UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

MOMENTO OPTIMO Y REDUCCION OPTIMA EN EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

María Eugenia Garcia

Director: Dr. Hernán Cendra

Co-Directora: Dra. Marcela Zuccalli

2013

Índice general

Introducción

La noción de simetría es parte fundamental de la física. En la misma noción de objeto físico está presente la noción de invariancia por cambio de coordenadas, o en un lenguaje mas físico, la "independencia del observador". Una noción matemática fundamental asociada es la noción de grupo de simetría, por ejemplo, los grupos de rotaciones $SO(3)$, y de traslaciones $\mathbb{R}^3$ en el espacio Euclideano $\mathbb{R}^3$ están directamente relacionados con las leyes fundamentales de conservación del momento angular y el momento lineal. Estas ideas geométricas en mecánica han ido evolucionando desde tiempos antiguos ([**AM78**], [**Arn66**], [**Ham34**], [**Jac66**], [**Lag88**], [**MW01**], [**Poi92**], [**Poi01**], [**MR94**], [**Gol51**], [**JS98**]). Son actualmente un campo en pleno desarrollo tanto desde el punto de vista puramente matemático, en relación por ejemplo con la teoría de invariantes o las representaciones de grupos lineales o acciones de grupos en variedades, como por su conexión con la física, desde partículas a ciencia de materiales o también con la ingeniería como en problemas de control geométrico.

El estudio de la simetría de sistemas es importante conceptualmente, permitiendo por ejemplo en física describir fuerzas de la naturaleza como curvatura de conexiones o también distinguir "variables no físicas" como en la teoría de ligaduras de Dirac.

Muchas veces se usa la simetría de un sistema para eliminar grados de libertad (por ejemplo variables no físicas) definiendo un espacio cociente de dimensión menor, lo cual suele ayudar a la resolución del sistema. Este último proceso se llama en general "reducción por la simetría", y es un campo muy activo en la actualidad ([**MR86**], [**MR94**], [**MMO+07**], [**CMR01**], [**CHMR98**]).

La eliminación de grados de libertad debidos a la simetría por la acción de un grupo mencionada arriba de un modo general puede formalizarse matemáticamente de diversas formas, cada una de las cuales asume hipótesis específicas. La reducción de Marsden-Weinstein se basa en la noción fundamental de momento asociado a la acción de un grupo G en una variedad simpléctica M por simplectomorfismos ([**AM78**]). El momento no siempre existe aunque esta teoría contempla ejemplos fundamentales en mecánica ([**AM78**], [**GS77**], [**Sma70a**], [**Sma70b**], [**GS90**], [**GS80**], [**GS05**]). Se puede ver la historia de la teoría de la reducción en [**MW01**].

En la exposición de Marsden-Weinstein se asumen hipótesis sobre la acción del grupo en la variedad y sobre la variedad misma. Esto es necesario porque se requiere que el cociente de ciertas variedades, como los conjuntos de nivel de la aplicación momento para un valor regular de la misma por un subgrupo de isotropía, sean a su vez variedades. Por otra parte se requiere que los mencionados conjuntos de nivel sean también variedades. Si esto último no se cumple se tiene que recurrir a la teoría de singularidades ([**Sma70a**], [**Sma70b**]).

Aun manteniéndose en el contexto finito dimensional no hay una única definición que generalice la noción de momento en los casos en los que las hipótesis de la exposición usual de la teoría de Marsden-Weinstein no se cumplen. Cabe señalar que estos casos son importantes, dado que hay ejemplos de interés que así lo requieren.

Un avance importante reciente es el trabajo de Ortega y Ratiu, ([**OR02**], [**OR04**]) en el cuál se señalan precisamente las limitaciones de la teoría tradicional y como se pueden estudiar sobre la base de generalizar la noción de momento introduciendo la noción de *momento óptimo*.

La noción de momento óptimo de Ortega-Ratiu, asociado a una acción de Poisson de un grupo sobre una variedad de Poisson dada, no asume ninguna condición sobre esta acción, es decir, existe siempre. Desde el punto de vista de la dinámica de un sistema Hamiltoniano tiene la ventaja de que los conjuntos de nivel del momento óptimo, los cuales son preservados por el flujo de Hamiltonianos invariantes, son menores (en el sentido de la relación de inclusión) que los correspondientes a todas las aplicaciones momento conocidas detalladas en ([**OR04**]). Esto justifica el término "óptimo".

En la literatura existente sobre momento óptimo la condición de que la acción sea propia se requiere para la validéz de resultados importantes, en particular relacionados con la teoría de reducción óptima. El cálculo del momento ópimo en el caso de que la acción sea propia y globalmente hamiltoniana se puede realizar por medio de una formula de gran utilidad práctica (Capítulo 2, Sección 2.2, fórmula 2.11).

Es importante destacar que la validéz de la mencionada formula se puede extender a ciertos casos donde la acción no es propia. En esta tesis se muestran ejemplos donde esto ocurre.

El problema de dos cuerpos en mecánica celeste con un potencial Newtoniano ha sido resuelto desde los tiempos de Newton, y ha sido un ejemplo importante de diversos métodos, por ejemplo, reducción por la simetría, probando que es un sistema integrable. El caso de un potencial no necesariamente Newtoniano ha sido también objeto de interés, tanto en el caso de dos cuerpos como en el caso de n cuerpos. En este último caso los problemas típicos de dinámica son de una gran complejidad y dan lugar a importantes trabajos en la actualidad, tanto por motivos prácticos, por ejemplo diseño de misiones espaciales, como puramente teóricos, como por ejemplo la existencia de órbitas periódicas.

El momento óptimo, da una nueva herramienta para estudiar la dinámica para el problema de dos cuerpos con Hamiltoniano C^∞, simétrico arbitrario donde el grupo de simetría es el grupo Euclideano. En esta tesis se hace un estudio detallado de esta cuestión. En este caso la acción es propia y se puede aplicar la formula mencionada. El estudio detallado de este ejemplo es uno de los resultados de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se describen conceptos básicos sobre diversos temas necesarios para los capítulos que siguen, como nociones de geometría diferencial, simpléctica y de Poisson, teorema de Stefan-Sussmann, acciones de grupos en variedades, aplicación momento, teoría de reducción de Marsden-Weinstein, acciones propias y entornos tubulares. Como referencia básica, este material se halla expuesto en [**MR94**], [**AM78**], [**OR04**] y [**OR02**].

1.1. Notación

1.1.1. Geometría Diferencial.

Sean N y M variedades diferenciables.

La ***derivada de una aplicación diferenciable*** $f : M \to N$ en un punto $m \in M$ se define como la aplicación lineal $T_m f : T_m M \to T_{f(m)} N$ construida de la siguiente manera: para $v \in T_m M$, se elige una curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $c(0) = m$ y vector velocidad asociado $\frac{dc}{dt}|_{t=0} = v$; entonces

$$T_m f.v = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0}.$$

Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son aplicaciones de clase C^k, entonces $Tf : TM \to TN$, $Tg : TN \to TP$ y $g \circ f : M \to P$ son aplicaciones de clase C^k y se verifica la regla de la cadena

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Un ***campo vectorial*** X sobre M es una aplicación $X : TM \to TM$ que asigna un vector $X(m)$ al punto $m \in M$. El espacio vectorial real de campos vectoriales se denota $\mathcal{X}(M)$.

Una ***curva integral*** de X con condición inicial m_0 en $t = 0$ es una aplicación $c : (a, b) \to M$ tal que (a, b) es un intervalo abierto que contiene a 0, $c(0) = m$ y $c'(0) = X(c(t))$, para todo $t \in (a, b)$.

El ***flujo*** de X es la colección de aplicaciones $\varphi_t : M \to M$ tal que $t \mapsto \varphi_t$ es la curva integral de X con condición inicial m. Los teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias garantizan que φ es suave en m y t (donde esté definido) si X lo es. Los flujos tienen la siguiente propiedad: $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función suave, podemos definir en cada punto $T_m f : T_m M \to T_{f(m)} \mathbb{R}$. Identificando a $T_{f(m)} \mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ se tiene una aplicación lineal $df(m) : T_m M \to \mathbb{R}$. Se define df como el ***diferencial de*** f y para $v \in T_m M$, $df(m).v$ es la ***derivada direccional de*** f ***en la dirección de*** v.

En coordenadas, se tiene que

$$df(m).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} v^i,$$

donde φ es una carta en m.

Una k-forma α sobre en una variedad M es una función $\alpha(M) : T_M \times ... \times T_m M (k-veces) \to \mathbb{R}$ que asigna a cada punto $m \in M$ una aplicación k-multilineal antisimétrica sobre el espacio tangente $T_m M$ de M en m. Denotamos $\Omega^k(M)$ el espacio de las k-formas sobre M.

Si $x^1, ..., x^n$ denotan coordenadas en M, entonces $\{\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^n\}$ y $\{dx^1, ..., dx^n\}$ denotan las bases correspondientes a $T_m M$ y la base dual de $T^*_m M$ respectivamente. Para cada $m \in M$, una k-forma puede escribirse

$$\alpha_m(v_1, .., v_k) = \alpha_{i_1 ... i_k}(m) v^{i_1} ... v^{i_k},$$

donde

$$\alpha_{i_1 ... i_k}(m) = \alpha_m \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) \quad \text{y} \quad v_i = v_i^j \partial x^j.$$

Las formas sobre una variedad conforman un álgebra real asociativa con $\wedge$ como multiplicación. Mas aún, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ para α y β k y l-forma respectivamente.

Sea $\varphi : M \to N$ una aplicación C^∞ y α una k-forma sobre N. Se define el ***pull-back*** $\varphi^* \alpha$ de α por φ como la k-forma sobre M dada por

$$\varphi^*_m(v_1, ... v_k) = \alpha_{\varphi(m)}(T_m \varphi.v_1, ..., T_m \varphi.v_k).$$

Si φ es un difeomorfismo, se define el ***push-forward*** φ_* como $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$.

Para aplicaciones φ y ψ se tiene que

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi * \beta \ \text{ y } \ (\varphi \circ \psi)^* \alpha = \psi^* \varphi^* \alpha.$$

Sea α una k-forma sobre una variedad M y sea X un campo vectorial. El ***producto interior*** $i_X \alpha$ se define como

$$(i_X \alpha)_m(v_2, ..., v_k) = \alpha_m(X(m), v_2, ..., v_k).$$

Para α una k-forma y β una 1-forma sobre M se tiene que

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta.$$

Existe una única aplicación d de las k-formas sobre M en las $(k+1)$-formas sobre M que verifica:

1. Si α es una 0-forma, esto es $\alpha = f \in \mathcal{F}(M)$, entonces df es el diferencial usual de f.
2. $d\alpha$ es lineal en α.
3. $d\alpha$ satisface la ***regla del producto***

   $$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

   donde α es una k-forma y β es una l-forma.

4. $d^2 = 0$, esto es, $d(d\alpha) = 0$ para toda k-forma α.
5. d es un operador local, esto es, $d\alpha(m)$ depende solamente de α restrigida a cualquier entorno abierto de m. En efecto, si U es abierto en M, entonces

$$d(\alpha|U) = (d\alpha)|U.$$

Dado α una k-forma, se denomina ***derivada exterior de*** α a la $(k+1)$-forma $d\alpha$.

Si α es una k-forma dada en coordenadas por $\alpha = \alpha_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \ldots dx^{i_k}$ (sumado sobre $i_1 < \ldots < i_k$), entonces la expresión en coordenadas para la derivada exterior es

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_1},$$

sumado sobre todos los j y los $i_1 < \ldots < i_k$.

La derivada exterior conmuta con el pull-back, esto es

$$\varphi^* d\alpha = d\varphi^* \alpha.$$

Lema de Poincaré: Toda forma cerrada es localmente exacta, esto es, si $d\alpha = 0$, existe un entorno alrededor de cada punto sobre el cual $\alpha = d\beta$.

Sea α una k-forma y X un campo vectorial con flujo φ_t. La ***derivada de Lie de*** α ***a lo largo de*** X está dada por

$$L_X \alpha = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [(\varphi_t^* \alpha) - \alpha] = \frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha|_{t=0}.$$

Se verifica la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \alpha = \varphi_t^* L_X \alpha. \tag{1.1}$$

Si f es una función sobre M a valores reales y X es un campo vectorial sobre M, la ***derivada de Lie de*** f ***a lo largo de X*** es la derivada direccional

$$L_X f = X(f) := df \cdot X. \tag{1.2}$$

Si Y es un campo vectorial sobre N y $\varphi : M \to N$ es un difeomorfismo, el ***pull-back*** $\varphi^* Y$ es un campo vectorial sobre M definido por

$$(\varphi^* Y)(m) = (T_m \varphi^{-1} \circ Y \circ \varphi)(m). \tag{1.3}$$

El ***push-forward*** se define, como para formas, por $\varphi_* = (\varphi^*)^{-1}$.

Si M es una variedad finito dimensional y C^∞, se tiene que el conjunto de campos vectoriales sobre M coincide con el conjunto de derivaciones de $\mathcal{F}(M)$. La derivación $f \longmapsto X[Y[f]] - Y[X[f]]$ determina un único campo vectorial denotado por $[X, Y]$ y llamado el ***corchete de Jacobi-Lie*** de X e Y. Definiendo $L_X Y = [X, Y]$ se tiene la ***derivada de Lie de*** Y ***a lo largo de*** X.

Para X un campo vectorial y α una k-forma sobre M se tiene la ***Fórmula mágica de Cartan*** dada por

$$L_X\alpha = di_X\alpha + i_X d\alpha.$$

Otra propiedad de la derivada de Lie es la siguiente. Sea $\varphi : M \to N$ un difeomorfismo, entonces se tiene que

$$\varphi^* L_X\alpha = L_{\varphi^* X}\varphi^*\alpha,$$

para $X \in \mathcal{X}(N)$ y $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Existen diversas identidades que relacionan la derivada de Lie, la derivada exterior y el producto interior. Recordaremos algunas de ellas.

1. $L_{fX}\alpha = fL_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$;
2. $L_{[X,Y]}\alpha = L_X L_Y\alpha - L_Y L_X\alpha$;
3. $i_{[X,Y]}\alpha = L_X i_Y\alpha - i_Y L_X\alpha$;
4. $L_X d\alpha = dL_X\alpha$;
5. $L_X i_X\alpha = i_X L_X\alpha$;
6. $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta$.

Dadas variedades de Poisson $(C^\infty(M_1), \{\cdot,\cdot\}_1)$ y $(C^\infty(M_2), \{\cdot,\cdot\}_2)$ un ***mapa de Poisson*** es una aplicación $\varphi : M_1 \to M_2$ que verifica

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1 = \varphi^*\{f, g\}_2,$$

para $f, g \in C^\infty(M_2)$.

Sea $\varphi : M \to N$ un mapa de Poisson C^∞ con M y N variedades. Los campos $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$ se dicen ***φ-relacionados*** si se cumple

$$T_x\varphi(X(x)) = Y(\varphi(x)),\ \forall x \in M.$$

En este caso notaremos $X \rightsquigarrow^{\varphi} Y$.

Sean $X \in \mathcal{X}(M), Y \in \mathcal{X}(N)$ φ-relacionados. Vale que los flujos F_t^X, F_t^Y de X e Y respectivamente están φ-relacionados en el siguiente sentido

$$\varphi(F_t^X(x)) = F_t^Y(\varphi(x)),\ \forall x \in M, \forall t. \tag{1.4}$$

Recíprocamente si (1.4) vale entonces $X \rightsquigarrow^{\varphi} Y$.

Dados los campos $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ tales que $X_1 \rightsquigarrow^{\varphi} Y_1$ y $X_2 \rightsquigarrow^{\varphi} Y_2$ vale

$$[X_1, X_2] \rightsquigarrow^{\varphi} [Y_1, Y_2].$$

1.2. Variedades simplécticas

La noción de variedad simpléctica es fundamental en mecánica. Algunas referencias fundamentales son [**AM78**],[**LM87**] y [**MR94**]. Una ***variedad simpléctica*** es un par (M, ω) donde M es una variedad y ω es una 2-forma cerrada y no degenerada. Se deduce de inmediato que cada variedad simpléctica es de dimensión par. También se deduce que cada variedad simpléctica (M, ω) es orientable y $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega$ n veces, donde $n = (dimM)/2$, es un volúmen.

Un mapa entre dos variedades simplécticas es llamado **simplectomorfismo**.

Un ejemplo importante a considerar es el fibrado cotangente. Consideremos la variedad T^*Q y θ la 1-forma canónica en T^*Q. Entonces (T^*Q, ω) con $\omega = -d\theta$ es una variedad simpléctica, ω es la 2-forma simpléctica canónica de T^*Q.

Dado $\alpha_q \in T^*_qQ$, $V_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T^*_qQ)$, se tiene que

$$\theta(V_{\alpha_q}) := \alpha_q(T\pi_Q(V_{\alpha_q})),$$

donde $T\pi_Q$ es el tangente a la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi_Q : T^*Q &\longrightarrow Q \\ \alpha_q &\longmapsto q. \end{aligned}$$

En coordenada naturales (q^i, p^i) de T^*Q se tiene

$$\theta = p_i dq^i \tag{1.5}$$

y luego

$$\omega = -d\theta = dq^i \wedge dp_i. \tag{1.6}$$

Puede verse directamente de esta expresión en coordenadas que ω es cerrada (exacta) y no degenerada. Se observa además que en estas coordenadas naturales los coeficientes de ω son constantes.

Estructura local de una variedad simpléctica.

La estructura local de una variedad simpléctica es simple. Todas las variedades simplécticas (M, ω) son localmente equivalentes a T^*Q, es decir existen cartas en torno a un punto dado de M en las cuales ω tiene la expresión (1.6). Esto constituye el teorema de Darboux cuya demostración puede hacerse de varias maneras. En particular una demostración válida en dimensión infinita usando argumentos de deformación puede verse en [**AM78**].

TEOREMA 1.1. *(Darboux)*

Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Dado un punto $m \in M$, existe una carta (φ, U) con $m \in U$ y $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\varphi_*(\omega\,|_U) = dq^i \wedge dp_i.$$

En coordenadas de Darboux la matríz de una forma simpléctica ω está dada por

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación de Hamilton.

La ecuación fundamental de un sistema mecánico en términos de posición y momento es la ecuación de Hamilton ([**Ham34**]).

Esta ecuación fue hallada por Hamilton quien de este modo unificó el estudio de la mecánica y la óptica geométrica . La noción misma de variedad simpléctica se ha desarrollado como contexto geométrico de la mecánica y la óptica Hamiltonianas.

La versión moderna de la ecuacíon de Hamilton es la siguiente. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $h \in C^\infty(M)$ llamado el Hamiltoniano del sistema. Entonces, la ***ecuación de Hamilton*** (o el campo Hamiltoniano X_h asociado a h) es

$$i_{X_h}\omega = dh.$$

Por ejemplo, la ecuación del movimiento de muchos sistemas mecánicos puede escribirse geométricamente en la variedad (T^*Q, ω) descripta anteriormente. En este caso $q \in Q$ representa la posición y $p \in T^*Q$ representa el momento del sistema.

El Hamiltoniano $h : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ con frecuencia es la energía del sistema. En coordenadas naturales (q^i, p_i),

$$h(q,p) = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j + V(q),$$

donde el primer termino es la energía cinética y el segundo la energía potencial ([**AM78**],[**LM87**], [**MR94**] y [**Arn78**]).

Entonces X_h está dado por $X_h(q,p) = (\dot{q}, \dot{p})$ donde

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \dfrac{\partial h}{\partial p_i}(q,p) \\[2ex] \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial h}{\partial q^i}(q,p), \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= g^{ij}(q) p_j \\[2ex] \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial V}{\partial q^i}(q). \end{cases}$$

Campos localmente Hamiltonianos.

Usaremos luego una noción mas general que la de campo Hamiltoniano.

Sea α una 1-forma, se tiene una ecuación similar

$$i_{X_\alpha}\omega = \alpha. \tag{1.7}$$

Si $d\alpha = 0$, por el lema de Poincaré se sabe que existe localmente una función h tal que $\alpha = dh$ lo que justifica el nombre de ***campos localmente Hamiltonianos*** para los campos definidos por la ecuación (1.7).

Los campos localmente Hamiltonianos están caracterizados de la siguiente manera. El campo X es localmente Hamiltoniano si y solo si

$$L_X\omega = 0 \tag{1.8}$$

Para probarlo vamos a usar la fórmula mágica de Cartán $L_X\omega = i_X d\omega + d i_X\omega$ válida para cualquier k-forma ω y cualquier campo X.

En nuestro caso ω es simpléctica luego $d\omega = 0$ y la fórmula anterior se reduce a $L_X\omega = di_X\omega$. Si $X = X_h$ entonces $L_X\omega = ddh = 0$. Recíprocamente si $L_X\omega = 0$ entonces $di_X\omega = 0$. Luego $\alpha = i_X\omega$ es cerrada.

De lo anterior y de la fórmula $L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$ resulta fácilmente que si X, Y son campos localmente Hamiltonianos, entonces $[X, Y]$ es localmente Hamiltoniano.

1.3. Variedades de Poisson

Corchete de Poisson asociado a una forma simpléctica.

La versión moderna de los corchetes canónicos de Poisson estudiados posteriormente por Lie, en el contexto de la geometría simpléctica es la siguiente.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y sean $f, g \in C^\infty(M)$. El ***corchete de Poisson*** $\{f, g\} \in C^\infty(M)$ está dado por

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \tag{1.9}$$

Expresiones equivalentes al corchete son

$$\{f, g\} = -L_{X_f} g = L_{X_g} f. \tag{1.10}$$

En efecto $L_{X_f} g = i_{X_f} dg = i_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{X_g} i_{X_f}\omega = -\omega(X_f, X_g)$.

Para obtener la expresión del corchete hallada por Poisson consideremos coordenadas locales de Darboux, luego

$$\omega = dq^i \wedge dp_i.$$

Puede verse que

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right).$$

En general, en coordenadas arbitrarias (no necesariamente Darboux) la expresión de ω es

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Entonces la expresión del corchete es

$$\{f,g\} = \omega(X_f, X_g) = \Pi^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j},$$

donde Π^{ij} es la matríz inversa de ω_{ij}.

Si las coordenadas $(x^1,...,x^n,x^{n+1},...,x^{2n}) = (q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$ son Darboux, entonces la matríz de Π^{ij} está dada por

$$\Pi^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

El corchete $\{\cdot,\cdot\}$ asociado a una forma ω es una operación en $C^\infty(M)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\{\cdot,\cdot\}$ es bilineal y antisimétrico.
2. Satisface la identidad de Jacobi,

   $$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

   Equivalentemente

   $$\{h,\{f,g\}\} = \{\{h,f\},g\} + \{f,\{h,g\}\}.$$

3. Es una derivación en cada factor,

   $$\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}, \quad \text{(Regla de Leibnitz)}.$$

   Equivalentemente usando (1.10) y (1.2)

   $$X_h(fg) = (X_h(f))g + f(X_h(g)).$$

En coordenadas locales de Darboux las propiedades 1. y 2. se escriben recíprocamente

$$\Pi^{ij} + \Pi^{ji} = 0. \tag{1.11}$$

y

$$\Pi^{li}\frac{\partial \Pi^{jk}}{\partial x^l} + \Pi^{lj}\frac{\partial \Pi^{ki}}{\partial x^l} + \Pi^{lk}\frac{\partial \Pi^{ij}}{\partial x^l} = 0. \tag{1.12}$$

Puede verse que la derivación $\{\cdot,h\}$ coincide con X_h. Es decir las ecuaciones de Hamilton X_h se escriben en términos del corchete de Poisson en lugar de la forma simpléctica.

Sea $h \in C^\infty(M)$ un Hamiltoniano dado y sea $F_t^{X_h}$ el flujo de X_h. Dada una función $f \in C^\infty(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ F_t^{X_h})(x) &= (X_h(f)(F_t^{X_h}(x))) \\ &= \{f,h\}(F_t^{X_h}(x)). \end{aligned}$$

En forma abreviada se escribe

$$\dot{f} = \{f,h\}, \tag{1.13}$$

que equivale a la ecuación de Hamilton.

En coordenadas locales de Darboux se tienen las funciones coordenadas q^i, p_i. Luego

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \{q^i, h\} = \dfrac{\partial h}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, h\} = -\dfrac{\partial h}{\partial q^i} \end{cases}$$

La validéz de la identidad de Jacobi está directamente relacionada con el hecho de que ω sea cerrada. En efecto,

$$\begin{aligned} d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f\ \omega(X_g, X_h) + X_g\ \omega(X_h, X_f) + X_h\ \omega(X_f, X_g) \\ &\quad -\omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g) \\ &= X_f(\{g,h\}) + X_g(\{h,f\}) + X_h(\{f,g\}) + dh[X_f, X_g] + df[X_g, X_h] + dg[X_h, X_f] \\ &= 2(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{\{f,g\},h\}). \end{aligned}$$

La siguiente propiedad es importante y veremos en el próximo párrafo que se generaliza para variedades de Poisson.

LEMA 1.2. *Sea $[\cdot,\cdot]$ el corchete de Lie de campos vectoriales y sean $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces vale* [**MR94**]

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g].$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \omega(X_{\{f,g\}}(m), u) &= d\{f,g\}(m).u \\ &= d(\omega(X_f(m), X_g(m))).u \\ &= \omega(DX_f(m).u, X_g(m)) + \omega(X_f(m), DX_g(m).u) \\ &= \omega(DX_f(m).X_g(m), u) - \omega(DX_g(m).X_f(m), u) \\ &= \omega(DX_f(m).X_g(m) - DX_g(m).X_f(m), u) \\ &= \omega(-[X_f, X_G], u). \end{aligned}$$

Del hecho que ω es no degenerada se desprende el resultado.

□

Variedades de Poisson.

Una ***variedad de Poisson*** $(M, \{\cdot,\cdot\})$ es una variedad M con una operación

$$\begin{aligned} \{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f,g) &\longmapsto \{f,g\}, \end{aligned}$$

que satisface las propiedades 1., 2. y 3. enunciadas con detalle anteriormente, o sea

1. $\{\cdot,\cdot\}$ es bilineal antisimétrica,

2. $\{\cdot,\cdot\}$ satisface la identidad de Jacobi,
3. $\{\cdot,\cdot\}$ es una derivación en cada factor.

Dado un corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ en M se define un bivector antisimétrico covariante $B \in \mathcal{Z}_0^2(M)$, $B : T^*M \times T^*M \to \mathbb{R}$. Si $\alpha, \beta \in T_x^*M$, sean $f, g \in C^\infty(M)$ tales que $\alpha(x) = df(x)$ y $\beta(x) = dg(x)$. Tales funciones siempre existen. Se define

$$B(x)(\alpha(x), \beta(x)) = \{f, g\}(x).$$

Se prueba sin dificultad de B está bien definido.

Sea B un bivector de Poisson en M. Recordemos que se define $B^\sharp : T_x^*M \to T_xM$ como

$$B^\sharp(\alpha(x)) = B(\cdot, \alpha(x)),$$

usando la identificación natural entre $(T_x^*M)^*$ y T_xM.

Para $x \in M$, el ***rango*** de B es la dimensión de la imagen de $B^\sharp(x)$. Se prueba sin dificultad que $dim\ B^\sharp(x)$ es par .

Sea $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson y sea $f \in C^\infty(M)$. Puede verse que la aplicación

$$g \longmapsto \{g, f\}$$

es una derivación. El campo asociado se denota por X_f y es llamado ***campo Hamiltoniano de*** f. Se verifica por definición

$$X_f(g) = \{g, f\},\ \forall g \in C^\infty(M). \tag{1.14}$$

Puede verse que, como en el caso en que $\{\cdot,\cdot\}$ es el corchete canónico de una variedad simpléctica, vale

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}. \tag{1.15}$$

En efecto, sea $h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= X_f X_g h - X_g X_f h \\ &= X_f\{h, g\} - X_g\{h, f\} \\ &= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$-X_{\{f,g\}}h = -\{h, \{f, g\}\},$$

y por Jacobi se verifica (1.15). ▲

Para $h \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$L_{X_h}B = 0,$$

o equivalentemente en su versión infinitesimal

$$(F_t^{X_h})^*B = B.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\{\{f,g\},h\} &= L_{X_h}(B(df,dg)) \\
&= (L_{X_h}B)(df,dg) + B(L_{X_h}df,dg) + B(df,L_{X_h}dg) \\
&= (L_{X_h}B)(df,dg) + B(d(L_{X_h}f),dg) + B(df,d(L_{X_h}g)) \\
&= (L_{X_h}B)(df,dg) + B(d\{f,h\},dg) + B(df,d\{g,h\}) \\
&= (L_{X_h}B)(df,dg) + \{\{f,h\},g\} + \{f,\{g,h\}\}.
\end{aligned}$$

Por Jacobi se tiene que $(L_{X_h}B)(df,dg) = 0$ para todas f y g y por lo tanto $L_{X_h}B = 0$.

Por otro lado se tiene el siguiente resultado

$$(F_t^{X_h})^*\{f,g\} = \{(F_t^{X_h})^*f, (F_t^{X_h})^*g\}, \tag{1.16}$$

es decir $F_t^{X_h}$ es un mapa de Poisson (local). En efecto,

$$\begin{aligned}
(F_t^{X_h})^*\{f,g\} &= (F_t^{X_h})^*(B(df,dg)) \\
&= ((F_t^{X_h})^*B)(F_t^{X_h})^*df, F_t^{X_h})^*dg) \\
&= B(dF_t^{X_h})^*f, dF_t^{X_h})^*g) \\
&= \{F_t^{X_h})^*f, F_t^{X_h})^*g\}.
\end{aligned}$$

Una función $f \in C^\infty(M)$ que conmuta con todos los elementos $g \in C^\infty(M)$, es decir por definición $\{f,g\} = 0$, se denomina ***Casimir***. Toda Casimir en una variedad simpléctica conexa es constante.

Un ejemplo de gran importancia de variedades de Poisson es el siguiente, descubierto esencialmente por Lie y estudiado en profundidad por Kirilov, Kostant y Souriau.

Ejemplo 1.3. Sea $(\mathbf{g}, [\cdot,\cdot])$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. El dual $\mathbf{g}^*$ de $\mathbf{g}$ tiene una estructura de Poisson natural.

Si $f, g : \mathbf{g}^* \to \mathbb{R}$, se define

$$\{f,g\}(\mu) = \left\langle \mu, \left[\frac{\partial f}{\partial \xi}(\mu), \frac{\partial g}{\partial \xi}(\mu)\right]\right\rangle,$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}, \dfrac{\partial g}{\partial \xi} \in \mathbf{g}^{**}$ se identifican con elementos de $\mathbf{g}$.

En coordenadas, sea $\overline{e}_i$, con $i = 1, ..., n$ una base de $\mathbf{g}$ y $\underline{e}^i$ su base dual. Sean c_{ij}^k las constantes de estructura de $(\mathbf{g}, [\cdot,\cdot])$ y sea $\mu = \mu_k \underline{e}^k$. Entonces

$$\{f,g\}(\mu) = \mu_k c_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu) \frac{\partial g}{\partial \mu_j}(\mu).$$

Resulta que las constantes de estructura de $\{\cdot,\cdot\}$ en la variedad $\mathbf{g}^*$ son

$$\Pi_{ij}(\mu) = c_{ij}^k \mu_k,$$

en particular dependen linealmente de μ. $\Diamond$

El siguiente teorema fundamental de estructura local de una variedad de Poisson se debe a A. Weinstein .

TEOREMA 1.4. *(Weinstein)*

Sea $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson de dimensión m y sea $2n$ el rango en el punto x_0. Entonces, existen coordenadas locales $q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n, z_1, ...z_{m-2n}$ tales que

$$\begin{aligned} &\{q^i, q^j\}(x) = \{p_i, p_j\}(x) = \{q^i, z_k\}(x) = \{p^i, z_k\}(x) = \{p_i, q^j\}(x) = 0, \quad i \neq j \\ &\{q^i, p_i\}(x) = 1, \end{aligned}$$

para x en un entorno de x_0.

Además, $\{z_k, z_l\}$ sólo depende de las coordenadas $z_1, ..., z_{m-2n}$ y vale 0 en $z = 0$. Por lo tanto define una estructura de Poisson en esas coordenadas, llamada estructura de Poisson transversal, que es invariante por cambios de coordenadas.

Si el rango de B es constante en un entorno de x, entonces $\{z_k, z_l\} = 0$.

LEMA 1.5. *Sean $(M_1, \{\cdot,\cdot\}_1)$ y $(M_2, \{\cdot,\cdot\}_2)$ variedades de Poisson y sea $\varphi : M_1 \to M_2$ un mapa de Poisson.*

Sea $f \in C^\infty(M_2)$, entonces

$$X_{\varphi^* f} \rightsquigarrow^{\varphi} X_f.$$

Recíprocamente, si $X_{\varphi^* f} \rightsquigarrow^{\varphi} X_f$ para toda $f \in C^\infty(M_2)$, entonces φ es un mapa de Poisson.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que φ es un mapa de Poisson. Queremos ver que para todo $x \in M_1$

$$T_x\varphi.X_{\varphi^* f}(x)) = X_f(\varphi(x)).$$

$$\begin{aligned} (T_x\varphi.X_{\varphi^* f}(x)))(g) &= X_{\varphi^* f}(x)(\varphi^* g(x)) \\ &= X_{\varphi^* f}(x)(\varphi^* g)(x) \\ &= \{\varphi^* g, \varphi^* f\}(x) \\ &= \varphi^*\{f, g\}(x) \\ &= \{f, g\}(\varphi(x)) \\ &= X_f(\varphi(x))g. \end{aligned}$$

La recíproca se prueba revirtiendo el argumento.

$\square$

1.4. Distribuciones

Para una variedad M, un subfibrado vectorial suave $E \subset TM$ es también llamado una ***distribución sobre M***.

La distribución E es ***involutiva*** si para cualquiera dos campos X, Y definidos sobre algún conjunto abierto de M y que tomen valores en E, su corchete de Lie $[X, Y]$ también toma valores en E.

La distribución E es llamada ***integrable*** si para todo $x \in M$ existe una subvariedad N que contiene a x cuyo fibrado tangente TN coincide con la restricción $E|_N$ de E a N.

El teorema de Frobenius local dice que, para una distribución E sobre M, involutividad e integrabilidad son equivalentes. En caso que se verifique alguna de las dos propiedades se deduce que por todo punto $x \in M$ pasa una subvariedad sumergida maximal que contiene a x.

En la presente tesis es fundamental trabajar con una noción mas general de distribución, involutividad e integrabilidad que se expresa en lo que sigue.

1.4.1. Distribuciones generalizadas y Teorema de Frobenius generalizado.

En esta sección recordaremos algunas definiciones y resultados que hoy pertenecen al folklore. Para esto seguimos el trabajo de Ortega y Ratiu [**OR02**].

La noción de distribución puede generalizarse de la siguiente manera. Una ***distribución generalizada*** D sobre M es un subconjunto del espacio tangente TM tal que para todo $x \in M$, la fibra $D(x) := D \cap T_xM$ es un subespacio vectorial de T_xM. La dimensión de $D(x)$ es llamada ***rango*** o ***dimensión de la distribución*** D en el punto x.

Una ***sección diferenciable local*** de D es un campo vectorial diferenciable X definido en un subconjunto abierto U de M, tal que para todo punto $x \in U$, $X(x) \in D(x)$.

Una subvariedad sumergida conexa N de M se dice ***variedad integral*** de la distribución D si, para cada $x \in N$, $T_xi(T_xN) \subset D(x)$, donde $i : N \longrightarrow M$ es la inyección canónica. La subvariedad integral N se dice de ***dimensión máxima*** en el punto $x \in N$ si $T_xi(T_xN) = D(x)$.

Una distribución generalizada D es ***diferenciable*** si, para todo punto $x \in M$ y para todo vector $v \in D(x)$, existe una sección diferenciable X de D, definida en un entorno abierto U de x, tal que $X(x) = v$.

La distribución generalizada D es ***completamente integrable*** si, para todo punto $x \in M$, existe una variedad integral de D de dimensión máxima en todos los puntos tal que contiene a x.

Una distribución $D \subseteq TM$ se dice ***canónica o Poisson*** si vale que para todas dos funciones f y $g \in C^\infty(M)$ tales que $df|_D = dg|_D = 0$, entonces $d\{f, g\}|_D = 0$.

DEFINICIÓN 1.6. *Distribuciones suaves*

Sea $\mathcal{F}$ una familia de campos locales en M, esto es, si $X \in \mathcal{F}$ entonces $X \in \mathcal{X}^\infty(U)$ con $U \subseteq M$ abierto).

Se supone que $\mathcal{F}$ está definida en todas partes, o sea, para cada $x \in M$, existe $X \in \mathcal{F}$ tal que $x \in Dom(X)$.

Se define la distribución suave asociada a $\mathcal{F}$ mediante

$$D_{\mathcal{F}}(x) = span\{X(x) : \ X \in \mathcal{F}, \ x \in Dom(X)\}.$$

$\diamondsuit$

La distribución generalizada D es ***involutiva*** en el sentido de Stefan Sussmann si es invariante bajo los flujos (locales) asociados a secciones diferenciables de D. Esta definición de involutividad es mas general que la introducida anteriormente y solamente coinciden cuando la dimensión de $D(x)$ es la misma para todo $x \in M$. Sussmann probó en 1973 [**Sus73**] que D involutiva no implica que D sea involutiva en el sentido de Stefan-Sussmann.

Existen varias caracterizaciones del hecho de que una distribución sea completamente integrable, una de ellas es la siguiente.

TEOREMA 1.7. *(Frobenius generalizado)(Stefan(1974)-Sussmann(1973))*

Sea $D \subset TM$ una distribución generalizada diferenciable generada por la familia de campos $\{X_i\}_{i\in I}$ donde $X_i \in \mathcal{X}^\infty(U_i)$ con U_i abierto de M, para todo $i \in I$.

Entonces D es completamente integrable si y sólo si D es involutiva en el sentido de Stefan Sussmann.

DEMOSTRACIÓN. Ver Stefan [**Ste74**], Sussmann [**Sus73**]. $\square$

En esta tesis trataremos únicamente con distribuciones suaves.

Para distribuciones suaves completamente integrables se tiene una caracterización de sus hojas integrales. Para describir esta caracterización introducimos alguna notación ([**OR02**], [**LM87**]).

Sea X un campo vectorial definido en un entorno abierto $Dom(X)$ de M y F_t su flujo. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ fijo, el dominio $Dom(F_t)$ de F_t es un subconjunto abierto de $Dom(X)$ tal que $F_t : Dom(F_t) \longrightarrow Dom(F_{-t})$ es un difeomorfismo.

Si Y es un segundo campo vectorial definido en $Dom(Y)$ con flujo G_t, podemos considerar para valores fijos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ la composición de los dos difeomorfismos $F_{t_1} \circ G_{t_2}$ como definido en el conjunto abierto $Dom(G_{t_2}) \cap (G_{t_2})^{-1}(Dom(F_{t_1}))$ (que podría ser vacío).

La descripción anterior sirve para definir inductívamente la composición de una cantidad arbitraria de flujos definidos localmente. Nosotros estamos interesados en los flujos asociados a campos vectoriales de $\mathcal{F}$ que definen la distribución D. Sea k un número natural positivo, $\mathcal{X} = (X_1, ..., X_k)$ una familia ordenada de k elementos de $\mathcal{F}$, y T una k-tupla $T = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$

tal que F_t^i denota el flujo localmente definido de X_i, con $i \in \{1, ..., k\}$, t_i. Denotamos $\mathcal{F}_T$ al difeomorfismo definido localmente $\mathcal{F}_T = F_{t_1}^1 \circ F_{t_2}^2 ... \circ F_{t_k}^k$ construido usando la descripción dada antes. Todo difeomorfismo de un subconjunto abierto de M en otro subconjunto abierto de M construido de la misma forma que $\mathcal{F}_T$ lo llamaremos ***generado*** por la familia $\mathcal{F}$.

Puede probarse que tanto la composición de difeomorfismos generados por $\mathcal{F}$ como el inverso de un difeomorfismo generado por $\mathcal{F}$ son difeomorfismos generados por $\mathcal{F}$ ([**LM87**]). En otras palabras, la familia de difeomorfismos generados por $\mathcal{F}$ forma un ***pseudogrupo de transformaciones*** que denotaremos G_D. Diremos que dos puntos x e y en M son G_D***-equivalentes*** si existe un difeomorfismo $\mathcal{F}_T \in G_D$ tal que $\mathcal{F}_T(x) = y$. Esto define una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia serán llamadas G_D***-orbitas***.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *Sea D una distribución generalizada diferenciable sobre la variedad diferenciable M, generada por una familia de campos vectoriales locales $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}(M)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *La distribución D es invariante bajo el pseudogrupo de transformaciones generado por $\mathcal{F}$, esto es, para cada $\mathcal{F}_T \in G_D$ generado por $\mathcal{F}$ y para cada $x \in M$ en el dominio de $\mathcal{F}_T$ vale que*
$$T_x\mathcal{F}_T(D(x)) = D(\mathcal{F}_T(x)).$$
2. *La distribución D es completamente integrable.*

Si 1. o 2. se satisfacen, las hojas integrales son las G_D-órbitas.

Demostración. Ver Stefan [**Ste74**], Sussmann [**Sus73**]. □

Teorema de estratificación simpléctica.

Sea $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson. Consideremos la distribución $\Delta \subset TM$ dada por
$$\Delta(x) = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)\}, \text{ para } x \in M.$$

Esta distribución resulta C^∞ por definición y puede verse que Δ es involutiva en el sentido de S-S, es decir que $(F_t^{X_h})^*(\Delta) \subseteq \Delta$ para todo $h \in C^\infty(M)$. Para verlo, basta probar que $(F_t^{X_h})^* X_f$ es un campo Hamiltoniano para todo $f \in C^\infty(M)$, en efecto, como $F_t^{X_h}$ es un mapa de Poisson (ver (1.16)) se puede deducir fácilmente usando (1.14) que
$$(F_t^{X_h})^* X_f(g) = X_{(F_t^{X_h})^* f}((F_t^{X_f})^*(g)), \ \forall\, g \in C^\infty(M).$$

Teorema 1.9. *Sea $M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson. Sea Δ la distribución asociada a $\{\cdot,\cdot\}$. Entonces Δ es integrable. Además cada hoja integral S es una variedad simpléctica donde ω_s, la forma simpléctica en S se define mediante*
$$\omega_s(x)(X_f, X_g) = \{f, g\}(x).$$

Demostración. Ya vimos que Δ es involutiva en el sentido de S-S. Por el teorema (1.7) resulta integrable. Se define $\omega_s \in \Omega^2(S)$

$$\omega_s(x)(X_f(x), X_g(x)) = \{f, g\}(x).$$

Se verifica que ω_s es C^∞ y antisimétrica (pues $\{\cdot, \cdot\}$ lo es).

Veamos que ω_s es cerrada, es decir $d\omega_s = 0$. Para cualquier $f \in C^\infty(M)$ vale, por la fórmula mágica de Cartán, que

$$i_{X_f} d\omega_s = L_{X_f}\omega_s - d\, i_{X_f}\omega_s.$$

Para ver que $d i_{X_f}\omega_S = 0$, sea $g \in C^\infty(M)$, vale que

$$(i_{X_f}\omega_s)(X_g) = \omega_s(X_f, X_g) = df(X_g),$$

por lo tanto $i_{X_f}\omega_s = d(f|_S)$. Luego $d\, i_{X_f}\omega_S = d(df|_S) = 0$.

Veamos ahora que $L_{X_f}\omega_S = 0$. Sean $h, g \in C^\infty(M)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(L_{X_f}\omega_s)(X_g, X_h) &= L_{X_f}(\omega_S(X_g, X_h)) - \omega_S(L_{X_f}X_g, X_h) - \omega_S(X_g, L_{X_f}X_h) \\
&= L_{X_f}(\omega_s(X_g, X_h)) - \omega_s([X_f, X_g], X_h) - \omega_s(X_g, [X_f, X_h]) \\
&= L_{X_f}\{g, h\} + \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\} \\
&= \{\{g, h\}, f\} + \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por la identidad de Jacobi.

Por último veamos que ω_S es no degenerada. Sea $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega_S(X_f, X_g) = 0$ para toda $g \in C^\infty(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_S(X_f, X_g) \\
&= \{f, g\} \\
&= -dg(X_f), \quad \forall g \in C^\infty(M).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $X_f = 0$.

□

1.5. Aplicación momento

Consideremos G un grupo de Lie y M una variedad. Una ***acción a izquierda*** de G en M es un mapa C^∞ $\phi : G \times M \to M$ que verifica

$$\phi(g_1, \phi(g_2, m)) = \phi(g_1 g_2, m)$$

$$\phi(e, m) = m.$$

Notaremos $\phi(g, m) = gm$.

Equivalentemente se define una acción a derecha.

Sea ϕ una acción de G en M. Para $x \in M$ la ***órbita*** de x está dada por

$$G.x = \{\phi_g(x) : g \in G\}.$$

El ***subgrupo de isotropía*** de la acción ϕ en el punto x está dado por

$$G_x = \{g \in G : \phi_g(x) = x\}.$$

Puede verse fácilmente que G_x es un subgrupo cerrado de G.

Una acción es **libre** si, para cada $x \in M$, la aplicación $g \longrightarrow \phi_g(x)$ es biyectiva.

Sean $\phi : G \times M \longrightarrow M$ y $\varphi : G \times N \longrightarrow N$ acciones del grupo G sobre las variedades M y N respectivamente. Una función $f : M \longrightarrow N$ se dice ***equivariante*** si se verifica que

$$f \circ \phi_g = \varphi_g \circ f \quad \forall g \in G. \tag{1.17}$$

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y sea $\rho : G \times M \to M$ una acción por simplectomorfismos.

Para cada $\xi \in \mathbf{g}$, sea X_ξ el generador infinitesimal. Vale que X_ξ es localmente Hamiltoniano. Para probarlo basta ver que $i_{X_\xi}\omega$ es cerrada, en efecto

$$\begin{aligned} di_{X_\xi}\omega &= L_{X_\xi}\omega - i_{X_\xi}d\omega \\ &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(F_t^{X_\xi})^*\omega \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $(F_t^{X_\xi})^*\omega = \rho^*_{exp(t\xi)}\omega = \omega$.

