Dinámica de Conocimiento: Contracción Múltiple en Lenguajes Horn

Néstor Jorge Valdez[1] **Marcelo A. Falappa**[2]

[1] Departamento de Ciencias de la Computación, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Catamarca (UNCa)
Av. Belgrano 300 - San Fernando del Valle de Catamarca
Tel.: (03834)420900 / Cel: (03834) 154591186
e-mail: njvaldez@c.exactas.unca.edu.ar
[2] Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial
Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación, Universidad Nacional del Sur,
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Av. Alem 1253, (B8000CPB) Bahía Blanca, Argentina
Tel: (0291)4595135 / Fax: (0291)4595136
e-mail: mfalappa@cs.uns.edu.ar

Abstract. En los últimos años el estudio de la teoría de cambio de creencias dentro del marco AGM, ha motivado la necesidad de desarrollar modelos de la teoría de contracción que abarquen los casos de contracción simultánea para conjuntos de sentencias y no solamente para una única sentencia. Por ello, en este paper se presentan algunos modelos que resultan ser generalizaciones de funciones de contracción AGM, pero considerando el caso de las contracciones de un conjunto de sentencias, especialmente bajo el fragmento Horn de la lógica proposicional. Además, se consideró que las definiciones de los distintos modelos de contracción Horn obtenidas basadas en las contracciones múltiples, resulten tan plausible como una contracción AGM. También, se demuestra que las contracciones Horn obtenidas satisfacen este criterio establecido, como así también se proporcionan las pruebas que identifican los postulados que la caracterizan.

1. Introducción

1.1. Motivación

La teoría de cambio de creencias estudia la forma en que un agente cambia sus creencias cuando adquiere nueva información. Los cambios implican, a menudo, la eliminación de creencias existentes (operación de contracción) e incorporación de creencias adquiridas (operación de revisión) [8]. El modelo dominante de cambio de creencias es conocido como modelo AGM [1], el cual lleva ese nombre por las iniciales de sus tres creadores: Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors y David Makinson. El modelo AGM para cambio de creencias asume una lógica subyacente que es al menos tan expresiva como la lógica proposicional. Debido a este supuesto, esta teoría no puede ser aplicada a los sistemas con lógicas subyacentes que son menos expresivos que la lógica proposicional. Para este paper nos enfocamos en el estudio de las operaciones de cambio múltiple, i.e., procedimientos de cambio de creencias que se llevan a cabo simultaneamente para un conjunto de sentencias [11]. La investigación se centra principalmente en los modelos constructivos más conocidos de la contracción de creencias (*partial* *meet contractions* [1] y *kernel contraction* [15]) en el cual la lógica subyacente se basa en un fragmento de la lógica proposicional, que es la lógica Horn. Recordemos que una cláusula de Horn es una disyunción de literales que consisten de, a lo sumo, un literal positivo, e.g. $\neg p \vee \neg q \vee s$ y decimos que una lógica Horn está constituído por conjunciones de cláusulas Horn. La contracción Horn ha sido materia de estudio en [3, 4, 6], ello se debe a su amplio campo de aplicación tanto en la Inteligencia Artificial, Bases de Datos, así como en Ontologías en Lógicas Descriptivas [2].

1.2. Preliminares

Consideramos un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, sobre un conjunto de literales $\mathbf{P} = \{p, q, \ldots\}$, con semánticas de un modelo teórico estándar. Los caracteres griegos en minúsculas $\varphi, \psi, \ldots$ denotan fórmulas y los caracteres en mayúsculas $X, Y, \ldots$ denotan conjuntos de fórmulas. Una cláusula Horn es una cláusula con a lo sumo un literal positivo. Una fórmula Horn es una conjunción de cláusulas Horn. Una teoría Horn es un conjunto de fórmulas Horn. El lenguaje Horn $\mathcal{L}_H$ es una restricción de $\mathcal{L}$ para fórmulas Horn. La lógica Horn obtenida de $\mathcal{L}_H$ tiene la misma semántica que la lógica proposicional obtenida de $\mathcal{L}$, pero restringida para fórmulas Horn y sus derivables. La consecuencia lógica clásica y su equivalencia lógica se denota por $\vdash$ y $\equiv$ respectivamente. Cn es el operador de consecuencia tal que $Cn(X) = \{\varphi \mid X \vdash \varphi\}$. La consecuencia lógica bajo lógica Horn se denota por $\vdash_H$ y así el operador de consecuencia Cn_H bajo lógica Horn es tal que $Cn_H(X) = \{\varphi \mid X \vdash_H \varphi\}$. Los conjuntos clausurados se representarán mediante letras en negrita. Por ejemplo, si $\mathbf{K}$ es un conjunto de creencias entonces $\mathbf{K} = Cn(\mathbf{K})$.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta algunos conceptos y definiciones con respecto a una extensión del marco AGM y que ha motivado la necesidad de desarrollar modelos de contracciones que consideren el caso de contracción por un conjunto de sentencias (simultáneas) y no por una sola sentencia, en la sección 3 se recuerda brevemente algunos conceptos fundamentales y necesarios sobre cambio de creencias bajo lógica Horn que juegan un rol importante para el desarrollo y presentación de resultados en este trabajo de investigación, en la sección 4 se ofrecen parte de las contribuciones de este artículo donde se proporcionan una definición apropiada según las notaciones incorporadas hasta aquí, como asi tambien una representación de resultados del tipo de contracción múltiple denominada *package contraction* para lógicas Horn, por último en la sección 5 están las conclusiones y futuras investigaciones.

