EL MEJOR CAMINO… ¿PARA QUIÉN? MANERAS ALTERNATIVAS DE ABORDAR EL ESTUDIO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

GRIMALDI, VERÓNICA[1;] BALDASSARI, VICTORIA[2]; SIVORI, ANA CLARA[2]

[1] Docente de la cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, UNLP.
[2] Estudiantes de la carrera Profesorado de Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, UNLP
[1,2] verogrimaldi@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo describiremos y reflexionaremos sobre nuestras experiencias de prácticas docentes llevadas a cabo en septiembre-octubre del año 2011 en dos cursos de 4° año de ES del Colegio Nacional Rafael Hernández, dependiente de la Universidad Nacional de La Plata. Nuestro objetivo es comunicar los desafíos a los que nos enfrentamos al momento de tomar decisiones para la planificación y puesta en aula de las propuestas, teniendo en cuenta que a pesar de corresponder al mismo año de una misma escuela y a un mismo contenido de enseñanza, debieron ser diseñadas y llevadas a cabo de manera diferenciada atendiendo a los conocimientos disponibles de los alumnos de cada curso.

Palabras clave: enseñanza, secundaria, matemática, sistemas de ecuaciones lineales

INTRODUCCIÓN

Una de las preocupaciones a la que nos enfrentamos como docentes al momento de ingresar a un curso nuevo para enseñar Matemática es la adecuación de las propuestas de enseñanza al grupo particular de alumnos con el que trabajaremos. Esta preocupación es aun mayor cuando debemos tomar una suplencia corta, puesto que en este caso es necesario tener en cuenta el modo en que venían trabajando los alumnos, que será también el modo con el que seguirán trabajando una vez que nos retiremos. Un desafío similar se les presenta a los estudiantes de los profesorados que deben realizar sus prácticas docentes. En este trabajo comentaremos una experiencia llevada a cabo durante el ciclo lectivo 2011 en el marco de la cátedra Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática, FaHCE, UNLP. Describiremos los desafíos a los que nos enfrentamos al momento de tomar decisiones para la planificación y puesta en aula de propuestas de enseñanza, teniendo en cuenta que a pesar de corresponder ambas al 4° año de una misma escuela y a un mismo contenido, debieron ser diseñadas y llevadas a cabo de manera diferenciada atendiendo a los conocimientos disponibles de los alumnos de cada curso.

OBSERVACIONES DE CLASE E IDEAS INICIALES

Nuestros primeros encuentros con las docentes a cargo nos permitieron establecer que el tema a desarrollar en ambos cursos sería *Sistema de ecuaciones lineales con dos variables*. Sin embargo, en uno de los cursos –en adelante, *Curso A*- aun no se habían propuesto problemas vinculados a los sistemas de ecuaciones, mientras que en el otro –en adelante, *Curso B*- ya se había introducido la definición de sistemas y los alumnos resolvían sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con solución única utilizando los métodos algebraicos de igualación y sustitución.
La situación del *Curso A* nos permitía elaborar una secuencia de "entrada" al tema, teniendo en cuenta que la profesora a cargo quería que incluyéramos la noción de equivalencia de sistemas. En el *Curso B*, la profesora no pretendía introducir otros métodos analíticos. Parecía poco lo que podíamos agregar. ¿Qué enseñar sobre sistemas cuando los alumnos "ya saben" resolverlos? A primera vista nuestro rol allí era proponer un repaso de las técnicas conocidas, vincularlas con el "método gráfico" y finalmente llevar problemas para reutilizarlas.

Hipótesis de trabajo y condiciones para la elaboración de las propuestas

Apoyadas en investigaciones y artículos que habíamos analizado durante el año (Panizza et al., 1997, 1999; Duval, 2006; Sessa et al., 2007), así como en trabajos de Brousseau (1986), Vergnaud (1990), y Chevallard (1989a; 1997b), entre otros, elaboramos algunos criterios para el diseño de las clases. Una de las ideas centrales que comandaba nuestra tarea era que