Entonces, por el lema de Poincare se tiene que existe $h \in C^\infty(M)$ tal que $i_{X_\xi}\omega = dh$ localmente.

Supongamos que la acción ρ es globalmente Hamiltoniana es decir, X_ξ es globalmente Hamiltoniano para todo $\xi \in \mathbf{g}$. Entonces existe un Hamiltoniano global

$$\bar{J}(\xi) : M \to \mathbb{R}.$$

Si además se puede elegir para cada $x \in M$ que $\bar{J}(\xi)$ dependa linealmente de ξ entonces se define $J : M \to \mathbf{g}^*$ dado por $\bar{J}(\xi)(x) = J(x)(\xi)$. La plicación $J : M \to \mathbf{g}^*$ se la denomina ***aplicación momento para la acción*** ρ.

De acuerdo con la definición dada en (1.17), una aplicación momento se dice Ad^****-equivariante*** si se satisface

$$J(\rho_g(x)) = Ad^*_{g^{-1}}J(x).$$

Puede verse que, en el caso en que exista, $J : M \to \mathbf{g}^*$ es una mapa de Poisson [**MR94**].

Teorema 1.10. *Sea $H \in C^\infty(M)$ y $\rho : G \times M \to M$ una acción. Sea $J : M \to \mathbf{g}^*$ el momento de la acción ρ. Entonces J es una cantidad conservada para X_H es decir, si $\alpha(t)$ es solución de X_H, entonces*

$$J(\alpha(t)) = cte.$$

Equivalentemente, dado $\xi \in \mathbf{g}$, $\bar{J}(\xi)(\alpha(t)) = cte$.

Demostración. Hay que probar que

$$L_{X_H}\bar{J}(\xi) = 0.$$

$$\begin{aligned} L_{X_H}\bar{J}(\xi) &= i_{X_H} d\bar{J}(\xi) + d\, i_{X_H}\bar{J}(\xi) \\ &= i_{X_H} i_{X_\xi}\omega \\ &= \omega(X_\xi, X_H) \\ &= -\omega(X_H, X_\xi) \\ &= -dH(X_\xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad resulta de que H es invariante y X_ξ es el generador infinitesimal de la acción.

□

Ejemplo 1.11.

1. Sea $\phi : G \times Q \to Q$ una acción y sea $T^*\phi_g : T^*Q \to T^*Q$ la acción levantada al cotangente. Esta acción preserva la forma simpléctica canónica $\omega = -d\theta$. Veamos que preserva la 1-forma simpléctica canónica θ. Sea $V_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}(T_q^*Q)$, entonces

$$\begin{aligned} (T^*\phi_g)^*\theta(V_{\alpha_q}) &= \theta(TT^*\phi_g V_{\alpha_q}) \\ &= T^*\phi_g(\alpha_q)(T\pi_Q TT^*\phi_g(V_{\alpha_q})) \\ &= \alpha_q(T\phi_g T\pi_Q TT^*\phi_g(V_{\alpha_q})) \\ &= \alpha_q(T(\phi_g \circ \pi_Q \circ T^*\phi_g)(V_{\alpha_q})) \\ &= \alpha_q(T\pi_Q(V_{\alpha_q})) \\ &= \theta(V_{\alpha_q}). \end{aligned}$$

Se deduce fácilemte que $T^*\phi$ preserva ω.

La acción $T^*\phi$ admite una aplicación momento Ad^*-equivariante $J : T^*Q \longrightarrow \mathbf{g}^*$ dada por

$$J(\alpha_q)(\xi) = \alpha_q(X_\xi(q)).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i_{X_\xi}\theta(\alpha_q) &= \alpha_q(T\pi_Q \circ X_\xi^*(\alpha_q)) \\ &= \alpha_q(X_\xi \circ \pi_Q(\alpha_q)) \\ &= \alpha_q(X_\xi(q)) \end{aligned}$$

Si ξ_Q es el generador infinitesimal de ξ y $\alpha_q = (q, p)$, entonces

$$J(q,p)(\xi) = p\xi_Q(q),$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}).$$

2. Si $Q = G$, $L : G \times G \to G$ es la acción a izquierda dada por $L(g,h) = gh$, entonces

$$J(\alpha_g) = R_g^* \alpha_g \in \mathbf{g}^*.$$

$\Diamond$

1.5.1. Teoría de la reducción simpléctica.

La teoría de reducción simpléctica o teoría de reducción de Marsden-Weinstein es hoy día una teoría clásica de fundamental importancia en mecánica y otras ramas de la matemática [**AM78**].

A continuación se enuncian los resultados principales cuyas pruebas pueden verse en las referencias citadas.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $\rho : G \times M \to M$ una acción simpléctica que admite una aplicación momento $J : M \to \mathbf{g}^*$ Ad^*-equivariante.

Sea $\mu \in \mathbf{g}^*$ un valor regular de J. Resulta que $J^{-1}(\mu) \subseteq M$ es una subvariedad de M.

Sea $i_\mu : J^{-1}(\mu) \to M$ la inclusión. Resulta que i_μ^* es una 2-forma cerrada en $J^{-1}(\mu)$ pero es degenerada, esto es, es una forma presimpléctica. Se define una distribución en N del modo siguiente, para cada $y \in N$ se define

$$\Delta_y = \{v \in T_y N : i_v \Omega = 0\}.$$

Δ es involutiva, esto es

$$i_X \Omega = 0, i_Y \Omega = 0 \Longrightarrow i_{[X,Y]} \Omega = 0.$$

En los casos es que la dimensión de Δ_y es constante integrable y entonces se tiene el siguiente cociente

$$M/\Delta \equiv \{\text{hojas integrables de } \Delta\}.$$

Se tiene la variedad presimpleéctica $J^{-1}(\mu)$ y la forma presimpléctica i_μ^*. Se verifica que las hojas integrables son las órbitas de la acción de G_μ donde G_μ es el grupo de isotropía de la acción coadjunta de μ.

Se tiene entonces las variedad

$$M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$$

y se tiene la sbmersión

$$P_\mu : J^{-1}(\mu) \to M_\mu.$$

Se define la forma $\omega_\mu = P_\mu(\omega)$.

Sea $h \in C^\infty(M)$ un Hamiltoniano G- invariante. Se sabe que las soluciones $F_t(x)$ pertenecen a $J^{-1}(\mu)$ se $x \in J^{-1}(\mu)$. Luego $P_\mu F_t(x)$ perteneces a M_μ. Estas curvas son las soluciones del sistema Hamiltoniano reducido h_μ.

1.6. Acciones Propias y entornos tubulares

Sea G un grupo de Lie y ϕ una acción de G sobre la variedad M. La acción ϕ es ***propia*** si y solo si la imagen inversa de un conjunto compacto en $M \times M$ por el mapa

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\phi} : G \times M & \rightarrow & M \times M \\ (g, m) & \longmapsto & (m, gm) \end{array} \tag{1.18}$$

es un conjunto compacto. Se verifica fácilmente que si G es compacto entonces toda acción de G es propia.

En una variedad la noción de compacidad de un conjunto equivale a que toda sucesión en el conjunto tenga una subsucesión convergente. Usando esto se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.12. *ϕ es una acción propia si y solo si se cumple que, para sucesiones $\{g_n\}$ y $\{x_n\}$ en G y M respectivamente*

$$\text{si } g_n x_n \longrightarrow \bar{y} \text{ y } x_n \longrightarrow \bar{x}, \text{ existe una subsucesión } \{g_{n_k}\} \text{ de } \{g_n\} \text{ tal que } g_{n_k} \longrightarrow \bar{g} \tag{1.19}$$

En este caso vale que $\bar{y} = \bar{g}\ \bar{x}$.

Demostración. Ver Apéndice A. □

Ejemplo 1.13. Grupos de Lie actuando en sí mismos.

Sea G un grupo de Lie actuando en sí mismo por traslaciones a izquierda (para traslaciones a derecha la situación es análoga). Puede verse que esta acción es propia. En efecto, sean $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$ sucesiones en G tales que $g_n h_n \longrightarrow l$ y $h_n \longrightarrow h$. La continuidad de la aplicación inversa sobre G garantiza que $h_n^{-1} \longrightarrow h^{-1}$. Mas aún, la continuidad de la operación del grupo implica que $g_n h_n^{-1} \longrightarrow l h^{-1}$ y entonces $g_n \longrightarrow l h^{-1}$. ◊

Otro resultado importante es el siguiente.

Lema 1.14. *Sea $G \times M \longrightarrow M$ una acción propia. Entonces, para $x \in M$, los grupos de isotropía $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ son compactos. Además el espacio cociente M/G es Hausdorff.*

Demostración. Ver Apéndice A. □

Producto twist.

El hecho de que la acción de un grupo sea propia garantiza la existencia de un modelo semi local muy conveniente. La formulación matemática de este modelo usa la construcción siguiente.

Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado. Supongamos que H actúa a izquierda sobre la variedad A. Se define la ***acción twist*** de H en $G \times A$ como

$$\begin{aligned} \psi : H \times (G \times A) &\longrightarrow G \times A \\ (h, (g, a)) &\longmapsto (gh, h^{-1}a). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Es fácil ver que la acción (1.20) es una acción a derecha libre y propia porque lo es la acción natural a derecha de H en G (Ejemplo 1.13).

Se define el ***producto twist*** entre G y A como

$$G \times_H A := (G \times A)/H,$$

es decir es el espacio de orbitas correspondiente a la acción twist.

Los elementos de $G \times_H A$ se denotan $[g, a]_H$ con $(g, a) \in G \times A$.

Puede verse que el producto twist $G \times_H A$ es un G-espacio relativo a la acción a izquierda definida por

$$\begin{aligned} \Psi : G \times (G \times_H A) &\longrightarrow G \times_H A \\ (g, [g', a]_H) &\longmapsto [gg', a]_H. \end{aligned} \tag{1.21}$$

LEMA 1.15. *Si la acción de H en A es propia, entonces la G-acción sobre $G \times_H A$ definida en (1.21) también es propia.*

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. □

Entornos tubulares.

Sea M una variedad y G un grupo de Lie actuando en M. Sea $x \in M$ y denotemos $H := G_x$. Un ***entorno tubular de la órbita*** $\mathcal{O}_x = G.x$ es un difeomorfismo G-equivariante

$$\Phi : G \times_H A \longrightarrow U$$

donde U es un entorno G-invariante de $G.x$ en M y A es una bola abierta centrada en el orígen de un espacio de representación de H. Observemos que si la G-acción sobre M es propia, entonces la G-acción sobre el producto twist $G \times_H A$ también es propia pues el subgrupo de isotropía H es compacto y, consecuentemente, su acción en A es propia.

Estudiemos ahora la existencia de tubos.

TEOREMA 1.16. *(Existencia de entornos tubulares) Sea M una variedad y $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción propia. Sea $x \in M$, $H = G_x$ su subgrupo de isotropía. Entonces existe un entorno tubular $\Phi : G \times_H B \longrightarrow U$ alrededor de $G.x$ donde B es un entorno abierto H-invariante de 0 en un espacio vectorial isomorfo a $T_xM/T_x(G.x)$ sobre el cual actúa H linealmente por $h.(v + T_x(G.x)) := (T_x\Phi_h).v + T_x(G.x)$.*

Para demostrar este teorema necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1.17. *Sea H un grupo compacto y $\phi : H \times M \to M$ una acción. Supongamos que x queda fijo por la acción de H, es decir $Hx = \{x\}$. Sea U un entorno de x, entonces*

1. *existe un entorno V de x, $V \subseteq U$, tal que V es H-invariante,*
2. *existe en V una métrica Riemanniana σ que es H-invariante,*
3. *existen bolas $S_{r'} \subset S_r \subset M$ centradas en x y una función bump H-invariante $b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*
$$\begin{cases} b|_{S_{r'}} & \equiv & 1 \\ b|_{M-S_r} & \equiv & 0. \end{cases}$$

Demostración. Ver Apéndice A. $\square$

Demostración. **Teorema 1.16.**

Sea $x \in M$ y sea σ la métrica H-invariante definida sobre un entorno U H-invariante de x cuya existencia está garantizada por el Lema 1.17.

Sea $N_x \subseteq T_xM$ el complemento ortogonal a $T_x(G.x)) = \mathbf{g}.x$ con respecto al producto interno inducido por $\sigma(x)$ y sea $\exp_x : T_xU \longrightarrow U$ la exponencial Riemanniana asociada a σ.

Un hecho básico de la geometría Riemanniana (existencia de coordenadas Gaussianas) garantiza la existencia de un entorno W del orígen en T_xM tal que

$$\exp_x : W \longrightarrow Im(\exp_x(W))$$

es un difeomorfismo, donde $Im(\exp_x(W))$ es abierto. Por el inciso 1. del Lema 1.17 puede tomarse W H-invariante.

Puede verse fácilmente que la aplicación $T_x\phi_h : T_xM \longrightarrow T_xM$ es ortogonal y preserva $T_x(G.x)$. Entonces induce una acción de H sobre $T_xM/T_x(G.x))$ dada por

$$\begin{array}{rcl} H \times T_xM/T_x(G.x)) & \longrightarrow & T_xM/T_x(G.x)) \\ (h, v_x + T_x(G.x)) & \longmapsto & T_x\phi_h(v_x) + T_x(G.x) \end{array}$$

Además N_x es H-invariante, pues la métrica lo es y puede verse que N_x es equivariantemente isomorfo a $T_xM/T_x(G.x)$ vía la asignación $v_x \to v_x + T_x(G.x)$.

Sea $V := W \cap N_x$. Por construcción se tiene que V es H-invariante y entonces el producto twist $G \times_H V$ está bien definido. Sea

$$\tau : G \times_H V \longrightarrow M$$

dada por

$$\tau([g, v_x]_H) = g. \exp_x(v_x).$$

τ está bien definida por la H-equivariancia de exp y fácilmente se ve que τ es G-equivariante. Veamos que es un difeomorfismo. Probaremos primero que τ es un difeomorfismo local.

Consideremos la proyección natural $\Pi : G \times V \longrightarrow G \times_H V$ y las aplicaciones tangentes

$$T_{(e,0)}\Pi : T_{(e,0)}(G \times V) \longrightarrow T_{[e,0]_H}(G \times_H V)$$

y

$$T_{[e,0]_H}\tau : T_{[e,0]_H}(G \times_H V) \longrightarrow T_xM.$$

La aplicación $T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi) : T_{(e,0)}(G \times V) \longrightarrow T_xM$ está dada por

$$T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi)(\xi, v_x) = \xi x + v_x,$$

en efecto si $(\xi, v_x) \in T_{(e,0)}(G \times V)$,

$$(\xi, v_x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(t\xi), tv)$$

y entonces

$$\begin{aligned} T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi)(\xi, v_x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\tau \circ \Pi)(\exp(t\xi), tv) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(t\xi)).(\exp_x(tv_x)) \\ &= X_\xi(x) + v_x \\ &= \xi x + v_x. \end{aligned}$$

Es claro que $T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi)$ es suryectiva porque $\xi \in \mathbf{g}$ y $v_x \in N_x$ son arbitrarios, $X_\xi(x)$ y v_x son ortogonales y $T_xM = \mathbf{g}.x \oplus N_x$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} Ker\ T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi) &= \{(\xi, v_x) : T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi)(\xi, v_x) = 0\} \\ &= \{(\xi, v_x) : X_\xi(x) + v_x = 0\} \\ &= \{(\xi, v_x) : X_\xi(x) = 0,\ v_x = 0\} \\ &= \{(\xi, v_x) : \xi \in \mathfrak{h},\ v_x = 0\}, \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{h} = Lie(H)$ y la anteúltima igualdad se satisface porque $X_\xi(x)$ y v_x son ortogonales.

Se puede verificar fácilmente que

$$Ker\ T_{(e,0)}\Pi = \mathfrak{h} \times \{0\}.$$

Por lo tanto $Ker\ T_{(e,0)}(\tau \circ \Pi) = Ker\ T_{(e,0)}\Pi$. Luego por resultados de isomorfismos de espacios vectoriales resulta que $T_{[e,0]_H}\tau$ es un isomorfismo lineal.

Por el Teorema de la función implícita, existe un entorno W' de $[e,0]_H$ en $G \times_H V$ tal que $\tau|_{W'} : W' \longrightarrow \tau(W')$ es un difeomorfismo. En particular existe un entorno abierto V' de 0 en V tal que para todo $v \in V'$, el punto $[e,v]_H$ pertenece a W'. Entonces $T_{[e,v]_H}\tau$ es un isomorfismo. Además la equivariancia de τ implica que $T_{[g,v]_H}\tau$ es un isomorfismo para todo $g \in G$ y $v \in V'$. Entonces resulta que τ restrigida a $G \times_H V'$ es un difeomorfismo local.

Veamos ahora que τ es un difeomorfismo global. Usaremos que la G-acción es propia para probar que existe un subconjunto abierto H-invariante B de V' que contiene al 0 y tal que la restricción de τ a $G \times_H B$ es inyectiva. Supongamos, por contradicción, que dicho subconjunto no existe. Entonces existen sucesiones $\{[g_n, v_n]_H\}$ y $\{[g'_n, v'_n]_H\}$ tales que $\{v_n\}$ y $\{v'_n\}$ tienden a 0 y para todo $n \in \mathbb{N}$ $[g_n, v_n]_H \neq [g'_n, v'_n]_H$ pero

$$g_n exp_x(v_n) = \tau([g_n, v_n]_H) = \tau([g'_n, v'_n]_H) = g'_n exp_x(v'_n). \tag{1.22}$$

Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $g'_n = e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{v_n\}$ y $\{v'_n\}$ tienden a 0 , las sucesiones $\{exp_x(v_n)\}$ y $\{exp_x(v'_n)\}$ tienden a x y entonces de (1.22) se obtiene que $\{g_n exp_x(v_n))\}$ tiende a x también. Como la G- acción es propia se tiene que existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ de $\{g_n\}$ tal que $g_{n_k} \longrightarrow g$.

La continuidad de la acción del grupo y (1.22) muestran que $gx = x$ lo que implica que $g \in H$ y entonces $[g, 0]_H = [e, 0]_H$.

Como $[g_{n_k}, v_{n_k}]_H \longrightarrow [g, 0]_H = [e, 0]_H \in W'$ y $[e, v'_{n_k}]_H \longrightarrow [e, 0]_H \in W'$ se sigue que para k suficientemente grande, las sucesiones $\{[g_{n_k}, v_{n_k}]_H\}$ y $\{[e, v'_{n_k}]_H\}$ están en W'. Por hipótesis $[g_{n_k}, v_{n_k}]_H \neq [e, v'_{n_k}]_H$ y $g_{n_k} exp_x(v_{n_k}) = exp_x(v'_{n_k})$ para todo k, lo que contradice el hecho de que τ restringido a W' es biyectiva.

Entonces existe un entorno abierto de 0 H-invariante B en $V \subseteq N_x$ tal que la restrición de τ a $G \times_H B$ es inyectiva.

La restrición de τ a $G \times_H B$ es un difeomorfismo local G-equivariante inyectivo en su imagen y entonces es un difeomorfismo en un entorno abierto G-invariante de $x \in M$.

$\square$

1.7. El grupo Euclideano $SE(3)$

Consideremos el grupo Euclidiano

$$SE(3) = SO(3) \circledS \mathbb{R}^3$$

Un elemento de $SE(3)$ es un par (A, a) donde $A \in SO(3)$ y $a \in \mathbb{R}^3$, y por definición, la estructura de grupo está dada por el producto semi-directo

$$(A, a).(B, b) = (AB, Ab + a),$$

para $(A, a), (B, b) \in SE(3)$.

El elemento identidad del grupo $SE(3)$ es $(I, 0)$. Dado $(A, a) \in SE(3)$ su elemento inverso está dado por

$$(A, a)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}a).$$

Se define la acción $SE(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(A, a)x = Ax + a,$$

por lo tanto resulta

$$(A, a)((B, b)x) = ((A, a).(B, b))x.$$

El álgebra de Lie del grupo $SE(3)$ está dada por

$$\mathfrak{se}(3) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3,$$

donde $\mathfrak{so}(3)$ es el álgebra de Lie del grupo $SO(3)$.

A continuación vamos a hallar una expresión del corchete de Lie.

Es bien conocido que el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ puede ser identificada con $\mathbb{R}^3$ mediante el isomorfismo lineal

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\ } : \mathbb{R}^3 & \to & \mathfrak{so}(3) \\ \xi & \to & \hat{\xi} \end{array} \tag{1.23}$$

que asigna a cada $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \in \mathbb{R}^3$ el elemento de $\mathfrak{so}(3)$

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valen las siguientes propiedades que se comprueban directamente. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\hat{\xi}\eta = \xi \times \eta, \tag{1.24}$$

donde el primer miembro representa el producto de la matríz $\hat{\xi}$ por el vector $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$.

Además se tiene que

$$\hat{\xi}\hat{\eta} - \hat{\eta}\hat{\xi} = \widehat{(\xi \times \eta)}. \tag{1.25}$$

Esto es,

$$[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = \widehat{\xi \times \eta}.$$

En resumen, si consideramos el álgebra de Lie en $\mathbb{R}^3$ donde el corchete de Lie está dado, por definición, por el producto cruz y, por otro lado, el álgebra de Lie en $\mathfrak{so}(3)$ con el conmutador, la aplicación $\hat{\ }$ resulta un isomorfismo de álgebras de Lie.

El producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$, $\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ está dado por

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = -\frac{1}{2} Tr(\hat{\xi}\hat{\eta}). \tag{1.26}$$

Indicaremos a veces $\xi.\eta = \hat{\xi}\hat{\eta} = \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$

Calculemos ahora una forma explícita para la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$. Dados $(\hat{\xi}, u), (\hat{\eta}, v) \in \mathfrak{se}(3)$, el corchete de Lie está dado por

$$\Big[(\hat{\xi}, u), (\hat{\eta}, v)\Big] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\,|_{t=0,s=0}\,\big((A(t), a(t))(B(s), b(s))(A(t), a(t))^{-1}\big)$$

donde las curvas $(A(t), a(t))$ y $(B(t), b(t))$ en $\mathfrak{se}(3)$ son tales que

$$(A(0), a(0)) = (I, 0) = (B(0), b(0))$$

y

$$(A'(0), a'(0)) = (\hat{\xi}, u), \;\; (B'(0), b'(0)) = (\hat{\eta}, v).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Big[(\hat{\xi}, u), (\hat{\eta}, v)\Big] &= \big(A'(t)B'(s)A(t)^{-1} - A(t)B'(s)A'(t)^{-1}, \\
&\quad [-A'(t)B'(s)A(t)^{-1} - (-1)^3 A(t)B'(s)A'(t)^{-1}]a(t) \\
&\quad + (-A(t)B'(s)A(t)^{-1})a'(t) + A'(t)b'(t)\big) \,|_{t=0,s=0} \\
&= \Big(\hat{\xi}\hat{\eta} - \hat{\eta}\hat{\xi}, \hat{\xi}v - \hat{\eta}u\Big),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Big[(\hat{\xi}, u), (\hat{\eta}, v)\Big] = \Big([\hat{\xi}, \hat{\eta}], \hat{\xi}v - \hat{\eta}u\Big)$$

Usando la identificación (1.23) y las propiedades (1.24) y (1.25), resulta

$$[(\xi, u), (\eta, v)] = (\xi \times \eta, \xi \times v - \eta \times u)\,.$$

Acción coadjunta de $SE(3)$.

Calculemos primero la acción adjunta $Ad : SE(3) \times \mathfrak{se}(3) \to \mathfrak{se}(3)$ del grupo $SE(3)$ sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$. Sea $(A, a) \in SE(3)$, $(\hat{\xi}, u) \in \mathfrak{se}(3)$ y sea $(B(t), b(t))$ una curva en $\mathfrak{se}(3)$ tal que

$$(B(0), b(0)) = (I, 0) \quad \text{y} \quad (B'(0), b'(0)) = (\hat{\xi}, u).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
Ad_{(A,a)}(\hat{\xi}, u) &= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, (A, a)(B(t), b(t))(A, a)^{-1} \\
&= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, (AB(t), Ab(t) + a)(A^{-1}, -A^{-1}a) \\
&= \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \big(AB(t)A^{-1}, -AB(t)A^{-1}a + Ab(t) + a\big) \\
&= (AB'(t)A^{-1}, -AB'(t)A^{-1}a + Ab'(t))\,|_{t=0} \\
&= (A\hat{\xi}A^{-1}, -A\hat{\xi}A^{-1}a + Au),
\end{aligned}$$

es decir,

$$Ad_{(A,a)}(\hat{\xi}, u) = (A\hat{\xi}A^{-1}, -A\hat{\xi}A^{-1}a + Au) \tag{1.27}$$

El espacio dual del álgebra de Lie $\mathfrak{se}(3)$ está dado por

$$\mathfrak{se}(3)^* = \mathfrak{so}(3)^* \times (\mathbb{R}^3)^*.$$

La acción coadjunta del grupo $SE(3)$, $\phi : SE(3) \times \mathfrak{se}(3)^* \to \mathfrak{se}(3)^*$ es una acción a izquierda y está dada por $\phi((A,a),(\kappa,\lambda)) = Ad^*_{(A,a)^{-1}}(\kappa,\lambda)$, donde se tiene por definición que

$$\langle Ad^*_{(A,a)^{-1}}(\kappa,\lambda),(\hat{\xi},u)\rangle = \langle(\kappa,\lambda), Ad_{(A,a)^{-1}}(\hat{\xi},u)\rangle,$$

para $(A,a) \in SE(3), (\kappa,\lambda) \in \mathfrak{se}(3)^*$ y $(\hat{\xi},u) \in \mathfrak{se}(3)$.

Utilizando la identificación (1.23), la identificación entre $\mathbb{R}^3$ y $(\mathbb{R}^3)^*$, y también entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{so}(3)^*$ dadas por el producto interior $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, se tiene la siguiente identificación

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{se}(3)^* = (\mathfrak{so}(3))^* & \times & (\mathbb{R}^3)^* & \cong & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (\underline{\hat{\alpha}} & , & \underline{u}) & \cong & (\alpha, u) \end{array} \tag{1.28}$$

Mas precisamente, indicaremos para $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\underline{u} = \langle\langle u,\cdot\rangle\rangle. \tag{1.29}$$

Usaremos la misma notación para la identificación entre $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{so}(3)^*$, es decir

$$\underline{\hat{\alpha}} = \langle\langle \hat{\alpha},\cdot\rangle\rangle.$$

Usando la identificación (1.28), la aplicación coadjunta está dada por

$$Ad^*_{(A,a)^{-1}}(\alpha,u) = (A\alpha - Au \times a, Au).$$

En efecto, veamos primero, que para $(A,a) \in SE(3)$, $\hat{\xi} \in \mathfrak{so}(3)$ y $v \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$(A^{-1}\hat{\xi}A)v = A^{-1}\hat{\xi}(Av) = A^{-1}(\xi \times Av) = A^{-1}\xi \times v = \widehat{A^{-1}\xi}v, \tag{1.30}$$

y además

$$A^{-1}\hat{\xi}AA^{-1}a = \widehat{A^{-1}\xi}A^{-1}a = A^{-1}\xi \times A^{-1}a = A^{-1}(\xi \times a). \tag{1.31}$$

Sean ahora $(A,a) \in SE(3)$, $(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*$ y $(\hat{\xi},v) \in \mathfrak{se}(3)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle Ad^*_{(A,a)^{-1}}(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u}),(\hat{\xi},v)\rangle &= \langle(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u}),(A^{-1}\hat{\xi}A, A^{-1}\hat{\xi}AA^{-1}a + A^{-1}v)\rangle \\ &= \langle\underline{\alpha}, A^{-1}\hat{\xi}A\rangle + \langle\underline{u}, A^{-1}\hat{\xi}AA^{-1}a\rangle + \langle\underline{u}, A^{-1}v\rangle \\ &= \langle\langle\alpha, A^{-1}\xi\rangle\rangle + \langle\langle u, A^{-1}(\xi\times a)\rangle\rangle + \langle\langle u, A^{-1}v\rangle\rangle \quad (1{,}23),(1{,}29),(1{,}30) \text{ y } (1{,}31) \\ &= \langle\langle A\alpha,\xi\rangle\rangle + \langle\langle Au, \xi\times a\rangle\rangle + \langle\langle Au, v\rangle\rangle \\ &= \langle\langle A\alpha - Au\times a, \xi\rangle\rangle + \langle\langle Au, v\rangle\rangle \\ &= \langle(A\alpha - Au\times a, Au),(\xi,v)\rangle. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Momento Optimo

En este capítulo se describe el momento optimo de Ortega y Ratiu, que es es el concepto clave de esta tesis. Vamos a seguir la exposición original del libro [**OR04**] y el paper [**OR02**] en los aspectos que nos interesan específicamente para esta tesis, con el objeto de simplificar su lectura.

Por lo tanto, si bien los temas tratado corresponden solo a una parte del contenido de [**OR04**], esta exposición tiene un espíritu pedagógico con la intención de motivar una audiencia lo mas amplia posible ya que el tema puede ser de interés en diversos campos.

2.1. Definición y Ejemplos

Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson, G un grupo de Lie actuando canónicamente en M y U un subconjunto abierto G-invariante de M. Definimos

$$C^\infty(U)^G := \{f \in C^\infty(U) : f \text{ es } G \text{ - invariante}\}.$$

Consideremos la familia de campos locales

$$\mathcal{E} = \{X_f \ : \ f \in C^\infty(U)^G, \text{ con } U \text{ abierto } G \text{ - invariante de } M\}.$$

Se define la ***G-distribución característica*** E como la distribución generalizada

$$E(x) := \{X_f(x) : f \in C^\infty(U)^G, \ x \in U\} \subseteq T_x M. \tag{2.1}$$

Lema 2.1. *Si $\phi : G \times M \longrightarrow M$ es propia, la definición de la distribución E se simplifica y (2.1) puede escribirse como*

$$E(x) = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)^G\}.$$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Proposición 2.2. *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica. La G-distribución característica E es diferenciable, completamente integrable y canónica.*

Demostración. E es diferenciable por definición.

Para ver que es completamente integrable usaremos el Teorema 1.8 que además nos provee de una caracterización de las hojas integrales en término de las G_E-órbitas.

Sea $x \in M$ y por simplicidad tomamos $\mathcal{F}_T = F_t \in G_D$ donde F_t es el flujo de X_f con $f \in C^\infty(U)^G$ y U un entorno abierto G-invariante de x. Para el caso general en el cual $\mathcal{F}_t$ es la composición de un número finito de flujos se usa inducción junto al argumento que usaremos a continuación.

Recordemos que la G-invariancia de f implica que X_f y su flujo F_t son G-equivariantes lo que implica que $Dom(F_t)$ es un subconjunto abierto G-invariante de U.

Queremos ver que

$$T_x F_t(E(x)) = E(F_t(x)).$$

Sea $X_g(x) \in E(x)$ con $g \in C^\infty(W)^G$ y W un subconjunto abierto G-invariante de $Dom(F_t)$. Como todo flujo Hamiltoniano es un mapa de Poisson (ver (1.16)), por el Lema 1.4 se tiene que

$$T_x F_t(X_g(x)) = T_x F_t(X_{(g\circ F_{-t})\circ F_t}(x)) = X_{g\circ F_{-t}}(F_t(x)) \in E(F_t(x)),$$

porque $g \circ F_{-t}$ es G-invariante por la G-invariancia de g y la G-equivariancia de F_t. Esto implica que $T_x F_t(E(x)) \subseteq E(F_t(x))$.

Sea ahora $X_g(F_t(x)) \in E(F_t(x))$. Usando nuevamente el Lema 1.4 se tiene que

$$X_g(F_t(x)) = T_x F_t(X_{g\circ F_t}(x))$$

y claramente se ve que $X_{g\circ F_t}(x)$ pertenece a $E(x)$ por ser $g \circ F_t$ G-invariante. Por lo tanto $E(F_t(x)) \subseteq T_x F_t(E(x))$.

Para ver que E es canónica o Poisson, consideremos $f, g \in C^\infty(M)$ tales que $df|_E = dg|_E = 0$.

Sea $x \in M$ y $h \in C^\infty(U)^G$ con U un entorno abierto G-invariante de x. Entonces

$$\begin{aligned} d\{f,g\}(x)X_h(x) &= X_h[\{f,g\}](x) \\ &= \{\{f,g\},h\}(x) \\ &= -\{\{h,f\},g\}(x) - \{\{g,h\},f\}(x) \\ &= \{X_h[f],g\}(x) - \{X_h[g],f\}(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

porque, por hipótesis $X_h[f] = X_h[g] = 0$.

□

Sea $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson, G un grupo de Lie actuando canónicamente sobre M y E la G-distribución característica asociada la cual, como hemos visto, es integrable. Sea $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/G_E$ la proyección canónica de M en el espacio de las G_E-orbitas. LLamaremos a $\mathcal{J}$ la ***aplicación momento óptimo*** de la G-acción canónica sobre $(M, \{\cdot,\cdot\})$. Nos referiremos a $M/E := M/G_E$ como el ***espacio de momentos***. En ejemplos concretos suele ser conveniente identificar al espacio de momentos M/G_E con estructuras matemáticas tales como variedades, espacios topológicos, etc. como se verá en los ejemplos que siguen. Para evitar confusiones de notación identificaremos $\mathcal{J}(m)$ con $\{G_E.m\}$ y no con $G_E.m$.

Una consecuencia importante de la definición anterior es el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.3. *(Teorema de Noether Óptimo.) Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson, G un grupo de Lie actuando canónicamente sobre M, E la G-distribución característica integrable asociada y $\mathcal{J}$ la aplicación momento óptimo. Entonces $\mathcal{J}$ es una constante de movimiento de la dinámica generada por cualquier Hamiltoniano G-invariante h, es decir*

$$\mathcal{J} \circ F_t = \mathcal{J},$$

donde F_t es el flujo de X_h.

Dos observaciones importantes son las siguientes. Primero, por la construcción de $\mathcal{J}$, sus conjuntos de nivel son las subvariedades sumergidas mas chicas tales que son respetadas por cualquier dinámica Hamiltoniana con Hamiltoniano G-invariante. Esto justifica el nombre de *momento óptimo.*

Por otro lado, en contraste con la aplicación momento usual J, la aplicación momento óptimo $\mathcal{J}$ está siempre definida.

EJEMPLO 2.4. Leyes de conservación sin aplicación momento.

Para el Teorema de Noether se necesita contar a priori con la existencia de una aplicación momento la cual da las cantidades conservadas asociadas a la simetría canónica dada. Sin embargo, aunque el sistema posea simetría canónica, la existencia de aplicación momento no está garantizada.

Por ejemplo, consideremos $M = S^1 \times S^1 = T^2$ con la forma simpléctica dada por $\omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$. Sea $G = S^1$ actuando en M de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times (S^1 \times S^1) &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (e^{i\phi}, (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})) &\longmapsto (e^{i(\phi+\theta_1)}, e^{i\theta_2}). \end{aligned}$$

Se comprueba enseguida que ψ es canónica, es decir, $\psi_g^*(\omega) = \omega$.

Esto implica que, para $\xi \in \mathbf{g}$, el generador infinitesimal X_ξ es localmente Hamiltoniano. Veamos que no es globalmente Hamiltoniano. Sea $x \in M$, $x = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ y $\phi(t) \subset S^1$ tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = \xi$. Entonces

$$\begin{aligned} X_\xi(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(e^{i\phi(t)}, x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{i\phi(t)+\theta_1}, e^{i\theta_2}) \\ &= (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \xi e^{i\theta_1}, 0). \end{aligned}$$

Como ψ es canónica, existe f definida localmente en $S^1 \times S^1$ tal que

$$i_{X_\xi}\omega = df. \tag{2.2}$$

Veamos que f no puede estar globalmente bien definida. Si existiese una tal f, sea

$$df = f_{\theta_1} d\theta_1 + f_{\theta_2} d\theta_2. \tag{2.3}$$

Por otro lado, el término de la izquierda en (2.2) es

$$\begin{aligned} i_{X_\xi}\omega &= (d\theta_1 \wedge d\theta_2)(X_\xi, \cdot\,) \\ &= d\theta_1(X_\xi)d\theta_2(\cdot) - d\theta_1(\cdot)d\theta_2(X_\xi) \\ &= (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, 0, \xi d\theta_2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se deduce que $f_{\theta_2} = \xi$ lo cual es imposible. Por lo tanto X_ξ no es globalmente Hamiltoniano y entonces no existe aplicación momento.

Para calcular la aplicación momento óptimo $\mathcal{J}$, necesitamos calcular primero la S^1-distribución característica E.

Es fácil ver que las funciones $f \in C^\infty(T^2)^{S^1}$ pueden ser escritas como

$$f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = g(e^{i\theta_2}),$$

con $g \in C^\infty(T^2)^{S^1}$.

Para $f \in C^\infty(T^2)^{S^1}$, por un razonamiento análogo al que vimos, puede verse que el campo Hamiltoniano X_f está dado por

$$X_f = (f_{\theta_2}, 0).$$

Por lo tanto, la S^1-distribución característica E está dada por

$$E(\theta_1, \theta_2) := E(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = \{(f_{\theta_2}, 0) : f \in C^\infty(U)^{S^1}, U \text{ entorno abierto } S^1\text{−invariante de } (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})\}.$$

Para $x = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$, las hojas integrales de E están dadas por

$$\mathcal{O}_x = \{(e^{i\varphi}, e^{i\theta_2}) : \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces el espacio de momentos $(S^1 \times S^1)/G_E$ es isomorfo a S^1 y por lo tanto la aplicación momento óptimo está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) &\longmapsto e^{i\theta_2}. \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejemplo 2.5. Momento óptimo para una acción Poisson no Hamiltoniana.

Sea $(\mathbb{R}^3, \{\cdot,\cdot\})$ la variedad de Poisson formada por el espacio Euclideano de dimesión 3, $\mathbb{R}^3$ junto con una estructura de Poisson inducida por el bivector de Poisson B que en coordenadas Euclideanas toma la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puede verse que para $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, el corchete de Poisson se escribe como

$$\{f, g\} = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z},$$

y entonces para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, el campo Hamiltoniano asociado X_f está dado por

$$X_f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.5}$$

Consideremos la acción del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, (x, y, z)) & \longmapsto & (x + \lambda, y, z). \end{array}$$

Para $\xi \in Lie(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$, se ve fácilmente que el generador infinitesimal de ξ está dado por

$$X_\xi(x, y, z) = (\xi, 0, 0)$$

y por lo tanto se deduce que la acción ϕ no admite aplicación momento porque usando (2.5) se ve que, para $\xi \neq 0$, $X_\xi \neq X_f$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Sin embargo podemos construir una aplicación momento óptimo. Notar que las funciones $\mathbb{R}$-invariantes $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ son de la forma

$$f(x, y, z) = \bar{f}(y, z),$$

con $\bar{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ arbitraria.

Para dichas funciones, los campos Hamiltonianos asociados son de la forma

$$X_f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Para encontrar las $\mathbb{R}_E$ órbitas sobre $\mathbb{R}^3$ hay que resolver la ecuación diferencial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \partial f/\partial y \\ \dot{y} & = & \partial f/\partial z \\ \dot{z} & = & -\partial f/\partial y. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Para una condición inicial (x_0, y_0, z_0), las soluciones son de la forma $(x(t), y(t), z(t))$ con $x(t)+z(t) = x_0+z_0$. Esto indica que la solución de (2.6) es de la forma $(x_0+\mu(t), y(t), z_0-\mu(t))$, para cierta $\mu(t)$ variando arbitrariamente con $f(x, y, z) = g(y, z)$.

Luego, los puntos alcanzables a partir de (x_0, y_0, z_0) son de la forma $(x_0 + \mu, y_0 + \nu, z_0 - \mu)$. Esto implica que las $\mathbb{R}_E$ órbitas sobre $\mathbb{R}^3$ coinciden con las órbitas de la acción de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\mu, \nu, (x, y, z)) & \longmapsto & (x + \mu, y + \nu, z - \mu). \end{array}$$

Entonces el espacio de momentos $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}_E$ puede ser identificado con $\mathbb{R}$ y la aplicación momento óptimo está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + z. \end{array}$$

Es inmediato que los flujos asociados a toda función $\mathbb{R}$-invariante $f(x,y,z) = \bar{f}(y,z)$ preservan los conjuntos de nivel de $\mathcal{J}$; mas aún, la función $\mathcal{J}$ es un Casimir de la variedad de Poisson $(\mathbb{R}^3, \{\cdot,\cdot\})$.

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.6. Una acción lineal canónica.

Consideremos $\mathbb{C}^3$ con la forma simpléctica dada por

$$\omega(z,z') = -Im\langle z,z'\rangle.$$

Puede verse que ω es equivalente a la forma simpléctica canónica en $\mathbb{R}^6$ vía la identificación de $\mathbb{C}^3$ con $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Consideremos las acción natural del grupo de Lie $SU(3)$ sobre $\mathbb{C}^3$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \phi : SU(3) \times \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (A,z) & \longmapsto & Az. \end{array}$$

Es claro que ϕ es una acción lineal, veamos que es canónica. Sean $z,z' \in \mathbb{C}^3$ y $A \in SU(3)$, entonces

$$\phi_A^*\omega(z,z') = \omega(Az,Az') = -Im\langle Az,Az'\rangle = -Im\langle z,z'\rangle = \omega(z,z').$$

Sea $\xi \in \mathfrak{su}(3) = Lie(SU(3))$ y sea $A(t) \subset SU(3)$ tal que $A(0) = I$ y $A'(0) = \xi$. Entonces el generador infinitesimal de ξ está dado por

$$\begin{array}{rcl} X_\xi(z) & = & \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi(A(t),z) \\ & = & \frac{d}{dt}|_{t=0}A(t)z \\ & = & \xi z. \end{array}$$

Además vale que

$$\xi + \bar{\xi}^T = 0. \tag{2.7}$$

En efecto, sea $A(t) \subset SU(3)$ tal que $A(0) = I$ y $A'(0) = \xi$. Vale que $A(t)\bar{A}^T(t) = I$ para todo t. Luego derivando se obtiene (2.7).

Por definición de aplicación momento, $\bar{J}(\xi)$ es el Hamiltoniano del generador infinitesimal X_ξ. Puede verse que

$$\bar{J}(\xi)(z) = -\frac{1}{2}\, Im\langle \xi z, z\rangle.$$

Puede verse que $\bar{J}$ depende linealmente de ξ y entonces puede definirse $J : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathfrak{su}(3)^*$ como

$$J(z)(\xi) = \bar{J}(\xi)(z).$$

Para $z \in \mathbb{C}^3$ se tiene que el subgrupo de isotropía de z está dado por

$$SU(3)_z = \{A \in SU(3) : Az = z\}.$$

Sea $\varphi_z : SU(3) \longrightarrow \mathbb{C}^3$ dada por $\varphi(A) = z - Az$. Se sabe que la $\dim_{\mathbb{R}} SU(3) = 9$. Por otro lado, la ecuación $\varphi_z(A) = 0$ consta de 6 ecuaciones y entonces se deduce que la $\dim_{\mathbb{R}} SU(3)_z = 3$, salvo en el caso en que $z = 0$ para el cual $SU(3)_z = SU(3)$. Luego $KerT_zJ = Ker\ dJ(z) \supseteq \mathfrak{su}_z$ lo que implica que T_zJ no puede ser suryectivo y entonces la aplicación momento J es siempre singular.

Calculemos ahora la aplicación momento óptimo. Como $SU(3)$ es compacto, la acción ϕ es propia y entonces la G-distribución característica E está generada por los campos X_h con $h \in C^\infty(\mathbb{C}^3)^{SU(3)}$.

Puede verse que toda función $h \in C^\infty(\mathbb{C}^3)^{SU(3)}$ se escribe como

$$h = \psi \circ f,$$

donde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in C^\infty(\mathbb{C}^3)$ está dada por

$$f(z) = \frac{1}{2}\langle |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \rangle = \frac{1}{2}\langle z, z\rangle. \tag{2.8}$$

Sea $h = \psi \circ f$ con $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$dh(z) = \psi'(f(z))df(z).$$

Por lo tanto basta con conocer el campo Hamiltonianos de la función $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ de la forma (2.8). Puede verse que dicho campo Hamiltonianos está dado por

$$X_f(z) = -iz.$$

En efecto, para $\delta z \in T_z\mathbb{C}^3$ se tiene que

$$\begin{aligned} df(z)(\delta z) &= \tfrac{1}{2}\langle z, \delta z\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \delta z, z\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle z, \delta z\rangle + \tfrac{1}{2}\overline{\langle z, \delta z\rangle} \\ &= Re(\langle z, \delta z\rangle) \\ &= -Im(\langle iz, \delta z\rangle) \\ &= \omega(-iz, \delta z). \end{aligned}$$

Luego el flujo Hamiltoniano de X_f está dado por

$$F_t(z_1, z_2, z_3) = (z_1e^{-it}, z_2e^{-it}, z_3e^{-it})$$

y entonces el espacio de órbitas $\mathbb{C}^3/SU(3)_E$ coincide con $\mathbb{C}^3/S^1$ con S^1 actuando en $\mathbb{C}^3$ de la siguiente manera

$$e^{i\phi}.(z_1, z_2, z_3) = (e^{i\phi}z_1, e^{i\phi}z_2, e^{i\phi}z_3).$$

Luego se tiene que

$$\mathcal{J} : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3/S^1.$$

El espacio cociente puede ser identificado con $(\mathbb{CP}(2) \times \mathbb{R}^+) \cup \{*\}$ donde $\{*\}$ denota " a singleton", o dicho de otra manera se identifica con el cono $C(\mathbb{CP}(2))$ sobre $\mathbb{CP}(2)$. Si π :

$\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3/S^1$ es la proyección canónica y $z = (z_1, z_2, z_3)$, dicha identificación está dada por la alpicación que asigna

$$\pi(z) \longmapsto \begin{cases} \left(\left[\frac{z}{||z||} \right], ||z|| \right) & si\ z \neq 0 \\ * & si\ z = 0 \end{cases}$$

Luego se tiene la siguiente expresión para la aplicación momento óptimo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J} : \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & (\mathbb{CP}(2) \times \mathbb{R}^+) \cup \{*\} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \left(\left[\frac{z}{||z||} \right], ||z|| \right) & si\ z \neq 0 \\ * & si\ z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$\diamondsuit$

2.2. Momento Óptimo para acciones propias globalmente Hamiltonianas

En esta sección asumiremos que (M, ω) es una variedad simpléctica y que G es un grupo de Lie cuya acción sobre M es propia y globalmente Hamiltoniana con aplicación momento asociada $J : M \longrightarrow \mathbf{g}^*$. Para $x \in M$, definimos el conjunto

$$M_{G_x} = \{y \in M : G_y = G_x\}.$$

Se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.7. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando sobre M en forma globalmente Hamiltoniana (no necesariamente propia) con aplicación momento asociada $J : M \longrightarrow \mathbf{g}^*$. Si E es la G-distribución característica, entonces para todo $x \in M$*

$$E(x) \subseteq Ker\ T_x J \cap T_x M_{G_x}. \tag{2.9}$$

Equivalentemente se tiene que

$$\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(x)) \subseteq (J^{-1}(\mu) \cap M_{G_x})_{c.c.x}$$

donde $\mu = J(x) \in \mathbf{g}^*$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in M$, U un entorno abierto G-invariante de x y sea $f \in C^\infty(U)^G$. Queremos ver que $X_f(x) \in Ker\ T_x J \cap T_x(M_{G_x})$.

