CÁLCULO SIMBÓLICO SOBRE ESTADOS COHERENTES GENERALIZADOS.

TESIS DOCTORAL

ROMINA ANDREA RAMÍREZ

DIRECTOR: DR. GERARDO LUIS ROSSINI

CODIRECTOR: DRA. MARCELA SANMARTINO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

2013

A Ariel, Lucio, Franco y Alvarito.

Agradecimientos.

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que han colaborado en la obtención de este logro.

A Marcela por haberme aceptado como su alumna en el comienzo de este camino, por apoyarme guiarme y siempre valorarme, aún cuando yo no supe comprenderla.

A Gerardo por haber tomado la responsabilidad de continuar con mi formación aceptando ser mi director. Gracias por el tiempo dedicado, el entusiasmo en la transmisión de los conocimientos y por enseñarme a valorar la belleza, la precisión, y la seguridad en la investigación científica.

A los jurados de este trabajo, por su dedicación, compromiso y aportes que contribuyeron de manera importantísima a mejorar el mismo.

Al departamento de Matemática, compañeros de cátedra, alumnos y oficinas vecinas por compartir cada día.

A los vecinos físicos, quienes me abrieron las puertas y me adoptaron como parte de esa gran comunidad, permitiéndome participar de ella siempre. No puedo dejar de agradecer en especial a Fidel Schaposnik, Daniel Cabra, Guillermo Silva, Nicolás Grandi, Diego Rosales y Marta Reboiro por tenerme presente siempre.

A mis incondicionales compañeras Vicky, Maru, Belén, Juli, Majo y Claudia por compartir mi vida y permitirme ser parte de la de ellas.

A mis padres, mis hermanos, abuela, familia y amigos por ser el sostén invaluable de mi vida.

A Ariel por estar a mi lado siempre, colaborando cada día con su comprensión, paciencia y amor.

Gracias y de la forma más especial a Lucio, Franco y Alvarito, por llenar cada uno de mis días de sol.

Índice general

Introducción	1
Organización de la tesis	1
Resultados preliminares.	5
Parte 1. Estados coherentes de Heisenberg-Weyl y cálculo simbólico en variable compleja	9
Capítulo 1. Estados coherentes	11
1. Reseña histórica	11
2. Estados coherentes de Perelomov	12
Capítulo 2. Operadores y símbolos	23
1. Preliminares: Operadores Anti Wick y Toeplitz	23
2. Operadores Toeplitz como realización de operadores anti Wick	25
3. Operadores Toeplitz con símbolo radial	28
4. Problemas relacionados	31
Apéndice.	35
Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo.	35
Parte 2. Estados coherentes fermiónicos y cálculo en variables de Grassmann	39
Capítulo 3. Álgebra de Grassmann	41
1. Descripción general	41
2. Derivación	45
3. Integración	46
4. Forma sesquilineal	47
5. Núcleo reproductivo	50
6. Proyección	52
7. Positividad	54

Capítulo 4. Estados coherentes fermiónicos	59
1. Operadores fermiónicos	59
2. Estados coherentes fermiónicos	60
Capítulo 5. Operadores y símbolos sobre variables Grassmann	65
1. Operadores anti Wick y Toeplitz sobre variables Grassmann	65
2. Operadores Toeplitz Grassmann diagonales	67
Parte 3. Estados coherentes q-bosónicos y cálculo en variables paraGrassmann	71
Capítulo 6. Estados coherentes q -bosónicos	75
1. Operadores q -bosónicos	75
2. Estados coherentes y álgebra paraGrassmann	77
Capítulo 7. Cálculo en variables paraGrassmann	81
1. Derivación en $pG_{p+1,\alpha}$	81
2. Integración en $pG_{p+1,\alpha}$	84
3. Completitud de los estados coherentes q -bosónicos	87
4. Forma sesquilineal en $pG_{p+1,\alpha}$	88
5. Núcleo reproductivo	93
6. Proyección	94
7. Positividad.	95
Capítulo 8. Operadores sobre variables paraGrassmann	99
1. Operadores Toeplitz y anti Wick sobre variables paraGrassmann	99
2. Operadores Toeplitz paraGrassmann diagonales	102
3. Operadores sobre variables paraGrassmann en el límite $p \rightarrow \infty$	106
Capítulo 9. Funciones de varias variables paraGrassmann	117
1. Estados coherentes para sistemas q -bosónicos con varios grados de libertad	117
2. Fórmula de traza	119
3. Termodinámica en ejemplos simples	120
Conclusiones.	125
Bibliografía	129

Introducción

Un concepto fundamental en el análisis funcional y sus aplicaciones en física-matemática, es la existencia de conjuntos completos de vectores ortonormales en un espacio de Hilbert. Existen también conjuntos sobrecompletos, que pierden la propiedad de ortogonalidad pero conservan la resolución de la identidad. En particular, los denominados sistemas de estados coherentes son ubicuos en Mecánica Cuántica.

Los estados coherentes han sido considerados en el marco de la Mecánica Cuántica por Schrödinger y von Neumann, pero fue mucho más tarde que comenzó el desarrollo sistemático de sus definiciones y del análisis funcional sobre tales bases sobre-completas ([Berezin 1971], [Berezin 1974], [Glauber 1963]). Esta serie de trabajos dio lugar al sistema estándar de estados coherentes en el plano complejo, asociado al grupo de Heisenberg-Weyl como grupo de simetría del espacio de fases de la dinámica clásica de partículas libres. La variable compleja, como parámetro del sistema de estados coherentes, permite describir los vectores del espacio de Hilbert como funciones analíticas enteras en el espacio de Segal-Bargmann. Es precisamente la analiticidad la que permite describir operadores mediante símbolos y permite desarrollar el cálculo simbólico.

Posterior generalizaciones [Perelomov 1986] permitieron definir y utilizar estados coherentes en variedades más elaboradas, localmente isomorfas a $\mathbb{C}^n$. Diversos conceptos de análisis funcional se generalizan casi trivialmente a estas variedades [Bates 1997, Hurt 1983, Simms 1976] siguiendo el formalismo de estados coherentes del plano. Este formidable aparato analítico inspiró la introducción de estados coherentes en la descripción de sistemas fermiónicos en Mecánica Cuántica. En este caso las variables que parametrizan el sistema de estados coherentes no son puntos en una variedad compleja sino las llamadas variables de Grassmann, elementos nilpotentes, con la propiedad de conjugación pero con un producto anticonmutativo.

El eje de esta tesis es la revisión, extensión de propiedades y utilización de estados coherentes en distintos contextos de interés en Mecánica Cuántica y Análisis Funcional.

Organización de la tesis

Este trabajo está dividido en tres partes centrales. En la primera de ellas se recuerda el proceso de construcción de los estados coherentes como fue propuesto por Perelomov en

[**Perelomov 1986**]. Utilizando estos estados, estudiamos los operadores Toeplitz (definición 2.3) en el espacio de Segal-Bargmann¹ $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ como realización de otros mas generales como son los anti Wick (definición 2.8). En este contexto analizamos como caso particular aquellos operadores que tienen símbolo radial, demostrando un resultado que precisa condiciones necesarias y suficientes por las cuales ciertos operadores Toeplitz radiales son unitariamente equivalentes a operadores diagonales particulares en $l^2(\mathbb{C})$ (espacio de las sucesiones complejas cuadrado sumables). El teorema 2.9 específicamente enuncia lo siguiente:

TEOREMA. ² Sea una función radial $\varphi(|z|)$ en la case $\mathcal{P}$, definida como

$$\mathcal{P} = \{\varphi(|z|) \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N}, \bar{z}^n \in \text{Dom}(T_\varphi)\}.$$

el operador Toeplitz T_φ se transforma unitariamente por la isometría W dada en (2.17) en un operador lineal t_φ que es diagonal en la base canónica de $l^2(\mathbb{C})$ definido como

$$t_\varphi : \{a_n\} \mapsto \{a_n \cdot \varphi_n\}$$

$$\text{con } \varphi_n = \frac{2}{n!} \int_0^\infty \varphi(r) r^{2n+1} e^{-r^2} dr.$$

Este, y otros resultados y ejemplos relacionados, pueden encontrarse en nuestro trabajo *A discussion on the natural domain of radial Toeplitz operators in Segal-Bargmann space* [**Ramírez 2012**]. A partir este análisis logramos revertir algunas imprecisiones cometidas por Grudsky y Vasilevski en [**Grudsky 2002**].

A partir de este teorema podemos demostrar la proposición 2.10, que nos proporciona una herramienta útil para visualizar los inconvenientes que existen al componer operadores Toeplitz bien definidos con símbolo radial, problema que aún continua abierto.

En la segunda parte, presentamos el álgebra Grassmann, su definición, el cálculo, y los estados coherentes asociados. En Física la utilización de estas variables es central en tratamiento de sistemas fermiónicos. En este caso, teniendo como finalidad homologar las construcciones y resultados de la primera parte, realizamos un estudio funcional del álgebra definiendo derivaciones, integración, una forma sesquilineal, un núcleo reproductivo, una proyección, positividad y

---

¹Ver definición 1.9

²El dominio $\text{Dom}(T_\varphi)$ se definirá en (2.5) y es el dominio natural del operador de Toeplitz T_φ .

los subespacios de funciones holomorfas y anti-holomorfas. Luego, fijando el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ como un espacio vectorial de dimensión 2 se define un módulo libre $\mathcal{K}$ de rango 2 sobre $\mathcal{H}$ donde los operadores de creación y destrucción actúan, lo que nos permitirá en la sección 2, determinar los estados coherentes fermiónicos. La existencia de un núcleo reproductivo sobre las funciones anti-holomorfas nos da la posibilidad de definir operadores Toeplitz sobre ellas, los operadores Toeplitz Grassmann, y los operadores anti-Wick Grassmann. Aquí obtenemos como en la primera parte, condiciones suficientes y necesarias para que un operador de Toeplitz Grassmann sea unitariamente equivalente a un operador diagonal sobre $\mathcal{C}_2$ (espacio de las sucesiones complejas donde los elementos de la sucesión a partir del tercero son todos nulos). Específicamente demostramos el teorema 5.7 que

TEOREMA. ³ *Si φ un símbolo Grassmann radial, el operador Toeplitz Grassmann T_φ^G actuando en $\mathcal{B}_{AHol}$ es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ actuando en el espacio de sucesiones $\mathcal{C}_2$ donde*

$$\varphi_n = \int d\eta : (1 + \bar{\eta}\eta)\varphi(\eta, \bar{\eta})\eta^n \bar{\eta}^n : d\bar{\eta}.$$

En este caso, y porque la nilpotencia de grado dos nos permite trabajar sin problemas de convergencia, demostraremos la recíproca del teorema anterior (Teorema 5.8) que, como aplicación inmediata, nos permitirá garantizar la composición de operadores Toeplitz Grassmann.

En la última parte de este trabajo, y aprovechando el marco construido para el álgebra Grassmann, se estudian sistemas con estadística de exclusión generalizada conocidos como para-fermiones. La construcción de estados coherentes hace necesaria la introducción de variables de Grassmann generalizadas, nilpotentes de orden más alto, (álgebra paraGrassmann). El cálculo diferencial e integral sobre este tipo de variables presenta en la actualidad serias limitaciones; por eso siguiendo propuestas muy recientes exploramos la consistencia de un cálculo simbólico en variable paraGrassmann $\theta, \bar{\theta}$ para trasladar de manera consistente los resultados de la primer y segunda parte al caso de para-fermiones.

---

³La definición de $\mathcal{B}_{AHol}$ puede encontrarse en 7.3.

Estableciendo los estados coherentes, definimos los operadores anti-Wick y Toeplitz paraGrassmann y demostramos la equivalencia entre aquellos que tienen símbolo radial y un operador multiplicación de manera análoga al caso complejo y Grassmann. Así demostramos los siguientes dos teoremas (para mas detalle ver teorema 8.8 y 8.10):

TEOREMA. Si φ un símbolo paraGrassmann radial (dependiente de $\theta\bar{\theta}$), entonces el operador Toeplitz paraGrassmann T_{φ}^p es unitariamente equivalente al operador S_{φ}^p que actúa en el espacio de sucesiones ⁴ $\mathcal{C}_{p+1}$ siendo la sucesión $\{\varphi_n\}$ dada por

$$\varphi_n = \frac{1}{[n]_q!} \int d\theta : \varphi(\theta, \bar{\theta}) \mu(\theta, \bar{\theta}) \theta^n \bar{\theta}^n : d\bar{\theta}.$$

TEOREMA. Para cada sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{p+1}$ existe un símbolo paraGrassmann radial $a(\theta, \bar{\theta})$ tal que el operador Toeplitz T_a^p es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Finalmente estudiaremos el límite de estas álgebras cuando p tiende a infinito. Este estudio tiene su motivación en el hecho que en el límite, las relaciones de conmutación entre los operadores creación y destrucción q-bosónicos p -nilpotentes se reducen a las relaciones de conmutación bosónicas estándar. Esto permite representar bajo ciertas restricciones a un operador de $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ en él mismo como límite de operadores Toeplitz paraGrassmann. Este análisis nos permite demostrar el resultado más relevante de la sección que enuncia (teorema 8.18):

TEOREMA. Sea $A : \mathcal{D} \subset F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ un operador tal que $\phi_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \in \mathcal{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión de símbolos

$$\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \sum_{i,j=0}^p \varphi_{i,j}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j$$

tal que la sucesión de operadores Toeplitz paraGrassmann $T_{\varphi_p}^{(p)} : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ tiene por límite

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)} = A.$$

Este resultado, en el caso particular del corolario 8.19, nos permitirá tratar el problema de la composición de operadores Toeplitz complejos en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ como límite de operadores Toeplitz paraGrassmann, operadores simples en el sentido no poseen restricciones sobre su dominio por la nilpotencia de las variables $\bar{\theta}$.

---

⁴Definamos el espacio $\mathcal{C}_{p+1} = \{\{a_n\}_{n \geq 0} \text{ donde } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq p\}$.

Al finalizar esta tercera parte, describimos como a partir de integrales de funciones de variables para Grassmann podemos encontrar fórmulas de trazas de operadores que se utilizarán para estudiar la termodinámica de Hamiltonianos simples. Los resultados de esta sección se encuentran publicados en [Cabra 2012].

Resultados preliminares.

• Teorema de representación de Riesz.

TEOREMA. ***Teorema de representación de Riesz.** Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, y $\varphi \in \mathcal{H}^*$ espacio dual de $\mathcal{H}$, existe un único $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi(x) = (x, x_0)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Además $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \|x\|_{\mathcal{H}}$.*

Demostración. Ver Rudin [Rudin 1966] Teorema 6.19.

• Representaciones irreducibles. Lema de Schur.

DEFINICIÓN 0.1. *Una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V (sobre un cuerpo K) es un homomorfismo de grupo $G \rightarrow \text{Aut}(V)$ desde G al grupo de automorfismos de V . Si se elige una base para el espacio vectorial V , la representación se puede expresar como homomorfismo en el $GL(n, K)$ conocida como representación matricial.*

Entre las representaciones podemos encontrar las llamadas *representaciones irreducibles*. Estas, son representaciones de grupo sobre un espacio vectorial que carece de subespacios invariantes por la acción del grupo. El interés práctico de las representaciones irreducibles es que bajo ciertas circunstancias las representaciones de un grupo pueden caracterizarse en términos de la representaciones irreducibles.

Sean Π y Σ representaciones de un Grupo de Lie G actuando en espacios V y W . Una aplicación que entrelaza representaciones es una aplicación lineal $\phi : V \rightarrow W$ con la propiedad que

$$(0.1) \quad \phi(\Pi(A)v) = \Sigma(A)(\phi(v))$$

para todo $v \in V$ y todo $A \in G$. El lema de Schur es un resultado de suma importancia que nos describe como se comporta la aplicación que entrelaza representaciones irreducibles. Parte del

Lema de Schur se aplica a representaciones complejas y reales, pero parte de este se aplica a representaciones complejas únicamente.

TEOREMA. *Lema de Schur.*

1. Sean Π y Σ representaciones irreducibles reales o complejas actuando sobre V y W y sea $\phi : V \rightarrow W$ una aplicación que verifique (0.1). Entonces $\phi = 0$ o ϕ es un isomorfismo.
2. Sea Π una representación irreducible compleja. Si ϕ es una aplicación que cumpla con (0.1) entonces $\phi = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.
3. Si Π y Σ son representaciones irreducibles y $\phi_1, \phi_2 : V \rightarrow W$ aplicaciones no nulas que verifiquen (0.1) entonces $\phi_1 = \lambda \phi_2$.

Demostración. Ver Teorema 4.26 de [Hall].

TEOREMA. Para un valor de λ fijo $\lambda \neq 0$, dos representaciones irreducibles del grupo W_1 son isomorfas.

Demostración. Ver [Stone 1930] y [von Neumann 1931].

• La medida de Haar.

La medida de Haar es una manera de asignar un “volumen invariante” a los subconjuntos de grupos topológicos localmente compactos y de definir posteriormente una integral para las funciones sobre esos grupos.

Sea G un grupo topológico localmente compacto⁵. Si a es un elemento de un grupo G y S es un subconjunto de G , entonces definimos el trasladado por la izquierda y por la derecha de S de la siguiente manera:

- La traslación izquierda: $aS = \{a \cdot s : s \in S\}$.
- La traslación derecha: $Sa = \{s \cdot a : s \in S\}$.

Las traslaciones izquierda y derecha trasladan conjuntos de Borel a conjuntos de Borel.

DEFINICIÓN 0.2. Una medida $d\mu$ en los subconjuntos de Borel de G se llama invariante por traslación izquierda si y sólo si para todos los subconjuntos de Borel S de G y para toda a en G

---

⁵Si X es un espacio topológico entonces es localmente compacto si, y sólo si, cada punto geométrico admite una base entornos compactos, es decir, si cada entorno de un punto $x \in X$ contiene un conjunto compacto que sea un entorno de x .

se tiene ⁶

$$d\mu(aS) = d\mu(S).$$

Una medida de Haar a izquierda (resp. a derecha) es una medida regular Borel en G que es finita en subconjuntos compactos e invariante por traslaciones a izquierda (resp. a derecha). El ejemplo más familiar es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, visto como un grupo aditivo. En este caso como el grupo es abeliano, la medida de Haar es invariante a izquierda y derecha (bi-invariante).

TEOREMA. *Existencia y unicidad de la medida de Haar.* Si G es un grupo localmente compacto, entonces existe una medida de Haar a izquierda (y derecha) única salvo escalar.

Demostración. Ver teorema 6.8 en [Knapp 2005].

Consideremos una medida de Haar a izquierda $d_l x$. Como traslaciones a izquierda en G conmutan con traslaciones a derecha, $d_l(\cdot g)$ es una medida de Haar a izquierda para cualquier $g \in G$. Las medidas a izquierda de Haar son proporcionales, de donde

$$d_l(\cdot g) = \Delta(g^{-1})d_l(\cdot)$$

donde $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ se denomina función modular de G .

TEOREMA. Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado. Sean Δ_G y Δ_H sus respectivas funciones modulares. Entonces, G/H tiene una medida G invariante no nula si y sólo si la restricción de Δ_G a H es igual a Δ_H . En este caso, la medida $d\mu(gH)$ de G/H es única salvo un escalar y verifica

$$\int_G f(g)d_l g = \int_{G/H} \left(\int_H f(gh)d_l h \right) d\mu(gH)$$

para toda f a soporte compacto en G .

Demostración. Ver teorema 6.18 en [Knapp 2005].

---

⁶Una definición similar se hace para la invariancia por traslación derecha.

Parte 1

Estados coherentes de Heisenberg-Weyl y cálculo simbólico en variable compleja

Estados coherentes

1. Reseña histórica

En líneas generales, un *sistema de estados coherentes* es un conjunto de vectores en un espacio de Hilbert que verifica dos propiedades centrales: la parametrización continua de esta familia de estados sobre un conjunto particular y la denominada resolución de la identidad. Existen varias definiciones de estos vectores, pero todas ellas involucran estas dos propiedades como centrales.

En el proceso de definición podemos encontrar a Schrödinger ([**Schrödinger 1926**]), quien fue el primero en proponer un sistema de funciones de onda no ortogonales para osciladores cuánticos. Luego, von Neumann utilizó un subconjunto de estas funciones de onda para estudiar procesos de medida de la posición y el momento en teorías cuánticas.

Fue recién en la década del 60 cuando Klauder, Segal, Bargmann y Berezin estudiaron este tema sistemáticamente [**Klauder 1960**] [**Klauder 1963**][**Klauder2 1963**]. El nombre de estados coherentes les fue otorgado por Glauber [**Glauber 1963**][**Glauber2 1963**], ya que eran los adecuados para describir un rayo coherente de luz láser en el marco de la teoría cuántica.

Un sistema de estados coherentes está íntimamente relacionado con un grupo de simetrías. El primer sistema estándar (el propuesto por Schrödinger) está relacionado con el grupo de traslaciones. Este grupo no es el único grupo de simetrías dinámicas de un sistema. Otro grupo natural es el de rotaciones y allí también puede realizarse la construcción de los estados coherentes que fue desarrollada por Radcliffe en el espacio de tres dimensiones [**Radcliffe 1971**]. Un año mas tarde, Perelomov generalizó la construcción para grupos de Lie en general. [**Perelomov 1986**]

Otros autores como Barut y Girardello [**Barut 1971**] realizaron una propuesta diferente de generalización de los estados coherentes, definiendolos como autoestados del operador destrucción. Sin embargo, esta no es efectiva para todos los grupos de Lie (por ejemplo no es aplicable para los compactos).

Dedicaremos este capítulo a la descripción de los estados coherentes como fueron propuestos por Perelomov en [Perelomov 1986]. Estudiaremos sus características, sus propiedades, y su tratamiento utilizando en análisis y el cálculo en funciones complejas como herramienta principal.

2. Estados coherentes de Perelomov

La característica principal de la generalización propuesta por Perelomov para los estados coherentes, es que puede ser aplicado para cualquier grupo de Lie permitiendo parametrizar estos estados por puntos de espacios homogéneos donde el grupo actúa. Es por esto que se interpreta estos espacios homogéneos como el espacio de fase de un sistema físico. Así tenemos una correspondencia entre los estados coherentes y puntos en el espacio de fases que representan estados del sistema clásico.

El proceso de construcción definido por Perelomov es sistemático y puede ser aplicado a varios grupos. Sin embargo, en este trabajo solo dedicaremos un espacio al grupo de Heisenberg Weyl. Esta estructura será suficiente para motivar más adelante la construcción de los estados coherentes para el álgebra Grassmann y para Grassmann.

2.1. Estados coherentes: definición general. Consideremos G un grupo de Lie arbitrario y siendo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores acotados en un el Hilbert $\mathcal{H}$, consideremos $T : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación irreducible.¹ ²Para distinguir los elementos de un espacio de Hilbert abstracto de lo que próximamente serán sus realizaciones como funciones o sucesiones, elegimos usar la notación de Dirac usual en física cuántica. En la tabla (ver 1.1) resumimos la notación a utilizar.

Siendo $|\psi_0\rangle$ un elemento genérico de $\mathcal{H}$ llamemos $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$ siendo $g \in G$. Observemos que en Mecánica Cuántica dos vectores $|\psi_{g_1}\rangle$ y $|\psi_{g_2}\rangle$ representan el mismo estado (i.e difieren en una fase) solo si $T(g_2^{-1}g_1)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha}|\psi_0\rangle$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Supongamos que H es un subgrupo de

---

¹No existe un resultado general que caracterice las representaciones de cualquier grupo de Lie. Kirillov pudo resolver este problema para grupos de Lie nilpotentes en 1962 [Kirillov 1962].

²Notación usual para representaciones: $T : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o $T : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ donde $\text{Aut}(V)$ son los automorfismos de un espacio vectorial.

	notación mat.	notación de Dirac	glosario de Dirac
vector	ψ	$ \psi\rangle$	“ket”
forma lineal dual	ψ^*	$\langle\psi $	“bra”
proyector ortogonal	P_ψ	$ \psi\rangle\langle\psi $	“ket-bra”
operador lineal	$T\psi$	$T \psi\rangle$	

CUADRO 1.1. Notación de Dirac para espacios de Hilbert.

G de elementos $h \in H$ tales que $T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_0\rangle$ con $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$. Cuando este subgrupo es maximal se denomina grupo de isotropía del estado $|\psi_0\rangle$.

Esta construcción nos permite identificar a todos los vectores $|\psi_g\rangle$ que difieren en una fase, en la misma clase de equivalencia G/H . Eligiendo un representante $g(x)$ con $x \in X$ tenemos un conjunto de estados $|\psi_{g(x)}\rangle$ que llamaremos $|x\rangle$.

DEFINICIÓN 1.1. Siendo g elementos de un grupo de Lie G , y $T(g)$ una representación irreducible del mismo que actúa en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el sistema de estados $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$ es llamado sistema de estados coherentes $\{T, |\psi_0\rangle\}$.

Si H es el subgrupo de isotropía para el estado $|\psi_0\rangle$, un estado coherente $|\psi_g\rangle$ está determinado por un punto $x = x(g) \in G/H$

OBSERVACIÓN 1.2. En algunos casos es útil considerar un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ más grande que $\mathcal{H}$ llamado espacio de Hilbert equipado (rigged Hilbert space). Entonces la acción de la representación debe extenderse al nuevo espacio $\tilde{\mathcal{H}}$. Este es el caso de la construcción de estados coherentes del álgebra Grassmann y para Grassmann que serán desarrollados mas adelante.

Entre las propiedades de un sistema de estados coherentes podemos mencionar

- El producto interno de dos estados coherentes $|x\rangle = |x(g)\rangle$ y $|x'\rangle = |x'(g')\rangle$: siendo $|0\rangle = |\psi_0\rangle$,

$$(1.1) \quad \langle x|x'\rangle = e^{i[\alpha(g)-\alpha(g')]} \langle 0|T(g^{-1}g')|0\rangle$$

y es independiente de los representantes g y g' .³

---

³Esto es porque $\alpha(gg') = \alpha(g) + \alpha(g')$

- Si dx es la medida invariante en el espacio G/H entonces

$$(1.2) \quad I = \int d\mu(x) |x\rangle\langle x|$$

siendo $d\mu(x) = [\int dx |\langle 0|x\rangle|^2]^{-1} dx$. En efecto, supongamos que existe para el grupo G una medida $dy(g)$ que es invariante por la acción del grupo. Esto induce una medida invariante dx para el espacio cociente $X = G/H^4$. Consideremos, asumiendo condiciones de convergencia, el operador

$$B = \int dx |x\rangle\langle x|$$

donde $|x\rangle\langle x|$ es el proyector para el estado $|x\rangle$. Como la medida dx es invariante, tenemos que $T(g)B[T(g)]^{-1} = B$. Entonces B conmuta con todos los operadores $T(g)$. Como $T(g)$ es irreducible, por el Lema de Schur debe ser $B = dI$ (proporcional a la identidad). La constante $d = \langle y|B|y\rangle$ tomando $\langle y|y\rangle = 1$.

La expresión (1.2) se denomina resolución de la identidad.

- Cualquier estado $|\psi\rangle$ puede desarrollarse en el sistema de estados coherentes

$$(1.3) \quad |\psi\rangle = \int d\mu(x) c(x) |x\rangle$$

donde $c(x) = \langle x|\psi\rangle$. Además

$$(1.4) \quad \langle \psi|\psi\rangle = \int d\mu(x) |c(x)|^2.$$

Cabe destacar que $c(x) = \langle x|\psi\rangle$ denominado símbolo de $|\psi\rangle$, no es arbitrario aunque siempre verifica

$$(1.5) \quad c(x) = \int d\mu(y) \langle x|y\rangle c(y).$$

- Si $K(x, y) = \langle x|y\rangle$ entonces

$$(1.6) \quad K(x, z) = \int d\mu(y) K(x, y) K(y, z)$$

llamada propiedad reproductiva.

- El sistema de estados coherentes es sobrecompleto.⁵

---

⁴Ver teoremas y .

⁵Por (1.2) podemos establecer dependencias lineales entre los estados coherentes.

• **Estados coherentes: caso Heisenberg Weyl.**

DEFINICIÓN 1.3. *El álgebra de Heisenberg Weyl es un álgebra de Lie real tridimensional generada por $\{e_1, e_2, e_3\}$ con las siguientes relaciones de conmutación básicas*

$$(1.7) \quad [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Consideremos el llamado operador creación $\hat{a}^* = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$ y su conjugado el operador destrucción $\hat{a} = \frac{q+ip}{\sqrt{2}}$ adimensionalizados, donde q y p son los llamados operadores coordenada y momento que actúan en un espacio de estados $|\psi\rangle$ que llamaremos $\mathcal{H}$ y satisfacen las llamadas reglas de conmutación canónicas dadas por

$$(1.8) \quad [q, p] = i\hbar \hat{I} \quad [q, \hat{I}] = [p, \hat{I}] = 0$$

con $\hat{I}$ el operador identidad en $\mathcal{H}$. Siguiendo (1.8) tenemos que

$$(1.9) \quad [\hat{a}, \hat{a}^*] = \hat{I} \quad [\hat{a}, \hat{I}] = [\hat{a}^*, \hat{I}] = 0$$

Por la definición 1.3, vemos que los operadores $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{I}$ son los generadores del *Álgebra de Heisenberg Weyl* denotada por $\mathcal{W}_1$.

DEFINICIÓN 1.4. *Un espacio de Fock $\mathcal{F}$ (con un grado de libertad) es un espacio de Hilbert que contiene un vector $|0\rangle$ (llamado vector vacuum), con un operador $\hat{a}$ (llamado operador destrucción) tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$, y su adjunto $\hat{a}^*$ (llamado operador creación), verificando las reglas de conmutación canónicas $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = I$, con I el operador identidad en $\mathcal{F}$ de manera tal que*

$$(1.10) \quad \left\{ |n\rangle = \frac{(\hat{a}^*)^n |0\rangle}{\sqrt{n!}} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

que resulta ser ortonormal y completa en $\mathcal{F}$.

La completitud queda expresada por la *resolución de la identidad*

$$(1.11) \quad I = \sum_{n \in \mathbb{N}} |n\rangle \langle n|$$

donde la suma se entiende en el sentido debil, significando que para cualquier par de vectores $|\psi\rangle, |\eta\rangle$ en el espacio de Fock, $\langle \eta | \psi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \eta | n \rangle \langle n | \psi \rangle$.

La construcción del grupo de Lie W_1 asociado al álgebra de Heisenberg Weyl $\mathcal{W}_1$, se realiza por exponenciación de los elementos del álgebra: si $x = is\hat{I} + z\hat{a}^* - \bar{z}\hat{a} \in \mathcal{W}_1$ entonces

$$e^x = e^{is\hat{I} + z\hat{a}^* - \bar{z}\hat{a}} = e^{is\hat{I}} e^{z\hat{a}^* - \bar{z}\hat{a}} =: e^{is\hat{I}} D(z)$$

donde $D(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}}$. Este operador es conocido como *operador desplazamiento*.

Formalmente, el grupo de Heisenberg sobre un anillo conmutativo A es el grupo real de matrices triangulares superiores 3×3 de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b, c son elementos de A . A menudo se toma como anillo A el cuerpo de los números reales, en cuyo caso el grupo resulta W_1 .

El problema ahora radica en considerar todas las representaciones irreducibles de W_1 , situación que fue resuelta independientemente por Stone en 1930 y von Neuman en 1931 [von Neumann 1931] [Stone 1930]. En primer lugar, notemos que el centro del grupo W_1 está formado por los elementos $g = (s, 0)$. Entonces, si $T(g)$ es una representación irreducible del grupo W_1 , $T((s, 0))$ es una representación irreducible unitaria del subgrupo $\{(s, 0)\}$. Esta representación estará caracterizada por un número λ : $T^\lambda((s, 0)) = e^{i\lambda s} \hat{I}$. Esto se resume en el teorema de Stone y von Neumann enunciado en la sección de preliminares.

Teniendo W_1 el grupo de Lie de Heisenberg Weyl, y $T(g)$ una representación irreducible unitaria de W_1 actuando en el espacio de estados $\mathcal{H}$ podemos aplicar el esquema de construcción de los estados coherentes como vimos antes. Tomemos $|\psi_0\rangle$ un vector fijo y a partir de él un nuevo vector

$$(1.12) \quad |\psi_g\rangle := T(g)|\psi_0\rangle.$$

Es fácil ver que el estado representado por $|\psi_0\rangle$ bajo la acción de operadores $T(s, 0)$ permanece en la misma clase de equivalencia de donde los elementos $(s, 0)$ pertenecen al grupo de isotropía del estado $|\psi_0\rangle$. Por otro lado, la acción de operadores $T(0, \alpha)$ con $\alpha \neq 0$ blah .. Esto nos dice que el subgrupo de isotropía del estado $|\psi_0\rangle$ consta solo de los elementos de la forma $(s, 0)$.

Aplicando el operador desplazamiento $D(z)$ al vector $|\psi_0\rangle$ con $z \in \mathbb{C}$, podemos generar un conjunto de estados para $z \in \mathbb{C}$

$$(1.13) \quad |z\rangle = D(z)|\psi_0\rangle.$$

DEFINICIÓN 1.5. *El sistema $\{|z\rangle\}$ dado por (1.13) construido a partir de la representación irreducible $T(g)$ y del vector fijo $|\psi_0\rangle$ se denomina sistema de estados coherentes estándar (o de Heisenberg Weyl).*

Algunas propiedades que serán útiles más adelante son:

- Son estados no mutuamente ortogonales, en el sentido que el producto interno

$$(1.14) \quad \langle z|w\rangle = \langle\psi_0|D(z-w)|\psi_0\rangle$$

es en general no nulo para $z \neq w$.

- El operador $D(z)$ aplica estados coherentes en estados coherentes.

$$(1.15) \quad D(z)|w\rangle = e^{i\text{Im}z\bar{w}}|z+w\rangle$$

- La completitud del sistema de estados coherentes está dada por la *resolución de la identidad* en $\mathcal{H}$

$$(1.16) \quad I = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} |z\rangle\langle z|,$$

donde la igualdad es entendida en el sentido débil, significando que para cualquier par de vectores $|\psi\rangle, |\eta\rangle$ en el espacio de Fock

$$(1.17) \quad \langle\eta|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} \langle\eta|z\rangle\langle z|\psi\rangle.$$

con $dz d\bar{z}$ medida de Lebesgue del plano complejo. En efecto, si A está dado por

$$(1.18) \quad A = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} |z\rangle\langle z|,$$

por la construcción de los estados coherentes el conmutador $[A, D(z)] = 0$ para cualquier z . Entonces por el lema de Schur $A = d.I$. El valor de d se encuentra calculando el promedio de A sobre los estados coherentes, siendo entonces $d^{-1} = \langle\alpha|A|\alpha\rangle$.

- Sobrecompletitud o dependencia lineal, consecuencia de la resolución de la identidad

$$(1.19) \quad |w\rangle = \int \frac{dz d\bar{z}}{\pi} |z\rangle\langle z|w\rangle$$

Utilizando (1.16), cualquier estado $|\psi\rangle$ puede representarse como

$$(1.20) \quad |\psi\rangle = \int \frac{dz d\bar{z}}{\pi} |z\rangle \langle z|\psi\rangle,$$

entendida en sentido débil como

$$(1.21) \quad \langle \eta|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} \langle \eta|z\rangle \langle z|\psi\rangle.$$

DEFINICIÓN 1.6. *La función $\langle z|\psi\rangle$ se llama símbolo del estado $|\psi\rangle$.*

OBSERVACIÓN 1.7. *Si llamamos $K(z, w) = \langle z|w\rangle$ por (1.21) tenemos que*

$$(1.22) \quad K(z, w) = \int \frac{d\alpha d\bar{\alpha}}{\pi} K(z, \alpha) K(\alpha, w),$$

*caso particular de la denominada fórmula reproductiva de los núcleos reproductivos.*⁶

Recordemos que el proceso de construcción de estados coherentes depende implícitamente de un vector inicial fijo $|\psi_0\rangle$. Si $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ tenemos una propiedad adicional: se satura el principio de incerteza. En este caso particular puede verificarse también que

- : Los estados coherentes son autoestados del operador destrucción, es decir $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$
- : Pueden escribirse en la base número de ocupación

$$(1.23) \quad |z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

(fórmula de Glauber).

Una construcción diferente de los estados coherentes, fue desarrollada unos años antes que Perelomov por Barut y Girardello [**Barut 1971**]. Allí, los estados coherentes se definen como los autoestados del operador destrucción. Aunque en el caso de Heisenberg Weyl ambas construcciones proveen el mismo sistema de estados coherentes, esta última forma de definirlos no

---

⁶Para más detalle, ver el apéndice final.

es aplicable para todos los grupos de Lie. En particular, solo es válida para grupos de Lie compactos. Más adelante en este trabajo, usaremos esta forma de definición ya que su aplicación es más práctica que la propuesta por Perelomov.

• **Representación de Bargmann Fock.** Como hemos visto en (1.20), todo estado $|\psi\rangle$ está representado por su símbolo $\langle z|\psi\rangle$. Consideremos un estado $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ normalizado, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$. Usando (1.23), tenemos que

$$\langle z|\psi\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} c_n.$$

DEFINICIÓN 1.8. *Diremos que*

$$(1.24) \quad \psi(\bar{z}) = \langle z|\psi\rangle e^{|z|^2/2}, \quad \text{siendo } z \in \mathbb{C}$$

es la función de onda de Bargmann del estado $|\psi\rangle$.

