrice di calamitazione* (pp. 1006-1008) — L' A. ricorda che quando due elettrodi di uno stesso metallo magnetico, privo di forza coercitiva immersi in un liquido da cui vengono attaccati siano magnetizzati differentemente danno luogo ad una forza elettromotrice; che tutti gli sperimentatori che hanno adoperato campi magnetici assai intensi, hanno riconosciuto questa forza elettromotrice senza però essere d' accordo sul senso di essa. L' A. ha ripetuto queste ricerche con un dispositivo particolare ed ha determinato il senso della forza elettromotrice, e la curva rappresentativa della variazione del suo valore in funzione dell' intensità del campo magnetico, per il ferro, per il nichel e per il bismuto, trovando che per i due primi il metallo calamitato è positivo rispetto a quello non calamitato, e che l' opposto accade per il terzo.

25. 26. — VASCHY. *Sulla capacità di una linea percorsa da una corrente* (pp. 1198-1201). — L' A. dopo aver ricordato che il Potier ha fatto osservare [1]) come la capacità di una linea elettrica per unità di lunghezza quando i fili sono percorsi da una

1) *Comptes rendus*, Tomo CXVIII, p. 227, Gennaio 1894.