

EL PROBLEMA DE APOLONIO PROVOCA INCERTIDUMBRE Y GENERA NUEVOS CONOCIMIENTOS

GIACOMONE, MARÍA BELEN^{1,2}; GONZÁLEZ, SARA BEATRÍZ^{1,3}

¹Departamento de Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. U.N.L.P.

²belen_giacomone@hotmail.com

³saritabety@gmail.com

RESUMEN

En esta propuesta se presenta la metodología implementada y los resultados obtenidos del trabajo con nuestros alumnos de Geometría correspondiente al segundo año de la carrera de Profesorado de Matemática de la U.N.L.P sobre el problema de Apolonio, uno de los problemas más famosos de la geometría euclidiana, que a su vez da lugar a diez problemas sobre tangencias. Las construcciones que los alumnos desarrollan a partir de sus enunciados favorecen la formación de profesores de matemática por el grado de desafío interpretativo, gráfico e instrumental que plantean; por abrir espacios de discusión que promueven el enriquecimiento conceptual de los protagonistas y por dar la posibilidad de argumentar y fundamentar la postura que cada uno toma frente a cada cuestión analizada.

La geometría sintética, marco del problema al que se hace referencia, resulta una teoría no elemental que, además del valor intrínseco que posee por su desarrollo histórico y la importancia que en ella tienen las demostraciones fuertemente apoyadas en los esquemas, aporta una mirada particular sobre las diferentes geometrías junto con modelos que permiten avanzar, por ejemplo, sobre las geometrías no euclidianas. El enfoque de actuación es geométrico (y no algebraico) ya que se trata de que los alumnos adquieran este tipo de pensamiento como una herramienta para su propio desarrollo y su futuro profesional.

Palabras clave: construcción, tangencias, argumentación geométrica, formación docente

INTRODUCCIÓN

Pequeñas pinceladas de historia de las matemáticas hacen más interesante el desarrollo de las clases de Geometría, porque permiten fomentar la comprensión de problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que los alumnos aprenden, muestran la manera de trabajar de los grandes matemáticos y enriquecen el bagaje cultural y didáctico que contribuyen a la formación integral del alumnado.

“ La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como:

- hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas
- enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes,...
- señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente,...
- apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.” (Guzmán, M. 1989)

La historia de la matemática es un instrumento cultural que enriquece la enseñanza de la misma. De ahí, como dice González Urbaneja, (1991) “la necesidad de partir de la evolución histórico-epistemológica de la matemática como ciencia.”

El problema de Apolonio (Apolonio de Perga, 262 – 190 a.C.) se puede enunciar de la siguiente forma:

Dados tres objetos matemáticos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados, (o que los contenga en el caso de los puntos)

Al realizar las combinaciones entre los objetos, resultan los siguientes casos:

- 1.- *Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga.*
- 2.- *Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres.*
- 3.- *Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y contenga a los dos puntos.*
- 4.- *Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y contenga al punto.*
- 5.- *Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a la circunferencia dada y contenga a los dos puntos.*
- 6.- *Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las circunferencias dadas y contenga al punto.*
- 7.- *Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.*

8.- Dadas dos circunferencias y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las circunferencias dadas.

9.- Dada una circunferencia, una recta y un punto, construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y a la circunferencia dada.

10.- Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a las tres circunferencias dadas.

Los dos primeros casos aparecen en el Libro IV de los *Elementos* de *Euclides*, los casos del 3, 4, 5, 6, 8 y 9 en el Libro I de la obra *Tangencias* (o *Contactos*) de *Apolonio*, y los casos 7 y 10 en el Libro II de la misma obra

Apolonio vivió largo tiempo en Alejandría, primero como discípulo y más tarde como profesor en la escuela de los sucesores de Euclides, escuela que recibió nuevo impulso del mismo Apolonio.