Observar que utilizando la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ resulta que la función $\psi(\bar{z})$ es anti-analítica en $\mathbb{C}$. Notemos que, siendo $dv(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ la medida usual sobre el plano complejo

$$(1.25) \quad \langle \psi|\psi\rangle = \int dv(z) \langle \psi|z\rangle \langle z|\psi\rangle$$

$$(1.26) \quad = \int dv(z) e^{-|z|^2} |\psi(\bar{z})|^2.$$

Esta igualdad nos permite relacionar el espacio de estados $|\psi\rangle$ con el espacio de las funciones anti-analíticas en $\bar{z}$ cuadrado integrables con la medida $d\mu(z) = e^{-|z|^2} dv(z)$.

La acción de $\langle \psi|$ -dual del estado $|\psi\rangle$ -sobre el estado $|\phi\rangle$ usando la resolución de la identidad puede representarse como

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \langle \psi|\phi\rangle &:= \int dv(z) \langle \psi|z\rangle \langle z|\phi\rangle \\ &= \int d\mu(z) e^{-|z|^2} \overline{\psi(\bar{z})} \phi(\bar{z}). \end{aligned}$$

Esto motiva la siguiente definición y proposición:

DEFINICIÓN 1.9. *Llamaremos $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ al espacio de las funciones anti-analíticas $f(\bar{z})$ cuadrado integrables con la medida $d\mu(z) = e^{-|z|^2} dv(z)$ con $dv(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$.*

PROPOSICIÓN 1.10. *El espacio $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathbb{C}, d\mu)}$ dado por*

$$(1.28) \quad (f, g)_{L_2(\mathbb{C}, d\mu)} = \int d\mu(z) e^{-|z|^2} f(\bar{z}) \overline{g(\bar{z})}.$$

Demostración. Ver demostración y propiedades de este espacio en la sección 1.6 de [Folland 1989].

Con esta proposición, podemos precisar las ideas de la tabla (1.1) en término de funciones anti-analíticas como puede verse en la tabla (1.2).

	$F^2(\mathbb{C}, d\mu)$	$\mathcal{F}$
vector	$\psi(\bar{z})$	$\langle z \psi\rangle$
forma lineal dual	$\psi^*(z)$	$\langle\psi z\rangle$
producto interno (lineal en ψ)	$(\psi(\bar{z}), \eta(\bar{z}))$	$\langle\eta \psi\rangle$
proyección ortogonal	$P_\psi[\varphi](\bar{z})$	$\langle z \psi\rangle\langle\psi \varphi\rangle$
operador lineal	$T\psi(\bar{z})$	$\langle z T \psi\rangle$

CUADRO 1.2. Correspondencia entre estructuras de $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y el espacio de Fock genérico $\mathcal{F}$.

El espacio $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ tiene la estructura de espacio de Fock con un grado de libertad (ver definición 1.4). Los operadores destrucción y creación están dados por los operadores lineales

$$\hat{a} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \hat{a}^* = \bar{z}.$$

definidos respectivamente como la derivación de una función respecto de $\bar{z}$ y la multiplicación por $\bar{z}$. El vector vacuum normalizado según la norma inducida por el producto interno $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathbb{C}, d\mu)}$, es la función constante $\phi_0(\bar{z}) = 1$, ya que $\hat{a}\phi_0 = 0$. La acción recursiva del operador creación $\hat{a}^\dagger$ sobre el vector vacuum genera un conjunto infinito numerable en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$(1.29) \quad \left\{ \frac{(\hat{a}^*)^n \phi_0}{\sqrt{n!}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Este conjunto es completo, como lo manifiesta la existencia del desarrollo de Taylor de las funciones anti-analíticas.

Nos referiremos como espacio de Fock *abstracto* al espacio de Hilbert definido desde el vector vacuum y el par de operadores de creación y destrucción (el último adjunto formal respecto del producto interno) verificando las relaciones de conmutación canónicas. Un ejemplo concreto de espacio de Hilbert con tal estructura como $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, será llamado en lo sucesivo como una *realización* del espacio de Fock abstracto. En este sentido, la función $\phi_0(\bar{z})$ realiza el vector vacuum $|0\rangle$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ realiza el operador $\hat{a}$, etc., en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

• **Sobrecompletitud y proyección de Bargmann.** Hemos visto que el desarrollo de un vector $|\psi\rangle$ en término de estados coherentes se puede escribir de manera conveniente como

$$(1.30) \quad |\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} dv(z) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} f(z, \bar{z}) |z\rangle$$

con $f(z, \bar{z}) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle z|\psi\rangle$. Esta igualdad debe ser entendida en sentido débil.

La sobrecompletitud implica que para cualquier vector $|\psi\rangle$, la función $f(z, \bar{z})$ en (1.30) no es única: existen funciones $g(z, \bar{z})$ tales que

$$(1.31) \quad \int_{\mathbb{C}} dv(z) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} g(z, \bar{z}) |z\rangle = |\psi\rangle$$

Es importante notar que $\langle \psi|\psi\rangle < \infty$ si y solo si $g(z, \bar{z}) \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Podemos entonces considerar una relación de equivalencia en $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$: dos funciones son equivalentes si estas desarrollan el mismo vector en (1.31). Con el objetivo de caracterizar la clase de equivalencia de funciones $g(z, \bar{z})$ en $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ de un vector dado $|\psi\rangle$, calculamos las proyecciones de (1.31) sobre estados coherentes obteniendo

$$(1.32) \quad \langle z|\psi\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} P(g)(\bar{z}),$$

donde $P(g)$ es la proyección de Bargmann anti-analítica de g (ver Capítulo 2, (2.2)). Entonces usamos (1.16) para recuperar

$$(1.33) \quad |\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} |z\rangle \langle z|\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} P(f)(\bar{z}) |z\rangle,$$

mostrando que para un vector dado $|\psi\rangle$ existe una función cuadrado integrable anti-analítica $\psi(\bar{z}) := P(f)(\bar{z})$ que lo desarrolla en el conjunto de estados coherentes. Más aún, como las

funciones $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ son invariantes ante la proyección de Bargmann, esta función $\psi(\bar{z})$ es única. La relación de equivalencia sobre $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ queda entonces caracterizada:

DEFINICIÓN 1.11. *Diremos que $g \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ pertenece a la clase de $|\psi\rangle$ si y solo si $P(g)(\bar{z}) = e^{|z|^2/2} \langle z|\psi\rangle$.*

Así, la aplicación no inyectiva pero bien definida de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ en $\mathcal{F}$ dada por (1.31), establece un isomorfismo al restringirse a $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Podemos así establecer una transformación lineal invertible $U : \mathcal{F} \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ dada por,

$$(1.34) \quad U(|\psi\rangle) = \psi(\bar{z}) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle z|\psi\rangle.$$

Esta aplicación es unitaria, y aplica el conjunto ortonormal completo $\{|n\rangle\}$ sobre el conjunto ortonormal $\{\bar{z}^n/\sqrt{n!}\}$. Su inversa, por (1.33), es

$$(1.35) \quad U^{-1}(\psi(\bar{z})) = |\psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{\pi} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \psi(\bar{z}) |z\rangle.$$

Estas ecuaciones (1.34) y (1.35) describen, vía estados coherentes, la conexión entre el espacio de Fock abstracto $\mathcal{H}$ y su realización $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, que resulta una isometría como se puede ver en (1.27).

Capítulo 2

Operadores y símbolos

En el capítulo anterior hemos visto que un estado $|\psi\rangle$ de un espacio de estados abstracto $\mathcal{H}$, está unívocamente determinado por una función anti-analítica, símbolo del estado $|\psi\rangle$. El mecanismo natural para expresar esta correspondencia está en la existencia de los estados coherentes y a su propiedad de resolución de la identidad.

De la misma manera, es posible representar operadores que actúan en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a través de funciones llamadas *símbolos del operador*. En este sentido, la correspondencia entre funciones y operadores puede ser concebida como un proceso de cuantización.

Los estados coherentes permiten establecer esta correspondencia debido a su completitud expresada en la resolución de la identidad.

La principal ventaja que tiene esta correspondencia es que muchos de los interrogantes y propiedades del operador pueden reescribirse en términos de los símbolos que los representan.

1. Preliminares: Operadores Anti Wick y Toeplitz

Los operadores Toeplitz fueron introducidos en física por Berezin en el contexto de procesos de cuantización [Berezin 1971] [Berezin 1974]. En este contexto, los operadores Toeplitz en el espacio de Segal-Bargmann $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ aparecen como un caso particular de un concepto más general: los operadores con símbolo contravariante definidos en el espacio de Fock [Berezin 1972], los cuales llamaremos operadores Anti Wick.

Considerando distintas realizaciones de los operadores anti Wick, estableceremos en este capítulo condiciones necesarias y suficientes para determinar la equivalencia unitaria de operadores Toeplitz radiales en el espacio de Segal Bargmann con operadores diagonales en $l^2(\mathbb{C})$. Para esto, utilizaremos el formalismo del espacio de Fock y sus estados coherentes, usuales en la mecánica cuántica moderna. Los resultados serán ilustrados a través de ejemplos que permitan evidenciar la imprecisión de los resultados dados en [Grudsky 2002].

1.1. Operadores Toeplitz. Llamemos $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ el espacio de Hilbert de las funciones $g(z, \bar{z})$ en el plano complejo $\mathbb{C}$, *no necesariamente analíticas*, que son cuadrado integrables con la medida Gaussiana $d\mu(z)$. El espacio de Segal-Bargmann $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ definido en (1.9), es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, y un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo ¹ (ver Apéndice, Capítulo 4) dado por

$$(2.1) \quad K_w(\bar{z}) := e^{\bar{z}w}.$$

Consideremos la aplicación $P : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ dada por

$$(2.2) \quad P(f)(\bar{z}) = (f(\cdot), K_z(\cdot))_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} \equiv \int_{\mathbb{C}} d\mu(w) e^{\bar{z}w} f(\bar{w}).$$

Notemos que, para $f(\bar{w}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$P(f)(\bar{z}) = (f(\bar{w}), K_z(\bar{w}))_{L^2(\mathbb{C}, d\mu)} = \int_{\mathbb{C}} d\mu(w) e^{\bar{z}w} f(\bar{w}) = f(\bar{z}),$$

es decir P resulta la identidad sobre $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Por lo anterior, y como $g(w, \bar{w}) \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, $P[g(w, \bar{w})] \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ de donde $P^2[g(w, \bar{w})] = P[g(w, \bar{w})]$, resultando P una proyección de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ sobre $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

DEFINICIÓN 2.1. La proyección $P : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ definida en (2.2) se denomina *proyección de Bargmann sobre $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$* .

La existencia del núcleo reproductivo (2.1) y de la proyección de Bargmann, es la clave para la definición de los operadores Toeplitz (ver [Brown 1963]):

DEFINICIÓN 2.2. El operador $T_\varphi : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ con $\varphi(z, \bar{z})$ medible *no necesariamente analítica*, definido como

$$(2.3) \quad T_\varphi(f)(\bar{z}) = P(\varphi f)(\bar{z}),$$

con P la proyección de Bargmann, se llama *operador de Toeplitz con símbolo φ* .

Es decir, la acción del operador Toeplitz en una función en el espacio de Segal-Bargmann se obtiene como la proyección de Bargmann de la multiplicación del símbolo con la función. Por (2.2), la expresión integral del operador Toeplitz T_φ resulta

$$(2.4) \quad T_\varphi(f)(\bar{z}) = \int_{\mathbb{C}} d\mu(w) e^{\bar{z}w} \varphi(w, \bar{w}) f(\bar{w}).$$

---

¹El núcleo reproductivo $K_w(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ también es llamado vector de Poisson.

Notemos que dado un símbolo φ , la proyección de Bargmann en (2.3) puede no estar bien definida para cualquier función $f \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$: la condición suficiente sobre f es que $\varphi f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Entonces (ver [Berezin 1971]):

DEFINICIÓN 2.3. *Dada la función medible $\varphi(z, \bar{z})$ definida en $\mathbb{C}$, el dominio natural para el operador Toeplitz con símbolo φ es el subconjunto de $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$*

$$(2.5) \quad \text{Dom}(T_\varphi) = \{f \in F^2(\mathbb{C}, d\mu) : \varphi f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)\}.$$

OBSERVACIÓN 2.4. *Un endomorfismo en un espacio de Hilbert se dice bien definido si su dominio es denso en este espacio. En consecuencia, diremos que el operador T_φ está bien definido solo cuando su dominio natural sea denso en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.*

Con el objetivo de tratar con operadores Toeplitz bien definidos, debemos precisar las clases de símbolos en consideración. Por ejemplo Berger y Coburn [Berger 1986] construyen el cálculo simbólico para operadores Toeplitz con símbolos acotados, cuyo dominio natural es todo el espacio $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Más generalmente, Folland [Folland 1989] considera una clase que contiene símbolos no acotados φ caracterizados por la condición para cualquier $z \in \mathbb{C}$

$$(2.6) \quad \exists C > 0, \delta < 1/2, \text{ tal que } |\varphi(z, \bar{z})| \leq C \exp(\delta |z|^2).$$

En [Coburn 2001], Coburn opta por utilizar una clase mas general de símbolos φ verificando

$$(2.7) \quad \forall w \in \mathbb{C}, \varphi K_w \in L^2(\mathbb{C}, d\mu),$$

Esto significa que todos los vectores de Poisson estén en el dominio natural de T_φ .

En la próxima sección mostraremos que los operadores de Toeplitz en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ son un caso particular -o realización- de los operadores anti-Wick

2. Operadores Toeplitz como realización de operadores anti Wick

Introducimos una clase de operadores integrales formalmente dados por una expresión diagonal en el conjunto de los estados coherentes. Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert de estados $|\psi\rangle$ d un sistema bosónico,

DEFINICIÓN 2.5. Para una función medible $\varphi(w, \bar{w})$, el operador

$$(2.8) \quad A_\varphi = \int_{\mathbb{C}} \frac{dw d\bar{w}}{\pi} |w\rangle \varphi(w, \bar{w}) \langle w| : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

se llama operador anti Wick y la función $\varphi(w, \bar{w})$ se denomina símbolo anti-Wick o símbolo contravariante de A_φ .²

Este operador está definido en sentido débil, es decir que su dominio está formado por todos aquellos estados $|\psi\rangle$ tal que para todo $\langle z|$ elemento del dual del sistema de estados coherentes la integral

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{dw d\bar{w}}{\pi} \langle z|w\rangle \varphi(w, \bar{w}) \langle w|\psi\rangle$$

es convergente.

Cabe señalar que esta clase de operadores se puede definir en cualquier espacio de Hilbert dotado de un sistema de estados coherentes. Un ejemplo de amplia aplicación en Física es el de $SU(2)$ estados coherentes de spin.

Tenemos que enfatizar, que para un símbolo dado $\varphi(w, \bar{w})$, el operador en (2.8) puede no estar bien definido en $\mathcal{H}$. De acuerdo al trabajo original de Berezin[Berezin 1971], decimos que

DEFINICIÓN 2.6. Dada una función medible $\varphi(z, \bar{z})$, el dominio natural del operador anti-Wick A_φ es el subconjunto de $\mathcal{H}$

$$(2.9) \quad \text{Dom}(A_\varphi) = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \varphi\psi \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)\},$$

donde $\psi(\bar{z}) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle \bar{z}|\psi\rangle$.

Por supuesto, este es el subconjunto de vectores $|\psi\rangle \in \mathcal{F}$ tiene como realización funciones $\psi(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ que pertenecen al dominio natural del operador de Toeplitz T_φ . Diremos que el operador A_φ es un endomorfismo *bien definido* si y solo si su dominio natural es denso en $\mathcal{F}$.

Exploramos ahora la realización de los operadores anti-Wick en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Por realización de un operador A que actúa en $\mathcal{F}$ entendemos un operador T que actúa en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, unitariamente transformado en A . Para ser mas precisos, $T = UAU^{-1}$, donde U es la isometría en (1.34). Tenemos entonces la siguiente relación:

---

²Ver [Berezin 1971].

PROPOSICIÓN 2.7. *Dada una función medible $\varphi(z, \bar{z})$ definida en $\mathbb{C}$, no necesariamente analítica, y U la isometría en (1.34), el operador $UA_\varphi U^{-1}$ que realiza el operador anti-Wick A_φ en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, es el operador Toeplitz T_φ .*

Demostración. Sea $|\psi\rangle \in \text{Dom}(A_\varphi)$ y denotamos $\psi(\bar{z}) = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle z|\psi\rangle$ su realización en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. La realización de A_φ en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ actúa en $\psi(\bar{z})$ como

$$(2.10) \quad UA_\varphi U^{-1}(\psi)(\bar{z}) = UA_\varphi|\psi\rangle = e^{\frac{1}{2}|z|^2} \langle z|A_\varphi|\psi\rangle.$$

La definición de A_φ en (2.8) resulta

$$(2.11) \quad UA_\varphi U^{-1}(\psi)(\bar{z}) = \int_{\mathbb{C}} d\mu(w) e^{\bar{z}w} \varphi(w, \bar{w}) \psi(\bar{w}),$$

una proyección de Bargmann bien definida $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$,

$$(2.12) \quad UA_\varphi U^{-1}(\psi)(\bar{z}) = P(\varphi\psi)(\bar{z}).$$

Esto es justamente el operador T_φ como está definido en (2.3). El dominio natural A_φ definido en (2.9) está en correspondencia uno a uno con el dominio natural de T_φ definido en (2.5). ■

Este resultado permite la discusión de las propiedades de los operadores Toeplitz en término de operadores anti-Wick. En particular, uno puede explorar la manera en la que los operadores Toeplitz se realizan en otros espacios de Fock isométricos. Nuestro interés se concentra en la realización de los operadores anti Wick en el espacio de las sucesiones complejas cuadrado sumables $l^2(\mathbb{C})$.

2.1. Isomorfismo entre el espacio de Fock y $l^2(\mathbb{C})$. Un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ puede desarrollarse en el conjunto ortonormal (1.29) como $|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |m\rangle$ con coeficientes $\psi_m := \langle m|\psi\rangle$ en $l^2(\mathbb{C})$, el espacio de Hilbert de sucesiones complejas cuadrado sumables. La transformación lineal $V : \mathcal{F} \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ definida por

$$(2.13) \quad V(|\psi\rangle) = \{\langle m|\psi\rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$$

es unitaria y preserva el producto interno

$$(2.14) \quad \sum_m \eta_m^* \psi_m = \sum_m \langle \eta|m\rangle \langle m|\psi\rangle = \langle \eta|\psi\rangle$$

por (1.11). Esto hace de $l^2(\mathbb{C})$ una realización del espacio de Fock $\mathcal{F}$, aplicando el conjunto $\{|n\rangle\}$ en (1.29) uno a uno con el conjunto ortonormal de sucesiones $\{\langle m|n\rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$.

Dado el isomorfismo unitario V , un operador lineal A en $\mathcal{F}$ está realizado en $l^2(\mathbb{C})$ como el operador unitariamente transformado $t = VAV^{-1}$. De esta manera, los operadores creación y destrucción están realizados en $l^2(\mathbb{C})$. Explícitamente, si un vector $|\psi\rangle$ pertenece al dominio de A , el operador t actúa en la realización $\{\psi_m\}$ como $t(\{\psi_m\}) = \{\psi'_m\}$ con

$$(2.15) \quad \psi'_m = \langle m|A|\psi\rangle.$$

Asumiendo que todos los vectores de la base canónica están en el dominio de A podemos usar (1.11) nuevamente para obtener

$$(2.16) \quad \psi'_m = \sum_n \langle m|A|n\rangle \psi_n,$$

expresando como serie convergente los elementos de $\{\psi'_m\} \in l^2(\mathbb{C})$. Los coeficientes $\langle m|A|n\rangle$ son denominados en física cuántica como los elementos de matriz del operador A .

Todo lo anterior puede ser usado para establecer una isometría entre $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $l^2(\mathbb{C})$, como realizaciones del mismo espacio de Fock $\mathcal{F}$.³ La isometría está transitivamente dada por $W : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ definida por

$$(2.17) \quad W = VU^{-1}.$$

3. Operadores Toeplitz con símbolo radial

Como hemos visto, los operadores Toeplitz pueden ser interpretados como realizaciones de operadores anti Wick. Un caso particular, es el de los operadores Toeplitz con símbolo radial donde esta realización simplifica drásticamente su estudio.

El principal punto de discusión está en determinar que un operador Toeplitz con símbolo radial, bien definido es particularmente simple cuando se lo realiza en $l^2(\mathbb{C})$. Esta propiedad ha sido extensamente trabajada en [Grudsky 2002], como herramienta para analizar algunas propiedades del operador Toeplitz. Sin embargo, no toda función radial puede ser símbolo de un operador de Toeplitz bien definido.

---

³La presente construcción es una de las tantas maneras de mostrar la isometría entre el espacio de Segal Bargmann $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $l^2(\mathbb{C})$. En efecto, como el espacio de Fock es una representación unitariamente equivalente del grupo de Heisenberg-Weyl [Perelomov 1986], estos isomorfismos son ejemplos del teorema de Stone y von Neumann [Stone 1930] que enuncia que dadas dos representaciones unitarias e irreducibles de este grupo son unitarias.

Este simple hecho ha sido la fuente de algunas malas interpretaciones en [Grudsky 2002] y en trabajos sucesivos. Por eso, destinaremos un espacio a la correcta formulación. El primer paso es la definición de una clase apropiada de símbolos radiales:

DEFINICIÓN 2.8. *Denotaremos por $\mathcal{P}$ la clase de símbolos radiales*

$$(2.18) \quad \mathcal{P} = \{\varphi(|z|) \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N}, \bar{z}^n \in \text{Dom}(T_\varphi)\}.$$

donde $\text{Dom}(T_\varphi)$, definido en (2.5), es el dominio natural del operador de Toeplitz T_φ .

Para símbolos en esta clase, un operador de Toeplitz T_φ está bien definido, teniendo un dominio denso en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ pues contiene cualquier polinomio. Utilizando la isometría que provee la realización en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, podemos ver que esta condición sobre el dominio de T_φ , hace que el operador anti-Wick A_φ tenga dominio denso en $\mathcal{F}$, ya que contiene cualquier vector $|n\rangle$. Entonces estamos en condiciones de probar:

TEOREMA 2.9. *Dada una función radial $\varphi(|z|) \in \mathcal{P}$, el operador Toeplitz T_φ definido en (2.3) se transforma unitariamente por la isometría W definida en (2.17) en un operador lineal que es diagonal en la base canónica de $l^2(\mathbb{C})$.*

Demostración. Dada la función radial $\varphi(|z|) \in \mathcal{P}$, consideremos el operador anti-Wick A_φ definido en (2.8). Su dominio natural, en correspondencia uno a uno con el dominio natural de T_φ , contiene cualquier vector $|n\rangle$ en la base canónica (1.10), por lo cual los elementos de matriz $\langle m|A_\varphi|n\rangle$ resultan bien definidos. Estos están dados por

$$(2.19) \quad \langle m|A_\varphi|n\rangle = \int_{\mathbb{C}} d\mu(z) \varphi(|z|) \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}.$$

Aquí $\varphi(|z|) \in \mathcal{P}$ asegura que la integral es un producto interno bien definido en $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Usando coordenadas polares para resolver esta última integral, se ve que

$$(2.20) \quad \langle m|A_\varphi|n\rangle = \delta_{mn} \varphi_n$$

con δ_{mn} delta de Krönecker y

$$(2.21) \quad \varphi_n = \frac{2}{n!} \int_0^\infty \varphi(r) r^{2n+1} e^{-r^2} dr.$$

Entonces, el operador lineal $t_\varphi = V A_\varphi V^{-1}$ realizando A_φ en $l^2(\mathbb{C})$, expresado en la forma (2.16), tiene elementos de matriz no nulos en la diagonal. Aplicado a sucesiones $\{\psi_n\}$, esto da

$$t_\varphi(\{\psi_n\}) = \{\varphi_n \psi_n\}.$$

Por otro lado, por la proposición 2.7, A_φ se transforma unitariamente por U en (1.34) al operador Toeplitz T_φ con símbolo $\varphi(|z|)$, $T_\varphi = UA_\varphi U^{-1}$. Entonces $WT_\varphi W^{-1} = t_\varphi$. ■

La clave en la demostración anterior es que A_φ puede aplicarse a cualquier vector en el conjunto (1.10). Sin esta condición, algunos de los elementos de matriz en (2.19) pueden no estar bien definidos y la equivalencia entre T_φ y t_φ fallaría. Esto es lo que decimos

PROPOSICIÓN 2.10. *Dado un símbolo radial $\varphi(|z|) \notin \mathcal{P}$, el operador Toeplitz T_φ no es unitariamente equivalente a ningún operador lineal en $l^2(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $\varphi(|z|) \notin \mathcal{P}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}}$ no pertenece al dominio natural del operador T_φ . Asumiendo que un operador $S : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ es una transformación unitaria. Entonces $ST_\varphi S^{-1}$ no está definida para la sucesión finita $S(n(\bar{z}))$. Pero sucesiones finitas pertenecen al dominio de cualquier operador diagonal $l^2(\mathbb{C})$. Entonces, $ST_\varphi S^{-1}$ no puede ser un operador diagonal en $l^2(\mathbb{C})$. ■

Por el teorema 2.9 vemos que los operadores Toeplitz bien definidos con símbolo radial son muy simples. Usando la isometría W , vemos que las autofunciones normalizadas de autovalor φ_n en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ son $\bar{z}^n/\sqrt{n!}$. Todo esto permite caracterizar propiedades como acotación o compacidad de operadores Toeplitz radiales a través de su símbolo.

Este programa ha sido planteado en [Grudsky 2002], con algunos enunciados erróneos. Los autores toman la isometría entre $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $l^2(\mathbb{C})$, pero consideran la clase de símbolos radiales $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$, definida como el conjunto de las funciones medibles $\varphi(r)$ en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$(2.22) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\infty |\varphi(r)| r^m e^{-r^2} dr < \infty,$$

y enuncian que un operador Toeplitz con símbolo radial en esta clase es unitariamente equivalente a operadores diagonales en $l^2(\mathbb{C})$. Observamos que la condición (2.22) hace que φ_n en (2.21) pueda calcularse. Sin embargo la clase $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$ es muy amplia y contiene símbolos que no están en nuestra clase $\mathcal{P}$. Tales símbolos dan operadores Toeplitz que no están bien definidos y que en consecuencia como se ha demostrado en la proposición 2.10, no pueden ser

transformados en operadores diagonales en $l^2(\mathbb{C})$.

Para mostrar que la clase $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$ es demasiado amplia, presentaremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.11. Sea $\varphi(r) = e^{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)r^2}$. Esta función pertenece a $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$ permitiendo calcular, por (2.21), una sucesión acotada (asociada) $\varphi_n = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-(n+1)}$. Sin embargo, $\varphi(|w|) \notin \mathcal{P}$: es suficiente observar que para $n = 0$, $n(\bar{z})$ no pertenece a $\text{Dom}(T_\varphi)$. En consecuencia, el operador Toeplitz T_φ no es unitariamente equivalente a ningún operador diagonal en $l^2(\mathbb{C})$. Más aún, $\text{Dom}(T_\varphi) = \{0\}$ en este ejemplo, mientras que $\text{Dom}(t_\varphi) = l^2(\mathbb{C})!$ $\square$

Con la hipótesis que el símbolo radial esté en nuestra clase $\mathcal{P}$, los resultados de las secciones 4 y 5 de [Grudsky 2002] son válidos. Notar en particular que todos los ejemplos analizados en [Grudsky 2002] pertenecen a la clase $\mathcal{P}$.

4. Problemas relacionados

Hemos probado que un operador Toeplitz con símbolo radial en la clase $\mathcal{P}$ puede ser unitariamente aplicado en un operador diagonal en $l^2(\mathbb{C})$. El problema inverso es entonces relevante: dada una sucesión definiendo el espectro de un operador diagonal en la base canónica de $l^2(\mathbb{C})$, ¿Es posible relacionarlo con un operador Toeplitz bien definido en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$?

En [Grudsky 2002], encontramos una buena construcción basada en continuación analítica y transformadas de Fourier. Allí los autores construyen funciones en $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$ desde la sucesión (2.21) para cualquier sucesión acotada compleja. Sin embargo, como vimos en la sección 3, tomando una función en este conjunto como símbolo radial para el operador Toeplitz no garantiza que este sea equivalente a un operador diagonal en $l^2(\mathbb{C})$. En consecuencia, el enunciado del resultado 3.7 de su trabajo, que aplica operadores diagonales en $l^2(\mathbb{C})$ con espectro acotado en operadores Toeplitz con símbolo radial no es válido. En particular, para la sucesión en el ejemplo 2.11, el símbolo resultante da un operador Toeplitz con dominio trivial.

El problema inverso descripto, permanece aún abierto. Aquí nos limitamos a dar una familia de situaciones (generalizando el ejemplo anterior) que ilustra diversas posibilidades.

EJEMPLO 2.12. Consideremos la sucesión $\{\gamma_n^{(k)}\}$ con $\gamma_n^{(k)} = k^{-n}$, $k \in \mathbb{C}$.

Para $\operatorname{Re}(k) > 1/2$, estas sucesiones se obtienen por (2.21) desde el símbolo radial $\gamma^{(k)}(|z|) = ke^{(1-k)|z|^2}$ que pertenece a $\mathcal{P}$. Entonces, el operador Toeplitz $T_\gamma^{(k)}$ es equivalente al operador en $l^2(\mathbb{C})$ con elementos diagonales de matriz $\{\gamma_n^{(k)}\}$. Esto vale aún para sucesiones no acotadas cuando $|k| < 1$.

Para $0 < \operatorname{Re}(k) \leq 1/2$, las sucesiones pueden obtenerse por (2.21) desde una función radial $\gamma^{(k)}(|z|) = ke^{(1-k)|z|^2}$ que pertenece a $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$, pero no a $\mathcal{P}$. El ejemplo 2.11 falla en este caso con $|k| = 1$. $\square$

Notemos sobre este ejemplo:

- : Los símbolos $\gamma^{(k)}(|z|) = ke^{(1-k)|z|^2}$ pertenecen simultáneamente al conjunto $\mathcal{P}$ en (2.18), a la clase de Folland en (2.6) y la case de Coburn en (2.7), o a ninguna de ellas. Ellas entonces ilustran la equivalencia de operadores Toeplitz radiales con operadores diagonales en $l^2(\mathbb{C})$ también en ese contexto.
- : Como aplicación en física cuántica, el *operador matriz densidad* $\hat{\rho}$ con temperatura inversa β se construye desde el hamiltoniano $\hat{H}$ como proporcional a $e^{-\beta\hat{H}}$. Para el oscilador armónico con $\hat{H} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2$, el operador $\hat{\rho}$ puede escribirse como un operador anti-Wick con un símbolo de esta forma, proporcional a $e^{(1-k)|z|^2}$ con $k > 1$. El espectro en este caso es acotado.

Finalmente recordemos que esta clase de ejemplos fueron utilizados en Ref. [Coburn 2001] para mostrar que la composición de operadores Toeplitz no es cerrada. Este problema puede describirse según nuestro análisis. En efecto, consideremos un símbolo $\gamma^{(k)}(|z|)$ con $\operatorname{Re}(k) > 1/2$ pero $0 < \operatorname{Re}(k^2) < 1/2$, y $|k| = 1$ (tal como $k = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$). El operador Toeplitz $T_\gamma^{(k)}$ es equivalente al operador diagonal en $l^2(\mathbb{C})$ con elementos de matriz $1/k^n$. Consideremos ahora la composición de $T_\gamma^{(k)}$ con el mismo. Realizando esta operación en $l^2(\mathbb{C})$, resulta un operador diagonal con elementos de matriz $1/k^{2n}$.

En esta instancia, y siguiendo [Grudsky 2002], podríamos construir desde esta sucesión acotada un símbolo $\eta(|z|) = k^2 e^{(1-k^2)|z|^2}$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$ pero no pertenece a $\mathcal{P}$. Observemos que siguiendo el resultado 3.7 en [Grudsky 2002] tendríamos que $T_\gamma^{(k)} T_\gamma^{(k)}$ puede escribirse como un operador Toeplitz con símbolo $\eta(|z|)$. Contrariamente, nuestro resultado prueba, como fue discutido en [Coburn 2001], que $T_\varphi T_\varphi$ no es un operador Toeplitz bien definido, *i.e.* la composición no es cerrada en la clase $\mathcal{P}$.

Apéndice.

Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo.

Los núcleos reproductivos, objetos pertenecientes al análisis funcional, han sido construidos de forma paralela por Nachman Aronszajn [Aronszajn 1950] y Stefan Bergman [Bergman 1950] en el año 1950. En esta sección, presentamos algunos resultados básicos sobre espacio de Hilbert con núcleos reproductivos (RKHS). Estos resultados subyacen la construcción de Segal Bargmann. Su validez será discutida en esta tesis en situaciones radicalmente diferentes.

Consideremos $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ con X un conjunto cualquiera. En $\mathcal{H}$ el producto interno, lineal en la primera componente y antilineal en la segunda, será denotado por $(\cdot, \cdot)$.

DEFINICIÓN 2.13. *Para cada $t \in X$, el funcional lineal $E_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por*

$$(2.23) \quad f \mapsto E_t[f] = f(t)$$

se llama funcional evaluación en t .

DEFINICIÓN 2.14. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones definidas en un dominio X se dice que es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo si los funcionales evaluación -para cada $t \in X$ - son acotados en $\mathcal{H}$.*

Esto quiere decir, que para que un espacio de Hilbert resulte con núcleo reproductivo, debe existir, para cada $t \in X$, una constante positiva M_t tal que $|f(t)| \leq M_t|f|$ para toda función ⁴.

Notar que para cada $t \in X$, por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $k_t \in \mathcal{H}$ tal que $f(t) = (f, k_t)$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$ ⁵. Esto nos conduce a definir:

---

⁴Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y solo si existe una constante $M > 0$ tal que $|Tx| \leq M|x|$ para todo $x \in X$.

⁵Teorema de representación de Riesz. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, y $\varphi \in \mathcal{H}^*$, existe un único $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi(x) = (x, x_0)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Además $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \|x_0\|_{\mathcal{H}}$.

DEFINICIÓN 2.15. La función $k : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$k(t, s) := (k_s, k_t)$$

para $(t, s) \in X \times X$ se llama *núcleo reproductivo del espacio $\mathcal{H}$* .

Por esta definición tenemos las siguientes

PROPIEDADES 2.16.

- Para $s \in X$ fijo, la función $k(., s) = k_s(.) \in \mathcal{H}$.
- Para toda $f \in \mathcal{H}$ y para todo $s \in X$

$$(2.24) \quad f(s) = (f(.), k(., s)) =: (f, K_s)$$

- Para toda $f \in \mathcal{H}$ y para todo $s \in X$

$$(2.25) \quad |f(s)|^2 \leq k(s, s) \|f\|^2$$

DEFINICIÓN 2.17. La propiedad (2.24) se llama *propiedad reproductiva de $\mathcal{H}$* .

PROPOSICIÓN 2.18. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones definidas en X tal que existe una función $h : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ que verifica las propiedades 2.16, entonces $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo.

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy Schwartz,

$$|E_t(f)| = |f(t)| = |(f(.), k(., s))| \leq \|f\| \|k_s\|$$

Entonces el funcional evaluación es acotado y en consecuencia $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo. ■

PROPOSICIÓN 2.19. El núcleo reproductivo es único.

Demostración. Si $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ y $H : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ son dos núcleos reproductivos para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones definidas en X , entonces, dados $t, s \in X$

$$K(t, s) = (k_s, h_t) = \overline{(h_t, k_s)} = \overline{H(s, t)} = H(t, s). \quad \blacksquare$$

El núcleo reproductivo se puede construir fácilmente si se conoce una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}$. La demostración es trivial utilizando (2.24).

PROPOSICIÓN 2.20. Sea $\{e_n(t)\}_{n \geq 1}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Para cada $t, s \in X$

$$K(t, s) = \sum_{n \geq 1} e_n(t) \overline{e_n(s)}.$$

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ que no es necesariamente espacio con núcleo reproductivo. Bajo estas condiciones podemos demostrar:

PROPOSICIÓN 2.21. Si el espacio de Hilbert con núcleo reproductivo $\mathcal{H}$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$. Entonces, para toda función $f \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$(f, k_s) = P_{\mathcal{H}}f(s)$$

donde $P_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$.

Demostración. Sea $f \in \tilde{\mathcal{H}}$. Por ser cerrado, existe una única descomposición de $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in \mathcal{H}$ y $f_2 \in \mathcal{H}^\perp$ complemento ortogonal de $\mathcal{H}$. Entonces como $f_2 \perp k(., s)$

$$\begin{aligned} (f, k(., s)) &= (f_1 + f_2, k(., s)) \\ &= (f_1, k(., s)) + (f_2, k(., s)) \\ &= (f_1, k(., s)) = f_1(s) \end{aligned}$$

siendo $f_1(s) \in \mathcal{H}$ la proyección de f sobre $\mathcal{H}$ denotada por $P_{\mathcal{H}}f(s)$. ■

EJEMPLO 2.22. Consideremos $\mathcal{H} = F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ el espacio de las funciones analíticas cuadrado integrables con la medida $d\mu(z) = e^{-|z|^2} dv(z)$ y $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ espacio de Hilbert con el producto interno

$$(f, g) = \int f(\bar{z}, z) \overline{g(\bar{z}, z)} e^{-|z|^2} dv(z)$$

Si $f(\bar{z}, z) \in \tilde{\mathcal{H}}$ y $k_w(\bar{z}) = e^{\bar{z}w}$ es el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$, entonces (f, k_w) es la proyección de $f(\bar{z}, z)$ sobre el espacio $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

Parte 2

Estados coherentes fermiónicos y cálculo en variables de Grassmann

Con el desarrollo de la supersimetría, los conceptos matemáticos que proporcionaban el lenguaje formal para describir los sistemas bosónicos, debieron ser adaptados para incorporar el sector fermiónico en particular un sistema de estados coherentes fermiónicos. Elementos nilpotentes de orden 2 anticonmutantes, resultaron indicados para describir las nuevas teorías. Así fue como el álgebra de Grassmann tomó protagonismo en esta descripción.