2. Contracción Múltiple: una extensión del modelo AGM

Contraer por un conjunto de sentencias en lugar de por una sola fue presentado por [10], quien uso el término contracción múltiple para designar este tipo de operaciones. Otros autores que también estudiaron la teoría de las operaciones de cambio múltiple fueron [11, 12, 16, 17]. Fermé, Saez y Sanz [9] ampliaron el campo de conocimiento presentando dos maneras de generalización de las funciones de contracción kernel para conjuntos de sentencias (no necesariamente clausurados), y sobre conjuntos de creencias (clausurados). Una contracción múltiple de un conjunto de creencias $\mathbf{K}$ por un conjunto de sentencias B significa la eliminación del conjunto B de $\mathbf{K}$. Podemos también interpretar esta idea de las siguientes maneras:

- La eliminación de todos los elementos de B de $\mathbf{K}$. Es decir, que el resultado de $K \div [B]$ de la contracción múltiple de K por B debe ser tal que $B \cap (\mathbf{K} \div [B]) = \varnothing$.
- La eliminación de al menos uno de los elementos de B de $\mathbf{K}$. Es decir, que el resultado de $\mathbf{K} \div \langle B \rangle$, de la contracción múltiple de $\mathbf{K}$ por B debe ser tal que $B \nsubseteq \mathbf{K} \div \langle B \rangle$.

Fuhrmann y Hansson [11], denominan a la primera clase de contracción múltiple descripta anteriormente descrita como *package contraction* y a las de segunda clase como *choice contraction.* En la misma investigación ellos presentan para conjuntos de creencias, dos operaciones de la primera clase y una de la segunda clase. Así para *package contraction* sugieren las operaciones *partial meet package contraction* y *subremainder contraction.*

Los potenciales resultados de la contracción por paquetes de una teoría $\mathbf{K}$ por un conjunto de sentencias, por ejemplo $\{\alpha, \beta\}$ pueden en general ser diferentes de cada conjunto, pudiendo tener como resultado cualquiera de las siguientes operaciones:

1. Contraer $\mathbf{K}$ por $\alpha \wedge \beta$,
2. Contraer $\mathbf{K}$ por $\alpha \vee \beta$,
3. Contraer primero por α y luego contraer el resultado de tal contracción por β, o al revés,
4. Intersectar los resultados de contraer $\mathbf{K}$ por α y de contraer $\mathbf{K}$ por β.

Algunas observaciones que se obtienen con respecto a las operaciones mencionadas anteriormente se detallan en [11]. Allí, se demuestra formalmente que el resultado de la partial meet package contraction de $\mathbf{K}$ por un conjunto B no resulta ser idéntica al conjunto que resulta de la intersección de los resultados de contraer $\mathbf{K}$ por cada uno de las sentencias en B. Aquí, consideraremos esencialmente las contracciones múltiples de las clases de *package* en el contexto de la modelación *partial meet* para conjuntos finitos.

A continuación presentamos un conjunto de postulados que constituyen las propiedades intuitivamente necesarias en una función de contracción múltiple, en [9, 11, 12, 13, 14] se pueden encontrar algunas interrelaciones entre sus postulados. Asumiremos que $\mathbf{K}$ es un conjunto de creencias y B, C son conjuntos arbitrarios de sentencias.