"*El problema que puede servir como punto de partida de la actividad intelectual del alumno no es ciertamente un ejercicio donde aplique en forma casi mecánica una fórmula o un proceso operatorio*". (Charlot, 1986). Nuestra intención era proponer situaciones que propiciaran por parte de los alumnos la elaboración de conjeturas, la confrontación con otras hipótesis suyas o de algún compañero, que justifiquen sus propuestas, las validen, analicen sus producciones, vuelvan a formular hipótesis. Además, considerábamos que los conceptos matemáticos a estudiar debían aparecer como necesarios para la resolución de dichos problemas.
En días siguientes realizamos revisiones de textos escolares para analizar actividades y secuencias de problemas, y definir qué y cómo íbamos a trabajar en cada caso. En el *Curso A* debíamos elaborar una propuesta que, tomando en cuenta conocimientos anteriores de los alumnos que podían servir de apoyo para el estudio de sistemas –función lineal, ecuación de la recta, equivalencia de ecuaciones, conjunto solución-, posibilitara la construcción de nociones relacionadas con los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. En el caso del *Curso B* debíamos tener en cuenta que en el aula ya estaba circulando todo un conjunto de conocimientos en torno a los sistemas de ecuaciones, con lo cual nuestra propuesta debía entrelazarse con ellos y avanzar sobre cuestiones que aun no se habían abordado. El desafío era interesante: en el *Curso A* íbamos a planificar una serie de clases en las que los métodos algebraicos de resolución de sistemas de ecuaciones sería un punto de llegada, mientras que en el *Curso B* este sería nuestro punto de partida[1].

ELABORACIÓN DE LAS PROPUESTAS Y PUESTA EN AULA

Para la elaboración de las secuencias debimos tener en mente los objetivos perseguidos en cada uno de los cursos. A continuación se presenta el detalle de estos objetivos[2] (Figuras 1 y 2).

[1] Debido a la falta de tiempo, en el Curso A no pudimos "arribar" a nuestro punto de llegada. Creemos que este hecho no invalida nuestro análisis, puesto que en todo momento tuvimos como objetivo de mediano plazo llegar al estudio de métodos algebraicos, aun si no lo hicimos de manera efectiva.

[2] No hemos incluido aquí las clases de revisión ni las evaluativas.

Curso A

Clase 1:
- Resolver situaciones en contextos que doten de sentido a la noción de sistema de ecuaciones.
- Analizar diferentes maneras de representar sistemas: ecuaciones, gráficos, tablas de valores.
- Identificar que la solución de un sistema debe verificar todas sus ecuaciones.

Clase 2:
- Identificar las soluciones de un sistema en el registro gráfico (una solución y ninguna solución).
- Analizar la utilidad de la representación gráfica de un sistema para estimar su solución.
- Analizar los parámetros de las ecuaciones del sistema para determinar la existencia o no de soluciones (una solución y ninguna solución).

Clase 3:
- Estudiar la cantidad de soluciones de un sistema en el registro gráfico (una, ninguna o infinitas soluciones).
- Analizar los parámetros de las ecuaciones del sistema para anticipar la cantidad de soluciones.

Clase 4:
- Introducir la noción de equivalencia de sistemas en relación a su conjunto solución.
- Estudiar la equivalencia de sistemas en relación a la equivalencia entre ecuaciones.

Figura 1. Objetivos por clase para el Curso A

Curso B

Clase 1:
- Analizar situaciones contextualizadas en las que tiene sentido construir y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.
- Identificar que la solución de un sistema debe verificar todas sus ecuaciones.
- Estudiar la representación gráfica de sistemas.

Clase 2:
- Analizar la utilidad de la representación gráfica de un sistema para estimar su solución.
- Analizar alcances y límites de los gráficos y las expresiones algebraicas para conocer la solución de un sistema.

Clase 3:
- Estudiar la existencia de sistemas sin solución a partir del análisis de sus gráficos.
- Analizar lo que pasa analíticamente al intentar resolver sistemas sin solución.
- Analizar los parámetros de las rectas para anticipar si el sistema tiene o no tiene solución.

Clase 4:
- Estudiar la existencia de sistemas con infinitas soluciones a partir del análisis de sus gráficos.
- Analizar lo que pasa analíticamente al intentar resolver sistemas con infinitas soluciones.
- Analizar los parámetros de las rectas para anticipar la cantidad de soluciones de un sistema.

Figura 2. Objetivos por clase para el Curso B

Análisis comparativo

El orden propuesto para los objetivos de ambos cursos al momento de planificar intentó corresponderse con la realidad del aula, es decir, pensamos una planificación adecuada a los conocimientos disponibles de los alumnos. En el caso del *Curso A* tomamos como punto inicial el trabajo en contexto con ecuaciones lineales de dos variables, y se tenía como punto de llegada el trabajo sobre métodos analíticos de resolución de sistemas. Respecto del *Curso B*, el punto de partida fue la resolución analítica de los sistemas, mientras que el punto de llegada estaba más vinculado con poner estas estrategias en relación con otros registros de representación y contextos. En ambos casos los conocimientos de los que disponían los alumnos pretendían ser enriquecidos.

Algunos de los problemas que seleccionamos o diseñamos fueron propuestos en ambos cursos pero en momentos diferentes –y a veces con ciertas variaciones de enunciados-, atendiendo a los objetivos que se perseguían en cada caso y a las respuestas que iban dando los alumnos para problemas anteriores.

A continuación presentaremos tres de estos problemas, que nos permitirán ilustrar algunas de estas cuestiones (Figuras 3, 4 y 5).