En esta parte del trabajo, presentaremos el álgebra Grassmann desde el punto de vista del análisis de funciones, interpretación que fue desarrollada por Berezin en su primer libro *Method of the Second Quantization* [Berezin 1966]. Allí asegura la existencia de una forma análoga de análisis en donde los elementos del álgebra Grassmann son interpretados como funciones dependientes de una variable anticonmutante, haciendo posible la definición de la derivación y la integración. Esta conceptualización del álgebra Grassmann como funciones hace que los nuevos elementos que describen la supersimetría sean tratados en pie de igualdad con las funciones analíticas de variable compleja.

Así, la definición de producto interno y núcleo reproductivo para funciones con variables Grassmann surge de manera natural, permitiendo arribar al establecimiento de un sistema de estados coherentes sin mayores complicaciones. Su utilización será muy eficaz por la similitud con el caso complejo, pero deberá ser cuidadosamente tratada para no olvidar la naturaleza propia del álgebra Grassmann que se encuentra involucrada.

Álgebra de Grassmann

1. Descripción general

Un álgebra sobre un cuerpo K (K -álgebra), es un espacio vectorial A sobre K con una noción compatible de multiplicación de elementos de A . Una generalización de esta definición admite que K sea cualquier anillo conmutativo. Muchas veces se utiliza el término “álgebra” como sinónimo de “álgebra asociativa”.

De forma precisa, sea $(V_K, +)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo K , y supongamos que existe una operación binaria definida entre vectores

$$(\cdot, \cdot) : V_K \times V_K \rightarrow V_K$$

bilineal y distributiva respecto a la suma, es decir que para todo $u, v, w \in V$, $\lambda \in K$:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$(v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$$

$$u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$$

Entonces con esta operación, $\mathcal{A} = (V_K, +, \cdot)$ se denomina álgebra sobre K . La segunda operación se llama producto. Si el producto es asociativo, se dirá que el álgebra es asociativa, y si además existe un elemento $1_K \in \mathcal{A}$ tal que para todo $v \in \mathcal{A}$, $1_K v = v, 1_K = v$ se dirá que $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa con unidad.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con unidad $\mathbb{I}$ y consideremos $\Omega \subset \mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{A}(\Omega)$ la colección de todos los posibles polinomios de elementos de Ω y la unidad $\mathbb{I}$, *i.e.* las sumas finitas de la forma

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k}$$

con $f_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}$ y $a_i \in \Omega$, indicando cuando $k = 0$ el término proporcional a la unidad. $\mathcal{A}(\Omega)$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ y se la denomina *subálgebra generada por Ω* . Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$, entonces Ω es llamado sistema de generadores del álgebra $\mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 3.1. *Un álgebra asociativa Λ_n con unidad es llamada álgebra de Grassmann abstracta o álgebra exterior de orden $n \in \mathbb{N}$, si contiene un sistema de generadores $\Omega = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ con la propiedad que $\{\psi_i, \psi_j\} =: \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

De forma compacta, podemos decir que el álgebra de Grassmann es el cociente del álgebra libre generada por $\Omega = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ con el ideal homogéneo generado por la condición de anticonmutación, es decir

$$\Lambda_n = \mathbb{C}\langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle / (\psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i).$$

Observemos que la condición de anti-conmutación $\psi_i\psi_j = -\psi_j\psi_i$ de los generadores, junto con la existencia de la unidad, define la multiplicación. Nos interesa destacar que la condición de anti-conmutación es equivalente a verificar que toda combinación lineal de generadores es nilpotente de orden 2: $(a\psi_i + b\psi_j)^2 = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ y para todo par de elementos $a, b \in \mathbb{C}$. En efecto, si $\psi_i\psi_j = -\psi_j\psi_i$ tenemos que para $a, b \in \mathbb{C}$

$$(3.1) \quad (a\psi_i + b\psi_j)^2 = a^2\psi_i^2 + ab\psi_i\psi_j + ab\psi_j\psi_i + b^2\psi_j^2 = 0$$

Recíprocamente, supongamos que para cualquier $a, b \in \mathbb{C}$ $(a\psi_i + b\psi_j)^2 = 0$. En particular tomando $a = 0$ y $b = 1$ tenemos que $\psi_j^2 = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces si $a = b = 1$

$$(3.2) \quad 0 = (\psi_i + \psi_j)^2 = \psi_i^2 + \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i + \psi_j^2 = \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i$$

recuperando la anti-conmutación de los generadores ψ_i .

Teniendo en cuenta esta equivalencia sobre los generadores del álgebra Grassmann, podemos dar una definición alternativa:

DEFINICIÓN 3.2. *Un álgebra asociativa con unidad es llamada álgebra de Grassmann abstracta o álgebra exterior de orden $n \in \mathbb{N}$, si contiene un sistema de generadores $\Omega = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ con la propiedad que $(a\psi_i + b\psi_j)^2 = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$.*

Esta definición será la base de la generalización desarrollada en la parte III de esta Tesis.

Observemos que aunque cualquier elemento de Λ_n es de la forma

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}$$

con $f_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}$ y ψ_i generador del álgebra de Grassmann, su expresión no es única. Teniendo en cuenta la condición de anti-conmutación de los generadores, los términos con generadores repetidos se anulan y los términos con ciertos generadores son proporcionales a términos con

los mismos generadores permutados. Para lograr la unicidad, los coeficientes $f_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{C}$ deben anularse o ser antisimétricos en sus índices (*i.e* el coeficiente $f_{i_1, \dots, i_k}$ cambia de signo ante una permutación de dos de sus índices).

Como mencionamos en la apertura de esta Parte 2, los elementos del álgebra Grassmann pueden ser dotados de estructuras semejantes a las funciones de variable compleja. Es por eso que introducimos la notación

$$(3.3) \quad f(\psi) = f(\psi_1, \dots, \psi_n) =: \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}$$

para denotar los elementos del álgebra de Grassmann como *funciones de variables Grassmann* $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, n}$.

Mencionamos dos descomposiciones del álgebra de Grassmann Λ_n que serán utilizadas en este trabajo:

- Por paridad: $\Lambda_n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, donde

(3.4)

$$\mathcal{A}_0 = \{f(\psi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k} \text{ donde } f_{i_1, \dots, i_k} = 0 \text{ para cantidad de índices impar}\}$$

$$\mathcal{A}_1 = \{f(\psi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k} \text{ donde } f_{i_1, \dots, i_k} = 0 \text{ para cantidad de índices par}\}$$

denominados respectivamente elementos pares y impares del álgebra de Grassmann. Si consideramos que $0 \in \mathcal{A}_1$, tenemos que $\mathcal{A}_1$ es subespacio de $\mathcal{A}$. De aquí Λ_n es una super-álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada

- En cuerpo y alma (body-soul) [DeWitt 1985]: $\Lambda_n = \mathcal{B} \oplus \mathcal{S}$ con $\mathcal{B} \in \mathbb{C}$ el *cuerpo* (body) y el *alma* (soul)

$$\mathcal{S} = \{f(\psi) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}\}.$$

Considerando que $0 \in \mathcal{S}$, tenemos que $\mathcal{S}$ es subespacio de $\mathcal{A}$.

Si $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, se puede introducir la noción de conjugación sobre el álgebra de Grassmann Λ_{2k} . Podemos establecer un antiautomorfismo $*$: $\Lambda(\Omega) \rightarrow \Lambda(\Omega)$ que sea una involución [Berezin 1991]¹. En esta situación, es posible elegir algún sistema de generadores,

---

¹Un antiautomorfismo es una aplicación $\mathcal{T}$ de un álgebra en si misma lineal tal que $\mathcal{T}(1) = 1$ y $\mathcal{T}(fg) = \mathcal{T}(g)\mathcal{T}(f)$. Si $\mathcal{T}^2 = I$ se dice que $\mathcal{T}$ es una involución.

$\tilde{\Omega} = \{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_1^*, \dots, \eta_k^*\}$. Llamaremos a η_i^* el generador conjugado de η_i , y lo denotaremos por $\bar{\eta}_i$.

La conjugación de funciones de variable Grassmann está definida a través de la involución $(\ )^*$: si $f(\psi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}$ entonces

$$(3.5) \quad \overline{f(\psi)} = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \overline{f_{i_1, \dots, i_k}} \psi_{i_k}^* \dots \psi_{i_1}^*$$

siendo $\overline{f_{i_1, \dots, i_k}}$ el complejo conjugado de $f_{i_1, \dots, i_k}$.

Junto con este automorfismo, el álgebra de Grassmann $\Lambda(\Omega)$ es una $*$ -álgebra ².

A partir de ahora y sin pérdida de generalidad, trabajaremos con $n = 2$ considerando el álgebra de Grassmann Λ_2 álgebra nilpotente de orden dos con generadores $\{\bar{\eta}, \eta\}$. Llamaremos a η y $\bar{\eta}$ variables Grassmann, y como en (3.3) escribiremos los elementos del álgebra Λ_2 como funciones de tales variables

$$(3.6) \quad f(\eta, \bar{\eta}) = f_{00} + f_{10}\eta + f_{01}\bar{\eta} + f_{11}\eta\bar{\eta},$$

donde las condiciones $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = \eta\bar{\eta} + \bar{\eta}\eta = 0$ aseguran su unívoca representación por 4 coeficientes complejos. La forma en la ec.(3.6) se conoce como el desarrollo de f en la base ordenada anti-Wick de Λ_2 , en la cual el producto aparece ordenado con η a la izquierda de $\bar{\eta}$.

Un interrogante que surge al considerar Λ_2 un álgebra con unidad, es la existencia del inverso multiplicativo para los elementos del álgebra Grassmann. La respuesta es afirmativa sólo para los elementos de Λ_2 con cuerpo (descomposición cuerpo-alma) no nulo.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si $a = c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta + c_{11}\bar{\eta}\eta \in \Lambda_2$ con $c_{00} \neq 0$, existe*

$$b = c_{00}^{-1} - c_{10}c_{00}^{-2}\bar{\eta} - c_{01}c_{00}^{-2}\eta - c_{00}^{-2}c_{11}\bar{\eta}\eta \in \Lambda_2$$

tal que $ab = ba = 1$. El elementos b es único. ³

---

²Un $*$ -anillo es un anillo asociativo con una aplicación $*$: $A \rightarrow A$ que es un antiautomorfismo y una involución. Una $*$ -álgebra A es un $*$ -anillo con involución $*$ que es un álgebra asociativa sobre un $*$ -anillo conmutativo R con involución $'$ tal que $(rx)^* = x^*r'$ para $r \in R$ y $x \in A$.

³Denotaremos a $b =: a^{-1}$

2. Derivación

El primer paso para replicar propiedades analíticas en funciones de variable Grassmann es definir la derivación [Berezin 1991][Floratos 1991].

DEFINICIÓN 3.4. Si $f(\eta, \bar{\eta}) := c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta + c_{11}\eta\bar{\eta} \in \Lambda_2$ con $c_{ij} \in \mathbb{C}$, definimos la derivación a izquierda

$$(3.7) \quad \bar{\partial}f(\eta, \bar{\eta}) = c_{10} - c_{11}\eta \quad \partial f(\bar{\eta}, \eta) = c_{01} + c_{11}\bar{\eta}$$

y la derivación a derecha

$$(3.8) \quad f(\bar{\eta}, \eta)\bar{\partial} = c_{10} + c_{11}\eta \quad f(\bar{\eta}, \eta)\partial = c_{01} - c_{11}\bar{\eta}$$

En general utilizaremos las derivadas a izquierda. Utilizando estas definiciones, se puede demostrar:

PROPOSICIÓN 3.5. Si $f(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$

- $\{\partial, \bar{\partial}\}f(\eta, \bar{\eta}) =: \partial[\bar{\partial}f(\eta, \bar{\eta})] + \bar{\partial}[\partial f(\eta, \bar{\eta})] = 0$.
- Las derivadas son operadores nilpotentes: $\partial^2 f(\eta, \bar{\eta}) = \bar{\partial}^2 f(\eta, \bar{\eta}) = 0$.
- Se verifica que $\{\bar{\partial}, \bar{\eta}\}f(\eta, \bar{\eta}) = \{\partial, \eta\}f(\eta, \bar{\eta}) = f(\eta, \bar{\eta})$ y $\{\bar{\partial}, \eta\}f(\eta, \bar{\eta}) = \{\partial, \bar{\eta}\}f(\eta, \bar{\eta}) = 0$

Dentro de Λ_2 podemos definir en analogía al caso de funciones a variable compleja, el conjunto de las funciones holomorfas y anti-holomorfas.

DEFINICIÓN 3.6. Si $\bar{\partial}f(\eta, \bar{\eta}) = 0$ (resp. $\partial f(\eta, \bar{\eta}) = 0$), entonces $f(\eta, \bar{\eta})$ se dirá holomorfa (resp. anti-holomorfa)

OBSERVACIÓN 3.7. Notese que no tiene sentido especificar el dominio de una función holomorfa de variable Grassmann. En este sentido las funciones holomorfas se asemejan a funciones enteras en $\mathbb{C}$.

Resolviendo las ecuaciones anteriores, quedan determinados los espacios de funciones holomorfas y anti-holomorfas de variables Grassmann η y $\bar{\eta}$ respectivamente

$$(3.9) \quad \mathcal{B}_{Hol} = \{f(\eta) = f_0 + f_1\eta \text{ donde } f_0, f_1 \in \mathbb{C}\}$$

$$(3.10) \quad \mathcal{B}_{AHol} = \{f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1\bar{\eta} \text{ donde } f_0, f_1 \in \mathbb{C}\}.$$

3. Integración

La forma de integrar funciones de variable Grassmann se denomina integral de Grassmann o más precisamente integral de Berezin. Esta, no es una integral en el sentido de Lebesgue ni Riemann, sino que es llamada así por la semejanza en sus propiedades con una integral convergente sobre el eje real o sobre el plano complejo. Esta técnica de integración fue construida y desarrollada por Berezin en [Berezin 1974] y resulta en un operador lineal e invariante ante traslaciones.⁴

Consideremos Λ_2 , álgebra de Grassmann generada por η y $\bar{\eta}$. El primer paso para definir la integración de funciones de variable Grassmann es dar sentido a la expresión $\int d\bar{\eta} f(\bar{\eta})$ donde $f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1 \bar{\eta} \in \mathcal{B}_{Ahol}$ y $d\bar{\eta}$ un elemento formal. Entonces, por la linealidad

$$(3.11) \quad \int f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = f_0 \int 1 d\bar{\eta} + f_1 \int \bar{\eta} d\bar{\eta}$$

y en consecuencia sólo es necesario determinar $\int 1 d\bar{\eta}$ y $\int \bar{\eta} d\bar{\eta}$.

La invarianza ante traslaciones significa que, si $\eta' = \eta + \psi$ donde ψ es otro elemento del álgebra de Grassmann independiente de η y $\bar{\eta}$, entonces

$$(3.12) \quad \int \bar{\eta}' d\bar{\eta}' = \int (\bar{\eta} + \bar{\psi}) d\bar{\eta} = \int \bar{\eta} d\bar{\eta} + \left(\int 1 d\bar{\eta} \right) \bar{\psi}$$

de donde $\int 1 d\bar{\eta} = 0$. Como la operación integración no debe ser idénticamente nula, entonces $\int \bar{\eta} d\bar{\eta} = \mathcal{N} \neq 0$. Sin pérdida de generalidad normalizamos la “medida” eligiendo $\mathcal{N} = 1$. Es decir,

$$(3.13) \quad \int 1 d\bar{\eta} = 0 \quad \int \bar{\eta} d\bar{\eta} = 1.$$

Análogamente, para $f(\eta) = f_0 + f_1 \eta \in \mathcal{B}_{Hol}$ la integración $\int d\eta f(\eta)$ estará dada por las reglas

$$(3.14) \quad \int d\eta 1 = 0 \quad \int d\eta \eta = 1.$$

Finalmente, la integral para $f(\bar{\eta}, \eta) \in \Lambda_2$ se obtiene por la integración sucesiva en $\bar{\eta}$ y η . Debe notarse que, por las relaciones de anticonmutación de las variables Grassmann, importa el orden en que se escriban las variables y los diferenciales. Adoptaremos para definir la integración la forma ordenada anti-Wick del integrando, con $d\eta$ a la izquierda y $d\bar{\eta}$ a la derecha.

---

⁴En este trabajo hemos optado por definir la integración de funciones de variable Grassmann partiendo de la propiedad de invarianza ante traslaciones y linealidad. En [Berezin 1991] se puede encontrar la definición general y luego la verificación de estas dos propiedades.

Con esta motivación,

DEFINICIÓN 3.8. Dada $f(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$, se define la integral de Berezin $\int d\eta f(\eta, \bar{\eta}) d\bar{\eta}$ como una forma bilineal en $\bar{\eta}$ y η que cumple las reglas (3.13, 3.14), con $f(\eta, \bar{\eta})$ ordenada anti-Wick.

Entre las primeras propiedades que se desprenden de esta definición mencionamos

PROPOSICIÓN 3.9. Para toda $f(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$ se verifica el Teorema de Stokes: $\int d\eta \partial f(\eta, \bar{\eta}) d\bar{\eta} = \int d\eta \bar{\partial} f(\eta, \bar{\eta}) d\bar{\eta} = 0$.

Es usual destacar que cada integral caracterizada en (3.13, 3.14) cumple

PROPOSICIÓN 3.10. Dada $f(\bar{\eta}) \in \mathcal{B}_{Ahol}$, el operador integral de Berezin es equivalente a la derivación,

$$\int f(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \bar{\partial} f(\bar{\eta}).$$

Dada $f(\eta) \in \mathcal{B}_{Hol}$, el operador integral de Berezin es equivalente a la derivación,

$$\int d\eta f(\eta) = \partial f(\eta).$$

Esta proposición provee una regla práctica para integrar sobre las variables Grassmann, recordando que la integración actúa como una derivada.

4. Forma sesquilineal

Como hemos visto en la primera parte del trabajo, el espacio de las funciones en z y $\bar{z}$ de módulo cuadrado integrable con medida gaussiana es un espacio de Hilbert. Al interpretar el álgebra de Grassmann como un espacio de funciones en variables anticonmutantes, nos preguntamos si es posible definir un producto interno por el cual Λ_2 resulte un espacio de Hilbert.

Consideremos el espacio lineal bidimensional $\mathcal{B}_{Hol}$ subespacio de Λ_2 y sobre él una aplicación⁵ $(\cdot, \cdot) : \mathcal{B}_{Hol} \times \mathcal{B}_{Hol} \rightarrow \mathbb{C}$ definida para $f(\eta) = f_0 + f_1\eta$ y $g(\eta) = g_0 + g_1\eta$ con $f_i, g_i \in \mathbb{C}$ como

$$(3.15) \quad (f, g) := f_0 \bar{g}_0 + f_1 \bar{g}_1.$$

Esta aplicación resulta un producto interno sobre $\mathcal{B}_{Hol}$, lineal en la primera componente y antilineal en la segunda. Así como para el caso de funciones en variables complejas el producto

---

⁵La elección de esta aplicación tendrá su fundamento en el capítulo siguiente. A través de ella se podrá establecer un isomorfismo entre los espacios lineales bidimensionales $\mathcal{B}_{Ahol}$ y $\mathcal{B}_{Hol}$ con el espacio de estados con grado de libertad fermiónico.

interno tiene su expresión de forma integral (1.28), aquí también podemos hallar una expresión alternativa para (3.15) en forma de integral sobre variables anticonmutantes. Para esto, es necesario determinar un elemento $w \in \Lambda_2$ que cumplirá el rol de peso, de manera que

$$(3.16) \quad \int d\eta f(\eta) w(\eta, \bar{\eta}) \overline{g(\eta)} d\bar{\eta}$$

coincida con (f, g) dado en (3.15) para cualquier función $f, g \in B_{Hol}$.

Siendo

$$w(\eta, \bar{\eta}) = w_{00} + w_{10}\bar{\eta} + w_{01}\eta + w_{11}\eta\bar{\eta}$$

con $w_{nm} \in \mathbb{C}$ y considerando $f(\eta)$ y $g(\eta)$ como antes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int d\eta f(\eta) w(\eta, \bar{\eta}) \overline{g(\eta)} d\bar{\eta} &= \int d\eta (f_0 + f_1\eta) (w_{00} + w_{10}\bar{\eta} + w_{01}\eta + w_{11}\eta\bar{\eta}) (\overline{g_0} + \overline{g_1}\bar{\eta}) d\bar{\eta} \\ &= f_0\overline{g_0}w_{11} + \overline{g_0}f_1w_{01} + \overline{g_1}f_0w_{10} + \overline{g_1}f_1w_{00}. \end{aligned}$$

Para que esta última expresión coincida con (3.15) debemos tomar $w_{10} = w_{01} = 0$ y $w_{00} = w_{11} = 1$. De esta manera el peso w resulta

$$(3.17) \quad w(\eta, \bar{\eta}) = 1 + \eta\bar{\eta}.$$

Con el objetivo de tener un producto interno en Λ_2 veamos que sucede si extendemos (3.16) a $\mathcal{B}_{AHol}$. Cuando $f, g \in \mathcal{B}_{AHol}$, la integral

$$(3.18) \quad \int d\eta f(\bar{\eta}) w(\eta, \bar{\eta}) \overline{g(\bar{\eta})} d\bar{\eta}$$

puede ser calculada siguiendo la definición (3.8), dando una aplicación de $\mathcal{B}_{AHol} \times \mathcal{B}_{AHol}$ a valores complejos. Sin embargo, sobre este espacio la aplicación dada por la integral (3.18) no verifica las condiciones para definir un producto interno. Por ejemplo si $f(\bar{\eta}) = g(\bar{\eta}) = \bar{\eta}$ y recordando la anticonmutación de η y $\bar{\eta}$ al ordenar anti-Wick el integrando,

$$(3.19) \quad \int d\eta \bar{\eta} (1 + \eta\bar{\eta}) \eta d\bar{\eta} = -1,$$

no resultando definida positiva. Si se modifica la función peso en (3.17) para obtener un producto definido positivo en $\mathcal{B}_{AHol}$, se encuentra que el mismo deja de ser positivo en $\mathcal{B}_{Hol}$.

Esta situación inconveniente puede ser modificada reordenando las variables anticonmutantes para corregir el signo. Como mencionamos antes, se dice que una expresión que involucra generadores Grassmann está dada en orden anti-Wick o antinormal cuando los generadores $\bar{\eta}$ aparecen a la derecha de η . Se dice además que una expresión se ordena anti-Wick cuando se la

modifica escribiendo $\bar{\eta}$ a la derecha de η *sin tener en cuenta las relaciones de anticonmutación entre las variables*. Esta operación se anota $:$. Por ejemplo,

$$: a_{00} + a_{10}\bar{\eta} + a_{01}\eta + a_{11}\bar{\eta}\eta : = a_{00} + a_{10}\bar{\eta} + a_{01}\eta + a_{11}\eta\bar{\eta}$$

Con estas consideraciones, la extensión de la aplicación anterior a Λ_2 naturalmente es la siguiente:

DEFINICIÓN 3.11. Para $f, g \in \Lambda_2$, la aplicación $(\cdot, \cdot)_G : \Lambda_2 \times \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$(3.20) \quad (f, g)_G = \int d\eta : f(\eta, \bar{\eta})^* w(\eta, \bar{\eta}) g(\eta, \bar{\eta}) : d\bar{\eta}.$$

Aunque la aplicación (3.20) es de forma evidente una forma sesquilineal hermitica sobre Λ_2 , nos preguntamos si este espacio resultará con ella un espacio de Hilbert. La respuesta es **no**. Tan solo considerando $f(\eta, \bar{\eta}) = \eta\bar{\eta}$ elemento no nulo de Λ_2 tenemos que $(f, f)_G = 0$. Sin embargo podemos demostrar:

PROPOSICIÓN 3.12. El subespacio de Λ_2

$$(3.21) \quad \mathcal{B} = B_{Hol} + B_{AHol} = \{f(\bar{\eta}, \eta) = c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta \quad \text{con } c_{ij} \in \mathbb{C}\}$$

es espacio con producto interno $(\cdot, \cdot)_G$ dado en (3.20). Además, B_{Hol} y B_{AHol} son espacios vectoriales de dimensión 2 con bases ortonormales dadas respectivamente por $\phi_1(\eta) = \eta$ y $\phi_1(\eta)^* = \bar{\eta}$ y $\phi_0(\eta) = \phi_0(\eta)^* = 1$.

Demostración. Mencionamos sólo los aspectos a destacar:

- La aplicación $(\cdot, \cdot)_G$ es definida positiva pues si $f(\eta, \bar{\eta}) = c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} (f, f)_G &= \int d\eta : f(\eta, \bar{\eta})^* w(\eta, \bar{\eta}) f(\eta, \bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta : (\bar{c}_{00} + \bar{c}_{10}\eta + \bar{c}_{01}\bar{\eta})(1 + \bar{\eta}\eta)(c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta) : d\bar{\eta} \\ &= |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

verificando la igualdad sólo cuando $f(\eta, \bar{\eta}) = 0$.

- Se verifica la ortonormalidad de la base $\phi_n(\eta)^* = \bar{\eta}^n$ (de igual manera para $\phi_n(\eta)$ en B_{Hol}). En efecto,

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m)_G &= \int d\eta : \phi_n(\eta)^* (1 + \eta\bar{\eta}) \phi_m(\eta) : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta \eta^n (1 + \eta\bar{\eta}) \bar{\eta}^m d\bar{\eta} = \delta_n^m \quad \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.13. *En la descripción de sistemas fermiónicos, la anticonmutatividad de los generadores Grassmann expresa la antisimetría de la función de onda de partículas idénticas. En algunas circunstancias se utiliza la prescripción de orden Wick, con la debida interpretación de la diferencia entre la expresión original y la que se obtiene ordenando normalmente.*

5. Núcleo reproductivo

En esta sección definiremos la noción de núcleo reproductivo para el álgebra de Grassmann. Representaremos de manera consistente, la estructura y propiedades de la teoría estándar de núcleos reproductivos que fuera dada en el apéndice de la primera parte. Si bien la idea de esta construcción se desprende de la definición de núcleo reproductivo para álgebras paraGrassmann dada por Sontz en [Sontz 2013], cabe destacar que el uso en variables Grassmann no es estándar. No debemos olvidar que Λ_2 es un espacio vectorial de dimensión 4, donde los resultados que siguen son algebraicamente triviales; nuestro objetivo en el resto de este capítulo es investigar la consistencia del tratamiento de álgebras de Grassmann como espacios de funciones, más allá de la derivación e integración usuales en las aplicaciones en Física. Por otro lado, tiene interés no trivial aplicar nuestros resultados a otras álgebras, como el álgebra paraGrassmann que presentamos en la Parte 3, y a diversos límites de dimensión infinita.

Como vimos en el apéndice de la primera parte, un espacio con núcleo reproductivo es un espacio de Hilbert de funciones en el cual la evaluación puntual es un funcional lineal acotado (continuo).

En el caso del álgebra de Grassmann, los espacios $\mathcal{B}_{Hol}$ y $\mathcal{B}_{AHol}$ no son específicamente espacios de funciones. Sin embargo, al ser interpretados como tales, la noción de núcleo reproductivo puede ser adaptada cobrando sentido a través del producto interno (3.20).

Consideremos en primer lugar el espacio de Hilbert $\mathcal{B}_{Hol}$. Sólo en esta sección, y porque el rol de la variable que lo define será relevante, denotaremos a este espacio como $\mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ para destacar que la variable Grassmann presente es η . Cada elemento de $\mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ es de la forma $f_0 + f_1\eta$ unívocamente determinado por las constantes $\{f_0, f_1\}$, y puede ser interpretado como una función de η . En efecto, si consideramos x como una indeterminada, y tomamos $f(x) = \sum_{i=0}^N \beta_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado N , podemos definir la evaluación en un elemento

$a \in \mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ como $f(a) := \sum_{i=0}^N \beta_i a^i$ con $N \geq 1$. Tomando $\beta_i = f_i$ para $i = 0, 1$, tenemos que $f(\eta)$ es el elemento $f_0 + f_1\eta$. Motivados por esta descripción definimos

DEFINICIÓN 3.14. Sea $f(x) = \sum_{i=0}^N \beta_i x^i \in \mathbb{C}[x]$. La aplicación $\Omega_\eta : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ dada por

$$(3.22) \quad \Omega_\eta[f] := \beta_0 + \beta_1\eta = f(\eta)$$

es la aplicación evaluación en η .

Esta aplicación es un morfismo de álgebras que es suryectivo pero no inyectivo. En este contexto, la aplicación evaluación es quien reemplazará el concepto de *funcional evaluación* (2.23) en la teoría usual de espacios de funciones con núcleos reproductivos.

Las aplicaciones Ω son acotadas de manera uniforme, pues la norma es independiente de la variable Grassmann que define la función. En efecto, si $f(\eta) \in \mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ entonces existen dos constantes complejas tal que $f(\eta) = f_0 + f_1\eta$ y utilizando el producto interno (3.20) tenemos que $\|f\| = \sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2}$. Por otro lado, siendo ξ otra variable Grassmann $\Omega_\xi[f] = f_0 + f_1\xi$, de donde

$$\|\Omega_\xi[f]\| = \|f\|.$$

Nuestro interés está en poder establecer dentro del marco del álgebra de Grassmann, la fórmula reproductiva. Esto es que para todo $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ se verifique

$$\Omega_\xi[f] = (K(\eta, \bar{\xi}), \Omega_\eta[f])_G$$

con un elemento $K(\eta, \bar{\xi}) \in \mathcal{B}_{Hol}(\eta) \times \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi})$ y el producto interno sea calculado como una integral sobre la variable Grassmann η .

Apelando a la base ortonormal de $\mathcal{B}_{Hol}(\eta)$ y en analogía a la proposición 2.20, es posible construir un elemento $K(\eta, \bar{\xi}) \in \mathcal{B}_{Hol}(\eta) \times \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi})$ como

$$\begin{aligned} K(\eta, \bar{\xi}) &:= \sum_{n=0}^1 \phi_n(\eta) \overline{\phi_n(\xi)} \\ &= 1 + \eta \bar{\xi} \end{aligned}$$

A través de este elemento se verifica la fórmula análoga a la propiedad reproductiva (2.24) ahora para el álgebra de Grassmann. En efecto, si $f(x) = \sum_{i=0}^N f_i x^i$

$$\begin{aligned}
(K(\eta, \bar{\xi}), \Omega_\eta[f])_G &= \int d\eta : [K(\eta, \bar{\xi})]^* (1 + \eta\bar{\eta}) f(\eta) : d\bar{\eta} \\
&= \int d\eta : [1 + \xi\bar{\eta}] \cdot (1 + \eta\bar{\eta}) \cdot [f_0 + f_1\eta] : d\bar{\eta} \\
&= \int d\eta [\eta\bar{\eta}f_0 + \xi\eta\bar{\eta}f_1] d\bar{\eta} \\
&= f_0 + f_1\xi = \Omega_\xi[f]
\end{aligned}$$

de donde

$$(3.23) \quad (K(\eta, \bar{\xi}), \Omega_\eta[f])_G = \Omega_\xi[f].$$

DEFINICIÓN 3.15. *La función*

$$(3.24) \quad K(\eta, \bar{\xi}) = 1 + \eta\bar{\xi} \in \mathcal{B}_{Hol}(\eta) \times \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi})$$

se llamará *núcleo reproductivo de $\mathcal{B}_{Hol}$* . Lo denotaremos por $K_{\bar{\xi}}(\eta)$.

De la misma manera, puede encontrarse para el espacio $\mathcal{B}_{AHol}$ su núcleo reproductivo, resultando éste

$$(3.25) \quad K_\xi(\bar{\eta}) = 1 + \xi\bar{\eta}.$$

En efecto, si $f(x) = \sum_{i=0}^N f_i x^i$

$$\begin{aligned}
(K_\xi(\bar{\eta}), \Omega_{\bar{\eta}}[f])_G &= \int d\eta : K_\xi(\bar{\eta})^* (1 + \eta\bar{\eta}) f(\bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\
&= \int d\eta : [1 + \eta\bar{\xi}] \cdot (1 + \eta\bar{\eta}) \cdot [f_0 + f_1\bar{\eta}] : d\bar{\eta} \\
&= \int d\eta [\eta\bar{\eta}f_0 + \xi\eta\bar{\eta}f_1] d\bar{\eta} \\
&= f_0 + f_1\bar{\xi} = \Omega_{\bar{\xi}}[f].
\end{aligned}$$

6. Proyección

Como hemos visto en la primera parte del trabajo, el espacio $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ se puede proyectar de forma ortogonal sobre el subespacio de las funciones antiholomorfas por la proyección de Bargmann. Esto es posible ya que ambos espacios son espacios de Hilbert. En el caso de funciones con variables Grassmann la situación es diferente: $\mathcal{B}_{AHol}$ es espacio de Hilbert con el producto interno dado por (3.20) y Λ_2 no lo es. Por esto hablar de proyección ortogonal en este caso

carece de sentido. Sin embargo, como (3.20) es una forma sesquilineal sobre Λ_2 , la proyección de un elemento de Λ_2 sobre el espacio de las funciones holomorfas o anti-holomorfas de variable Grassmann se puede calcular. En analogía a la proyección de Bargmann (2.2) si $f(\eta, \bar{\eta}) = c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta + c_{11}\eta\bar{\eta}$, entonces

$$\begin{aligned} (K_{\bar{\xi}}(\eta), f(\eta, \bar{\eta}))_G &= \int d\eta : [1 + \eta\bar{\xi}]^*(1 + \eta\bar{\eta})[c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta + c_{11}\eta\bar{\eta}] : d\bar{\eta} \\ &= c_{00} + c_{11} + c_{01}\bar{\xi} \in \mathcal{B}_{Hol}(\bar{\xi}) \end{aligned}$$

También, considerando $K_{\xi}(\bar{\eta})$ núcleo reproductivo de $\mathcal{B}_{AHol}$ tenemos

$$\begin{aligned} (K_{\xi}(\bar{\eta}), f(\eta, \bar{\eta}))_G &= \int d\eta : [1 + \eta\bar{\xi}](1 + \bar{\eta}\eta)[c_{00} + c_{10}\bar{\eta} + c_{01}\eta + c_{11}\eta\bar{\eta}] : d\bar{\eta} \\ (3.26) \quad &= c_{00} + c_{11} + c_{10}\bar{\xi} \in \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi}) \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3.16. Llamaremos $P_{Ahol} : \Lambda_2 \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi})$ a la aplicación definida como

$$(3.27) \quad P_{Ahol}(f)(\bar{\xi}) = (K_{\xi}(\bar{\eta}), f(\eta, \bar{\eta}))_G$$

y $P_{Hol} : \Lambda_2 \rightarrow \mathcal{B}_{Hol}(\xi)$ a la aplicación definida como

$$(3.28) \quad P_{Hol}(f)(\xi) = (K_{\bar{\xi}}(\eta), f(\eta, \bar{\eta}))_G.$$

Notemos que las aplicaciones P_{Ahol} y P_{Hol} son proyecciones aunque no pueden decirse ortogonales (Λ_2 no está dotado de un producto interno).⁶ Ambas verifican la suryectividad, aunque no la inyectividad. Es claro ver que toda la clase de elementos

$$(3.29) \quad C_{(a,b)} = \{f(\eta, \bar{\eta}) = a - x + b\bar{\eta} + y\eta + x\eta\bar{\eta}\}$$

es proyectada por P_{Ahol} sobre la función $f(\bar{\xi}) = a + b\bar{\xi} \in \mathcal{B}_{AHol}(\bar{\xi})$ para cualquier valor de x e y complejos.

---

⁶Un operador de proyección P en un espacio vectorial es una transformación lineal idempotente, es decir, satisface la igualdad $P^2 = P$. Cuando un operador proyección actúa sobre un espacio de Hilbert y es autoadjunto, se dice que es una proyección ortogonal.

7. Positividad

La interpretación de los elementos del álgebra de Grassmann como funciones de variables anticonmutantes sin duda le otorgó una visión más familiar a los mismos. Esta forma de representarlos nos dejó en posición de analizar cada uno de los conceptos y herramientas que se utilizan en el análisis funcional estándar, como fue por ejemplo el caso del producto interno, la derivación y la integración. La positividad de funciones de variables Grassmann es otro punto que también podemos intentar extender.

Mediante la incorporación de la noción de positividad sobre el álgebra Grassmann, buscamos reproducir desigualdades básicas del análisis funcional. Por ejemplo $z.\bar{z} \geq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, la positividad de la integral de funciones positivas, la desigualdad que relaciona la norma del núcleo reproductivo con la norma de una función (2.25), entre otras.

En esta Tesis proponemos la siguiente relación:

DEFINICIÓN 3.17. *Dadas $f, g \in \Lambda_2$, diremos que $f \leq g$ si y sólo si existen $\tau, \nu \in \mathcal{B}_{Hol}$ tales que*

$$(3.30) \quad g - f = \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)}.$$

Sería natural intentar que esta igualdad que caracteriza la relación $\leq$ tuviera un solo sumando. Como obstáculo consideremos el número complejo positivo $1 + |z|^2$. Si por analogía pensamos que el elemento $1 + \eta\bar{\eta} \in \Lambda_2$ debe ser positivo, es simple ver que no existe ninguna función $\tau \in \mathcal{B}_{Hol}$ tal que $1 + \eta\bar{\eta} = \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)}$. Técnicamente lo que sucede es que, si consideráramos (3.30) con un solo sumando, la relación $\leq$ no resultaría transitiva y en consecuencia no sería una relación de orden. Definiendo positividad según 3.17 podemos probar

PROPOSICIÓN 3.18. *La relación $\leq$ definida en 3.17 es una relación de orden en Λ_2 .*

Demostración.