- **Package Closure:** $\mathbf{K} \div B$ es un conjunto de creencias (i.e. $\mathbf{K} \div B = Cn(\mathbf{K} \div B)$).
- **Package Inclusion:** $\mathbf{K} \div B \subseteq \mathbf{K}$.
- **Package Vacuity:** Si $B \cap \mathbf{K} = \varnothing$, entonces $\mathbf{K} \div B = \mathbf{K}$.
- **Package Success:** Si $B \cap Cn(\varnothing) = \varnothing$, entonces $B \cap \mathbf{K} \div B = \varnothing$.
- **Package Extensionality:** Si para cada sentencia α en B existe una sentencia β en C tal que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, y vice versa, entonces $\mathbf{K} \div B = \mathbf{K} \div C$.
- **Package Recovery:** $\mathbf{K} \subseteq Cn((\mathbf{K} \div B) \cup B)$.
- **Finite Package Recovery:** Si B es finito, entonces $\mathbf{K} \subseteq Cn((\mathbf{K} \div B) \cup B)$.
- **Package Uniformity:** Si cada subconjunto X de $\mathbf{K}$ implica algún elemento de B si y solamente si X implica algún elemento de C, entonces $\mathbf{K} \div B = \mathbf{K} \div C$.
- **Package Relevance:** Si $\beta \in \mathbf{K}$ y $B \notin \mathbf{K} \div B$, entonces existe un conjunto K' tal que $\mathbf{K} \div B \subseteq K' \subseteq \mathbf{K}$ y $B \cap Cn(K') = \varnothing$ pero $B \cap Cn(K' \cup \{\beta\}) \neq \varnothing$.
- **Package Core-Retainment:** Si $\beta \in \mathbf{K}$ y $B \notin \mathbf{K} \div B$, entonces existe un conjunto K', tal que $K' \subseteq \mathbf{K}$ y $B \cap Cn(K') = \varnothing$ pero $B \cap Cn(K' \cup \{\beta\}) \neq \varnothing$.

2.1. Partial Meet Multiple Contraction

Teniendo en mente los conceptos básicos de funciones partial meet contraction referido a una única sentencia [1], presentaremos los conceptos fundamentales de las *partial meet multiple contractions.*

Definición 1 [11, 12] *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de creencia,* B *un conjunto de sentencias y* $\mathbf{K} \perp B$ *el conjunto de restos de* K *con respecto a* B*. Una* package selection function *para* $\mathbf{K}$ *es una función* γ *tal que para todos los conjuntos de sentencias* B*:*

1. *Si* $\mathbf{K} \perp B$ *es no-vacío, entonces* $\gamma(\mathbf{K} \perp B)$ *es un subconjunto no vacío de* $\mathbf{K} \perp B$*, y*
2. *Si* $\mathbf{K} \perp B$ *es vacío, entonces* $\gamma(\mathbf{K} \perp B) = \{\mathbf{K}\}$*.*

Entonces, la definición de *partial meet multiple contraction* producto de la generalización de *partial meet contraction* para el caso de contracciones por conjuntos de sentencias es:

Definición 2 *(**Partial meet multiple contraction** [11, 12] Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de sentencias y sea* γ *una package selection function para* $\mathbf{K}$*. La partial meet multiple contraction de* $\mathbf{K}$ *generada por* γ *es la operación* $\div_\gamma$ *tal que para cualquier conjunto de sentencias de* B*:*

$$\mathbf{K} \div_\gamma B = \bigcap \gamma(\mathbf{K} \perp B)$$

Una multiple contraction function $\div$ *de* $\mathbf{K}$ *es una partial meet multiple contraction si y solamente si existe alguna package selection function* γ *tal que* $\mathbf{K} \div B = \mathbf{K} \div_\gamma B$ *para cualquier conjunto de sentencias* B*.*

Las definiciones de los dos casos limites particulares de *partial meet contractions* son:

Definición 3 *Sea* $\mathbf{K}$ *un conjunto de creencias.*

1. *Una multiple contraction function* $\div$ *en* $\mathbf{K}$ *es una maxichoice multiple contraction si y solamente si es una partial meet multiple contraction generado por un package selection function* γ *tal que para todos los conjuntos* B*, el conjunto* $\gamma(\mathbf{K} \perp B)$ *tiene exactamente un elemento.*
2. *La full meet multiple contraction en* $\mathbf{K}$ *es el partial meet multiple contraction* $\dot{\div}$ *que es generado por la package selection function* γ *tal que para todos los conjuntos* B*, si* $\mathbf{K} \perp B$ *es no-vacío, entonces* $\gamma(\mathbf{K} \perp B) = \mathbf{K} \perp B$*, i.e., la multiple full meet contraction* $\dot{\div}$ *es la operación de contracción en* $\mathbf{K}$ *definido por:*

$$\mathbf{K} \dot{\div} B = \begin{cases} \bigcap \mathbf{K} \perp B & \textit{si } B \bigcap Cn(\varnothing) = \varnothing \\ \mathbf{K} & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

para cualquier conjunto B*.*

2.2. Kernel Multiple Contraction

Se presenta a continuación la definición de *contracción múltiple kernel* que resulta ser una generalización de la operación de contracción kernel para una sola sentencia, pero que se refiere para contracciones por conjuntos de sentencias [1].