Sistemas con solución única

En una confitería se venden pastelitos de frutilla, a $ 2 cada uno, y pastelitos de chocolate, a $ 3 cada uno. Daniela llevó 13 pasteles surtidos y gastó $ 34

a) ¿Cuál o cuáles de estos sistemas podrían servir para representar la situación? Tengan en cuenta que **F** representa la cantidad de pastelitos de frutilla que llevó Daniela, y **Ch**, la cantidad de pastelitos de chocolate.

$$\begin{cases} 2 \,.\, F + 3 \,.\, Ch = 13 \\ F + Ch = 34 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \,.\, F + 3 \,.\, Ch = 34 \\ F + Ch = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \,.\, F + 3 \,.\, Ch = 34 \\ Ch = 13 - F \end{cases}$$

b) ¿Es cierto que el par (5; 8) es solución de los sistemas que eligieron? ¿Cómo hicieron para saber?

Figura 3. Uno de los problemas propuestos para el estudio de sistemas con solución única[3]

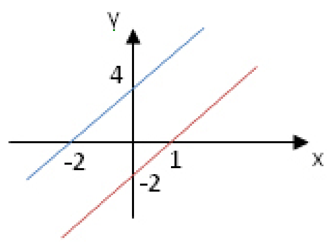
Con la puesta en aula de este problema en el *Curso A* teníamos prevista la realización de una puesta en común que apuntara a instalar la idea de que dos sistemas son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución. Esta noción de equivalencia serviría como uno de los pilares para estudiar la resolución algebraica de sistemas, prevista para más adelante. Los alumnos no habían estudiado modos de resolver algebraicamente, por lo que era muy probable que intentaran establecer cuáles de ellos admitían al par (5;8) como solución.

[3] Adaptación de problema de Estudiar Matemática en 9°, Ed. Santillana, Buenos Aires, 2008.

En el *Curso B* no pretendíamos institucionalizar la cuestión de la equivalencia, entre otras cosas porque no era un aspecto de interés para la profesora a cargo. Dado que los métodos algebraicos de resolución de sistemas eran el conocimiento más "vivo" dentro del curso, esperábamos que la mayoría de los alumnos utilizara estos métodos para encontrar la solución, y respondiera comparando su respuesta con el par ofrecido. Decidimos entonces enfocar el análisis en que no era necesario resolver los sistemas elegidos en a), y que era posible "verificar" la solución reemplazando en ambos sistemas, para trabajar la idea de que el par solución debía satisfacer las dos ecuaciones. De este modo, apuntábamos a relativizar la relevancia del uso de los métodos algebraicos como estrategia única ante los sistemas de ecuaciones, así como resignificar la técnica de la verificación que los alumnos ya habían aprendido y utilizaban solo como último paso del proceso de resolución.

Sistemas sin solución

a) El siguiente gráfico representa un sistema de ecuaciones. ¿Tiene solución este sistema? Si decís que sí, determiná las coordenadas del punto solución; si decís que no, explicá por qué.



b) ¿Es posible decidir, sin graficar, si estos sistemas tienen o no tienen solución? Justificá tu respuesta

$$\begin{cases} y = 18 + 3x \\ 3x - y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - 5x = 11 \\ y + 5x = 8 \end{cases}$$

Figura 4. Uno de los problemas propuestos para el estudio de sistemas sin solución

En el inciso a) de este problema teníamos como objetivo que los alumnos identificaran que si las rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. En los dos cursos ya se había abordado el estudio de sistemas con solución única en el registro gráfico, por lo que era altamente probable que muchos respondieran que era evidente que no tenía solución porque solo mirando el gráfico se sabía que no se iban a cortar. En el *Curso A* esperábamos centrar la actividad en el análisis de modos de garantizar que las rectas eran efectivamente paralelas, para lo cual se trabajó sobre la "lectura" de parámetros en el registro gráfico. Esto fue lo que sirvió como insumo para analizar las ecuaciones del inciso b) en el registro algebraico, expresando los sistemas de manera equivalente para poder identificar la pendiente de las rectas involucradas.
En el *Curso B* creíamos probable que los alumnos resolverían analíticamente los sistemas del inciso b) para poder decidir. Si bien también se había trabajado sobre la lectura de

parámetros, el foco más importante estuvo en el uso del registro gráfico como fuente posible de significado para las igualdades falsas del estilo 0 = 1 que se obtienen al operar con las ecuaciones de sistemas sin solución.
A raíz de la resolución y discusión de este problema, en ambos cursos se trabajó sobre la relación entre la idea de sistema sin solución y la de rectas paralelas. Pero además, de manera diferenciada, en el *Curso A* se hizo mayor hincapié en la lectura de parámetros en los registros gráfico y algebraico para establecer que esas rectas eran paralelas y lo que eso significaba en relación al sistema (que no tendría solución). En el *Curso B*, en cambio, se hizo mayor énfasis en que si analíticamente se obtienen igualdades falsas, el sistema representa un par de rectas paralelas y es posible asegurar que no tiene solución, ya que estas no se “cortan”.