•**Reflexividad.** Para cualquier función $f \in \Lambda_2$ $f(\eta, \bar{\eta}) - f(\eta, \bar{\eta}) = 0(\eta)\overline{0(\eta)}$ siendo $0(\eta) \equiv 0$, de donde naturalmente $f \leq f$.

•**Antisimetría.** Si $f \leq g$ con $f, g \in \Lambda_2$ entonces existen $\tau, \nu \in \mathcal{B}_{Hol}$ tales que

$$g - f = \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)}.$$

Si $g \leq f$, existen $\tau', \nu' \in \mathcal{B}_{Hol}$ tales que

$$f - g = \tau'(\eta)\overline{\tau'(\eta)} + \nu'(\eta)\overline{\nu'(\eta)}.$$

Si $\tau(\eta) = a + b\eta$, $\nu(\eta) = c + d\eta$, $\tau'(\eta) = a' + b'\eta$, $\nu'(\eta) = c' + d'\eta$, tenemos que

$$0 = g - f + f - g = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 + |a'|^2 + |b'|^2 + |c'|^2 + |d'|^2 + (a\bar{b} + c\bar{d} + a'\bar{b}' + c'\bar{d}')\bar{\eta} + (b\bar{a} + d\bar{c} + b'\bar{a}' + d'\bar{c}')\eta$$

de donde $a = b = c = d = a' = b' = c' = d' = 0$. En consecuencia $f - g = g - f = 0$ y $f = g$.

•**Transitividad.** Si $f \leq g$, $g \leq h$ con $f, g, h \in \Lambda_2$ existen $\tau, \nu, \tau', \nu' \in \mathcal{B}_{Hol}$ de manera que

$$g - f = \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)}$$

$$h - g = \tau'(\eta)\overline{\tau'(\eta)} + \nu'(\eta)\overline{\nu'(\eta)}.$$

Siendo las funciones τ, ν, τ', ν' como antes, y llamando $A := |a|^2 + |a'|^2 + |c|^2 + |c'|^2$, $B := a\bar{b} + c\bar{d} + a'\bar{b}' + c'\bar{d}'$ y $C := |b|^2 + |d|^2 + |b'|^2 + |d'|^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} h - f &= h - g + g - f \\ &= \tau'(\eta)\overline{\tau'(\eta)} + \nu'(\eta)\overline{\nu'(\eta)} + \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)} \\ &= A + B\bar{\eta} + \bar{B}\eta + C\eta\bar{\eta} \end{aligned}$$

Si $A = 0$ entonces $a = a' = c = c' = 0$ de donde $\tau(\eta) = b\eta$, $\nu(\eta) = d\eta$, $\tau'(\eta) = b'\eta$, $\nu'(\eta) = d'\eta$ y

$$h - f = (|b|^2 + |d|^2 + |b'|^2 + |d'|^2)\eta\bar{\eta} \geq 0.$$

Si $A \neq 0$

$$\begin{aligned} h - f &= A + B\bar{\eta} + \bar{B}\eta + C\eta\bar{\eta} \\ &= (\sqrt{A} + \frac{\bar{B}}{\sqrt{A}}\eta)(\sqrt{A} + \frac{B}{\sqrt{A}}\bar{\eta}) + (C - \frac{|B|^2}{A})\eta\bar{\eta} \end{aligned}$$

Observemos que $C - \frac{|B|^2}{A} = K \geq 0$. Entonces, definiendo $\Upsilon(\eta) = \sqrt{A} + \frac{\bar{B}}{\sqrt{A}}\eta$ y $\Phi(\eta) = \sqrt{K}\eta$, se obtiene $h - f = \Upsilon(\eta)\overline{\Upsilon(\eta)} + \Phi(\eta)\overline{\Phi(\eta)}$ como era esperado. ■

Con esta relación de orden, la idea de determinar cuándo una función f de variables anti-conmutantes es positiva, tiene sentido. La siguiente proposición nos provee una forma práctica de caracterizar la positividad para los elementos de Λ_2 .

PROPOSICIÓN 3.19. *Una función $f(\eta, \bar{\eta}) = a + b\eta + c\bar{\eta} + d\eta\bar{\eta} \in \Lambda_2$ es positiva, si y sólo si a, d son números reales positivos, $b = \bar{c} \in \mathbb{C}$ y $|b|^2 \leq ad$.*

Demostración.

Si $f(\eta, \bar{\eta}) \geq 0$, existen $\tau, \nu \in \mathcal{B}_{Hol}$ como antes, tales que

$$\begin{aligned} f &= \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)} \\ &= |a|^2 + |a'|^2 + (a\bar{b}' + a'\bar{b})\eta + \overline{(a\bar{b}' + a'\bar{b})} \bar{\eta} + (|b|^2 + |b'|^2)\eta\bar{\eta} \end{aligned}$$

Claramente $A = |a|^2 + |a'|^2$, $D = |b|^2 + |b'|^2$ son reales positivos, $B = a\bar{b}' + a'\bar{b} = \bar{C}$, y $|B|^2 \leq A.D$

Recíprocamente, para $f(\eta, \bar{\eta}) = a + b\eta + \bar{b}\bar{\eta} + d\eta\bar{\eta}$ con a, d números reales positivos y $|b|^2 \leq a.d$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(\eta, \bar{\eta}) &= a + b\eta + \bar{b}\bar{\eta} + d\eta\bar{\eta} \\ &= (\sqrt{a} + \frac{\bar{b}}{\sqrt{a}}\eta)(\sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}}\bar{\eta}) + (d - \frac{|b|^2}{a})\eta\bar{\eta}. \end{aligned}$$

Como $d - \frac{|b|^2}{a} =: k \geq 0$, entonces llamando $\tau(\eta) = (\sqrt{a} + \frac{\bar{b}}{\sqrt{a}}\eta)$ y $\nu(\eta) = \sqrt{k}\eta$, verificamos la positividad representando a $f(\eta, \bar{\eta}) = \tau(\eta)\overline{\tau(\eta)} + \nu(\eta)\overline{\nu(\eta)}$. ■

Una vez establecida la positividad como en la Definición 3.17 podemos demostrar las desigualdades propuestas al comienzo de la sección. Si $f \in \Lambda_2$ y $0 \leq f$, entonces $0 \leq \int d\eta f(\eta, \bar{\eta}) d\bar{\eta}$ (resultado que depende sólo de la condición $d \geq 0$ para $f(\eta, \bar{\eta}) = a + b\eta + c\bar{\eta} + d\eta\bar{\eta}$). La recíproca no siempre se verifica al igual que en el caso complejo.⁷

Respecto de la teoría de núcleos reproductivos, entre otras relaciones podemos demostrar una cota con la forma (2.25) para el caso de funciones de variable Grassmann

PROPOSICIÓN 3.20. Si $f \in \mathcal{B}_{Hol}$ y $K_{\bar{\eta}}(\eta) = 1 + \eta\bar{\eta}$, entonces

$$(3.31) \quad f(\eta)\overline{f(\eta)} \leq K_{\bar{\eta}}(\eta)\|f\|^2$$

Demostración. Dada $f(\eta) = f_0 + f_1\eta$

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\bar{\eta})\|f\|^2 - f(\eta)\overline{f(\eta)} &= (1 + \eta\bar{\eta})(|f_0|^2 + |f_1|^2) - (f_0 + f_1\eta)(\bar{f}_0 + \bar{f}_1\bar{\eta}) \\ &= |f_1|^2 + |f_0|^2\eta\bar{\eta} - \bar{f}_0f_1\eta - \bar{f}_1f_0\bar{\eta} \\ &= (\bar{f}_1 - \bar{f}_0\eta)(f_1 - f_0\bar{\eta}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

---

⁷Considerar por ejemplo $f(\eta, \bar{\eta}) = \eta + \eta\bar{\eta}$.

En base a estos resultados esperamos que el criterio de positividad propuesto en esta Tesis, nos proporcione una herramienta más para interpretar a los elementos del álgebra de Grassmann como funciones de tales variables y tratarlas según métodos del análisis funcional.

Capítulo 4

Estados coherentes fermiónicos

1. Operadores fermiónicos

Consideremos operadores fermiónicos nilpotentes de orden 2, $a, a^\dagger$ actuando sobre un espacio de Hilbert de estados $\mathcal{H}$, que satisfacen la relación de anticonmutación

$$(4.1) \quad \{a, a^\dagger\} := a a^\dagger + a^\dagger a = 0.$$

Estos operadores describen un sistema con un grado de libertad exhibiendo la estadística de exclusión de Pauli. El operador a es el llamado operador de destrucción fermiónico y $a^\dagger$, su conjugado Hermítico, es el operador de creación fermiónico.

El operador N es el operador número y está dado por

$$(4.2) \quad a^\dagger a = N.$$

Desde el vector vacuum $|0\rangle$, vector destruido por el operador a , se puede construir el espacio de Fock generado por el conjunto ortonormal según el producto interno de $\mathcal{H}$

$$(4.3) \quad |n\rangle = \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle, \quad n = 0, 1.$$

DEFINICIÓN 4.1. Llamaremos $\mathcal{H}$ al espacio vectorial de dimensión 2 generado por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sobre $\mathbb{C}$.

En esta base, la acción de los operadores básicos resulta

$$(4.4) \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|n+1\rangle \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

donde $a|_2$ es el entero módulo 2 de a .

Para la descripción de un sistema fermiónico con L grados de libertad, contamos con operadores nilpotentes de orden 2 $\{a_1, \dots, a_N, a_1^\dagger, \dots, a_N^\dagger\}$ verificando para cada $i = 1, \dots, L$

$$(4.5) \quad \{a_i, a_i^\dagger\} = 0.$$

La antisimetría de los estados fermiónicos, característica de la llamada estadística de Fermi-Dirac, impone que los operadores fermiónicos correspondientes a diferentes grados de libertad anticonmuten,

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_i, a_j^\dagger\} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

El vector vacuum para este tipo de sistemas, está dado por el producto directo de los vectores vacuum para cada uno de los modos, es decir $|0\rangle := |0_1\rangle \dots |0_L\rangle$ donde cada $|0_i\rangle$ es el vector vacuum del sistema con un grado de libertad cuyo operador creación es $a_i^\dagger$ y el destrucción a_i . El espacio de Fock del sistema para múltiples partículas indistinguibles con estadística de exclusión de Pauli se construye mediante la acción de los operadores de creación $a_i^\dagger$ sobre este vacío.

2. Estados coherentes fermiónicos

Trabajaremos ahora sobre un sistema fermiónico con un grado de libertad, con operador creación $a^\dagger$, destrucción a y espacio de Fock $\mathcal{H}$.

Los estados coherentes en $\mathcal{H}$ puede definirse como vectores propios de a ¹. Sin embargo, es fácil notar que el único vector propio de a en el espacio $\mathcal{H}$ de dimensión dos es el vacuum $|0\rangle$. Una forma de solucionar este inconveniente es ampliando el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, permitiendo combinaciones lineales con coeficientes no complejos. Así introducimos las variables Grassmann, adecuadas por su nilpotencia de orden 2 para hacer frente a la construcción de estados coherentes fermiónicos. Las combinaciones lineales de $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ con coeficientes Grassmann no extienden el espacio de Fock $\mathcal{H}$ un módulo:

DEFINICIÓN 4.2. *Llamaremos $\mathcal{K}$ al módulo libre generado por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sobre el anillo Λ_2 .*

---

¹En el esquema de Perelomov, la construcción del sistema de estados coherentes está determinada por el operador desplazamiento que para el caso fermiónico resulta $W(\eta) = 1 + \eta \hat{a}^\dagger = e^{\eta \hat{a}^\dagger}$. Actuando sobre el estado $|0\rangle$ y siendo $\{\eta, \bar{\eta}\}$ el sistema de generadores del álgebra de Grassmann Λ_2 [Pellizola 1992] resulta que

$$W(\eta)|0\rangle =: |v_\eta\rangle = |0\rangle + \eta|1\rangle.$$

Dentro de este módulo se encuentran autovectores formales de a . En efecto, consideremos el generador Grassmann η y vectores formales $|\rangle \in \mathcal{K}$ de la forma²

$$|\rangle = \alpha_0|0\rangle + \eta\alpha_1|1\rangle,$$

(usamos la notación $|\rangle$ para distinguirlo de verdaderos vectores $|\rangle \in \mathcal{H}$) donde $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$. Actuando con el operador destrucción,

$$a|\rangle = \eta\alpha_1|0\rangle.$$

Dado que $\eta^2 = 0$, encontramos que este resultado es proporcional a $|\rangle$, con constante de proporcionalidad η , si $\alpha_1 = \alpha_0$. Así tenemos que $|\eta\rangle = \alpha_0(|0\rangle + \eta|1\rangle)$ es un autovector de a , es decir un estado coherente fermiónico,

$$a|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle.$$

Introducimos los duales formales por conjugación: siendo $\bar{\eta}$ la variable conjugada de η , y los vectores duales $\langle n|$ en $\mathcal{H}^*$, tenemos que

$$\langle \eta| = \langle 0|\bar{\alpha}_0 + \langle 1|\bar{\alpha}_0\bar{\eta}.$$

y se puede verificar que $(\eta|a^\dagger = (\eta|\bar{\eta}$.

En $\mathcal{K}$ se define naturalmente una forma sesquilineal $(,) : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \Lambda_2$ por extensión del producto interno en $\mathcal{H}$: dado $|\nu\rangle = \nu_0(\eta, \bar{\eta})|0\rangle + \nu_1(\eta, \bar{\eta})|1\rangle$ y $|\mu\rangle = \mu_0(\eta, \bar{\eta})|0\rangle + \mu_1(\eta, \bar{\eta})|1\rangle$,

$$(\mu|\nu) = \bar{\mu}_0(\eta, \bar{\eta})\nu_0(\eta, \bar{\eta}) + \bar{\mu}_1(\eta, \bar{\eta})\nu_1(\eta, \bar{\eta}).$$

Esta operación no está valuada en $\mathbb{C}$, sino en Λ_2 , luego no define un producto interno. Sin embargo, de acuerdo a nuestra definición de positividad 3.17 para elementos en Λ_2 , $0 \leq (\mu|\mu)$.

También es útil escribir la proyección de elementos en $\mathcal{K}$ sobre la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$: de acuerdo con la notación anterior, para $n = 0, 1$

$$\begin{aligned} \langle n|\nu \rangle &= \nu_n(\eta, \bar{\eta}), \\ (\mu|n \rangle &\equiv \langle n|\mu \rangle^* = \bar{\mu}_n(\eta, \bar{\eta}). \end{aligned}$$

En particular, para $n = 0, 1$

$$\langle n|\eta \rangle = \alpha_0\eta^n$$

---

²En notación tensorial $\mathcal{K} \simeq \Lambda_2 \otimes V$ siendo $V = \text{span}_{\mathbb{C}}\{|0\rangle, |1\rangle\}$ espacio vectorial generado por $|0\rangle$ y $|1\rangle$ sobre $\mathbb{C}$.

La acción de $(\eta|$ sobre $|\eta\rangle$ da un elemento de Λ_2 ,

$$(\eta|\eta) = |\alpha_0|^2 + |\alpha_0|^2 \bar{\eta}\eta,$$

que puede ser caracterizado como positivo según 3.17 y como invertible según nuestra proposición 3.3. Si bien podemos normalizar el estado coherente $|\eta\rangle$ imponiendo $(\eta|\eta) = 1$, adoptaremos sin pérdida de generalidad la normalización estándar $\alpha_0 = 1$.

DEFINICIÓN 4.3. *Los elementos $|\eta\rangle := |0\rangle + \eta|1\rangle$ de $\mathcal{K}$ forman el sistema de estados coherentes fermiónico.*

Completitud. La completitud de los estados coherentes fermiónicos se expresa como una resolución de la identidad en $\mathcal{H}$ a través de la integral

$$(4.6) \quad \int d\eta |\eta\rangle \mu(\eta, \bar{\eta}) (\eta| d\bar{\eta} = \mathbb{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

donde $\mu(\eta, \bar{\eta})$ es un peso adecuado de la medida para la integral.

Esta igualdad debe ser interpretada al igual que en el caso bosónico. Así, dados dos vectores cualesquiera $|u\rangle = u_0|0\rangle + u_1|1\rangle$, $|v\rangle = v_0|0\rangle + v_1|1\rangle$ en $\mathcal{H}$, nos preguntamos como debe ser $\mu(\eta, \bar{\eta})$ para verificar

$$\langle v| \int d\eta |\eta\rangle \mu(\eta, \bar{\eta}) (\eta| d\bar{\eta} |u\rangle = \langle v|u\rangle.$$

Usando la expresión de los estados coherentes definidos en 4.3 tenemos que

$$(4.7) \quad \int d\eta \eta^n \mu(\eta, \bar{\eta}) \bar{\eta}^{n'} d\bar{\eta} = \delta_{n,n'}.$$

Escribiendo $\mu(\eta, \bar{\eta})$ en la forma antiWick general (3.6), la expresión completa dentro de la integral resulta ordenada en forma antiWick y puede resolverse directamente según la convención adoptada como definición en (3.8). El factor peso debe contener términos con iguales potencias de η y $\bar{\eta}$ de manera que resulte no nulo sólo para $n = n'$. Así tomamos

$$(4.8) \quad \mu(\eta, \bar{\eta}) = 1 + \eta \bar{\eta}$$

como el único núcleo (ordenado anti Wick) que da sentido a la ecuación (4.6).

La ecuación (4.6) destaca el rol auxiliar de las variables Grassmann y de los vectores del módulo $\mathcal{K}$ ya que al calcular elementos de matriz en $\mathcal{H}$, los vectores del módulo $\mathcal{K}$ se proyectan sobre $\mathcal{H}$ dando valores Grassmann, a partir de los cuales la integral en Λ_2 permite finalmente calcular valores complejos.

DEFINICIÓN 4.4. *Para un vector formal arbitrario $|\psi\rangle \in \mathcal{K}$ y $|\eta\rangle$ dual de un estado coherente, diremos que la expresión $(\eta|\psi)$ es el símbolo Grassmann de $|\psi\rangle$.*

Notemos que si $|\xi\rangle$ y $|\eta\rangle$ son estados coherentes fermiónicos dados por (4.3), la acción de $(\xi|$ sobre $|\eta\rangle$ resulta

$$(4.9) \quad (\xi|\eta) = 1 + \bar{\xi}\eta,$$

coincidiendo con el núcleo reproductivo $K(\bar{\xi}, \eta)$ dado en (3.24). Esto nos dice que el símbolo Grassmann de un estado coherente es el núcleo reproductivo, enunciado análogo a la observación 1.7 para el caso bosónico.

Representación de Bargmann Fock. Dado un vector de estado del sistema fermiónico $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, el símbolo Grassmann $\psi(\bar{\eta}) := (\eta|\psi)$ será interpretado como la función de onda Grassmann del estado $|\psi\rangle$. Consideremos un estado $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \in \mathcal{H}$. Entonces

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \psi(\bar{\eta}) &= (\langle 0| + \langle 1|\bar{\eta})(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \\ &= c_0 + c_1\bar{\eta}. \end{aligned}$$

siendo $\psi(\bar{\eta})$ un elemento de $\mathcal{B}_{Ahol}$.

Usando la resolución de la identidad (4.6) con peso (4.8), el vector de estado $|\psi\rangle$ queda representado como

$$(4.11) \quad |\psi\rangle = \int d\eta |\eta\rangle \mu(\eta, \bar{\eta}) \psi(\bar{\eta}) d\bar{\eta}$$

expresión que en analogía con (1.20) se interpreta como una superposición de estados coherentes.

Para la norma de este estado tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi|\psi \rangle &= \langle \psi| \int d\eta |\eta\rangle \mu(\eta, \bar{\eta}) (\eta| d\bar{\eta} |\psi \rangle \\ &= \int d\eta \langle \psi|\eta \rangle (1 + \eta\bar{\eta}) (\eta|\psi \rangle d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta \overline{\psi(\bar{\eta})} (1 + \eta\bar{\eta}) \psi(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \\ &= (\psi, \psi)_G =: \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

donde el producto interno $(\cdot, \cdot)_G$ definido en $\mathcal{B}_{Ahol} \times \mathcal{B}_{Ahol}$ está dado en (3.20). Esto nos sugiere pensar en una relación entre el espacio de estados $\mathcal{H}$ con el espacio $\mathcal{B}_{Ahol}$.

De manera similar tenemos que la acción del dual $\langle\psi|$ sobre el estado $|\phi\rangle$ puede representarse como

$$\begin{aligned}\langle\psi|\phi\rangle &:= \langle\psi|\int d\eta : |\eta\rangle\mu(\eta,\bar{\eta})(\eta| : |\phi\rangle d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta : \overline{\psi(\bar{\eta})}(1+\eta\bar{\eta})\phi(\bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\ &= (\psi,\phi)_G.\end{aligned}$$

Motivados por lo anterior, podemos definir una transformación lineal $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}$ dada por

$$(4.12) \quad U(|\psi\rangle) = \psi(\bar{\eta}) = \langle\eta|\psi\rangle$$

que es invertible, y la inversa se define como

$$(4.13) \quad U^{-1}(\psi(\bar{\eta})) = |\psi\rangle = \int d\eta : |\eta\rangle(1+\eta\bar{\eta})\psi(\bar{\eta}) : d\bar{\eta}$$

Las ecuaciones (4.12) y (4.13) describen, vía estados coherentes, la isometría entre el espacio de Fock $\mathcal{H}$ y su realización $\mathcal{B}_{AHol}$.

Operadores y símbolos sobre variables Grassmann

1. Operadores anti Wick y Toeplitz sobre variables Grassmann

La existencia del núcleo reproductivo de $\mathcal{B}_{AHol}$ permite definir en el sentido usual los operadores Toeplitz.

DEFINICIÓN 5.1. *Llamaremos proyección de Bargmann del álgebra Grassmann al operador $P : \Lambda_2 \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}$ definido para todo $f(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$ como*

$$(5.1) \quad P(f)(\bar{\xi}) := (K_{\xi}(\bar{\eta}), f(\eta, \bar{\eta}))_G.$$

Observar que el operador P restringido a $\mathcal{B}_{AHol}$ resulta el operador identidad debido a la propiedad reproductiva de la función K_{ξ} .

DEFINICIÓN 5.2. *Dada P la proyección de Bargmann sobre del álgebra Grassmann, y $g(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$, definimos el operador $T_g^G : \mathcal{B}_{AHol} \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}$ como*

$$(5.2) \quad T_g^G[f](\bar{\xi}) := P(gf)(\bar{\xi})$$

con P definida en (5.1) para $f \in \mathcal{B}_{AHol}$. El operador T_g^G será llamado operador de Toeplitz Grassmann en $\mathcal{B}_{AHol}$ con símbolo g .

Observar que el dominio de T_g^G es todo el espacio $\mathcal{B}_{AHol}$, haciendo que su estudio - comparado en los operadores Toeplitz en $\mathbb{C}$ - sea evidentemente más simple. Esto se debe a la nilpotencia finita de orden 2 de las variables Grassmann que evita todo inconveniente de convergencia.

De manera análoga al caso bosónico, los operadores de Toeplitz en $\mathcal{B}_{AHol}$ pueden ser vistos como una realización de otro tipo de operadores que actúan sobre $\mathcal{H}$, espacio abstracto de estados del sistema fermiónico.

DEFINICIÓN 5.3. *Dada una función $\varphi(\eta, \bar{\eta}) \in \Lambda_2$, definimos el operador A_{φ}^G como*

$$(5.3) \quad A_{\varphi}^G = \int d\eta : |\eta)\mu(\eta, \bar{\eta})\varphi(\eta, \bar{\eta})(\eta| : d\bar{\eta}$$

La función φ se denomina símbolo anti-Wick o símbolo contravariante de A_φ^G , y nos referimos a A_φ^G como un operador anti Wick Grassmann con símbolo $\varphi \in \Lambda_2$.

La igualdad (5.3) debe ser entendida como igualdad entre operadores en $\mathcal{H}$, es decir que para vectores $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ de $\mathcal{H}$,

$$(5.4) \quad \langle \phi | A_\varphi^G | \psi \rangle = \int d\eta : \langle \phi | \eta \rangle \mu(\eta, \bar{\eta}) \varphi(\eta, \bar{\eta}) (\eta | \psi) : d\bar{\eta}.$$

Entonces si consideramos los estados coherentes $|\xi\rangle$, y un estado arbitrario $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (\xi | A_\varphi^G | \psi) &= \int d\eta : (\xi | \eta) \mu(\eta, \bar{\eta}) \varphi(\eta, \bar{\eta}) (\eta | \psi) : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta : (1 + \eta \bar{\xi}) (1 + \eta \bar{\eta}) \varphi(\eta, \bar{\eta}) \psi(\bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta : K_\xi(\eta)^* (1 + \eta \bar{\eta}) \varphi(\eta, \bar{\eta}) \psi(\bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\ &= T_\varphi \psi(\bar{\xi}) \end{aligned}$$

Por (4.12) y (4.13), tenemos que T_φ es la realización del operador anti Wick A_φ^G .

Siguiendo la definición 3.17, se puede ver como la positividad del símbolo determina la positividad del operador Toeplitz Grassmann, propiedad que se verifica sencillamente para el caso de operadores Toeplitz en el plano complejo.

PROPIEDADES 5.4. Si el símbolo $\varphi(\eta, \bar{\eta})$ es positivo según la definición 3.17, el operador T_φ es positivo.

Demostración. Si $\varphi(\eta, \bar{\eta})$ es positivo, por la Proposición 3.19 $\varphi(\eta, \bar{\eta}) = a + b\bar{\eta} + \bar{b}\eta + c\eta\bar{\eta}$ donde a, b son reales positivos y $|b|^2 \leq ac$. Para $f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1\bar{\eta} \in \mathcal{B}_{AHol}$ tenemos que

$$(5.5) \quad T_\varphi f(\bar{\eta}) = f_0(|a|^2 + |b|^2) + f_1 a \bar{b} + [f_0 \bar{a} b + f_1 |a|^2] \bar{\eta}.$$

Entonces usando (3.20)

$$\begin{aligned} (T_\varphi f(\bar{\eta}), f(\bar{\eta}))_G &= |f_0|^2(|a|^2 + |b|^2) + \bar{f}_0 f_1 a \bar{b} + \bar{f}_1 f_0 \bar{a} b + |f_1|^2 |a|^2 \\ &\geq |f_0 b + f_1 a|^2 \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Operadores Toeplitz Grassmann diagonales

Entre los operadores Toeplitz en $\mathcal{B}_{AHol}$ encontramos aquellos que son diagonales en la base de este espacio, es decir $T_\varphi^G \eta^n = \lambda_n \eta^n$ con $n = 0, 1$. En alusión a nuestros resultados en la Parte 1 sencillamente podemos demostrar:

PROPOSICIÓN 5.5. *El operador T_φ^G es diagonal en la base de $\mathcal{B}_{AHol}$ si y sólo si $\varphi = a + b\eta\bar{\eta}$.*

Demostración. Sea $f(\bar{\eta}) = f_0 + f_1\bar{\eta}$ en el espacio $\mathcal{B}_{AHol}$ y un símbolo general $\varphi = \varphi_{00} + \varphi_{01}\eta + \varphi_{10}\bar{\eta} + \varphi_{11}\eta\bar{\eta} \in \Lambda_2$

$$\begin{aligned} T_\varphi^G[f](\bar{\xi}) &= (K_\xi(\bar{\eta}), \varphi(\eta, \bar{\eta})f(\bar{\eta}))_G \\ &= \int d\eta : (1 + \bar{\eta}\xi)^*(1 + \eta\bar{\eta})(\varphi_{00} + \varphi_{10}\eta + \varphi_{01}\bar{\eta} + \varphi_{11}\eta\bar{\eta})(f_0 + f_1\bar{\eta}) : d\bar{\eta} \\ &= f_0\varphi_{11} + f_0\varphi_{00} + f_1\varphi_{10} + f_0\bar{\xi}\varphi_{01} + f_1\bar{\xi}\varphi_{00} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Trivial, considerando $\varphi_{01} = \varphi_{10} = 0$.

$\Rightarrow$) Si T_φ^G es diagonal en la base de $\mathcal{B}_{Ahol}$

-: siendo $f(\bar{\theta}) = 1$, se tiene que $T_\varphi^G[f](\bar{\theta}) = \varphi_{11} + \bar{\theta}\varphi_{10}$. Entonces $\varphi_{10} = 0$

-: siendo $f(\bar{\theta}) = \bar{\theta}$, entonces $T_\varphi^G[f](\bar{\theta}) = \varphi_{01} + \bar{\theta}\varphi_{00}$ lo que implica que $\varphi_{01} = 0$

de donde $\varphi = \varphi_{00} + \varphi_{11}\eta\bar{\eta}$. ■

DEFINICIÓN 5.6. *Llamaremos a los elementos de la forma $\varphi = a + b\eta\bar{\eta}$ funciones Grassmann radiales.*¹

Observar que cualquier función Grassmann radial puede ser considerada símbolo de un operador Toeplitz definido en (5.2), ya que no existen limitaciones sobre el dominio del operador. En consecuencia, estos operadores no presentan las dificultades discutidas en la Parte 1. Mencionamos a continuación un paralelismo con aquella discusión.

Como en el caso bosónico, es posible establecer una equivalencia entre el operador T_φ^G con símbolo Grassmann radial φ , y un operador que actúa en el espacio

$$(5.6) \quad \mathcal{C}_0^2 = \{ \{a_n\}_{n \geq 0} \text{ donde } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq 2 \},$$

¹En analogía a la representación polar de los números complejos ($\bar{z}z = r^2$).

subespacio de las sucesiones cuadrado sumables $l_2(\mathbb{C})$. Esto se traduce en la posibilidad de encontrar una realización de los operadores Toeplitz Grassmann en operadores en el espacio de sucesiones.

TEOREMA 5.7. *Sea φ un símbolo Grassmann radial. Entonces el operador Toeplitz T_φ^G actuando en $\mathcal{B}_{AHol}$ es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ actuando en el espacio de sucesiones $\mathcal{C}_0^2$ donde*

$$(5.7) \quad \varphi_n = \int d\eta : (1 + \bar{\eta}\eta)\varphi(\eta, \bar{\eta})\eta^n \bar{\eta}^n : d\bar{\eta}$$

Demostración. Si $\varphi(\eta, \bar{\eta}) = s_0 + s_1\eta\bar{\eta}$

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \int d\eta : (1 + \eta\bar{\eta})(s_0 + s_1\eta\bar{\eta})\eta^n \bar{\eta}^n : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta [s_0\bar{\eta}^n\eta^n + s_0\bar{\eta}^{n+1}\eta^{n+1} + s_1\bar{\eta}^{n+1}\eta^{n+1} + s_1\bar{\eta}^{n+2}\eta^{n+2}]d\bar{\eta} \\ &= s_0\delta_{n,1} + s_0\delta_{n+1,1} + s_1\delta_{n+1,1} \end{aligned}$$

coincidiendo con el espectro encontrado en la Proposición 5.5. ■

TEOREMA 5.8. *Para cada sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^2$ existe un símbolo Grassmann radial $a(\eta, \bar{\eta})$ tal que el operador Toeplitz T_a^G es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demostración. A partir de la sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^2$ definimos

$$(5.8) \quad a(\eta, \bar{\eta}) = (1 - \eta\bar{\eta}) \sum_{k=0}^1 \gamma_{1-k}\eta^k \bar{\eta}^k$$

Entonces

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) &= \int d\eta : (1 + \eta\bar{\eta})a(\eta, \bar{\eta})\eta^n \bar{\eta}^n : d\bar{\eta} \\ &= \int d\eta : (\gamma_1 + \gamma_0\bar{\eta}\eta - \gamma_1\bar{\eta}\eta)(1 + \bar{\eta}\eta)\bar{\eta}^n \eta^n : d\bar{\eta} \\ &= \gamma_1\delta_{n,1} + \gamma_0\delta_{n+1,1} = \gamma_n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.1. Composición. El problema de la composición de operadores Toeplitz en el caso de variables Grassmann tiene simple solución por la nilpotencia de las mismas. Para operadores Toeplitz en $\mathcal{B}_{AHol}$ con símbolo radial, y con la ayuda de la equivalencia dada en el Teorema 5.7, se pueden obtener rápidas conclusiones sobre este problema.

Consideremos dos operadores Toeplitz Grassmann T_φ^G y T_ψ^G con símbolo Grassmann radial. Estos operadores son unitariamente equivalentes respectivamente a t_φ y t_ψ que actúan sobre $\mathcal{C}_0^2$ de la siguiente manera

$$(5.9) \quad t_\varphi(\{a_n\}) = \{\gamma_\varphi(n)a_n\} \quad t_\psi(\{a_n\}) = \{\gamma_\psi(n)a_n\}.$$

con $\gamma_\varphi(n)$ y $\gamma_\psi(n)$ calculadas mediante (5.7). Entonces el operador composición $T_\varphi^G T_\psi^G$ es equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\gamma_\varphi(n)\gamma_\psi(n)\}$.

La función asociada a la sucesión $\{\gamma_\varphi(n)\gamma_\psi(n)\}$ que resultará símbolo del operador composición se puede construir usando (5.8) resultando

$$A(\eta, \bar{\eta}) = \gamma_1 + \gamma_0 \eta \bar{\eta} - \gamma_1 \eta \bar{\eta}.$$

Por transitividad de las equivalencias entre los operadores tenemos que $T_\varphi^G T_\psi^G = T_A$.

Parte 3

Estados coherentes q -bosónicos y cálculo en variables para Grassmann

La estadística de exclusión es una manera posible de generalizar el patrón de partículas bosónicas o fermiónicas [**Gentile 1940**]. Un operador creación $a^\dagger$ puede crear a lo sumo p partículas en un sitio dado (o modo) si suponemos la nilpotencia de orden $p + 1$: actuando en un vector vacuum $|0\rangle$

$$(a^\dagger)^n|0\rangle \neq 0 \quad \text{para } n = 0, \dots, p$$

$$(a^\dagger)^{p+1}|0\rangle = 0$$

Los bosones estándar se recuperan en el límite de $p \rightarrow \infty$, mientras que el principio de exclusión de Pauli corresponde a $p = 1$. En general, esta condición aparece ligada a modificaciones del álgebra de relaciones de conmutación/anticomutación de los operadores creación y destrucción [**Biedenharn 1989, Green 1953**]. Entre las propuestas de sistemas que cumplan con las estadísticas de exclusión para enteros finitos $p \geq 2$, nos interesan las llamadas partículas q -bosónicas $p + 1$ -nilpotentes [**Biedenharn 1989**].

En primer lugar revisaremos la formulación de operadores de la mecánica cuántica para un grado de libertad y para un sistema de m modos de q -bosones independientes. Luego discutiremos la construcción de los estados coherentes, para lo cual será necesaria la introducción de las llamadas variables para Grassmann $p + 1$ nilpotentes (generalización de las variables Grassmann del caso fermiónico).

Al generalizar el álgebra de Grassmann discutida en la parte 2 de esta Tesis, las nuevas reglas de nilpotencia se pueden relacionar con nuevas reglas de conmutación de los generadores [**Filipov 1993b**] (de manera similar que para el caso fermiónico la nilpotencia de orden 2 conduce a la anticomutación de las variables Grassmann). Las cuestiones referidas al orden de las variables son entonces importantes, llevando a una manipulación engorrosa de los estados coherentes. Varios autores han tratado este problema [**Baulieu 1991, Filipov 1993a, Cugliandolo 2004, Cabra 2006**] generando una variedad de convenciones, y encontrando inevitables dificultades, en particular cuando se trata el problema de estados coherentes para múltiples modos.

En esta parte de la Tesis, exploraremos la consistencia del uso de relaciones de conmutación distintas de las usuales en la literatura y de una convención de orden normal [**ElBaz 2010, Sontz 2013**], que simplificará drásticamente las operaciones, pero conservará la esencia de las estadísticas de exclusión. Luego escribimos la expresión simbólica para la traza de operadores como integral en variables para Grassmann que se utilizará para estudiar la termodinámica de

los sistemas de q -bosones. La función de partición para sistemas que no interactúan puede ser fácilmente calculada, junto con las cantidades que de ella se derivan, como la energía libre y el calor específico, observando que bosones $p + 1$ -nilpotentes interpolan las características de las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein. Por su potencial utilidad en relación a sistemas de electrones fuertemente correlacionados, estos temas son de interés actual.

Estados coherentes q -bosónicos

1. Operadores q -bosónicos

El origen de los q -bosones encuentra sus raíces en una representación bosónica del tipo de Schwinger de los generadores del álgebra cuántica deformada $SU(2)_q$, donde q es un parámetro de deformación real [Biedenharn 1989]. Más tarde, la consideración de q como una fase racional [Baulieu 1991] llevó a la realización de operadores de creación y destrucción nilpotentes.