Definición 4 [9] *Sea* A *y* B *dos conjuntos de sentencias. El package kernel set de* A *con respecto a* B*, denotado* $A \perp\!\!\perp_P B$ *es el conjunto tal que* $X \in A \perp\!\!\perp_P B$ *si y solamente si:*

1. $X \subseteq A$*.*
2. $B \cap Cn(X) \neq \varnothing$*.*
3. *Si* $Y \subset X$ *entonces* $B \cap Cn(Y) = \varnothing$*.*

Esta definición es más general pues A no necesariamente es un conjunto de creencias. La definición de package incision function para un conjunto A, que resulta en una función que selecciona al menos un elemento de cada uno de los conjuntos en $A \perp\!\!\perp_P B$, para cualquier conjunto B.

[1]Fuhrmann y Hansson definen las multiple partial meet contraction sobre conjuntos de creencias o belief set. Ferme y otros definen las multiple kernel contraction sobre conjuntos de sentencias (conjuntos arbitrarios, no necesariamente clausurados)

Definición 5 [9] *Una función σ es una función de incisión para A si y solamente si, para cualquier B:*

1. $\sigma(A \perp\!\!\!\perp_P B) \subseteq \bigcup A \perp\!\!\!\perp_P B$.
2. *Si* $\emptyset \neq X \in A \perp\!\!\!\perp_P B$, *entonces* $X \cap \sigma(A \perp\!\!\!\perp_P B) \neq \emptyset$.

Definición 6 *(**Kernel Multiple Contraction** [9]) Sea σ una incision function para A. La kernel multiple contraction $\approx_\sigma$ para A basado en σ esta definida como sigue:*

$$A \approx_\sigma B = A \backslash \sigma(A \perp\!\!\!\perp_P B).$$

Una multiple contraction function $\div$ para A es una kernel multiple contraction si y solamente si existe alguna package incision fuction σ para A tal que $A \div B = A \approx_\sigma B$ para cualquier B.

3. Contracción de Creencias Horn

Delgrande presentó los primeros resultados sobre cambio de creencias Horn [6], investigando la analogía Horn entre *orderly maxichoice contraction* y las *orderly maxichoice Horn contraction*, las cuales están basadas en la noción de *remainder set*. En [6] presentan la definición bajo fragmento Horn. La representación de resultados para OMHC es la siguiente:

Teorema 1 [6] *Sea $\dot{-}$ una función de contracción Horn. Para cada conjunto de creencias Horn H, $\dot{-}$ es una* orderly maxichoice Horn contraction function *si y solo si satisface:*

$(H \dot{-} 1)$ $H \dot{-} \varphi = Cn_H(H \dot{-} \varphi)$ *(closure)*
$(H \dot{-} 2)$ $H \dot{-} \varphi \subseteq H$ *(inclusion)*
$(H \dot{-} 3)$ *Si* $\varphi \notin H$, *entonces* $H \dot{-} \varphi = H$ *(vacuity)*
$(H \dot{-} 4)$ *Si* $\nvdash \varphi$, *entonces* $\varphi \notin H \dot{-} \varphi$ *(success)*
$(H \dot{-} 6)$ *Si* $\varphi \equiv \psi$, *entonces* $H \dot{-} \varphi = H \dot{-} \psi$ *(extensionality)*
$(H \dot{-} f)$ *Si* $\vdash \varphi$, *entonces* $H \dot{-} \varphi = H$ *(failure)*
$(H \dot{-} ce)$ *Si* $\psi \notin H \dot{-} \varphi \wedge \psi$, *entonces* $H \dot{-} \varphi \wedge \psi = H \dot{-} \varphi$ *(conjunctive equality)*

Booth, Meyer et al. [3] presentaron la *infra Horn contraction* IHC como variante de PMC que satisface la así llamado *convexity property.* Ella establece que cualquier conjunto de creencias que es un subconjunto del conjunto de creencias que se obtiene por *maxichoice contraction* y un superconjunto que es obtenido por un *full meet contraction* puede ser obtenido por algunas PMCs.