Veamos primero que $X_f(x) \in Ker\ T_x J = T_x(J^{-1}(\mu))$. Como $f \in C^\infty(U)^G$, se tiene por el teorema de Noether que

$$J(F_t(x)) = J(x), \quad \forall t$$

donde F_t es el flujo de X_f. De aquí se deduce que $F_t(x) \subseteq J^{-1}(\mu)$ y verifica que $F_0(x) = x$. Por lo tanto $X_f(x) = \frac{d}{dt} F_t(x)|_{t=0} \in T_x(J^{-1}(\mu))$.

Queremos probar ahora que $X_f(x) \in T_x M_{G_x}$, es decir, que $G_{F_t(x)} = G_x$ para t lo suficientemente chico. Se tiene que el flujo $F_t : U \to \mathbb{R}$ de X_f es G-invariante, esto es

$$F_t(gx) = gF_t(x).$$

Sea $h \in G_x$, se tiene que $hF_t(x) = F_t(hx) = F_t(x)$, luego $h \in G_{F_t(x)}$. Por lo tanto $G_x \subseteq G_{F_t(x)}$.

Sea ahora $g \in G_{F_t(x)}$, luego $gF_t(x) = F_t(x)$ y se tiene que

$$x = F_{-t}(F_t(x)) = F_{-t}(gF_t(x)) = gF_{-t}(F_t(x)) = x,$$

donde se usó la G-invariancia de F_{-t}. Entonces $x = gx$ y se tiene que $g \in G_x$. Por lo tanto $G_{F_t(x)} \subseteq G_x$. $\square$

En lo que sigue veremos que pueden darse condiciones necesarias y suficiente para que se verifique la igualdad en (2.9).

TEOREMA 2.8. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando propiamente sobre M y en forma globalmente Hamiltoniana con aplicación momento asociada $J : M \longrightarrow \mathbf{g}^*$. Si E es la G-distribución característica, entonces para todo $x \in M$*

$$E(x) = Ker\ T_x J \cap T_x M_{G_x}. \tag{2.10}$$

Mas aún, la G_E-orbita del punto $x \in M$ es la componente conexa de la subvariedad $J^{-1}(\mu) \cap M_{G_x}$ que contiene a x, esto es

$$\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(x)) = (J^{-1}(\mu) \cap M_{G_x})_{c.c.x} \tag{2.11}$$

donde $\mu = J(x) \in \mathbf{g}^*$.

Para demostrar este teorema necesitamos los siguientes resultados previos.

PROPOSICIÓN 2.9. *(Ortega) Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción. Sea $x \in M$, $H = G_x$ su subgrupo de isotropía y $\mathcal{O}_x = G.x$ su órbita. Entonces*

$$((T_x \mathcal{O}_x)^\circ)^H \supseteq span\ \{df(x) : f \in C^\infty(M)^G\}.$$

Si además la acción es propia, se verifica la igualdad.

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. $\square$

LEMA 2.10. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $B \in \Lambda^2(T^*M)$ el bivector de Poisson asociado. Entonces para todo $x \in M$ y para todo subespacio vectorial $V \subset T_x M$, se tiene que*

$$V^\omega = B^\sharp(x)(V^\circ) =: (V^\circ)^\sharp.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver Apéndice A. $\square$

LEMA 2.11. *Sea $(M, \{\cdot, \cdot\})$ una variedad de Poisson y $B \in \Lambda^2(T^*M)$ el bivector de Poisson asociado. Sea G un grupo de Lie actuando canónicamente sobre M. Consideremos las acciones levantadas al tangente y al cotangente. Entonces, para todo $x \in M$ se satisface que*

1. *$B^\sharp(x) : T_x^* M \longrightarrow T_x M$ es G_x-equivariante.*

2. *Si el corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ es inducido por una forma simpléctica ω entonces $\omega^\flat$ es G_x-equivariante y para todo subespacio $V \subset T_x^*M$*

$$B^\sharp(x)(V^{G_x}) = (B^\sharp(x)(V))^{G_x},$$

o equivalentemente

$$(V^{G_x})^\sharp = (V^\sharp)^{G_x}.$$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Lema 2.12. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y sea G un grupo de Lie actuando sobre M de forma globalmente Hamiltoniana con aplicación momento asociada $J : M \longrightarrow \mathbf{g}^*$. Entonces, para todo $x \in M$ y $\mu = J(x)$ se tiene que*

1. *$Ker\ T_xJ = T_x(J^{-1}(\mu))$*
2. *$(T_x(G.x))^\omega = Ker(T_xJ)$.*

Demostración. Ver Apéndice A. □

Lema 2.13. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo compacto que actúa a izquierda sobre la variedad V. Consideremos el producto twist $G \times_H V$, entonces se tiene que*

1. *para $[g,v]_H \in G \times_H V$,*

$$G_{[g,v]_H} = gH_vg^{-1}$$

donde H_v es el subgrupo de isotropía de $v \in V$ por la acción de H sobre V.

2. *Hay una identificación natural entre $(G \times_H V)_H$ y $N(H) \times_H V^H$, donde $N(H)$ es el normalizador de H. Esta identificación resulta ser una igualdad.*
3. *$(G \times_H V)_H$ es una subvariedad de $G \times_H V$ y se tiene que*

$$T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H) = \left(T_{[e,0]_H}(G \times_H V)\right)^H.$$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Lema 2.14. *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica y propia del grupo de Lie G sobre la variedad simpléctica (M,ω). Sea $x \in M$, $H = G_x$ y $i : M_H \hookrightarrow M$ la inclusión. Entonces se tiene que*

1. *$(M_H, i^*\omega)$ es una subvariedad simpléctica de (M,ω),*
2. *el grupo $L = N(H)/H$ actúa en forma canónica, libre y propia sobre M_H de la siguiente forma*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : L \times M_H & \longrightarrow & M_H \\ (nH, z) & \longmapsto & n.z \end{array}$$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Demostración. *D*emostración del Teorema 2.8.

Sea $x \in M$ tal que $\mu = J(x) \in \mathbf{g}^*$, $\mathcal{J}(x) = \rho$ y $H := G_x$. Como estamos trabajando localmente se puede reemplazar, sin pérdida de generalidad, a M por un tubo $G \times_H V$ con

$V \subset T_xM/T_xG.x$ y al punto $x \in M$ por el punto $[e,0]_H \in G \times_H V$. Se elige una métrica H-invariante en $T_xM/T_xG.x$.

La expresión (2.10) se deduce de las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
E(x) &= span\{X_f(x) : f \in C^\infty(M)^G\} \\
&= B^\sharp(x)\left(span\{df(x) : f \in C^\infty(M)^G\}\right) \\
&= B^\sharp(x)\left[((T_x(G.x))^\circ)^{G_x}\right] && \text{Por Proposición 2.9} \\
&= \left[B^\sharp(x)((T_x(G.x))^\circ)\right]^{G_x} && \text{Por 2. del Lema 2.11} \\
&= ((T_x(G.x))^\omega)^{G_x} && \text{Por Lema 2.10} \\
&= (Ker(T_xJ))^{G_x} && \text{Por Lema 2.12} \\
&= Ker(T_xJ) \cap (T_xM)^{G_x} \\
&= Ker(T_xJ) \cap T_xM_{G_x} && \text{Por 3. del Lema 2.13.}
\end{aligned}$$

Probaremos ahora la caracterización que da el Teorema de las variedades integrales de E .

Sea $m \in M$ tal que $\mu = J(m) \in \mathbf{g}^*$, $\mathcal{J}(m) = \rho$ y $H := G_m \subset G$ su grupo de isotropía. Por el Lema (2.14) el subconjunto $M_H \subset M$ es una subvariedad simpléctica de M. Mas aún, es fácil ver que la restricción $J|_{M_H}$ de J a M_H es una aplicación con rango constante y entonces, por el Teorema de Fibración (Teorema de rango constante) (, Teorema 3.5.18), $J|_{M_H}^{-1}(\mu) = J^{-1}(\mu) \cap M_H$ es una subvariedad de M_H y entonces de M, que contiene al punto m. Dado que para todo punto $z \in J^{-1}(\mu) \cap M_H$ se tiene que $T_z(J^{-1}(\mu) \cap M_H) = T_z(J|_{M_H}^{-1}(\mu)) = Ker\ T_zJ \cap T_zM_H = E(z)$, podemos concluir que la componente conexa $(J^{-1}(\mu) \cap M_H)_{c.c.m}$ de la subvariedad $J^{-1}(\mu) \cap M_H$ que contiene el punto de m es una variedad integral de E que contiene a m.

Al mismo tiempo, la caracterización de los conjuntos de nivel de $\mathcal{J}$ como las G_E-órbitas implica, vía el Teorema de Noether y el principio de conservación de la isotropía que $\mathcal{J}^{-1}(\rho) = G_E.m \subset (J^{-1}(\mu) \cap M_H)_{c.c.m}$. El resultado se sigue de la unicidad de las variedades integrales maximales de la distribución generalizada ([**LM87**], Teorema 2.3, Apéndice 3). □

2.3. Reducción óptima

Consideremos (M,ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con momento óptimo $\mathcal{J} : M \to M/G_E$ y sea $\rho \in G_E$. Nos interesa analizar en qué casos los conjuntos de nivel $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ son subvariedades.

Esto se verifica para el caso en el cual la acción del grupo G es globalmente hamiltoniana y propia, como vimos en el Teorema 2.8.

En los lemas siguientes veremos que esto se sigue verificando bajo hipótesis mas débiles.

Lema 2.15. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie que actúa propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con aplicación momento optimo*

$\mathcal{J} : M \to M/G_E$. Entonces para todo $\rho \in M/G_E$, el conjunto $\mathcal{J}^{-1}(\rho) \subset M$ está incluido en la componente conexa de alguna variedad M_H, con H el subgrupo de isotropía para algún $m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)$.

Demostración. Ver ([**OR02**]). □

Se tiene la siguiente definición.

Definición 2.16. Bajo las hipótesis del Lema anterior, diremos que $\rho \in M/G_E$ satisface la ***condición de cerradura*** si $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ es cerrada en M_H.

Ejemplo 2.17. La condición de cerradura se verifica siempre en el caso de acciones globalmente hamiltonianas.

Ejemplo 2.18. Sea $\rho \in M/G_E$ tal que $\mathcal{J}^{-1}(\rho) \subset M_H$. La G-acción canónica sobre M induce una acción canónica natural del grupo $N(H)/H$ sobre la variedad simpléctica M_H. Sea $L_\rho := (N(H)/H)^\rho$ el subgrupo de $N(H)/H$ que deja invariante a M_H^ρ, la componente conexa de M_H que contiene a ρ. Puede verse que si la acción $L_\rho \times M_H^\rho \to M_H^\rho$ tiene una aplicación momento J^ρ, entonces ρ satisface la condición de cerradura.

Proposición 2.19. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con aplicación momento óptimo $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/G_E$. Sea ρ un M/G_E que satisface la condición de cerradura. Si M_H es la variedad en la cual el conjunto de nivel $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ está incluido por el Lema (2.15), entonces $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ es una subvariedad cerrada de M_H y entonces una subvariedad de M. Como consecuencia, si M_H es cerrada en M entonces $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ es una subvariedad cerrada de M.*

Proposición 2.20. *En las hipótesis de la Proposición anterior, para todo $\rho \in M/G_E$ que satisface la condición de cerradura, el subgrupo de isotropía $G_\rho \subset G$ de ρ con respecto a la G-acción sobre M/G_E dada por $\varphi_G(\rho) = \mathcal{J}(m.\rho) \in M/G_E$, es un subgrupo de Lie cerrado de G. Mas aún, para todo $m \in \mathcal{J}^{-1}(\rho)$ se tiene que*

$$T_m(G_\rho.m) = T_m(\mathcal{J}^{-1}(\rho)) \cap T_m(G.m).$$

2.3.1. Método de la reducción óptima.

Proposición 2.21. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con aplicación momento óptimo $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/G_E$. Entonces para todo ρ en M/G_E que satisface la condición de cerradura, el subgrupo de isotropía G_ρ actúa sobre la subvariedad $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ y el correspondiente espacio de órbitas $M_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ es una variedad cociente regular, esto es, puede ser dotada de de una única estructura diferenciable suave que hace que la proyección natural $\pi_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ sea una submersión.*

Estamos en condiciones de enunciar el resultado mas importante de esta sección.

Teorema 2.22. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie actuando propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con aplicación momento óptimo $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/G_E$. Entonces para todo ρ en M/G_E que satisface la condición de cerradura, el espacio reducido $M_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)/G_\rho$ tiene una única estructura simpléctica ω_ρ definida por*

$$\pi_\rho^* \omega_\rho = i_\rho^* \omega,$$

donde $\pi_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow M_\rho$ es la proyección canónica e $i_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \longrightarrow M$ es la inclusiíon.

Se tiene el siguiente teorema para la reducción óptima de la dinámica.

Teorema 2.23. *Consideremos una variedad simpléctica (M, ω). Sea G un grupo que actúa propia y canónicamente sobre M. Sea E la G-distribución característica con aplicación momento óptimo $\mathcal{J} : M \longrightarrow M/G_E$ y $h \in C^\infty(M)^G$ un Hamiltoniano G-invariante. Entonces,*

1. *El flujo Hamiltonianoa F_t de H_h deja invariante el conjunto de nivel de $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^{-1}(\rho)$ y conmuta con la G-acción, entonces si $\rho \in M/G_E$ satisface la condición de cerradura, F_t induce un flujo F_t^ρ sobre M_ρ unívocamente determinado por*

$$\pi_\rho \circ F_t \circ i_\rho = F_t^\rho \circ \pi_\rho,$$

   donde $i_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \hookrightarrow M$ es la inclusión canónica y $\pi_\rho : \mathcal{J}^{-1}(\rho) \to M_\rho$ es la proyección.
2. *El flujo F_t^ρ es Hamiltoniano en (M_ρ, ω_ρ) co función Hamiltoniana $h_\rho \in C^\infty(M_\rho)$ definida por*

$$h_\rho \circ \pi_\rho = h \circ i_\rho.$$

   Llamaremos a h_ρ el **Hamiltoniano reducido**. *Los campos vectoriales X_h y X_{h_ρ} están π_ρ-relacionados.*
3. *Sea $k \in C^\infty(M)^G$ otra función G-invariante. Entonces $\{h, k\}$ es también G-invariante y $\{h, k\}_\rho = \{h_\rho, k_\rho\}_{M_\rho}$, donde $\{\ \cdot\ ,\cdot\ \}_{M_\rho}$ denota el corchete de Poisson sobre M asociado a la estructura simpléctica ω_ρ.*

Capítulo 3

El Problema de los dos cuerpos

Realizaremos en este capítulo el estudio del problema de los dos cuerpos como un sistema Hamiltoniano con Hamiltoniano arbitrario C^∞, simétrico con respecto a la simetría dada por la acción diagonal levantada natural del grupo Euclidiano $SE(3)$ sobre $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Realizaremos el estudio detallado de la topología del momento óptimo y de la reducción óptima para este problema. Esto se logra en base a parametrizaciones precisas de estos objetos que los identifican también como variedades diferenciales.

Se hace evidente de este modo como estas notables herramientas permiten usar al máximo la simetría del sistema para sacar conclusiones sobre la dinámica.

En el Apéndice B (Captulo 7) puede verse este estudio usando el momento estándar y la reducción de Marsden-Weinstein.

3.1. Espacio de configuración y grupo de simetría

Vamos a considerar primero la geometría del sistema.

Consideremos la acción diagonal a izquierda del grupo $SE(3)$ sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rcl} \phi : SE(3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \\ ((A, a), (q^1, q^2)) & \longmapsto & (Aq^1 + a, Aq^2 + a). \end{array}$$

Indicaremos a veces $(q^1, q^2) = q$.

De acuerdo con la identificación canónica

$$T(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \tag{3.1}$$

escribiremos un elemento $v_q \in T_q(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ en la forma

$$v_q = (q^1, q^2, v^1, v^2).$$

También se tiene la identificación canónica

$$T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^*. \tag{3.2}$$

Escribiremos un elemento $\alpha_q \in T^*_q(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ en la forma

$$\alpha_q = (q^1, q^2, p_1, p_2).$$

Indicaremos a veces $(p_1, p_2) = p$.

Usando (1.29), notaremos p^i al elemento de $\mathbb{R}^3$ que satisface

$$p_i = \langle\langle p^i, \cdot\rangle\rangle, \;\; i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Sea $q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Calculemos la acción ϕ levantada al tangente,

$$\begin{aligned} T_q\phi_{(A,a)} : T_q(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \;\; &\longrightarrow \;\; T_{\phi_{(A,a)}(q)}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \\ v_q \;\; &\longmapsto \;\; T_q\phi_{(A,a)}(v_q). \end{aligned}$$

Usando la identificación (3.1) puede verse que

$$T_q\phi_{(A,a)}(q^1, q^2, v^1, v^2) = (Aq^1 + a, Aq^2 + a, Av^1, Av^2).$$

Calculemos ahora, la acción ϕ levantada al cotangente $T^*\phi : SE(3) \times T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que está dada por $(T^*\phi)_{(A,a)}(\alpha_q) = T_q^*\phi_{(A,a)}(\alpha_q)$, para $q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\alpha_q \in T_q^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ y donde se tiene por definición que

$$\langle T_q^*\phi_{(A,a)}(\alpha_q), v_{\phi_{(A,a)}(q)}\rangle = \langle \alpha_q, T_{\phi_{(A,a)}(q)}\phi_{(A,a)^{-1}}(v_q)\rangle,$$

para $v_{\phi_{(A,a)}(q)} \in T_{\phi_{(A,a)}(q)}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Usando las identificaciones (3.1), (3.2) y (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle T_q^*\phi_{(A,a)}(\alpha_q), v_{\phi_{(A,a)}(q)}\rangle \;\; &= \;\; \langle\langle p^1, A^{-1}v^1\rangle\rangle + \langle\langle p^2, A^{-1}v^2\rangle\rangle \\ &= \;\; \langle\langle Ap^1, v^1\rangle\rangle + \langle\langle Ap^2, v^2\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(T^*\phi)_{(A,a)}(q, p) = (Aq^1 + a, Aq^2 + a, Ap^1, Ap^2)$$

Veamos que la acción $T^*\phi$ es propia. Sean (q_n, p_n) y (A_n, a_n) sucesiones en $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ y $SE(3)$ respectivamente tales que

$$(q_n, p_n) \longrightarrow_{n\to\infty} (q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \tag{3.4}$$

$$(T^*\phi)_{(A_n,a_n)}(q_n, p_n) = (A_nq_n^1 + a_n, A_nq_n^2 + a_n, A_np_n^1, A_np_n^2) \longrightarrow_{n\to\infty} (\overline{q}, \overline{p}) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3). \tag{3.5}$$

De (3.4) se obtiene que $(q_n^1, q_n^2) = q_n \longrightarrow_{n\to\infty} q = (q^1, q^2)$ y como A_n1 es una sucesión de $SO(3)$ y $SO(3)$ es compacto se tiene que existe una subsucesión A_{n_k} de A_n que es convergente. Supongamos que $A_{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} A$. Entonces se tiene que

$$A_{n_k}q_{n_k}^1 \longrightarrow_{k\to\infty} Aq^1. \tag{3.6}$$

De la primera coordenada en (3.5) se obtiene que

$$A_{n_k}q_{n_k}^1 + a_{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} \overline{q}^1. \tag{3.7}$$

De (3.6) y (3.7) se obtiene que $a_{n_k} \longrightarrow_{k\to\infty} \overline{q}^1 - Aq^1$, es decir que la sucesiíon $\{a_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente.

Por lo tanto la sucesión (A_n, a_n) tiene una subsucesión convergente como se quería probar.

3.1.1. Cálculo de la aplicación momento.

Para $q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ el generador infinitesimal de la acción ϕ sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ correspondiente al elemento $(\hat{\xi}, u) \in \mathfrak{se}(3)$ está dado por

$$(\hat{\xi}, u)_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(q) = (\hat{\xi}q^1 + u, \hat{\xi}q^2 + u).$$

Usando la identificación (1.24) se tiene para $(\xi, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$(\xi, u)_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(q) = (\xi \times q^1 + u, \xi \times q^2 + u).$$

La aplicación momento $J : T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{se}(3)^*$ para la acción levantada al cotangente $T^*\phi$ de la acción ϕ está dada por

$$J(\alpha_q)(\hat{\xi}, u) = \alpha_q((\hat{\xi}, u)_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(q)),$$

donde $q \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \alpha_q \in T_q^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), (\hat{\xi}, u) \in \mathfrak{se}(3)$.

Usando las identificaciones (1.24), (3.2) y (3.3), se tiene que

$$\begin{aligned} J(q,p)(\xi,u) &= \langle p^1, \xi \times q^1 + u\rangle + \langle p^2, \xi \times q^2 + u\rangle \\ &= \langle p^1, \xi \times q^1\rangle + \langle p^1, u\rangle + \langle p^2, \xi \times q^2\rangle + \langle p^2, u\rangle \\ &= \langle\langle q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2, \xi\rangle\rangle + \langle\langle p^1 + p^2, u\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene finalmente

$$J(q,p) = (q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 \ , p^1 + p^2). \tag{3.8}$$

3.2. Reducción óptima de Ortega- Ratiu para el problema de los dos cuerpos con Hamiltoniano simétrico arbitrario

En este capítulo calcularemos, para cada $\rho = \mathcal{J}(q,p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/_{G_E}$, el cociente

$$M_\rho = \mathcal{J}^{-1}(\rho)/_{G_\rho}$$

donde G_ρ es el subgrupo de isotropía de ρ por la acción de $SE(3)$ sobre $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/_{G_E}$ dada por

$$\begin{array}{rcl}\bar{\phi} : SE(3) \times T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/_{G_E} & \longrightarrow & T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/_{G_E} \\ ((A,a),\rho) & \longmapsto & \mathcal{J}((A,a).(q,p).\end{array}$$

Para ello calcularemos primero el momento óptimo $\mathcal{J}(q,p)$ para cada $(q,p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, es decir, calcularemos las componentes conexas de

$$J^{-1}(\alpha,u) \cap T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_{SE(3)_{(q,p)}}.$$

Como ya vimos, la acción levantada al cotangente de la acción diagonal $T^*\phi : SE(3) \times T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ está dada por

$$(T^*\phi)_{(A,a)}(q^1,q^2,p^1,p^2) = (Aq^1 + a, Aq^2 + a, Ap^1, Ap^2).$$

Como vimos admite una aplicación momento $J : T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \to \mathfrak{se}(3)$ y está dada por

$$J(q^1,q^2,p^1,p^2) = (q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2, p^1 + p^2).$$

Cálculo de todos los posibles subgrupos de isotropía de la acción $T^*\phi$.

Sea $(q,p) = (q^1,q^2,p^1,p^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{array}{rcl}SE(3)_{(q,p)} & = & \{(A,a) \in SE(3) : (T^*\phi)_{(A,a)}(q,p) = (q,p)\} \\ & = & \{(A,a) \in SE(3) : Aq^1 + a = q^1,\ Aq^2 + a = q^2,\ Ap^1 = p^1,\ Ap^2 = p^2\}\end{array} \tag{3.9}$$

Consideremos los siguientes casos.

Caso (0)*:* $m_0 = (0,0,0,0)$.

Es claro que

$$SE(3)_{m_0} = \{(A,a) \in SE(3) : a = 0\}. \tag{3.10}$$

Puede verse de (3.10) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}SE(3)_{m_0} & \longrightarrow & SO(3) \\ (A,0) & \longmapsto & A.\end{array}$$

Caso (1)*:* $m_1 = (q^1,q^2,0,0)$ *con* $q^1 - q^2 = 0$.

Sea $(A,a) \in SE(3)_{m_1}$. Puede verse que para cada $A \in SO(3)$ existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^1 + a = q^1$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_1} = \{(A,a) \in SE(3) : a = q^1 - Aq^1\} \tag{3.11}$$

Puede verse de (3.11) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}SE(3)_{(q^1,q^1,0,0)} & \longrightarrow & SO(3) \\ (A, q^1 - Aq^1) & \longmapsto & A.\end{array}$$

Vamos a ver que si $m = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ es tal que $SE(3)_m = SE(3)_{(q^1,q^1,0,0)}$ entonces $p^1 = p^2 = 0$ y $q^1 = q^2$. En efecto, para todo $A \in SO(3)$ se tiene que $Ap^1 = p^1$ y $Ap^2 = p^2$ de donde resulta que $p^1 = p^2 = 0$. Además, para todo $A \in SO(3)$ se tiene $Aq^2 + q^1 - Aq^1 = q^2$ de donde resulta que $A(q^2 - q^1) = q^2 - q^1$ y por lo tanto $q^1 = q^2$.

Caso (2)*:* $m_2 = (q^1, q^2, 0, 0)$ *con* q^1 *y* q^2 *paralelos,* $q^1 \neq q^2$.

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_2}$, entonces $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$ y $a = q^1 - Aq^1$. Del hecho de que q^1 es paralelo a q^2 se desprende que $a = 0$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_2} = \{(A, a) \in SE(3) : A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2 \text{ y } a = 0\} \tag{3.12}$$

Puede verse de (3.12) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_2} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, 0) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de $q^1 - q^2$ en el sentido positivo dado por $q^1 - q^2$ y la orientación del espacio.

Puede verse que los puntos $m = (\lambda(q^1 - q^2), \beta(q^1 - q^2), 0, 0)$ con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \beta$ tienen el mismo grupo de isotropía que m_2, para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \beta$, es decir

$$SE(3)_m = SE(3)_{m_2}.$$

Caso (3)*:* $m_3 = (q^1, q^2, 0, 0)$ *con* q^1 *y* q^2 *no paralelos.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_3}$, entonces $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$. Además puede verse que para cada $A \in SO(3)$ tal que $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$ existe un único $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^1 + a = q^1$ y $Aq^2 + a = q^2$ dado por $a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_3} = \{(A, a) \in SE(3) : A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2 \text{ y } a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2\} \tag{3.13}$$

Puede verse de (3.13) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_3} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, q^1 - Aq^1) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de $q^1 - q^2$ en el sentido positivo dado por $q^1 - q^2$ y la orientación del espacio.

Puede verse que los puntos $m = (\lambda(q^1 - q^2) + q^1, \beta(q^1 - q^2) + q^1, 0, 0)$ con $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \beta$ tiene el mismo grupo de isotropía que m_3 para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda \neq \beta$, es decir

$$SE(3)_m = SE(3)_{m_3}.$$

Observar que un punto $(\bar{\lambda}(q^1 - q^2) + q^2, \bar{\beta}(q^1 - q^2) + q^2, 0, 0)$ se puede pensar como antes tomando $\lambda = \bar{\lambda} + 1$.

Caso (4)*:* $m_4 = (q^1, q^2, 0, p^2)$ *con* $p^2 \neq 0$*,* $q^1 - q^2$ *no paralelo a* p^2*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_4}$. Entonces $Ap^2 = p^2$ $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$. Del hecho de que $q^1 - q^2$ no paralelo a p^2 puede verse que $A = I$. Por otro lado se tiene que $a = q^1 - Aq^1 = 0$

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_4} = \{(I, 0)\} \tag{3.14}$$

Caso (5)*:* $m_5 = (q^1, q^2, 0, p^2)$ *con* $p^2 \neq 0$*,* $q^1 - q^2$ *paralelo a* p^2*,* q^1 *y* q^2 *no paralelos a* p^2*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_5}$. Entonces $Ap^2 = p^2$ y puede verse que para cada $A \in SO(3)_{p^2}$ existe un único $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^1 + a = q^1$ y $Aq^2 + a = q^2$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_5} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^2 = p^2 \text{ y } a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2\} \tag{3.15}$$

Puede verse de (3.15) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_5} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, q^1 - Aq^1) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^2 en el sentido positivo dado por p^2 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^2 + q^1, \beta p^2 + q^1, 0, \gamma p^2)$ con $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma \neq 0$. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_5}$.

Caso (6)*:* $m_6 = (q^1, q^2, 0, p^2)$ *con* $p^2 \neq 0$*,* q^1 *y* q^2 *paralelos a* p^2*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_6}$. Entonces $Ap^2 = p^2$ y $a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2$. Como q^1 y q^2 son paralelos a p^2 se tiene que $a = 0$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_6} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^2 = p^2 \text{ y } a = 0\} \tag{3.16}$$

Puede verse de (3.16) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_6} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, 0) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^2 en el sentido positivo dado por p^2 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^2, \beta p^2, 0, \gamma p^2)$ con $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_6}$.

Caso (7)*:* $m_7 = (q^1, q^2, p^1, 0)$ *con* $p^1 \neq 0$*,* $q^1 - q^2$ *no paralelo a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_7}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$. Del hecho de que $q^1 - q^2$ no es paralelo a p^1 puede verse que $A = I$. Por otro lado se tiene que $a = q^1 - Aq^1 = 0$

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_7} = \{(I, 0)\} \tag{3.17}$$

Caso (8)*:* $m_8 = (q^1, q^2, p^1, 0)$ *con* $p^1 \neq 0$*,* $q^1 - q^2$ *paralelo a* p^1*,* q^1 *y* q^2 *no paralelos a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_8}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y puede verse que para cada $A \in SO(3)_{p^1}$ existe un único $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^1 + a = q^1$ y $Aq^2 + a = q^2$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_8} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^1 = p^1 \text{ y } a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2\} \tag{3.18}$$

Puede verse de (3.18) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_8} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, q^1 - Aq^1) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^1 en el sentido positivo dado por p^1 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^1 + q^1, \beta p^1 + q^1, \gamma p^1, 0)$ con $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma \neq 0$. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_8}$.

Caso (9)*:* $m_9 = (q^1, q^2, p^1, 0)$ *con* $p^1 \neq 0$*,* q^1 *y* q^2 *paralelos a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_9}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y $a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2$. Como q^1 y q^2 son paralelos a p^1 se tiene que $a = 0$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_9} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^1 = p^1 \text{ y } a = 0\} \tag{3.19}$$

Puede verse de (3.19) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} SE(3)_{m_9} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, 0) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^1 en el sentido positivo dado por p^1 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^1, \beta p^1, \gamma p^1, 0)$ con $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_9}$.

Caso (10)*:* $m_{10} = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ *con* p^1 *paralelo a* p^2*,* $p^1 \neq 0$*,* $p^2 \neq 0$*,* $q^1 - q^2$ *no paralelo a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_{10}}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y $A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2$. Del hecho de que $q^1 - q^2$ no es paralelo a p^1 puede verse que $A = I$. Por otro lado se tiene que $a = q^1 - Aq^1 = 0$

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_{10}} = \{(I, 0)\} \tag{3.20}$$

Caso (11)*:* $m_{11} = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ *con* p^1 *paralelo a* p^2*,* $p^1 \neq 0$*,* $p^2 \neq 0$ *y* $q^1 - q^2$ *paralelo a* p^1*,* q^1 *y* q^2 *no paralelos a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_{11}}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y como antes puede verse que para cada $A \in SO(3)_{p^1}$ existe $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^1 + a = q^1$ y $Aq^2 + a = q^2$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_{11}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^1 = p^1 \text{ y } a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2\} \tag{3.21}$$

Puede verse de (3.21) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{lcl} SE(3)_{m_{11}} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, q^1 - Aq^1) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^1 en el sentido positivo dado por p^1 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^1 + q^1, \beta p^1 + q^1, \gamma p^1, \delta p^1)$ con γ, δ no nulos. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_{11}}$.

Caso (12)*:* $m_{12} = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ *con* p^1 *paralelo a* p^2*,* $p^1 \neq 0$*,* $p^2 \neq 0$*,* q^1 *y* q^2 *paralelos a* p^1*.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_{12}}$. Entonces $Ap^1 = p^1$ y $a = q^1 - Aq^1 = q^2 - Aq^2$. Como q^1 y q^2 son paralelos a p^1 se tiene que $a = 0$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_{12}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ap^1 = p^1 \text{ y } a = 0\} \tag{3.22}$$

Puede verse de (3.22) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{lcl} SE(3)_{m_{12}} & \longrightarrow & S^1 \\ (A, 0) & \longmapsto & e^{i\beta_A}, \end{array}$$

donde β_A es el ángulo de la rotación A alrededor de p^1 en el sentido positivo dado por p^1 y la orientación del espacio.

Sea $m = (\lambda p^1, \beta p^1, \gamma p^1, \delta p^1)$ con $\lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma, \delta \neq 0$. Puede verse que $SE(3)_m = SE(3)_{m_{12}}$.

Caso (13)*:* $m_{13} = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ *con* p^1 *y* p^2 *no paralelos.*

Sea $(A, a) \in SE(3)_{m_{13}}$ entonces $Ap^1 = p^1$ y $Ap^2 = p^2$, luego $A = I$. Además $Aq^1 + a = q^1$, luego $a = 0$.

Por lo tanto en este caso se tiene

$$SE(3)_{m_{13}} = \{(I, 0)\}. \tag{3.23}$$

De este modo se han determinado todos los grupos $SE(3)_m$ para $m \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ posibles.

Cálculo de los espacios $(T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))_{SE(3)_{(q,p)}} = M_{SE(3)_{(q,p)}}$.

Recordemos que

$$(T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))_{SE(3)_{(q,p)}} = \{(\bar{q}, \bar{p}) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) : SE(3)_{(\bar{q},\bar{p})} = SE(3)_{(q,p)}\}.$$

Vamos a introducir una notación útil.

Sea $x \in \mathbb{R}^3$ y sea

$$G^1(x) = \{(A, a) \in SE(3) : a = x - Ax\} \simeq SO(3).$$

Para $(q, p) = (q^1, q^1, 0, 0)$ se ve de (3.11) que $SE(3)_{(q,p)} = G^1(q^1)$. Por lo tanto se tiene que para $x \in \mathbb{R}^3$,

$$M_{G^1(x)} = \{(x, x, 0, 0)\}. \tag{3.24}$$

Sea $y \in \mathbb{R}^3$ con $y \neq 0$ y sea

$$G^2(y) = \{(A, a) \in SE(3) : Ay = y, a = 0\} \simeq S^1.$$

Para $(q, p) = (q^1, q^2, 0, 0)$ con q^1 y q^2 paralelos y distintos entre sí , se tiene de (3.12) que $SE(3)_{(q,p)} = G^2(q^1 - q^2)$.

Por otro lado, para $(q, p) = (q^1, q^2, 0, p^2)$ con q^1 y q^2 paralelos a p^2; p^2 no nulo se tiene de (3.16) que $SE(3)_{(q,p)} = G^2(p^2)$.

Por último se tiene que para

- $(q, p) = (q^1, q^2, p^1, 0)$ con q^1 y q^2 paralelos a p^1; p^1 no nulo
- $(q, p) = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ con p^1 paralelo a p^2; q^1 y q^2 paralelos a p^1; p^1 y p^2 no nulos

se tiene respectivamente de (3.19), (3.22) que $SE(3)_{(q,p)} = G^2(p^1)$.

Por lo tanto, por los casos (2), (6), (9) y (12) resulta

$$\begin{aligned} M_{G^2(y)} &= \bigcup_{i=1}^{4} B_i \\ &= \{(\lambda y, \beta y, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\} \\ &\cup \{(\lambda y, \beta y, 0, \delta y) : \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0\} \\ &\cup \{(\lambda y, \beta y, \gamma y, 0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\} \\ &\cup \{(\lambda y, \beta y, \gamma y, \delta y) : \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma, \delta \neq 0\} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ tal que $x \times y \neq 0$ y sea

$$G^3(x, y) = \{(A, a) \in SE(3) : Ay = y, a = x - Ax\} \simeq S^1.$$

Para $(q, p) = (q^1, q^2, 0, 0)$ con q^1 no paralelo a q^2 se tiene de (3.13) que $SE(3)_{(q,p)} = G^3(q^2, q^1 - q^2) = G^3(q^1, q^1 - q^2)$.

Además, para $(q,p) = (q^1, q^2, 0, p^2)$ con $q^1 - q^2$ paralelo a p^2; q^1 y q^2 no paralelos a p^2 se tiene de (3.15) que $SE(3)_{(q,p)} = G^3(q^1, p^2) = G^3(q^2, q^1 - q^2)$.

Por otro lado, para $(q,p) = (q^1, q^2, p^1, 0)$ con $q^1 - q^2$ paralelo a p^1; q^1 y q^2 no paralelos a p^1 se tiene de (3.18) que $SE(3)_{(q,p)} = G^3(q^1, p^1) = G^3(q^2, q^1 - q^2)$.

Por último, para $(q,p) = (q^1, q^2, p^1, p^2)$ con p^1 paralelo a p^2; $q^1 - q^2$ paralelo a p^1; q^1 y q^2 no paralelos a p^1; $p^2 \neq 0$, se tiene de (3.21) que $SE(3)_{(q,p)} = G^3(q^1, p^1) = G^3(q^2, p^1) = G^3(q^1, p^2) = G^3(q^2, p^2)$.

Por lo tanto se tiene, de los casos (3), (5), (8) y (11), que para $x, y \in \mathbb{R}^3$ con $x \times y \neq 0$ resulta

$$
\begin{aligned}
M_{G^3(x,y)} &= \bigcup_{i=1}^{4} D_i \\
&= \{(\lambda y + x, \beta y + x, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\} \\
&\cup \{(\lambda y + x, \beta y + x, 0, \delta y) : \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0\} \\
&\cup \{(\lambda y + x, \beta y + x, \gamma y, 0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\} \\
&\cup \{(\lambda y + x, \beta y + x, \gamma y, \delta y) : \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0, \delta \neq 0\}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Sea $G^4 = \{(I, 0)\}$, entonces de (3.14), (3.17), (3.20) y (3.23) se tiene que

$$
\begin{aligned}
M_{G^4} &= \{(q^1, q^2, 0, p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^2\} \\
&\cup \{(q^1, q^2, p^1, 0) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^1\} \\
&\cup \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : p^1 \text{ es paralelo a } p^2;\ q^1 - q^2 \text{no es paralelo a } p^1;\ p^2 \neq 0\} \\
&\cup \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : p^1 \text{ no es paralelo a } p^2\} \\
&= \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^1\} \\
&\cup \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^2\} \\
&\cup \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : p^1 \text{ no es paralelo a } p^2\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{3} M_i
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Cálculo de las componentes conexas de $J^{-1}(\alpha, u) \cap M_{SE(3)_{(q,p)}}$.

Consideremos los siguientes casos.

1. Caso $(q_0, p_0) \in M_{G^1(x_0)}$**,** $(q_0, p_0) = (x_0, x_0, 0, 0)$ **con** $x_0 \in \mathbb{R}^3$**.**

En este caso $J(x_0, x_0, 0, 0) = (0, 0)$ y

$$J^{-1}(0,0) = \{(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) : q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = 0,\ p^1 + p^2 = 0\}.$$

Entonces es fácil ver de (3.24) que

$$J^{-1}(0,0) \cap T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_{G^1(x_0)} = \{(x_0, x_0, 0, 0)\}.$$

Por lo tanto si $\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)} = \mathcal{J}(x_0, x_0, 0, 0) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/G_E$ con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}) = (J^{-1}(0,0) \cap T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_{G^1(x_0)})_{c.c.(q_0,p_0)} = \{(x_0, x_0, 0, 0)\}.$$

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Es fácil ver que

$$G_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}} := SE(3)_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ax_0 + a = x_0\}.$$

Para calcular el cociente $M_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)})/G_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}}$ calculemos la órbita del elemento $m_0 = (x_0, x_0, 0, 0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)})$ por el grupo $G_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{m_0} &= \{(A, a)(x_0, x_0, 0, 0) : (A, a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}}\} \\ &= \{(Ax_0 + a, Ax_0 + a, 0, 0) : (A, a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}}\} \\ &= \{(x_0, x_0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$M_{\rho_{(0,0)}^{G^1(x_0)}} = \{[(x_0, x_0, 0, 0)]\},$$

con $[(x_0, x_0, 0, 0)] = \{(x_0, x_0, 0, 0)\}$.

2. Caso $(q_0, p_0) \in M_{G^2(y_0)}$**, con** $J(q_0, p_0) = (0, 0)$**,** $y_0 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$**.**

Como en el caso anterior se tiene que

$$\begin{aligned} J^{-1}(0,0) = \{(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \ &: \ q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = 0, \\ & \quad\ p^1 + p^2 = 0\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando (3.25), calculemos ahora

$$J^{-1}(0,0) \cap M_{G^2(y_0)} = \bigcup_{i=1}^{4} J^{-1}(0,0) \cap B_i.$$

- $J^{-1}(0,0) \cap B_1 = B_1$ pues para todo $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in B_1$ se verifica que $p^1 = p^2 = 0$ y usando esto en (3.28) se ve lo que queríamos probar.

- $J^{-1}(0,0) \cap B_2 = \emptyset$ pues para todo $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in B_2$ se verifica que $p^1 = 0$ y usando esto en la segunda ecuación de (3.28) se obtiene que $p^2 = 0$ que es absurdo en B_2.

- $J^{-1}(0,0) \cap B_3 = \emptyset$. La demostración es análoga al caso anterior.

- $J^{-1}(0,0) \cap B_4$. Sea $(q,p) \in B_4$, entonces existen $\lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma, \delta \neq 0$ tales que $q^1 = \lambda y_0$, $q^2 = \beta y_0$, $p^1 = \gamma y_0$ y $p^2 = \delta y_0$. De la segunda ecuación de (3.28) se obtiene que $(\gamma + \delta) y_0 = 0$ lo que implica que $\gamma + \delta = 0$ pues $y_0 \neq 0$.

Se ve fácilmente que la primera ecuación de (3.28) se verifica directamente. Por lo tanto

$$J^{-1}(0,0) \cap B_4 = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} J^{-1}(0,0) \cap M_{G^2(y_0)} &= \{(\lambda y_0, \beta y_0, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\} \\ &\cup \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Puede verse que este conjunto es conexo.

Por lo tanto si $(q_0, p_0) \in M_{G^2(y_0)}$ con $J(q_0, p_0) = (0,0)$, $y_0 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y si $\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)} \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/G_E$ es tal que $\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)} = \mathcal{J}(q_0, p_0)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}) &= (J^{-1}(0,0) \cap T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_{G^2(y_0)})_{c.c.(q_0,p_0)} \\ &= \bigcup_{i=1}^{2} C_i \\ &= \{(\lambda y_0, \beta y_0, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\} \\ &\cup \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^3 - \{\ell\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde ℓ es la recta dada por $\gamma = 0$ y $\lambda - \beta = 0$.

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$, entonces $(A,a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$ si $(A,a)(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$.

- Caso $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} y_0, \bar{\beta} y_0, 0, 0) \in C_1$ con $\bar{\lambda}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}, \bar{\lambda} \neq \bar{\beta}$.

Sea $(A,a) \in SE(3)$, entonces $(A,a)(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} A y_0 + a, \bar{\beta} A y_0 + a, 0, 0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$ si existen $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq \beta$ tales que

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\lambda} A y_0 + a &= \lambda y_0 \\ \bar{\beta} A y_0 + a &= \beta y_0, \end{aligned} \right.$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda} - \bar{\beta}) A y_0 &= (\lambda - \beta) y_0 \\ A y_0 &= y_0, \end{aligned}$$

y también $\bar{\lambda} - \bar{\beta} = \lambda - \beta$ por ser $\bar{\lambda} \neq \bar{\beta}$.

Por otro lado se tiene que

$$a = (\beta - \bar{\beta})y_0 = (\lambda - \bar{\lambda})y_0.$$

- Caso $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda}y_0, \bar{\beta}y_0, \bar{\gamma}y_0, -\bar{\gamma}y_0) \in C_2$ con $\bar{\lambda}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}, \bar{\gamma} \neq 0$.

Sea $(A, a) \in SE(3)$, entonces $(A, a)(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda}Ay_0 + a, \bar{\beta}Ay_0 + a, \bar{\gamma}Ay_0, -\bar{\gamma}Ay_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$ si existen $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq 0$ tales que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}Ay_0 + a &= \lambda y_0 \\ \bar{\beta}Ay_0 + a &= \beta y_0 \\ \bar{\gamma}Ay_0 &= \gamma y_0, \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$Ay_0 = y_0$$

y que

$$\bar{\gamma} = \gamma,$$

por ser $\bar{\gamma} \neq 0$.

Se tiene, como en el caso anterior, que

$$a = (\beta - \bar{\beta})y_0 = (\lambda - \bar{\lambda})y_0.$$

Por lo tanto

$$G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Para calcular el cociente $M_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})/G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$ calculemos la órbita del elemento $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$ por el grupo $G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$. Puede verse que tanto C_1 como C_2 son invariantes por $G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$.

Puede verse además que la acción de $G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$ sobre $\mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)})$ no es libre.