Fue conocido como el Gran Geómetra por sus extensos trabajos sobre geometría que tratan de las secciones cónicas, de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Acuñó los términos elipse, hipérbola y parábola. También explicó el movimiento de los planetas según la teoría de los epiciclos. (Disponible en : <http://revistasuma.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/46/059-070.pdf>)

El objetivo de este trabajo es presentar la metodología implementada y los resultados obtenidos durante las clases de Geometría correspondiente al segundo año de la carrera de Profesorado de Matemática de la U.N.L.P al tratar uno de los problemas más famosos de la geometría euclidiana, el problema de Apolonio, que a su vez da lugar a diez problemas sobre tangencias. En este sentido, abordaremos algunas de las estrategias didácticas utilizadas para formación docente.

METODOLOGÍA

Se desarrolla una metodología de trabajo cooperativo que permite describir los modos de actuación que los estudiantes utilizan en los distintos momentos (inicio, desarrollo y cierre) de las clases de Geometría en torno al tópico *Tangencias* teniendo como marco teórico referencial al problema de Apolonio.

Para la recolección de datos usamos: un registro anecdótico, una planilla de observación “(Tabla 1)” y una matriz evaluativa “(Tabla 2)”, considerando para su diseño los aportes de diversos autores (Schön, 1992; Perrenoud, 2001 y 2004, González, 2011).

Momento / Indicador	Inicio	Desarrollo	Cierre
Organización conceptual			
Desarrollo procedimental			
Uso de material para la construcción			
Interacción con el grupo			

Inferencias didácticas			
------------------------	--	--	--

Tabla 1: Planilla de observación.

Definiendo *interferencias didácticas*: a aquellos procesos deductivos que los alumnos utilicen para integrar el nuevo conocimiento con los conocimientos previos y su potencial creativo, tomando en cuenta la postura que los alumnos tomen ya sea a partir de la exposición de un contenido, en el desarrollo de un ejercicio o la resolución de un problema que lo involucre, y su transferencia al aula.

Indicadores / Alumnos	Desarrollo conceptual	Desarrollo práctico	Manejo de recursos	Participación en clase	Nota

Tabla 2: Matriz Evaluativa

Las categorías cualitativas definidas para cada momento y cada indicador son: Muy Buena (MB) + -, Buena (B) + - y Regular + -, y en una instancia posterior todas son acompañadas por una breve argumentación. La nota final para cada alumno es numérica.

La Tabla 2 recoge cómo se desarrolla la interacción entre el profesor y el alumno durante el proceso de resolución y las distintas fases que componen la resolución de los problemas propuestos en el diseño del trabajo.

El mismo, se llevó a cabo con 4 alumnos de Geometría, en 4 clases de dos horas cada una durante la cursada, de manera tal que cada una de ellas giró en torno a los objetivos generales y específicos sobre la base de contenidos y actividades. Tanto la resolución de problemas como las actividades se estructuran en torno a un criterio de complejidad creciente considerado por la cátedra.

El análisis de la información tiene por metas:

1. Reflexionar sobre los modos de actuación de los estudiantes del profesorado en los distintos momentos de clase.
2. Analizar cambios en los modos de actuación con relación a los procedimientos de construcción implementados y el uso de instrumentos (regla sin marcas y compás que no puede transportar medidas).
3. Estudiar la dinámica aplicada en la resolución de cuestiones, ejercicios y problemas, tanto de tipo experimental como de lápiz y papel.
4. Verificar si la estrategia de análisis utilizada por el docente, favoreció la detección de avances y obstáculos del alumno en el proceso de apropiación de nuevos saberes.

DESARROLLO

El desarrollo de la actividad se organizó en 3 etapas con el objetivo de hacer un seguimiento continuo de los alumnos en los procesos de identificación, construcción y análisis.

Proceso de identificación de los alumnos:

En esta primera fase se utiliza la historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.

Se ha preparado para los alumnos un rico repertorio de métodos geométricos y algebraicos para resolver el problema de Apolonio de manera tal que ellos identifiquen en cada uno los conocimientos previos necesarios para su construcción.