Consideramos aquí un conjunto de m modos q -bosónicos $p + 1$ -nilpotentes, $a_i, a_i^\dagger$ ($i = 1, \dots, m$). Para cada modo, [Baulieu 1991, de Trautenberg 1997, Cabra 2006] a_i es un operador de destrucción y $a_i^\dagger$, su conjugado Hermítico, es el operador de creación correspondiente que actúan sobre un espacio de Hilbert de estados $\mathcal{H}$, verificando las relaciones de q -conmutación [Perelomov 1995]

$$(6.1) \quad a_i a_i^\dagger - q a_i^\dagger a_i = q^{-N_i},$$

y su relación conjugada

$$(6.2) \quad a_i a_i^\dagger - q^{-1} a_i^\dagger a_i = q^{N_i},$$

donde $q = e^{i\frac{\pi}{p+1}}$, $p \geq 1$, y N_i es el operador número que, por Ec. (6.1), se relaciona con $a_i, a_i^\dagger$ por

$$(6.3) \quad a_i^\dagger a_i = \frac{q^{N_i} - q^{-N_i}}{q - q^{-1}}.$$

Desde el vector vacuum $|0_i\rangle$ destruido por el operador a_i , se puede construir el espacio de Fock generado por el conjunto ortonormal

$$(6.4) \quad |n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{[n_i]_q!}} |0_i\rangle, \quad n_i = 0, \dots, p.$$

donde $[n]_q = [n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

DEFINICIÓN 6.1. *El número*

$$(6.5) \quad [n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

es el llamado número entero q -deformado y el factorial está definido por $[0]_q! \equiv 1$, $[n]_q! \equiv [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q$.

En esta representación se puede expresar rápidamente la acción de los operadores básicos

$$(6.6) \quad N_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle, \quad a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{[n+1]_q} |n_i+1\rangle \quad a_i |n_i\rangle = \sqrt{[n]_q} |n_i-1\rangle.$$

Siendo q una fase racional $q = e^{i\frac{\pi}{(p+1)}}$ se tiene que

$$(6.7) \quad [n]_q = \frac{\sin(n\pi/(p+1))}{\sin(\pi/(p+1))}$$

tal que $[0]_q = [p+1]_q = 0$ y el espacio de Fock $\mathcal{H}_i \sim \mathbb{C}^{p+1}$ es finito dimensional con $(a_i)^{p+1} = (a_i^\dagger)^{p+1} = 0$. Utilizando la simetría $[n]_q = [p+1-n]_q$, tenemos que $[n]_q! [p-n]_q! = [p]_q!$ para cualquier $n = 0, \dots, p$. Las relaciones (6.6) pueden verse de manera conveniente como el análogo matricial finito dimensional del oscilador armónico usual (álgebra de Heisenberg-Weyl), con enteros q -deformados $[n]_q$ en lugar de enteros n .

A partir del álgebra deformada (6.1), se recuperan las relaciones de conmutación usuales

$$(6.8) \quad [N_i, a_i] = -a_i, \quad [N_i, a_i^\dagger] = a_i^\dagger,$$

reflejando que N_i es en efecto el operador número para el i -ésimo modo. Es simple verificar explícitamente las relaciones de q -conmutación (6.2) en la representación matricial, usando $[n+1]_q = q[n]_q + q^{-n}$.

Por lo anterior, los q -bosones $p+1$ nilpotentes describen un sistema simple exhibiendo estadística de exclusión [Haldane 1991]. Se los puede considerar como partículas de carozo semiduro, con p regulando la dureza: combinan propiedades de bosones con un vínculo intrínseco de máxima ocupación. Es claro en cada paso de la presente formulación que en el límite $p \rightarrow \infty$ (i.e. $q \rightarrow 1$) se recupera la teoría de bosones estándar. Por otro lado, el caso $p = 1$, a pesar de su nilpotencia, no describe fermiones.

En cuanto a las propiedades de conmutación para los distintos modos, seguimos el criterio de que los operadores q -bosónicos correspondientes a diferentes grados de libertad conmutan [Floratos 1991, Shabanov 1993, Chaichian 1993]

$$(6.9) \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = [a_i, a_j^\dagger] = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Este comportamiento bosónico se establece incluso para $p = 1$, otra diferencia respecto de los fermiones en nuestro tratamiento.

El espacio de Fock del sistema es simplemente $\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_i$. En comparación con los bosones estándar, recuperados en el límite de $q \rightarrow 1$, hay que destacar que una transformación unitaria $U(m)$ de q -bosones no preserva el álgebra de generadores (6.1) [**Floratos 1991**].

2. Estados coherentes y álgebra paraGrassmann

En esta sección discutiremos el caso de un grado de libertad, es decir un determinado modo θ . La construcción de estados coherentes llevará un estricto paralelo con la presentación del caso fermiónico en la parte 2. Los estados coherentes en $\mathcal{H}$ se definen como vectores propios de a , sin embargo, notamos fácilmente que el único vector propio de a en el espacio de dimensión finita $\mathcal{H}$ es el vacuum $|0\rangle$, que obviamente no proporciona un conjunto completo. La forma elegida para solucionar esta limitación es la ampliación del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, permitiendo combinaciones lineales con coeficientes adecuados, más allá de los números complejos. Así introducimos números paraGrassmann, de la misma manera que los Grassmann fueron necesarios para hacer frente a la construcción de estados coherentes fermiónicos [**Kashiwa 1978**].

Consideremos una indeterminada θ y vectores formales

$$|\theta\rangle = \sum_{n=0}^p \alpha_n \theta^n |n\rangle,$$

donde α_n son coeficientes complejos (nuevamente usamos la notación $| \rangle$) [**ElBaz 2010**] para distinguir esta construcción de los vectores de $\mathcal{H}$, y evaluemos

$$a|\theta\rangle = \theta \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_{n+1} \theta^n \sqrt{[n+1]_q} |n\rangle.$$

Las condiciones para tener un autovector son $\alpha_{n+1} = \alpha_n / \sqrt{[n+1]_q}$ y la $(p+1)$ -nilpotencia de la indeterminada, $\theta^{p+1} = 0$, de donde

$$(6.10) \quad |\theta\rangle = \sum_{n=0}^p \left(\alpha_0 / \sqrt{[n]_q!} \right) \theta^n |n\rangle$$

verifica ser un estado coherente,

$$a|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle.$$

Introducimos luego los duales formales por conjugación: siendo $\bar{\theta}$ una variable conjugada de θ , y $\langle n|$ en $\mathcal{H}^*$ vectores duales, tenemos que

$$\langle \theta| = \sum_{n=0}^p \langle n| \left(\bar{\alpha}_0 / \sqrt{[n]_q!} \right) \bar{\theta}^n$$

tal que

$$(\theta|a^\dagger = (\theta|\bar{\theta}.$$

La acción de $(\theta|$ en $|\theta\rangle$ da un polinomio en θ y $\bar{\theta}$,

$$(\theta|\theta\rangle = \sum_{n=0}^p |\alpha_0|^2 \frac{\bar{\theta}^n \theta^n}{[n]_q!},$$

el cual no es un número real y en principio no puede ser normalizado. Adoptaremos la convención $\alpha_0 = 1$. Remarquemos que hasta aquí, la construcción incluye los números de Grassmann estándar para $p = 1$.

Relaciones de conmutación y conjugación. Antes de prescribir una regla de integración iterada sobre θ y $\bar{\theta}$ (generalizando la integral de Berezin sobre variables Grassmann), necesitamos primero de una relación de conmutación de la forma $\theta\bar{\theta} = \alpha\bar{\theta}\theta$ con α a determinar, que generalice o reemplace la anticonmutación de variables Grassmann, para poder reordenar los monomios genéricos. Como discutimos antes (ver (3.1, 3.2)), en el caso Grassmann la anticonmutación es equivalente a la nilpotencia de combinaciones lineales de generadores Grassmann. Uno de los criterios habituales es entonces pedir nilpotencia de combinaciones lineales $\chi = \rho\theta + \sigma\bar{\theta}$ con coeficientes complejos. Sin embargo, para $p > 1$ la solución no es única [Filipov 1993b]. Es usual en la literatura [Baulieu 1991, ElBaz 2010, Cabra 2006] tomar la solución más simple, con α una raíz primitiva de orden $p + 1$ de la unidad, y en particular $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{p+1}} = q^2$,

$$(6.11) \quad \theta\bar{\theta} = e^{i\frac{2\pi}{p+1}}\bar{\theta}\theta.$$

Notar que, excepto para $p = 1$, las combinaciones lineales χ , $\bar{\chi}$ no tendrán las mismas propiedades de conmutación (6.11) que tienen θ y $\bar{\theta}$.

Entonces, en contraste con los números Grassmann, un cambio lineal de los generadores para Grassmann con coeficientes complejos no preserva simultáneamente la nilpotencia de orden $p + 1$ y las reglas de conmutación (6.11) [Cugliandolo 2004]. Es más, la relación (6.11) tiene un serio inconveniente para $p \geq 2$: no soporta la conjugación usual de una $*$ -álgebra (con la propiedad $\overline{(\theta\theta')} = \bar{\theta}'\bar{\theta}$) [Cabra 2006, Sontz 2013]. Esto ha llevado a algunos autores a evitar la conjugación [Cabra 2006] o adoptar una regla de conjugación no estándar para productos [ElBaz 2010, Sontz 2013].

No encontramos entonces razonable forzar la condición de la nilpotencia bajo transformaciones lineales complejas, mientras que las reglas de conmutación de las combinaciones resultantes son drásticamente diferentes de las originales. En esta Tesis proponemos [Sontz 2013,

Cabra 2012] la relación

$$(6.12) \quad \theta \bar{\theta} = \alpha \bar{\theta} \theta$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ independiente de q , con la ventaja algebraica de soportar $*$ -conjugación.

Destacamos una vez más que las relaciones de conmutación habituales (6.11) no permiten hacer una transformación lineal de generadores para-Grassmann en generadores para-Grassmann, en el sentido de preservar nilpotencia y las relaciones de conmutación. En el caso de múltiples modos, esto excluye el uso de transformaciones de Fourier o cualquier cambio lineal de base y hace que sea imposible mapear los modos interactuantes en modos desacoplados, incluso para Hamiltonianos cuadráticos. Nuestra elección (6.12) no mejora este aspecto, pero permite una definición coherente de conjugación y de cálculo simbólico para-Grassmann. Por otra parte, conducirá a notables simplificaciones en las aplicaciones.

Estructura algebraica. La construcción de los estados coherentes discutida arriba contiene las siguientes estructuras algebraicas:

Al imponer nilpotencia y relaciones de conmutación sobre un par de indeterminadas conjugadas, se genera un álgebra $\mathbb{C}\langle\theta, \bar{\theta}\rangle/(\theta^{p+1}, \bar{\theta}^{p+1}, \theta\bar{\theta} - \alpha\bar{\theta}\theta)$ cociente del álgebra libre no conmutativa de polinomios en $\theta, \bar{\theta}$ con el ideal bilateral generado por $\theta^{p+1}, \bar{\theta}^{p+1}$ and $\theta\bar{\theta} - \alpha\bar{\theta}\theta$, el cual es un espacio vectorial de dimensión $(p+1)^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Esta será llamada [Sontz 2013] álgebra compleja para-Grassmann $pG_{p+1,\alpha}$, caracterizada por un orden de nilpotencia $(p+1) \geq 2$ y coeficiente de conmutación real α ($pG_{2,-1}$ es el álgebra Grassmann estándar). Notar que es también un anillo con la suma y producto de polinomios.

En segundo lugar, hemos introducido como estados coherentes elementos del módulo libre del conjunto ortonormal $\{|n\rangle\}$ en $\mathcal{H}$ sobre el anillo $pG_{p+1,\alpha}$. Este módulo es una extensión del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, un espacio lineal generado sobre una base de $\mathcal{H}$ con coeficientes en $pG_{p+1,\alpha}$ más generales que los números complejos, y será llamado

$$\mathcal{K} = \left\{ |v\rangle = \sum_{n=0}^p \gamma_n |n\rangle \text{ tal que } \gamma_n \in pG_{p+1,\alpha} \right\}.$$

No haremos distinción entre la multiplicación a izquierda o derecha de elementos de $pG_{p+1,\alpha}$ con vectores, por lo que $\mathcal{K}$ es un bimódulo.

Como en el caso fermiónico, uno puede utilizar el lenguaje de análisis funcional llamando a θ y $\bar{\theta}$ variables para-Grassmann y escribir los elementos del álgebra $pG_{p+1,\alpha}$ como funciones de

tales variables

$$(6.13) \quad f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{n, n'} f_{nn'} \theta^n \bar{\theta}^{n'},$$

donde las condiciones $\theta^{p+1} = \bar{\theta}^{p+1} = \theta\bar{\theta} - \alpha\bar{\theta}\theta = 0$ aseguran que una función arbitraria esté representada por $(p+1)^2$ coeficientes complejos (la forma de la ecuación (6.13) puede llamarse desarrollo de f en la base ordenada anti-Wick de $pG_{p+1, \alpha}$). La conjugación en $pG_{p+1, \alpha}$ está dada entonces por

$$f^*(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{n, n'} \bar{f}_{nn'} \theta^{n'} \bar{\theta}^n$$

donde $\bar{f}_{nm}$ es la conjugación compleja. La propiedad de *-álgebra $(fg)^* = g^* f^*$ se verifica [Sontz 2013].

En $\mathcal{K}$ se define naturalmente una forma sesquilineal por extensión del producto interno en $\mathcal{H}$: dado $|\nu\rangle = \sum_{n=0}^p \nu_n(\theta, \bar{\theta}) |n\rangle$ y $|\eta\rangle = \sum_{n=0}^p \eta_n(\theta, \bar{\theta}) |n\rangle$,

$$(6.14) \quad (\eta|\nu) = \sum_{n=0}^p \bar{\eta}_n(\theta, \bar{\theta}) \nu_n(\theta, \bar{\theta}).$$

Esta operación no define un producto interno (no hemos definido aún positividad para elementos de $pG_{p+1, \alpha}$), aunque es útil para escribir la proyección de elementos en $\mathcal{K}$ sobre la base (6.4). De acuerdo con la notación anterior,

$$\begin{aligned} \langle n|\nu \rangle &= \nu_n(\theta, \bar{\theta}), \\ (\eta|n) &\equiv \langle n|\eta \rangle^* = \bar{\eta}_n(\theta, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

En particular,

$$\langle n|\theta \rangle = \left(1/\sqrt{[n]_q!}\right) \theta^n.$$

Una vez contruidos los estados coherentes del álgebra de operadores q -bosónicos, es necesario caracterizar su completitud y para esto debemos definir la integración de funciones de variables paraGrassmann. Discutiremos el cálculo en variables paraGrassmann en el próximo capítulo.

Cálculo en variables paraGrassmann

En este capítulo presentaremos de forma detallada el cálculo funcional en una variable paraGrassmann compleja, sujeta a nuestra regla de conmutación (6.12), en analogía al descripto para el caso Grassmann. Incluiremos la definición de la derivación y la integración sobre $pG_{p+1,\alpha}$ y presentaremos aportes a la descripción de núcleos reproductivos, proyecciones y la noción de positividad.

1. Derivación en $pG_{p+1,\alpha}$

Existen varias maneras de definir un cálculo diferencial dentro del álgebra no conmutativa paraGrassmann. En [Baulieu 1991], los autores realizan una descripción del cálculo diferencial con el objetivo de construir a partir de él un cálculo integral para varias variables, donde la integración múltiple se realiza de forma iterada desde la integración en una variable. En [Filipov 1993a], se construye una forma de cálculo diferencial sobre una y varias variables paraGrassmann, pero sin incluir dentro de este análisis la operación de conjugación. En este caso el operador derivación se define actuando sólo sobre funciones de la forma $F(\theta) = \sum_{n=0}^p a_n \theta^n$ con $a_n \in \mathcal{R}$.

El objetivo de esta sección es definir un operador derivación consistente con la regla de conmutación (6.12) que actúe sobre funciones de variables paraGrassmann θ y $\bar{\theta}$. El análisis que realizaremos a continuación permite obtener como caso particular la construcción dada en [Baulieu 1991] e incluye el proceso de conjugación sobre los resultados de [Filipov 1993a].

Teniendo definida el álgebra $pG_{p+1,\alpha}$ y considerando sus elementos como funciones $F(\theta, \bar{\theta})$ en variable paraGrassmann θ y $\bar{\theta}$, podemos determinar operadores derivación (a izquierda y a derecha) de forma análoga a la Sección 2. El orden adoptado para expresar las funciones de variable paraGrassmann es el anti Wick, esto es cada monomio se reduce a la forma $\theta^i \bar{\theta}^j$ con $i, j = 0, \dots, p$ utilizando la regla de conmutación (6.12). En analogía al caso fermiónico, es posible definir la derivada a izquierda y a derecha, aunque en general utilizaremos las derivadas a izquierda.

Supongamos que para una función de variable paraGrassmann $F(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p F_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$ las derivadas a izquierda y a derecha actúan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial F &= \sum_{i,j=0}^k F_{ij} c_i \theta^{i-1} \bar{\theta}^j & \bar{\partial} F &= \sum_{i,j=0}^k F_{ij} d_j \alpha^i \theta^i \bar{\theta}^{j-1} \\ F \partial &= \sum_{i,j=0}^k F_{ij} \alpha^j c'_i \theta^{i-1} \bar{\theta}^j & F \bar{\partial} &= \sum_{i,j=0}^k F_{ij} d'_j \theta^i \bar{\theta}^{j-1} \end{aligned}$$

con $c_i, d_j, c'_i, d'_j \in \mathbb{C}$ constantes a determinar.

Así $\partial(\theta^n) = c_n \theta^{n-1}$ y $\bar{\partial}(\bar{\theta}^n) = d_n \bar{\theta}^{n-1}$ para $n \geq 2$. Manteniendo el paralelismo con el caso complejo y fermiónico, supongamos que

$$\partial(\bar{\theta}) = \bar{\partial}(\theta) = 0 \quad \partial(1) = \bar{\partial}(1) = 0 \quad \partial(\theta) = \bar{\partial}(\bar{\theta}) = 1.$$

Además, dado que está definido el producto de variables paraGrassmann, supongamos que este operador verifica la regla de Leibnitz usual, esto es para todo par de funciones $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$,

$$(7.1) \quad \partial(FG) = \partial(F)G + F\partial(G).$$

Esto implicaría que, siendo $\theta^{p+1} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(\theta^{p+1}) \\ &= \partial(\theta^p)\theta + \theta^p\partial(\theta) \\ &= (1 + c_p)\theta^p \end{aligned}$$

contradiendo la nilpotencia de orden $p+1$ de la variable θ . Es por eso que la regla de Leibnitz usual *no puede ser considerada* en este caso.

Para operar sobre productos, es necesaria entonces la caracterización de un *operador diferenciación generalizado*, que satisfaga una forma alternativa de regla de Leibnitz. Siguiendo [Filipov 1993a] proponemos

$$(7.2) \quad \partial(FG) = \partial(F)G + g(F)\partial(G)$$

con g automorfismo de $pG_{p+1,\alpha}$.

Para determinar la acción de un automorfismo sobre cualquier elemento de $pG_{p+1,\alpha}$ basta con definir $g(\theta)$ y $g(\bar{\theta})$. Considerando la regla modificada de Leibnitz (7.2) y teniendo en cuenta que $\partial\theta^i = c_i\theta^{i-1}$, se tiene que $g(\theta) = \gamma_0\theta$ con $\gamma_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, llamando

$$(7.3) \quad (n)_{\gamma_0} := \frac{1 - \gamma_0^n}{1 - \gamma_0}$$

tenemos que

$$(7.4) \quad \partial(\theta^n) = (1 + \gamma_0 + \dots + \gamma_0^{n-1})\theta^{n-1} = (n)_{\gamma_0}\theta^{n-1}.$$

Como $0 = \partial(\theta^{p+1})$ entonces $(p+1)_{\gamma_0} = 0$ de donde $\gamma_0 = q_1^2$ es raíz de la unidad de orden $p+1$.¹

Con esto $g(\theta) = q_1^2\theta$.

Para determinar $g(\bar{\theta})$, tomemos $F(\bar{\theta}, \theta) = \bar{\theta}^i$ y $G(\bar{\theta}, \theta) = \theta^j$, entonces por (7.2)

$$(7.5) \quad \partial(FG) = \partial(\bar{\theta}^i\theta^j) = \partial(\bar{\theta}^i)\theta^j + g(\bar{\theta}^i)\partial(\theta^j) = g(\bar{\theta}^i)\partial(\theta^j).$$

Por otro lado, usando la regla de conmutación (6.12)

$$(7.6) \quad \partial(FG) = \partial(\alpha^{-ij}\theta^j\bar{\theta}^i) = \alpha^{-i}(j)_q\bar{\theta}^i\theta^{j-1} = [\alpha^{-i}\bar{\theta}^i]\partial(\theta^j).$$

De aquí $g(\bar{\theta}^i) = \alpha^{-i}\bar{\theta}^i$. Así tenemos que para $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$

$$\partial(FG) = \partial(F)G + g(F)\partial(G)$$

donde g es el automorfismo dado por

$$(7.7) \quad g(\theta) = q_1^2\theta, \quad g(\bar{\theta}) = \alpha^{-1}\bar{\theta}$$

siendo $q_1^{2(p+1)} = 1$. De la misma manera, podemos definir el operador $\bar{\partial}$ verificando

$$(7.8) \quad \bar{\partial}(FG) = \bar{\partial}(F)G + \tilde{g}(F)\bar{\partial}(G)$$

con $\tilde{g}$ automorfismo de $pG_{p+1,\alpha}$ actuando como

$$\tilde{g}(\theta) = \alpha\theta, \quad \tilde{g}(\bar{\theta}) = q_2^2\bar{\theta}.$$

con $q_2^{2(p+1)} = 1$.

Análogamente, para las derivadas a derecha tenemos que siendo $h, \tilde{h}$ automorfismos

$$(FG)\partial = F(G)\partial + (F)\partial h(G) \quad (FG)\bar{\partial} = F(G)\bar{\partial} + (F)\bar{\partial}\tilde{h}(G)$$

$$h(\theta) = q_3^2\theta, \quad h(\bar{\theta}) = \alpha\bar{\theta}.$$

$$\tilde{h}(\theta) = \alpha^{-1}\theta, \quad \tilde{h}(\bar{\theta}) = q_4^2\bar{\theta}.$$

con $q_i^{2(p+1)} = 1$ para $i = 3, 4$.

Una vez determinados los morfismos, estamos en condiciones de definir:

---

¹Nótese que $(n)_{q^2} = q^{n-1}[n]_q$, de acuerdo a la definición de enteros q -deformados en la ec. (6.5).

DEFINICIÓN 7.1. Si $F(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p F_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \in pG_{p+1,\alpha}$ definimos las derivadas a izquierda como

$$\bar{\partial}F = \sum_{i,j=0}^k F_{ij}(j)_{q_2^2} \theta^i \bar{\theta}^{j-1} \quad \partial F = \sum_{i,j=0}^k F_{ij}(i)_{q_1^2} \alpha^i \theta^{i-1} \bar{\theta}^j$$

y las derivadas a derecha

$$F\partial = \sum_{i,j=0}^k F_{ij}\alpha^j(i)_{q_3^2} \theta^{i-1} \bar{\theta}^j \quad F\bar{\partial} = \sum_{i,j=0}^k F_{ij}(j)_{q_4^2} \theta^i \bar{\theta}^{j-1}$$

con $q_i^{2(p+1)} = 1$ para $i = 1, \dots, 4$ y $(n)_{q_i^2}$ dado por (7.3).

Todo esto permite demostrar, en analogía a la Proposición 3.5 que:

PROPOSICIÓN 7.2. : Dada $F(\theta, \bar{\theta}) \in pG_{p+1,\alpha}$

- Los operadores derivación α -conmutan entre si, i.e. $\partial\bar{\partial}F = \alpha\bar{\partial}\partial F$.
- Las derivadas son operadores nilpotentes: $\partial^{p+1}F = \bar{\partial}^{p+1}F = 0$.
- $\bar{\partial}\bar{\theta}F - q_2^2\bar{\theta}\bar{\partial}F = 1$, $\partial[\theta F] - q_1^2\theta[\partial F] = 1$, $\bar{\partial}[\theta F] = \alpha\theta[\bar{\partial}F]$, $\partial[\bar{\theta}F] = \alpha^{-1}\bar{\theta}[\partial F]$.

Una vez caracterizados los operadores derivación, estamos en condiciones de definir:

DEFINICIÓN 7.3. Si $\bar{\partial}F(\theta, \bar{\theta}) = 0$ para $F(\bar{\theta}; \theta) \in pG_{p+1,\alpha}$ (resp. $\partial F(\theta, \bar{\theta}) = 0$), entonces $F(\theta, \bar{\theta})$ se dirá holomorfa (resp. anti-holomorfa).

Resolviendo las ecuaciones anteriores, quedan determinados los espacios de funciones holomorfas y anti-holomorfas de variables paraGrassmann θ y $\bar{\theta}$ respectivamente, que toman la forma intuitivamente esperada y que llamaremos

$$(7.9) \quad \mathcal{B}_{Hol}^p = \left\{ F(\theta) = \sum_{i=0}^p f_i \theta^i \right\} \quad , \quad \mathcal{B}_{AHol}^p = \left\{ F(\bar{\theta}) = \sum_{j=0}^p f_j \bar{\theta}^j \right\}.$$

2. Integración en $pG_{p+1,\alpha}$

Siguiendo el trabajo de Berezin que define la integración para funciones de variable Grassmann, podemos dar para los elementos de $pG_{p+1,\alpha}$ una forma lineal con propiedades similares a esta integral. Esto se ha hecho antes [Baulieu 1991, Filipov 1993a, Majid 1994] utilizando la relación de conmutación (6.11).

Recordemos que en la Parte 2 definimos la integración de funciones de variable Grassmann partiendo de la premisa que el operador integración sea lineal e invariante ante traslaciones. Así, establecida su definición se verifica el Teorema de Stokes (ver Proposición 3.5).

Cuando tratamos con funciones de variables paraGrassmann la situación es diferente. La relación de conmutación $\theta\bar{\theta} = \alpha\bar{\theta}\theta$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ hace que las combinaciones $\chi = \rho\theta + \sigma\bar{\theta}$ con coeficientes complejos no sean necesariamente nilpotentes de orden $p+1$. Por esto la noción traslaciones pierde sentido ya que la variable trasladada, suma de dos generadores de $pG_{p+1,\alpha}$, en general no será nilpotente de orden $p+1$ y no puede ser considerada como una nueva variable paraGrassmann.

Sin embargo, la construcción de la integración en $pG_{p+1,\alpha}$ puede desarrollarse de manera consistente si requerimos *a priori* la validez del Teorema de Stokes.

Comencemos considerando funciones antiholomorfas de variable paraGrassmann $\bar{\theta}$ de la forma $F(\bar{\theta}) = \sum_{i=0}^p F_i \bar{\theta}^i$. Queremos dar sentido a la expresión $\int F(\bar{\theta}) d\bar{\theta}$ suponiendo la linealidad de la misma sobre $pG_{p+1,\alpha}$ y la validez del Teorema de Stokes.

Por la linealidad es claro que sólo es necesario definir $\int \bar{\theta}^i d\bar{\theta}$ para $i = 0, \dots, p$. Por el Teorema de Stokes es necesario que $\int \bar{\partial} F(\bar{\theta}) d\bar{\theta} = 0$. Así, por la definición 7.1 tenemos que

$$(7.10) \quad 0 = \int \bar{\partial} F(\bar{\theta}) d\bar{\theta} = \sum_{i=0}^p f_i \int \bar{\partial} \bar{\theta}^i d\bar{\theta} = \sum_{i=0}^p f_i \int (i)_q \bar{\theta}^{i-1} d\bar{\theta}.$$

Como $(i)_q \neq 0$ para $i \neq p+1$

$$(7.11) \quad \int \bar{\theta}^i d\bar{\theta} = C_p \delta_{ip}$$

con C_p una constante real positiva a determinar.

Análogamente, se puede definir la integración en la variable θ donde, siendo $C'_p \in \mathbb{R}_+$,

$$(7.12) \quad \int d\theta \theta^i = C'_p \delta_{ip}.$$

De manera resumida, podemos citar las normas de integración de Berezin como básicas para elementos de la base anti-Wick

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \int d\theta \theta^n \bar{\theta}^{n'} &= C'_p \delta_{np} \bar{\theta}^{n'}, \\ \int \theta^n \bar{\theta}^{n'} d\bar{\theta} &= \theta^n C_p \delta_{n'p}, \end{aligned}$$

haciendo hincapié en que $\theta, \bar{\theta}$ actúan como variables independientes bajo la integración. Entonces, la expresión

$$(7.14) \quad \int d\theta \theta^n \bar{\theta}^{n'} d\bar{\theta} = C'_p C_p \delta_{np} \delta_{n'p}$$

define la doble integral iterada. El orden de escritura de los factores y los diferenciales se debe realizar como en (7.14) antes de utilizar el lado derecho.

Para completar la definición de la integral doble, hay varias formas de elegir las constantes C_p y C'_p en (7.11) y (7.12), y cada elección implica distintas características para la integración de funciones en $pG_{p+1,\alpha}$. Por ejemplo, en el álgebra de Grassmann $\int d\eta \eta = 1$ si y sólo si $\int d\eta f(\eta) = \partial f(\eta)$. Análogamente, para el álgebra paraGrassmann tendríamos que $\int d\theta f(\theta) = \partial^p f(\eta)$ si y sólo si

$$(7.15) \quad \int d\theta \theta^i = (i)_{q_1^2}! \delta_{ip}$$

quedando determinada la constante en (7.11) por $C_p = (p)_{q_1^2}$ con $q_1^{2(p+1)} = 1$ y $(p)_{q_1^2}$ dado en (7.3). De la misma manera, para la variable $\bar{\theta}$ y siendo $q_2^{2(p+1)} = 1$,

$$(7.16) \quad \int \bar{\theta}^i d\bar{\theta} = (p)_{q_2^2}! \delta_{ip}.$$

Con esta elección de constantes de normalización en (7.11) y (7.12), se puede verificar que para toda $F(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p F_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \in pG_{p+1,\alpha}$

$$(7.17) \quad \left[\int d\theta F(\theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \right]^* = \overline{F_{pp}}(p)_{\bar{q}_1^2}! (p)_{\bar{q}_2^2}! \quad \int d\theta F(\theta, \bar{\theta})^* d\bar{\theta} = \overline{F_{pp}}(p)_{q_1}! (p)_{q_2}!.$$

siendo

$$(7.18) \quad \left[\int d\theta F(\theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \right]^* = \int d\theta F(\theta, \bar{\theta})^* d\bar{\theta}.$$

sólo cuando $q_1^2 = \bar{q}_2^2$.

Otra posibilidad de elección para las constantes de normalización en (7.11) y (7.12) es considerar

$$(7.19) \quad C_{ip} = C'_{i,p} = \sqrt{[p]_q!}$$

donde $q = e^{i\pi/(p+1)}$ y $[i]_q$ es el llamado número entero q -deformado dado por

$$(7.20) \quad [n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

definido anteriormente en (6.5). Como $[i]_q = [i]_{\bar{q}}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$, la igualdad (7.18) se verifica. Por conveniencia en el contexto de q -bosones, consideraremos en lo que sigue la normalización (7.19) con $q = e^{i\frac{\pi}{p+1}}$ [Cabra 2012], estableciendo como definición para la integración de funciones de variables para Grassmann la siguiente:

DEFINICIÓN 7.4. Si $F(\bar{\theta}; \theta) = \sum_{i,j=0}^p F_{ij} \bar{\theta}^i \theta^j \in pG_{p+1,\alpha}$ se define la integral de funciones de variable para Grassmann como

$$(7.21) \quad \int d\theta F(\theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta} = F_{pp} [p]_q!$$

con $q = e^{i\frac{\pi}{p+1}}$.

Cabe señalar que, una vez fijada la raíz $p+1$ de la unidad, tenemos

$$(7.22) \quad [n]_q = \sin(n\frac{\pi}{p+1}) / \sin(\frac{\pi}{p+1})$$

resulta estrictamente positivo para $n = 1, \dots, p$.

3. Completitud de los estados coherentes q -bosónicos

La completitud de los estados coherentes se expresa como una resolución de la identidad en $\mathcal{H}$. Tenemos que dar sentido a la expresión

$$(7.23) \quad \int d\theta |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta| d\bar{\theta} = \mathbb{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

donde $\mu(\theta, \bar{\theta})$ puede ser vista como un “peso en la medida” para la integral (por cuestiones de orden es importante adoptar una posición para este peso; lo escribiremos por conveniencia en el centro).

Dados dos vectores cualesquiera $|u\rangle = \sum_{n=0}^p u_n |n\rangle$, $|v\rangle = \sum_{n=0}^p v_n |n\rangle$ en $\mathcal{H}$, nos preguntamos como debe ser $\mu(\theta, \bar{\theta})$ para verificar

$$\langle v| \int d\theta |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta| d\bar{\theta} |u\rangle = \langle v|u\rangle$$

que resulta

$$(7.24) \quad \int d\theta \frac{\theta^n}{\sqrt{[n]_q!}} \mu(\theta, \bar{\theta}) \frac{\bar{\theta}^{n'}}{\sqrt{[n']_q!}} d\bar{\theta} = \delta_{nn'}.$$

Escribiendo $\mu(\theta, \bar{\theta})$ en la forma anti Wick general (6.13), la expresión dentro de la integral resulta ordenada de forma antiWick y puede resolverse según la definición 7.4. El factor peso

debe contener términos con iguales potencias de θ y $\bar{\theta}$ de manera que arroje un resultado no nulo sólo para $n = n'$. Así obtenemos

$$(7.25) \quad \mu(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \theta^k \bar{\theta}^k$$

como el único núcleo (ordenado anti Wick) que da sentido a la ecuación (7.23).

La ecuación (7.23) destaca el rol auxiliar de las variables paraGrassmann y de los vectores del módulo $\mathcal{K}$ en nuestra construcción: cuando calculamos los elementos de matriz en $\mathcal{H}$, los vectores del módulo $\mathcal{K}$ se proyectan sobre $\mathcal{H}$ y la expresión permite calcular una integral a valores complejos en $pG_{p+1,\alpha}$. En otras palabras, las variables paraGrassmann se pierden con la integración y se recuperan los resultados en el espacio de Fock q -bosónico, como sucede con las variables Grassmann en la teoría fermiónica.

4. Forma sesquilineal en $pG_{p+1,\alpha}$

Prescripción de orden anti-Wick. Una vez que tomamos $\mu(\theta, \bar{\theta})$ como el peso de la medida, el uso de la resolución de la identidad (7.23) o construcciones similares puede llevarnos a integrales donde los factores de $\theta, \bar{\theta}$ puedan no estar ordenados en sentido anti-Wick. Siguiendo [ElBaz 2010, Sontz 2013] definimos una prescripción lineal de orden : $\bar{\theta} \theta$, moviendo en cada término dentro de : $\bar{\theta} \theta$ todos los factores θ a la izquierda y los factores $\bar{\theta}$ a la derecha *sin utilizar las reglas de conmutación*. Por ejemplo, siendo $p = 4$

$$: a\theta + b\bar{\theta}\theta^2 + c\theta\bar{\theta}^4 + c\bar{\theta}^3\theta^2 := a\theta + b\theta^2\bar{\theta} + c\theta\bar{\theta}^4 + c\theta^2\bar{\theta}^3.$$

Esta prescripción es de utilidad en varias situaciones. Por ejemplo, el factor peso puede escribirse como

$$(7.26) \quad \mu(\theta, \bar{\theta}) =: e_q^{\theta\bar{\theta}} :$$

donde la exponencial q -deformada está definida como es usual en álgebras q -deformadas

$$(7.27) \quad e_q^x = \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} x^k.$$

Mediante la utilización de esta prescripción, también podemos encontrar el inverso multiplicativo de ciertos elementos del álgebra paraGrassmann, sin que se evidencie en el la no conmutación proveniente de la relación (6.11). Para ser mas precisos y en analogía a la Proposición 3.3 de la segunda parte

PROPOSICIÓN 7.5. Si $f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p f_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$ con $f_{00} \neq 0$, entonces existe una única $g(\theta, \bar{\theta})$ tal que $: f(\theta, \bar{\theta})g(\theta, \bar{\theta}) := 1$.²

Demostración. Sea $f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p f_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$ con $f_{00} \neq 0$. Tenemos que encontrar un elemento $g(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{k,l=0}^p g_{kl} \theta^k \bar{\theta}^l$ tal que $: f(\theta, \bar{\theta})g(\theta, \bar{\theta}) := 1$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 1 &= : f(\theta, \bar{\theta})g(\theta, \bar{\theta}) : \\ &= \sum_{i,j=0}^p \sum_{k,l=0}^p f_{ij} g_{kl} : \theta^i \bar{\theta}^j \theta^k \bar{\theta}^l : \\ &= \sum_{i,j=0}^p \sum_{k,l=0}^p f_{ij} g_{kl} \theta^{i+k} \bar{\theta}^{j+l} \\ &= \sum_{n,m=0}^p \sum_{i=n}^p \sum_{j=0}^m f_{ij} g_{n-i, m-j} \theta^n \bar{\theta}^m. \end{aligned}$$

Esto determina un sistema de $(p+1)^2$ de ecuaciones con $(p+1)^2$ incógnitas g_{kl} con $k, l = 0, \dots, p$. Sean $G = (g_{00} \ g_{10} \ g_{20} \ \dots \ g_{p0} \ g_{01} \ g_{11} \ \dots \ g_{pp})$ matriz de $\mathbb{C}^{1 \times (p+1)^2}$, y $\mathbf{I} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbb{C}^{1 \times (p+1)^2}$. Siendo G^t y $\mathbf{I}^t$ las matrices traspuestas de G y $\mathbf{I}$ respectivamente, el sistema puede escribirse de forma matricial como

$$(7.28) \quad A.G^t = \mathbf{I}^t$$

con $A \in \mathbb{C}^{(p+1)^2 \times (p+1)^2}$ matriz de elementos

$$A_{ij} = \begin{cases} f_{00} \neq 0, & \text{si } i = j \\ f_{i-1, j-1}, & \text{si } i > j, i \neq j \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Esta matriz es triangular inferior con diagonal no nula, por lo que el sistema (7.28) tiene única solución de donde existe una única $g(\theta, \bar{\theta}) \in pG_{p+1,\alpha}$ tal que $: f(\theta, \bar{\theta})g(\theta, \bar{\theta}) := 1$. ■

OBSERVACIÓN 7.6. Como caso particular tenemos que para la exponencial q -deformada $e_q^{\theta\bar{\theta}} = \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \theta^k \bar{\theta}^k \in pG_{p+1,\alpha}$

$$[e_q^{\theta\bar{\theta}}]^{-1} = \sum_{k=0}^p a_k \theta^k \bar{\theta}^k$$

donde $a_0 = 1$ y $a_k = -\sum_{n=1}^k \frac{a_{k-n}}{[n]_q!}$ para $1 \leq k \leq p$.