- Caso $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, 0, 0) \in C_1$, $\lambda_0 \neq \beta_0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\bar{q}_0, \bar{p}_0)} &= \{(A, a)(\bar{q}_0, \bar{p}_0) : (A, a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 Ay_0 + \eta y_0, \bar{\beta}_0 Ay_0 + \eta y_0, 0, 0) : Ay_0 = y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 + \eta)y_0, (\bar{\beta}_0 + \eta)y_0, 0, 0) : \eta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Para calcular el cociente $C_1 / G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$ consideremos $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda}y_0, \bar{\beta}y_0, 0, 0) \in C_1$ con $\bar{\lambda} \neq \bar{\beta}$. Se tiene que $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0, \bar{p}_0)}$ si existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}y_0 &= (\bar{\lambda}_0 + \eta)y_0 \\ \bar{\beta}y_0 &= (\bar{\beta}_0 + \eta)y_0. \end{cases}$$

De las dos ecuaciones se obtiene que

$$\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0 = \bar{\lambda} - \bar{\beta}.$$

Puede verse entonces que

$$C_1 \diagup G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}} \simeq \mathrm{I\!R} - \{0\},$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, 0, 0)] \longleftrightarrow \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0,$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, 0, 0)] = \{(\lambda y_0, \beta y_0, 0, 0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

- Caso $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) \in C_2$ con $\bar{\lambda}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0 \in \mathrm{I\!R}$ y $\bar{\gamma}_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)} &= \{(A,a)(\bar{q}_0,\bar{p}_0) : (A,a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 A y_0 + \eta y_0, \bar{\beta}_0 A y_0 + \eta y_0, \bar{\gamma}_0 A y_0, -\bar{\gamma}_0 A y_0) : A y_0 = y_0, \eta \in \mathrm{I\!R}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0, (\beta_0 + \eta) y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) : \eta \in \mathrm{I\!R}\}. \end{aligned}$$

Para calcular el cociente $C_2 \diagup G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}}$ consideremos $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} y_0, \bar{\beta} y_0, \bar{\gamma} y_0, -\bar{\gamma} y_0) \in C_2$ con $\bar{\gamma} \neq 0$. Se tiene que $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)}$ si existe $\eta \in \mathrm{I\!R}$ tal que

$$\begin{cases} \bar{\lambda} y_0 &= (\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0 \\ \bar{\beta} y_0 &= (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0 \\ \bar{\gamma} y_0 &= \bar{\gamma}_0 y_0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0$ por ser $y_0 \neq 0$. Como antes, de las dos primeras ecuaciones se deduce que $\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0 = \bar{\lambda} - \bar{\beta}$.

Puede verse entonces que

$$C_2 \diagup G_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}} \simeq \mathrm{I\!R} \times (\mathrm{I\!R} - \{0\}),$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0)$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

Por lo tanto

$$M_{\rho_{(0,0)}^{G^2(y_0)}} \simeq \mathrm{I\!R} \times \mathrm{I\!R} - \{(0,0)\}.$$

Mas aún, el cociente es isomorfo al plano paralelo al eje γ y perpendicular a la recta $\lambda = \beta$, $\gamma = 0$, menos el orígen. El isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] \longleftrightarrow (-(\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0), (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0), \bar{\gamma}_0).$$

3. Caso $(q_0,p_0)\in M_{G^2(y_0)}$ **con** $J(q_0,p_0)=(0,\delta_0 y_0)$**,** $\delta_0\in\mathbb{R},\delta_0\neq 0$**,** $y_0\in\mathbb{R}^3-\{0\}$**.**

En este caso

$$J^{-1}(0,\delta_0 y_0)=\{(q^1,q^2,p^1,p^2)\in T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\quad:\quad q^1\times p^1+q^2\times p^2=0,\quad p^1+p^2=\delta_0 y_0\}. \tag{3.31}$$

Usando (3.25) calculemos ahora

$$J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap M_{G^2(y_0)}=\bigcup_{i=1}^{4}J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_i.$$

- $J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_1=\emptyset$ pues para todo $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in B_1$ se verifica que $p^1=p^2=0$ y la segunda ecuación de (3.31) queda $0=\delta_0 y_0$ que es absurdo pues tanto δ_0 como y_0 son no nulos.

- $J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_2$. Sea $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in B_2$ entonces $p^1=0$ y existen $\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $\delta\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0$, $q^2=\beta y_0$ y $p^2=\delta y_0$. De la segunda ecuación de (3.31) se obtiene $\delta y_0=\delta_0 y_0$, lo que implica que $\delta=\delta_0$ pues $y_0\neq 0$. Reemplazando en la primera ecuación de (3.31) se obtiene una tautología. Por lo tanto

$$J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_2=\{(\lambda y_0,\beta y_0,0,\delta_0 y_0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

- $J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_3$. Sea $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in B_3$ entonces existen $\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0$, $q^2=\beta y_0$ y $p^1=\gamma y_0$. De la segunda ecuación de (3.31) se obtiene $\gamma y_0=\delta_0 y_0$, lo que implica que $\gamma=\delta_0$ pues $y_0\neq 0$. Reemplazando en la primera ecuación de (3.31) se obtiene una tautología. Por lo tanto

$$J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_3=\{(\lambda y_0,\beta y_0,\delta_0 y_0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

- $J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_4$. Sea $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in B_4$ entonces existen $\lambda,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, con $\gamma,\delta\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0$, $q^2=\beta y_0$, $p^1=\gamma y_0$ y $p^2=\delta y_0$. De la segunda ecuación de (3.31) se obtiene que $(\gamma+\delta)y_0=\delta_0 y_0$ lo que implica que $\gamma+\delta=\delta_0$ pues $y_0\neq 0$. La primera ecuación de (3.31) resulta una tautología. Por lo tanto se tiene que

$$J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap B_4=\{(\lambda y_0,\beta y_0,\gamma y_0,(\delta_0-\gamma)y_0):\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\gamma\neq 0,\gamma\neq\delta_0\}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
J^{-1}(0,\delta_0 y_0)\cap M_{G^2(y_0)} &= \{(\lambda y_0,\beta y_0,0,\delta_0 y_0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}\\
&\cup\ \{(\lambda y_0,\beta y_0,\delta_0 y_0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}\\
&\cup\ \{(\lambda y_0,\beta y_0,\gamma y_0,(\delta_0-\gamma)y_0):\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\gamma\neq 0,\gamma\neq\delta_0\}\\
&= \{(\lambda y_0,\beta y_0,\gamma y_0,(\delta_0-\gamma)y_0):\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Este conjunto es conexo y por lo tanto si $(q_0, p_0) \in M_{G^2(y_0)}$ tal que $J(q_0, p_0) = (0, \delta_0 y_0)$ con $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \neq 0, y_0 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y si $\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)} \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/G_E$ tal que $\mathcal{J}(q_0, p_0) = \rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}$ entonces

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}) = (J^{-1}(0, \delta_0 y_0) \cap T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)_{G^2(y_0)})_{c.c.(q_0,p_0)}$$
$$(3.32) \qquad = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, (\delta_0 - \gamma) y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^3$$

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$, entonces $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} y_0, \bar{\beta} y_0, \bar{\gamma} y_0, (\delta_0 - \bar{\gamma}) y_0)$ con $\bar{\lambda}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(A, a) \in G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}}$ si $(A, a)(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$.

Sea $(A, a) \in SE(3)$, entonces $(A, a)(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} A y_0 + a, \bar{\beta} A y_0 + a, \bar{\gamma} A y_0, (\delta_0 - \bar{\gamma}) A y_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$ si existen $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} \bar{\lambda} A y_0 + a &= \lambda y_0 \\ \bar{\beta} A y_0 + a &= \beta y_0 \\ \bar{\gamma} A y_0 &= \gamma y_0 \\ (\delta_0 - \bar{\gamma}) A y_0 &= (\delta_0 - \bar{\gamma}) y_0. \end{cases}$$

De la última ecuación se deduce que

$$A y_0 = y_0$$

y que

$$\bar{\gamma} = \gamma,$$

por ser $y_0 \neq 0$.

Se tiene además que

$$a = (\beta - \bar{\beta}) y_0 = (\lambda - \bar{\lambda}) y_0.$$

Por lo tanto

$$G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}} = \{(A, a) \in G : A y_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0, \eta \in \mathbb{R}\}$$

Puede verse que la acción de $G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}}$ sobre $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$ no es libre.

Para calcular el cociente $M_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})/G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}}$ calculemos la órbita del elemento $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$ por el grupo $G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}}$. Sean $\bar{\lambda}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0 \in \mathbb{R}$ tales que $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0, \bar{\beta}_0 y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, (\delta_0 - \bar{\gamma}_0) y_0)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)} &= \{(A, a)(\bar{q}_0, \bar{p}_0) : (A, a) \in G_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 A y_0 + \eta y_0, \bar{\beta}_0 A y_0 + \eta y_0, \bar{\gamma}_0 A y_0, (\delta_0 - \bar{\gamma}_0) A y_0) : A y_0 = y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{((\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0, (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0, \bar{\gamma}_0 y_0, (\delta_0 - \bar{\gamma}_0) y_0) : \eta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Consideremos $(\bar{q},\bar{p}) = (\bar{\lambda}y_0, \bar{\beta}y_0, \bar{\gamma}y_0, (\delta_0-\bar{\gamma})y_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)})$ con $\bar{\lambda},\bar{\beta},\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(\bar{q},\bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)}$ si existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}y_0 &=& (\bar{\lambda}_0+\eta)y_0 \\ \bar{\beta}y_0 &=& (\bar{\beta}_0+\eta)y_0 \\ \bar{\gamma}y_0 &=& (\delta_0-\bar{\gamma}_0)y_0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $\bar{\gamma} = (\delta_0-\bar{\gamma}_0)$ por ser $y_0 \neq 0$. Como antes, de las dos primeras ecuaciones se deduce que $\bar{\lambda}_0-\bar{\beta}_0 = \bar{\lambda}-\bar{\beta}$.

Puede verse entonces que

$$M_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}} \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0y_0, \bar{\beta}_0y_0, \bar{\gamma}_0y_0, (\delta_0-\bar{\gamma}_0)y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0-\bar{\beta}_0, (\delta_0-\bar{\gamma}_0))$$

y $[(\bar{\lambda}_0y_0, \bar{\beta}_0y_0, \bar{\gamma}_0y_0, (\delta_0-\bar{\gamma}_0)y_0)] = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \bar{\gamma}_0y_0, (\delta_0-\bar{\gamma}_0)y_0) : \lambda-\beta = \bar{\lambda}_0-\bar{\beta}_0\}$.

4. Caso $(q_0,p_0) \in M_{G^3(x_0,y_0)}$ con $J(q_0,p_0) = (0,0)$, $x_0,y_0 \in \mathbb{R}^3$, $x_0\times y_0 \neq 0$.

Como en (3.28) se tiene que

$$J^{-1}(0,0) = \{(q^1,q^2,p^1,p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3) \;:\; q^1\times p^1 + q^2\times p^2 = 0, \; p^1+p^2 = 0\}. \tag{3.33}$$

Usando (3.26) calculemos ahora

$$J^{-1}(0,0)\cap T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)_{G^3(x_0,y_0)} = \bigcup_1^4 J^{-1}(0,0)\cap D_i.$$

- $J^{-1}(0,0)\cap D_1 = D_1$ Sea $(q,p)\in D_1$ entonces $p^1 = p^2 = 0$ y existen $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$ con $\lambda\neq\beta$ tales que $q^1 = \lambda y_0 + x_0$ y $q^2 = \beta y_o + x_0$. Reemplazando en la primer y segunda ecuación de (3.33) se obtiene una tautología.

- $J^{-1}(0,0)\cap D_2 = \emptyset$. Sea $(q,p)\in D_2$ entonces $p^1 = 0$ y existen $\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ con $\delta\neq 0$ tales que $q^1 = \lambda y_0 + x_0, q^2 = \beta y_o + x_0$ y $p^2 = \delta y_0$. De la segunda ecuación de (3.33) se obtiene que $\delta y_0 = 0$ lo que es un absurdo pues tanto y_0 como δ son no nulos.

- $J^{-1}(0,0)\cap D_3 = \emptyset$. Se deduce con un razonamiento análogo al caso anterior.

- $J^{-1}(0,0)\cap D_4$. Sea $(q,p)\in D_4$ entonces existen $\lambda,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ con $\gamma\neq 0$ y $\delta\neq 0$ tales que $q^1 = \lambda y_0 + x_0, q^2 = \beta y_o + x_0, p^1 = \gamma y_0$ y $p^2 = \delta y_0$. Reemplazando en la segunda ecuación de (3.33) se obtiene que $(\gamma+\delta)y_0 = 0$ lo que implica que $\gamma+\delta = 0$ pues $y_0\neq 0$. Reemplazando en la primera ecuación de (3.33) se obtiene una tautología. Por lo tanto

$$J^{-1}(0,0)\cap D_4 = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R}, \gamma\neq 0\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} J^{-1}(0,0)\cap M_{G^3(x_0,y_0)} &= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,0,0)\}:\lambda,\beta\in\mathbb{R}\ \ \lambda\neq\beta\} \\ &\cup\ \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,\gamma y_0,-\gamma y_0):\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\gamma\neq 0\}. \end{aligned}$$

Se ve directamente que este conjunto es conexo.

Entonces si $(q_0,p_0)\in M_{G^3(x_0,y_0)}$ con $x_0,y_0\in\mathbb{R}^3, x_0\times y_0\neq 0$ tal que $J(q_0,p_0)=(0,0)$, y si $\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}=\mathcal{J}(q_0,p_0)\in T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)/G_E$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}) &= (J^{-1}(0,0)\cap M_{G^3(x_0,y_0)})_{c.c.(q_0,p_0)} \\ &= \bigcup_{i=1}^{2} D_i \\ &= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\ \ \lambda\neq\beta\} \\ &\cup\ \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,\gamma y_0,-\gamma y_0):\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\gamma\neq 0\} \\ &\simeq\ \mathbb{R}^3-\{\ell\}, \end{aligned}$$

donde ℓ es la recta dada por $\gamma=0$ y $\lambda-\beta=0$.

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(\bar{q},\bar{p})\in\mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})$, entonces $(A,a)\in G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ si $(A,a)(\bar{q},\bar{p})\in\mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})$.

- Caso $(\bar{q},\bar{p})=(\bar{\lambda}y_0+x_0,\bar{\beta}y_0+x_0,0,0)\in E_1$ con $\bar{\lambda},\bar{\beta}\in\mathbb{R}$, $\bar{\lambda}\neq\bar{\beta}$.

Sea $(A,a)\in SE(3)$, entonces $(A,a)(\bar{q},\bar{p})=(\bar{\lambda}Ay_0+Ax_0+a,\bar{\beta}Ay_0+Ax_0+a,0,0)\in\mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})$ si existen, $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$ con $\lambda\neq\beta$ tales que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}Ay_0+Ax_0+a=\lambda y_0+x_0 \\ \bar{\beta}Ay_0+Ax_0+a=\beta y_0+x_0, \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$(\bar{\lambda}_0-\bar{\beta}_0)Ay_0=(\lambda_0-\beta_0)y_0$$

que por ser $\lambda_0-\beta_0\neq 0$ implica que $Ay_0=y_0$ y que $\bar{\lambda}_0-\bar{\beta}_0=\lambda_0-\beta_0$.

Por otro lado puede verse que

$$a=(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)y_0+(x_0-Ax_0)=(\beta_0-\bar{\beta}_0)y_0+(x_0-Ax_0).$$

- Caso $(\bar{q},\bar{p})=(\bar{\lambda}y_0+x_0,\bar{\beta}y_0+x_0,\bar{\gamma}y_0,-\bar{\gamma}y_0)\in E_2$ con $\bar{\lambda},\bar{\beta},\bar{\gamma}\in\mathbb{R}$, $\bar{\gamma}\neq 0$.

Sea $(A,a) \in SE(3)$, entonces $(A,a)(\bar{q},\bar{p}) = (\bar{\lambda}Ay_0+Ax_0+a, \bar{\beta}Ay_0+Ax_0+a, \bar{\gamma}Ay_0, -\bar{\gamma}Ay_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})$ si existen, $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq 0$ tales que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}Ay_0 + Ax_0 + a &= \lambda y_0 + x_0 \\ \bar{\beta}Ay_0 + Ax_0 + a &= \beta y_0 + x_0 \\ \bar{\gamma}Ay_0 &= \gamma y_0 \\ -\bar{\gamma}Ay_0 &= -\gamma y_0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $Ay_0 = y_0$ por ser $\bar{\gamma} \neq 0$ y que $\bar{\gamma} = \gamma$.

Como en el caso anterior puede verse que

$$a = (\lambda - \bar{\lambda})y_0 + (x_0 - Ax_0) = (\beta - \bar{\beta})y_0 + (x_0 - Ax_0).$$

Por lo tanto

$$G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}} = \{(A,a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0 + x_0 - Ax_0, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Para calcular el cociente $M_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})/G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ calculemos la órbita del elemento $(\bar{q}_0,\bar{p}_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)})$ por el grupo $G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$. Puede verse que, tanto E_1 como E_2 son invariantes por $G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ y que la acción de $G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ sobre $M_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ no es libre.

- Caso $(\bar{q}_0,\bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, 0, 0) \in E_1$ con $\bar{\lambda}_0, \bar{\beta}_0 \in \mathbb{R}, \bar{\lambda}_0 \neq \bar{\beta}_0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)} &= \{(A,a)(\bar{q}_0,\bar{p}_0)_1 : (A,a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 Ay_0 + Ax_0 + \eta y_0 + x_0 - Ax_0, \bar{\beta}_0 Ay_0 + Ax_0 + \eta y_0 + x_0 - Ax_0, 0, 0) : Ay_0 = y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 + \eta)y_0 + x_0, (\bar{\beta}_0 + \eta)y_0 + x_0, 0, 0) : \eta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Para calcular el cociente $E_1 / G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ consideremos $(\bar{q},\bar{p}) = (\bar{\lambda}y_0 + x_0, \bar{\beta}y_0 + x_0, 0, 0) \in D_1$ con $\bar{\lambda} \neq \bar{\beta}$. Se tiene que $(\bar{q},\bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)}$ se existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \bar{\lambda}y_0 + x_0 &= (\bar{\lambda}_0 + \eta)y_0 + x_0 \\ \bar{\beta}y_0 + x_0 &= (\bar{\beta}_0 + \eta)y_0 + x_0. \end{cases}$$

De las dos ecuaciones se obtiene que

$$\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0 = \bar{\lambda} - \bar{\beta}.$$

Puede verse entonces que

$$E_1 / G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}} \simeq \mathbb{R} - \{0\},$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, 0, 0)] \longleftrightarrow \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0,$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, 0, 0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, 0, 0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

- Caso $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) \in E_2$ con $\bar{\lambda}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0 \in \mathbb{R}, \bar{\gamma}_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)} &= \{(A,a)(\bar{q}_0,\bar{p}_0) : (A,a) \in G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 A y_0 + A x_0 + \eta y_0 + x_0 - A x_0, \bar{\beta}_0 A y_0 + A x_0 + \eta y_0 + x_0 - A x_0, \bar{\gamma}_0, -\bar{\gamma}_0) : A y_0 = y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0 + x_0, (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0, -\bar{\gamma}_0) : \eta \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Para calcular el cociente $E_2 \big/ G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}}$ consideremos $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} y_0 + x_0, \bar{\beta} y_0 + x_0, \bar{\gamma} y_0, -\bar{\gamma} y_0) \in D_2$ con $\bar{\gamma} \neq 0$. Se tiene que $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)}$ se existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \bar{\lambda} y_0 + x_0 &= (\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0 + x_0 \\ \bar{\beta} y_0 + x_0 &= (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0 + x_0 \\ \bar{\gamma} y_0 &= \bar{\gamma}_0 y_0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación se deduce que $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0$ por ser $y_0 \neq 0$. Como antes, de las dos primeras ecuaciones se deduce que $\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0 = \bar{\lambda} - \bar{\beta}$.

Puede verse entonces que

$$E_2 \big/ G_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}} \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}),$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0)$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

Por lo tanto

$$M_{\rho_{(0,0)}^{G^3(x_0,y_0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}.$$

El isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0, \bar{\gamma}_0)$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, \bar{\gamma}_0 y_0, -\bar{\gamma}_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

5. Caso $(q_0, p_0) \in M_{G^3(x_0,y_0)}, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3, x_0 \times y_0 \neq 0$ **tal que** $J(q_0, p_0) = (\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0)$**,** $\delta_0 \in \mathbb{R}$**,** $\delta_0 \neq 0$**.**

En este caso $J(q_0, p_0) = (\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0) = (u_0, \alpha_0)$ y se tiene que

(3.34)
$$\begin{aligned} J^{-1}(\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0) = \{(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \quad : \quad & q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = \delta_0 x_0 \times y_0, \\ & p^1 + p^2 = \delta_0 y_0\}. \end{aligned}$$

Usando (3.26) calculemos ahora

$$J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)_{G^3(x_0,y_0)}=\bigcup_1^4 J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_i.$$

- $J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_1=\emptyset$. Sea $(q,p)\in D_1$ entonces $p^1=p^2=0$. Reemplazando en la segunda ecuación de (3.34) se obtiene $\delta_0 y_0=0$ lo que es un absurdo pues tanto y_0 como δ_0 son no nulos.

- $J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_2$. Sea $(q,p)\in D_2$ entonces $p^1=0$ y existen $\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ con $\delta\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0+x_0, q^2=\beta y_0+x_0$ y $p^2=\delta y_0$. De la segunda ecuación de (3.34) se obtiene que $\delta y_0=\delta_0 y_0$ lo que implica que $\delta=\delta_0$ pues y_0 es no nulo. Reemplazando en la primer ecuación de (3.34) se obtiene el mismo resultado. Por lo tanto

$$J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_2=\{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,0,\delta_0 y_0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

- $J^{-1}(0,0)\cap D_3$. Sea $(q,p)\in D_3$ entonces $p^2=0$ y existen $\lambda,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ con $\gamma\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0+x_0, q^2=\beta y_0+x_0$ y $p^1=\gamma y_0$. Se deduce con un razonamiento análogo al caso anterior que

$$J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_3=\{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,\delta_0 y_0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

- $J^{-1}(0,0)\cap D_4$. Sea $(q,p)\in D_4$ entonces existen $\lambda,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ con $\gamma\neq 0$ y $\delta\neq 0$ tales que $q^1=\lambda y_0+x_0, q^2=\beta y_0+x_0, p^1=\gamma y_0$ y $p^2=\delta y_0$. Reemplazando en la segunda ecuación de (3.34) se obtiene que $(\gamma+\delta)y_0=\gamma_0 y_0$ lo que implica que $\gamma+\delta=\gamma_0$ pues $y_0\neq 0$. Reemplazando en la primera ecuación de (3.33) se obtiene lo mismo. Por lo tanto

$$J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap D_4=\{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,(\delta_0-\delta)y_0,\delta y_0):\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R},\delta\neq 0,\delta\neq\delta_0\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap M_{G^3(x_0,y_0)} &= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,0,\delta_0 y_0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}\\
&\cup \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,\delta_0 y_0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}\\
&\cup \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,(\delta_0-\delta)y_0,\delta y_0):\lambda\beta,\delta\in\mathbb{R},\delta\neq 0,\delta\neq\delta_0\}\\
&= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,\delta_0 y_0,0):\lambda,\beta\in\mathbb{R}\}\\
&\cup \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,(\delta_0-\delta)y_0,\delta y_0):\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R},\delta\neq 0\}\\
&= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,(\delta_0-\delta)y_0,\delta y_0):\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Se ve directamente que este conjunto es conexo.

Entonces si $(q_0,p_0)\in M_{G^3(x_0,y_0)}$ con $x_0,y_0\in \mathbb{R}^3, x_0\times y_0\neq 0$ tal que $J(q_0,p_0)=(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)$ con $\delta_0\in\mathbb{R},\delta_0\neq 0$ y si $\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}=\mathcal{J}(q_0,p_0)\in T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)/G_E$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}) &= (J^{-1}(u_0,\alpha_0)\cap M_{G^3(x_0,y_0)})_{c.c.(q_0,p_0)}\\ &= \bigcup_{i=1}^{2} F_i\\ &= \{(\lambda y_0+x_0,\beta y_0+x_0,(\delta_0-\delta)y_0,\delta y_0):\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(\bar{q},\bar{p})\in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)})$, entonces $(A,a)\in G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$ si $(A,a)(\bar{q},\bar{p})\in\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)})$.

Sea $(A,a)\in SE(3)$, entonces $(A,a)(\bar{q},\bar{p})=(\bar{\lambda}Ay_0+Ax_0+a,\bar{\beta}Ay_0+Ax_0+a,(\delta_0-\bar{\delta})y_0,\bar{\delta}y_0)\in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{3b}_{(\delta_0,x_0,y_0)})$ si existen, $\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ tales que

$$\left\{\begin{aligned}\bar{\lambda}Ay_0+Ax_0+a &= \lambda y_0+x_0\\ \bar{\beta}Ay_0+Ax_0+a &= \beta y_0+x_0\\ (\delta_0-\bar{\delta})Ay_0 &= (\delta_0-\delta)y_0\\ \bar{\delta}Ay_0 &= \delta y_0.\end{aligned}\right.$$

Si $\delta=0$ entonces de la cuarta ecuación se deduce que $\bar{\delta}=0$ y de la tercera ecuación se obtiene que $Ay_0=y_0$ por ser $\delta_0\neq 0$. Si $\delta\neq 0$, de la cuarta ecuación se deduce que $Ay_0=y_0$ por ser $\bar{\delta}\neq 0$. También se deduce que $\bar{\delta}=\delta$.

Por otro lado puede verse de la primera y segunda ecuación que $(\bar{\lambda}-\bar{\beta})y_0=(\lambda-\beta)y_0$, lo que implica que

$$\bar{\lambda}-\bar{\beta}=\lambda-\beta,$$

por ser $y_0\neq 0$. Resulta entonces

$$a=(\lambda-\bar{\lambda})y_0+(x_0-Ax_0)=(\beta-\bar{\beta})y_0+(x_0-Ax_0).$$

Por lo tanto

$$G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}=\{(A,a)\in SE(3):Ay_0=y_0 \text{ y } a=\eta y_0+x_0-Ax_0\eta\in\mathbb{R}\}.$$

Para calcular el cociente $M_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}=\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)})/G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$ calculemos la órbita del elemento $(\bar{q}_0,\bar{p}_0)\in\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)})$ por el grupo $G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$.

Observar que la acción de $G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$ sobre $M_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$ no es libre.

Sea $(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0)y_0, \bar{\delta}_0 y_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)})$ con $\bar{\lambda}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\delta}_0 \in$ $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)} &= \{(A,a)(\bar{q}_0,\bar{p}_0) : (A,a) \in G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}\} \\
&= \{(\bar{\lambda}_0 A y_0 + A x_0 + \eta y_0 + x_0 - A x_0, \bar{\beta}_0 A y_0 + A x_0 + \eta y_0 + x_0 - A x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) A y_0, \bar{\delta}_0 A y_0) : \\
&\quad A y_0 = y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0 + x_0, (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0, \bar{\delta}_0 y_0) : \eta \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Consideremos $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{\lambda} y_0 + x_0, \bar{\beta} y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}) y_0, \bar{\delta} y_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}) / G_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}}$. Se tiene que $(\bar{q}, \bar{p}) \in \mathcal{O}_{(\bar{q}_0,\bar{p}_0)}$ si existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\bar{\lambda} y_0 + x_0 &=& (\bar{\lambda}_0 + \eta) y_0 + x_0 \\
\bar{\beta} y_0 + x_0 &=& (\bar{\beta}_0 + \eta) y_0 + x_0 \\
(\delta_0 - \bar{\delta}) y_0 &=& (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0 \\
\bar{\delta} y_0 &=& \bar{\delta}_0 y_0.
\end{array}\right.$$

De la cuarta ecuación se deduce que $\bar{\delta} = \bar{\delta}_0$ por ser $y_0 \neq 0$. Como antes, de las dos primeras ecuaciones se deduce que $\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0 = \bar{\lambda} - \bar{\beta}$.

Puede verse entonces que

$$M_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0\times y_0),\delta_0 y_0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

donde el isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0, \bar{\delta}_0 y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0, \bar{\delta}_0)$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0 y_0, \bar{\delta}_0 y_0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0, \bar{\delta}_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

Caso $(q_0, p_0) \in M_{G_4}$ **con** $J(q_0, p_0) = (\alpha_0, u_0)$**.**

Consideremos primero las siguientes coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas cilídricas proyectivas

Para $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x^1 &=& r\ cos(2s), \\
x^2 &=& r\ sen(2s), \\
x^3 &=& x^3,
\end{array}\right. \tag{3.35}$$

donde $r \in \mathbb{R}$, $s \in [0, \pi)$.

Si $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$ entonces se tiene que $r = 0$, s indeterminado. Si $(x^1)^2 + (x^2)^2 \neq 0$ entonces se puede determinar r y s con la condición de que $s \in [0, \pi)$.

El mapa $S^1 \to \mathbb{R}^2$ dado por $(cos\ s, sen\ s) \mapsto \ell_s$, con ℓ_s la recta que pasa por 0 y ángulo $s \in [0, \pi)$ es biunívoco y establece una estructura de variedad en $\mathbb{R}P^1$ difeomorfa a S^1.

Sea $u_0 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y elegimos una base ortogonal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, u_0)$, $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ positivamente orientada.

Sea Π_0 el plano $(\mathbf{e}_1, u_0)$. Para cada $s \in [0, \pi)$ sea $\beta_s = (cos\ s, sen\ s, 0)$ un vector en el plano $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ y Π_s el plano (β_s, u_0). Cada Π_s tiene una orientación dada por este orden.

Los puntos $x \in \Pi_s$ pueden ser representados de la siguiente manera

$$x = r\beta_s + \mu u_0, \quad r, \mu \in \mathbb{R}.$$

Para cada $s \in [0, \pi)$ existe una aplicación lineal $f_s : \Pi_0 \to \Pi_s$ definida por

$$f_s(r\beta_0 + \mu u_0) = r\beta_s + \mu u_0.$$

Observar que en el límite $s \to \pi$ la aplicación f_s se transforma en la aplicación $f_\pi : \Pi_0 \to \Pi_0$ dada por $f_\pi(r\beta_0 + \mu u_0) = (-r\beta_0 + \mu u_0)$ la cual invierte la orientación de Π_0.

Sea

$$\ell_{u_0} = \{\tau u_0 : \tau \in \mathbb{R}\}. \tag{3.36}$$

Entonces, $\ell_{u_0} \subset \Pi_s$ para todo $s \in [0, \pi)$. Si $x \notin \ell_{u_0}$ entonces existe $s \in [0, \pi)$ unívocamente determinado tal que $x \in \Pi_s$.

Para cada $x \in \Pi_s - \{0\}$ con $s \in [0, \pi)$ se define $w_x \in \Pi_s$ tal que $|w_x| = 1$, $< w_x, x >= 0$ y el par (w_x, x) está positivamente orientado.

Entonces, cada $\tau \in \mathbb{R}$ determina una recta

$$\ell_{(x,\tau)} = \{\tau w_x + \nu x : \nu \in \mathbb{R}\}.$$

Observar que si $x \in \ell_{u_0}$ entonces $w_x = \beta_s$ y además, si $\tau = 0$ entonces $\ell(x, 0) = \ell_{u_0}$.

Recordemos ahora que en este caso

$$\begin{aligned} J^{-1}(\alpha_0, u_0) = \{(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \quad : \quad & q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = \alpha_0, \\ & p^1 + p^2 = u_0\}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Recordemos también que M_{G^4} está formado por los puntos $(q, p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tales que $SE(3)_{(q,p)} = \{(I, 0)\}$ y de (3.27) se tenía que

$$M_{G^4} = \bigcup_{i=1}^{3} M_i$$

donde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(q^1,q^2,p^1,p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^1\} \\ M_2 &= \{(q^1,q^2,p^1,p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^2\} \\ M_3 &= \{(q^1,q^2,p^1,p^2) : p^1 \text{ no es paralelo a } p^2\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Queremos calcular ahora, para cada (α_0, u_0)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(q_0,p_0)) &= \left(J^{-1}(\alpha_0,u_0) \cap M_{G^4}\right)_{c.c.(q_0,p_0)} \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{3} J^{-1}(\alpha_0,u_0) \cap M_i\right)_{c.c.(q_0,p_0)}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $(q_0,p_0) \in M_{G^4}$ y $J(q_0,p_0) = (\alpha_0,u_0)$.

Notar que si $(\alpha_0,u_0) = (0,0)$ entonces $J^{-1}(\alpha_0,u_0) \cap M_{G^4} = \emptyset$. Consideremos los siguientes casos para (α_0,u_0).

6. Caso $\alpha_0 \neq 0$ y $u_0 = 0$.

En este caso $J^{-1}(\alpha_0,u_0)$ está formado por los elementos $(q^1,q^2,p^1,p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que verifican

$$q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = \alpha_0, \tag{3.40}$$

$$p^1 + p^2 = 0. \tag{3.41}$$

De (3.40) y (3.41) resulta que

$$(q^1 - q^2) \times p^1 = \alpha_0.$$

De lo anterior y del hecho de que $\alpha_0 \neq 0$ se tiene que todas las soluciones de (3.40) y (3.41) pertenecen a M_1 y a M_2. Por lo tanto $J^{-1}(\alpha_0,0) \cap M_{G^4} = J^{-1}(\alpha_0,0)$ y se tiene que $(q,p) \in J^{-1}(\alpha_0,0) \cap M_{G^4}$ si y solo si verifica

$$\left\{ \begin{aligned} (q^1 - q^2) \times p^1 &= \alpha_0, \\ p^1 + p^2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Parametrización

Para cada $p^1 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tal que $< p^1, \alpha_0 >= 0$ existe un único v_{p^1} con $v_{p^1} \times p^1 = \alpha_0$, $< v_{p^1}, p^1 >= 0$. Luego existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$q^1 - q^2 = v_{p^1} + \lambda p^1.$$

Se tiene entonces la siguiente parametrización de $J^{-1}(\alpha_0,0) \cap M_{G^4}$

$$\begin{cases} q^1 &= q^2 + v_{p^1} + \lambda p^1, \\ q^2 &= q^2, \\ p^1 &= p^1, \\ p^2 &= -p^1, \end{cases}$$

donde $q^2 \in \mathbb{R}^3$, $p^1 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ con $< p^1, \alpha_0 >= 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Este conjunto es conexo. Entonces para todo $(q_0, p_0) \in M$ tal que $J(q_0, p_0) = (\alpha_0, 0)$ se define $\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)} := \mathcal{J}(q_0, p_0)$ y se tiene que $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})$ es una variedad de dimensión 6 parametrizada por

$$(q^2, p^1, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Luego

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}) \simeq \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R},$$

el cual no es simplemente conexo.

<u>Reducción óptima.</u>

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(q,p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})$, entonces por definición $(A,a) \in G_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}}$ si y sólo si $(A,a)(q,p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})$.

Sea $(A,a)(q,p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})$. De (3.40) se obtiene que $A(q^1-q^2)\times Ap^1 = A((q^1-q^2)\times p^1) = A\alpha_0 = \alpha_0$. Luego $A \in S^1_{\alpha_0}$, donde $S^1_{\alpha_0}$ es el grupo de rotaciones alrededor de α_0 el cual es isomorfo a S^1. La ecuación (3.41) se verifica directamente. Se tiene entonces

$$G_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}} = \{(A,a) \in SE(3) : A\alpha_0 = \alpha_0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^3. \tag{3.42}$$

Calculemos ahora el cociente $M_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})/G_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}}$.

Para $\alpha_0 \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ elegimos una base ortogonal $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \alpha_0)$, $|\mathbf{f}_1| = |\mathbf{f}_2| = 1$ positivamente orientada. Para todo $(q_0, p_0) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^4_{(\alpha_0,0)})$ existe un único $A \in S^1_{\alpha_0}$ que representa un giro alrededor de α_0, positivo con respecto a la orientación $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \alpha_0)$ del espacio tal que lleva p^1 al semiplano que contiene a $\mathbf{f}_1$ y α_0. Como p^1 es perpendicular a α_0 se tiene que la rotación lleva p^1 a $\widetilde{p}^1$ dado por

$$\widetilde{p}^1 = Ap^1 = c^1\mathbf{f}_1, \quad c^1 > 0.$$

Por otro lado, se elige una traslación $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aq^2 + a = 0$ y entonces q^2 se transforma en $\widetilde{q}^2$ dado por $\widetilde{q}^2 = 0$.

Por lo tanto los puntos del cociente $M_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}}$ se identifican con los puntos $(\widetilde{q}^1, \widetilde{q}^2, \widetilde{p}^1, \widetilde{p}^2)$ que se escriben

$$\begin{cases} \widetilde{q}^1 &= v_{p^1} + \lambda c^1 \mathbf{f}_1 \\ \widetilde{q}^2 &= 0 \\ \widetilde{p}^1 &= c^1 \mathbf{f}_1 \\ \widetilde{p}^2 &= -c^1 \mathbf{f}_1, \end{cases}$$

con $c^1 > 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Luego

$$M_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2,$$

el cual es conexo.

Se deduce de todo lo anterior que

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}) \longrightarrow M_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}}$$

es un fibrado principal trivial con grupo isomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^3$.

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}) &\simeq G_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}} \times M_{\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}} \\ &\simeq S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particular $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)})$ no es simplemente conexo.

7. Caso $\alpha_0 = 0$ y $u_0 \neq 0$.

En este caso consideraremos frecuentemente puntos (q,p) tales que $q^1, q^2, p^1, p^2 \in \Pi_s$, por lo cual indicaremos abreviadamente esta situacion escribiendo simplemente $(q,p) \in \Pi_s$, por un abuso de notación.

En este caso $J^{-1}(\alpha_0, u_0)$ está formado por los elementos $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que verifican

$$q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = 0, \tag{3.43}$$

$$p^1 + p^2 = u_0. \tag{3.44}$$

Para cada $s \in [0, \pi)$, vamos a ver que $J^{-1}(0, u_0) \cap M_{G^4} \cap \Pi_s$ está dado paramétricamente por

$$\begin{cases} q^1 &= r_{q^1}\beta_s + \mu_{q^1}u_0, \quad r_{q^1}, \mu_{q^1} \in \mathbb{R} \\ q^2 &= (r_{q^1} + r_{q^1q^2})\beta_s + \mu_{q^2}u_0, \quad r_{q^1q^2}, \mu_{q^2} \in \mathbb{R} \\ p^1 &= r_p\beta_s + \lambda u_0, \quad \lambda, r_p \in \mathbb{R} \\ p^2 &= -r_p\beta_s + (1-\lambda)u_0, \end{cases} \tag{3.45}$$

con las condiciones

$$r_p \neq 0 \text{ o } (r_p = 0 \text{ y } r_{q^1q^2} \neq 0), \tag{3.46}$$

$$r_{q^1} + r_{q^1q^2}(1-\lambda) + r_p(\mu_{q^2} - \mu_{q^1}) = 0. \tag{3.47}$$

Sea $\rho_s(0,u_0)$ el conjunto de puntos (q,p) que satisfacen (3.45), (3.46) y (3.47).Queremos ver que para cada $s \in [0,\pi)$, se tiene que $\rho_s(0,u_0) = J^{-1}(0,u_0) \cap M_{G^4} \cap \Pi_s$.

Sea $s \in [0,\pi)$. Veamos primero que (q,p) satisface (3.45) junto con (3.47) equivale a que (q,p) pertenece a Π_s, y es solución de (3.43) y de (3.44).

Sea (q,p) que satisface (3.45) junto con (3.47). Se ve directamente que $(q,p) \in \Pi_s$ y por como se definen p^1 y p^2 en (3.45) se deduce directamente que satisfacen (3.44). Por otro lado, la condición (3.47) implica que (q,p) satisface (3.43).

Reciprocamente si $(q,p) \in \Pi_s$ y satisface (3.44) es fácil ver que puede ser parametrizado como en (3.45). Reemplazando (3.45) en (3.43) se obtiene (3.47).

Veamos ahora que (q,p) satisface (3.45) y (3.46) equivale a que $(q,p) \in M_{G^4}$. En efecto, $p^1 \times p^2 = r_p\beta_x \times u_0$ de donde se obtiene que $p^1 \times p^2 \neq 0$ si y solo si $r_p \neq 0$.

Por otro lado se tiene que

$$(q^1 - q^2) \times p^1 = (-r_{q^1q^2}\lambda - (\mu_{q^1} - \mu_{q^2})r_p)\beta_s \times u_0 \tag{3.48}$$

$$(q^1 - q^2) \times p^2 = (-r_{q^1q^2}(1-\lambda) + (\mu_{q^1} - \mu_{q^2})r_p)\beta_s \times u_0. \tag{3.49}$$

Resulta sumando que

$$(q^1 - q^2) \times p^1 + (q^1 - q^2) \times p^2 = -r_{q^1q^2}\beta_s \times u_0.$$

Luego, si $r_{q^1q^2} \neq 0$, alguno de los sumandos del lado izquierdo al menos, debe ser no nulo.

Por otro lado, si $r_p = 0$, de (3.48) y (3.49) se deduce que si $(q^1 - q^2) \times p^1 \neq 0$ entonces $\lambda \neq 0$ y $r_{q^1q^2} \neq 0$ y si $(q^1 - q^2) \times p^2 \neq 0$ entonces se tiene que $1 - \lambda \neq 0$ y $r_{q^1q^2} \neq 0$. Por lo tanto si $r_p = 0$ y además $(q^1 - q^2) \times p^1 \neq 0$ o $(q^1 - q^2) \times p^1 \neq 0$, entonces $r_{q^1q^2} \neq 0$.

Por lo tanto hemos probado que que para todo $s \in [0,\pi)$, se tiene que

$$\rho_s(0,u_0) = J^{-1}(0,u_0) \cap M_{G_4} \cap \Pi_s.$$

Luego, $\rho(0,u_0) := \bigcup_{s\in[0,\pi)} \rho_s(0,u_0)$ satisface que

$$\rho(0,u_0) = J^{-1}(0,u_0) \cap M_{G^4}.$$

Para probar esto último basta ver que si $(q,p) \in J^{-1}(0,u_0) \cap M_{G^4}$ existe un único $s \in [0,\pi)$ tal que $(q,p) \in \Pi_s$. Si $p^1 \times p^2 \neq 0$, entonces p^1 y p^2 no son paralelos a u_0 pues verifican (3.44). Entonces existe un único $s \in [0,\pi)$ tal que $p^1 \in \Pi_s$. Además de (3.43) se tiene que $q^1 \times p^1$ es paralelo a $q^2 \times p^2$. Como además, $q^1 \times p^1$ es perpendicular a p^1 y por lo anterior, es perpendicular a p^2 se tiene que $q^1 \times p^1$ es paralelo a $p^1 \times p^2$ y entonces también $q^2 \times p^2$ es paralelo a $p^1 \times p^2$. Se tiene entonces que q^1 y q^2 pertenecen al plano normal a $p^1 \times p^2$ que es el plano determinado por p^1 y p^2, plano al cual también pertenece u_0. Se tiene en consecuencia que q^1, q^2, p^1, p^2 y u_0 pertenecen todos al plano Π_s.

Si $p^1 \times p^2 = 0$, entonces

$$(q^1 - q^2) \times p^1 \neq 0 \text{ o } (q^1 - q^2) \times p^1 \neq 0. \tag{3.50}$$

De (3.44) se obtiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p^1 = \lambda u_0$ y $p^2 = (1-\lambda)u_0$. Reemplazando en (3.50) se obtiene que $(q^1 - q^2) \times u_0 \neq 0$, entonces existe un único $s \in [0,\pi)$ tal que $q^1 - q^2 \in \Pi_s$.

Reemplazando ahora en (3.43) se obtiene que $(\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2) \times u_0 = 0$, lo que implica que en la recta que une a q^1 y q^2 hay un vector paralelo a u_0. Luego $q^1, q^2, (\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2)$ y u_0 pertenecen todos al plano Π_s.

En consecuencia, si $(q,p) \in J^{-1}(0,u_0) \cap M_{G^4}$ se tiene que existe un único $s \in [0,\pi)$ tal que $(q,p) \in \Pi_s$ como queríamos probar.

Estudiaremos ahora la topología de $\rho_s(0,u_0)$ y de $\rho(0,u_0)$. Primero veamos que para cada $s \in [0,\pi)$, $\rho_s(0,u_0)$ es conexo.

En efecto, sea s fijo y sean $(q_a,p_a),(q_b,p_b) \in \rho_s(0,u_0)$. Vamos a ver que se pueden conectar por una curva continua contenida en $\rho_s(0,u_0)$. Esta curva está formada por trozos lineales que unen puntos intermedios.

Consideremos el caso $r_{p_a} > 0$ y $r_{p_b} > 0$. Partiendo del punto

$$(q_a,p_a) = \left(r_{q_a^1}\beta_s + \mu_{q_a^1}u_0, (r_{q_a^1} + r_{q_a^1 q_a^2})\beta_s + \mu_{q_a^2}u_0, r_{p_a}\beta_s + \lambda_a u_0, -r_{p_a}\beta_s + (1-\lambda_a)u_0\right)$$

consideremos una curva $(q(t),p(t))$ que conecta el punto (q_a,p_a) con un punto intermedio a saber

$$\begin{aligned}(q(t),p(t)) \quad = \quad & (r_{q^1}(t)\beta_s + \mu_{q^1}(t)u_0, (r_{q^1}(t) + r_{q^1q^2}(t))\beta_s + \mu_{q^2}(t)u_0, r_p(t)\beta_s + \lambda(t)u_0,\\ & -r_p(t)\beta_s + (1-\lambda(t))u_0),\end{aligned}$$

donde para $t \in [0,1]$

$$\begin{array}{rclcrcl} \mu_{q^1}(t) & = & \mu_{q_a^1}, & & r_{q^1q^2}(t) & = & r_{q_a^1q_a^2}, \\ \mu_{q^2}(t) & = & \mu_{q_a^2}, & & \lambda(t) & = & \lambda_a, \\ r_p(t) & = & tr_{p_b}+(1-t)r_{p_a}, & & r_{q^1}(t) & = & (\lambda_a-1)r_{q_a^1q_a^2}-r_p(t)(\mu_{q_a^1}-\mu_{q_a^2}). \end{array}$$

Se llega así, para $t=1$, al punto intermedio

$$(q_1,p_1)=\left(r_{q_1^1}\beta_s+\mu_{q_a^1}u_0,(r_{q_1^1}+r_{q_a^1q_a^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_a u_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_a)u_0\right),$$

donde se define $r_{q_1^1}=r_{q^1}(1)$. Se observa que para cada tm $(q(t),p(t))$ satisface (3.45),(3.46) y (3.47).