Una propiedad muy apreciada en la geometría euclidiana clásica es la posibilidad de resolver problemas utilizando sólo construcciones con regla no graduada y compás colapsable.

Las construcciones con regla y compás han ocupado tradicionalmente un lugar importante en la enseñanza de la geometría plana, ya sea por su interés práctico como teórico. Si bien resultan adecuadas para el estudio de las figuras geométricas, son también un rico instrumento para la enseñanza de resolución de problemas, y a este doble propósito responde el diseño de la clase.

Mostraremos dos perspectivas distintas bajo las cuales se puede abordar esta temática: la primera de ellas proviene de la “Geometría Sintética”, la cual nos limitaremos a interpretar desde la obra euclídea, y la segunda surge desde el campo de la resolución de problemas matemáticos.

Proceso de construcción:

Esta instancia se aprovechó como un espacio de observación, exploración y construcción. El trabajo fue inicialmente individual, complementándose con la comunicación de los procesos seguidos.

En primer lugar los alumnos trabajaron en las construcciones de los problemas 1, 2, 3 y 4, y en el reconocimiento del eje y centro radical, punto de potencia y arco capaz de las circunferencias que resultaban solución. Estas nociones fueron estudiadas desde el comienzo del curso. No olvidemos que el problema de Apolonio, en esta experiencia en particular, era un disparador para seguir estudiando geometría, no solo para construir sino también todo lo que ello implica y a medida que los alumnos lo fueron desarrollando se volvieron a encontrar con conceptos estudiados que parecieron recobrar mayor fuerza, “descubrieron” nuevas propiedades y resultaron más significativos.

Surgió en cada problema la necesidad de separar en casos de acuerdo a las posiciones que fueron tomando los objetos matemáticos. (Fue muy importante que el docente acompañe a los alumnos con intervenciones teóricas en este proceso de análisis).

El orden en el que aparecieron presentados los problemas fue estratégicamente pensado por los docentes de la cátedra.

Los alumnos lograron analizar la reducción de los casos más complejos a los más simples (la circunferencia que pasa por tres puntos o la circunferencia tangente a tres rectas), de este modo se buscó herramientas para facilitar las construcciones siguientes.

En segundo lugar se les presentó a los alumnos el problema 5 con el objetivo de que realicen las instrucciones paso a paso de la construcción de la circunferencia solución y que luego, al intercambiarse las indicaciones, todos puedan reproducir la figura en forma adecuada.

Con este ejercicio los alumnos notaron lo complicado que es utilizar un lenguaje adecuado y una notación apropiada.

Proceso de análisis:

Como tercera fase de desarrollo, se hizo una síntesis sobre los aportes de los 5 problemas

trabajados de manera tal que los alumnos puedan utilizar esa información para analizar los casos siguientes.

Además, aportaron posibles construcciones para el problema 6 utilizando el GeoGebra como herramienta pero, se analizó que utilizando un graficador, las propiedades que se ponen en juego no son las mismas, ya que existen aplicaciones que resuelven directamente el problema de tangencias.

RESULTADOS

Durante cada etapa, los alumnos fueron observados y evaluados. Ver “(Tabla 1)” pag. 3 y “(Tabla 2)”, pag. 4, y al finalizar la actividad se les colocó una nota numérica.

La evaluación de resultados tiene como objetivo general conocer cuáles han sido los principales logros de la actividad. Este objetivo general, se canaliza a través de dos agentes: profesores y alumnos.

En relación al alumno este objetivo general se concreta en otros objetivos más específicos:

- a) Interpretar el contexto histórico de cada problema matemático.
- b) Analizar estrategias de construcción.
- c) Trabajar en equipo.

Análisis de los indicadores:

Desarrollo conceptual, “(Tabla 2)”: representa una nota promedio de la *Organización conceptual* “(Tabla 1)” durante el inicio, desarrollo y cierre de la actividad.