---

²Llamaremos a $g(\theta, \bar{\theta})$ de la forma $f^{-1}(\theta, \bar{\theta})$.

En esta sección usaremos esta prescripción en el orden para definir una forma sesquilineal para el álgebra paraGrassmann. Consideremos un peso $w \in pG_{p+1,\alpha}$ de la forma

$$(7.29) \quad w(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{m=0}^p \frac{w_{p-m}}{[m]_q!} \theta^m \bar{\theta}^m.$$

donde $w_n \in \mathbb{C}$ para $n = 0, \dots, p$. Apelando a la prescripción de orden anti Wick denotada por $:$ podemos definir para $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$, la aplicación $(\cdot, \cdot)_w : pG_{p+1,\alpha} \times pG_{p+1,\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(7.30) \quad (F, G)_w := \int d\theta : F(\theta, \bar{\theta})^* w(\theta, \bar{\theta}) G(\theta, \bar{\theta}) : d\bar{\theta}$$

siendo $:$ el orden anti-Wick o antinormal.

Cabe destacar que, bajo cualquier prescripción orden, las reglas de conmutación de las variables paraGrassmann ya no desempeñan ningún rol en el integrando. Son la $p+1$ -nilpotencia, y el peso $w(\theta, \bar{\theta})$ de la medida que establecerá condiciones de ortonormalidad, los ingredientes claves de la manipulación de estados coherentes q -bosónicos.

PROPIEDADES 7.7. Si $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$, la aplicación $(\cdot, \cdot)_w$ dada en (7.30)

- Es una forma sesquilineal sobre $pG_{p+1,\alpha}$, antilineal en la primera componente y lineal en la segunda.
- Si para $n = 0, \dots, p$, $w_n \in \mathbb{R}$, la aplicación es compleja simétrica i.e $(F, G)_w = (G, F)_w^*$.

Demostración. Por linealidad, es evidente que la aplicación $(\cdot, \cdot)_w$ es una forma sesquilineal. Para demostrar el segundo punto consideremos $F(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p F_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$ y $G(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{k,s=0}^p G_{ks} \theta^k \bar{\theta}^s$ elementos de $pG_{p+1,\alpha}$. Entonces

$$\begin{aligned} (F, G)_w^* &= \sum_{i,j,m,k,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{ks}} \overline{w_{p-m}} \frac{1}{[m]_q!} \left[\int d\theta : \theta^j \bar{\theta}^i \theta^m \bar{\theta}^m \theta^k \bar{\theta}^s : d\bar{\theta} \right]^* \\ &= \sum_{i,j,m,k,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{ks}} \overline{w_{p-m}} \delta_{j+k+m}^p \delta_{i+s+m}^p \frac{[i+s]_q}{[m]_q!} \\ &= \sum_{i,j,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{i+s-j,s}} \overline{w_{i+s}} \frac{[p]_q!}{[p+s-i]_q!} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(G, F)_w &= \sum_{i,j,m,k,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{ks}} \frac{w_{p-m}}{[m]_q!} \int d\theta \theta^{j+s+m} \bar{\theta}^{i+k+m} d\bar{\theta} \\
&= \sum_{i,j,m,k,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{ks}} \frac{w_{p-m}}{[m]_q!} \delta_{i+s+m}^p \delta_{j+k+m}^p [i+s]_q! \\
&= \sum_{i,j,s=0}^p F_{ij} \overline{G_{i+s-j,s}} w_{i+s} \frac{[p]_q!}{[p+s-i]_q!}
\end{aligned}$$

coincidiendo con la expresión anterior sólo si $w_m = \overline{w_m}$. ■

A partir de ahora, y para preservar la simetría, asumiremos que $w_m \in \mathbb{R}$. Aún así, esta restricción sobre los valores de w_m no alcanza para definir un producto interno. Por ejemplo, si tomamos $f(\theta, \bar{\theta}) \equiv \bar{\theta}^i$

$$\begin{aligned}
(f, f)_w &= \int d\theta : \theta^i \left[\sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k}}{[k]_q!} \theta^k \bar{\theta}^k \right] \bar{\theta}^i : d\bar{\theta} \\
&= \sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k}}{[k]_q!} \delta_{k+i,p} [p]_q! = w_i \frac{[p]_q!}{[p-i]_q!}
\end{aligned}$$

y tendríamos $(f, f)_w < 0$ cuando $w_i < 0$. Para definir un producto interno los coeficientes w_n deben ser positivos. Así tenemos,

PROPOSICIÓN 7.8. *Si $w_n > 0$ para $n = 0, \dots, p$, el espacio $\mathcal{B}_p := B_{Hol}^p + B_{AHol}^p$ es un espacio de Hilbert respecto de la forma sesquilineal $(\cdot, \cdot)_w$. Mas aún,*

1. $\phi_n(\theta) = \theta^n / \sqrt{w_n [n]_q!}$ es una base ortonormal de B_{Hol}^p de dimensión $p+1$
2. $\phi_n^*(\theta) = \bar{\theta}^n / \sqrt{w_n [n]_q!}$ es una base ortonormal de B_{AHol}^p de dimensión $p+1$.

Demostración.

- **Positividad.** Para demostrar la positividad de $(\cdot, \cdot)_w$ sobre $\mathcal{B}_p$ consideremos para $a_i, b_i \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}, f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i=0}^p [a_i \theta^i + b_i \bar{\theta}^i] .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(f, f)_w &= \int d\theta : \left(\sum_{i=0}^p [\bar{a}_i \bar{\theta}^i + \bar{b}_i \theta^i] \right) \left[\sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k} \bar{\theta}^k \theta^k}{[k]_q!} \right] \left(\sum_{j=0}^p [a_j \theta^j + b_j \bar{\theta}^j] \right) : d\bar{\theta} \\
&= \sum_{i,j,k=0}^p \frac{w_{p-k}}{[k]_q!} \int d\theta : (\bar{a}_i a_j \theta^{k+j} \bar{\theta}^{i+k} + \bar{b}_i a_j \theta^{i+k+j} \bar{\theta}^k + \bar{a}_i b_j \theta^k \bar{\theta}^{i+k+j} + \bar{b}_i b_j \theta^{i+k} \bar{\theta}^{i+j}) : d\bar{\theta} \\
&= \sum_{i,j,k=0}^p \frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} \left[\bar{a}_i a_j \delta_{k+j}^p \delta_{k+i}^p + \bar{b}_i a_j \delta_{k+i+j}^p \delta_k^p + \bar{a}_i b_j \delta_k^p \delta_{k+i+j}^p + \bar{b}_i b_j \delta_{k+i}^p \delta_{k+j}^p \right] \\
&= \sum_{i,k=0}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |a_i|^2 \right] + \bar{b}_0 a_0 w_0 + \bar{a}_0 b_0 w_0 + \sum_{i,k=0}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |b_i|^2 \right] \\
&\geq \sum_{i,k=1}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |a_i|^2 \right] + |a_0|^2 w_0 + \bar{b}_0 a_0 w_0 + \bar{a}_0 b_0 w_0 + |b_0|^2 w_0 + \sum_{i,k=1}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |b_i|^2 \right] \\
&= \sum_{i,k=1}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |a_i|^2 \right] + w_0 (a_0 + b_0) (\bar{a}_0 + \bar{b}_0) + \sum_{i,k=1}^p \left[\frac{w_{p-k} [p]_q!}{[k]_q!} |b_i|^2 \right] \geq 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

■ **Ortogonalidad.**

$$\begin{aligned}
(\phi_m^*, \phi_n^*)_w &= \int d\theta : \frac{\theta^m}{\sqrt{w_m} [m]_q!} \left[\sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k} \bar{\theta}^k \theta^k}{[k]_q!} \right] \frac{\bar{\theta}^n}{\sqrt{w_n} [n]_q!} : d\bar{\theta} \\
&= \sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k}}{\sqrt{w_n} w_m [n]_q! [m]_q! [k]_q!} \int d\theta \theta^{m+k} \bar{\theta}^{n+k} d\bar{\theta} \\
&= \delta_{m,n} \frac{1}{w_n [p-n]_q! [n]_q!} w_n [p]_q! = \delta_n^m \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

En lo que sigue adoptaremos $w_n = 1$ para todo $n = 0, \dots, p$, con lo cual el peso $w(\theta, \bar{\theta})$ coincide con

$$(7.31) \quad \mu(\theta, \bar{\theta}) =: e_q^{\theta \bar{\theta}} :$$

dada en (7.25). Esta elección para los coeficientes w_n determina la forma sesquilineal para el álgebra paraGrassmann que anotaremos

$$(7.32) \quad (f(\theta, \bar{\theta}), g(\theta, \bar{\theta}))_{pG} := \int d\theta : f^*(\theta, \bar{\theta}) \mu(\theta, \bar{\theta}) g(\theta, \bar{\theta}) : d\bar{\theta}$$

con $f, g \in pG_{p+1, \alpha}$, que se relaciona de manera natural con la completitud dada en (7.23) [Sontz 2013].

5. Núcleo reproductivo

De manera semejante al caso Grassmann, motivados por la interpretación de los espacios $\mathcal{B}_{Hol}^p$ y $\mathcal{B}_{AHol}^p$ como espacios de funciones, presentaremos los núcleos reproductivos de estos espacios.

Comencemos con el espacio de Hilbert $\mathcal{B}_{Hol}^p$, y como antes para destacar el rol de la variable para Grassmann presente lo nombraremos $\mathcal{B}_{Hol}^p(\theta)$. Con $f(x) = \sum_{i=0}^N \beta_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio de grado N , definimos la evaluación en un elemento de $\mathcal{B}_{Hol}^p(\theta)$

DEFINICIÓN 7.9. Si $f(x) = \sum_{i=0}^N \beta_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, la aplicación $\Omega_{p,\theta} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{B}_{Hol}^p(\theta)$ dada por

$$(7.33) \quad \Omega_{p,\theta}[f] := \sum_{i=0}^N \beta_i \theta^i = f(\theta)$$

es la aplicación evaluación en θ .

Como en el caso Grassmann, esta aplicación resulta un morfismo de álgebras, suryectivo y no inyectivo.

Apelando a la base ortonormal de $\mathcal{B}_{Hol}^p(\theta)$ dada en la Proposición 7.8, y motivados por la proposición 2.20, construimos el elemento $K_p(\theta, \bar{\xi}) \in \mathcal{B}_{Hol}^p(\theta) \times \mathcal{B}_{AHol}^p(\bar{\xi})$ dado por

$$\begin{aligned} K_p(\theta, \bar{\xi}) &:= \sum_{n=0}^p \phi_n(\theta) \overline{\phi_n(\xi)} \\ &= \sum_{n=0}^p \frac{\theta^n \bar{\xi}^n}{w_n[n]_q!}. \end{aligned}$$

que verifica la fórmula reproductiva para el álgebra para Grassmann

$$\Omega_{p,\xi}[f] = (K_p(\theta, \bar{\xi}), \Omega_{p,\theta}[f])_{pG}$$

En efecto, si consideramos $f(\zeta) = f_k \zeta^k$ para algún $k \in \{0, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} (K_p(\zeta, \bar{\theta}), f(\zeta))_{pG} &= \int d\zeta : K_p(\zeta, \bar{\theta})^* w(\zeta, \bar{\zeta}) f(\zeta) : d\bar{\zeta} \\ &= \int d\zeta : \left(\sum_{n=0}^p \frac{\theta^n \bar{\zeta}^n}{w_n[n]_q!} \right) \left(\sum_{i=0}^p \frac{w_{p-i}}{[i]_q!} \zeta^i \bar{\zeta}^i \right) f_k \zeta^k : d\bar{\zeta} \\ &= f_k \sum_{i,n=0}^p w_{p-i} \frac{\theta^n}{w_n[i]_q! [n]_q!} \int d\zeta : \zeta^{k+i} \bar{\zeta}^{i+n} : d\bar{\zeta} \\ &= f_k \sum_{i,n=0}^p w_{p-i} \frac{\theta^n}{w_n[i]_q! [n]_q!} \delta_{i+n}^p \delta_{i+k}^p [p]_q! = f_k \theta^k \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 7.10. *La función*

$$(7.34) \quad K_p(\zeta, \bar{\theta}) = \sum_{n=0}^p \frac{\zeta^n \bar{\theta}^n}{w_n [n]_q!}$$

se llamará *núcleo reproductivo de $\mathcal{B}_{Hol}^p$* . Lo denotaremos por $K_{p,\bar{\theta}}(\zeta)$.

Análogamente, para el espacio $\mathcal{B}_{AHol}^p$ tenemos que

$$(7.35) \quad K_{p,\theta}(\bar{\zeta}) = \sum_{n=0}^p \phi_n(\bar{\zeta}) \phi_n(\theta) = \sum_{n=0}^p \frac{\bar{\zeta}^n \theta^n}{w_n [n]_q!}.$$

satisface las condiciones para ser su núcleo reproductivo.

6. Proyección

Tal como describimos en la sección 6 del capítulo 3, dentro del álgebra paraGrassman el espacio $\mathcal{B}_{AHol}^p$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por (7.30) pero $pG_{p+1,\alpha}$ no lo es y el hablar de proyección ortogonal pierde sentido. Sin embargo, como (7.30) es forma sesquilineal sobre $pG_{p+1,\alpha}$, la proyección de un elemento de $pG_{p+1,\alpha}$ sobre el espacio de las funciones holomorfas o anti-holomorfas de variable paraGrassmann es posible. En analogía a la proyección de Bargmann (2.2) y la proyección Grassmann (3.26), si $f(\zeta, \bar{\zeta}) \in pG_{p+1,\alpha}$ es de la forma $f(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{i,j=0}^p c_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j$, entonces

$$\begin{aligned} (K_{p,\theta}(\bar{\zeta}), f(\zeta, \bar{\zeta}))_{pG} &= \int d\zeta : \left(\sum_{n=0}^p \frac{\zeta^n \bar{\theta}^n}{w_n [n]_q!} \right) \left(\sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k}}{[k]_q!} \zeta^k \bar{\zeta}^k \right) \left(\sum_{i,j=0}^p c_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j \right) : d\bar{\zeta} \\ &= \sum_{i,j,k,n=0}^p c_{ij} w_{p-k} \frac{\bar{\theta}^n}{w_n [k]_q! [n]_q!} \int d\zeta : \bar{\zeta}^{i+k} \zeta^{j+k+n} : d\bar{\zeta} \\ &= \sum_{i,j,k,n=0}^p c_{ij} w_{p-k} \frac{\bar{\theta}^n}{w_n [k]_q! [n]_q!} [p]_q! \delta_{i+k}^p \delta_{j+k+n}^p \\ &= \sum_{n=0}^p \left(\sum_{j=0}^p c_{j+n,j} \frac{w_{j+n}}{w_n} \right) \bar{\theta}^n =: \sum_{n=0}^p C_n \bar{\theta}^n \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 7.11. *Cuando $w_i = 1$, tenemos que el producto interno (7.30) resulta (7.32); cuando $p = 1$, se recupera la forma sesquilineal (3.20) del álgebra de Grassmann. En este caso,*

$$(7.36) \quad C_0 = \sum_{j=0}^1 c_{j,j} = c_{00} + c_{11} \quad C_1 = \sum_{j=0}^1 c_{j+1,j} \frac{w_{j+1}}{w_1} = c_{1,0}$$

coincidiendo con la aplicación (3.27) del caso Grassmann.

DEFINICIÓN 7.12. Llamaremos $P_{Ahol}^p : pG_{p+1,\alpha} \rightarrow \mathcal{B}_{Ahol}^p(\bar{\theta})$ a la aplicación definida como

$$(7.37) \quad P_{Ahol}^p(f)(\bar{\theta}) = (K_{p,\theta}(\bar{\zeta}), f(\zeta, \bar{\zeta}))_{pG}$$

y $P_{Hol} : pG_{p+1,\alpha} \rightarrow \mathcal{B}_{Hol}^p(\xi)$ a la aplicación definida como

$$(7.38) \quad P_{Hol}^p(f)(\theta) = (K_{p,\bar{\theta}}(\zeta), f(\zeta, \bar{\zeta}))_{pG}.$$

Notemos que las aplicaciones P_{Ahol}^p y P_{Hol}^p son proyecciones aunque no pueden decirse ortogonales ($pG_{p+1,\alpha}$ no está dotado de un producto interno). Ambas verifican la suryectividad, aunque no la inyectividad. La clase de elementos de $pG_{p+1,\alpha}$ que se proyectan sobre una misma función $g(\bar{\theta}) = \sum_{j=0}^p A_j \bar{\theta}^j$ está dada por

$$(7.39) \quad C_{\{A_j\}_{0 \leq j \leq p}} = \left\{ f(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{n,m=0}^p a_{nm} \zeta^n \bar{\zeta}^m \text{ tal que } \sum_{n=0}^p a_{n+j,n} \frac{w_{n+j}[j+n]_q!}{w_j[j]_q!} = A_j \text{ para cada } j = 0, \dots, p \right\}$$

OBSERVACIÓN 7.13. Si $p = w_i = 1$ entonces la clase $C_{\{A_j\}_{0 \leq j \leq 1}}$ coincide con la clase obtenida para funciones de variable Grassmann (3.29).

7. Positividad.

Proponemos para el caso paraGrassmann la siguiente relación:

DEFINICIÓN 7.14. Dadas $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$, diremos que $G \geq F$ si y sólo si existen $\tau_n \in \mathcal{B}_{Hol}^p$ con $n = 0, \dots, p$ tales que

$$(7.40) \quad G - F = \sum_{n=0}^p \tau_n(\theta) \overline{\tau_n(\theta)}.$$

La posibilidad de escribir un elemento $f(\theta, \bar{\theta}) \in pG_{p+1,\alpha}$ como producto de $\tau_n \in \mathcal{B}_{Hol}^p$ por su conjugado puede caracterizarse a través del siguiente teorema

TEOREMA 7.15. Dado $f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p a_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \in pG_{p+1,\alpha}$, $f \geq 0$ si y sólo si la matriz A de entradas $[A]_{ij} = a_{ij}$ con $i, j = 0, \dots, p$ es hermítica y semidefinida positiva ³.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $f(\theta, \bar{\theta}) \geq 0$, entonces existen $\tau_n \in \mathcal{B}_{Hol}^p$ con $n = 0, \dots, p$ tales que

$$(7.41) \quad f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{n=0}^p \tau_n(\theta) \overline{\tau_n(\theta)}.$$

---

³Una matriz hermítica A es semidefinida positiva si para todos los vectores no nulos $z \in \mathbb{C}^n$ tenemos que $zMz^* \geq 0$.

Siendo $\tau_n(\theta) = \sum_{i=0}^p a_i^{(n)} \theta^i$ tenemos que $\tau_n(\theta) \overline{\tau_n(\theta)} = \sum_{i,j=0}^p a_i^{(n)} \overline{a_j^{(n)}} \theta^i \bar{\theta}^j$ de donde

$$f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p \left[\sum_{m=0}^p a_i^{(m)} \overline{a_j^{(m)}} \right] \theta^i \bar{\theta}^j$$

Así, $a_{ij} = \sum_{m=0}^p a_i^{(m)} \overline{a_j^{(m)}}$. Notemos que

$$A = B.B^\dagger$$

siendo B la matriz cuyas entradas $[B]_{ik} = a_i^{(k)}$ y $B^\dagger$ representa la matriz conjugada y transpuesta de B (es decir, $B^\dagger = \overline{B}^t$). Entonces, A es hermítica semidefinida positiva.

$\Leftarrow$) Sea $f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p a_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \in pG_{p+1,\alpha}$, con la matriz A dada por los elementos $[A]_{ij} = a_{ij}$ hermítica y semidefinida positiva. Luego es diagonalizable y sus autovalores son no negativos.

4

Esto implica que existe una matriz $P \in \mathbb{C}^{(p+1) \times (p+1)}$ y una matriz D diagonal con entradas $D_{ij} = \delta_{ij} d_i \geq 0$, tales que

$$A = P.D.P^\dagger$$

Llamemos $\Theta := (\theta^0 \ \theta^1 \ \dots \theta^p)$ a la matriz de $pG_{p+1,\alpha}^{1 \times (p+1)}$ y $\Theta^\dagger := \overline{\Theta}^t$ donde t indica trasposición, entonces de manera compacta podemos escribir

$$\begin{aligned} f(\theta, \bar{\theta}) &= \sum_{i,j=0}^p a_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \\ &= \Theta A \Theta^\dagger \\ &= \Theta [P.D.P^\dagger] \Theta^\dagger. \end{aligned}$$

Observemos que $\Theta P =: \tilde{\Theta} = (\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_p)$ donde cada $\tilde{\theta}_n = \sum_{m=0}^p \theta^m [P]_{mn} \in \mathcal{B}_{Hol}^p$ para $n = 0, \dots, p$ siendo $[P]_{mn}$ para $n, m = 0, \dots, p$ las entradas de la matriz P . Entonces

$$\begin{aligned} f(\theta, \bar{\theta}) &= \Theta [P.D.P^\dagger] \Theta^\dagger \\ &= \tilde{\Theta} D \tilde{\Theta}^\dagger \\ &= \sum_{n=0}^p d_n \tilde{\theta}_n \overline{\tilde{\theta}_n} \\ &= \sum_{n=0}^p \lambda_n(\theta) \overline{\lambda_n(\theta)} \end{aligned}$$

---

⁴Dada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermítica, A es diagonalizable unitariamente con autovalores reales. O sea, se la puede descomponer como $A = P \cdot D \cdot P^T$ en donde P es una matriz unitaria y D es una matriz diagonal.

siendo $\lambda_n(\theta) := \sqrt{d_n} \tilde{\theta}_n$. ■

OBSERVACIÓN 7.16. *Notar que para $p = 1$ esta proposición coincide con la noción de positividad Grassmann dada en la Proposición 3.19.*

Con esta caracterización, es fácil demostrar que

PROPOSICIÓN 7.17. *La relación $\geq$ definida en 7.14 es una relación de orden en $pG_{p+1,\alpha}$.*

Demostración.

•**Reflexividad.** Para cualquier función $F \in pG_{p+1,\alpha}$ $F(\theta, \bar{\theta}) - F(\theta, \bar{\theta}) = 0(\theta)\overline{0(\theta)}$ siendo $0(\theta) \equiv 0$, de donde naturalmente $F \geq F$.

•**Antisimetría.** Si $G \geq F$ con $F, G \in pG_{p+1,\alpha}$ entonces

$$G - F =: H = \sum_{i,j=0}^p a_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$$

donde los elementos a_{ij} definen las entradas de la matriz A semidefinida positiva.

Si $F \geq G$,

$$F - G =: -H = \sum_{i,j=0}^p b_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$$

donde los elementos b_{ij} definen las entradas de la matriz B semidefinida positiva. Entonces $A = -B$ resulta semidefinida negativa, de donde A es la matriz nula.

•**Transitividad.** Si $G \geq F$ y $H \geq G$ con $F, G, H \in pG_{p+1,\alpha}$

$$G - F = \sum_{i,j=0}^p a_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \quad \text{y} \quad H - G = \sum_{i,j=0}^p b_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$$

donde A y B de entradas a_{ij} y b_{ij} respectivamente son matrices semidefinidas positivas.

Como

$$H - F = H - G + G - F = \sum_{i,j=0}^p [a_{ij} + b_{ij}] \theta^i \bar{\theta}^j$$

tenemos que la matriz $C = A + B$ de entradas $[C]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ es también definida positiva. Entonces por la Proposición 7.15 $H \geq F$ ■

Una vez establecida la positividad como en la Definición 7.14 y su caracterización a través de la Proposición 7.15, podemos verificar por ejemplo que si $F \in pG_{p+1,\alpha}$ y $F \geq 0$, entonces $\int d\theta F(\bar{\theta}, \theta) d\bar{\theta} \geq 0$ (resultado que depende sólo del coeficiente principal de F).

También podemos demostrar una expresión similar a (2.25) para el caso de funciones de variable para Grassmann.

PROPOSICIÓN 7.18. Si $F \in \mathcal{B}_{Hol}^p$ y $K_\theta(\bar{\theta}) = \sum_{n=0}^p \frac{\theta^n \bar{\theta}^n}{w_n [n]_q!}$, entonces

$$(7.42) \quad F(\theta) \overline{F(\theta)} \leq K_\theta(\bar{\theta}) \|F\|^2.$$

Demostración. Dada $F(\theta) = \sum_{i=0}^p f_i \theta^i$

$$\begin{aligned} K_\theta(\bar{\theta}) \|F\|^2 - F(\theta) \overline{F(\theta)} &= \left(\sum_{n=0}^p \frac{\theta^n \bar{\theta}^n}{[n]_q!} \right) (F, F)_{pG} - \left(\sum_{i=0}^p f_i \theta^i \right) \left(\sum_{j=0}^p \overline{f_j \theta^j} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^p \frac{\theta^n \bar{\theta}^n}{[n]_q!} \right) \left(\sum_{m=0}^p [m]_q! |f_m|^2 \right) - \left(\sum_{i=0}^p f_i \theta^i \right) \left(\sum_{j=0}^p \overline{f_j \theta^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=0}^p \left[\left(\sum_{m=0}^p \frac{[m]_q!}{[i]_q!} |f_m|^2 \delta_{ij} \right) - f_i \overline{f_j} \right] \theta^i \bar{\theta}^j. \end{aligned}$$

Llamemos $a_{ij} := \left(\sum_{m=0}^p \frac{[m]_q!}{[i]_q!} |f_m|^2 \delta_{ij} \right) - f_i \overline{f_j}$ y A la matriz con estas entradas.

Es claro que $a_{ii} \in \mathbb{R}_+$ y $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, luego es hermítica. Para demostrar que es semidefinida positiva, debemos ver que siendo $\mathbf{z} = (z_0 \ z_1 \ \dots \ z_p)$ la matriz de $\mathbb{C}^{1 \times (p+1)}$ y $\mathbf{z}^\dagger$ su conjugada traspuesta,

$$\mathbf{z} A \mathbf{z}^\dagger \geq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{z} A \mathbf{z}^\dagger &= \sum_{j,k=0}^p z_j a_{jk} \bar{z}_k \\ &= \sum_{j,k=0}^p z_j \left[\left(\sum_{m=0}^p \frac{[m]_q!}{[j]_q!} |f_m|^2 \delta_{jk} \right) - f_j \overline{f_k} \right] \bar{z}_k \\ &= \sum_{j,k,m=0}^p z_j \frac{[m]_q!}{[j]_q!} |f_m|^2 \bar{z}_k \delta_{jk} - \sum_{j,k=0}^p z_j f_j \overline{f_k} \bar{z}_k \\ &= \sum_{j,m=0}^p |z_j|^2 \frac{[m]_q!}{[j]_q!} |f_m|^2 - \sum_{j,k=0}^p z_j f_j \overline{f_k} \bar{z}_k \\ &= \sum_{j,k=0}^p \left[|z_j|^2 \frac{[k]_q!}{[j]_q!} |f_k|^2 - z_j f_j \overline{f_k} \bar{z}_k \right] \\ &= \sum_{j,k=0}^p \sum_{j \neq k} \left[|z_j|^2 \frac{[k]_q!}{[j]_q!} |f_k|^2 - z_j f_j \overline{f_k} \bar{z}_k \right] \\ &= \sum_{j,k=0}^p \sum_{j > k} \left(\frac{z_j}{\sqrt{[j]_q!}} \overline{f_k} \sqrt{[k]_q!} - \frac{z_k}{\sqrt{[k]_q!}} \overline{f_j} \sqrt{[j]_q!} \right) \overline{\left(\frac{z_j}{\sqrt{[j]_q!}} \overline{f_k} \sqrt{[k]_q!} - \frac{z_k}{\sqrt{[k]_q!}} \overline{f_j} \sqrt{[j]_q!} \right)} \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Operadores sobre variables paraGrassmann

En este capítulo elaboramos la construcción de operadores lineales sobre elementos del álgebra paraGrassmann, vistos como funciones, en el lenguaje de Análisis Funcional. Si bien el hecho de trabajar en espacios de dimensión finita elimina por construcción todo problema de convergencia, nuestro objetivo es analizar esta construcción en el límite para el orden de nilpotencia $p \rightarrow \infty$ (donde $q = e^{i\frac{\pi}{p+1}} \rightarrow 1$) en relación con operadores sobre el espacio de Bargmann-Fock, vía estados coherentes bosónicos estándar.

1. Operadores Toeplitz y anti Wick sobre variables paraGrassmann

Representación de Bargmann Fock. Antes de comenzar con la definición de los operadores Toeplitz y anti Wick paraGrassmann, analicemos cómo es la representación de Bargmann Fock para estados q -bosónicos.

DEFINICIÓN 8.1. *Para un vector arbitrario $|\psi\rangle \in \mathcal{K}$ y $|\theta\rangle$ estado coherente, diremos que la expresión $(\theta|\psi)$ es el símbolo paraGrassmann de $|\psi\rangle$.*

Notemos que si $|\xi\rangle$ y $|\theta\rangle$ son estados coherentes paraGrassmann dados por (6.10), la acción de $(\xi|$ sobre $|\theta\rangle$ resulta

$$(8.1) \quad (\xi|\theta) = \sum_{n=0}^p \frac{\bar{\xi}^n \theta^n}{[n]_q!}.$$

Consideremos un estado $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^p c_n |n\rangle \in \mathcal{H}$. Entonces

$$(8.2) \quad \begin{aligned} (\theta|\psi) &= \sum_{n=0}^p \langle n| \left(1/\sqrt{[n]_q!} \right) \bar{\theta}^n | \sum_{m=0}^p c_m |m\rangle \\ &= \sum_{n=0}^p \frac{c_n}{\sqrt{[n]_q!}} \bar{\theta}^n =: \psi(\bar{\theta}). \end{aligned}$$

siendo $\psi(\bar{\theta})$ un elemento de $\mathcal{B}_{Ahol}^p$. Esta correspondencia entre estados y elementos de $\mathcal{B}_{Ahol}^p$ es claramente una biyección entre espacios de dimensión finita. Habiendo interpretado el álgebra paraGrassmann como un espacio de funciones, y habiendo establecido una proyección de $pG_{p+1,\alpha}$ en $\mathcal{B}_{Ahol}^p$ mediante un núcleo reproductivo, podemos dar forma funcional a esta biyección.

Usando la resolución de la identidad (7.23) con peso (7.25) y (8.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \psi \rangle &= \langle \psi | \int d\theta |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) (\theta | \psi \rangle d\bar{\theta} \\
&= \int d\theta \overline{\psi(\bar{\theta})} \mu(\theta, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) d\bar{\theta} \\
&= (\psi, \psi)_{pG} =: \|\psi\|^2
\end{aligned}$$

donde el producto interno $(\cdot, \cdot)_{pG}$ definido en $\mathcal{B}_{AHol}^p \times \mathcal{B}_{AHol}^p$ está dado en (7.30) con $w_n = 1$, es decir la fórmula (7.32).

De manera similar tenemos que la acción del dual $\langle \psi |$ sobre el estado $|\phi\rangle$ puede representarse como

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \phi \rangle &:= \langle \psi | \int d\theta : |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) (\theta | : d\bar{\theta} | \phi \rangle \\
&= \int d\theta : \overline{\psi(\bar{\theta})} \mu(\theta, \bar{\theta}) \phi(\bar{\theta}) : d\bar{\theta} \\
&= (\psi, \phi)_{pG}.
\end{aligned}$$

Motivados por lo anterior, podemos definir una transformación lineal $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ dada por

$$(8.3) \quad U(|\psi\rangle) = \psi(\bar{\theta}) = (\theta | \psi \rangle$$

que es invertible, con la inversa dada por

$$(8.4) \quad U^{-1}(\psi(\bar{\theta})) = |\psi\rangle = \int d\theta : |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) : d\bar{\theta}$$

Las ecuaciones (8.3) y (8.4) describen, vía estados coherentes, la isometría entre el espacio de Fock $\mathcal{H}$ y su realización funcional $\mathcal{B}_{AHol}^p \in pG_{p+1, \alpha}$.

Operadores Toeplitz y anti Wick para Grassmann. De la misma manera que para el caso complejo y Grassmann, la existencia del núcleo reproductivo para Grassmann permite definir los operadores Toeplitz en el sentido usual. Así mediante el operador $P_p : pG_{p+1, \alpha} \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ dado por

$$(8.5) \quad P_p(F)(\bar{\theta}) := (K_{\theta}(\bar{\zeta}), F(\zeta, \bar{\zeta}))_{pG}$$

para todo $F(\theta, \bar{\theta}) \in pG_{p+1, \alpha}$ podemos definir los operadores Toeplitz a través del núcleo reproductivo.

DEFINICIÓN 8.2. Siendo $\varrho(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p \varrho_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j \in pG_{p+1,\alpha}$ definimos el operador $T_\varrho^{(p)} : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$

$$(8.6) \quad T_\varrho^p[F](\bar{\theta}) := P_p(\varrho F) = (K_{p,\theta}(\bar{\zeta}), \varrho(\zeta, \bar{\zeta})F(\bar{\zeta}))_{pG}$$

para $F \in \mathcal{B}_{AHol}^p$. Este operador será llamado operador Toeplitz paraGrassmann. La función $\varrho(\theta, \bar{\theta})$ es el símbolo del operador de Toeplitz paraGrassmann.

OBSERVACIÓN 8.3. La definición de operador Toeplitz paraGrassmann (8.6) puede también darse utilizando el producto interno (7.30) en lugar de su caso particular (7.32). Por conveniencia en el tratamiento de estados coherentes utilizaremos este último.

Como para el caso bosónico y fermiónico, estos operadores pueden ser vistos como una realización funcional de operadores que actúan sobre el espacio de estados $\mathcal{F}$.

DEFINICIÓN 8.4. Dada una función $\varphi(\theta, \bar{\theta}) \in pG(p+1, \alpha)$, el operador $A_{p,\varphi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$,

$$(8.7) \quad A_{p,\varphi} = \int d\theta : |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \varphi(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta| : d\bar{\theta},$$

se llamará operador anti Wick paraGrassmann con símbolo anti-Wick o símbolo contravariante φ .

La integral (5.3) permite calcular elementos de matriz complejos para $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ vectores de $\mathcal{H}$,

$$(8.8) \quad \langle \phi | A_{p,\varphi} | \psi \rangle = \int d\theta : \langle \phi | \theta \rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \varphi(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta | \psi \rangle : d\bar{\theta}.$$

Siendo $|\zeta\rangle$ es un estado coherente, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \zeta | A_{p,\varphi} | \psi \rangle &= \int d\theta : \langle \zeta | \theta \rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \varphi(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta | \psi \rangle : d\bar{\theta} \\ &= \int d\theta : K_\zeta(\bar{\theta})^* \mu(\theta, \bar{\theta}) \varphi(\theta, \bar{\theta}) \psi(\bar{\theta}) : d\bar{\theta} \\ &= T_\varphi^p \psi(\bar{\zeta}) \end{aligned}$$

Esto nos dice que $T_\varphi^p \psi(\bar{\zeta})$ es la realización funcional del operador anti Wick $A_{p,\varphi}$.

Siguiendo la definición 7.14, se puede ver como la positividad del símbolo determina a positividad del operador Toeplitz paraGrassmann:

PROPOSICIÓN 8.5. Si el símbolo $\varphi(\theta, \bar{\theta}) \in pG_{p+1,\alpha}$ es positivo según la definición 7.14, el operador T_φ^p es positivo.