De manera similar, partiendo del punto (q_1,p_1) se considera otra curva que por abuso de notación seguiremos llamando $(q(t),p(t))$, que conecta el punto (q_1,p_1) con otro punto intermedio donde se cambia el parámetro λ_a por λ_b, se deja fijos los parámetros $r_{p_b},\mu_{q_a^1},r_{q_a^1q_a^2},\mu_{q_a^2}$, y se cambia el parámetro $r_{q_1^1}$ por uno que llamaremos $r_{q_2^1}$ de manera que a lo largo de la curva se siga satisfaciendo (3.45), (3.46) y (3.47), a saber

$$\begin{aligned} (q(t),p(t)) &= (r_{q^1}(t)\beta_s+\mu_{q^1}(t)u_0,(r_{q^1}(t)+r_{q^1q^2}(t))\beta_s+\mu_{q^2}(t)u_0,r_p(t)\beta_s+\lambda(t)u_0,\\ &\quad -r_p(t)\beta_s+(1-\lambda(t))u_0), \end{aligned}$$

donde para $t\in[0,1]$

$$\begin{array}{rclcrcl} \mu_{q^1}(t) & = & \mu_{q_a^1}, & & r_{q^1q^2}(t) & = & r_{q_a^1q_a^2}, \\ \mu_{q^2}(t) & = & \mu_{q_a^2}, & & \lambda(t) & = & t\lambda_b+(1-t)\lambda_a, \\ r_p(t) & = & r_{p_b}, & & r_{q^1}(t) & = & (\lambda(t)-1)r_{q_a^1q_a^2}-r_{p_b}(\mu_{q_a^1}-\mu_{q_a^2}). \end{array}$$

Se llega así, para $t=1$, al punto intermedio

$$(q_2,p_b)=\left(r_{q_2^1}\beta_s+\mu_{q_a^1}u_0,(r_{q_2^1}+r_{q_a^1q_a^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_b u_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_b)u_0\right),$$

donde se define $r_{q_2^1}=r_{q^1}(1)$.

Luego, de manera análoga se pueden construir curvas que conecten sucesivamente los puntos intermedios dados por

$$(q_3,p_b)=\left(r_{q_3^1}\beta_s+\mu_{q_b^1}u_0,(r_{q_3^1}+r_{q_a^1q_a^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_b u_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_b)u_0\right)$$

y

$$(q_4,p_b)=\left(r_{q_4^1}\beta_s+\mu_{q_b^1}u_0,(r_{q_4^1}+r_{q_b^1q_b^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_b u_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_b)u_0\right).$$

Por último, partiendo del punto (q_4,p_b) se considera la curva $(q(t),p(t))$ que conecta el punto (q_4,p_b) con el punto (q_b,p_b) dada por

$$\begin{aligned}(q(t),p(t)) &= (r_{q^1}(t)\beta_s+\mu_{q^1}(t)u_0,(r_{q^1}(t)+r_{q^1q^2}(t))\beta_s+\mu_{q^2}(t)u_0,r_p(t)\beta_s+\lambda(t)u_0,\\ &\quad -r_p(t)\beta_s+(1-\lambda(t))u_0),\end{aligned}$$

donde para $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\mu_{q^1}(t) &= \mu_{q_b^1}, & r_{q^1q^2}(t) &= r_{q_b^1q_b^2},\\ \mu_{q^2}(t) &= t\mu_{q_b^2}+(1-t)\mu_{q_a^2}, & \lambda(t) &= \lambda_b,\\ r_p(t) &= r_{p_b}, & r_{q^1}(t) &= (\lambda_b-1)r_{q_b^1q_b^2}-r_{p_b}(\mu_{q_b^1}-\mu_{q^2}(t)).\end{aligned}$$

Luego, $r_{q^1}(1)=(\lambda_b-1)r_{q_b^1q_b^2}-r_{p_b}(\mu_{q_b^1}-\mu_{q_b^2})$ y como (q_b,p_b) verifica (3.47) se obtiene que $r_{q^1}(1)=r_{q_b^1}$. Se llega así, para $t=1$, al punto

$$(q_b,p_b)=\left(r_{q_b^1}\beta_s+\mu_{q_b^1}u_0,(r_{q_b^1}+r_{q_b^1q_b^2})\beta_s+\mu_{q_b^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_bu_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_b)u_0\right).$$

De modo análogo se pueden conectar por una curva continua puntos tales que $r_{p_a}<0$ y $r_{p_b}<0$.

Veremos ahora como conectar puntos tales que $r_{p_a}=0$ y $r_{p_b}>0$. Si $r_{p_a}=0$ se tiene de (3.46) que $r_{q_a^1q_a^2}\neq 0$ y de (3.47) se obtiene que

$$r_{q_a^1}+r_{q_a^1q_a^2}(1-\lambda_a)=0.$$

Como antes, partiendo del punto

$$(q_a,p_a)=\left(r_{q_a^1}\beta_s+\mu_{q_a^1}u_0,(r_{q_a^1}+r_{q_a^1q_a^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,\lambda_au_0,(1-\lambda_a)u_0\right)$$

se considera una curva $(q(t),p(t))$ que lleva el punto (q_a,p_a) en un punto intermedio y que cambia el parámetro $r_{p_a}=0$ por r_{p_b}, que por hipótesis es mayor que 0 y que además deja fijos los parámetros $\lambda_a,\mu_{q_a^1},r_{q_a^1q_a^2},\mu_{q_a^2}$, y cambia el parámetro $r_{q_a^1}$ por uno que llamaremos $r_{q_1^1}$ de manera que a lo largo de la curva se siga satisfaciendo (3.45), (3.46) y (3.47) a saber

$$\begin{aligned}(q(t),p(t)) &= (r_{q^1}(t)\beta_s+\mu_{q^1}(t)u_0,(r_{q^1}(t)+r_{q^1q^2}(t))\beta_s+\mu_{q^2}(t)u_0,r_p(t)\beta_s+\lambda(t)u_0,\\ &\quad -r_p(t)\beta_s+(1-\lambda(t))u_0),\end{aligned}$$

donde para $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\mu_{q^1}(t) &= \mu_{q_a^1}, & r_{q^1q^2}(t) &= r_{q_a^1q_a^2},\\ \mu_{q^2}(t) &= \mu_{q_a^2}, & \lambda(t) &= \lambda_a,\\ r_p(t) &= tr_{p_b}, & r_{q^1}(t) &= (\lambda_a-1)r_{q_a^1q_a^2}-r_p(t)(\mu_{q_a^1}-\mu_{q_a^2}).\end{aligned}$$

Se llega así, para $t=1$, al punto intermedio

$$(q_1,p_1)=\left(r_{q_1^1}\beta_s+\mu_{q_a^1}u_0,(r_{q_1^1}+r_{q_a^1q_a^2})\beta_s+\mu_{q_a^2}u_0,r_{p_b}\beta_s+\lambda_au_0,-r_{p_b}\beta_s+(1-\lambda_a)u_0\right).$$

Luego estamos en la situación vista anteriormente donde se trata de conectar dos puntos cuyos parámetros r_p son mayores a 0 (a saber ambos son r_{p_b}).

De modo similar se prueba que los puntos tales que $r_{p_a} = 0$ se unen con los que cumplen que $r_{p_b} < 0$, que los puntos tales que $r_{p_a} > 0$ se unen con los que cumplen que $r_{p_b} = 0$ y que los puntos tales que $r_{p_a} < 0$ se unen con los que cumplen que $r_{p_b} = 0$.

Por último combinando los casos anteriores se puede unir un punto (q_a, p_a) tal que $r_{p_a} > 0$ con un punto (q_b, p_b) tal que $r_{p_b} < 0$. En efecto, se considera una curva que lleve el punto (q_a, p_a) a un punto intermedio (q_1, p_1) tal que $r_{p_1} = 0$. Luego se une el punto (q_1, p_1) con (q_b, p_b). Análogamente se unen los puntos tales que $r_{p_a} < 0$ y $r_{p_b} > 0$.

Con esto queda probado que $\rho_s(0, u_0)$ es conexo para cada $s \in [0, \pi)$.

Ahora veremos que $\rho(0, u_0)$ es conexo. En efecto, sean $(q_a, p_a) \in \Pi_{s_a}$ y $(q_b, p_b) \in \Pi_{s_b}$. Es claro que se puede rotar el plano Π_{s_a} para llevarlo a coincidir con el plano Π_{s_b} un ángulo $s_b - s_a$. El punto $(q_a, p_a) \in \Pi_a$ se lleva a coincidir con un punto $(\bar{q}_b, \bar{p}_b) \in \Pi_b$ el cual está conectado con (q_a, p_a) por un arco de círculo. Luego se pueden unir $(\bar{q}_b, \bar{p}_b) \in \Pi_b$ con (q_b, p_b) como se explicó antes mediante una curva continua.

Habiendo probado que $\rho(0, u_0)$ es conexo ahora resulta posible calcular el momento óptimo. En efecto para todo $(q, p) \in M_{G^4}$ tal que $J(q, p) = (0, u_0)$ se define $\rho^{G^4}_{(0,u_0)} := \mathcal{J}(q, p)$ y se tiene que

(3.51)
$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}) &= \rho(0, u_0) \\
&= \big\{(r_{q^1}\beta_s + \mu_{q^1}u_0, (r_{q^1} + r_{q^1q^2})\beta_s + \mu_{q^2}u_0, r_p\beta_s + \lambda u_0, -r_p\beta_s + (1-\lambda)u_0) : \\
&\quad s \in [0, \pi), r_{q^1}, \mu_{q^1}, \mu_{q^2}, \lambda, r_p \in \mathbb{R}, (r_p \neq 0 \text{ o } (r_p = 0 \text{ y } r_{q^1q^2} \neq 0)) \\
&\quad \text{y } r_{q^1} + r_{q^1q^2}(1-\lambda) + r_p(\mu_{q^2} - \mu_{q^1}) = 0\big\}
\end{aligned}$$

Reducción óptima.

Calculemos ahora el subgrupo de isotropía de $\rho^{G^4}_{(0,u_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$, entonces por definición $(A, a) \in G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$ si y sólo si $(A, a)(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$.

Sea $(A, a)(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$. De (3.44) se obtiene que $Ap^1 + Ap^2 = Au_0 = u_0$. Luego $A \in S^1_{u_0}$, donde $S^1_{u_0}$ es el grupo de rotaciones alrededor de u_0 el cual es isomorfo a S^1.

Por otra parte de (3.43) resulta sucesivamente

$$\begin{aligned} (Aq^1 + a) \times Ap^1 + (Aq^2 + a) \times Ap^2 &= 0 \\ Aq^1 \times Ap^1 + Aq^2 \times Ap^2 + a \times A(p^1 + p^2) &= 0 \\ A(q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2) + a \times (p^1 + p^2) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como (q, p) verifica (3.43) y (3.44) se obtiene que

$$a \times u_0 = 0.$$

Por lo tanto debe cumplirse $a = \xi u_0$ para $\xi \in \mathbb{R}$ y entonces se tiene que

$$G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Au_0 = u_0 \text{ y } a = \xi u_0,\ \xi \in \mathbb{R}\} \tag{3.52}$$

Sea $M_0 = \{(q, p) \in M : (q, p)$ satisface (3.45) y (3.47)$\}$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}) = M_0 - \{(q, p) \in M : r_p = 0, r_{q^1q^2} = 0)\}.$$

Sean

$$\begin{aligned} S_p &= \{(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}) : r_p = 0\}, \\ S_{q^1q^2} &= \{(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}) : r_{q^1q^2} = 0\}. \end{aligned}$$

S_p es una subvariedad conexa de $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$. Para cada $s \in [0, \pi)$, $S_p \cap \Pi_s$ tiene dos componentes conexas dadas por las condiciones $r_{q^1q^2} > 0$, $r_{q^1q^2} < 0$, respectivamente.

$S_{q^1q^2}$ es una subvariedad conexa de $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$. Para cada $s \in [0, \pi)$, $S_{q^1q^2} \cap \Pi_s$ tiene dos componentes conexas dadas por las condiciones $r_p > 0$, $r_p < 0$, respectivamente.

Se tiene además que $S_p \cap S_{q^1q^2} = \emptyset$.

Vamos a definir dos cartas para caracterizar $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$ como variedad. Sean

$$\begin{aligned} W_p &= \mathcal{J}^{-1}(\rho^4_{(0,u_0)}) - S_p, \\ W_{q^1q^2} &= \mathcal{J}^{-1}(\rho^4_{(0,u_0)}) - S_{q^1q^2}. \end{aligned}$$

Estas dos cartas son invariantes por la acción de $G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$.

Espacio de órbitas de $W_p/G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$.

Dado $(q, p) \in W_p$ existe un único $(\bar{q}, \bar{p}) \in W_p \cap \Pi_0$ de la forma $(\bar{q}, \bar{p}) = (A_p, \xi_p u_0)(q, p)$ tal que $\mu_{\bar{q}^1} = 0$, $r_{\bar{p}} > 0$. En efecto, basta tomar A_p la única rotación de ángulo $o_p \in [0, 2\pi)$ tal que $\bar{p}^1 = A_p p^1 \in \Pi_0$ y $r_{\bar{p}} > 0$, y además, $\xi_p = -\mu_{q^1}$. De este modo, la órbita del punto (q, p) por la acción de $G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$ se identifica con el punto $(\bar{q}, \bar{p})$ y el espacio de óribtas se identifica con la variedad $\overline{W}_p \subset \Pi_0$ que es un abierto de Π_0, definida paramétricamente por

$$(r_{\bar{q}^1\bar{q}^2}, \mu_{\bar{q}^2}, \bar{\lambda}, r_{\bar{p}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Esto resulta así teniendo en cuenta que $\mu_{\bar{q}^1} = 0$ y que $r_{\bar{q}^1}$ se despeja de (3.47).

De este modo resulta que W_p es un fibrado principal trivial con base isomorfa a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}^4$ y grupo $G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Espacio de órbitas de $W_{q^1q^2}/G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$.

Dado $(q,p) \in W_{q^1q^2}$ existe un único $(\widetilde{q},\widetilde{p}) \in W_{q^1q^2} \cap \Pi_0$ de la forma $(\widetilde{q},\widetilde{p}) = (A_{q^1q^2}, \xi_{q^1q^2}u_0)(q,p)$ con la propiedad $r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} > 0$ y $\mu_{\widetilde{q}^1} = 0$. Como en el caso de la carta W_p basta elegir $\xi_{q^1q^2} = -\mu_{q^1}$ y $A_{q^1q^2}$ una rotación adecuada que lleve $q^2 - q^1$ al plano Π_0 de ángulo $o_{q^1q^2} \in [0, 2\pi)$.

Entonces el espacio de órbitas se identifica con la variedad $\widetilde{W}_{q^1q^2} \subset \Pi_0$ que es un abierto de Π_0, la cual está parametrizada por

$$(r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2}, \mu_{\widetilde{q}^2}, r_{\widetilde{p}}, \widetilde{\lambda}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Entonces $W_{q^1q^2}$ es un fibrado principal con base isomorfa a $\widetilde{W}_{q^1q^2} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^4$ y grupo $G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$.

La intersección de las cartas $\overline{W}_p$ y $\widetilde{W}_{q^1q^2}$ tiene dos componentes conexas. En la carta $\overline{W}_p$ estas componentes conexas estan dadas por las condiciones $r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} > 0$ y $r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} < 0$ y en la carta $\widetilde{W}_{q^1q^2}$ estan dadas, respectivamente, por las condiciones $r_{\widetilde{p}} > 0$ y $r_{\widetilde{p}} < 0$.

El isomorfismo de transición entre las cartas $\overline{W}_p$ y $\widetilde{W}_{q^1q^2}$

$$(r_{\bar{q}^1\bar{q}^2}, \mu_{\bar{q}^2}, \bar{\lambda}, r_{\bar{p}}) \to (r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2}, \mu_{\widetilde{q}^2}, \widetilde{\lambda}, r_{\widetilde{p}})$$

esta dado por las condiciones

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda} &= \bar{\lambda} \\
\mu_{\widetilde{q}^2} &= \mu_{\bar{q}^2} \\
r_{\widetilde{p}} &= r_{\bar{p}}, \text{ y } r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} = r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} \quad \text{si} \quad r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} > 0 \\
r_{\widetilde{p}} &= -r_{\bar{p}}, \text{ y } r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} = -r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} \quad \text{si} \quad r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} < 0.
\end{aligned}$$

Una interpretación gráfica de como se pegan las cartas está dada por las siguientes figuras.

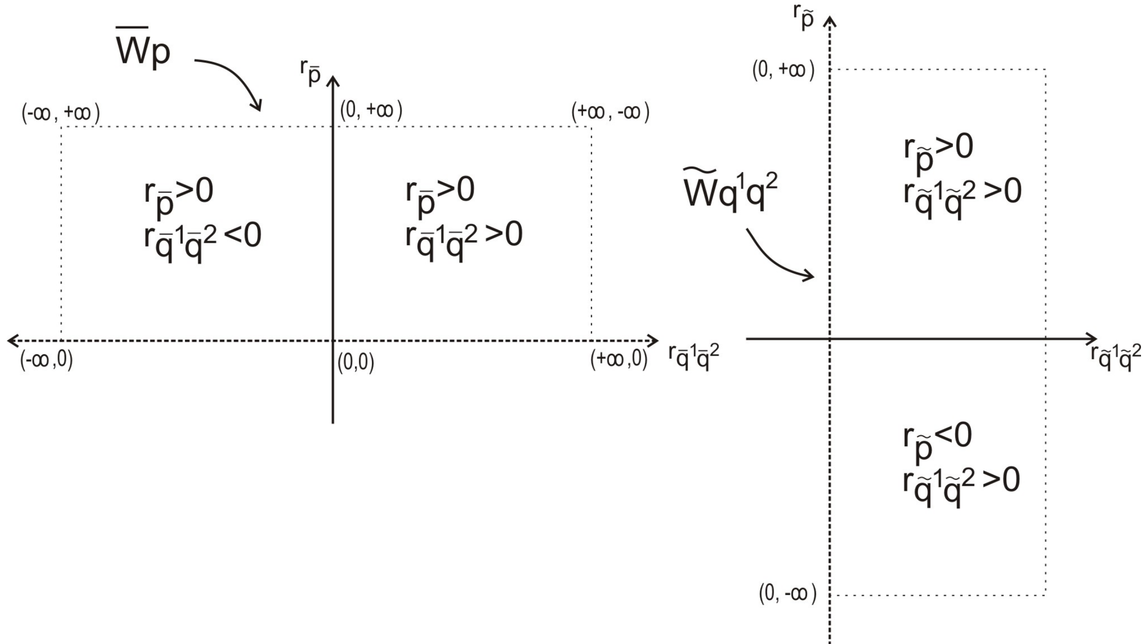

Figura 1

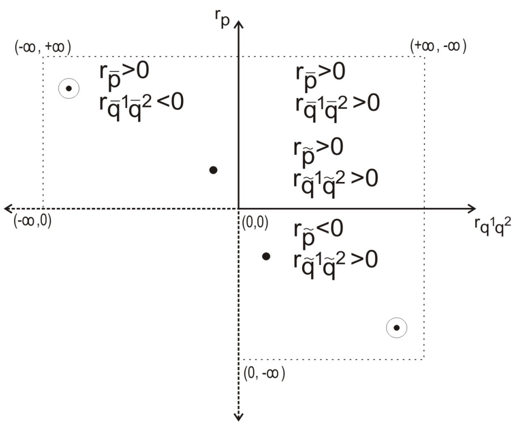

Figura 2

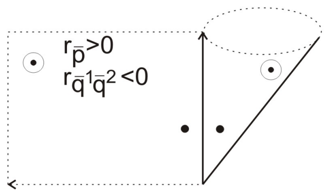

Figura 3

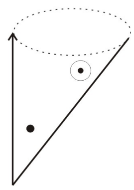

Figura 4

La figura 1 representa las cartas $\overline{W}_p$ y $\widetilde{W}_{q^1q^2}$. En la figura 2 se han pegado las componentes conexas $r_{\bar{p}} > 0$, $r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} > 0$ de $\overline{W}_p$ y $r_{\widetilde{p}} > 0$, $r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} > 0$ de $\widetilde{W}_{q^1q^2}$ mediante el isomorfismo $r_{\widetilde{p}} = r_{\bar{p}}$, $r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} = r_{\bar{q}^1\bar{q}^2}$.

Resta pegar las dos componentes que quedan sueltas en la Figura 2 mediante el isomorfismo $r_{\widetilde{p}} = -r_{\bar{p}}$, $r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} = -r_{\bar{q}^1\bar{q}^2}$. Esta operación se visualiza en dos pasos. En el primero, se pegan las flechas verticales (coordenadas r_p) y se obtiene el cono de la Figura 3, sin el vértice que corresponde al origen $(0,0)$. Observar que la flecha que indica hacia abajo en la Figura 2 no forma parte de $\widetilde{W}_{q^1q^2}$ pero se indica el pegado para ilustrar el método gráfico. Por último, resta pegar la componente $r_{\bar{p}} > 0$, $r_{\bar{q}^1\bar{q}^2} < 0$, que queda suelta en la Figura 3, con la superficie del cono. Para esto, se identifica con la regla dada por el isomorfismo $r_{\widetilde{p}} = -r_{\bar{p}}$, $r_{\widetilde{q}^1\widetilde{q}^2} = -r_{\bar{q}^1\bar{q}^2}$ y se obtiene el cono indicado en la Figura 4 sin el vértice que es isomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Los puntos $\odot$ y $\bullet$ ilustran como se debe pegar.

Luego $\overline{W}_p \cup \widetilde{W}_{q^1 q^2}$ es isomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^3$. Esto da la estructura diferenciable y topológica del cociente $M_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})/G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$, el cual sabemos que es isomorfo a $\overline{W}_p \cup \widetilde{W}_{q^1 q^2}$. Por lo tanto $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(0,u_0)})$ es isomorfo a $S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^3$, lo cual describe sus estructuras diferenciable, topológica y de fibrado principal.

Probaremos a continuación la trivialidad de este fibrado.

Lema 3.1. *Sea $\pi : M \to X$ un fibrado con fibra $\pi^{-1}(x)$ isomorfa a una variedad conexa F y base X de dimension 1, la cual, por simplicidad, asumiremos conexa. Entonces hay una sección $\sigma : X \to M$.*

Demostración. Asumamos primero el caso $X = S^1$. Sean $x_k = \exp i\varphi_k$, donde

$$\varphi_0 < \varphi_0 <, ..., < \varphi_{2n} = \varphi_0 + 2\pi$$

tales que hay cartas

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &: \pi^{-1}(x_0, x_2) \to (\varphi_0, \varphi_2) \times F \\
\alpha_1 &: \pi^{-1}(x_1, x_3) \to (\varphi_1, \varphi_3) \times F \\
&\quad .... \\
\alpha_{2n-2} &: \pi^{-1}(x_{2n-2}, x_{2n}) \to (\varphi_{2n-2}, \varphi_{2n}) \times F \\
\alpha_{2n-1} &: \pi^{-1}(x_{2n-1}, x_1) \to (\varphi_{2n-1}, \varphi_1) \times F
\end{aligned}$$

Para $f_0, ..., f_{2n}$ arbitrarios en F se pueden elegir curvas $c_k : (\varphi_k, \varphi_{k+2}) \to F$ tales que $c_k(\varphi_k) = f_k$, $k = 0, ..., 2n$ y tales que las secciones locales $\sigma_k : (x_k, x_{k+2}) \to M$ se pegan en una única sección $\sigma : X \to M$.

El caso en que X es difeomorfo a $\mathbb{R}$ se prueba de modo similar. □

Lema 3.2. *Sea $\pi : M \to X \times \mathbb{R}^n$ un fibrado principal con grupo G y asumamos que hay una sección $\sigma_0 : X \times \{0\} \to M$. Entonces M es un fibrado principal trivial.*

Demostración. El caso $n = 0$ es consecuencia del Lema 3.1 y del hecho de que un fibrado principal que admite una sección es trivial. Para probar el caso $n = 1$, elijamos una conexión principal y definamos $\sigma(x, t)$ como el levantamiento horizontal de la curva $t \to (x, t)$ con condición inicial $\sigma(x, 0) = \sigma_0(x, 0)$. Entonces σ es una sección de π, luego el caso $n = 1$ esta probado. El caso general se sigue por inducción asumiendo el caso $n - 1$ y usando el isomorfismo natural $X \times \mathbb{R}^n \equiv (X \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. □

Como vimos, el grupo de isotropía $G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}} \equiv S^1 \times \mathbb{R}$ actúa libre y propiamente en $\mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right)$, entonces el mapa cociente

$$\mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right) \to \mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right)/G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}},$$

es un fibrado principal y además se tiene que $\mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right)/G_{\rho^{G^4}_{(0,u_0)}}$ es difeomorfo a $S^1\times\mathbb{R}^3$. Por el Lema 3.1 con $X = S^1\times\{0\}$ vemos que hay una sección $\sigma_0 : S^1\times\{0\} \to \mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right)$ y usando el Lema 3.2 podemos concluir que $\mathcal{J}^{-1}\left(\rho^{G^4}_{(0,u_0)}\right)$ es isomorfo al fibrado trivial $S^1\times\mathbb{R}\times S^1\times\mathbb{R}^3$.

8. Caso $\alpha_0 = \delta_0 u_0$, $\delta_0 \neq 0$ y $u_0 \neq 0$.

En este caso $J^{-1}(\alpha_0, u_0)$ está formado por los elementos $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in T^*(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ que verifican

$$q^1\times p^1 + q^2\times p^2 = \delta_0 u_0. \tag{3.53}$$

$$p^1 + p^2 = u_0. \tag{3.54}$$

Si $p^1\times p^2 = 0$, se tiene (3.54) que $p^1 = \lambda u_0$ y $p^2 = (1-\lambda)u_0$ para $\lambda\in\mathbb{R}$. Reemplazando en (3.53) se obtiene que

$$(\lambda q^1 + (1-\lambda)q^2)\times u_0 = \delta_0 u_0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto las soluciones de (3.53) y (3.54) se encuentran contenidas en M_3.

Sea $N = p^1\times p^2$, se tiene entonces que $N\in\mathbb{R}^3-\{0\}$. Los vectores p^1, p^2, p^1-p^2 y u_0 pertenecen todos al plano normal a N que llamaremos Π_N.

Sea $q^i = \tau^i N + q^i_N$, $i = 1, 2$, donde $\tau^i\in\mathbb{R}$ y q^i_N es perpendicular a N. Entonces (3.53) y (3.53) son equivalentes a

$$\tau^1 N\times p^1 + \tau^2 N\times p^2 = \delta_0 u_0, \tag{3.55}$$

$$q^1_N\times p^1 + q^2_N\times p^2 = 0, \tag{3.56}$$

$$p^1 + p^2 = u_0. \tag{3.57}$$

Como p^1 y p^2 son linealmente independientes, también lo son $N\times p^1$ y $N\times p^2$ y están en el plano Π_N. Entonces (3.55), que es equivalente a

$$\tau^1(N\times p^1) + \tau^2(N\times p^2) = \delta_0 u_0,$$

tiene única solución (τ^1, τ^2). Dado que $p^2 = u_0 - p^1$ resulta $\tau^1 = \tau^1(p^1)$, $\tau^2 = \tau^2(p^1)$.

Como (3.56) es una ecuación homogénea sobre el espacio de 4 variables (q^1_N, q^2_N), sus soluciones forman, para cada p^1, un espacio vectorial de dimensión 3, que llamaremos $V(p^1)$. En efecto, sean $q^i_N = s^i_1 p^1 + s^i_2 p^2$, $i = 1, 2$. Entonces (3.56) es equivalente a

$$(s^1_1 p^1 + s^1_2 p^2)\times p^1 + (s^2_1 p^1 + s^2_2 p^2)\times p^2 = 0,$$

que a su vez es equivalente a

$$s^1_2 p^2\times p^1 + s^2_1 p^1\times p^2 = 0,$$

que resulta una ecuación escalar cuya solución es $s_2^1 = s_1^2$.

Entonces, las soluciones de (3.55), (3.56) y (3.57) pueden ser descriptas de la siguiente manera: eligiendo p^1 no paralelo a u_0, $p^2 = u_0 - p^1$ resulta no paralelo a u_0 ni a p^1. Entonces, podemos encontrar $(\tau^1(p^1), \tau^2(p^1))$ solución de (3.55) y además $q_N^1, q_N^2 \in V(p^1)$ soluciones de (3.56) dada por

$$\begin{array}{rcl} q_N^1 & = & s_1^1 p^1 + s_2^1 p^2 \\ q_N^2 & = & s_2^1 p^1 + s_2^2 p^2. \end{array}$$

Es decir, los puntos de $J^{-1}(\alpha_0, u_0) \cap M_{G^4}$ son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} q^1 & = & \tau^1 N + s_1^1 p^1 + s_2^1 p^2, & s_1^1, s_2^1 \in \mathbb{R} \\ q^2 & = & \tau^2 N + s_2^1 p^1 + s_2^2 p^2, & s_2^2 \in \mathbb{R} \\ p^1 & \in & \mathbb{R}^3 - \ell_{u_0} & \\ p^2 & = & u_0 - p^1. & \end{array} \right. \tag{3.58}$$

Observar que, como se probó en el caso anterior, q_N^1, q_N^2, p^1, p^2 y u_0 son coplanares.

Se ve directamente que este conjunto es conexo. Entonces para todo $(q_0, p_0) \in M$ tal que $J(q_0, p_0) = (\delta_0 u_0, u_0)$ con $\delta_0 \neq 0$ se define $\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)} := \mathcal{J}(q_0, p_0)$ y se tiene que $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})$ es una variedad de dimensión 6 parametrizada por

$$(p^1, s_1^1, s_2^1, s_2^2) \in (\mathbb{R}^3 - \ell_{u_0}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Se tiene entonces que

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}) \simeq (\mathbb{R}^3 - \ell_{u_0}) \times \mathbb{R}^3,$$

que es conexo pero no simplemente conexo.

<u>Reducción óptima.</u>

Calculemos primero el subgrupo de isotropía de $\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}$ por la acción de $\bar{\phi}$. Sea $(q,p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})$, entonces por definicioón $(A, a) \in G_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}}$ si y sólo si $(A, a)(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})$.

Sea $(A, a)(q, p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})$. De (3.54) se obtiene que $Ap^1 + Ap^2 = Au_0 = u_0$. Luego $A \in S^1_{u_0}$.

Por otra parte de (3.53) resulta sucesivamente

$$\begin{array}{rcl} (Aq^1 + a) \times Ap^1 + (Aq^2 + a) \times Ap^2 & = & \delta_0 u_0 \\ Aq^1 \times Ap^1 + Aq^2 \times Ap^2 + a \times A(p^1 + p^2) & = & \delta_0 u_0 \\ A(q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2) + a \times (p^1 + p^2) & = & \delta_0 u_0. \end{array}$$

Luego, como (q,p) verifica (3.53), (3.54) y $Au_0 = u_0$, se obtiene que

$$a \times u_0 = 0.$$

Por lo tanto debe cumplirse $a = \xi u_0$ para $\xi \in \mathbb{R}$ y entonces se tiene como en el caso anterior que

$$G_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}} = \{(A,a) \in SE(3) : Au_0 = u_0 \text{ y } a = \xi u_0,\ \xi \in \mathbb{R}\} \tag{3.59}$$

Calculemos ahora el cociente $M_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}} = \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})/G_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}}$.

Dado $(q,p) \in \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)})$ existe un único $A \in S^1_{u_0}$ que representa un giro alrededor de u_0, positivo con respecto a la orientación $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, u_0)$ del espacio tal que lleva p^1 al semiplano que contiene a $\mathbf{e}_1$ y u_0 dado por $\{z^1\mathbf{e}_1 + z^2 u_0 : z^1 > 0\}$. Es decir, lleva p^1 en $\bar{p}^1$ dado por

$$\bar{p}^1 = Ap^1 = c^1\mathbf{e}_1 + c^2 u_0, \quad c^1 > 0, c^2 \in \mathbb{R}.$$

Este giro lleva q^1_N, q^2_N a

$$\begin{aligned} \bar{q}^1_N &= (s^1_1 - s^1_2)c^1\mathbf{e}_1 + (s^1_1 c^2 + s^1_2(1-c^2))u_0 \\ \bar{q}^2_N &= (s^1_2 - s^2_2)c^1\mathbf{e}_1 + (s^1_2 c^2 + s^2_2(1-c^2))u_0. \end{aligned}$$

Elegimos ahora una traslación ξu_0 de manera que

$$\xi = -(s^1_1 c^2 + s^1_2(1-c^2)).$$

Entonces $\bar{q}^1_N$, $\bar{q}^2_N$ se transforman en

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^1_N &= (s^1_1 - s^1_2)c^1\mathbf{e}_1 \\ \widetilde{q}^2_N &= (s^1_2 - s^2_2)c^1\mathbf{e}_1 + ((s^2_2 - s^1_2)(1-c^2) + (s^1_2 - s^1_1)c^2)u_0. \end{aligned}$$

Sean $d^1 = s^1_1 - s^1_2$ y $d^2 = s^2_2 - s^1_2$, luego se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^1_N &= d^1c^1\mathbf{e}_1 \\ \widetilde{q}^2_N &= -d^2c^1\mathbf{e}_1 + (d^2(1-c^2) - d^1c^2)u_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos del cociente $M_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}}$ se identifican con los puntos $(\widetilde{q}^1, \widetilde{q}^2, \widetilde{p}^1, \widetilde{p}^2)$ que se escriben

$$\left\{ \begin{aligned} \widetilde{q}^1 &= \tau^1 N + d^1c^1\mathbf{e}_1 \\ \widetilde{q}^2 &= \tau^2 N - d^2c^1\mathbf{e}_1 + (d^2(1-c^2) - d^1c^2)u_0 \\ \widetilde{p}^1 &= c^1\mathbf{e}_1 + c^2u_0 \\ \widetilde{p}^2 &= -c^1\mathbf{e}_1 + (1-c^2)u_0, \end{aligned} \right.$$

con $c^1 > 0, c^2, d^1, d^2 \in \mathbb{R}$.

Luego

$$M_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4,$$

el cual es conexo.

Se deduce de todo lo anterior que

$$\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u, u_0)}) \longrightarrow M_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}}$$

es un fibrado principal trivial con grupo isomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}) &\simeq G_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}} \times M_{\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0, u_0)}} \\ &\simeq S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particular $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^4}_{(\delta_0 u, u_0)})$ no es simplemente conexo.

Caso $\alpha_0 \neq 0$, $u_0 \neq 0$, $\alpha_0 \times u_0 \neq 0$.

Se puede reducir este caso al caso $\alpha_0 = \delta_0 u_0$ con $\delta_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, a través de una traslación. En efecto, $\mathcal{J}$ tiene la siguiente propiedad

$$\mathcal{J}((A, a)(q_0, p_0)) = (A, a)\mathcal{J}(q_0, p_0), \quad \forall (A, a) \in SE(3),$$

lo cual se deduce de las definiciones.

Usando una traslación (I, a) se tiene que

$$\mathcal{J}(q_0 + a, p_0) = (I, a)\mathcal{J}(q_0, p_0).$$

Las ecuaciones en (3.37) bajo una traslación se transforman en

$$\left\{ \begin{aligned} (q^1 + a) \times p^1 + (q^2 + a) \times p^2 &= \alpha_0. \\ p^1 + p^2 &= u_0. \end{aligned} \right.$$

que es equivalente a

$$\left\{ \begin{aligned} q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 &= \alpha_0 - a \times u_0. \\ p^1 + p^2 &= u_0. \end{aligned} \right.$$

Entonces, se tiene que, eligiendo a apropiadamente, se puede cancelar la componente de α_0 normal a u_0 de donde se obtendría que $\alpha_0 + a \times u_0 = \delta_0 u_0$ para algún $\delta_0 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto este caso se reduce al caso $\alpha_0 = 0$ y $u_0 \neq 0$.

3.3. Resumen y conclusiones

La acción levantada al cotangente $T^*\phi$ del grupo $SE(3)$ sobre $T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ está dada por

$$(T^*\phi)_{(A,a)}(q,p) = (Aq^1 + a, Aq^2 + a, Ap^1, Ap^2).$$

La aplicación momento $J : T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathfrak{se}(3)^*$ para la acción levantada al cotangente $T^*\phi$ está dada por

$$J(q,p) = (q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2\ , p^1 + p^2).$$

Todos los subgrupos de isotropía de la acción levantada cotangente están clasificados de la siguiente manera, para $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
G^1(x) &= \{(A,a) \in SE(3) : a = x - Ax\} \simeq SO(3)\\
G^2(y) &= \{(A,a) \in SE(3) : Ay = y, a = 0\} \simeq S^1,\ y \neq 0\\
G^3(x,y) &= \{(A,a) \in SE(3) : Ay = y, a = x - Ax\} \simeq S^1,\ x \times y \neq 0\\
G^4 &= \{(I,0)\}.
\end{aligned}$$

Se obtiene así una clasificación de todos los espacios $(T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))_{SE(3)_{(q,p)}} = M_{SE(3)_{(q,p)}}$ dada por

$$\begin{aligned}
M_{G^1(x)} &= \{(x,x,0,0)\}\\
M_{G^2(y)} &= \{(\lambda y, \beta y, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\}\\
&\cup\ \{(\lambda y, \beta y, 0, \delta y) : \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0\}\\
&\cup\ \{(\lambda y, \beta y, \gamma y, 0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\}\\
&\cup\ \{(\lambda y, \beta y, \gamma y, \delta y) : \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma, \delta \neq 0\}\\
M_{G^3(x,y)} &= \{(\lambda y + x, \beta y + x, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\}\\
&\cup\ \{(\lambda y + x, \beta y + x, 0, \delta y) : \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0\}\\
&\cup\ \{(\lambda y + x, \beta y + x, \gamma y, 0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\}\\
&\cup\ \{(\lambda y + x, \beta y + x, \gamma y, \delta y) : \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0, \delta \neq 0\}\\
M_{G^4} &= \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^1\}\\
&\cup\ \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : q^1 - q^2 \text{ no es paralelo a } p^2\}\\
&\cup\ \{(q^1, q^2, p^1, p^2) : p^1 \text{ no es paralelo a } p^2\}.
\end{aligned}$$

Notaremos $\rho^{\widetilde{G}}_{(\alpha,u)} = \mathcal{J}(q,p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/G_E$ el momento óptimo de $(q,p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tal que $(q,p) \in M_{\widetilde{G}}$ y $J(q,p) = (\alpha, u)$. En la siguiente lista pueden verse, en cada caso, el valor del momento óptimo ρ, el subgrupo de isotropía de ρ por la acción $\bar{\phi}$ de $SE(3)$ sobre

$T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)/_{G_E}$, $SE(3)_\rho$ y el cociente $M_\rho = \mathcal{J}^{-1}(\rho)/_{SE(3)_\rho}$. También indicaremos la estructura diferencial y topológica de los espacios en cada caso. Cualquier otro caso que no esté en la lista puede reducirse a uno de los casos considerados.

1.
   - $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^1(x_0)}_{(0,0)}) = \{(x_0, x_0, 0, 0)\}$
   - $SE(3)_{\rho^{G^1(x_0)}_{(0,0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ax_0 + a = x_0\} \simeq SO(3)$.
   - $M_{\rho^{G^1(x_0)}_{(0,0)}} = \{[(x_0, x_0, 0, 0)]\}$, con $[(x_0, x_0, 0, 0)] = \{(x_0, x_0, 0, 0)\}$.
2.
   - $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,0)}) &= \{(\lambda y_0, \beta y_0, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \neq \beta\} \\ &\cup \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^3 - \{l\}, \end{aligned}$$
     donde l es la recta dada por $\gamma = 0$ y $\alpha - \beta = 0$.
   - $SE(3)_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$.
     Mas aún, el cociente es isomorfo al plano paralelo al eje γ y perpendicular a la recta $\lambda = \beta$, $\gamma = 0$, menos el orígen. El isomorfismo está dado por
     $$[(\bar\lambda_0 y_0, \bar\beta_0 y_0, \bar\gamma_0 y_0, -\bar\gamma_0 y_0)] \longleftrightarrow (-(\bar\lambda_0 - \bar\beta_0), (\bar\lambda_0 - \bar\beta_0), \bar\gamma_0).$$
3.
   - $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}) = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \gamma y_0, (\delta_0 - \gamma) y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^3$.
   - $SE(3)_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0, \eta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
     El isomorfismo está dado por
     $$[(\bar\lambda_0 y_0, \bar\beta_0 y_0, \bar\gamma_0 y_0, (\delta_0 - \bar\gamma_0) y_0)] \longleftrightarrow (\bar\lambda_0 - \bar\beta_0, (\delta_0 - \bar\gamma_0))$$
     y $[(\bar\lambda_0 y_0, \bar\beta_0 y_0, \bar\gamma_0 y_0, (\delta_0 - \bar\gamma_0) y_0)] = \{(\lambda y_0, \beta y_0, \bar\gamma_0 y_0, (\delta_0 - \bar\gamma_0) y_0) : \lambda - \beta = \bar\lambda_0 - \bar\beta_0\}$.
4.
   - $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(0,0)}) &= \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, 0, 0) : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \ \lambda \neq \beta\} \\ &\cup \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, \gamma y_0, -\gamma y_0) : \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0\} \simeq \mathbb{R}^3 - \{\ell\}, \end{aligned}$$
     donde ℓ es la recta dada por $\gamma = 0$ y $\lambda - \beta = 0$.
   - $SE(3)_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(0,0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0 + x_0 - Ax_0, \eta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(0,0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$.
     El isomorfismo está dado por
     $$[(\bar\lambda_0 y_0 + x_0, \bar\beta_0 y_0 + x_0, \bar\gamma_0 y_0, -\bar\gamma_0 y_0)] \longleftrightarrow ((\bar\lambda_0 - \bar\beta_0), \bar\gamma_0)$$
     y $[(\bar\lambda_0 y_0 + x_0, \bar\beta_0 y_0 + x_0, \bar\gamma_0 y_0, -\bar\gamma_0 y_0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, \bar\gamma_0 y_0, -\bar\gamma_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar\lambda_0 - \bar\beta_0\}$.
5.
   - $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0)}) = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, (\delta_0 - \delta) y_0, \delta y_0) : \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^3$.
   - $SE(3)_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Ay_0 = y_0 \text{ y } a = \eta y_0 + x_0 - Ax_0 \eta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0)}} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

El isomorfismo está dado por

$$[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0, \bar{\delta}_0 y_0)] \longleftrightarrow (\bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0, \bar{\delta}_0)$$

y $[(\bar{\lambda}_0 y_0 + x_0, \bar{\beta}_0 y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0 y_0, \bar{\delta}_0 y_0)] = \{(\lambda y_0 + x_0, \beta y_0 + x_0, (\delta_0 - \bar{\delta}_0) y_0, \bar{\delta}_0 y_0) : \lambda - \beta = \bar{\lambda}_0 - \bar{\beta}_0\}$.

6. - $\alpha_0 \neq 0$, $u_0 = 0$, $\mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}) = \{(q^2 + v_{p^1} + \lambda p^1, q^2, p^1, -p^1) : \; q^2, \; p^1 \in \mathbb{R}^3, \; p^1 \neq 0, \; < p^1, \alpha_0 >= 0, \lambda \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}$.
   - $SE(3)_{\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : A\alpha_0 = \alpha_0\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^3$.
   - $M_{\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$.

   Se tiene además que
   $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}) &\simeq SE(3)_{\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}} \times M_{\rho^{G4}_{(\alpha_0,0)}} \\ &\simeq S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7. - $\alpha_0 = 0$, $u_0 \neq 0$,
   $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(0,u_0)}) = \big\{ & (r_{q^1}\beta_s + \mu_{q^1} u_0, (r_{q^1} + r_{q^1 q^2})\beta_s + \mu_{q^2} u_0, r_p \beta_s + \lambda u_0, -r_p\beta_s + (1-\lambda) u_0) : \\ & s \in [0, \pi), r_{q^1}, \mu_{q^1}, \mu_{q^2}, \lambda, r_p \in \mathbb{R}, (r_p \neq 0 \text{ o } (r_p = 0 \text{ y } r_{q^1 q^2} \neq 0)) \\ & \text{y } r_{q^1} + r_{q^1 q^2}(1-\lambda) + r_p(\mu_{q^2} - \mu_{q^1}) = 0 \big\}. \end{aligned}$$
   - $SE(3)_{\rho^{G4}_{(0,u_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Au_0 = u_0 \text{ y } a = \xi u_0, \; \xi \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G4}_{(0,u_0)}} \simeq S^1 \times \mathbb{R}^3$.

   Se tiene además que
   $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(0,u_0)}) &\simeq SE(3)_{\rho^{G4}_{(0,u_0)}} \times M_{\rho^{G4}_{(0,u_0)}} \\ &\simeq S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

8. - $\alpha_0 = \delta_0 u_0$, $\delta_0 \neq 0$ y $u_0 \neq 0$
   $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}) &= \{(\tau^1 N + s^1_1 p^1 + s^1_2 p^2, \tau^2 N + s^1_2 p^1 + s^2_2 p^2, p^1, u_0 - p^1) : \\ &\qquad p^1 \in \mathbb{R}^3 - \ell_{u_0}, s^1_1, s^1_2, s^2_2 \in \mathbb{R}\} \\ &\simeq (\mathbb{R}^3 - \ell_{u_0}) \times \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$
   - $SE(3)_{\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}} = \{(A, a) \in SE(3) : Au_0 = u_0 \text{ y } a = \xi u_0, \; \xi \in \mathbb{R}\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.
   - $M_{\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}} \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^4$.