Teorema 2 *Sea K un conjunto de creencias. Sea $\dot{-}_{mc}$ un* maxichoice contraction *para K y $\dot{-}_{fm}$ la* full meet contraction *para K. Para cada $\varphi \in \mathcal{L}$ y cada conjunto de creencia X tal que $K \dot{-}_{fm} \varphi \subseteq X \subseteq K \dot{-}_{mc} \varphi$, existe un* partial meet contraction $\dot{-}_{pm}$ *para K tal que $K \dot{-}_{pm} \varphi = X$.*

En [5] se define la *infra contraction* $\dot{-}$ para K. Para la construcción de una *infra Horn contraction* el interés es preservar la propiedad de convexidad para poder dar todas las contracciones Horn apropiadas. Para la versión Horn las adaptaciones de las definiciones expresadas anteriormente para una infra contraction son las siguientes:

Definición 7 [5] *Sea H un conjunto de creencias Horn y φ una fórmula. El conjunto de* infra remainder sets *de H con respecto a φ, denotado como $H \downarrow_i \varphi$, es tal que $X \in H \downarrow_i \varphi$ si y solo si existe un $Y \in H \downarrow_m \varphi$, siendo $Y \in H \downarrow_m \varphi$ el conjunto de* maxichoice remainder sets, *tal que*

$$X = Cn(X) \text{ y } (\bigcap H \downarrow_m \varphi) \subseteq X \subseteq Y.$$

Definición 8 [5] *Sea H un conjunto de creencias Horn y τ una* infra selection function *para H. Una* infra Horn contraction $\dot{-}$ *para H, que esta determinado por τ, es tal que para toda fórmula φ:*

$$H \dot{-} \varphi = \tau(H \downarrow_i \varphi)$$

Proposición 1 *También es posible demostrar que la infra contraction es idéntica a partial meet contraction y kernel contraction bajo lógica Horn.*

Definición 9 [5] *Sea H un conjunto de creencias Horn y φ una fórmula Horn. El conjunto de* kernel sets *de H con respecto a φ, denotado como $H \Downarrow \varphi$, es tal que $X \in H \Downarrow \varphi$ si y solo si*

1. *$X \subseteq H$*
2. *$X \vdash \varphi$, y*
3. *Si $Y \subset X$, entonces $Y \nvdash \varphi$.*

Los elementos de $H \Downarrow \varphi$ son los $\varphi - kernels$ de H.

Definición 10 [5] *Sea H un conjunto de creencias Horn y σ una función de incisión para H. Una* kernel Horn contraction $\dot{-}$ *para H, que esta determinado por σ, es tal que:*

$$H \dot{-} \varphi = Cn_H(H \setminus \sigma(H \Downarrow \varphi))$$

para todo $\varphi \in \mathcal{L}_H$.

Otra de las variantes Horn de partial meet contraction es la partial meet Horn contraction. Estas contracciones para ser válidas deben permitir una exacta correspondencia con PMC. Delgrande y Wassermann [7] introdujeron la construcción de PMHC también basado en la noción de Horn remainder set y al que denominaron *weak remainder set*. Se pretende con la definición de weak remainder set preservar las propiedades del modelo teórico del conjunto de restos estándar. De esta manera, se conserva la correspondencia entre PMHC y PMC. Se llega a esta conclusión debido a la relación entre conjuntos de restos y su contrapartida en término de interpretaciones. Delgrande demostró que los modelos de un conjunto de resto consiste de los modelos de un conjunto H de creencias agregado a ello un contramodelo de la fórmula φ para contracción. Pero esto no ocurre generalmente con cláusulas Horn, donde para un contramodelo M de φ, es posible que no encontremos un conjunto de resto Horn que tenga a M como un modelo. Como resultados propusieron los llamados *weak remainder sets.* Algunas de sus definiciones y caracterizaciones:

Definición 11 [7] *Sea H un conjunto de creencias Horn, φ una fórmula Horn y m un modelo del conjunto de modelos de un conjunto H de creencias. $H \Downarrow_w \varphi$ es el conjunto de conjuntos de fórmulas tal que $H' \in H \Downarrow_w \varphi$ si y solo si $H' = H \cap m$ para algún $m \in \mid \neg\varphi \mid$. $H' \in H \Downarrow_w \varphi$ es un* weak remainder set *de H y φ.*

Definición 12 [7] *Sea H un conjunto de creencias Horn. γ es una función de selección para H si, para cada $\varphi \in \mathcal{L}_H$,*

1. *Si $H \Downarrow_w \varphi \neq \emptyset$ entonces $\emptyset \neq \gamma(H \Downarrow_w \varphi) \subseteq H \Downarrow_w \varphi$.*
2. *Si $H \Downarrow_w \varphi = \emptyset$ entonces $\gamma(H \Downarrow_w \varphi) = \{H\}$.*

En [7] definen el *weak remainder set* y su función de selección para H. Entonces, la construcción de PMHC es equivalente a la PMC con la variante que en lugar de usar los conjuntos de restos estándar se recurre a los conjuntos de restos débiles.