Demostración. Sea $\varphi(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i,j=0}^p \varphi_{ij} \theta^i \bar{\theta}^j$ símbolo positivo, es decir que la matriz Φ cuyas entradas $[\Phi]_{ij} = \varphi_{ij}$ es semidefinida positiva por la Proposición 7.15. Sea $f(\bar{\theta}) = \sum_{k=0}^p f_k \bar{\theta}^k \in \mathcal{B}_{AHol}^p$. Aplicando la definición (8.6)

$$(8.9) \quad T_{\varphi}^p f(\bar{\theta}) = \sum_{i=0}^p A_i \bar{\theta}^{p-i}$$

con $A_i = \sum_{j=0}^p \varphi_{i,j} \frac{[p]_q!}{[p-i]_q!} f_{p-j}$ Entonces usando (7.30)

$$\begin{aligned} (T_{\varphi} f(\bar{\theta}), f(\bar{\theta}))_{pG} &= \left(\sum_{i=0}^p A_i \bar{\theta}^{p-i}, \sum_{k=0}^p f_k \bar{\theta}^k \right)_{pG} \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^p \int d\theta : \overline{A_i} \theta^{p-i} \mu(\theta, \bar{\theta}) f_k \bar{\theta}^k : d\bar{\theta} \\ &= \sum_{i,k=0}^p \frac{\overline{A_i} f_k \sqrt{[k]_q!}}{\sqrt{[p-i]_q!}} \delta_k^{p-i} \\ &= \sum_{i=0}^p \overline{A_i} f_{p-i} \\ &= \sum_{i,j=0}^p \overline{f_{p-j}} f_{p-i} a_{ij} [p]_q! \end{aligned}$$

Llamando $F := (f_0, \dots, f_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} (T_{\varphi} f(\bar{\theta}), f(\bar{\theta}))_{pG} &= \sum_{i,j=0}^p \overline{f_{p-j}} f_{p-i} a_{ij} [p]_q! \\ &= F \cdot \Phi \cdot F^{\dagger} \geq 0 \end{aligned}$$

pues Φ era semidefinida positiva. Así queda demostranda la positividad del operador Toeplitz paraGrassmann T_{φ}^p . ■

2. Operadores Toeplitz paraGrassmann diagonales

De la misma manera que en el caso Grassmann, los operadores diagonales en la base de $\mathcal{B}_{AHol}^p$ dada en la Proposición 7.8 tienen símbolos sencillos. Podemos ver que

TEOREMA 8.6. *El operador T_{φ}^p es diagonal en la base $\phi_n(\bar{\theta}) = \bar{\theta}^n / \sqrt{[n]_q!}$ de $\mathcal{B}_{AHol}^p$ si y sólo si $\varphi(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{n=0}^p a_n \theta^n \bar{\theta}^n$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que T_{φ}^p es diagonal en la base $\phi_n(\bar{\theta})$. Entonces existen $\lambda_n \in \mathbb{C}$, con $n = 0, \dots, p$, tales que $T_{\varphi}^p \phi_n(\bar{\theta}) = \lambda_n \phi_n(\bar{\theta})$. Dado un símbolo general $\varphi(\zeta, \bar{\zeta}) =$

$$\sum_{i,j=0}^p a_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j,$$

$$\begin{aligned} T_\varphi^p[\phi_n](\bar{\theta}) &= (K_\theta(\bar{\zeta}), \varphi(\zeta, \bar{\zeta})\phi_n(\bar{\zeta}))_{pG} \\ &= \int d\zeta : \left(\sum_{m=0}^p \frac{\zeta^m \bar{\theta}^m}{[m]_q!} \right) \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \zeta^k \bar{\zeta}^k \right) \left(\sum_{i,j=0}^p a_{ij} \zeta^i \bar{\zeta}^j \right) \frac{\bar{\zeta}^n}{\sqrt{[n]_q!}} : d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} \sum_{i,j,k,m=0}^p a_{ij} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\bar{\theta}^m}{[m]_q!} \int d\zeta : \zeta^{i+k+m} \bar{\zeta}^{j+k+n} : d\bar{\zeta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} \sum_{i,j,k,m=0}^p a_{ij} \frac{[p]_q!}{[k]_q!} \frac{\bar{\theta}^m}{[m]_q!} \delta_{i+k+m}^p \delta_{j+k+n}^p. \end{aligned}$$

Cuando $i \neq j$ se tiene que $m \neq n$. En consecuencia si existe $a_{ij} \neq 0$ con $i \neq j$ la función ϕ_n no es autofunción de T_φ^p . Esto significa que $\varphi(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{i=0}^p a_{ii} \zeta^i \bar{\zeta}^i$.

$$\Leftrightarrow \text{Sea } \phi_n(\bar{\theta}) = \frac{\bar{\theta}^n}{\sqrt{[n]_q!}} \text{ y } \varphi = \sum_{i=0}^p a_i \theta^i \bar{\theta}^i$$

$$\begin{aligned} T_\varphi^p[\phi_n](\bar{\theta}) &= (K_\theta(\bar{\zeta}), \varphi(\zeta, \bar{\zeta})\phi_n(\bar{\zeta}))_{pG} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} \sum_{i,k,m=0}^p a_i \frac{1}{[k]_q!} \frac{\bar{\theta}^m}{[m]_q!} [p]_q! \delta_{i+k+n}^p \delta_{i+k+m}^p \\ &= \phi_n(\bar{\theta}) \sum_{i=0}^p a_i \frac{[n+i]_q!}{[n]_q!} \end{aligned}$$

Entonces $\phi_n(\bar{\theta})$ es autofunción de T_φ^p con autovalor

$$(8.10) \quad \lambda_n = \sum_{i=0}^p a_i \frac{[n+i]_q!}{[n]_q!}. \quad \blacksquare$$

DEFINICIÓN 8.7. Los símbolos de la forma $\varphi(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{i=0}^p a_i \theta^i \bar{\theta}^i$ serán llamados *símbolos radiales para Grassmann*.

Observemos que contrariamente al caso bosónico, y de forma análoga al caso Grassmann, cualquier función de esta forma puede ser considerada símbolo radial, ya que no existen condiciones restrictivas sobre el dominio del operador de Toeplitz para Grassmann debido a que la nilpotencia de orden $p+1$ de estas variables reduce el espacio de funciones a un espacio de dimensión finita. Así, para símbolos de este tipo, el operador Toeplitz para Grassmann T_φ^p está bien definido y su dominio es todo el espacio $\mathcal{B}_{Hol}^p$.

Dado un símbolo radial, el operador T_φ^p definido en (8.6), puede ser escrito de forma equivalente través de sucesiones finitas de autovalores.

Definamos el espacio

$$(8.11) \quad \mathcal{C}^p = \{\{a_n\}_{n \geq 0} \text{ donde } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq p\}$$

y la aplicación

$$(8.12) \quad \begin{aligned} S_\varphi : \mathcal{C}^p &\rightarrow \mathcal{C}^p \\ \{a_n\} &\mapsto \{a_n \varphi_n\} \end{aligned}$$

con $\{\varphi_n\}$ una sucesión fija cualquiera. Así, teniendo en cuenta los autovalores (8.10) de un operador Toeplitz paraGrassmann con símbolo radial, podemos expresar de la siguiente forma equivalente el resultado de la Proposición 8.6.

TEOREMA 8.8. *Si φ un símbolo paraGrassmann radial, entonces el operador Toeplitz paraGrassmann T_φ^p es unitariamente equivalente al operador S_φ^p que actúa en el espacio de sucesiones $\mathcal{C}_0^p$ siendo la sucesión $\{\varphi_n\}$ dada por*

$$(8.13) \quad \varphi_n = \frac{1}{[n]_q!} \int d\theta : \varphi(\theta, \bar{\theta}) \mu(\theta, \bar{\theta}) \theta^n \bar{\theta}^n : d\bar{\theta}.$$

Demostración. Para verificar este resultado solamente tenemos que ver que los autovalores (8.10) coinciden con (8.13). Sin pérdida de generalidad supongamos $\varphi = \theta^i \bar{\theta}^i$

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{1}{[n]_q!} \int d\theta : \varphi(\theta, \bar{\theta}) \mu(\theta, \bar{\theta}) \theta^n \bar{\theta}^n : d\bar{\theta} \\ &= \frac{1}{[n]_q!} \int d\theta : \theta^i \bar{\theta}^i \bar{\theta}^n \theta^n \sum_{m=0}^p \frac{1}{[m]_q!} \bar{\theta}^m \theta^m : d\bar{\theta} \\ &= \sum_{m=0}^p \frac{1}{[n]_q! [m]_q!} \int d\theta : \theta^{i+n+m} \bar{\theta}^{i+n+m} : d\bar{\theta} \\ &= \sum_{m=0}^p \frac{1}{[n]_q! [m]_q!} [p]_q! \delta_{i+n+m}^p \\ &= \frac{[n+i]_q!}{[n]_q!} \end{aligned}$$

coincidiendo con el espectro dado en (8.10). ■

OBSERVACIÓN 8.9. *Si $p = 1$ la fórmula (8.13) se reduce a la fórmula (5.7) hallada para operadores Toeplitz radiales con variables Grassmann.*

La correspondencia expresada en el teorema 8.8 es fácilmente invertible,

TEOREMA 8.10. *Para cada sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^{p+1}$ existe un símbolo paraGrassmann radial $a(\theta, \bar{\theta})$ tal que el operador Toeplitz T_a^p es unitariamente equivalente al operador multiplicación por la sucesión $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demostración. Proponemos

$$(8.14) \quad a(\theta, \bar{\theta}) = \mu^{-1}(\theta, \bar{\theta}) \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \gamma_{p-k} \theta^k \bar{\theta}^k.$$

donde por (7.31) $\mu^{-1}(\theta, \bar{\theta}) = [e_q^{\theta \bar{\theta}}]^{-1}$ determinada en la Observación 7.6. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma_a(n) &= \frac{1}{[n]_q!} \int d\theta : \mu(\theta, \bar{\theta}) \mu^{-1}(\theta, \bar{\theta}) \left[\sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \gamma_{p-k} \theta^k \bar{\theta}^k \right] \theta^n \bar{\theta}^n : d\bar{\theta} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{[n]_q!} \frac{\gamma_{p-k}}{[k]_q!} \int d\theta \theta^{k+n} \bar{\theta}^{k+n} d\bar{\theta} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{[n]_q!} \frac{\gamma_{p-k}}{[k]_q!} [p]_q! \delta_{k+n}^p = \gamma_n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Composición. El problema de composición de operadores Toeplitz en variable compleja, comentado al final de la Parte I, se simplifica en el caso de variables paraGrassmann por la nilpotencia de las mismas.

Si $T_\varphi^{(p)}$ y $T_\psi^{(p)}$ son dos operadores Toeplitz de variable paraGrassmann con símbolo radial, podemos establecer una correspondencia unitaria con los operadores S_φ y S_ψ definidos en (8.12) que actúan sobre $\mathcal{C}_0^p$. Estos dos operadores actúan respectivamente multiplicando cualquier sucesión de $\mathcal{C}_0^p$ por las sucesiones $\gamma_\varphi(n)$ y $\gamma_\psi(n)$ definidas según (8.13). Como estos operadores no tienen restricciones sobre su dominio debido a la nilpotencia de las variables paraGrassmann, el operador composición $T_\varphi^{(p)} T_\psi^{(p)}$ es unitariamente equivalente un operador

$$S_A : \{a_n\} \mapsto \{a_n \gamma_\varphi(n) \gamma_\psi(n)\} \in \mathcal{C}_0^p.$$

La función asociada a la sucesión $\{\gamma_\varphi(n) \gamma_\psi(n)\}$ que caracteriza el símbolo $A(\theta, \bar{\theta})$ del operador composición está dada por el teorema 8.10. Así

$$A(\theta, \bar{\theta}) = \mu^{-1}(\theta, \bar{\theta}) \sum_{k=0}^p \frac{w_{p-k}}{[k]_q!} \gamma_\varphi(p-k) \gamma_\psi(p-k) \theta^k \bar{\theta}^k$$

resultando $T_A^{(p)} = T_\varphi^{(p)} T_\psi^{(p)}$.

3. Operadores sobre variables paraGrassmann en el límite $p \rightarrow \infty$

3.1. Convergencia de funciones en $\mathcal{B}_{AHol}^p$. En esta sección establecemos una relación con los contenidos de la Parte 1, presentando una noción de límite $p \rightarrow \infty$ que permitirá relacionar funciones de variable paraGrassmann p -nilpotentes con funciones de variable compleja.

Para referirnos a las álgebras paraGrassmann con distinto orden de nilpotencia p , en esta sección haremos explícito el valor de p anotando $\theta_p, \bar{\theta}_p$ a los generadores de $pG_{p+1, \alpha(p)}$, donde el parámetro de conmutación real $\alpha(p)$ puede variar con p .

Comencemos notando que las relaciones de conmutación entre operadores de creación y destrucción q -bosónicos p -nilpotentes (6.1) se reducen a las relaciones de conmutación bosónicas estándar (1.9) cuando $p \rightarrow \infty$, simplemente porque $q = e^{i\pi/(p+1)} \rightarrow 1$. En consecuencia, esperamos que los autovectores $|\theta_p\rangle$ del operador de destrucción q -bosónico, (6.10), se puedan relacionar con los autovectores $|z\rangle$ del operador de destrucción bosónico, en la forma de Glauber dada en (1.23). Más aún, es tentador relacionar directamente los autovalores θ_p con los autovalores z . Formalizaremos estas relaciones en el marco de funciones antiholomorfas de las correspondientes variables (para recuperar la conjugación compleja a partir de la conjugación paraGrassman y así replicar los resultados para funciones holomorfas, es necesario considerar que $\alpha(p) \rightarrow 1$).

Denotemos $B_{AHol}^p(\bar{\theta}_p) \subset pG_{p+1, \alpha(p)}$ a los espacios de funciones antiholomorfas de variable p -nilpotente $\bar{\theta}_p$, de dimensión finita $p+1$. En tanto p tiende a infinito, los espacios $B_{AHol}^p(\bar{\theta}_p)$ tienden a un espacio de Hilbert propiamente dicho, con base ortonormal infinita numerable. Por otro lado, en este límite las variables $\bar{\theta}_p$ dejan de ser nilpotentes, ya que el orden de nilpotencia diverge.

Recordemos que una función $f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n!}} \bar{z}^n \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, espacio de funciones antiholomorfas cuadrado integrable con la medida $d\mu(z) = e^{-|z|^2} dv(z)$, si y sólo si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$. Así el isomorfismo $W : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ dado por

$$(8.15) \quad W[f(\bar{z})] = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

que usaremos para describir funciones $f(\bar{z})$ mediante la sucesión de sus coeficientes de Taylor.

Por otro lado, dado $p \geq 1$, los elementos de $B_{AHol}^p(\bar{\theta}_p)$ son de la forma $f(\bar{\theta}_p) = \sum_{n=0}^p \frac{f_n^{(p)}}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^n$, donde anotamos $q(p) = e^{i\frac{2\pi}{p+1}}$. Los coeficientes $f_n^{(p)}$ indexados por $n \in \mathbb{N}$, con $f_n^{(p)} = 0$ para $n > p$, forman una sucesión en el espacio $\mathcal{C}^p$ definido en (8.11), incluido en $l^2(\mathbb{C})$. Tenemos así el

isomorfismo $W_p : B_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{C}_p \subset l^2(\mathbb{C})$ dado por

$$(8.16) \quad W_p[f(\bar{\theta}_p)] = \{f_n^{(p)}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

En este sentido, las funciones $f(\bar{\theta}_p)$ también son descriptas por sucesiones en $l^2(\mathbb{C})$.

Los espacios $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $\mathcal{B}_{AHol}^p$ no son directamente comparables, ya que el primero es un espacio de funciones propiamente dicho y el otro sólo se interpreta como tal. Sin embargo, como $\mathcal{C}_1 \subset \dots \mathcal{C}_p \subset \mathcal{C}_{p+1}$ y para cada p fijo $\mathcal{C}_p \subset l^2(\mathbb{C})$, es posible relacionarlos por su imagen en $l^2(\mathbb{C})$ a través de los isomorfismos (8.15), (8.16) y así trabajar con $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $\mathcal{B}_{AHol}^p$. En este marco podemos definir el límite de una sucesión de funciones $\{f_p(\bar{\theta}_p)\}$ para p tendiendo a infinito.

DEFINICIÓN 8.11. Diremos que una sucesión de funciones de variable paraGrassmann $\{f_p(\bar{\theta}_p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ con $f_p \in \mathcal{B}_{AHol}^p$, tiende a una función $f(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ cuando $p \rightarrow \infty$ si y sólo si para cada n fijo

$$(8.17) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} W_p[f_p(\bar{\theta}_p)]_n = W[f(\bar{z})]_n.$$

Si el límite existe en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, lo indicaremos con la notación $\mathcal{L}f_p(\bar{\theta}_p) = f(\bar{z})$.

Podemos expresar la existencia del límite de una sucesión de funciones de variable paraGrassmann en términos de las sucesiones en $l^2(\mathbb{C})$ que las caracterizan mediante la siguiente

PROPOSICIÓN 8.12. Dada una sucesión de funciones $\{f_p(\bar{\theta}_p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ con $f_p \in \mathcal{B}_{AHol}^p$ y $f(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, $\mathcal{L}f_p(\bar{\theta}_p) = f(\bar{z})$ si y sólo si

$$(8.18) \quad W_p[f_p(\bar{\theta}_p)] \rightarrow W[f(\bar{z})]$$

en $l^2(\mathbb{C})$.

Propiedades del límite.

- : Unicidad: Si $\mathcal{L}f_p = f$ y $\mathcal{L}f_p = g$ entonces $f = g$
- : Linealidad: Si $\mathcal{L}f_p = f$ y $\mathcal{L}g_p = g$, entonces $\mathcal{L}[\alpha f_p + g_p] = \alpha f + g$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$
- : Producto: Si $\mathcal{L}f_p = f$ y $\mathcal{L}g_p = g$ y $fg \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, entonces

$$(8.19) \quad \mathcal{L}[f_p g_p] = \mathcal{L}[f_p] \mathcal{L}[g_p] = fg$$

En efecto, sea $f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n!}} \bar{z}^n$ y $g(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n!}} \bar{z}^n$ elementos de $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ siendo equivalente a la condición que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$. Sea $f(\bar{\theta}_p) =$

$\sum_{n=0}^p \frac{f_n^{(p)}}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^n$ y $g(\bar{\theta}_p) = \sum_{n=0}^p \frac{g_n^{(p)}}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^n$ donde anotamos $q(p) = e^{i\frac{2\pi}{p+1}}$. Como $\mathcal{L}f_p = f$ y $\mathcal{L}g_p = g$, tenemos que para cada n fijo

$$(8.20) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f_n^{(p)} = a_n \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} g_n^{(p)} = b_n$$

Sea $h(\bar{\theta}_p) = f(\bar{\theta}_p)g(\bar{\theta}_p)$, entonces

$$\begin{aligned} h(\bar{\theta}_p) &= \left(\sum_{n=0}^p \frac{f_n^{(p)}}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^n \right) \left(\sum_{m=0}^p \frac{g_m^{(p)}}{\sqrt{[m]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^m \right) \\ &= \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^p \frac{f_n^{(p)} g_m^{(p)}}{\sqrt{[n]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^{m+n} \\ &= \sum_{u=0}^p \sum_{m=0}^u \frac{f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^u \\ &= \sum_{u=0}^p \frac{h_u^{(p)}}{\sqrt{[u]_{q(p)}!}} \bar{\theta}_p^u \end{aligned}$$

con $h_u^{(p)} = \sum_{m=0}^u \frac{f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)} \sqrt{[u]_{q(p)}!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}}$. Por otro lado, como $h = fg \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ tenemos por el producto de Cauchy, que

$$h(\bar{z}) = f(\bar{z})g(\bar{z}) = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{h_u}{\sqrt{u!}} \bar{z}^u$$

con $h_u = \sum_{m=0}^u \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{(u-m)! m!}}$. Tenemos que ver que para cada u fijo

$$\lim_{p \rightarrow \infty} h_u^{(p)} = h_u.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &\|h_u - h_u^{(p)}\|^2 \\ &= \left\| \sum_{m=0}^u \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{(u-m)! m!}} - \sum_{m=0}^u \frac{f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)} \sqrt{[u]_{q(p)}!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{m=0}^u \left\| \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{(u-m)! m!}} - \frac{f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)} \sqrt{[u]_{q(p)}!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{m=0}^u \left\| \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{(u-m)! m!}} - \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 + \sum_{m=0}^u \left\| \frac{a_{u-m} b_m \sqrt{u!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} - \frac{f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)} \sqrt{[u]_{q(p)}!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 \\ &\leq \sum_{m=0}^u \|a_{u-m} b_m\|^2 \left\| \frac{\sqrt{u!}}{\sqrt{(u-m)! m!}} - \frac{\sqrt{u!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 + \sum_{m=0}^u \|a_{u-m} b_m - f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)}\|^2 \left\| \frac{\sqrt{u!}}{\sqrt{[u-m]_{q(p)}! [m]_{q(p)}!}} \right\|^2 \end{aligned}$$

Como $\lim_{p \rightarrow \infty} [m] = m$, y $\lim_{p \rightarrow \infty} f_{u-m}^{(p)} g_m^{(p)} = a_{u-m} b_m$, tenemos por la desigualdad de Cauchy Schwarz que $\|h_u - h_u^{(p)}\|^2 \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$.

EJEMPLO 8.13. Consideremos las funciones identidad $f_p(\bar{\theta}_p) = \bar{\theta}_p \in \mathcal{B}_{AHol}^p$ y $f(\bar{z}) = \bar{z} \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Entonces $W_p[f_p(\bar{\theta}_p)] = (0, 1, 0, 0, \dots)$ y $W[f(\bar{z})] = (0, 1, 0, \dots)$ y en consecuencia para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$(8.21) \quad W_p[f_p(\bar{\theta}_p)]_n = W[f(\bar{z})]_n.$$

Entonces, $\mathcal{L}\bar{\theta}_p = \bar{z}$ cuando $p \rightarrow \infty$. Es decir, en el sentido de la definición (8.11), podemos decir que la variable paraGrassmann $\bar{\theta}_p$ tiende a la variable compleja $\bar{z}$ cuando el orden de nilpotencia p tiende a infinito.

EJEMPLO 8.14. Sea $f_p(\bar{\theta}_p) = e_{q(p)}^{\bar{\theta}} := \sum_{n=0}^p \frac{\bar{\theta}_p^n}{[n]_{q(p)}!} \in \mathcal{B}_{AHol}^p$ (ver (7.27) y $f(\bar{z}) = e^{\bar{z}} \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Entonces

$$W_p[f_p(\bar{\theta}_p)] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}}, & \text{si } n \leq p \\ 0, & \text{si } n > p \end{cases}, \quad W[f(\bar{z})] = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \right\}.$$

Así

$$W_p[f_p(\bar{\theta}_p)]_n - W[f(\bar{z})]_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} - \frac{1}{\sqrt{n!}}, & \text{para } n \leq p \\ \frac{1}{\sqrt{n!}}, & \text{para } n > p \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $[n]_{q(p)} \rightarrow n$ cuando $p \rightarrow \infty$, tenemos que $\mathcal{L}e_{q(p)}^{\bar{\theta}} = e^{\bar{z}}$.

PROPOSICIÓN 8.15. Toda función $f(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ puede expresarse como límite de alguna sucesión de funciones de variable paraGrassmann $f_p(\bar{\theta}_p) \in \mathcal{B}_{AHol}^p$.

Demostración. La demostración es sencilla por construcción. Si $f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, entonces $\{a_n \sqrt{n!}\} \in l^2(\mathbb{C})$. Proponemos sucesiones truncadas

$$f_n^{(p)} = \begin{cases} a_n \sqrt{n!}, & \text{si } n \leq p. \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

para construir una sucesión de funciones $f_p(\bar{\theta}_p) = \sum_{n=0}^p f_n^{(p)} \bar{\theta}_p^n \in \mathcal{B}_{AHol}^p$. Claramente

$$\mathcal{L}f_p(\bar{\theta}_p) = f(\bar{z}). \quad \blacksquare$$

3.2. Convergencia de operadores en $\mathcal{B}_{AHol}^p$. Motivados por la definición anterior de límite que nos permite comparar funciones de distintos espacios como son $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ y $\mathcal{B}_{AHol}^p$,

DEFINICIÓN 8.16. Diremos que la sucesión de operadores $\{A_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ donde $A_p : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ tiende a un operador $A : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ cuando $p \rightarrow \infty$, si y sólo si para cada elemento de las respectivas bases canónicas

$$W_p \left[A_p \left(\frac{\bar{\theta}_p^m}{\sqrt{[m]_q!}} \right) \right]_i \rightarrow W \left[A \left(\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \right) \right]_i$$

cuando $p \rightarrow \infty$ para cada i, m fijo.

En ese caso, según la notación adoptada, $\mathcal{L}A_p \left(\frac{\bar{\theta}_p^m}{\sqrt{[m]_q!}} \right) = A \left(\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \right)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 8.17. Derivadas de orden natural k . Sea $A_p = \bar{\partial}^k : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ tal como fueron definidas en 7.1 y $A = \bar{\partial}^k : F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ la derivación usual de funciones antiholomorfas. Tenemos que, para m fijo

$$A_p \left[\frac{\bar{\theta}_p^m}{\sqrt{[m]_q!}} \right] = \begin{cases} \frac{(m)_q!}{(m-k)_q! \sqrt{[m]_q!}} \bar{\theta}_p^{m-k}, & \text{si } m \geq k \\ 0, & \text{si } m < k \end{cases} \quad A \left[\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \right] = \begin{cases} \frac{m!}{(m-k)! \sqrt{m!}} \bar{z}^{m-k}, & \text{si } m \geq k \\ 0, & \text{si } m < k \end{cases}$$

Entonces

$$W_p \left[[A_p] \left(\frac{\bar{\theta}_p^m}{\sqrt{[m]_q!}} \right) \right]_i - W \left[[A] \left(\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \right) \right]_i = \frac{(i+k)_q!}{(i)_q! \sqrt{[i+k]_q!}} - \frac{(i+k)!}{i! \sqrt{i!}}.$$

Como $[n]_q$ y $(n)_q$ tienden a n cuando $p \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}A_p = A$. Este ejemplo muestra que en el límite $p \rightarrow \infty$ los operadores diferenciales en $\mathcal{B}_{AHol}^p$ reproducen operadores diferenciales en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

3.3. Convergencia de la composición de operadores en $\mathcal{B}_{AHol}^p$. Retomemos el problema de composición de operadores Toeplitz en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ propuesto en [Coburn 2001], mencionado al final de la Parte I de esta Tesis, analizando estos operadores como límite de operadores Toeplitz paraGrassmann. En esta sección trabajaremos con símbolos radiales de la clase $\mathcal{P}$

$$(8.22) \quad \mathcal{P} = \{\varphi(|z|) \text{ tal que para todo } n \in \mathbb{N}, \bar{z}^n \in \text{Dom}(T_\varphi)\}$$

definida en la primera parte de este trabajo, donde $\text{Dom}(T_\varphi)$, definido en (2.5), es el dominio natural del operador de Toeplitz T_φ .

Sea T_φ operador Toeplitz en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ con $\varphi = e^{\lambda|z|^2}$ con $\lambda = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$. Como puede verse en [Coburn 2001], no existe una función ψ tal que la composición $T_\varphi T_\varphi$ pueda escribirse como un operador Toeplitz con símbolo ψ .

Sea $\varphi_p \in pG_{p+1,\alpha}$ tal que

$$\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \mu^{-1}(\theta_p, \bar{\theta}_p) \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k!]_{q(p)}} (1 - 2\lambda)^{-(p-k)} \theta_p^k \bar{\theta}_p^k$$

y a partir de este símbolo consideremos el operador Toeplitz paraGrassmann $T_{\varphi_p}^{(p)}$. Por las definiciones 8.11 y 8.16, es claro que

$$T_\varphi = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} T_\varphi T_\varphi &= \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)} \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)} T_{\varphi_p}^{(p)} \end{aligned}$$

Como analizamos en la sección 2 de este capítulo, podemos construir un símbolo $\tilde{\varphi}_p(\theta_p, \bar{\theta}_p)$ que verifique

$$\tilde{\varphi}_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \mu^{-1}(\theta_p, \bar{\theta}_p) \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} \gamma_\varphi(p-k) \left[\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right]^{-2(p-k+1)} \theta_p^k \bar{\theta}_p^k,$$

de forma tal que, por (8.19), $T_\varphi T_\varphi = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\tilde{\varphi}_p}^{(p)}$. Es decir, la composición de operadores Toeplitz en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ que no puede ser escrita como un operador Toeplitz en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, sí puede ser escrita como el límite para $p \rightarrow \infty$ de operadores Toeplitz paraGrassmann bien definidos.

Otro ejemplo en donde la composición no resulta cerrada fue construido por Bauer y Le en [Bauer 2011], donde los símbolos considerados

$$\varphi_j(z, \bar{z}) = |z|^{2j} \text{sen}(2\sqrt{3}|z|^2) e^{-|z|^2}$$

pertenecen a la clase $L_1^\infty(\mathbb{R}_+, e^{-r^2})$. Entonces es posible calcular la sucesión $\gamma_{\varphi_{sat}}$ dada por la fórmula (8.13) de donde

$$\gamma_{\varphi_j}(n) = \frac{4^{-j-n-1}}{\Gamma(n+1)} \text{sen}\left(\frac{(n+j+1)\pi}{3}\right) \Gamma(j+n+1)$$

A diferencia del ejemplo anterior, los símbolos φ_j resultan acotados, perteneciendo a la clase $\mathcal{P}$ resultando el operador T_{φ_j} bien definido. Por el Teorema 2.9, cada operador T_{φ_j} es unitariamente equivalente al operador $t_{\varphi_j} : l_2 \rightarrow l_2$ dado por $t_{\varphi_j}(\{a_n\}) = \{a_n \gamma_{\varphi_j}(n)\}$.

Resultados de [Bauer 2011], muestran que el operador composición $A = T_{\varphi_0} T_{\varphi_1}$ no es un operador Toeplitz. Sin embargo, siendo

$$\alpha_n = \gamma_{\varphi_0}(n) \gamma_{\varphi_1}(n) = \frac{4^{-2n-3}}{\Gamma(n+1)} \text{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \text{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{3}\right) \Gamma(n+2)$$

podemos, a través de la Proposición 8.10 construir la sucesión de símbolos φ_p

$$\varphi_p(\theta, \bar{\theta}) = \mu(\theta, \bar{\theta})^{-1} \sum_{k=0}^p \frac{1}{[k]_q!} b_{p-k} \theta^k \bar{\theta}^k$$

de donde $T_{\varphi_0} T_{\varphi_1} = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)}$.

Motivados por esta discusión, enunciamos:

TEOREMA 8.18. *Sea $A : \mathcal{D} \subset F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ un operador tal que $\phi_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \in \mathcal{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión de símbolos*

$$(8.23) \quad \varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \sum_{i,j=0}^p \varphi_{i,j}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j$$

tal que la sucesión de operadores Toeplitz para Grassmann $T_{\varphi_p}^{(p)} : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ tiene por límite

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)} = A.$$

Demostración. Usando que $A\phi_m(\bar{z}) \in F^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$A\phi_n(\bar{z}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s,n}}{\sqrt{s!}} \bar{z}^s$$

donde $\{a_{s,m}\}_{s \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C})$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Tenemos así que

$$(8.24) \quad W \left[A \left(\frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \right) \right]_i = a_{i,m}.$$

Sea $\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \sum_{i,j=0}^p \varphi_{i,j}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j$. Podemos calcular la acción del operador Toeplitz para Grassmann $T_{\varphi_p}^{(p)}$ sobre $\frac{\bar{\theta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}}$

$$\begin{aligned} T_{\varphi_p}^{(p)} \left[\frac{\bar{\zeta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \right] &= (K_{p,\zeta_p}(\bar{\theta}_p), \varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) \frac{\bar{\theta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}})_{pG} \\ &= \int d\theta_p : K_{\zeta}(\bar{\theta}_p)^* \mu(\theta_p, \bar{\theta}_p) \varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) \frac{\bar{\theta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} : d\bar{\theta}_p \\ &= \sum_{s,u,i,j=0}^p \int d\theta_p : \frac{\theta_p^s \bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}!} \frac{\theta_p^u \bar{\theta}_p^u}{[u]_{q(p)}!} \varphi_{i,j}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j \frac{\bar{\theta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} : d\bar{\theta}_p \\ &= \sum_{s,u,i,j=0}^p \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{i,j}^{(p)} \delta_{s+u+i}^p \delta_{u+j+n}^p \\ &= \sum_{s=0}^p \sum_{u=0}^{\min(p-s, p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u, p-n-u}^{(p)}. \end{aligned}$$

Consideremos

$$(8.25) \quad \varphi_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i, j > p \\ a_{p-i,p-j} \frac{\sqrt{[p-i]_{q(p)}! [p-j]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!}, & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0; i, j \leq p \\ a_{p-i,p-j} \frac{\sqrt{[p-i]_{q(p)}! [p-j]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!} - \sum_{u=1}^{\min(i,j)} \frac{\varphi_{i-u,j-u}^{(p)}}{[u]_{q(p)}!}, & \text{si } i, j \neq 0 \text{ y } i, j \leq p \end{cases}$$

Con esta determinación de los coeficientes

$$\begin{aligned} T_{\varphi_p}^{(p)} \left[\frac{\bar{\zeta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \right] &= \sum_{s=0}^p \sum_{u=0}^{\min(p-s,p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{\min(p-s,p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{0,p-n}^{(p)} \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{\min(p-s,p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} a_{p,n} \frac{\sqrt{[p]_{q(p)}! [n]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!} \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{\min(p-s,p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,n}. \end{aligned}$$

Supongamos que $n = p$, entonces la cadena de igualdades anterior se reduce a

$$\begin{aligned} T_{\varphi_p}^{(p)} \left[\frac{\bar{\zeta}_p^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} \right] &= \sum_{s=0}^{p-1} \frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! \sqrt{[p]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s,0}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,p} \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} \frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! \sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{s,p} \frac{\sqrt{[s]_{q(p)}! [p]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,p} \\ &= \sum_{s=0}^p \frac{\bar{\zeta}^s}{\sqrt{[s]_{q(p)}!}} a_{s,p}. \end{aligned}$$

Si $n < p$

$$\begin{aligned} T_{\varphi_p}^{(p)} \left[\frac{\bar{\zeta}_p^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \right] &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{\min(p-s,p-n)} \frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,n} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{u=0}^{p-n} \frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \sum_{s=n}^{p-1} \sum_{u=0}^{p-s} \frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,n} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \left[\frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s,p-n}^{(p)} + \sum_{u=1}^{p-n} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} \right] \\ &+ \sum_{s=n}^{p-1} \left[\frac{\bar{\zeta}^s [p]_{q(p)}!}{[s]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} \varphi_{p-s,p-n}^{(p)} + \sum_{u=1}^{p-s} \frac{\bar{\zeta}^s}{[s]_{q(p)}! [u]_{q(p)}! \sqrt{[n]_{q(p)}!}} [p]_{q(p)}! \varphi_{p-s-u,p-n-u}^{(p)} \right] + \frac{\bar{\zeta}^p}{\sqrt{[p]_{q(p)}!}} a_{p,n} \\ &= \sum_{s=0}^p \frac{\bar{\zeta}^s}{\sqrt{[s]_{q(p)}!}} a_{s,n}. \end{aligned}$$

por (8.25) en la última igualdad. Esto nos dice que

$$W_p \left[T_{\varphi_p}^{(p)} \left(\frac{\bar{\zeta}^n}{\sqrt{[n]_{q(p)}!}} \right) \right]_s = a_{s,n}.$$

Como este cálculo vale para todo p , claramente se establece por la Definición 8.16 que

$$A = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)}. \quad \blacksquare$$

COROLARIO 8.19. *Sea $A : \mathcal{D} \subset F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ un operador diagonal en la base canónica $\phi_m(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \in \mathcal{D}$. Entonces $A = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)}$ con $T_{\varphi_p}^{(p)} : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ sucesión de operadores Toeplitz para Grassmann radiales.*

Demostración. Sea $A : \mathcal{D} \subset F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ un operador diagonal en la base $\phi_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \in \mathcal{D}$, y anotemos

$$A\phi_n(\bar{z}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s,n}}{\sqrt{s!}} \bar{z}^s$$

con $a_{s,n} = 0$ para $s \neq n$. Por el Teorema anterior, existe para cada p un símbolo $\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p)$ tal que $A = \lim_{p \rightarrow \infty} T_{\varphi_p}^{(p)}$ con $T_{\varphi_p}^{(p)} : \mathcal{B}_{AHol}^p \rightarrow \mathcal{B}_{AHol}^p$ sucesión de operadores Toeplitz para Grassmann. Veamos que $\varphi_{i,j}^{(p)} = 0$ para $i \neq j$ si se toman $a_{sn} = 0$ para $s \neq n$. Consideremos -como en (8.25)- símbolos $\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p)$ de la forma $\sum_{i,j=0}^p \varphi_{i,j}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j$ con

$$(8.26) \quad \varphi_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} 0, & \text{si } i, j > p \\ a_{p-i,p-j} \frac{\sqrt{[p-i]_{q(p)}! [p-j]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!}, & \text{si } i = 0 \text{ o } j = 0; i, j \leq p \\ a_{p-i,p-j} \frac{\sqrt{[p-i]_{q(p)}! [p-j]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!} - \sum_{u=1}^{\min(i,j)} \frac{\varphi_{i-u,j-u}^{(p)}}{[u]_{q(p)}!}, & \text{si } i, j \neq 0 \text{ y } i, j \leq p \end{cases}$$

Comencemos demostrando por inducción sobre i que para $j > i$ y $a_{s,n} = 0$ para $s \neq n$, $\varphi_{i,j}^{(p)} = 0$.

- Caso $i = 0$. Si $i = 0$ y $j > p$ por el primer caso en (8.26) se tiene que $\varphi_{i,j}^{(p)} = 0$.

Si $i = 0$ y $0 < j < p$, y como $a_{p,p-j} = 0$

$$\varphi_{0,j}^{(p)} = a_{p,p-j} \frac{\sqrt{[p]_{q(p)}! [p-j]_{q(p)}!}}{[p]_{q(p)}!} = 0.$$

- Caso $i < k + 1$ (hipótesis inductiva). Si $i < k + 1$ fijo no nulo, $j > i$ y $a_{s,n} = 0$ para $s \neq n$, $\varphi_{i,j}^{(p)} = 0$.
- Caso $i = k + 1$. Si $i = k + 1$ fijo no nulo, $j > i = k + 1$ y $a_{s,n} = 0$ para $s \neq n$ tenemos que demostrar que $\varphi_{k+1,j}^{(p)} = 0$.

Si $k \geq p$ tenemos que $\varphi_{i,j}^{(p)} = 0$ por (8.26).