   Se tiene además que
   $$\begin{aligned} \mathcal{J}^{-1}(\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}) &\simeq SE(3)_{\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}} \times M_{\rho^{G4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}} \\ &\simeq S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Desde el punto de vista mecánico, o dinámico, el momento óptimo tiene importancia en tanto que es una cantidad conservada. Esto significa que si la condición inicial esta en un conjunto de nivel del momento óptimo, la solución permanece allí. Esto implica que el momento y el grupo de isotropía son también conservados. Por ejemplo, si $\alpha_0 = 0$ y $u_0 \neq 0$, los vectores q^1, q^2, p^1, p^2 son coplanares y continúan siendo coplanares como puede verse en el Caso 7. Además, si los vectores

q^1, q^2, p^1, p^2 son colineales, continúan siendo colineales lo que está directamente relacionado con el Capítulo 1 de ([**Arn78**]).

También hay que destacar que dos puntos cualesquiera de un conjunto de nivel del momento óptimo se pueden conectar por un numero finito de trayectorias de campos con Hamiltoniano invariante, lo cual es potencialmente importante en problemas de control.

La reducción óptima en el sistema de dos cuerpos lleva el sistema a uno cuya dimension es 0, 2 o 4, lo cual permite simplificar las preguntas sobre dinámica.

Caso	Momento usual	Isotropía por $T^*\phi$	Momento óptimo	Estructura Dif. y Topológica	Isotropía por $\bar{\phi}$	Espacio reducido
1	$(0,0)$	$G^1(x_0)$	$\rho^{G^1(x_0)}_{(0,0)}$	$\{(x_0,x_0,0,0)\}$	$SO(3)$	$\{[(x_0,x_0,0,0)]\}$
2	$(0,0)$	$G^2(y_0), y_0 \neq 0$	$\rho^{G^2(y_0)}_{(0,0)}$	$\mathbb{R}^3 - \{l\}$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$
3	$(0,\delta_0 y_0), \delta_0 \neq 0$ $y_0 \neq 0$	$G^2(y_0)$	$\rho^{G^2(y_0)}_{(0,\delta_0 y_0)}$	$\mathbb{R}^3$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
4	$(0,0)$	$G^3(x_0,y_0)$ $x_0 \times y_0 \neq 0$	$\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(0,0)}$	$\mathbb{R}^3 - \{\ell\}$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$
5	$(\delta_0(x_0 \times y_0), \delta_0 y_0)$ $\delta_0 \neq 0, x_0 \times y_0 \neq 0$	$G^3(x_0,y_0)$	$\rho^{G^3(x_0,y_0)}_{(\delta_0(x_0 \times y_0),\delta_0 y_0)}$	$\mathbb{R}^3$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
6	$(\alpha_0, 0)$ $\alpha_0 \neq 0$	G^4	$\rho^{G^4}_{(\alpha_0,0)}$	$S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
7	$(0, u_0)$ $u_0 \neq 0$	G^4	$\rho^{G^4}_{(0,u_0)}$	$S^1 \times \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}^3$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$S^1 \times \mathbb{R}^3$
8	$(\delta_0 u_0, u_0)$ $\delta_0 \neq 0, u_0 \neq 0$	G^4	$\rho^{G^4}_{(\delta_0 u_0,u_0)}$	$S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$	$S^1 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$

Capítulo 4

Momento óptimo para acciones no propias

Se considerarán en este capítulo algunos ejemplos interesantes para los cuales se verifica la fórmula (2.11) del Capítulo 2 pero donde la acción del grupo de Lie sobre la variedad considerada no es propia.

4.1. Ejemplos

4.1.1. Ejemplo 1. Consideremos el grupo de Lie $H = \mathbb{R}^+$ con el producto usual en $\mathbb{R}$ y la acción de H sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \phi : H \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda, q) & \longmapsto & \lambda q \end{array}$$

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de H. Se tiene que $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 0$ y $Ad_\lambda \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$ para todo $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathfrak{h}$ y todo $\lambda \in H$. Se tiene también que $Ad^*_\lambda(\underline{\hat{\alpha}}) = \underline{\hat{\alpha}}$ para todo $\hat{\alpha} \in \mathfrak{h}$ y todo $\lambda \in H$.

Indicaremos la indentificación $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{R}$ mediante $\underline{\hat{\xi}} \cong \xi$. En lo sucesivo frecuentemente escribiremos α en lugar de $\underline{\hat{\alpha}}$.

Para $q \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in H$ la acción levantada al tangente $T_q\phi_\lambda : T_q\mathbb{R} \longrightarrow T_{\phi_\lambda(q)}\mathbb{R}$ está dada por

$$T_q\phi_\lambda(q, v) = (\lambda q, \lambda v),$$

para $(q, v) \in T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La acción levantada al cotangente $T^*\phi : H \times T^*\mathbb{R} \to T^*\mathbb{R}$ está dada por

$$(T^*\phi)_\lambda(q, p) = (T^*_{\lambda q}\phi_{\lambda^{-1}})(q, p)$$

donde se tiene que $T^*_{\lambda q}\phi_{\lambda^{-1}} : T^*_q\mathbb{R} \longrightarrow T^*_{\lambda q}\mathbb{R}$ está dada por

$$T^*_{\lambda q}\phi_{\lambda^{-1}}(q, p) = (\lambda q, \lambda^{-1} p),$$

para $\lambda \in H$ y $(q, p) \in T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para $q \in \mathbb{R}$ el generador infinitesimal de la acción ϕ correspondiente a $\hat{\lambda} \in \mathfrak{h}$ está dado por $\hat{\lambda}_{\mathbb{R}}(q) = \hat{\lambda} q$.

La aplicación momento $J : T^*\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ está dada por $J(\alpha_q)(\hat{\lambda}) = \alpha_q(\hat{\lambda}_{\mathbb{R}}(q))$. Puede verse que

$$J(q, p) = pq.$$

Veamos que la acción levantada al cotangente no es propia. Consideremos la sucesión en H dada por $\lambda_n = n$ y la sucesión en $T^*\mathbb{R}$ dada por $(q_n, p_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, luego se tiene que

$$(T^*\phi)_{\lambda_n}(q_n, p_n) = (\lambda_n q_n, \lambda_n^{-1} p_n) = (1, \frac{1}{n^2}) \longrightarrow_{n\to\infty} (1, 0),$$

y además

$$(q_n, p_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \longrightarrow_{n\to\infty} (0, 0).$$

Sin embargo es claro que no existe una subsucesión de $\lambda_n = n$ que sea convergente.

Vamos a verificar que la fórmula (2.11) del teorema (2.8) vale en este caso donde la acción no es propia.

Dados $(q, p) \in T^*\mathbb{R}$, sea $\alpha = qp = J(q, p)$. Queremos calcular las componentes conexas de

$$J^{-1}(\alpha) \cap T^*\mathbb{R}_{H_{(q,p)}},$$

donde $H_{(q,p)}$ es el subgrupo de isotropía del elemento (q, p) por la acción $T^*\phi$ y

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}} = \{(\bar{q}, \bar{p}) \in T^*\mathbb{R} : H_{(\bar{q},\bar{p})} = H_{(q,p)}\}.$$

Calculamos primero los subgrupos de istropía por la acción $T^*\phi$. Sea $(q, p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} H_{(q,p)} &= \{\lambda \in H : T_q^*\phi_\lambda(q, p) = (q, p)\} \\ &= \{\lambda \in H : (\lambda q, \lambda^{-1} p) = (q, p)\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned} H_{(0,0)} &= \mathbb{R}^+ \\ H_{(q,p)} &= \{1\}, \quad (q, p) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Calculemos ahora los espacios

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}} = \{(\bar{q}, \bar{p}) \in T^*\mathbb{R} : H_{(\bar{q},\bar{p})} = H_{(q,p)}\}.$$

Es claro que

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}} = \{(0, 0)\}, \tag{4.2}$$

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}} = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R} : q \neq 0 \text{ o } p \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \tag{4.3}$$

para $(q_0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$ con $(q_0, p_0) \neq (0, 0)$.

Calculemos ahora las componentes conexas de $J^{-1}(\alpha) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}}$, con $J(q, p) = \alpha$.

-Caso $(q_0, p_0) = (0,0)$.

En este caso $J(0,0) = 0$ y

$$\begin{aligned} J^{-1}(0) &= \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : pq = 0\} \\ &= \{(q,p) : p = 0 \text{ o } q = 0\} \\ &= \{(q,0) : q \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0,p) : p \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Usando esto y (4.2) se tiene que

$$J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}} = \{(0,0)\}.$$

Entonces se tiene que

$$(J^{-1}(0,0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}})_{c.c.(0,0)} = \{(0,0)\}. \tag{4.4}$$

-Caso $(q_0, 0)$, con $q_0 > 0$.

En este caso $J(q_0, 0) = 0$ y como en el caso anterior

$$J^{-1}(0) = \{(q,0) : q \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0,p) : p \in \mathbb{R} - 0\} \cup \{(0,0)\}.$$

Usando esto y (4.3) se tiene que

$$J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}} = \{(q,0) : q \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0,p) : p \in \mathbb{R} - \{0\}\}.$$

Este conjunto es disconexo y se tiene que

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,0)}})_{c.c.(q_0,0)} = \{(q,0) : q \in \mathbb{R}, q > 0\}.$$

Procediendo análogamente al caso anterior se tiene que si $(q_0, 0) \in T^*\mathbb{R}$ con $q_0 < 0$, entonces

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,0)}})_{c.c.(q_0,0)} = \{(q,0) : q \in \mathbb{R}, q < 0\}. \tag{4.5}$$

Del mismo modo, si $(0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$ con $p_0 > 0$, se tiene que

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(0,p_0)}})_{c.c.(0,p_0)} = \{(0,p) : p \in \mathbb{R}, p > 0\}. \tag{4.6}$$

Por último, si $(0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$ con $p_0 < 0$, se tiene que

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(0,p_0)}})_{c.c.(0,p_0)} = \{(0,p) : p \in \mathbb{R}, p < 0\}. \tag{4.7}$$

-Caso (q_0, p_0), con $q_0 > 0$, $p_0 \neq 0$.

En este caso $J(q_0, p_0) = q_0 p_0$ y entonces

$$\begin{aligned} J^{-1}(q_0 p_0) &= \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : qp = q_0 p_0\} \\ &= \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q \in \mathbb{R} - \{0\}\}. \end{aligned}$$

Usando esto y (4.3) se tiene que

$$J^{-1}(q_0 p_0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}} = \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q \in \mathbb{R} - \{0\}\}.$$

Este conjunto es claramente disconexo y se tiene que

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}})_{c.c.(q_0,p_0)} = \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q \in \mathbb{R}, q > 0\}. \tag{4.8}$$

Procediendo análogamente al caso anterior se tiene que, si $(q_0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$ con $q_0 < 0, p_0 \neq 0$, entonces

$$(J^{-1}(0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}})_{c.c.(q_0,p_0)} = \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q \in \mathbb{R}, q < 0\}. \tag{4.9}$$

Cálculo del momento óptimo por definición.

Queremos calcular para cada abierto H-invariante $U \subseteq T^*\mathbb{R}$ el conjunto

$$\begin{aligned} C^\infty(U)^H &= \{f \in C^\infty(U) : f(T^*\phi_\lambda(q,p)) = f(q,p), \forall \lambda \in H \text{ y } \forall (q,p) \in U\} \\ &= \{f \in C^\infty(U) : f(\lambda q, \lambda^{-1} p) = f(q,p), \forall \lambda \in H \text{ y } \forall (q,p) \in U\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Puede verse fácilmente que

$$C^\infty(U)^H = \{f \in C^\infty(U) : f(q,p) = g(qp), \text{ para } g \in C^\infty(\overline{U})\},$$

Para $(q,p) \in T^*\mathbb{R}$ se tiene que

$$E(q,p) = \{X_f(q,p) : f \in C^\infty(U)^H, (q,p) \in U\}.$$

Dada $f \in C^\infty(U)^H$, puede verse que su campo Hamiltoniano está dado por

$$X_f(q,p) = (g'(qp)q, -g'(qp)p).$$

Ahora, el pseudogrupo correspondiente a la distribución E está formado por los flujos de los campos Hamiltonianos de las funciones H-invariantes. Si $X_f \in E$, entonces para todo $(q,p) \in U$ con U abierto H-invariante , el flujo F_t verifica que $F_0(q,p) = (q,p)$ y

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} F_t(q,p) = X_f(q,p).$$

Puede verse que para $(q,p) \in U$ abierto H-invariante se tiene que

$$F_t(q,p) = (q\ e^{g'(qp)t}, p\ e^{-g'(qp)t}).$$

Calculemos ahora el espacio cociente $T^*\mathbb{R}/G_E$.

Dado $(q_0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$, la clase de (q_0, p_0) por la relación dada por el pseudogrupo G_E es

$$[(q_0,p_0)] = \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : \exists F_t \in G_E \text{ y } t_0 \text{ tal que } F_{t_0}(q_0,p_0) = (q,p)\}$$

- Caso $(q_0, p_0) = (0, 0)$.

Se tiene que $F_t(0,0) = (0,0)$ para todo t. Por lo tanto

$$[(0,0)] = \{(0,0)\}.$$

-Caso $(q_0, p_0) = (q_0, 0)$, con $q_0 > 0$.

Se tiene que $F_t(q_0, 0) = (q_0\ e^{g'(0)t}, 0)$. Por lo tanto

$$[(q_0, 0)] = \{(q, 0) : q > 0\}.$$

-Caso $(q_0, p_0) = (q_0, 0)$, con $q_0 < 0$.

Se tiene que $F_t(q_0, 0) = (q_0\ e^{g'(0)t}, 0)$. Por lo tanto

$$[(q_0, 0)] = \{(q, 0) : q < 0\}.$$

-Caso $(q_0, p_0) = (0, p_0)$, con $p_0 > 0$.

Se tiene que $F_t(0, p_0) = (0, p_0\ e^{g'(0)t})$. Por lo tanto

$$[(0, p_0)] = \{(0, p) : p > 0\}.$$

-Caso $(q_0, p_0) = (0, p_0)$, con $p_0 < 0$.

Se tiene que $F_t(0, p_0) = (0, p_0\ e^{g'(0)t})$. Por lo tanto

$$[(0, p_0)] = \{(0, p) : p < 0\}.$$

-Caso (q_0, p_0) con $q_0 > 0$ y $p_0 \neq 0$.

Se tiene que $F_t(q_0, p_0) = (q_0\ e^{g'(q_0 p_0)t}, p_0\ e^{-g'(q_0 p_0)t})$. Por lo tanto $(q, p) \in T^*\mathbb{R}/G_E$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} q &= q_0\ e^{g'(q_0 p_0)t} \\ p &= p_0\ e^{-g'(q_0 p_0)t}. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$[(q_0, p_0)] = \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q > 0\}.$$

-Caso (q_0, p_0) con $q_0 < 0$ y $p_0 \neq 0$.

Procediendo análogamente al caso anterior se tiene que

$$[(q_0, p_0)] = \{(q, \frac{q_0 p_0}{q}) : q < 0\}.$$

En conclusión, vale la fórmula que queríamos probar.

4.1.2. Ejemplo 2. Consideremos el grupo de Lie $H = \mathbb{R}^+ \circledS \mathbb{R}$. Para $(\lambda, a), (\beta, b) \in H$, el producto está dado por $(\lambda, a)(\beta, b) = (\lambda\beta, \lambda b + a)$. La unidad del grupo es $(1, 0)$ y dado $(\lambda, a) \in H$ su inverso está dado por $(\lambda^{-1}, -\lambda^{-1} a)$.

Consideremos la acción ϕ de H sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \phi : H \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((\lambda, a), q) &\longmapsto \lambda q + a \end{aligned}$$

Sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de H. Se tiene que $[(\hat{\lambda}, \hat{a}), (\hat{\beta}, \hat{b})] = (0, \hat{\lambda}\hat{b} - \hat{\beta}\hat{a})$ y $Ad_{(\lambda,a)}(\hat{\beta}, \hat{b}) = (\hat{\beta}, \lambda\hat{b} - \hat{\beta} a)$.

Se tiene que $Ad^*_{(\lambda,a)}(\underline{\hat{\gamma}}, \underline{\hat{c}}) = (\underline{\hat{\gamma}} + \lambda^{-1} a\underline{\hat{c}}, \lambda^{-1}\underline{\hat{c}})$.

Indicaremos el isomorfismo $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mediante $(\underline{\hat{\gamma}}, \underline{\hat{c}}) \cong (\gamma, c)$. En lo sucesivo, frecuentemente escribiremos (γ, c) en lugar de $(\underline{\hat{\gamma}}, \underline{\hat{c}})$.

Para $q \in \mathbb{R}$ y $(\lambda, a) \in H$ puede verse que la acción levantada al tangente $T_q\phi_{(\lambda,a)} : T_q\mathbb{R} \longrightarrow T_{\phi_{(\lambda,a)}(q)}\mathbb{R}$ está dada por

$$T_q\phi_{(\lambda,a)}(q, v) = (\lambda q + a, \lambda v),$$

para $(q, v) \in T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

La acción levantada al cotangente $T^*\phi : H \times T^*\mathbb{R} \longrightarrow T^*\mathbb{R}$ está dada por

$$(T^*\phi)_{(\lambda,a)}(q, p) = T^*_q\phi_{(\lambda,a)}(q, p),$$

para $(\lambda, a) \in H$, $(q, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \simeq T^*\mathbb{R}$ y donde $T^*_q\phi_{(\lambda,a)} : T^*_q\mathbb{R} \longrightarrow T^*_{\phi_{(\lambda,a)}(q)}\mathbb{R}$ está dada por

$$T^*_q\phi_{(\lambda,a)}(q, p) = (\lambda q + a, \lambda^{-1}p),$$

para $(\lambda, a) \in H$ y $(q, p) \in T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Para $q \in \mathbb{R}$ el generador infinitesimal de la acción ϕ correspondiente a $(\lambda, a) \in \mathfrak{h}$ está dado por $(\lambda, a)_{\mathbb{R}}(q) = \lambda q + a$.

La aplicación momento $J : T^*\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ está dada por $J(\alpha_q)(\lambda, a) = \alpha_q((\lambda, a)_{\mathbb{R}}(q))$. Para $q \in \mathbb{R}$ y $(q, p) \in T^*_q\mathbb{R}$ se tiene que

$$J(q, p) = (qp, p).$$

Veamos que la acción levantada al cotangente no es propia. Consideremos la sucesión en H dada por $(\lambda_n, a_n) = (n^2, 1)$ y la sucesión en $T^*\mathbb{R}$ dada por $(q_n, p_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Puede verse fácilmente que

$$(\lambda_n, a_n)(q_n, p_n) = (\lambda_n q_n + a_n, \lambda_n^{-1}p_n) = (2, \frac{1}{n^3}) \longrightarrow (2, 0).$$

También es fácil ver que

$$(q_n, p_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \to (0, 0).$$

Sin embargo es claro que no existe una subsucesión de $(\lambda_n, a_n) = (n^2, 1)$ que sea convergente.

Vamos a verificar que la fórmula (2.11) del teorema (2.8) vale en este caso donde la acción no es propia.

Dados $(q, p) \in T^*\mathbb{R}$, sea $(\alpha, u) = (qp, p) = J(q, p)$. Queremos calcular las componentes conexas de

$$J^{-1}(\alpha, u) \cap T^*\mathbb{R}_{H_{(q,p)}},$$

donde $H_{(q,p)}$ es el subgrupo de isotropía del elemento (q, p) por la acción $T^*\phi$ y

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}} = \{(\bar{q}, \bar{p}) \in T^*(\mathbb{R}) : H_{(\bar{q},\bar{p})} = H_{(q,p)}\}.$$

Calculamos primero los subgrupos de istropía por la acción $T^*\phi$. Sea $(q,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} H_{(q,p)} &= \{(\lambda,a)\in H : (T^*\phi)_{(\lambda,a)}(q,p) = (q,p)\} \\ &= \{(\lambda,a)\in H : (\lambda q + a, \lambda^{-1}p) = (q,p)\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Puede verse fácilmente que

$$\begin{aligned} H_{(0,0)} &= \{(\lambda,0)\in H\} \\ H_{(q,0)} &= \{(\lambda, q(1-\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}, \quad q\neq 0 \\ H_{(q,p)} &= \{(1,0)\},\ p\neq 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Calculemos ahora los espacios

$$(T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}} = \{(\bar q,\bar p)\in T^*\mathbb{R} : H_{(\bar q,\bar p)} = H_{(q,p)}\}.$$

Es claro que

$$\begin{aligned} (T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}} &= \{(0,0)\} \\ (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,0)}} &= \{(q_0,0)\}, \quad q_0\neq 0 \\ (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}} &= \{(q,p)\in T^*\mathbb{R} : p\neq 0\}, \quad p_0\neq 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Calculemos ahora las componentes conexas de $J^{-1}(\alpha,u)\cap(T^*\mathbb{R})_{H_{(q,p)}}$, con $J(q,p)=(\alpha,u)$.

-Caso $(q_0,p_0)=(0,0)$.

En este caso $J(0,0)=(0,0)$ y

$$\begin{aligned} J^{-1}(0,0) &= \{(q,p)\in T^*\mathbb{R} : pq = 0 \wedge p = 0\} \\ &= \{(q,0) : q\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Usando esto y (4.13) se tiene que

$$J^{-1}(0,0)\cap(T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}} = \{(0,0)\}.$$

Entonces se tiene que

$$(J^{-1}(0,0)\cap(T^*\mathbb{R})_{H_{(0,0)}})_{c.c.(0,0)} = \{(0,0)\}. \tag{4.14}$$

-Caso $(q_0,p_0)=(q_0,0)$, con $q_0\neq 0$.

En este caso $J(q_0,0)=(0,0)$ y como antes

$$\begin{aligned} J^{-1}(0,0) &= \{(q,p)\in T^*\mathbb{R} : pq = 0 \wedge p = 0\} \\ &= \{(q,0) : q\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Usando esto y (4.13) se tiene que

$$J^{-1}(q_0,0)\cap(T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,0)}} = \{(q_0,0)\}.$$

Entonces para $(q_0,0)\in T^*\mathbb{R}$ con $q_0\neq 0$ se tiene que

$$(J^{-1}(q_0,0)\cap(T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,0)}})_{c.c.(q_0,0)} = \{(q_0,0)\}. \tag{4.15}$$

-Caso (q_0, p_0), con $p_0 \neq 0$.

En este caso $J(q_0, p_0) = (p_0 q_0, p_0)$ y

$$\begin{aligned} J^{-1}(p_0 q_0, p_0) &= \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : pq = p_0 q_0 \wedge p = p_0\} \\ &= \{(q_0, p_0)\}. \end{aligned}$$

Usando esto y (4.13) se tiene que

$$J^{-1}(p_0 q_0, p_0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}} = \{(q_0, p_0)\}.$$

Entonces, para $(q_0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$ con $p_0 \neq 0$, se tiene que

$$(J^{-1}(q_0 p_0, p_0) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}})_{c.c.(q_0,p_0)} = \{(q_0, p_0)\}. \tag{4.16}$$

Por lo tanto se tiene que para todo $(q_0, p_0) \in T^*\mathbb{R}$

$$\left(J^{-1}(J(q_0, p_0)) \cap (T^*\mathbb{R})_{H_{(q_0,p_0)}})\right)_{c.c.(q_0,p_0)} = \{(q_0, p_0)\}.$$

Cálculo del momento óptimo por definición.

Recordemos que estamos considerando la acción levantada al cotangente $T_q^*\phi_{(\lambda,a)} : T_q^*\mathbb{R} \longrightarrow T^*_{\phi_{(\lambda,a)}(q)}\mathbb{R}$ que está dada por

$$T_q^*\phi_{(\lambda,a)}(q,p) = (\lambda q + a, \lambda^{-1} p),$$

para $(\lambda, a) \in H$ y $(q,p) \in T_q^*\mathbb{R}$.

Queremos calcular el conjunto

$$\begin{aligned} C^\infty(U)^H &= \{f \in C^\infty(U) : f(T^*\phi_{(\lambda,a)}(q,p)) = f(q,p), \forall (\lambda,a) \in H \text{ y } \forall (q,p) \in U\} \\ &= \{f \in C^\infty(U) : f(\lambda q + a, \lambda^{-1} p) = f(q,p), \forall (\lambda,a) \in H \text{ y } \forall (q,p) \in U\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Puede verse que

$$C^\infty(U)^H = \{f \in C^\infty(U) : f \text{ es constante en } U\}.$$

Para $(q,p) \in T^*\mathbb{R}$ se tiene que

$$E(q,p) = \{X_f(q,p) : f \in C^\infty(U)^H, (q,p) \in U\}.$$

Como las funciones H-invariante son las constantes, el campo Hamiltoniano correspondiente a cada función es el campo nulo, en efecto, para cada $f \in C^\infty(U)$, su campo Hamiltoniano se identifica con la 1-forma df tal que $\omega(X_f, \cdot) = df$, donde ω es la 2-forma simpléctica canónica en $\mathbb{R}^2$. Pero $df = 0$ en este caso, por lo tanto se tiene que $\omega(X_f, \cdot) = 0$ de donde se deduce, usando que ω es no degenerada, que $X_f = 0$.

Por lo tanto para cada U abierto H-invariante y todo $(q,p) \in U$ se tiene que

$$E(q,p) = \{0\}. \tag{4.18}$$

El pseudogrupo correspondiente a la distribución E está formado por los flujos de los campos Hamiltonianos de las funciones H-invariantes. Si $X_f \in E$, entonces para todo $(q,p) \in U$ con U abierto H-invariante , el flujo F_t verifica que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} F_t(q,p) = X_f(q,p) = 0,$$

de donde se obtiene que $F_t(q,p)$ es constante en t. Como además se tiene que $F_0(q,p) = (q,p)$, por lo tanto

$$G_E = \{Id : T^*\mathbb{R} \to T^*\mathbb{R}\}.$$

Dado $(q_0,p_0) \in T^*\mathbb{R}$, la clase de (q_0,p_0) por la relación dada por el pseudogrupo G_E es

$$\begin{aligned} [(q_0,p_0)] &= \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : \exists F_t \in G_E \text{ y } t_0 \text{ tal que } F_{t_0}(q_0,p_0) = (q,p)\} \\ &= \{(q,p) \in T^*\mathbb{R} : (q_0,p_0) = (q,p)\} \\ &= \{(q_0,p_0)\}. \end{aligned}$$

Recordemos que la aplicación momento óptimo $\mathcal{J}$ está dada por la proyección canónica de $T^*\mathbb{R}$ en el espacio de las G_E-órbitas. Por lo tanto, para $(q_0,p_0) \in T^*\mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(q_0,p_0)) = \{(q_0,p_0)\}. \tag{4.19}$$

4.1.3. Ejemplo 3.

Sean G_1 y G_2 dos grupos de Lie que actúan sobre las variedades de Poisson M_1 y M_2 respectivamente, $\phi_i : G_i \times M_i \longrightarrow M_i$, $i = 1,2$. Sean J_i las aplicaciones momento correspondientes a las acciones ϕ_i

$$J_1 : M_1 \longrightarrow \mathbf{g}_1^*$$
$$J_2 : M_2 \longrightarrow \mathbf{g}_2^*,$$

dadas por

$$J_1(m_1)(\xi_1) = \bar{J}_1(\xi_1)(m_1),$$

con $\overline{J}_1 : \mathbf{g}_1 \longrightarrow C^\infty(M_1)$ y

$$J_2(m_2)(\xi_2) = \bar{J}_2(\xi_2)(m_2),$$

con $\bar{J}_2 : \mathbf{g}_2 \longrightarrow C^\infty(M_2)$.

Para este ejemplo tendremos en cuenta las siguientes identificaciones estándar:

- $T_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2) \simeq T_{m_1}M_1 \times T_{m_2}M_2$,
- $T^*_{(m_1,m_2)}(M_1 \times M_2) \simeq T^*_{m_1}M_1 \times T^*_{m_2}M_2$,
- $C^\infty(M_1) \times C^\infty(M_2) \subset C^\infty(M_1 \times M_2)$,

- $Lie(G_1 \times G_2) \simeq \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$ y $Lie(G_1 \times G_2)^* \simeq \mathbf{g}_1^* \times \mathbf{g}_2^*$.

Recordemos que la forma simpléctica ω en $M_1 \times M_2$ está dada por

$$\omega(m_1, m_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \omega_1(m_1)(u_1, v_1) + \omega_2(m_2)(u_2, v_2),$$

donde ω_1 y ω_2 son las formas simplécticas en M_1 y M_2 respectivamente y $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, $u_1, v_1 \in T_{m_1}M_1$, $u_2, v_2 \in T_{m_2}M_2$.

Consideremos la acción Φ del grupo $G_1 \times G_2$ sobre $M_1 \times M_2$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (G_1 \times G_2) \times (M_1 \times M_2) & \longrightarrow & M_1 \times M_2 \\ ((g_1, g_2), (m_1, m_2)) & \longmapsto & (\phi_1(g_1, m_1), \phi_2(g_2, m_2)). \end{array}$$

Veamos que la aplicación momento $J : M_1 \times M_2 \longrightarrow (Lie(G_1 \times G_2))^*$ correspondiente a la acción Φ está dada por

$$\langle J(m_1, m_2), (\xi_1, \xi_2)\rangle = \langle (J_1 \times J_2)(m_1, m_2), (\xi_1, \xi_2)\rangle := \bar{J}_1(\xi_1)(m_1) + \bar{J}_2(\xi_2)(m_2). \tag{4.20}$$

Hay que probar que

$$X_{\overline{(J_1 \times J_2)}(\xi_1, \xi_2)} = (\xi_1, \xi_2)_{M_1 \times M_2}.$$

Sea $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2$ y $\alpha(t) \subset G_1 \times G_2$ tal que $\alpha(0) = (e_1, e_2)$ y $\alpha'(0) = (\xi_1, \xi_2)$. Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (\xi_1, \xi_2)_{M_1 \times M_2}(m_1, m_2) & = & \dfrac{d}{dt}|_{t=0}\Phi((\alpha_1(t), \alpha_2(t)), (m_1, m_2)) \\ & = & \dfrac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha_1(t)m_1, \alpha_2(t))m_2) \\ & = & ((\xi_1)_{M_1}(m_1), (\xi_2)_{M_2}(m_2)) \\ & = & \left(X_{\bar{J}_1(\xi_1)}(m_1), X_{\bar{J}_2(\xi_2)}(m_2)\right) \\ & := & \left(X_{\bar{J}_1(\xi_1)} \times X_{\bar{J}_2(\xi_2)}\right)(m_1, m_2) \end{array}$$

Veamos entonces que

$$X_{\overline{(J_1 \times J_2)}(\xi_1, \xi_2)}(m_1, m_2) = \left(X_{\bar{J}_1(\xi_1)}(m_1), X_{\bar{J}_2(\xi_2)}(m_2)\right).$$

Sean $(v_1, v_2) \in T_{(m_1, m_2)}(M_1 \times M_2) \simeq T_{m_1}M_1 \times T_{m_2}M_2$. Por definición se tiene que

$$i_{X_{\overline{(J_1 \times J_2)}(\xi_1, \xi_2)}}\omega = d(\overline{J_1 \times J_2})(\xi_1, \xi_2).$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} \left(i_{(X_{\bar{J}_1(\xi_1)} \times X_{\bar{J}_2(\xi_2)})}\omega\right)(v_1, v_2) & = & \omega\left((X_{\bar{J}_1(\xi_1)}(m_1), X_{\bar{J}_2(\xi_2)}(m_2)), (v_1, v_2)\right) \\ & = & \omega_{M_1}\left(X_{\bar{J}_1(\xi_1)}(m_1), v_1\right) + \omega_{M_2}\left(X_{\bar{J}_2(\xi_2)}(m_2), v_2\right) \\ & = & d\bar{J}_1(\xi_1)(v_1) + d\bar{J}_2(\xi_2)(v_2) \\ & = & d\left(\overline{(J_1 \times J_2)}(\xi_1, \xi_2)\right)(v_1, v_2), \end{array}$$

de donde se obtiene lo que queríamos probar.

Veamos ahora que

$$J^{-1}(\mu_1,\mu_2) = J_1^{-1}(\mu_1) \times J_2^{-1}(\mu_2), \tag{4.21}$$

para $\mu_1 \in \mathbf{g}_1^*$, $\mu_2 \in \mathbf{g}_2^*$ tal que $\mu_1 = J_1(m_1)$ y $\mu_2 = J_2(m_2)$ con $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$.

En efecto, sea $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
(m_1,m_2) \in J^{-1}(\mu_1,\mu_2) &\iff J(m_1,m_2) = (\mu_1,\mu_2)\\
&\iff (J_1(m_1), J_2(m_2)) = (\mu_1,\mu_2)\\
&\iff J_1(m_1) = \mu_1 \text{ y } J_2(m_2) = \mu_2\\
&\iff m_1 \in J^{-1}(\mu_1) \text{ y } m_2 \in J^{-1}(\mu_2).
\end{aligned}$$

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sean G_1 y G_2 dos grupos de Lie que actúan sobre las variedades de Poisson M_1 y M_2 respectivamente, $\phi_i : G_i \times M_i \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$. Supongamos que se verifica*

$$\mathcal{J}_i^{-1}(\mathcal{J}_i(m_i)) = \left(J_i^{-1}(\mu_i) \cap (M_i)^{\phi_i}_{H_{m_i}}\right)_{c.c.m_i} \tag{4.22}$$

donde $\mathcal{J}_i$ son las aplicaciones momento óptimo correspondientes a las acciones ϕ_i, J_i son las aplicaciones momento tal que $J_i(m_i) = \mu_i$ para $m_i \in M_i$, $\mu_i \in (Lie(G_i))^*$, $i = 1, 2$.

Entonces se tiene que

$$\mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}(m_1,m_2)) = \left(J^{-1}(\mu) \cap (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}}\right)_{c.c.(m_1,m_2)}, \tag{4.23}$$

donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu = J(m_1, m_2)$, $\mathcal{J}$ es la aplicación momento óptimo y J es la aplicación momento correspondientes a la acción

$$\begin{aligned}
\Phi : (G_1 \times G_2) \times (M_1 \times M_2) &\longrightarrow M_1 \times M_2\\
((g_1,g_2),(m_1,m_2)) &\longmapsto (\phi_1(g_1,m_1), \phi_2(g_2,m_2)).
\end{aligned}$$

Demostración.

Cálculo del lado derecho de 4.23

Veamos primero que

$$H_{(m_1,m_2)} = H^1_{m_1} \times H^2_{m_2}. \tag{4.24}$$

En efecto, dado $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(g_1,g_2) \in H_{(m_1,m_2)} &\iff (g_1m_1, g_2, m_2) = (m_1,m_2)\\
&\iff g_1m_1 = m_1 \text{ y } g_2m_2 = m_2\\
&\iff g_1 \in H^1_{m_1} \text{ y } g_2 \in H^2_{m_2}.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que

$$(M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}} = (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}} \times (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}. \tag{4.25}$$

Para esto, veamos primero que $(M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}} \subseteq (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}} \times (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}$.

Sea $(\overline{m}_1, \overline{m}_2) \in (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}}$, vamos a ver que $\overline{m}_1 \in (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}}$ y $\overline{m}_2 \in (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}$. Por definición $H_{(\overline{m}_1,\overline{m}_2)} = H_{(m_1,m_2)}$ y usando (4.24) resulta que $H^1_{\overline{m}_1} \times H^2_{\overline{m}_2} = H^1_{m_1} \times H^2_{m_2}$. Vamos a ver que $H^1_{\overline{m}_1} = H^1_{m_1}$ y $H^2_{\overline{m}_2} = H^2_{m_2}$.

Sea $g_1 \in H^1_{\overline{m}_1}$, entonces $g_1\overline{m}_1 = \overline{m}_1$. También se tiene que $e_2\overline{m}_2 = \overline{m}_2$ y entonces $(g_1, e_2) \in H^1_{\overline{m}_1} \times H^2_{\overline{m}_2} = H^1_{m_1} \times H^2_{m_2}$ y por lo tanto $g_1 \in H^1_{m_1}$, con lo cual se ha probado que $H^1_{\overline{m}_1} \subseteq H^1_{m_1}$.

Análogamente se prueba que $H^1_{m_1} \subseteq H^1_{\overline{m}_1}$ y entonces queda probado que $H^1_{\overline{m}_1} = H^1_{m_1}$.

De modo enteramente similar se prueba que $H^2_{\overline{m}_2} = H^2_{m_2}$. De aquí resulta que $(\overline{m}_1, \overline{m}_2) \in (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}} \times (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}$.

Veamos ahora que $(M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}} \times (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}} \subseteq (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}}$. Sea $(\overline{m}_1, \overline{m}_2) \in (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}} \times (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}$, entonces $\overline{m}_1 \in (M_1)^{\phi_1}_{H_{m_1}}$ y $\overline{m}_2 \in (M_2)^{\phi_2}_{H_{m_2}}$ lo que implica que $H^1_{m_1} = H^1_{\overline{m}_1}$ y $H^2_{m_2} = H^2_{\overline{m}_2}$. Directamente se deduce que $H^1_{m_1} \times H^2_{m_2} = H^1_{\overline{m}_1} \times H^2_{\overline{m}_2}$ y usando (4.24) resulta $H_{(m_1,m_2)} = H_{(\overline{m}_1,\overline{m}_2)}$. Luego se tiene que $(m_1, m_2) \in (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{H_{(m_1,m_2)}}$.

Recordemos de (4.21) que

$$J^{-1}(\mu_1, \mu_2) = J_1^{-1}(\mu_1) \times J_2^{-1}(\mu_2).$$

Usando esto, (4.22) y (4.25) se obtiene que

$$\begin{aligned} \left(J^{-1}(\alpha) \cap (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{(m_1,m_2)}\right) &= \left(J_1^{-1}(\mu_1) \times J_2^{-1}(\mu_2)\right) \bigcap \left((M_1)^{\phi_1}_{m_1} \times (M_2)^{\phi_2}_{m_2}\right) \\ &= \left(J_1^{-1}(\mu_1) \cap (M_1)^{\phi_1}_{m_1}\right) \times \left(J_2^{-1}(\mu_2) \cap (M_2)^{\phi_2}_{m_2}\right) \end{aligned}$$

Puede verse que

$$\left(J^{-1}(\alpha) \cap (M_1 \times M_2)^{\Phi}_{(m_1,m_2)}\right)_{c.c.(m_1,m_2)} = \left(J_1^{-1}(\mu_1) \cup (M_1)^{\phi_1}_{m_1}\right)_{c.c.m_1} \times \left(J_2^{-1}(\mu_2) \cup (M_2)^{\phi_2}_{m_2}\right)_{c.c.m_2}. \tag{4.26}$$

En efecto, queremos probar que si $Z = X \times Y$ entonces, $(Z)_{c.c.} = (X)_{c.c.} \times (Y)_{c.c.}$.

Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ componentes conexas en X e Y respectivamente. Puede verse fácilmente que $A \times B$ es conexo. Para ver que $A \times B$ es una componente conexa de Z, sea C conexo tal que $A \times B \subseteq C \subseteq Z$ y sean $C_X = P_X(C)$ y $C_Y = P(C)$ las proyecciones de C sobre X e Y respectivamente. Es fácil ver que tanto C_X como C_Y son conexos y además se tiene que $A \subseteq C_X$ y $B \subseteq C_Y$ y entonces, como A y B son componentes conexas se tiene que $A = C_X$ y

$B = C_Y$. Como además $C \subseteq C_X \times C_Y$, se tiene que $C = C_X \times C_Y$ y entonces $A \times B$ es una componente conexa de Z.

Por otro lado, sea $C \subset Z$ una componente conexa de Z. Como $C \subseteq C_X \times C_Y$ y como C_X y C_Y son conexos por serlo C, se tiene que también $C_X \times C_Y$ es conexo. Como C es maximal por ser componente conexa, entonces $C = C_X \times C_Y$ donde C_X y C_Y son componentes conexas de A y B respectivamente, como ya probamos en el párrafo anterior.

Cálculo del lado izquierdo de 4.23

Puede verse que algunos de los abiertos $(G_1 \times G_2)$-invariantes son de la forma $U_1 \times U_2$ con U_1 abierto G_1-invariante de M_1 y U_2 abierto G_2-invariante de M_2.

Sea $U = U_1 \times U_2 \subset M_1 \times M_2$ $(G_1 \times G_2)$-invariante y sea $f \in C^\infty(U)$ $(G_1 \times G_2)$-invariante, entonces se verifica que

$$f(\Phi((g_1, g_2), (m_1, m_2))) = f(m_1, m_2),$$

esto es

$$f(\phi_1((g_1, m_1), \phi_2(g_2, m_2))) = f(m_1, m_2).$$

Dado $(\overline{m}_1, \overline{m}_2) \in M_1 \times M_2$, se definen las funciones $f_{\overline{m}_1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_{\overline{m}_2} : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_{\overline{m}_1}(m_2) &= f(\overline{m}_1, m_2), \\ f_{\overline{m}_2}(m_1) &= f(m_1, \overline{m}_2). \end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que $f_{\overline{m}_i}$ es G_j-invariante para $i, j = 1, 2,\ i \neq j$.

Veamos que el campo hamiltoniano correspondiente a una función $f \in C^\infty(U)$, $(G_1 \times G_2)$-invariantes está dado por

$$X_f(m_1, m_2) = \left(X_{f_{m_2}}(m_1), X_{f_{m_1}}(m_2)\right), \tag{4.27}$$

para $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$.

Por definición se tiene que $i_{X_f}\omega(u_1, u_2) = df(u_1, u_2)$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \omega\left((X_{f_{m_2}}(m_1), X_{f_{m_1}}(m_2)), (u_1, u_2)\right) &= \omega_1\left(X_{f_{m_2}}(m_1), u_1\right) + \omega_2\left(X_{f_{m_1}}(m_2), u_2\right) \\ &= (df_{m_2})_{m_1}(u_1) + (df_{m_1})_{m_2}(u_2) \\ &= (df)_{(m_1, m_2)}(u_1, 0) + (df)_{(m_1, m_2)}(0, u_2) \\ &= (df)_{(m_1, m_2)}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad en (4.27).

Sea $\Delta_i \subset TM_i$ y consideremos la distribución dada por

$$\Delta_i(m_i) = \{X_{f_i}(m_i) : f_i \in \mathcal{F}(U_i)^{G_i},\ U_i \text{ abierto } G_i - \text{invariante},\ m_i \in U_i\},\ i = 1, 2.$$

Por otro lado, sea $\Delta \subset T(M_1 \times TM_2)$ y consideremos la distribución dada por

$\Delta(m_1, m_2) = \{X_f(m_1, m_2) : f \in \mathcal{F}(U_1 \times U_2)^{G_1 \times G_2}, U_1 \times U_2$ abierto $G_1 \times G_2-$invariante, $(m_1, m_2) \in G_1 \times G_2\}$.

Entonces vale que

$$\Delta(m_1, m_2) = \Delta_1(m_1) \times \Delta_2(m_2). \tag{4.28}$$

Para probarlo, consideremos $\bar{m}_1 \in M_1$ y U_1 un entorno abierto G_1-invariante de $\bar{m}_1$. Sea $f_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ y definimos la función $\bar{f}_1$ dada por $\bar{f}_1(\bar{m}_1, m_2) = f_1(m_1)$, para $m_2 \in M_2$. Es fácil ver que resulta $G_1 \times G_2$-invariante. De (4.27) se tiene que

$$X_{\bar{f}_1}(\bar{m}_1, m_2) = (X_{f_1}(\bar{m}_1), 0),$$

y entonces podemos concluir que

$$\Delta_1(\bar{m}_1) \times \{0\} \subseteq \Delta(\bar{m}_1, m_2), \ \forall\ m_2 \in M_2.$$

Como vale para todo $\bar{m}_1 \in M_1$ se tiene que

$$\Delta_1(m_1) \times \{0\} \subseteq \Delta(m_1, m_2), \ \forall\ m_1 \in M_1, \ m_2 \in M_2. \tag{4.29}$$

Análogamente se prueba que

$$\{0\} \times \Delta_2(m_2) \subseteq \Delta(m_1, m_2), \ \forall\ m_1 \in M_1, \ m_2 \in M_2. \tag{4.30}$$

De (4.29) y (4.30) se concluye que

$$\Delta(m_1, m_2) \supseteq \Delta_1(m_1) \times \Delta_2(m_2). \tag{4.31}$$

Para probar la otra inclusión, sea $(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \in M_1 \times M_2$ y $U_1 \times U_2$ un entorno abierto $G_1 \times G_2$-invariante de $(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$. Consideremos $f \in \mathcal{F}(U_1 \times U_2)^{G_1 \times G_2}$, entonces de (4.27) se tiene que

$$X_f(\bar{m}_1, \bar{m}_2) = (X_{f_{\bar{m}_2}}(\bar{m}_1), X_{f_{\bar{m}_1}}(\bar{m}_2)).$$

Por lo tanto se concluye que

$$\Delta(m_1, m_2) \subseteq \Delta_1(m_1) \times \Delta_2(m_2). \tag{4.32}$$

De (4.31) y (4.32) se obtiene (4.28).

Recordemos que en el caso analítico el teorema de Sussmann se simplifica.

En el caso analítico, es conocido que dada una distribución $D \subseteq TM$, esta genera una distribución integrable $\bar{D} \supseteq D$ del modo siguiente.