Definición 13 [7] *Sea H un conjunto de creencias Horn y γ una función de selección para H. Una* partial meet Horn contraction $\dot{-}$ *para H, que está determinado por γ, es tal que:*

$$H \dot{-}_w \varphi = \bigcap \gamma(H \Downarrow_w \varphi)$$

y si $\gamma(H \Downarrow_w \varphi) = \{H'\}$ para algún $H' \in H \Downarrow_w \varphi$ su maxichoice Horn contraction basado en weak remainders estaría dado por:

$$H \dot{-}_w \varphi = \gamma(H \Downarrow_w \varphi)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{L}_H$.

4. Contracción Múltiple de Creencias Horn

Ahora, como parte de las contribuciones de este artículo proporcionamos una definición apropiada según las notaciones incorporadas hasta aquí, como así también una representación de resultados del tipo de contracción múltiple denominada *package contraction* pero para lógicas Horn. El procedimiento de remover un conjunto de sentencias de un conjunto de creencias H es contraer con la disyunción de las sentencias a eliminar en la lógica proposicional clásica. Con la lógica Horn esto se complica, debido a que no considera las disyunciones totales o completas (sentencias compuesta solamente por disyunciones). Para formalizar la operación de contraer un conjunto de sentencias Φ con respecto a un conjunto H con fragmento Horn consideraremos los conjuntos de restos. Considerar la lógica Horn como la lógica subyacente con respecto a la contracción AGM clásica nos permitirá adaptar la contracción de conjuntos finitos de sentencias Φ. Delgrande [6] demostró que es posible realizar este movimiento para obtener otros tipos de contracciones (*entailment-based contraction y inconsistency-based contraction*). Por lo tanto, el comportamiento en una e-contraction con respecto a un conjunto de sentencias Φ es el mismo con respecto a una sola sentencia. A continuación realizamos las adaptaciones de las diferentes definiciones de una e-contraction para obtener las respectivas para p-contraction.

Definición 14 *Sea H un conjunto de creencias Horn y Φ un conjunto de fórmulas Horn. Decimos que $H' \in H \downarrow_p \Phi$ si y solo si*

1. $H' \subseteq H$,
2. $Cn(H') \cap \Phi = \varnothing$,
3. *Para todo H'' tal que $H' \subset H'' \subseteq H$, $Cn(H'') \cap \Phi \neq \varnothing$.*

y llamamos los Horn p-remainder sets de H con respecto a Φ a los elementos de $H \downarrow_p \Phi$.

La definición de las *partial meet Horn p-selection functions* es:

Definición 15 *Una partial meet Horn p-selection functions σ es una función de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L}_H))$ a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L}_H))$ tal que*

1. $\sigma(H \downarrow_p \Phi) = \{H\}$ *si* $H \downarrow_p \Phi = \varnothing$,
2. *Y* $\varnothing \neq \sigma(H \downarrow_p \Phi) \subseteq H \downarrow_p \Phi$ *en otro caso.*

Ahora estamos en condiciones de establecer la de *partial meet Horn p-contraction.*

Definición 16 *Dado una partial meet Horn p-selection function σ, $\div_\sigma$ es una partial meet Horn p-contraction si y solo si*

$$H \div_\sigma \Phi = \bigcap \sigma(H \downarrow_p \Phi).$$

Para la definición de los dos casos extremos *maxichoice y full meet Horn p-contraction* es como sigue.

Definición 17 *Dado una partial meet Horn p-selection function σ, $\div_\sigma$ es un maxichoice Horn p-contraction si y solo si:*

$$\sigma(H \downarrow_p \Phi) \textit{ es un conjunto simple o conjunto unitario.}$$

Análogamente, $\div_\sigma$ es un full meet Horn p-contraction si y solo si:

$$\sigma(H \downarrow_p \Phi) = H \downarrow_p \Phi \textit{ cuando } H \downarrow_p \Phi \neq \varnothing.$$

Ahora, de la misma manera podemos trabajar con los *infra p-remainder sets* y obtener una definición formal para *Horn p-contraction.*

Definición 18 *Sea H un conjunto de creencias Horn y Φ un conjunto de fórmulas Horn. Decimos que $H' \in H \Downarrow_p \Phi$ si y solo si*

$$\textit{existe algún } H'' \in H \downarrow_p \Phi \textit{ tal que } (\bigcap H \downarrow_p \Phi) \subseteq H' \subseteq H''$$

y llamamos los infra p-remainder sets de H *con respecto a* Φ *a los elementos de* $H \Downarrow_p \Phi$*.*

Obtenemos ahora una definición para *Horn p-contraction* en términos de *infra p-remainder sets.*

Definición 19 *Una infra p-selection functions* τ *es una función de* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L}_H))$ *a* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{L}_H))$ *tal que*

1. $\tau(H \Downarrow_p \Phi) = H$ *cuando* Φ *es tautológico,*
2. $\tau(H \Downarrow_p \Phi) \in H \Downarrow_p \Phi$ *en otro caso.*