Los resultados obtenidos muestran un importante avance en la construcción del marco conceptual geométrico de cada alumno. Un solo alumno obtuvo B, el resto MB.

Desarrollo práctico, “(Tabla 2)”: representa una nota promedio del *Desarrollo procedimental* “(Tabla 1)” durante el inicio, desarrollo y cierre de la actividad.

Se notaron algunos inconvenientes a la hora de formular las instrucciones para desarrollar una actividad. La nota general fue un B+, un solo alumno obtuvo MB+.

Manejo de recursos, “(Tabla 2)”: representa una nota promedio del *Uso de material para la construcción* junto con las *Inferencias didácticas*, “(Tabla 1)” durante el inicio, desarrollo y cierre de la actividad.

En general, el manejo de recursos en la etapa inicial fue Bueno. Luego fue mejorando a lo largo del trabajo. Los resultados fueron: un alumno B, dos alumnos MB y un alumno MB+.

Participación en clase, “(Tabla 2)”: representa una nota promedio de la *Interacción con el grupo* “(Tabla 1)” durante el inicio, desarrollo y cierre de la actividad.

Este indicador en particular refleja el trabajo dinámico de la clase, y el rol activo de cada uno de los participantes. Refleja la conexión entre ellos, que se pone de manifiesto con la apertura

de debates y la confrontación de opiniones que promueven cambios de estrategias para la resolución de los problemas propuestos. La nota fue MB+.

CONCLUSIONES

Hemos visto que las construcciones geométricas juegan un rol indudable en el sistema euclídeo; así también, constituyen un dominio propicio para el trabajo con demostraciones.

Desde una perspectiva complementaria a la anterior, podemos valerlos de los problemas de regla y compás para enseñar métodos de resolución. Hemos presentado los métodos implicados en esta clase de problemas y hemos delimitado su dominio de aplicación.

La forma de trabajo grupal genera posibilidades de discusión y re-descubrimiento de las distintas propiedades y aplicaciones siempre que el docente haga las intervenciones necesarias.

Como mencionamos anteriormente, se notaron algunos inconvenientes a la hora de formular las instrucciones para desarrollar una actividad. Sin embargo, el intercambio de ideas y la indagación de bibliografía – webgrafía permitió lograr que cuando estas construcciones sintéticas son interiorizadas, los aprendizajes se concreten y socialicen. Las argumentaciones fueron muy ricas, ya que tuvieron que relacionar conceptos para señalar los nodos problemáticos que encausaron su toma de decisiones y sus procesos de resolución. Por tanto, todo indica que si se logra combinar las construcciones geométricas con las conexiones sintéticas, podemos hablar de un aprendizaje significativo no sólo para su enriquecimiento conceptual sino también para su formación como futuro docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

González, S: *La Física que enseñamos y cómo la enseñamos*. Actas. XVII Reunión Nacional de Educación en Física. El Desafío de Enseñar a Aprender Física en los umbrales del Siglo XXI. A.P.F.A. Córdoba, Argentina, 2011.

González Urbaneja, P.M. (1991): *Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas: Génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza*. Enseñanza de las Ciencias, 9(3), pp. 281-289.

Guzmán, M. (1989): *Enseñanza de la Ciencia y de la Matemática*. Zaragoza. Publicaciones del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

Ortega I. Ortega T. (Junio 2004): *Los diez problemas de Apolonio*. Revista Suma. Junio 2004, pp. 59-70. Disponible en:

<http://revistasuma.es/sites/revistasuma.es/IMG/pdf/46/059-070.pdf> [23- 07-2012]

Perrenoud, P. (2004): *Diez nuevas competencias para enseñar*. Invitación al viaje: Graó, Barcelona.

Perrenoud, P. (2001): *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: Profesionalización y razón pedagógica*: Graó, Barcelona.

Schön, D.A. (1992): *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*: 2da. Ed. Paidós Ibérica, Barcelona.