Sistemas con infinitas soluciones

El gráfico representa una de las ecuaciones de un sistema. La otra ecuación del sistema es 4 . y + 2 . x = 20. ¿Se trata de un sistema con solución o sin solución? ¿Cómo te das cuenta?

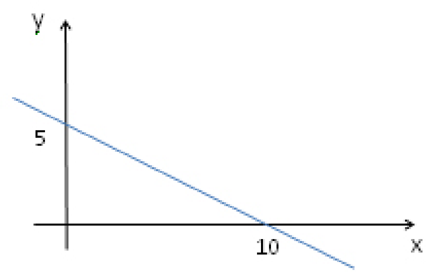


Figura 5. Uno de los problemas propuestos para el estudio de sistemas con infinitas soluciones[4]

Con este problema apuntábamos a que los alumnos de ambos cursos adaptaran estrategias elaboradas a propósito de sistemas sin solución para abordar estas nuevas situaciones. Se trataba de que a partir del análisis de parámetros de las rectas, en el *Curso A* establecieran que eran rectas coincidentes, lo cual significaba que el conjunto solución estaba formado por infinitos pares (todos los puntos que pertenecían a las rectas). En cambio, en el *Curso B* apostábamos a que los alumnos “convertirían” la recta dada en el registro gráfico al registro algebraico para resolver analíticamente y obtener igualdades verdaderas, del estilo 0 = 0. Nuevamente, el foco en este curso estaría en dotar de sentido este tipo de “resultado”, apelando al registro gráfico, el cual permitiría interpretar las igualdades verdaderas como representativas de “cualquier par” de los infinitos pertenecientes a las rectas coincidentes.

[4] Adaptación de problema de Estudiar Matemática en 9°, Ed. Santillana, Buenos Aires, 2008.

CONCLUSIONES

Nuestro trabajo con los cursos A y B nos obligó a pensar de manera específica qué queríamos lograr en cada caso a partir del trabajo en torno a un mismo tema. Apostando siempre a la *actividad intelectual* de los alumnos (Charlot, 1986), nos propusimos iniciar al *Curso A* en el estudio de los sistemas de ecuaciones partiendo de contextos intra y extramatemáticos, arribando al abordaje de métodos algebraicos fuertemente apoyados en la flexibilidad de "tránsito" entre registros de representación (lenguaje coloquial, gráfico, algebraico, tablas). En el caso del *Curso B,* apuntamos a dotar de sentido a los métodos algebraicos que los alumnos ya dominaban en relación a los sistemas con una solución, extenderlos a los sistemas sin solución y con infinitas soluciones, y potenciar su capacidad de validar y controlar sus procedimientos. A partir de la valoración de los conocimientos algebraicos de que disponían, intentamos relativizar su relevancia como estrategia única.
Hemos querido mostrar aquí el lugar central que tuvieron los conocimientos de los alumnos en torno a contenidos relacionados al tema a desarrollar en l momento de la elaboración y puesta en aula de secuencias de trabajo adecuadas. Como hemos intentado comunicar, no se trató de diseñar situaciones originales para cada curso sino de, tomando como referencia un mismo tipo de situación, establecer objetivos diferenciados para cada uno, "ordenar" los problemas a proponer y planificar la gestión de la clase tomando como referencia los conocimientos que preveíamos se iban a poner en juego de manera más probable. En contraposición con la idea de elaborar una "buena" secuencia que funcione para cualquier curso, apostamos secuencias posibles para cada curso en particular.

Agradecimientos
Deseamos expresar nuestro profundo agradecimiento a las autoridades del Colegio Nacional Rafael Hernández, y a las profesoras María Alicia Gattó y María Luján Amado Cattáneo por abrirnos las puertas de sus cursos de manera tan generosa, y compartir con nosotras esta importante instancia de formación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol. 7, N° 2: 33-115.

Charlot, (1986). La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Conferencia pronunciada en Cannes.

Chevallard, Y. (1997). La Transposición Didáctica. Buenos Aires: Aique. 11-66.

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collage. Premiere partie. *Petit X*, N° 5: 51-94.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignemente des mathématiques au collage. Deuxième partie. *Petit X*, N° 19: 43-72.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1: 143-168.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1996). Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito. Comunicación REM, Salta.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 17: 453-461.

Sessa, C. y Cambriglia, V. (2007). La validación de procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. *Yupana*, N° 4: 11-24.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 10, Nº 2 y 3: 133-170.