Sea $k < p$. Como $j > k + 1$ tenemos que $j - 1 = j' > k$, entonces

$$\varphi_{k+1-u, j-u}^{(p)} = \varphi_{k-(u-1), j-1-(u-1)}^{(p)} = \varphi_{k-(u-1), j'-(u-1)}^{(p)} =: \varphi_{k-t, j'-t}^{(p)} = 0$$

por hipótesis inductiva para $t = 0, \dots, k$. Entonces como $a_{p-(k+1), p-j} = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1, j}^{(p)} &= - \sum_{v=1}^{k+1} \frac{\varphi_{k+1-v, j-v}^{(p)}}{[v]_{q(p)}!} \\ &= - \sum_{t=0}^k \frac{\varphi_{k-t, (j-1)-t}^{(p)}}{[t+1]_{q(p)}!} \\ &= - \sum_{t=0}^k \frac{\varphi_{k-t, j'-t}^{(p)}}{[t+1]_{q(p)}!} = 0. \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado para $i > j$ que $\varphi_{i, j}^{(p)} = 0$. El caso $j > i$ se demuestra fácilmente cambiando i por j en el caso anterior.

Así, $\varphi_{i, j}^{(p)} = 0$ para $i \neq j$ y $\varphi_p(\theta_p, \bar{\theta}_p) = \sum_{i, j=0}^p \varphi_{i, i}^{(p)} \theta_p^i \bar{\theta}_p^j$ resulta un símbolo para Grassmann radial. ■

Funciones de varias variables para Grassmann

En este capítulo retomamos el tratamiento de sistemas q -bosónicos con varios grados de libertad, presentado en la sección 1 del capítulo 6. Mostraremos que nuestro tratamiento de estados coherentes, y en particular la prescripción de orden anti-Wick en la forma sesquilineal (7.31), permite construir sin dificultades un núcleo reproductivo (o una resolución de la identidad). Como aplicación, derivamos una fórmula de traza de operadores útil en Mecánica Estadística.

1. Estados coherentes para sistemas q -bosónicos con varios grados de libertad

Para un sistema con L grados de libertad q -bosónicos p -nilpotentes independientes $a_i, a_i^\dagger$, satisfaciendo las relaciones de conmutación [Shabanov 1993] (6.1, 6.2, 6.9), el espacio de Fock es simplemente $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^L \mathcal{H}_i$, donde cada $\mathcal{H}_i$ es una réplica del espacio discutido en los capítulos anteriores.

Los estados coherentes en este sistema se construyen como producto directo de los estados coherentes para un modo simple. Formalmente, se introducen L variables para Grassmann θ_i asociadas a cada modo $i = 1, \dots, L$. Como los operadores para distintos modos conmutan, proponemos naturalmente que las correspondientes variables para Grassmann conmutan, es decir que para $i \neq j$

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \theta_i \theta_j &= \theta_j \theta_i, \\ \theta_i \bar{\theta}_j &= \bar{\theta}_j \theta_i. \end{aligned}$$

Debemos notar que esta prescripción es distinta a la dada en [ElBaz 2010], y es consistente con nuestro tratamiento de cada grado de libertad, ec.(6.2).

Luego definimos el álgebra para L modos para Grassman como el cociente entre el álgebra libre de polinomios en L indeterminadas complejas y el ideal que expresa la nilpotencia de cada variable y las distintas relaciones de conmutación,

$$pG(p+1, \alpha)^L = \mathbb{C}[\theta_1, \bar{\theta}_1, \dots, \theta_L, \bar{\theta}_L] / \langle \theta_i^{p+1}, \bar{\theta}_i^{p+1}, \theta_i \bar{\theta}_i - \alpha^{-1} \bar{\theta}_i \theta_i, \theta_i \theta_j - \theta_j \theta_i \rangle$$

(donde por facilidad de lectura obviamos el recorrido de los índices i, j). Los elementos de $pG(p+1, \alpha)^L$ se interpretan como funciones de varias variables paraGrassmann, que tienen coeficientes únicos cuando se escriben en orden anti-normal

$$(9.2) \quad f(\theta, \bar{\theta}) = \sum_{\{n_i\}\{n'_j\}} f_{\{n_i\}\{n'_j\}} \theta_L^{n_L} \cdots \theta_1^{n_1} \bar{\theta}_L^{n'_L} \cdots \bar{\theta}_1^{n'_1},$$

donde anotamos $\{n_i\} = \{n_1, \dots, n_L\}$. Por orden anti-normal entendemos que cada θ_i debe estar a la izquierda de cada correspondiente $\bar{\theta}_i$; si bien variables con índices distintos conmutan, adoptaremos el orden anti-normal completo de variables paraGrassmann, con todas las variables θ_i a la izquierda y con índices decrecientes. La prescripción de orden anti-normal para varias variables consiste en mover cada factor θ_i a la derecha $\bar{\theta}_i$, hasta lograr el orden anti-normal, *sin usar las relaciones de conmutación*. Esta operación será indicada con la misma notación : : que en los capítulos anteriores.

Los estados coherentes serán elementos del producto directo de módulos $\mathcal{K}^L = \mathcal{K}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{K}_L$. Denotando $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_L\}$ a la L -upla ordenada de variables paraGrassmann, definimos los estados coherentes

$$(9.3) \quad |\theta\rangle = |\theta_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\theta_L\rangle.$$

La integración se define iterativamente. Para las funciones dadas en (9.2), las integrales se escriben

$$\begin{aligned} \int d\theta f(\theta, \bar{\theta}) d\bar{\theta} &= \sum_{\{n_i\}\{n'_j\}} f_{\{n_i\}\{n'_j\}} \int d\theta_1 \cdots d\theta_L \theta_L^{n_L} \cdots \theta_1^{n_1} \bar{\theta}_L^{n'_L} \cdots \bar{\theta}_1^{n'_1} d\bar{\theta}_1 \cdots d\bar{\theta}_L \\ &:= \sum_{\{n_i\}\{n'_j\}} f_{\{n_i\}\{n'_j\}} \int d\theta_L \theta_L^{n_L} \cdots \int d\theta_1 \theta_1^{n_1} \int \bar{\theta}_L^{n'_L} d\bar{\theta}_L \cdots \int \bar{\theta}_1^{n'_1} d\bar{\theta}_1. \end{aligned}$$

Como regla práctica, el resultado es no nulo sólo para los términos con $n_1 = n'_1 = \cdots = n_L = n'_L = p$.

La resolución de identidad en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_L$ se puede escribir como

$$(9.4) \quad \int d\theta d\bar{\theta} : |\theta\rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \langle \theta| := I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

tomando como función de peso el producto de los pesos para cada variable,

$$\begin{aligned} \mu(\theta, \bar{\theta}) &= : e_q^{\theta_1 \bar{\theta}_1} : \cdots : e_q^{\theta_L \bar{\theta}_L} : \\ &= : e_q^{\bar{\theta}_1 \theta_1} \cdots e_q^{\bar{\theta}_L \theta_L} : \end{aligned}$$

A partir de la resolución de la identidad es simple generalizar, para el caso de varias variables, los resultados sobre núcleo reproductivo dados en [Sontz 2013] para una variable paraGrassmann. Usando la función de peso (9.5) y la prescripción de orden normal se define una forma sesquilineal en $pG(p+1, \alpha)^L$ mediante

$$(9.5) \quad (f(\theta, \bar{\theta}), g(\theta, \bar{\theta}))_{pG} = \int d\theta d\bar{\theta} : f(\theta, \bar{\theta})^* \mu(\theta, \bar{\theta}) g(\theta, \bar{\theta}) :$$

Esta forma sesquilineal define un producto interno en el subespacio de funciones holomorfas (B_{Hol}^L), en el subespacio de funciones antiholomorfas (B_{AHol}^L), y en su suma.

La función

$$(9.6) \quad K_\theta(\bar{\zeta}) := : e_q^{\sum_{i=0}^L \theta_i \bar{\zeta}_i} :$$

juega el rol de núcleo reproductivo en el subespacio de funciones antiholomorfas (B_{AHol}^L), verificando para cualquier función de la forma $f(\bar{\zeta}) = \sum_{\{n\}} f_{\{n\}} \bar{\theta}_L^{n_L} \cdots \bar{\theta}_1^{n_1}$ la fórmula reproductiva

$$(9.7) \quad f(\bar{\theta}) = (K_\theta(\bar{\zeta}), f(\bar{\zeta}))_{pG}.$$

La misma función permite construir una proyección $P_{AHol}^L : pG(p+1, \alpha)^L \rightarrow B_{AHol}^L$, mediante la expresión

$$(9.8) \quad P_{AHol}^L(f)(\bar{\theta}) = (K_\theta(\bar{\zeta}), f(\bar{\zeta}))_{pG}$$

Cabe señalar que los resultados descriptos son una simple generalización del caso de una variable porque hemos definido la forma sesquilineal (9.5) con el integrando bajo la prescripción de orden normal, a diferencia de otros trabajos ya citados. Para mostrar que nuestro enfoque no es una sobre-simplificación, sino que es capaz de retener las características esperadas de un sistema de partículas cuánticas con estadística de exclusión generalizada, presentamos en la secciones siguientes la construcción de una fórmula de traza de operadores y su aplicación a la termodinámica de un sistema de q -bosones nilpotentes.

2. Fórmula de traza

Dado un operador $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, podemos construir su traza como integral sobre variables paraGrassmann utilizando estados coherentes. Esta construcción, estándar en sistemas bosónicos y fermiónicos, no presenta dificultad en nuestro enfoque.

En el caso de un único modo, digamos i ,

$$\begin{aligned}
 Tr(\mathcal{A}) &= \sum_{n_i=0}^p \langle n_i | \mathcal{A} | n_i \rangle \\
 &= \sum_{n_i=0}^p \int d\theta_i \langle n_i | \mathcal{A} | \theta_i \rangle \mu_i(\theta_i, \bar{\theta}_i) (\theta_i | n_i \rangle d\bar{\theta}_i \\
 &= \int d\theta_i : \mu_i(\theta_i, \bar{\theta}_i) \sum_{n_i=0}^p (\theta_i | n_i \rangle \langle n_i | \mathcal{A} | \theta_i) : d\bar{\theta}_i \\
 (9.9) \quad &= \int d\theta_i : \mu_i(\theta_i, \bar{\theta}_i) (\theta_i | \mathcal{A} | \theta_i) : d\bar{\theta}_i,
 \end{aligned}$$

donde se usó la identidad (9.4) y se reordenaron los factores según la prescripción de orden antinormal.

El caso de múltiples modos, se trata de la misma manera, usando la resolución de la identidad (9.4) y las relaciones de conmutación (9.1). Comenzamos escribiendo la traza en la base ortonormal canónica $|\{n_i\}\rangle = |n_1\rangle \otimes \cdots \otimes |n_L\rangle$,

$$\begin{aligned}
 Tr(\mathcal{A}) &= \sum_{\{n_i\}} \langle \{n_i\} | \mathcal{A} | \{n_i\} \rangle \\
 &= \sum_{\{n_i\}} \int d\theta \langle \{n_i\} | \mathcal{A} | \theta \rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) (\theta | \{n_i\} \rangle d\bar{\theta} \\
 &= \int d\theta : \sum_{\{n_i\}} (\theta | \{n_i\} \rangle \mu(\theta, \bar{\theta}) \langle \{n_i\} | \mathcal{A} | \theta) : d\bar{\theta} \\
 (9.10) \quad &= \int d\theta : \mu(\theta, \bar{\theta}) (\theta | \mathcal{A} | \theta) : d\bar{\theta}.
 \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente no hay complicaciones en el manejo de estados de múltiples modos en términos de variables paraGrassmann independientes.

3. Termodinámica en ejemplos simples

Como aplicación simple podemos utilizar el cálculo de la traza para obtener resultados sobre la termodinámica de un sistema de q -bosones nilpotentes con Hamiltoniano H a temperatura $k_B T = 1/\beta$ (donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura). Estamos interesados en calcular la función de partición termodinámica definida como $\mathcal{Z}(\beta) = Tr(e^{-\beta H})$.

Entonces, es necesario evaluar los elementos de matriz

$$(\theta | e^{-\beta H} | \theta)$$

una tarea que proporciona resultados cerrados sólo para algunos Hamiltonianos simples.

FIGURA 1. Energía media. Las curvas más altas corresponden a mayor valor de p .

3.1. Un q -bosón en un baño térmico. Como ejemplo particular consideremos el Hamiltoniano de un q -bosón en un baño térmico con Hamiltoniano $H_1 = \epsilon N_1$, donde N_1 es el operador número introducido en las relaciones de conmutación (6.1). Su espectro está dado por $\epsilon_{n_1} = n_1 \epsilon$, $n_1 = 0, \dots, p$. Calcularemos la función de partición canónica para una partícula,

$$\mathcal{Z}_1(\beta) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H_1} \right).$$

Para calcular $\langle \theta_1 | e^{-\beta H_1} | \theta_1 \rangle$ es conveniente desarrollar los estados coherentes $|\theta_1\rangle$ por (6.10). Así,

$$(9.11) \quad \langle \theta_1 | e^{-\beta H_1} | \theta_1 \rangle = \sum_{n_1=0}^p \frac{\bar{\theta}_1^{n_1} \theta_1^{n_1}}{[n_1]!} e^{-\beta \epsilon n_1}$$

Usando las fórmulas de integración (9.9), tenemos

$$\mathcal{Z}_1(\beta) = \sum_{n_1=0}^p e^{-\beta \epsilon n_1} = \frac{1 - e^{-(p+1)\beta \epsilon}}{1 - e^{-\beta \epsilon}}$$

que coincide con la traza calculada en la base canónica $|n_i\rangle$.

La energía media se calcula

$$\bar{E}_1(\beta) = -\frac{\partial \log \mathcal{Z}_1(\beta)}{\partial \beta} = \left(\frac{1}{e^{\beta \epsilon} - 1} - \frac{(p+1)}{e^{(p+1)\beta \epsilon} - 1} \right) \epsilon$$

y el calor específico se obtiene de su derivada como

$$C(\beta) = -\beta^2 \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \beta} = \frac{1}{4} (\beta \epsilon)^2 \left(\frac{1}{\sinh^2(\beta \epsilon / 2)} - \frac{(p+1)^2}{\sinh^2((p+1)\beta \epsilon / 2)} \right).$$

Estas funciones se muestran en las figuras 1, 2 para valores de p finitos junto con el caso límite de $p \rightarrow \infty$ para hacer explícito que este comportamiento de $p+1$ -nilpotencia interpola entre el caso bosónico y el caso fermiónico.

FIGURA 2. Calor específico. Las curvas más altas corresponden a mayor valor de p . Tener en cuenta que, para k finito, C tiene un máximo y decae a cero cuando se satura la energía media. Para bosones estándar esto puede no ocurrir (la no saturación es posible).

Un análisis similar puede hacerse para el oscilador q -bosónico con Hamiltoniano

$$(9.12) \quad H'_1 = \epsilon a_1^\dagger a_1$$

cuyo espectro está dado por $\epsilon_{n_1} = [n_1]_q \epsilon$ con $n_1 = 0, \dots, p$. Así obtenemos que

$$(9.13) \quad (\theta_1 | e^{-\beta H'_1} | \theta_1) = \sum_{n_1=0}^p \frac{\bar{\theta}_1^{-n_1} \theta_1^{n_1}}{[n_1]!} e^{-\beta \epsilon [n_1]_q}$$

dando como función de partición

$$Z'_1(\beta) = \sum_{n_1=0}^p e^{-\epsilon \beta [n_1]_q}.$$

3.2. Sistemas de q -bosones. En general, sistemas de bosones o de fermiones de múltiples grados de libertad acoplados mediante Hamiltonianos cuadráticos pueden ser “desacoplados”, es decir se puede diagonalizar la forma cuadrática del Hamiltoniano mediante una transformación lineal conservando el carácter bosónico o fermiónico de los operadores de creación y destrucción transformados. Las relaciones de conmutación q -bosónicas (6.1) no soportan tales transformaciones lineales, por lo cual sólo podemos tratar aquí sistemas desacoplados. Eventualmente, este ejemplo podría describir un sistema de bosones o fermiones estándar, acoplados de alguna manera inusual, que ante una transformación también inusual arrojará un Hamiltoniano desacoplado en términos de operadores con características q -bosónicas.

Consideremos un sistema de L q-bosones $a_j, a_j^\dagger$ desacoplados, con Hamiltoniano

$$H = \sum_{j=1}^L \epsilon_j N_j.$$

La función de partición gran canónica a temperatura finita $k_B T = 1/\beta$ está dada por

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta(H-\mu N)}),$$

donde $N = \sum_{j=1}^L N_j$ es el operador número. Necesitamos calcular

$$(\theta | e^{-\beta(H-\mu N)} | \theta) = (\theta | \prod_{j=1}^m e^{-\beta(\epsilon_j - \mu) N_j} | \theta)$$

el cual simplemente se factoriza para dar

$$\prod_{j=1}^L (\theta_j | e^{-\beta(\epsilon_j - \mu) N_j} | \theta_j) = \sum_{[n]} \frac{\bar{\theta}_1^{n_1} \theta_1^{n_1}}{[n_1]!} e^{-\beta(\epsilon_1 - \mu) n_1} \dots \frac{\bar{\theta}_L^{n_L} \theta_L^{n_L}}{[n_L]!} e^{-\beta(\epsilon_L - \mu) n_L}.$$

La traza se calcula según (9.10)

$$\int d\theta : \mu(\theta, \bar{\theta}) \prod_{j=1}^L (\theta_j | e^{-\beta(\epsilon_j - \mu) N_j} | \theta_j) : d\bar{\theta} = \prod_{j=1}^L \int d\theta_j : \mu_j(\theta_j, \bar{\theta}_j) \sum_{n_j} \frac{\bar{\theta}_j^{n_j} \theta_j^{n_j}}{[n_j]!} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu) n_j} : d\bar{\theta}$$

dando

$$\mathcal{Z}(\beta) = \prod_{j=1}^L \frac{1 - e^{-(p+1)\beta(\epsilon_j - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}}$$

Una cantidad relevante para calcular aquí es el promedio del número de ocupación de los niveles ϵ_j , que da

$$n_j(\beta, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1} - \frac{(p+1)}{e^{(p+1)\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1}$$

Para p finito está bien definido aún para $\epsilon_j = \mu$ (singularidad evitable), mientras que el límite $p \rightarrow \infty$ es finito solo para $\epsilon_j > \mu$ (el comportamiento correcto para bosones estándar). En la figura 3, se puede ver que el promedio de ocupación en $\epsilon_j = \mu$ es $p/2$ (idéntico a fermiones, para $p = 1$) y diverge para $p \rightarrow \infty$ (condensación de Bose-Einstein). Para $p = 2$ el resultado para $n(\cdot)$ está muy cerca de la distribución parafermiónica $\mathbb{Z}_3$ y para partículas con $g = 1/3$ con estadística de exclusión de Haldane ilustrada en [Schoutens 1997].

Notemos nuevamente que el comportamiento $p+1$ -nilpotente interpola entre los resultados estándar de fermiones y bosones.

FIGURA 3. Número de ocupación medio de los distintos niveles de energía, calculado a temperaturas bajas.

Conclusiones.

En la primera parte de este trabajo hemos discutido el dominio de los operadores Toeplitz con símbolo radial en el espacio de Segal Bargmann de funciones anti-analíticas de variable compleja. A través de la definición 2.18 de la clase de símbolos radiales $\mathcal{P}$, fue posible corregir enunciados erróneos en la literatura [Grudsky 2002], estableciendo condiciones bajo las cuales un operador Toeplitz es unitariamente equivalente a un operador diagonal en el espacio $l_2(\mathbb{C})$. Nuestro aporte se puede resumir en el Teorema 2.9.

En la segunda parte, fundamentada por la descripción del álgebra de Grassmann Λ_2 , el cálculo en ella, y los estados coherentes asociados, definimos los operadores Toeplitz y anti Wick sobre funciones de Λ_2 estudiando sus características en consistencia con el cálculo sobre estas variables. Así por ejemplo estableciendo una relación de orden en Λ_2 constatamos la validez de 5.4, propiedad reconocida de los operadores Toeplitz sobre variable compleja. Luego, analizamos el caso particular de los operadores Toeplitz Grassmann diagonales y caracterizamos los símbolos que denominamos radiales por semejanza al caso complejo. Con estos elementos, homologamos los resultados obtenidos en la primera parte, ahora para el caso de funciones de variable Grassmann. Concretamente, demostramos el Teorema 5.7, adaptación a $\mathcal{B}_{Ahol} \subset \Lambda_2$ del antes mencionado Teorema 2.9, para luego ser aplicado al problema de la composición de operadores Toeplitz diagonales. Cabe destacar, que si bien trabajar en dimensión finita elimina todo problema de convergencia, es la anticonmutación y la nilpotencia de las variables Grassmann lo que determina las consideraciones de esta segunda parte.

Los aportes de la tercer y última parte de este trabajo, pueden ser enumerados desde distintos ángulos. En primer lugar y desde la perspectiva de la mecánica cuántica, vimos que la construcción de los estados coherentes requiere la introducción de las variables para-Grassmann

en $pG_{p+1,\alpha}$. Con esta necesidad, y desde una visión algebraica, resolvimos el problema de la conjugación de variables para-Grassmann complejas (Sección 2). Presentamos una construcción, en línea con recientes propuestas [ElBaz 2010, Sontz 2013], que incorpora por un lado las reglas de conmutación de las variables para-Grassmann las cuales son independientes del orden de nilpotencia y por otro lado una prescripción de orden normal para la integración Berezin generalizada. Esto permitió, desde el marco del análisis funcional, establecer un cálculo simbólico para-Grassmann consistente, incluyendo como caso particular el cálculo simbólico Grassmann presentado en la segunda parte.

Luego, con el cálculo paraGrassmann establecido, definimos los operadores Toeplitz y anti Wick en $\mathcal{B}_{AHol}^p$, demostramos la equivalencia entre los operadores Toeplitz paraGrassmann con símbolo radial y un operador multiplicación en el Teorema 8.8 que generaliza al caso paraGrassmann el Teorema 5.7.

Como se puede observar hasta aquí, el tratamiento de las funciones de variables compleja, así como los elementos del álgebra de Grassmann y paraGrassmann, pueden manejarse -salvo consideraciones- en paralelo. Es por esto, que de forma natural establecemos en la Sección 3, una relación que vincula el espacio $\mathcal{B}_{AHol}^p$ y el espacio $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$, presentando una noción de límite cuando $p \rightarrow \infty$ que permite relacionar funciones de variable paraGrassmann p -nilpotentes con funciones de variable compleja.

La incorporación de esta definición de límite encuentra su motivación en el hecho que, cuando $p \rightarrow \infty$, las relaciones de conmutación entre operadores de creación y destrucción q -bosónicos p -nilpotentes (6.1) se reducen a las relaciones de conmutación bosónicas estándar (1.9). En consecuencia, es posible relacionar los autovectores $|\theta_p\rangle$ del operador de destrucción q -bosónico, con los autovectores $|z\rangle$ del operador de destrucción bosónico, y de forma natural los autovalores θ_p con los autovalores z . Así a través de la Definición 8.11 formalizamos estas relaciones en el marco de funciones antiholomorfas de las correspondientes variables.

Esta noción de límite aplicada a operadores nos permite demostrar el Teorema 8.18 que enuncia la posibilidad de representar como límite de operadores Toeplitz paraGrassmann cualquier operador $A : \mathcal{D} \subset F^2(\mathbb{C}, d\mu) \rightarrow F^2(\mathbb{C}, d\mu)$ que verifique $\phi_n(\bar{z}) = \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!}} \in \mathcal{D}$. De este Teorema se deduce el Corolario 8.19, que como aplicación particular nos permite interpretar desde otro punto de vista el problema de la composición de operadores Toeplitz radiales en $F^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

Volviendo al terreno de la Mecánica Cuántica, y con el cálculo paraGrassmann como herramienta, definimos los estados coherentes paraGrassmann para múltiples variables. Con cálculo simbólico aquí establecido, es posible manejar la forma estándar de la resolución de la identidad como una generalización de la integral de Berezin sobre proyectores de estados coherentes. Esto nos permitió, como aplicación relevante, encontrar fórmulas de traza de operadores, que se utilizaron para estudiar la termodinámica de Hamiltonianos simples, la distribución de q -bosones $p + 1$ -nilpotentes en sistemas de múltiples partículas. Esta estadística de exclusión podría encontrar aplicación en el estudio de nuevas fases en sistemas de electrones fuertemente correlacionados, donde diferentes tipos de “nuevas” estadísticas encuentran realización [Haldane 1991],[Schoutens 1997, Jaksch, Laughlin 1983].

Bibliografía

- [Auerbach 1988] Auerbach A. y Arovas D. *Schwinger Bosons Approaches to Quantum Antiferromagnetism*, arXiv:0809.4836, Trieste Summer School 2007, in Highly Frustrated Magnetism, C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila (Eds.) 1988 Phys. Rev. Lett. 61 617.
- [Aronszajn 1950] Aronszajn N. *Theory of Reproducing Kernels*. Transactions of the American Mathematical Society 68 (3): 337-404.(1950).
- [Bargmann 1961] Bargmann V., *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 187-214.
- [Barut 1971] Barut O. y Girardello L. *New "coherent" states associated with non-compact groups* Comm. Math. Phys. Volume 21, Number 1 (1971), 41-55.
- [Bates 1997] Bates S. and Weinstein A., *Lectures on the geometry of quantization*, Providence, USA: AMS (1997) 137
- [Bauer 2011] W. Bauer y T. Le *Algebraic properties and the finite rank problem for Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space* J. Funct Analysis 261, 2617-2640 (2011).
- [Baulieu 1991] Baulieu L., Floratos E., *Path integral on the quantum plane*, Physics Letters B258, 171 (1991).
- [Berger 1986] Berger C.A. y Coburn L. A, *A symbol calculus for Toeplitz operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83**, 3072 (1986).
- [Berezin 1966] Berezin F.A., *Methods of second quantization*, Academic Press (1966).
- [Berezin 1971] Berezin F.A., *Wick and anti-Wick operator symbols*, Math. USSR Sb. **15**, 577 (1971).
- [Berezin 1972] Berezin F.A., *Covariant and contravariant symbols of operators*, Math. USSR Izv. **6**, 1117 (1972).
- [Berezin 1974] Berezin F.A., *Quantization*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **38**, 1116 (1974), English translation Math. USSR Izv. **8**, 1109 (1974).
- [Berezin 1991] Berezin F.A., *Superanalysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [Berezin2 1991] Berezin F.A. y Shubin M.A., *The Schrödinger Equation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [Bergman 1950] Bergman S., *The kernel function and conformal mapping*, Am. Math. Soc., Providence, 1950.
- [Biedenharn 1989] Biedenharn L., *The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators*, Journal of Physics A: Mathematical and General 22, L873 (1989).
- [Bordemann 1994] Bordemann M., Meinrenken E., Schlichenmaier M., *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $gl(N)$, $N \rightarrow \infty$ limits*, Commun. Math. Phys. 165 281 (1994).
- [Brown 1963] Brown A., Halmos P.R., *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math 213, 89-102 (1963).

- [Buonsante 2008] P. Buonsante y V. Penna *Some remarks on the coherent-state variational approach to nonlinear boson models* J. Phys. A 41, 175301 (2008) arXiv: 0806.11812008 J. Phys. A: Math. Theor. 41 175301 15.
- [Cabra 1997] Cabra D. C., Dobry A., Greco A. y Rossini G. L., *On the Path-integral formulation for spin systems* J. Phys. A 30, 2699 (1997).
- [Cabra 2006] Cabra D.C., Moreno E.F., Tanasa A., *Para-Grassman variables and coherent-states*, SIGMA 2, 087 (2006).
- [Cabra 2012] Cabra D.C, Moreno E., Ramírez R.A, Rossini G.L *Q-boson coherent states and para-Grassmann variables for multi-particle states*. J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 485304
- [Cameron 1960] R.H. Cameron, *A Family of Integrals Serving to Connect the Wiener and Feynman Integrals*, Journal of Math. and Phys. 39, 126-140 (1960); *The Ilstow and Feynman Integrals*, J. Analyse Math. 10, 287-361 (1962/63).
- [Casalbuoni 1998] R. Casalbuoni. *Notes on Algebras Derivations and Integrals*. Dipartimento di Fisica Università di Firenze Sezione di Firenze, de *Algebras, derivations and integrals*, Int. Journ. of Mod. Phys., 13 (1998) 5459, physics/9803024.
- [Chaichian 1993] Chaichian M., Gonzalez Felipe R., Montonen C., *Statistics of q-oscillators, quons and relations to fractional statistics*, Journal of Physics A: Mathematical and General 26, 4017 (1993).
- [Coburn 2001] Coburn L.A., *On the Berezin -Toeplitz Calculus*, Proceedings of the AMS **129**, 3331 (2001).
- [Aguiar 2006] de Aguiar M.A.M. y dos Santos L.C. *Coherent State Path Integrals in the Weyl Representation* J. Phys. A39 13465 (2006).
- [Cugliandolo 2004] Cugliandolo L., Lozano G.S., Moreno E.F., Schaposnik F.A., *A note on Gaussian integrals over paraGrassmann variables*, Internat. J. Mod. Phys. A 19, 1705 (2004).
- [Daubechies 1982] Daubechies I. y Klauder J.R. *Measures for path integrals*, Phys. Rev. Lett., 48, pp. 117-120, 1982.
- [Daubechies2 1982] Daubechies I. y Klauder J.R. , *Constructing measures for path integrals*, J. Math. Phys., 23 (10), pp. 1806-1822, 1982.
- [Daubechies 1984] Daubechies I. y Klauder J.R., *Quantum mechanical path integrals with Wiener measures for all polynomial Hamiltonians*, Phys. Rev. Lett., 52, pp. 1161-1164, 1984
- [Daubechies 1985] Daubechies I. y Klauder J.R., *Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. II*, J. Math. Phys., 26 (9), pp. 2239-2256, 1985.
- [Daubechies 1987] Daubechies I, Klauder J.R. y Paul T., *Wiener Measures for Path Integrals with Affine Kinematic Variables*, J. Math. Phys. 28, 85-102 (1987).
- [DeWitt 1985] DeWitt B., *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [ElBaz 2010] El Baz M., Fresneda R., Gazeau J.P., Hassouni Y., *Coherent state quantization of paraGrassmann algebras*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 43, 385202 (2010); Erratum (2011)
- [Filipov 1993a] Filippov A.T., Isaev A.P., Kurdikov A.B., *ParaGrassmann analysis and quantum groups*, Modern Phys. Lett. A 7, 2129 (1992); Filippov A.T., Isaev A.P., Kurdikov A.B., *ParaGrassmann differential calculus*, Theor. Math. Phys. 94, 150 (1993).

- [Filipov 1996] Filippov A.T., Isaev A.P., Kurdikov A.B., *paraGrassmann Algebras, Discrete Systems and Quantum Groups*, Problems in Modern Theoretical Physics, dedicated to the 60th anniversary of the birthday of A.T.Filippov Dubna 96-212 , 1996
- [Filipov 1993b] Filippov A.T., Kurdikov, A.B., *Paragrassmann algebras with many variables*, arxiv preprint hep-th-9312081.
- [Floratos 1991] Floratos E., *The many-body problem for q-oscillators*, Journal of Physics A: Mathematical and General 24, 4739 (1991).
- [Folland 1989] G. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Annals of Mathematics Studies **122**, Princeton University Press, New Jersey, 1989.
- [Gentile 1940] Gentile G., *Osservazioni sopra le statistiche intermedie* Nuovo Cimento 17, 493 (1940).
- [Glauber 1963] Glauber R.J. (1963) Photons correlations, Phys. Rev. Lett., 10, 84. 6 Glauber, R.J. (1963) The quantum theory of optical coherence, Phys. Rev., 130, 2529.
- [Glauber2 1963] Glauber, R.J. *Coherent and incoherent states of radiation field*, Phys. Rev., 131, 2766.(1963)
- [Green 1953] Green H S 1953 Physical Review 90 270
- [Grudsky 2002] S. Grudsky, N. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Fock space: Radial component effects*, Integral Equations and Operator Theory **44**, 10-37 (2002).
- [Haldane 1991] Haldane F.D.M., *"Fractional statistics" in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle*, Physical Review Letters 67, 937 (1991).
- [Hall] Hall B. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction* Springer (2004)
- [Hedenmalm 2000] Hedenmalm H. , Korenblum B., Zhu K., *Theory of Bergman Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Hurt 1983] Hurt N., *Geometric quantization in action*. Reidel, Dordrecht, 1983.
- [Jaksch] R. Palmer y D.Jaksch *High-Field Fractional Quantum Hall Effect in Optical Lattices* Phys. Rev. Lett. 96 180407
- [Kamefuchi 1980] Kamefuchi S. y Ohnuki Y., *Generalized Grassmann algebras with applications to Fermi systems*. Journal of Mathematical Physics vol. 21 issue 4 April 1980. p. 601-608
- [Kashiwa 1978] Kashiwa T y Ohnuki Y, ., *Coherent states of Fermi operators and the path integral*, Progress of Theoretical Physics 60, 548 (1978).
- [Kirillov 1962] Kirillov A. A., *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surv. 17, N. 4, 53 - 104, 1962.
- [Klauder 2003] Klauder J. R., *The Feynman path integral: An historical slice*, (2003), arXiv:quant-ph/0303034v1.
- [Klauder 1960] Klauder, J.R. *The action option and the Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers*, Ann. Phys., 11, 123.(1960)
- [Klauder 1963] Klauder, J.R. *Continuous Representation theory I. Postulates of continuous-representation theory*, J. Math. Phys., 4, 1055. (1963)
- [Klauder2 1963] Klauder, J.R. *Continuous Representation theory II. Generalized relation between quantum and classical dynamics*, J. Math. Phys., 4, 1058. (1963)

- [Knapp 2005] Knapp A. *Basic Real Analysis and Advanced Real Analysis* Birkhäuser (2005), XLVIII, 1176 p. (2-volúmenes).
- [Laughlin 1983] R. Laughlin R B 1983 Phys. Rev. Lett. 50 1395
- [Leinaas 1977] Leinaas J. M. y Myrheim J. (1977) Nuovo Cimento 37B 1; Wilczek F 1982 Phys. Rev. Lett. 49 957
- [Loaiza 2010] Loaiza M., Sánchez-Nungaray A., *On C^* -Algebras of Super Toeplitz Operators with Radial Symbols*, Operator Theory: Advances and Applications **210**, 175 (2010).
- [Macfarlane 1989] A. Macfarlane. *On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$* , Journal of Physics A: Mathematical and General **22**, 4581 (1989).
- [Majid 1994] Majid S., Rodríguez-Plaza M. J., *Random walk and the heat equation on superspace and anyspace*, Journal of Mathematical Physics **35**, 3753 (1994).
- [Nieto 1979] Nieto M. M., Simmons L. M., *Coherent States For General Potentials. 3. Nonconfining One-dimensional Examples* Phys. Rev. D **20**, 1321, and ibidem 1342 (1979).
- [Pellizola 1992] A. Pellizola, C. Topi Generalized Coherent states for dynamical superalgebras (Turin Polytechnic). PRINT-92-0405 (TURIN-POLY), (Received Sep 1992). 41pp.
- [Perelomov 1986] Perelomov A., *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Perelomov 1995] Perelomov A. *On the Completeness of some Subsystems of q -deformed Coherent States*. Vienna, Preprint ESI 242 (1995).
- [Radcliffe 1971] Radcliffe J.M., *Some properties of spin coherent states*, J. Phys. A, **4**, 313.(1971)
- [Ramírez 2012] Ramírez R.A, Rossini G.L, Sanmartino M., *A discussion on the natural domain of radial Toeplitz operators in Segal-Bargmann space*. 2012 IJPAM **76** 79
- [de Trautenberg 1997] Rausch de Trautenberg M. *Habilitation Thesis Université Louis Pasteur* (arXiv:hep-th/9802141) (in French)(1997)
- [Rogers 2007] Rogers A., *Supermanifolds: Theory and Applications* (World Scientific, 2007) ISBN 981-02-1228-3
- [Rudin 1966] Rudin W. *Real and complex analysis* Mc. Graw-Hill Book company, New York (1966)
- [Schoutens 1997] Schoutens K. *Phys. Exclusion Statistics in Conformal Field Theory Spectra*. Physical Review Letters, **79**, 2608-2611 (1997)
- [Schrödinger 1926] Schrödinger E. *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik*, Naturwiss. **14**, 664.(1926)
- [Shabanov 1993] Shabanov S., *Quantum and classical mechanics of q -deformed systems*, Journal of Physics A: Mathematical and General **26**, 2583 (1993).
- [Simms 1976] Simms D.J., Woodhouse N.M.J, *Lectures on geometric quantization*, Lecture Notes in Physics, vol. 53, Springer, New York, 1976.
- [Sontz 2013] Sontz, S.B., *Paragrassmann Algebras are Quantum Spaces having Reproducing Kernels and Toeplitz Operators*, Geometric Methods in Physics Trends in Mathematics 2013, pp 47-63

- [Sontz2 2012] Sontz, S.B., *Paragrassmann Algebras are Quantum Spaces having Reproducing Kernels and Toeplitz Operators, part II* .(2012)
- [Stone 1930] Stone M., *Linear Transformations in Hilbert Space III. Operational Methods and Group Theory* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **16**, 172 (1930).
- [Sudarshan 1963] Sudarshan E.C.G. *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Phys. Rev. Lett., 10, 277. (1963)
- [von Neumann 1931] von Neumann, J. (1931), *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Mathematische Annalen (Springer Berlin / Heidelberg) 104: 570 - 578, doi:10.1007/BF01457956, ISSN 0025-5831