Una función de contracción $\dot{-}_\tau$ *es una Horn p-contraction si y solo si* $H \dot{-}_\tau \Phi = \tau(H \Downarrow_p \Phi)$*.*

La representación de resultados para Horn p-contraction resulta sencillo ya que también se realizan las adaptaciones de los postulados correspondientes. Los postulados que caracterizan la Horn p-contraction son:

$(H \dot{-}_p 1)$ $H \dot{-}_p \Phi = Cn(H \dot{-}_p \Phi)$

$(H \dot{-}_p 2)$ $H \dot{-}_p \Phi \subseteq H$

$(H \dot{-}_p 3)$ Si $H \cap \Phi = \varnothing$ entonces $H \dot{-}_p \Phi = H$

$(H \dot{-}_p 4)$ Si Φ no es tautológico entonces $(H \dot{-}_p \Phi) \cap \Phi = \varnothing$

$(H \dot{-}_p 5)$ Si $\Phi \equiv \Psi$ entonces $H \dot{-}_p \Phi = H \dot{-}_p \Psi$

$(H \dot{-}_p 6)$ Si $\varphi \in H \setminus (H \dot{-}_p \Phi)$, existe un H' tal que $\bigcap(H \downarrow_p \Phi) \subseteq H' \subseteq H$, $Cn(H') \cap \Phi = \varnothing$, y $(H' + \varphi) \cap \Phi \neq \varnothing$

$(H \dot{-}_p 7)$ Si Φ es tautológico entonces $H \dot{-}_p \Phi = H$

Por último, definimos *Horn package contraction* y su relación con *maxichoice Horn contraction*, todo ello basado en *weak remainders.* Empezamos realizando la adaptación de la definición **11** para conjunto de sentencias Φ.

Definición 20 *Sea* H *un conjunto de creencias Horn y* Φ *un conjunto de fórmulas Horn.* $H \Downarrow_p \Phi$ *es el conjunto de conjuntos de fórmulas tal que* $H' \in H \Downarrow_p \Phi$ *si y solo si*

1. $H' \subseteq H$*,*
2. *para cada* $\varphi \in \Phi$ *donde* $\varphi \notin Cn_H(\top)$*,* $H' \subseteq m$ *para algún* $m \in \mid \neg\varphi \mid$*,*
3. *para cada* H'' *donde* $H' \subset H'' \subseteq H$*, tenemos* $H'' \nsubseteq m$ *para algún* $\varphi \in \Phi$ *donde* $m \in \mid \neg\varphi \mid$*.*

Adaptamos la definición **12** para denotar su función de selección para conjunto de sentencias Φ.

Definición 21 *Sea* H *un conjunto de creencias Horn.* γ *es una función de selección para* H *tal que* $\gamma(H \Downarrow_p \Phi) = \{H'\}$ *para algún* $H' \in H \Downarrow_p \Phi$*.*

Obtenemos de la definición **13** la *package Horn contraction* basado en *weak remainders.*

Definición 22 *Sea* H *un conjunto de creencias Horn y* γ *una función de selección para* H*, la (maxichoice) package Horn contraction basado en weak remainders está dado por*

$$H \dot{-}_p \Phi = \gamma(H \Downarrow_p \Phi)$$

si $\varnothing \neq \Phi \cap H \nsubseteq Cn_H(\top)$*, y* H *en otro caso.*

Mediante el siguiente teorema Delgrande y Wassermann [7] establece que cualquier maxichoice Horn contraction define una package contraction, y vice versa.

Teorema 3 [7] *Sea H un conjunto de creencias Horn y sea $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset \mathcal{L}_H$. Tenemos que $H' \in H \Downarrow_p \Phi$ si y solo si $H' = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ donde $H_i \in H \Downarrow_e \varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Considerando la proposición **1**, el teorema 8 de [5], el teorema 7 de [4], como así también lo demostrado por Falappa [8] en el contexto base de creencias, es posible generalizar lo establecido en infra contraction y kernel contraction con una sentencia para su generalización con conjunto de sentencias bajo fragmento Horn. No ocurre lo mismo si las operaciones están basadas en weak remainder, esto se debe a las diferencias técnicas entre ellas. Entre las principales diferencias podemos mencionar por ejemplo, que los weak remainder y los e-remainder son conceptos distintos, ya que la operación partial meet corresponde a las intersecciones de weak remainder. Otra diferencia relevante consiste en que *no todos los infra remainders son weak remainders* como así también *no todos los weak remainders son infra remainders.* Booth et al [3], demuestran mediante ejemplos como en algunos casos el conjunto que se obtiene es un infra remainder pero no un weak remainder y como en otros si coinciden. Además, los infra remainders deben contener un full meet y estar contenidos en algún remainder (por definición). En cambio, los weak remainders están contenidos en algún remainder o ser un remainder, pero no siempre contienen un full meet contraction (como lo demuestran Booth et al).