1. Se consideran dos campos X, Y paralelos a D, esto es $X(x), Y(x) \in D_x$ para todo $x \in M$, se calcula $[X, Y]$ y se genera la nueva distribución $D_x^{(1)}$ dada por

$$D_x^{(1)} = \{\lambda X(x) + \beta [Y, Z](x) : X, Y, Z \text{ son paralelos a } D, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. Por recursión se obtiene la distribución $D_x^{(2)}$ dada por

$$D_x^{(2)} = \{\lambda X(x) + \beta[Y, Z](x) : X, Y, Z \text{ son paralelos a } D^{(1)}, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

3. El proceso se estabiliza y se obtiene la distribución integrable $\bar{D}$ dada por

$$\bar{D}_x = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_x^{(k)}.$$

Volviendo al caso particular donde $M = U_1 \times U_2$, cerrar por el corchete de Lie la familia de campos $\{X_{f_1}\} \times \{X_{f_2}\}$ es cerrar por el corchete las familias $\{X_{f_1}\}$ y $\{X_{f_2}\}$ y luego multiplicarlas. Por el teorema de Sussmann se tiene que el conjunto de los puntos alcanzables de la familia $\{X_f\}$ donde X_f es como en (4.27) es el producto de los conjuntos de puntos alcanzables por de las familias X_{f_i}. El caso general donde los datos no son necesariamente analíticos se puede tratar usando el teorema de Sussmann. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones generales

En esta tesis se da una casificación de todos los momentos óptimos $\mathcal{J}(q,p)$ para $(q,p) \in T^*(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ para el problema de los dos cuerpos con simetría dada por la acción diagonal de $SE(3)$ en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ levantada al cotangente. Este estudio incluye una identificación de $\mathcal{J}(q,p)$ como variedad diferencial y de su topología.

Se realiza también un estudio e identificación de la reducción óptima.

De este estudio se deducen propiedades interesantes de la dinámica que se relacionan, desde el punto de vista Hamiltoniano, con los resultados mencionados en el Capítulo 1 de [**Arn78**].

Se ha enfatizado con algunos ejemplos, que la condición de propiedad de la acción no es necesaria para la validez de la formúla (2.11) del Capítulo 2, Sección 2.2. Esto sugiere que será de utilidad tener resultados mas generales de este tipo.

Capítulo 6

Apéndice A

Proposición 1.12. *ϕ es una acción propia si y solo si se cumple que, para sucesiones $\{g_n\}$ y $\{x_n\}$ en G y M respectivamente*

$$\text{si } g_n x_n \longrightarrow \bar{y} \text{ y } x_n \longrightarrow \bar{x}, \text{ existe una subsucesión } \{g_{n_k}\} \text{ de } \{g_n\} \text{ tal que } g_{n_k} \longrightarrow \bar{g} \tag{6.1}$$

En este caso vale que $\bar{y} = \bar{g}\,\bar{x}$.

Demostración. Supongamos que ϕ es propia y sean $\{g_n\}$ y $\{x_n\}$ tales que $g_n x_n \longrightarrow \bar{y}$ y $x_n \longrightarrow \bar{x}$. Consideremos $\widetilde{\phi}$ como en (1.18).

Es un hecho básico en topología que el conjunto

$$K = \{(x_n, g_n x_n)\} \cup \{(\bar{x}, \bar{y})\}$$

es compacto. Por hipótesis $\widetilde{\phi}^{-1}(K)$ es compacto y además $\{(g_n, x_n)\} \subseteq \widetilde{\phi}^{-1}(K)$. Luego existe una subsucesión convergente $\{(g_{n_k}, x_{n_k})\}$ y por lo tanto $\{g_{n_k}\}$ es convergente.

Para probar la recíproca se usa la caracterización de conjuntos compactos por sucesiones. Sea $K \subseteq M \times M$ compacto. Hay que probar que $\widetilde{\phi}^{-1}(K) = \{(g, x) : (x, gx) \in K\}$ es compacto.

Sea $\{(g_n, x_n)\} \subseteq \widetilde{\phi}^{-1}(K)$. Se sabe que $\widetilde{\phi}(g_n, x_n) = (x_n, g_n x_n)$ pertenece a K para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $\{(x_n, g_n x_n)\} \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, existe una subsucesión de $\{(x_n, g_n x_n)\}$ convergente, es decir, existe $\{(x_{n_k}, g_{n_k} x_{n_k})\}$ tal que

$$(x_{n_k}, g_{n_k} x_{n_k}) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}),$$

con $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$.

Por hipótesis resulta que existe una subsucesión $\{g_{n_{k_l}}\}$ de $\{g_{n_k}\}$ convergente. Se ve que $(x_{n_{k_l}}, g_{n_{k_l}} x_{n_{k_l}}) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ y $g_{n_{k_l}} \longrightarrow \bar{g}$.

Resulta entonces que $\{(g_n, x_n)\}$ tiene una subsucesión convergente a saber $\{(g_{n_{k_l}}, x_{n_{k_l}})\}$. Además

$$(g_{n_{k_l}}, x_{n_{k_l}}) = \widetilde{\phi}^{-1}(x_{n_{k_l}}, g_{n_{k_l}} x_{n_{k_l}}) \longrightarrow \widetilde{\phi}^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \widetilde{\phi}^{-1}(K).$$

□

Lema 1.14. *Sea $G \times M \longrightarrow M$ una acción propia. Entonces, para $x \in M$, los grupos de isotropía $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ son compactos. Además el espacio cociente M/G es Hausdorff.*

Demostración. Sea $x \in M$ y sea $\{g_n\}$ una sucesión en G_x. Tomando $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $g_n x_n = g_n x = x$ y por lo tanto se tienen $\{x_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de M y de G respectivamente tales que $x_n \longrightarrow x$ y $g_n x_n \longrightarrow x$.

Como la acción es propia, existe una subsucesión convergente $\{g_{n_k}\}$ de $\{g_n\}$ tal que $g_{n_k} \longrightarrow g$. Entonces se tiene que

$$gx = \lim_{k\to\infty} g_{n_k} x = \lim_{k\to\infty} g_{n_k} x_{n_k} = x.$$

Por lo tanto $g \in G_x$ lo que implica que G_x es compacto.

Ahora bien, el espacio cociente está dado por

$$M/G = \{[x]_G : \; x \in M\}$$

con $[x]_G = G.x$, la clase de equivalencia de x correspondiente a la acción de G en M.

Sea $\Pi : M \longrightarrow M/G$ la proyección canónica. Por definición, un abierto de M/G es un subconjunto $V \subseteq M/G$ tal que $\Pi^{-1}(V)$ es abierto en M. Queremos probar que dados dos puntos distintos en M/G, pueden ser separados con abiertos. Es decir, dados $[x]_G \neq [y]_G$, existen abiertos V_1 y V_2 de M/G tales que $[x]_G \in V_1$, $[y]_G \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Es fácil ver que dados V_1 y V_2 abiertos de M/G tales que $[x]_G \in V_1$ e $[y]_G \in V_2$,

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \Longleftrightarrow U_1 \cap U_2 = \emptyset,$$

siendo

$$U_1 = \Pi^{-1}(V_1) \text{ y } U_2 = \Pi^{-1}(V_2).$$

Veamos entonces que existen abiertos $U_1, U_2 \subset M$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dados $x, y \in M$ con $[x]_G \neq [y]_G$, consideremos las sucesiones de subconjuntos abiertos de M $\{W_{1n}\}$ y $\{W_{2n}\}$ tales que $x \in W_{1n}$ e $y \in W_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{1n} = \{x\}, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{2n} = \{y\}.$$

Consideremos los abiertos invariantes GW_{1n} y GW_{2n}, y supongamos que $GW_{1n} \cap GW_{2n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen sucesiones $\{g_n\}$ y $\{h_n\}$ en G y $\{x_n\}$ en W_{1n}, $\{y_n\}$ en W_{2n} tales que

$$g_n x_n = h_n y_n$$

lo que implica que

$$x_n = g_n^{-1} h_n y_n =: \bar{g}_n y_n.$$

Por otro lado se sabe que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$ y como la acción es propia existe $\bar{g}_{n_k} \longrightarrow \bar{g}$, lo que implica que $x = \bar{g} y$ que es un absurdo pues $[x]_G \neq [y]_G$. $\square$

Lema 1.15. *Si la acción de H en A es propia, entonces la G-acción sobre $G \times_H A$ definida en (1.21) también es propia.*

Demostración. Supongamos que existen sucesiones $\{g_n\}$, $\{g'_n\}$ en G y $\{a_n\}$ en A tales que

$$\Psi(g_n, [g'_n, a_n]_H) = [g_n g'_n, a_n]_H \longrightarrow [\bar{g}, \bar{a}]_H \tag{6.2}$$

y

$$[g_n, a_n]_H \longrightarrow [g_0, a_0]_H. \tag{6.3}$$

Queremos probar que existe una subsucesión convergente $\{g_{n_k}\}$ de $\{g_n\}$.

Como la proyección natural $\Pi : G \times A \longrightarrow G \times_H A$ es una submersión, admite secciones locales. Sean σ_0 y $\bar{\sigma}$ secciones suaves de Π alrededor de $[g_0, a_0]_H$ y $[\bar{g}, \bar{a}]_H$ respectivamente.

□

Lema 1.17. *Sea H un grupo compacto y $\phi : H \times M \to M$ una acción. Supongamos que x queda fijo por la acción de H, es decir $Hx = \{x\}$. Sea U un entorno de x, entonces*

1. *existe un entorno V de x, $V \subseteq U$, tal que V es H-invariante,*
2. *existe en V una métrica Riemanniana σ que es H-invariante,*
3. *existen bolas $S_{r'} \subset S_r \subset M$ centradas en x y una función bump H-invariante $b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} b|_{S_{r'}} & \equiv & 1 \\ b|_{M-S_r} & \equiv & 0. \end{cases}$$

Demostración. 1. Es claro que $\phi^{-1}(U) \supseteq \phi^{-1}(x) = H \times \{x\}$. Para cada $h \in H$, el elemento (h, x) pertenece a $\phi^{-1}(U)$, entonces existen $W_h \subseteq H$ y $V_h \subseteq U$ entornos de h y x respectivamente tal que $W_h \times V_h \subseteq \phi^{-1}(U)$. Por la compacidad de H existen $h_1, ..., h_n \in H$ tales que $H = \bigcup_{i=1}^{n} W_{h_i}$.

Consideremos $\bar{V} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{h_i}$ y $V := H\bar{V} = \bigcup_{\bar{h} \in H} \bar{h}\bar{V}$. Es claro que $x \in V$ pues $x \in \bar{V}$ y $Hx = \{x\}$. Además $V \subseteq U$ ya que $W_{h_i}\bar{V} \subseteq U$ para todo i. Por último V resulta invariante por definición.

2. Por la parte 1, existe un entorno V de x H-invariante. Sea $\bar{\sigma}$ una métrica Riemanniana en V (puede tomarse a $\bar{\sigma} = \psi^* f$ donde (ψ, V) es una carta y f cualquier métrica Riemanniana en $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, por ejemplo la Euclideana).

Se define la métrica promedio σ en V como

$$\sigma(x)(u_x, v_x) = \int_H \bar{\sigma}(hx)(T_x\phi_h u_x, T_x\phi_h v_x) d\mu(h),$$

donde la integral está definida usando la medida $d\mu(h)$ invariante en el grupo de Lie compacto H normalizada. Por construcción σ es una métrica Riemanniana H-invariante sobre V.

3. Sea $x \in M$ y V un entorno en las condiciones de 1 y 2. Tomando r lo suficientemente pequeño, la aplicación exponencial $exp_x : T_xV \to V$ se restringe a un difeomorfismo de $S_r \subseteq T_xV$ en $exp_x(S_r) \subseteq V$. Vamos a identificar a S_r con $exp_x(S_r)$.

   Tomamos ahora $r' < r$ y una función $\psi : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \psi|_{S_{r'}} & > & 0 \\ \psi|_{M-S_r} & \equiv & 0. \end{cases}$$

   Se define la función $\tilde{b} : M \to \mathbb{R}$, H-invariante dada por

$$\tilde{b}(x) = \int_H \psi(hx)d\mu(h).$$

   Se tiene que

$$\begin{cases} \tilde{b}|_{S_{r'}} & > & 0 \\ \tilde{b}|_{M-S_r} & \equiv & 0. \end{cases}$$

   Consideremos $\psi' : M \to \mathbb{R}$ tal que $\psi' = \psi$ en $S_{r'}$ y $\psi' > \delta > 0$ en M y definimos

$$\tilde{b}'(x) = \int_H \psi'(hx)d\mu(h).$$

   Se tiene entonces que

$$\begin{cases} \tilde{b}'|_M & > & \alpha > 0 \\ \tilde{b}|_{S_{r'}} & \equiv & \tilde{b}. \end{cases}$$

   Definimos por último $b(x) = \dfrac{\tilde{b}(x)}{\tilde{b}'(x)}$ la cual verifica que

$$\begin{cases} \tilde{b}|_{S_{r'}} & \equiv & 1 \\ \tilde{b}|_{M-S_r} & \equiv & 0. \end{cases}$$

□

Lema 2.1 *Si $\phi : G \times M \longrightarrow M$ es propia, entonces la distribución característica E está dada por*

$$E(x) = \{X_f(x) : f \in C^\infty(M)^G\}.$$

Demostración. Primero probaremos el siguiente resultado. Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción propia, $U \subseteq M$ un abierto G-invariante y $f \in C^\infty(U)^G$. Entonces, dado $x \in U$, existen un abierto G-invariante $V \subseteq U$ con $x \in V$ y una función $F \in C^\infty(M)^G$ tales que

$$F|_V = f|_V.$$

En efecto, sea $H = G_x$ el subgrupo de isotropía de x. La acción $\phi : G \times U \longrightarrow U$ también es propia. Por el Teorema 1.16, existe un entorno tubular

$$\Phi : G \times_H S \longrightarrow U,$$

donde S es un entorno abierto de 0, H-invariante en un espacio vectorial en el cual H actúa linealmente.

Como H es compacto, por 3. del Lema 1.17, existen bolas $S_{r'} \subset S_r$ centradas en x y una función bump b H-invariante tal que

$$\begin{cases} b|_{S_{r'}} &= 1 \\ b|_{S-S_r} &= 0, \end{cases}$$

Se define la función $\widetilde{h} : G \times_H S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{h}([g,s]_H) = b(s).$$

Veamos que está bien definida. Sean $[g,s]_H, [g',s']_H \in G \times_H S_r$ tales que $[g,s]_H = [g',s']_H$. Entonces existe $h \in H$ tal que $(g',s') = h(g,s) = (gh, h^{-1}s)$ y entonces $s' = h^{-1}s$. Como b es H-invariante, entonces $b(h^{-1}s) = b(s)$ y por lo tanto

$$\widetilde{h}([g,s]_H) = b(s) = b(h^{-1}s) = \widetilde{h}([g',s']_H).$$

Además vale que

$$\widetilde{h}|_{G\times_H S_{r'}} = 1 \;\text{ y }\; \widetilde{h}|_{G\times_H (S-S_r)} = 0.$$

Se define ahora

$$\widetilde{F} : \Phi(G \times_H S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\widetilde{F}(\Phi([g,s]_H)) = \widetilde{h}([g,s]_H) f(\Phi([e,s]_H)).$$

Por último, se define $F \in C^\infty(M)^G$ mediante

$$\begin{cases} F|_{\Phi(G\times_H S)} &= \widetilde{F} \\ F|_{M-\Phi(G\times_H S)} &= 0 \end{cases}$$

Del hecho de que Φ es un difeomorfismo G-invariante sobre su imágen y que f es G-invariante se deduce que F es G-invariante.

Para probar el Lema, usamos el resultado anterior y el hecho de que $X_F(x) = X_f(x)$.

$\square$

Proposición 2.9.([**Ort98**]) *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción. Sea $x \in M$, $H = G_x$ su subgrupo de isotropía y $\mathcal{O}_x = G.x$ su órbita. Entonces*

$$((T_x\mathcal{O}_x)^\circ)^H \supseteq span\ \{df(x) : f \in C^\infty(M)^G\}.$$

Si además la acción es propia, se verifica la igualdad.

Demostración. Recordemos que dado un subespacio $W \subseteq V$, se define el anulador de W como

$$W^\circ = \{\alpha \in V^* : \alpha|_W = 0\}.$$

Se tiene que $T_x\mathcal{O}_x \subseteq T_xM$ y entonces $(T_x\mathcal{O}_x)^\circ \subseteq (T_xM)^* =: T_x^*M$. Sea $f \in C^\infty(M)^G$, veamos que $df(x) \in ((T_x\mathcal{O}_x)^\circ)^H$. La acción de H sobre T_x^*M se define de modo natural, es decir $(hdf(x))(u) = df(x)(h^{-1}u)$, donde $u \in T_xM$ y $hu = T\phi_h(u)$.

Es claro que los elementos de $T_x\mathcal{O}_x$ son de la forma $v = \xi x$, para $\xi \in \mathbf{g}$. Sea $\xi \in \mathbf{g}$ y $g(t)$ una curva contenida en G con $g(0) = e$ y $g'(0) = \xi$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} df(x)(\xi x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(g(t)x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se usó que f es G-invariante. Por lo tanto $df(x) \in (T_x\mathcal{O}_x)^\circ$.

Veamos ahora que $df(x)$ es H-invariante. Sean $h \in H$, $u \in T_xM$ y $x(t)$ una curva contenida en M con $x(0) = x$ y $x'(0) = u$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (hdf(x))(u) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(h^{-1}x(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x(t)) \\ &= df(x)(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto $df(x) \in ((T_x\mathcal{O}_x)^\circ)^H$.

Supongamos ahora que la acción es propia y probamos la inclusión inversa. Como vamos a trabajar localmente, por el Teorema 1.16 se puede reemplazar M por un tubo $G \times_H V$ donde $V = T_xM/T_x\mathcal{O}_x$ y el punto $x \in M$ por el punto $[e, 0]_H$.

Se sabe que $G \times_H V$ es un fibrado con base G/H y que para cada $[g] \in G/H$, la fibra $(G \times_H V)_{[g]}$ es difeomorfa a V.

Se verifica fácilmente, usando la definición de $G \times_H V$, que dos vectores tangente en $T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H}$ dados por

$$\frac{d}{dt} g_1(t)[e, 0]_H \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} g_2(t)[e, 0]_H$$

son el mismo si y solo si $g_1'(0) - g_2'(0) \in \mathfrak{h}$. En conclusión se tiene que

$$T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H} \simeq \mathbf{g}/\mathfrak{h}.$$

Resulta entonces que

$$T_{[e,0]_H}(G \times_H V) \cong T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H} \oplus T_{[e,0]_H}(G \times_H V)_{[e]} \cong \mathbf{g}/\mathfrak{h} \oplus V,$$

donde $T_{[e,0]_H}(G\times_H V)_{[e]}$ es la fibra del fibrado $G\times_H V$ sobre el elemento base $[e]\in G/H$ y su identificación con V está dada por $\frac{d}{dt}|_{t=0}[e,v(t)]_H\cong v'(0)$. Esta identificación conmuta con la acción de H, es decir $h\frac{d}{dt}|_{t=0}[e,v(t)]_H\cong hv'(0)$.

Se tiene la identificación

$$(T_{[e,0]_H}(G\times_H V))^*\cong (T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H})^*\oplus (T_{[e,0]_H}(G\times_H V)_{[e]})^*,$$

dada por, $\gamma=\gamma|_{T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H}}\oplus\gamma|_{T_{[e,0]_H}(G\times_H V)_{[e]}}$, para $\gamma\in (T_{[e,0]_H}(G\times_H V))^*$.

De aquí resulta una identificación canónica entre $(T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H})^\circ$ y $(T_{[e,0]_H}(G\times_H V)_{[e]})^*$ y entonces se tiene que

$$((T_{[e,0]_H}\mathcal{O}_{[e,0]_H})^\circ)^H\simeq (V^*)^H.$$

Las funciones en $C^\infty(G\times_H V)^G$ se calculan de la siguiente manera. Sea $\bar f\in C^\infty(V)^H$, consideremos $f\in C^\infty(G\times_H V)$ dada por

$$f([g,v]_H)=\bar f(v). \tag{6.4}$$

Esta es la única función de $C^\infty(G\times_H V)^G$ tal que $f([e,v]_H)=\bar f(v)$.

Veamos que f está bien definida, en efecto para $[g,v]_H,[g',v']_H\in G\times_H V$ con $[g,v]_H=[g',v']_H$ se tiene que existe $h\in H$ tal que $v'=h^{-1}v$ y entonces

$$f([g',v']_H)=\bar f(v')=\bar f(h^{-1}v)=\bar f(v)=f([g,v]_H).$$

Para ver que f es G-invariante, sea $[g,v]_H\in G\times_H V$ y $g'\in G$, entonces

$$f(g'[g,v]_H)=f([g'g,v]_H)=\bar f(v)=f([g,v]_H).$$

Dada $f\in C^\infty(G\times_H V)^G$ es claro que $\bar f(v)=f([e,v]_H)$ es H-invariante. De lo anterior resulta que las funciones en $C^\infty(G\times_H V)^G$ están en correspondencia biunívoca con las funciones $\bar f$ H-invariantes.

Queremos ver ahora que

$$(V^*)^H\simeq\{d\bar f(0):\bar f\in C^\infty(V)^H\}.$$

Sea $\bar f\in C^\infty(V)^H$ y $h\in H$ arbitrario. Sea $v\in T_0V$ y $v(t)$ una curva en V con $v(0)=0$ y $v'(0)=v$. Entonces se tiene que $d\bar f(0)\in (V^*)^H$, en efecto

$$\begin{aligned}(hd\bar f(0))(v) &= d\bar f(0)(h^{-1}v)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\bar f(h^{-1}v(t))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\bar f(v(t))\\ &= d\bar f(0)(v).\end{aligned}$$

Para probar la inclusión inversa consideremos la descomposición de V en sus componentes irreducibles H-invariantes

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_k \oplus U_1 \oplus ... \oplus U_r,$$

donde $dimW_i = 1$ para $i = 1, ..., k$ y $dimU_j > 1$ para $j = 1, ..., r$. Entonces se tiene que $V^H = W_1 \oplus ... \oplus W_k$.

Sea $\{w_1, ..., w_k\}$ una base de V^H y definimos $\pi_1, ..., \pi_k \in V^*$ por

$$\begin{cases} \pi_i(w_j) &= \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, ..., k\} \\ \pi_i|_{U_p} &= 0, \quad\;\; i \in \{1, ..., k\}, p \in \{1, ..., r\}. \end{cases}$$

Por construcción, los funcionales $\pi_1, ..., \pi_k \in V^*$ son invariantes lineales por la acción de H en V.

Si $\alpha : U_1 \oplus ... \oplus U_r \to \mathbb{R}$ es otro invariante lineal no trivial, entonces existe $p \in \{1, ..., r\}$ tal que $\alpha|_{U_p} \neq 0$. Entonces $ker(\alpha|_{U_p})$ es un subespacio H-invariante no trivial de U_p. Como U_p es irreducible, esto no puede pasar y entonces se deduce que un tal α no existe.

Probaremos ahora que $\pi_1, ..., \pi_k \in V^*$ o en general, que toda base de $(V^H)^*$ genera el conjunto de todos los invariantes lineales de la acción de H sobre V.

Usando la compacidad de H, el Teorema de Schwarz ([Sch75]) garantiza que toda función $f \in C^\infty(V)^H$ puede ser escrita como

$$f = g(\pi_1, ..., \pi_q),$$

con $g \in C^\infty(\mathbb{R}^q)$ y donde $\pi_{k+1}, ..., \pi_q$ verifican que $d\pi_j(0) = 0$, para $j = k+1, ..., q$.

Sea ahora $\alpha \in (V^*)^H \cong (V^H)^*$ arbitrario. La forma α puede ser escrita como

$$\alpha = \alpha_1\pi_1 + ... + \alpha_k\pi_k,$$

con $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$. Sea $g \in C^\infty(\mathbb{R}^q)$ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial \pi_i}(0) = \alpha_i, \quad i \in \{1, ..., k\}.$$

Con esta elección, la función $f := g(\pi_1, ..., \pi_q) \in C^\infty(V)^H$ y satisface

$$\begin{aligned} df(0) &= \frac{\partial g}{\partial \pi_1}(0)\pi_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial \pi_k}(0)\pi_k \\ &= \alpha_1\pi_1 + ... + \alpha_k\pi_k, \end{aligned}$$

donde usamos que $d\pi_j(0) = 0$ para $j \in \{k+1, ..., q\}$.

Como α es arbitrario se ve lo que queríamos probar.

$\square$

Lema 2.10. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $B \in \Lambda^2(T^*M)$ el bivector de Poisson asociado. Entonces para todo $x \in M$ y para todo subespacio vectorial $V \subset T_xM$, se tiene que*

$$V^\omega = B^\sharp(x)(V^\circ) =: (V^\circ)^\sharp.$$

Demostración. Sea $\alpha_x \in V^\circ$ y $f \in C^\infty(M)$ tal que $df(x) = \alpha_x$. Entonces, para todo $v \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(x)(B(x)^\sharp(\alpha_x), v) &= \omega(x)(X_f(x), v) \\ &= df(x)(v) \\ &= \langle \alpha_x, v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $B^\sharp(x)(V^\circ) \subseteq V^\omega$.

Inversamente, sea $X_f(x) \in V^\omega$. Esto significa que

$$\omega(x)(X_f(x), v) = df(x)(v) = 0,$$

para todo $v \in V$. Entonces $df(x) \in V^\circ$ y además $X_f(x) = B^\sharp(df(x))$. Luego $X_f(x) \in B^\sharp(V^\circ)$. □

Lema 2.11. *Sea $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson y $B \in \Lambda^2(T^*M)$ el bivector de Poisson asociado. Sea G un grupo de Lie actuando canónicamente sobre M. Consideremos las acciones levantadas al tangente y al cotangente. Entonces, para todo $x \in M$ se satisface que*

1. *$B^\sharp(x) : T_x^*M \longrightarrow T_xM$ es G_x-equivariante.*
2. *Si el corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ es inducido por una forma simpléctica ω entonces $\omega^\flat$ es G_x-equivariante y para todo subespacio $V \subset T_x^*M$*

$$B^\sharp(x)(V^{G_x}) = (B^\sharp(x)(V))^{G_x},$$

o equivalentemente

$$(V^{G_x})^\sharp = (V^\sharp)^{G_x}.$$

Demostración. **1.** Dados $h \in G_x$ y $\alpha_x, \beta_x \in T_x^*M$ se tiene que

$$\begin{aligned} B^\sharp(x)(h\alpha_x)(\beta_x) &= B(x)(\beta_x, h\alpha_x) \\ &= B(x)(h^{-1}\beta_x, \alpha_x) \\ &= B^\sharp(x)(\alpha_x)(h^{-1}\beta_x) \\ &= (hB^\sharp(x)(\alpha_x))(\beta_x), \end{aligned}$$

donde se usó que la acción es canónica.

2. Análogamente a como se hizo en el inciso 1., puede probarse que $\omega^\flat = (B^\sharp)^{-1}$ es G_x-equivariante.

Sea $\beta_x \in V^{G_x}$, queremos ver que $B^\sharp(x)(\beta_x) \in (B^\sharp(x)(V))^{G_x}$. Se ve directamente que $B^\sharp(x)(\beta_x) \in B^\sharp(x)(V)$, veremos entonces que $B^\sharp(x)(\beta_x)$ es G_x-invariante. Para $h \in G_x$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(B^\sharp(x)(\beta_x)) &= B^\sharp(x)(h\beta_x) \\ &= B^\sharp(x)(\beta_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $B^\sharp(x)(V^{G_x}) \subseteq (B^\sharp(x)(V))^{G_x}$.

Como $\omega^\flat$ es G_x-equivariante y por lo que probamos recién, vale que

$$\omega^\flat(x)\left((B^\sharp(x)(V))^{G_x}\right) \subset \left(\omega^\flat(x)(B^\sharp(x)(V))\right)^{G_x} = V^{G_x}.$$

Luego, aplicando $B^\sharp(x)$ en ambos miembros se obtiene

$$(B^\sharp(x)(V))^{G_x} \subset B^\sharp(x)(V^{G_x}).$$

□

Lema 2.12. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica y sea G un grupo de Lie actuando sobre M de forma globalmente Hamiltoniana con aplicación momento asociada $J : M \longrightarrow \mathbf{g}^*$. Entonces, para todo $x \in M$ y $\mu = J(x)$ se tiene que*

1. $Ker\ T_xJ = T_x(J^{-1}(\mu))$
2. $(T_x(G.x))^\omega = Ker\ T_xJ$.

Demostración. 1. La demostración es consecuencia de una definición de espacio tangente a un conjunto de nivel. En efecto, para $v \in Ker(T_xJ)$, se tiene que

$$\begin{aligned} T_xJ(v) = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}|_{t=0}J(\gamma(t)) = 0,\ \gamma(t) \subset M, \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v \\ &\Leftrightarrow J(\gamma(t)) = \mu,\ \gamma(t) \subset M, \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v \\ &\Leftrightarrow J(\gamma(t)) \subseteq J^{-1}(\mu),\ \gamma(t) \subset M, \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v \\ &\Leftrightarrow v \in T_x(J^{-1}(\mu)). \end{aligned}$$

2. Sean $\xi \in \mathbf{g}$, $v \in T_xM$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(\xi_M(x), v) &= (d\hat{J}(\xi))(x)(v) \\ &= (T_xJ)(v)(\xi). \end{aligned}$$

Usando esto se tiene que

$$\begin{aligned} v \in Ker(T_xJ) &\Leftrightarrow T_xJ(v)(\xi) = 0,\ \forall \xi \in \mathbf{g} \\ &\Leftrightarrow \omega(\xi_M(x), v) = 0,\ \forall \xi \in \mathbf{g} \\ &\Leftrightarrow v \in \{\xi_M(x), \xi \in \mathbf{g}\}^\omega \\ &\Leftrightarrow v \in T_x(G.x)^\omega. \end{aligned}$$

□

Lema 2.13. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo compacto que actúa a izquierda sobre la variedad V. Consideremos el producto twist $G \times_H V$, entonces se tiene que*

1. *para $[g, v]_H \in G \times_H V$,*
$$G_{[g,v]_H} = gH_vg^{-1}$$
donde H_v es el subgrupo de isotropía de $v \in V$ por la acción de H sobre V.
2. *Hay una identificación natural entre $(G \times_H V)_H$ y $N(H) \times_H V^H$, donde $N(H)$ es el normalizador de H. Esta identificación resulta ser una igualdad.*
3. *$(G \times_H V)_H$ es una subvariedad de $G \times_H V$ y se tiene que*
$$T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H) = \left(T_{[e,0]_H}(G \times_H V)\right)^H.$$

Demostración. **1.** Sea $[g, v]_H \in G \times_H V$ y sea $g' \in G_{[g,v]_H}$ entonces, por definición se tiene que
$$[g'g, v]_H = g'[g, v]_H = [g, v]_H.$$

Luego existe $h \in H$ tal que $g'g = gh$ y $v = h^{-1}v$. Por lo tanto $h \in H_v$ y $g' = ghg^{-1}$ y entonces $g' \in gH_vg^{-1}$.

Inversamente para $h \in H_v$ se tiene que
$$ghg^{-1}[g, v]_H = [gh, v]_H = [g, hv]_H = [g, v]_H.$$

Por lo tanto $G_{[g,v]_H} = gH_vg^{-1}$.

2. Consideremos $[g, v] \in N(H) \times V^H$. Entonces para $h \in H$ se tiene que
$$h[g, v]_H = [hg, v]_H = [gh', v]_H = [g, h'v]_H = [g, v]_H.$$

Por lo tanto $G_{[g,v]_H} \supseteq H$. Sea ahora $g' \in G_{[g,v]_H}$ entonces
$$[g'g, v]_H = g'[g, v]_H = [g, v]_H.$$

Luego existe $h \in H$ tal que $g'g = gh$ y entonces $g' \in H$. Por lo tanto $G_{[g,v]_H} \subseteq H$. Hemos probado hasta aquí que $(G \times_H V)_H \supseteq N(H) \times_H V^H$,.

Para ver la otra inclusión consideremos $[g, v]_H \in (G \times_H V)_H$, de donde se tiene que $H = G_{[g,v]_H}$. Queremos ver que $[g, v]_H \in N(H) \times_H V^H$. Veamos primero que $g \in N(H)$. Sea $h \in H$, entonces
$$[hg, v]_H = h[g, v]_H = [g, v]_H,$$

luego existe $h' \in H$ tal que $h = gh'g^{-1}$. Esto implica que $H \subseteq gHg^{-1}$ y por un resultado estándar (ver Proposición 2.1.14 de ([**OR04**]) se tiene que $H = gHg^{-1}$ y por lo tanto $g \in N(H)$.

Veamos ahora que $v \in V^H$. Se tiene que
$$[g, hv]_H = [gh, v]_H = [h'g, v]_H = h'[g, v]_H = [g, v]_H.$$

Por lo tanto $hv = v$ como se quería probar.

Notar que existe una identificación natural, o sea una inclusión canónica $i : N(H)\times_H V^H \longrightarrow G \times_H V$ entre $[g, v]_H$ calculada en $N(H) \times_H V^H$ y la misma calculada en $(G \times_H V)_H$.

3. Considerando la inclusión canónica $i : N(H) \times_H V^H \longrightarrow G \times_H V$ resulta que $T_{[g,v]_H} i$ es inyectiva y entonces $N(H) \times_H V^H$ es una subvariedad sumergida de $G \times_H V$.

Sea $w \in (T_{[e,0]_H}(G \times_H V))^H$. Si $\pi_H : G \times V \longrightarrow G \times_H V$ es la proyección canónica, existe $\xi \in \mathbf{g}$ y $v \in T_0V$ tal que $w = T_{(e,0)}\pi_H(\xi, v)$. El hecho de que w sea H-invariante es equivalente a

$$(T_{[e,0]_H}\Psi_h(T_{(e,0)}\pi_H(\xi, v)) = T_{(e,0)}\pi_H(\xi, v), \quad \forall h \in H. \tag{6.5}$$

Si $v(t)$ es una curva en V tal que $v(0) = 0$ y $v'(0) = v$, entonces (6.5) equivale a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\pi_H(h\ exp(t\xi), v(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi_H(exp(t\xi), v(t)) \quad \forall h \in H,$$

que es lo mismo que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\pi_H(h\ exp(t\xi)h^{-1}, hv(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\pi_H(exp(t\xi), v(t)) \quad \forall h \in H. \tag{6.6}$$

Si ϕ denota la acción de H en V, entonces se tiene que (6.6) es equivalente a

$$T_{[e,0]_H}\pi_H(Ad_h\xi - \xi, T_0\phi_h v - v) = 0. \tag{6.7}$$

Usando que $Ker(T_{(e,0)}\pi_H) = \mathfrak{h} \times \{0\}$, la expresión (6.7) es equivalente a que $Ad_h\xi - \xi \in \mathfrak{h}$ y $T_0\phi_h v = v$ para todo $h \in H$. De esto se deduce que $v \in T_0V^H$. Por el Lema 2.1.13 en ([**OR04**]), se tiene que $\xi \in Lie(N(H))$.

Por lo tanto $(T_{[e,0]_H}(G \times_H V))^H \subseteq Lie(N(H)) \times_H T_0V^H = T_{[e,0]_H}(N(H) \times_H V^H) = T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H)$.

Veamos ahora que $T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H) \subseteq (T_{[e,0]_H}(G \times_H V))^H$. Es claro que $T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H) \subseteq T_{[e,0]_H}(G \times_H V)$. Veamos que todo $[\xi, v]_H \in T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H)$ es H- invariante.

Sea $[\xi, v]_H \in T_{[e,0]_H}((G \times_H V)_H) = Lie(N(H)) \times_H T_0V^H$ y sean $g(t)$ y $v(t)$ curvas en $N(H)$ y V^H respectivamente tales que $g(0) = e$, $v(0) = 0$ y $g'(0) = \xi$, $v'(0) = v$. Siendo Ψ la acción de H sobre $G \times_H V$ y $h \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}
T_{[e,0]_H}\Psi_h[\xi, v]_H &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi_h([g(t), v(t)]_H) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}[hg(t), v(t)]_H \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}[g(t)h'(t), v(t)]_H \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}[g(t), h'(t)v(t)]_H \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}[g(t), v(t)]_H \\
&= [\xi, v]_H.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.14. *Sea $\phi : G \times M \longrightarrow M$ una acción canónica y propia del grupo de Lie G sobre la variedad simpléctica (M, ω). Sea $x \in M$, $H = G_x$ y $i : M_H \hookrightarrow M$ la inclusión. Entonces se tiene que*

1. *$(M_H, i^*\omega)$ es una subvariedad simpléctica de (M, ω),*
2. *el grupo $L = N(H)/H$ actúa en forma canónica, libre y propia sobre M_H de la siguiente forma*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : L \times M_H & \longrightarrow & M_H \\ (nH, z) & \longmapsto & n.z \end{array}$$

Demostración.

1. Por 3. del Lema 2.13 se sabe que M_H es una subvariedad de M. La 2-forma $i^*\omega$ es cerrada y antisimétrica porque ω lo es. Veamos que $i^*\omega$ es no degenerada.

   Sea $z \in M_H$ y $u \in T_z M_H = (T_z M)^H$. Supongamos que $\omega(z)(u, v) = i^*\omega(z)(u, v) = 0$ para todo $v \in T_z M_H$. Se sabe que existe una métrica definida positiva H-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $T_z M$. Además existe un mapa H-equivariante $\varphi : T_z M \longrightarrow T_z M$ dado por

$$\langle u, v \rangle = \omega(z)(u, \varphi v), \tag{6.8}$$

   para todo $u, v \in T_z M_H$.

   Como φ es H-equivariante se tiene que $\varphi(T_z M_H) = \varphi((T_z M)^H) \subset (T_z M)^H$ y entonces de (6.8) se obtiene que

$$\langle u, v \rangle = \omega(z)(u, \varphi v) = 0,$$

   para todo $v \in (T_z M)^H$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida positiva en $T_z M$, también lo es en $(T_z M)^H$ y entonces $u = 0$.
2. La acción de L sobre M_H es propia porque $N(H)$ es cerrado en G.

   Veamos que la acción Ψ es libre. Sea $[g'] \in L$ tal que $\Psi_{[g']}(z) = z$, que es equivalente a $g'.z = z$. Entonces se tiene que $g' \in H$ lo que implica que $[g'] = e$.

   Por último veamos que Ψ es canónica, es decir $\Psi^*(i^*\omega) = i^*\omega$. Sean $u, v \in T_x M_H^*$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \Psi^*_{[g']}(i^*\omega)(u, v) & = & i^*\omega((\Psi_{[g']})^* u, (\Psi_{[g']})^* v) \\ & = & i^*\omega((\phi_{g'})^* u, (\phi_{g'})^* v) \\ & = & \omega(u, v), \end{array}$$

   donde se usó que ω es canónica y donde, si $u(t)$ es una curva en M_H tal que $u(0) = z$ y $u'(0) = u$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\Psi_{[g']})^*(u) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi([g'^{-1}], u(t)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}g'^{-1}.u(t) \\
&= (\phi_{g'})^* u.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 7

Apéndice B

Reducción de Marsden-Weinstein para el problema de los dos cuerpos con Hamiltoniano simétrico arbitrario.

Para $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*$, consideremos la acción $T^*\phi$ restringida a $SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})} \times J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})$,

$$T^*\phi : SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})} \times J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \longrightarrow J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}),$$

donde recordemos que $SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})}$ es el subgrupo de isotropía de la acción coadjunta de $SE(3)$.

Sabemos que $J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})$ es invariante por la acción de $SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})}$.

Queremos calcular los espacios reducidos (ver sección (1.5.1))

$$J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})/SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})}.$$

Este espacio es, como conjunto, la colección de órbitas $\mathcal{O}_{(q,p)}$ con $(q,p) \in J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})$ bajo la acción de $SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})}$.

Para el cálculo de estos espacios, necesitamos primero realizar el cálculo de los subgrupos de isotropía de la acción coadjunta.

Sea $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{so}(3)^* \times (\mathbb{R}^3)^*$. El subgrupo de isotropía de $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})$ por la acción coadjunta está dado por

$$SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})} := \left\{ (A, a) \in SE(3) : Ad^*_{(A,a)^{-1}}(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) = (\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \right\}.$$

Trabajando con la identificación (1.28), resulta que, $SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u})}$ está formado por los elementos $(A, a) \in SE(3)$ que cumplen

$$\left\{ \begin{array}{r} A\alpha - Au \times a = \alpha \\ Au = u \end{array} \right. \tag{7.1}$$

Las ecuaciones en (7.1) son equivalentes a

$$\left\{ \begin{array}{r} a \times u = (I - A)\alpha \\ Au = u \end{array} \right. \tag{7.2}$$

Dado $u \in \mathbb{R}^3$ consideremos el subgrupo de isotropía de la acción natural $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$SO(3)_u = \{A \in SO(3) : Au = u\}.$$

Puede verse que $SO(3)_u$ es isomorfo a S^1 para todo $u \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ y que $SO(3)_0 = SO(3)$.

Consideremos los siguientes casos para $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*$ donde usaremos la identificación (1.28).

Caso $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*,\ \underline{\hat{\alpha}} = 0,\ \underline{u} = 0.$
Es claro que

$$SE(3)_{(0,0)} = SE(3).$$

En este caso, $dim\ SE(3)_{(0,0)} = dim\ SE(3) = 6$.

Caso $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*,\ \underline{\hat{\alpha}} \neq 0,\ \underline{u} = 0.$
De la primera ecuación de (7.2) se obtiene que

$$A\alpha = \alpha.$$

Por lo tanto,

$$SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},0)} = \{(A, a) \in SE(3) : A\alpha = \alpha\}.$$

Puede verse que en este caso, $dim\ SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},0)} = 4$.

Caso $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*,$ *u paralelo a α,* $\underline{u} \neq 0.$
De la segunda ecuación de (7.2) se obtiene que $A \in SO(3)_u$.
Como $Au = u$ y u es paralelo a α, se tiene que $A\alpha = \alpha$, y entonces la primer ecuación de (7.2) se transforma en

$$a \times u = 0$$

de donde se obtiene que a debe estar en la recta l_u que tiene como vector director el vector u.
Concluimos que, dado $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{so}(3)^* \times (\mathbb{R}^3)^*$ con u paralelo a α, y $\underline{u} \neq 0$ el subgrupo de isotropía de la acción coadjunta está dado por

$$SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})} = \{(A, a) \in SE(3) : A \in SO(3)_u,\ a \times u = 0\}$$

Cabe destacar que, en este caso, $dim\ SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})} = 2$.

Caso $(\underline{\hat{\alpha}}, \underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*,$ *u no paralelo a α.*
De la segunda ecuación de (7.2) se obtiene que $A \in SO(3)_u$.
Para cada $A \in SO(3)_u$ se verifica que $(I - A)\alpha$ es perpendicular a u y usando esto resulta que a varía en una línea recta paralela a u definida por la ecuación $(I - A)\alpha = a \times u$.
Concluimos que,

$$SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})} = \{(A, a) \in SE(3) : A \in SO(3)_u \text{ y } a \times u = (I - A)\alpha\}.$$

En este caso, $dim\ SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})} = 2$.

Ahora si, estamos en condiciones de calcular los espacios reducidos para cada elemento de $\mathfrak{se}(3)^*$.

Sea $(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u}) \in \mathfrak{se}(3)^*$. Calculemos primero la preimagen de este elemento por la aplicación momento, esto es

$$J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u}) = \left\{\alpha_q \in T_q^*Q\ : J(\alpha_q) = (\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})\right\}.$$

Usando las identificaciones (1.28), (3.1) y (3.2) resulta

$$J^{-1}(\alpha, u) = \left\{(q,p) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) : J(q,p) = (\alpha, u)\right\}.$$

Luego $J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})$ es el conjunto de los elementos $(q^1,q^2,p^1,p^2) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que verifican

$$\begin{cases} q^1 \times p^1 + q^2 \times p^2 = \alpha \\ p^1 + p^2 = u \end{cases} \tag{7.3}$$

De la segunda ecuación de (7.3) se obtiene que

$$p^2 = u - p^1.$$

Usando esto en la primera ecuación de (7.3) se obtiene que

$$(q^1 - q^2) \times p^1 + q^2 \times u = \alpha.$$

Entonces $J^{-1}(\alpha, u)$ está dado por los elementos $(q^1,q^2,p^1,p^2) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que verifican

$$\begin{cases} (q^1 - q^2) \times p^1 + q^2 \times u = \alpha \\ p^2 = u - p^1 \end{cases} \tag{7.4}$$

Vamos a calcular ahora la colección de órbitas $\mathcal{O}_{\alpha_q}$.

Sea $\alpha_q \in J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})$. La órbita de α_q por la acción $T^*\phi$ está dada por

$$\mathcal{O}_{\alpha_q} = \left\{\beta_q \in J^{-1}(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})\ :\ \exists\ (A,a) \in SE(3)_{(\underline{\hat{\alpha}},\underline{u})} \text{ tal que } \beta_q = (T_q^*\phi)_{(A,a)}(\alpha_q)\right\}$$

Usando las identificaciones (1.28), (3.1) y (3.2) resulta

$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \Big\{(x^1,x^2,y^1,y^2) \in J^{-1}(\alpha,u)\ :\ \exists\ (A,a) \in SE(3)_{(\alpha,u)} \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a,\ x^2 = Aq^2 + a,\ y^1 = Ap^1,\ y^2 = Ap^2\Big\}.$$

Consideraremos los siguientes casos.

Caso $(\alpha, u) = (0,0)$.

Sea $(q,p) = (q^1, q^2, p^1, p^2) \in J^{-1}(0,0)$, queremos calcular $\mathcal{O}_{(q,p)}$ que está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \quad : \quad & \exists\ (A,a) \in SE(3)_{(0,0)} \text{ tal que} \\ & x^1 = Aq^1 + a,\ x^2 = Aq^2 + a,\ y^1 = Ap^1,\ y^2 = Ap^2\big\}\,.\end{aligned}$$

En este caso (7.4) se reduce a

$$\text{(7.5)} \qquad \begin{cases} (q^1 - q^2) \times p^1 = 0 \\ \quad p^2 = -p^1. \end{cases}$$

Entonces,

$$J^{-1}(0,0) = \big\{(q,p) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \ : \ (q^1 - q^2) \times p^1 = 0 \text{ y } p^2 = -p^1\big\}$$

y por otro lado, vimos que

$$SE(3)_{(0,0)} = SE(3).$$

Consideraremos los siguientes casos para $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in J^{-1}(0,0)$.