5. Conclusión y Trabajos Futuros

Al realizar la adaptación de las operaciones de contracción bajo lógica Horn por sentencias simples a su generalización para un conjunto de sentencias hemos realizado una importante contribución para la investigación dentro de la contracción para lógica Horn. En resumen, las principales contribuciones del presente paper son:

i) generalización de las operaciones de contracción bajo lógica Horn partial meet e infra basado en remainder set con sentencia simple a sus correspondientes package Horn contraction, y considerando que para la maxichoice package Horn contraction su representación de resultado se logra sustituyendo el postulado de weak relevance por un postulado de maximalidad.

ii) a partir de resultados de investigaciones previas se demuestran que las operaciones infra contraction coinciden con partial meet contraction.

iii) la demostración de que no es posible la generalización de las operaciones apuntadas en el item ii), cuando éstas se basan en weak remainder sets.

Para este artículo, nos enfocamos en la caracterización de las operaciones de contracción Horn múltiples: partial meet (y sus variantes basados en infra y weak remainder) y kernel. Como trabajo futuro se planea extender la investigación para lograr su generalización y representación de resultados de contracciones múltiples a otras operaciones de contracción conocidas del framework AGM como *epistemic entrenchment* bajo lógica Horn, entre otras.

Referencias

[1] Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] F. Baader, D. Calvanese, D. McGuinness, D. Nardi, and P. Patel-Schneider. The description logic handbook. *CUP, Cambridge*, 2003.

[3] Richar Booth, Thomas Meyer, and Iván José Varzinczak. Next steps in propositional horn contraction. *In Boutilier, C. (Ed.), Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 702–707, 2009.

[4] Richard Booth, Thomas Meyer, Iván José Varzinczak, and Renata Wassermann. A contraction core for horn belief change: Preliminary report. *In 13th International Workshop on Nonmonotonic Reasoning (NMR), (2010a/b)*, 2010.

[5] Richard Booth, Thomas Meyer, Iván José Varzinczak, and Renata Wassermann. On the link between partial meet, kernel, and infra contraction and its application to horn logic. *Journal of Artificial Intelligence Research*, pages 31–53, 2011.

[6] James P. Delgrande. Horn clause belief change: Contraction functions. *In Gerhard Brewka and Jérome Lang, editors, Proceedings of the Eleventh International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning, Sydney, Australia, 2008. AAAI Press*, pages 156–165, 2008.

[7] James P. Delgrande and Renata Wassermann. Horn clause contraction functions: Belief set and belief base approaches. In Fangzhen Lin, Ulrike Sattler, and Miroslaw Truszczynski, editors, *KR*. AAAI Press, 2010.

[8] Marcelo A. Falappa, Eduardo L. Fermé, and Gabriele Kern-Isberner. On the logic of theory change: Relations between incision and selection functions. *In Gerhard Brewka, Silvia Coradeschi, Anna Perini, and Paolo Traverso, editors, Proceedings of the 17th European Conference on Artificial Intelligence, ECAI 2006*, pages 402–406, 2006.

[9] Eduardo Fermé, Karina Saez, and Pablo Sanz. Multiple kernel contraction. *Studia Logica*, 73:183–195, 2003.

[10] André Fuhrmann. Relevant logics, modal logics and theory change. *PhD thesis, Australian National University, Camberra*, 1988.

[11] Andre Fuhrmann and Sven Ove Hansson. A survey of multiple contractions. *Journal of Logic, Language and Information*, pages 39–76, 1994.

[12] Sven Ove Hansson. New operators for theory change. *Theoria*, 55:114–132, 1989.

[13] Sven Ove Hansson. Belief base dynamics. *PhD thesis, Uppsala University*, 1991.

[14] Sven Ove Hansson. Belief contraction without recovery. *Studia Logica 50(2)*, pages 251–260, 1991.

[15] Sven Ove Hansson. Kernel contraction. *J. of Symbolic Logic 59(3)*, pages 845–859, 1994.

[16] Reinhard Niederée. Multiple contraction: A further case against gärdenfors' principle of recovery. *In A. Fuhrmann and M. Morreau, editors, The Logic of Theory Change. Berlin, 1991. Springer-Verlag*, pages 322–334, 1991.

[17] Hans Rott. Modellings for belief change: Base contraction, multiple contraction, and epistemic entrenchment (preliminary report). *In D. Pearce and G. Wagner, editors, Logics in AI. Springer Berlin / Heidelberg*, 633:139–153, 1992.