1. $q^1 - q^2 = 0,\ p^1 = 0.$

   Sea $(x^1, x^2, y^1, y^2) \in \mathcal{O}_{(q,p)}$, entonces existe $(A,a) \in SE(3)_{(0,0)}$ tal que

$$x^1 = Aq^1 + a, \qquad x^2 = Aq^2 + a,$$

$$y^1 = 0, \qquad y^2 = 0.$$

   Como $q^1 = q^2$ se deduce que $x^1 = x^2$ para todo $(A,a) \in SE(3)$ y entonces en este caso resulta

$$\text{(7.6)} \qquad \mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \ : \ x^1 \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = x^1,\ y^1 = 0,\ y^2 = 0\big\}$$

   Se deduce fácilmente de (7.6) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & x^1, \end{array}$$

   cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ x & \longmapsto & (x, x, 0, 0). \end{array}$$

2. $q^1 - q^2 = 0, p^1 \neq 0.$

   Como en el caso anterior, sea $(x^1, x^2, y^1, y^2) \in \mathcal{O}_{(q,p)}$, entonces existe $(A,a) \in SE(3)_{(0,0)} = SE(3)$ tal que

$$x^1 = Aq^1 + a, \qquad x^2 = Aq^2 + a,$$

$$y^1 = Ap^1, \qquad y^2 = Ap^2.$$

   Como $q^1 = q^2$ se deduce que $x^1 = x^2$ para todo $(A,a) \in SE(3)$. Además, como $p^1 \neq 0$, puede verse que $y^1 \in |p^1| S^2$. Por lo tanto en este caso la órbita $\mathcal{O}_{(q,p)}$ está dada por

$$\text{(7.7)} \qquad \mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \ : \ x^1 \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = x^1,\ y^1 \in |p^1| S^2,\ y^2 = -y^1\big\}\,.$$

Se deduce fácilmente de (7.7) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times S^2 \\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & (x^1, z(y^1, y^2)), \end{array}$$

donde $z(y^1) \in S^2$ es tal que $z(y^1) = y^1/|p^1|$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times S^2 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x, |p^1|y, -|p^1|y). \end{array}$$

3. $q^1 - q^2 \neq 0, p^1 = 0$.

Sea $(x^1, x^2, y^1, y^2) \in \mathcal{O}_{(q,p)}$, entonces existe $(A, a) \in SE(3)_{(0,0)} = SE(3)$ tal que

$$x^1 = Aq^1 + a, \qquad x^2 = Aq^2 + a.$$

Para cada $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{A}(x^1, x^2) = \left\{ A \in SO(3) \ : \ x^1 - x^2 = A(q^1 - q^2) \right\}.$$

Si $|x^1 - x^2| \neq |q^1 - q^2|$, puede verse fácilmente que $\mathcal{A}(x^1, x^2) = \emptyset$.

Consideremos el caso en que $|x^1 - x^2| = |q^1 - q^2|$ pero $x^1 - x^2 \neq \pm(q^1 - q^2)$.

Puede verse en este caso que el conjunto $\mathcal{A}(x^1, x^2)$ tiene al menos un elemento $A(x^1, x^2)$ que se calcula de la siguiente manera. En efecto se considera el eje de rotación con el sentido y la dirección de $e = (q^1 - q^2) \times (x^1 - x^2)$. Entonces $A(x^1, x^2)$ es la única rotación que lleva $q^1 - q^2$ a $x^1 - x^2$ positiva con respecto a la terna $(q^1 - q^2, x^1 - x^2, e)$.

Sea

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)} = \{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) & : & \exists (A, a) \in SE(3) \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a, x^2 = Aq^2 + a, \\ & & |x^1 - x^2| = |q^1 - q^2|, x^1 - x^2 \neq \pm(q^1 - q^2), y^1 = 0, y^2 = 0\}. \end{array}$$

Puede verse que

$$\mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)} = \left\{ \left(x^2 + |q^1 - q^2| z, x^2, 0, 0\right) \ : \ x^2 \in \mathbb{R}^3, \ z \in S^2 - \{N_q, S_q\} \right\}, \tag{7.8}$$

donde $N_q = \dfrac{q^1 - q^2}{|q^1 - q^2|}$ y $S_q = -\dfrac{q^1 - q^2}{|q^1 - q^2|}$.

Se puede deducir de (7.8) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^1_{(q,p)} & \longrightarrow & (S^2 - \{N_q, S_q\}) \times \mathbb{R}^3 \\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & (z(x^1), x^2), \end{array}$$

donde $z(x^1) \in S^2$ es tal que $z(x^1) = (x^1 - x^2)/|q^1 - q^2|$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} (S^2 - \{N_q, S_q\}) \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (y, x) & \longmapsto & (x + |q^1 - q^2| y, x, 0, 0). \end{array}$$

Consideremos ahora el caso en que $x^1 - x^2 = q^1 - q^2$. En este caso el conjunto $\mathcal{A}(x^1, x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}^+(q^1, q^2) := \mathcal{A}(x^1, x^2) = \big\{A \in SO(3) \ : \ A(q^1 - q^2) = q^1 - q^2\big\}.$$

Se define

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \quad : \quad & \exists (A, a) \in SE(3) \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a, x^2 = Aq^2 + a,\\ & x^1 - x^2 = q^1 - q^2, y^1 = 0, y^2 = 0\big\}.\end{aligned}$$

Puede verse que

$$\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} = \big\{(x^2 + q^1 - q^2, x^2, 0, 0) \ : \ x^2 \in \mathbb{R}^3\big\}. \tag{7.9}$$

Se deduce fácilmente de (7.9) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & x^2,\end{array}$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)}\\ x & \longmapsto & (x + q^1 - q^2, x, 0, 0).\end{array}$$

Por último para el caso en que $x^1 - x^2 = -(q^1 - q^2)$. En este caso el conjunto $\mathcal{A}(x^1, x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}^-(q^1, q^2) := \mathcal{A}(x^1, x^2) = \big\{A \in SO(3) \ : \ A(q^1 - q^2) = -(q^1 - q^2)\big\}.$$

Se define como antes

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \quad : \quad & \exists (A, a) \in SE(3) \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a, x^2 = Aq^2 + a,\\ & x^1 - x^2 = -(q^1 - q^2), y^1 = 0, y^2 = 0\big\}.\end{aligned}$$

Puede verse que

$$\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} = \big\{\big(x^2 - (q^1 - q^2), x^2, 0, 0\big) \ : \ x^2 \in \mathbb{R}^3\big\}. \tag{7.10}$$

Se deduce fácilmente de (7.10) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & x^2,\end{array}$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)}\\ x & \longmapsto & (x - (q^1 - q^2), x, 0, 0).\end{array}$$

Por lo tanto, dado $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(0,0)$ con $q^1-q^2\neq 0$ y $p^1=0$ resulta de (7.8), (7.9), (7.10) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(q,p)} &= \mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)}\cup\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)}\cup\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)}\\
&= \left\{\left(x^2+|q^1-q^2|z,x^2,0,0\right)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3,\ z\in S^2-\{N_q,S_q\}\right\}\\
&\quad\cup\left\{\left(x^2+q^1-q^2,x^2,0,0\right)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&\quad\cup\left\{\left(x^2-(q^1-q^2),x^2,0,0\right)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{\left(x^2+|q^1-q^2|z,x^2,0,0\right)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3,\ z\in S^2\right\},
\end{aligned}$$

y además existe un isomorfismo

$$\mathcal{O}_{(q,p)}\longrightarrow S^2\times\mathbb{R}^3.$$

4. $q^1-q^2\neq 0, p^1\neq 0$.

   Análogamente a lo que hicimos en el caso 3. consideremos para cada $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ el conjunto

$$\mathcal{A}(x^1,x^2)=\left\{A\in SO(3)\ :\ \ x^1-x^2=A(q^1-q^2)\right\}.$$

Como ya vimos, si $|x^1-x^2|\neq|q^1-q^2|$ resulta $\mathcal{A}(x^1,x^2)=\emptyset$.

Para el caso en que $|x^1-x^2|=|q^1-q^2|$ pero $x^1-x^2\neq\pm(q^1-q^2)$ el conjunto $\mathcal{A}(x^1,x^2)$ tiene al menos un elemento $A(x^1,x^2)$ que se calcula como antes.

Se define

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)}=\{(x^1,x^2,y^1,y^2)\in J^{-1}(0,0)\ \ :\ \ &\exists(A,a)\in SE(3)\text{ tal que } x^1=Aq^1+a, x^2=Aq^2+a,\\
&|x^1-x^2|=|q^1-q^2|, x^1-x^2\neq\pm(q^1-q^2), y^1=Ap^1, y^2=Ap^2\}.
\end{aligned}$$

Puede verse que

$$\mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)}=\left\{\left(x^2+|q^1-q^2|z,x^2,A(z)p^1,A(z)p^2\right)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3,\ z\in S^2-\{N_q,S_q\}\right\},\tag{7.11}$$

donde $N_q=\dfrac{q^1-q^2}{|q^1-q^2|}$, $S_q=-\dfrac{q^1-q^2}{|q^1-q^2|}$ y $A(z)\in SO(3)$ es tal que $A(z)(q^1-q^2)=|q^1-q^2|z$.

Se puede deducir de (7.11) que existe un isomorfismo

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)} &\longrightarrow (S^2-\{N_q,S_q\})\times\mathbb{R}^3\\
(x^1,x^2,y^1,y^2) &\longmapsto (z(x^1,x^2),x^2),
\end{aligned}$$

donde $z(x^1,x^2)\in S^2$ es tal que $x^1=x^2+|q^1-q^2|z(x^1,x^2)$.

Su inversa está dada por

$$\begin{aligned}
(S^2-\{N_q,S_q\})\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)}\\
(y,x) &\longmapsto (x+|q^1-q^2|y,x,sg(\lambda)|p^1|y,-sg(\lambda)|p^1|y),
\end{aligned}$$

donde λ es tal que $p^1 = \lambda(q^1 - q^2)$.

Para el caso en que $x^1 - x^2 = q^1 - q^2$, como ya vimos, el conjunto $\mathcal{A}(x^1, x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}^+(q^1, q^2) := \mathcal{A}(x^1, x^2) = \left\{ A \in SO(3) \ : \ A(q^1 - q^1) = q^1 - q^2 \right\},$$

y es isomorfo a S^1.

Se define

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} = \big\{ (x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \quad : \quad & \exists (A,a) \in SE(3) \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a, x^2 = Aq^2 + a, \\ & x^1 - x^2 = q^1 - q^2, y^1 = Ap^1, y^2 = Ap^2 \big\}. \end{aligned}$$

Recordando de (7.4) que p^1 es paralelo a $q^1 - q^2$, resulta

$$\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} = \left\{ (x^2 + q^1 - q^2, x^2, p^1, -p^1) \ : \ x^2 \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{7.12}$$

Se deduce fácilmente de (7.12) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)} \\ x & \longmapsto & (x + (q^1 - q^2), x, p^1, -p^1). \end{array}$$

Analogamente para el caso en que $x^1 - x^2 = -(q^1 - q^2)$ sea

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} = \big\{ (x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(0,0) \quad : \quad & \exists (A,a) \in SE(3) \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + a, x^2 = Aq^2 + a, \\ & x^1 - x^2 = -(q^1 - q^2), y^1 = Ap^1, y^2 = Ap^2 \big\}. \end{aligned}$$

Puede verse que

$$\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} = \left\{ \left(x^2 - (q^1 - q^2), x^2, -p^1, p^1\right) \ : \ x^2 \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{7.13}$$

Se deduce fácilmente de (7.10) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)} \\ x & \longmapsto & (x - (q^1 - q^2), x, -p^1, p^1). \end{array}$$

Por lo tanto, dado $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(0,0)$ con $q^1-q^2\neq 0$ y $p^1\neq 0$ resulta de (7.11), (7.12), (7.13) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{(q,p)} &= \mathcal{O}^{(1)}_{(q,p)}\cup\mathcal{O}^{(2)+}_{(q,p)}\cup\mathcal{O}^{(2)-}_{(q,p)}\\
&= \big\{\big(x^2+|q^1-q^2|z,x^2,A(z)p^1,-A(z)p^1\big)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3,\ z\in S^2-\{N_q,S_q\}\big\}\\
&\quad\cup\big\{\big(x^2+q^1-q^2,x^2,p^1,-p^1\big)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3\big\}\\
&\quad\cup\big\{\big(x^2-(q^1-q^2),x^2,p^1,-p^1\big)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3\big\}\\
&= \big\{\big(x^2+|q^1-q^2|z,x^2,A(z)p^1,-A(z)p^1\big)\ :\ x^2\in\mathbb{R}^3,\ z\in S^2\big\},
\end{aligned}$$

y además existe un isomorfismo

$$\mathcal{O}_{(q,p)}\longrightarrow S^2\times\mathbb{R}^3.$$

Caso $u=0$, $\alpha\neq 0$. En este caso (7.4) se reduce a

$$\left\{\begin{array}{c}(q^1-q^2)\times p^1=\alpha\\ p^2=-p^1\end{array}\right. \tag{7.14}$$

Entonces,

$$J^{-1}(\alpha,0)=\big\{(q,p)\in(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\times(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\ :\ (q^1-q^2)\times p^1=\alpha \text{ y } p^2=-p^1\big\}$$

Observemos que, como $\alpha\neq 0$, entonces $q^1\neq q^2$ y $p^1\neq 0$, luego $p^2\neq 0$. Además de (7.14) se deduce que q^1-q^2 y p^1 son perpendiculares a α y vimos que

$$SE(3)_{(\alpha,0)}=\{(A,a)\in SE(3)\ :\ A\alpha=\alpha\}.$$

Sea $(q,p)=(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(\alpha,0)$, entonces (q,p) verifica (7.14) y $\mathcal{O}_{(q,p)}$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)}=\big\{(x^1,x^2,y^1,y^2)\in J^{-1}(\alpha,0)\quad &:\quad \exists\ (A,a)\in SE(3)_{(\alpha,0)} \text{ tal que}\\ &\qquad x^1=Aq^1+a,\ x^2=Aq^2+a,\ y^1=Ap^1,\ y^2=Ap^2\big\}.\end{aligned}$$

Para cada $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{A}(x^1,x^2)=\big\{A\in SO(3)\ :\quad A\alpha=\alpha,\ x^1-x^2=A(q^1-q^2)\big\}.$$

Puede verse que si $|x^1-x^2|\neq|q^1-q^2|$ resulta $\mathcal{A}(x^1,x^2)=\emptyset$.

En el caso en que $|x^1-x^2|=|q^1-q^2|$, el conjunto $\mathcal{A}(x^1,x^2)$ tiene un solo elemento $A(x^1,x^2)$ que se calcula de la siguiente manera. En efecto se considera el eje de rotación con el sentido y la orientación de α. $A(x^1,x^2)$ es la única rotación que lleva q^1-q^2 en x^1-x^2 positiva respecto a α y a la orientación del espacio.

Consideremos una trasformación ortonormal cualquiera $\mathcal{C}_\alpha$ que lleva la terna (e^1,e^2,e^3) en (E^1,E^2,α) y consideremos la curva

$$C^1=\mathcal{C}_\alpha S^1,$$

donde $S^1=\{(x^1,x^2,0)\in\mathbb{R}^3:(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$.

Puede verse que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(x^1,x^2) & \longrightarrow & \mathcal{C}_\alpha S^1 \\ A(x^1,x^2) & \longmapsto & \mathcal{C}_\alpha e^{i\beta_{(x^1,x^2)}}, \end{array}$$

donde $\beta_{(x^1,x^2)}$ es el ángulo de la rotación $A(x^1,x^2)$ positivo respecto a α y a la orientación del espacio.

Puede verse entonces que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \times S^1 \\ (x^1,x^2,y^1,y^2) & \longmapsto & (x^2, e^{i\beta_{(x^1,x^2)}}), \end{array}$$

cuya inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times S^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (x, e^{i\beta}) & \longmapsto & (x + |q^1-q^2|\mathcal{C}_\alpha e^{i\beta}, x, |p^1|\mathcal{C}_\alpha e^{i(\beta+\delta)}, -|p^1|\mathcal{C}_\alpha e^{i(\beta+\delta)}), \end{array}$$

donde δ es el ángulo que forman p^1 y q^1-q^2.

Caso α paralelo a u, $u \neq 0$. En este caso se tiene de (7.4) que $J^{-1}(\alpha,u)$ está formado por los elementos $(q^1,q^2,p^1,p^2) \in (\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\times(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ que cumplen

$$\left\{ \begin{array}{c} (q^1-q^2)\times p^1 + q^2 \times u = \alpha \\ p^2 = u - p^1 \end{array} \right. \tag{7.15}$$

Recordemos que en este caso

$$SE(3)_{(\alpha,u)} = \{(A,a)\in SE(3) \ : \ Au = u \text{ y } a\times u = 0\}.$$

Sea $(q,p)=(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(\alpha,u)$ con α paralelo a u y $u\neq 0$, entonces $\mathcal{O}_{(q,p)}$ está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1,x^2,y^1,y^2)\in J^{-1}(\alpha,u) & : & \exists\ (A,a)\in SE(3)_{(\alpha,u)} \text{ tal que} \\ & & x^1 = Aq^1+a,\ x^2 = Aq^2+a,\ y^1 = Ap^1,\ y^2 = Ap^2\big\}. \end{array}$$

Para cada $x^2\in\mathbb{R}^3$ consideremos el siguiente conjunto

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(x^2) & = & \big\{(A,a)\in SE(3)_{(\alpha,u)} \ : \ Aq^2+a = x^2\big\} \\ & = & \big\{(A,a)\in SE(3) \ : \ Aq^2+a = x^2, Au = u \text{ y } a\times u = 0\big\}. \end{array} \tag{7.16}$$

Consideremos los siguientes casos para $(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(\alpha,u)$.

1. q^2 no paralelo a u.

   Sean $x^2\in\mathbb{R}^3$, γ el ángulo que forman q^2 y u y $r = |q^2|sen\gamma$.

   En primer lugar para el caso en que $|x^2|sen(\gamma_{x^2}) \neq r$ donde γ_{x^2} es el ángulo que forman x^2 y u, se puede ver fácilmente que el conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ es vacío.

   Por otro lado, para el caso en que $|x^2|sen(\gamma_{x^2}) = r$, puede verse que el conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ contiene un solo elemento $(A(x^2),a(x^2))$ que se calcula de la siguiente manera. En primer lugar $a(x^2) = (|x^2|cos(\gamma_{x^2}) - |q^2|cos\gamma)\frac{u}{|u|}$. Consideramos ahora el eje de rotación con el sentido y la orientación de u. Entonces $A(x^2)$ es la única rotación que lleva q^2 a $x^2 - a(x^2)$ positiva respecto a u y a la orientación del espacio. Por ejemplo, si $x^2 = q^2$ entonces $(A(x^1), a(x^1)) = (I, 0)$.

En este caso se tiene que

(7.17)
$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1, x^2, y^1, y^2) \in J^{-1}(\alpha, u) \quad &: \quad \exists A \in SO(3)_u, \nu \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^1 = Aq^1 + \nu u,\\ & \qquad x^2 = Aq^2 + \nu u,\ y^1 = Ap^1, y^2 = Ap^2\big\}\,.\end{aligned}$$

Entonces puede verse de (7.17) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & S^1 \times \mathbb{R}\\ (x^1, x^2, y^1, y^2) & \longmapsto & (e^{i\beta_{x^2}}, \lambda_{x^2}),\end{array}$$

donde β_{x^2} es el ángulo de la rotación $A(x^2)$ positivo respecto de u y la orientación del espacio y $\lambda_{x^2} = |x^2|cos(\gamma_{x^2}) - |q^2|cos(\gamma)$.

Consideremos una transformación ortonormal cualquiera $\mathcal{C}_u$ que lleva la terna (e^1, e^2, e^3) a (E^1, E^2, u) y consideremos la curva

(7.18)
$$C^1 = \mathcal{C}_u S^1.$$

La inversa del isomorfismo anterior está dada por

$$\begin{array}{rcl}S^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)}\\ (e^{i\beta}, \lambda) & \longmapsto & \Big(r_{q^1}\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{q^1})} + (|q^1|cos(\gamma_{q^1}) + \lambda)\frac{u}{|u|}, r\mathcal{C}_u e^{i\beta} + (|q^2|cos(\gamma) + \lambda)\frac{u}{|u|},\\ & & \quad |p^1|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{p^1})}, u - |p^1|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{p^1})}\Big)\,,\end{array}$$

donde δ_{q^1} es el ángulo que forman $q^1 - |q^1|cos(\gamma_{q^1}).u$ y $q^2 - |q^2|cos(\gamma).u$ con γ_{q^1} el ángulo entre q^1 y u; δ_{p^1} es el ángulo que forman $p^1 - |p^1|cos(\gamma_{p^1}).u$ y $q^2 - |q^2|cos(\gamma).u$ con γ_{p^1} el ángulo entre p^1 y u; $r_{q^1} = |q^1|sen(\gamma_{q^1})$.

2. q^2 paralelo a u, $q^1 - q^2$ no paralelo a u.

Sea $x^2 \in \mathbb{R}^3$. El conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}(x^2) = \big\{(A, a) \in SE(3) \ : \ x^2 = q^2 + a, Au = u,\ a \times u = 0\big\}\,.$$

En el caso en que x^2 no es paralelo a u el conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ resulta vacío.

Por otro lado, si x^2 es paralelo a u puede verse que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{A}(x^2) & \longrightarrow & SO(3)_u \times \mathbb{R}\\ (A, a) & \longmapsto & (A, \lambda_a),\end{array}$$

donde $\lambda_a \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = a + q^2 = \lambda_a u$.

Consideremos ahora para cada $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{B}(x^1, x^2) = \big\{A \in SO(3) \ : \ Au = u,\ x^1 - x^2 = A(q^1 - q^2)\big\}\,.$$

Puede verse que en el caso en que $|x^1 - x^2| \neq |q^1 - q^2|$ el conjunto $\mathcal{B}(x^1, x^2)$ es vacío.

Por otro lado en el caso en que el ángulo formado por $x^1 - x^2$ y u sea distinto al ángulo formado por $q^1 - q^2$ y u, el conjunto $\mathcal{B}(x^1, x^2)$ también resulta vacío.

Por último en el caso en que $|x^1-x^2| = |q^1-q^2|$ y el ángulo formado por x^1-x^2 y u sea igual al ángulo formado por q^1-q^2 y u, puede verse que el conjunto $\mathcal{B}(x^1,x^2)$ tiene un solo elemento $A(x^1,x^2)$ que se calcula de la siguiente manera. Se considera el eje de rotación con la dirección y el sentido de u. Entonces $A(x^1,x^2)$ es la única rotación que lleva q^1-q^2 en x^1-x^2 en el sentido positivo dado por u y la orientación del espacio. Por ejemplo si $x^1-x^2 = q^1-q^2$, resulta $A(x^1,x^2) = I$.

Se tiene que

(7.19)
$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{(x^1,x^2,y^1,y^2) \in J^{-1}(\alpha,u) \quad : \quad & x^1 = A(x^1,x^2)(q^1-q^2)+x^2,\ x^2 = \lambda q^2,\ y^1 = A(x^1,x^2)p^1, \\ & y^2 = A(x^1,x^2)p^2 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}, A(x^1,x^2) \in \mathcal{B}(x^1,x^2)\big\}.\end{aligned}$$

Puede verse de (7.19) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times S^1 \\ (x^1,x^2,y^1,y^2) & \longmapsto & (\lambda, e^{i\beta_{(x^1,x^2)}}),\end{array}$$

donde $\beta_{(x^1,x^2)}$ es el ángulo de la rotación $A(x^1,x^2)$ positivo respecto a u y la orientación del espacio.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times S^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (\lambda, e^{i\beta}) & \longmapsto & (\lambda q^2 + |q^1-q^2|\mathcal{C}_u e^{i\beta}, \lambda q^2, |p^1|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta)}, u - |p^1|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta)}),\end{array}$$

donde δ es el ángulo que forman $(q^1-q^2) - |q^1-q^2|cos(\gamma).u$ y $p^1 - |p^1|cos(\gamma_{p^1}).u$, con γ_{p^1} el ángulo entre p^1 y u y donde $\mathcal{C}_u$ se define como en el caso anterior.

3. q^2 paralelos a u, q^1-q^2 paralelo a u, $q^1-q^2 \neq 0$.

Luego q^1 es paralelo a u y resulta de (7.15) que

$$(q^1-q^2)\times p^1 = \alpha,$$

es decir q^1-q^2 es perpendicular a α o $\alpha = 0$. Como además en este caso α y q^1-q^2 son ambos paralelos a u por lo tanto resulta que $\alpha = 0$. Luego, q^1-q^2 es paralelo a p^1.

Como en el caso 2, dado $x^2 \in \mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto

$$\mathcal{A}(x^2) = \big\{(A,a) \in SE(3) \ : \ x^2 = q^2 + a,\ Au = u,\ a\times u = 0\big\}.$$

Como vimos antes si x^2 no es paralelo a u resulta que $\mathcal{A}(x^2) = \emptyset$ y si x^2 es paralelo a u, $\mathcal{A}(x^2)$ es isomorfo a $SO(3)_u \times \mathbb{R}$.

Consideremos como antes para $(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ el conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x^1,x^2) &= \{A \in SO(3) \ : \ Au = u,\ x^1-x^2 = A(q^1-q^2)\} \\ &= \{A \in SO(3) \ : \ Au = u,\ x^1-x^2 = q^1-q^2\}.\end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que si $x^1-x^2 \neq q^1-q^2$ resulta $\mathcal{B}(x^1,x^2) = \emptyset$ y si $x^1-x^2 = q^1-q^2$ resulta $\mathcal{B}(x^1,x^2) = SO(3)_u$.

Entonces en este caso resulta que

(7.20)
$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \big\{\big(\lambda u + (q^1-q^2), \lambda u, p^1, u - p^1\big) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\big\}.$$

Se deduce de (7.20) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x^1,x^2,y^1,y^2) & \longmapsto & \lambda_{x^2}, \end{array}$$

donde $\lambda_{x^2} \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = \lambda_{x^2} u$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda u + (q^1-q^2), \lambda u, p^1, u - p^1). \end{array}$$

4. q^2 paralelo a u, $q^1 - q^2 = 0$, p^1 paralelo a u.

Sea $x^2 \in \mathbb{R}^3$. En este caso el conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}(x^2) = \left\{(A,a) \in SE(3) \ : \ x^2 = q^2 + a, \ Au = u, \ a \times u = 0\right\}.$$

Si x^2 no es paralelo a u entonces resulta $\mathcal{A}(x^2) = \emptyset$.

En el caso en que x^2 es paralelo a u puede verse como antes que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(x^2) & \longrightarrow & SO(3)_u \times \mathbb{R} \\ (A,a) & \longmapsto & (A, \lambda_a), \end{array}$$

donde $\lambda_a \in \mathbb{R}$ es tal que $a = \lambda_a u$.

Para $(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ consideremos como antes el conjunto

$$\mathcal{B}(x^1,x^2) = \left\{A \in SO(3) \ : \ Au = u, \ x^1 - x^2 = A(q^1-q^2)\right\}.$$

En este caso $\mathcal{B}(x^1,x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{B}(x^1,x^2) = \left\{A \in SO(3) \ : \ Au = u, \ x^1 - x^2 = 0\right\}.$$

Puede verse que si $x^1 \neq x^2$ entonces $\mathcal{B}(x^1,x^2) = \emptyset$ y si $x^1 = x^2$ el conjunto $\mathcal{B}(x^1,x^2)$ es isomorfo a S^1.

Se tiene que

$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \left\{\left(\lambda u, \lambda u, Ap^1, u - Ap^1\right) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}, Au = u\right\}. \tag{7.21}$$

Se deduce de (7.21) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ \lambda_{x^2} & \longmapsto & (x^1,x^2,y^1,y^2), \end{array}$$

donde $\lambda_{x^2} \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = \lambda_{x^2} u$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ \lambda & \longmapsto & (\lambda u, \lambda u, p^1, u - p^1). \end{array}$$

5. q^2 paralelo a u, $q^1 - q^2 = 0$, p^1 no paralelo a u.

Sea $x^2 \in \mathbb{R}^3$. Análogamente al caso anterior se tiene que el conjunto $\mathcal{A}(x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{A}(x^2) = \left\{(A, a) \in SE(3) \ : \ x^2 = q^2 + a, \ Au = u, \ a \times u = 0\right\}.$$

Si x^2 no es paralelo a u entonces resulta $\mathcal{A}(x^2) = \emptyset$.

En el caso en que x^2 es paralelo a u puede verse como antes que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(x^2) & \longrightarrow & SO(3)_u \times \mathbb{R} \\ (A, a) & \longmapsto & (A, \lambda_a), \end{array}$$

donde $\lambda_a \in \mathbb{R}$ es tal que $a = \lambda_a u$.

Para $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ consideremos como antes el conjunto

$$\mathcal{B}(x^1, x^2) = \left\{A \in SO(3) \ : \ Au = u, \ x^1 - x^2 = A(q^1 - q^2)\right\}.$$

Como vimos $\mathcal{B}(x^1, x^2)$ se reduce a

$$\mathcal{B}(x^1, x^2) = \left\{A \in SO(3) \ : \ Au = u, \ x^1 - x^2 = 0\right\}$$

y que si $x^1 \neq x^2$ entonces $\mathcal{B}(x^1, x^2) = \emptyset$ y si $x^1 = x^2$ el conjunto $\mathcal{B}(x^1, x^2)$ es isomorfo a S^1.

Se tiene que

$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \left\{\left(\lambda u, \lambda u, Ap^1, u - Ap^1\right) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}, Au = u\right\}. \tag{7.22}$$

Se deduce de (7.22) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times S^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (\lambda_{x^2}, e^{i\beta} & \longmapsto & (x^1, x^2, y^1, y^2), \end{array}$$

donde $\lambda_{x^2} \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = \lambda_{x^2} u$ y β es el ángulo de rotación positivo respecto a u y la orientación del espacio que lleva p^1 en y^1.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times S^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (\lambda, \beta) & \longmapsto & (\lambda u, \lambda u, |p^1|\mathcal{C}_u e^{i\beta}, u - |p^1|\mathcal{C}_u e^{i\beta}), \end{array}$$

donde $\mathcal{C}_u$ de define como antes.

Caso (α, u)**,** u **no paralelo a** α**.** En este caso se tiene de (7.3) que $J^{-1}(\alpha, u)$ está formado por los elementos $(q^1, q^2, p^1, p^2) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ que cumplen

$$\left\{ \begin{array}{c} (q^1 - q^2) \times p^1 + q^2 \times u = \alpha \\ p^2 = u - p^1 \end{array} \right. \tag{7.23}$$

y recordemos que en este caso

$$SE(3)_{(\alpha,u)} = \{(A, a) \in SE(3) \ : \ Au = u \text{ y } a \times u = \alpha - A\alpha\}.$$

Sea $(q,p)=(q^1,q^2,p^1,p^2)\in J^{-1}(\alpha,u)$ entonces (q,p) verifica (7.23) y $\mathcal{O}_{(q,p)}$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)}=\big\{(x^1,x^2,y^1,y^2)\in J^{-1}(\alpha,u)\quad &: \quad \exists\,(A,a)\in SE(3)_{(\alpha,u)} \text{ tal que}\\ & x^1=Aq^1+a,\ x^2=Aq^2+a,\ y^1=Ap^1,\ y^2=Ap^2\big\}.\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes casos.

1. q^1-q^2 no paralelo a u.

Para $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ consideremos el conjunto

$$\mathcal{A}(x^1,x^2)=\{(A,a)\in SE(3)\ :\ x^2=Aq^2+a,\ x^1-x^2=A(q^1-q^2),\ Au=u,\ a\times u=\alpha-A\alpha\}.$$

Puede verse que si $|x^1-x^2|\neq|q^1-q^2|$ resulta $\mathcal{A}(x^1,x^2)=\emptyset$.

Sea γ el ángulo que forman q^1-q^2 y u y $\gamma_{x^1-x^2}$ es el ángulo que forman x^1-x^2 y u. En el caso en que $|x^1-x^2|=|q^1-q^2|$ y $\gamma_{x^1-x^2}\neq\gamma$ resulta $\mathcal{A}(x^1,x^2)=\emptyset$.

En el caso en que $|x^1-x^2|=|q^1-q^2|$ y $\gamma_{x^1-x^2}=\gamma$, puede verse que existe un único $A(x^1,x^2)\in SO(3)_u$ tal que $x^1-x^2=A(x^1,x^2)(q^1-q^2)$ que se calcula de la siguiente manera. Se considera el eje de rotación con el sentido y la orientación de u, entonces $A(x^1,x^2)$ es la única rotación que lleva q^1-q^2 en x^1-x^2 positiva respecto a u y a la orientación del espacio.

Sean $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ como antes. Para $A(x^1,x^2)$ sea $a(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(x^1,x^2)\times u &=& \alpha-A(x^1,x^2)\alpha\\ x^2 &=& A(x^1,x^2)q^2+a(x^1,x^2).\end{array}\right. \tag{7.24}$$

Resulta que $\alpha-A(x^1,x^2)\alpha$ es perpendicular a u y entonces se tiene que

$$a(x^1,x^2)=a_{(x^1,x^2)}+\lambda u,$$

donde $a_{(x^1,x^2)}$ es perpendicular a u y $\lambda\in\mathbb{R}$.

Entonces (7.24) se reduce a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{(x^1,x^2)}\times u &=& \alpha-A(x^1,x^2)\alpha\\ x^2 &=& A(x^1,x^2)q^2+a_{(x^1,x^2)}+\lambda u.\end{array}\right. \tag{7.25}$$

Por lo tanto, dados $x^1,x^2\in\mathbb{R}^3$ con $|x^1-x^2|=|q^1-q^2|$ y $\gamma_{x^1-x^2}=\gamma_{q^1-q^2}$ se tiene que si $x^2\notin\{A(x^1,x^2)q^2+a_{(x^1,x^2)}+\lambda u\}$ entonces $\mathcal{A}(x^1,x^2)=\emptyset$. Si $x^2\in\{A(x^1,x^2)q^2+a_{(x^1,x^2)}+\lambda u\}$ entonces los elementos de $\mathcal{A}(x^1,x^2)$ son de la forma $(A(x^1,x^2),a(x^1,x^2))$ donde $A(x^1,x^2)$ se calcula como antes y $a(x^1,x^2)=a_{(x^1,x^2)}+\lambda u$.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(q,p)}=\{(x^1,x^2,y^1,y^2)\ \in\ & J^{-1}(\alpha,u): x^1=x^2+|q^1-q^2|A(x^1,x^2),\ x^2=A(x^1,x^2)q^2+a(x^1,x^2)+\lambda u,\\ & y^1=A(x^1,x^2)p^1,\ y^2=A(x^1,x^2)p^2,(a(x^1,x^2),A(x^1,x^2))\in\mathcal{A}(x^1,x^2),\lambda\in\mathbb{R}\}\end{aligned} \tag{7.26}$$

Se deduce de (7.26) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{O}_{(q,p)} &\longrightarrow& S^1\times\mathbb{R}\\ (x^1,x^2,y^1,y^2) &\longmapsto& (e^{i\beta_{(x^1,x^2)}},\lambda_{(x^1,x^2)}),\end{array}$$

donde $\beta_{(x^1,x^2)}$ es el ángulo de la rotación $A(x^1,x^2)$ positivo respecto a u y a la orientación del espacio y $\lambda_{(x^1,x^2)} \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = A(x^1,x^2)q^2 + a_{A(x^1,x^2)} + \lambda_{(x^1,x^2)}u$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} S^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (e^{i\beta},\lambda) & \longmapsto & \Big((|q^2|cos(\gamma_{q^2})\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{q^2})} + a_\beta + \lambda u) + |q^1-q^2|\mathcal{C}_u e^{i\beta}\ , \\ & & |q^2|cos(\gamma_{q^2})\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{q^2})} + a_\beta + \lambda u,\ |p^1|cos(\gamma_{p^1})\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{p^1})},\ u - |p^1|cos(\gamma_{p^1})\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{p^1})}\Big)\ , \end{array}$$

donde:

- $a_\beta = \frac{|e^{i\beta_\alpha} - e^{i\beta}|}{||u||}\mathcal{C}_u e^1$ con β_α el ángulo que forman $(q^1-q^2) - |q^1-q^2|cos\gamma.u$ y $\alpha - |\alpha|cos(\gamma_\alpha).u$, γ_α el ángulo entre α y u,
- δ_{q^2} es el ángulo que forman $(q^1-q^2) - |q^1-q^2|cos\gamma.u$ y $q^2 - |q^2|cos(\gamma_{q^2}).u$, con γ_{q^2} el ángulo que forman q^2 y u,
- δ_{p^1} es el ángulo que forman $(q^1-q^2) - |q^1-q^2|cos\gamma.u$ y $p^1 - |p^1|cos(\gamma_{p^1}).u$, con γ_{p^1} el ángulo que forman p^1 y u.

2. $q^1 - q^2$ paralelo a u, p^1 no paralelo a u.

Para x^2, $y^1 \in \mathbb{R}^3$ consideremos el conjunto

$$\mathcal{B}(x^2,y^1) = \{(A,a) \in SE(3) : x^2 = Aq^2 + a,\ y^1 = Ap^1,\ a \times u = \alpha - A\alpha\}.$$

Puede verse que si $|y^1| \neq |p^1|$ resulta $\mathcal{B}(x^2,y^1) = \emptyset$.

Sea γ_{p^1} el ángulo que forman p^1 y u y γ_{y^1} el ángulo que forman y^1 y u. En el caso en que $|y^1| = |p^1|$ y $\gamma_{p^1} \neq \gamma_{y^1}$, resulta $\mathcal{B}(x^2,y^1) = \emptyset$.

En el caso en que $|y^1| = |p^1|$ y $\gamma_{p^1} = \gamma_{y^1}$, puede verse que existe un único $A(y^1) \in SO(3)_u$ tal que $y^1 = A(y^1)p^1$ que se calcula de la siguiente manera. Se considera el eje de rotación con el sentido y la orientación de u, entonces $A(y^1)$ es la única rotación que lleva p^1 en y^1 positiva respecto a u y a la orientación del espacio.

Sea y^1 como antes y $x^2 \in \mathbb{R}^3$. Para $A(y^1)$ sea $a(x^2,y^1) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(x^2,y^1) \times u & = & \alpha - A(y^1)\alpha \\ x^2 & = & A(y^1)q^2 + a(x^2,y^1). \end{array} \right. \tag{7.27}$$

Resulta que $\alpha - A(y^1)\alpha$ y $a(x^2,y^1)$ son perpendiculares a u y entonces se tiene que

$$a(x^2,y^1) = a_{(x_2,y^1)} + \lambda u,$$

donde $a_{(x^2,y^1)}$ es perpendicular a u y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces (7.27) se reduce a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{(x^2,y^1)} \times u & = & \alpha - A(y^1)\alpha \\ x^2 & = & A(y^1)q^2 + a_{(x^2,y^1)} + \lambda u. \end{array} \right. \tag{7.28}$$

Por lo tanto, dados $x^2, y^1 \in \mathbb{R}^3$ con $|y^1| = |p^1|$ y $\gamma_{y^1} = \gamma_{p^1}$ se tiene que si $x^2 \notin \{A(y^1)q^2 + a_{(x^2,y^1)} + \lambda u\}$ entonces $\mathcal{B}(x^2,y^1) = \emptyset$. Si $x^2 \in \{A(y^1)q^2 + a_{(x^2,y^1)} + \lambda u\}$ entonces los elementos de $\mathcal{B}(x^2,y^1)$ son de la forma $(A(y^1), a(x^2,y^1))$ donde $A(y^1)$ se calcula como antes y $a(x^2,y^1) = a_{(x^2,y^1)} + \lambda u$.

Entonces se tiene que

(7.29)
$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \left\{(x^1,x^2,y^1,y^2) \in J^{-1}(\alpha,u) \quad : \quad x^2 = A(y^1)q^2 + a(x^2,y^1),\ x^1 = q^1 - q^2 + x^2,\ y^1 = A(y^1)p^1, \right.$$
$$\left. y^2 = u - A(y^1)p^1, (A(y^1), a(x^2,y^1)) \in \mathcal{B}(x^2,y^1)\right\}.$$

Se deduce de (7.29) que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & S^1 \times \mathbb{R} \\ (x^1,x^2,y^1,y^2) & \longmapsto & (e^{i\beta_{y^1}}, \lambda_{(x^2,x^1)}), \end{array}$$

donde β_{y^1} es el ángulo de la rotación $A(y^1)$ positivo respecto a u y a la orientación del espacio y $\lambda_{(x^2,y^1)} \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 = A(y^1)q^2 + a_{(x^2,y^1)} + \lambda_{(x^2,y^1)}u$.

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} S^1 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ (e^{i\beta},\lambda) & \longmapsto & \Big(q^1 - q^2 + |q^2|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{q^2})} + a_{(\beta,\lambda)} + \lambda u,\ |q^2|\mathcal{C}_u e^{i(\beta+\delta_{q^2})} + a_{(\beta,\lambda)} + \lambda u\ , \\ & & |p^1|\mathcal{C}_u e^{i\beta},\ u - |p^1|\mathcal{C}_u e^{i\beta}\}\Big)\ , \end{array}$$

donde:

- δ_{q^2} es el ángulo que forman $p^1 - |p^1|cos(\gamma_{p_1}).u$ y $q^2 - |q^2|cos(\gamma_{q_2}).u$, con γ_z el ángulo entre z y u, para $z = p^1, q^2$.

3. $q^1 - q^2$ paralelo a u, p^1 paralelo a u.

Puede verse que en este caso

$$\mathcal{O}_{(q,p)} = \left\{(q^1 - q^2 + x, x, p^1, u - p^1) : x \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Se deduce que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{(q,p)} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x^1,x^2,y^1,y^2) & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Su inversa está dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(q,p)} \\ x & \longmapsto & (q^1 - q^2 + x, x, p^1, u - p^1). \end{array}$$

Bibliografía

[AM78] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978, Second edition, revised and enlarged, With the assistance of Tudor Raţiu and Richard Cushman. MR 515141 (81e:58025) 1, 3, 7, 8, 21

[Arn66] V. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1966), no. fasc. 1, 319–361. MR 0202082 (34 #1956) 1

[Arn78] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60. MR 0690288 (57 #14033b) 8, 88, 107

[CHMR98] Hernán Cendra, Darryl D. Holm, Jerrold E. Marsden, and Tudor S. Ratiu, *Lagrangian reduction, the Euler-Poincaré equations, and semidirect products*, Geometry of differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 186, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1–25. MR 1732406 (2001a:37079) 1

[CMR01] Hernán Cendra, Jerrold E. Marsden, and Tudor S. Ratiu, *Lagrangian reduction by stages*, Mem. Amer. Math. Soc. **152** (2001), no. 722, x+108. MR 1840979 (2002c:37081) 1

[Gol51] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951. MR 0043608 (13,291a) 1

[GS77] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, *Geometric asymptotics*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, Mathematical Surveys, No. 14. MR 0516965 (58 #24404) 1

[GS80] ———, *The moment map and collective motion*, Ann. Physics **127** (1980), no. 1, 220–253. MR 576424 (81g:58011) 1

[GS90] ———, *Symplectic techniques in physics*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR 1066693 (91d:58073) 1

[GS05] ———, *The moment map revisited*, J. Differential Geom. **69** (2005), no. 1, 137–162. MR 2169585 (2007k:53137) 1

[Ham34] William. R. Hamilton, *On a general method in dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lon. (1834), 247–308. 1, 8

[Jac66] C. G. Jacobi, *Vorlesungen üuber dynamik*, Based on lectures given in 1842-3. Verlag G. Reimer. Reprinted by Chelsea, 1969 (1866). 1

[JS98] Jorge V. José and Eugene J. Saletan, *Classical dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, A contemporary approach. MR 1640663 (99g:70001) 1

[Lag88] J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Chez la Veuve Desaint, Paris. (1788). 1

[LM87] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Mathematics and its Applications, vol. 35, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the French by Bertram Eugene Schwarzbach. MR 882548 (88c:58016) 7, 8, 16, 17, 41

[MMO+07] Jerrold E. Marsden, Gerard Misiolek, Juan-Pablo Ortega, Matthew Perlmutter, and Tudor S. Ratiu, *Hamiltonian reduction by stages*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1913, Springer, Berlin, 2007. MR 2337886 (2008i:37112) 1

[MR86] Jerrold E. Marsden and Tudor Ratiu, *Reduction of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), no. 2, 161–169. MR 836071 (87h:58067) 1

[MR94] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Texts in Applied Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, New York, 1994, A basic exposition of classical mechanical systems. MR 1304682 (95i:58073) 1, 3, 7, 8, 11, 19

[MW01] Jerrold E. Marsden and Alan Weinstein, *Comments on the history, theory, and applications of symplectic reduction*, Quantization of singular symplectic quotients, Progr. Math., vol. 198, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 1–19. MR 1938549 (2003h:53119) 1

[OR02] Juan-Pablo Ortega and Tudor S. Ratiu, *The optimal momentum map*, Geometry, mechanics, and dynamics, Springer, New York, 2002, pp. 329–362. MR 1919835 (2003i:37051) 2, 3, 15, 16, 31, 42

[OR04] ______, *Momentum maps and hamiltonian reduction*, Progress in Mathematics, vol. 222, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004. MR 2021152 (2005a:53144) 2, 3, 31, 119, 120

[Ort98] J. P. Ortega, *Symmetry, reduction, and stability in hamiltonian systems*, Ph.D. Thesis. University of California, Santa Cruz (1998). 113

[Poi92] H. Poincare, *Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation*, Revue Générale des Sciences **3** (1892), 809–815. 1

[Poi01] ______, *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, C.R. Acad.Sci. **132** (1901), 369–371. 1

[Sch75] Gerald W. Schwarz, *Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group*, Topology **14** (1975), 63–68. MR 0370643 (51 #6870) 116

[Sma70a] S. Smale, *Topology and mechanics. I*, Invent. Math. **10** (1970), 305–331. MR 0309153 (46 #8263) 1, 2

[Sma70b] ______, *Topology and mechanics. II. the planar n-body problem*, Invent. Math. **11** (1970), 45–64. MR 0321138 (47 #9671) 1, 2

[Ste74] P. Stefan, *Accessibility and foliations with singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1142–1145. MR 0353362 (50 #5846) 16, 17

[Sus73] Héctor J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 171–188. MR 0321133 (47 #9666) 16, 17