Universidad Nacional de La Plata

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Diferenciación de Productos y Poder de Mercado

Germán Coloma

Documento de Trabajo Nro. 5
Diciembre 1997

www.depeco.econo.unlp.edu.ar

Diferenciación de productos y poder de mercado [(*)]

por Germán Coloma

Resumen

El presente trabajo presenta un modelo de análisis del poder de mercado en un contexto de diferenciación de productos simétrica. Cada variedad posee un componente homogéneo y otro idiosincrático que los consumidores valoran separadamente. Según el modo en el cual las empresas influyan sobre sus precios, se distinguen cuatro hipótesis de comportamiento (competencia pura, competencia monopolística, oligopolio de Cournot y colusión), se evalúa el poder de mercado local y global que las mismas implican, y se analiza su eficiencia relativa. Las conclusiones se extienden luego a contextos en los cuales las empresas se vuelven infinitesimales y el número de variedades es alternativamente finito o infinito.
Clasificación del JEL: D43, L13.

Product Differentiation and Market Power

by Germán Coloma

Abstract

This paper presents a model of market power analysis in a context of symmetric product differentiation. Each variety possesses a homogeneous and a heterogeneous component, that consumers value separately. According to the way in which firms exercise their influence on prices, four behavioral hypotheses are defined (pure price-taking, monopolistic competition, Cournot oligopoly and collusion). Each of them implies a different level of global and local market power, whose relative efficiency is assessed. Conclusions are later extended to contexts where firms become infinitesimal, and the number of varieties is either finite or infinite.
JEL Classification: D43, L13.

[(*)] Este artículo es una adaptación del capítulo 1 de mi tesis doctoral para la Universidad de California, Los Ángeles. Agradezco los comentarios de Mariana Conte Grand, Joseph Ostroy y John Riley, y los de los participantes del seminario de economía de la Universidad de San Andrés.

Diferenciación de productos y poder de mercado

por Germán Coloma

Se dice que un producto está diferenciado si sus variedades comparten algunas características comunes, pero cada una de ellas es distinta de las demás disponibles en el mercado. La diferenciación de productos puede relacionarse con la existencia de distintos niveles de calidad en la provisión de un cierto bien, con distancias en un espacio geográfico o de preferencias de los consumidores, o simplemente con la presencia de componentes idiosincráticos que cada variedad posee y que la hacen diferente del resto de las marcas. Normalmente, este último tipo de diferenciación de productos implica que todas las variedades están igualmente distantes unas de las otras, y se lo conoce con el nombre de diferenciación simétrica o "sin domicilios"[1].

La existencia de diferenciación simétrica en mercados con libre entrada y un número relativamente grande de empresas suele asociarse con la idea de la competencia monopolística. Esta puede definirse como una estructura de mercado en la que cada empresa actúa como un monopolista en su propia variedad pero ignora el impacto de sus decisiones sobre el mercado como un todo. Una alternativa a esta estructura es el oligopolio, en el cual cada empresa se comporta estratégicamente respecto de las demás y toma en cuenta el efecto de las acciones de las otras empresas sobre las suyas propias.

El propósito de este trabajo es formular un modelo en el cual la competencia monopolística y el oligopolio puedan ser vistos como diferentes hipótesis de comportamiento en un mercado con diferenciación de productos. La manera de lograr esto es suponer que los consumidores (que actúan como tomadores de precios) perciben las distintas variedades disponibles como bienes que tienen tanto un "valor homogéneo" (dado por las características intrínsecas que los definen como un solo producto) como un "valor diferenciado" (dado por los elementos idiosincráticos de cada variedad). Definiremos por lo tanto al comportamiento de competencia monopolística como aquél en el cual cada empresa actúa como si no pudiera influir sobre el primero de tales valores, pero teniendo en cuenta su capacidad de manipular el segundo. Este supuesto es distinto de las hipótesis de Bertrand y Cournot usadas para resolver modelos de oligopolio con diferenciación de productos, en los que las empresas aún poseen algún grado de poder monopólico sobre el mercado como un todo[2].

Nuestro trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la primera sección desarrollamos el modelo básico para una economía con un consumidor representativo y un número finito de empresas potenciales, y definimos distintos conceptos de equilibrio a través del empleo de diferentes hipótesis de comportamiento de las empresas. Este modelo nos sirve también para estudiar algunos aspectos referidos al fenómeno de la colusión, y para derivar resultados normativos sobre la eficiencia de los distintos equilibrios. La segunda sección extiende nuestro análisis a un entorno de infinitas dimensiones, en el cual las soluciones oligopólicas confluyen con las de competencia pura o monopolística. La tercera sección, finalmente, resume las conclusiones de todo el trabajo.

1. Modelo básico

Imaginemos una economía con un único consumidor representativo cuyas preferencias estén dadas por la siguiente función de utilidad:

$$U = V(q_1, q_2, \ldots, q_n) + m = V_Q\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i) + m \qquad ;$$

donde “m” es un bien monetario con utilidad marginal constante, “q_i” es la cantidad de la iésima

[1] La clasificación entre enfoques con y sin domicilios aparece en Eaton y Lipsey (1989).

[2] Esta distinción no es aceptada por toda la literatura sobre el tema. Véase Benassy (1991) para una reseña de modelos en la cual la competencia monopolística está definida como un oligopolio de Bertrand con diferenciación de productos y libre entrada.

variedad del único bien no monetario que el consumidor demanda y "n" es el número total de variedades, que coincide con el total de empresas potenciales. "V_Q" y "V_i" son funciones de valuación crecientes, continuamente diferenciables y estrictamente cóncavas, para las cuales se da que "$V_Q(0) = 0$" y "$V_i(0) = 0$".

Debido a la naturaleza cuasilineal de estas preferencias, el problema de maximización de la utilidad sujeto a una restricción presupuestaria se vuelve equivalente a un problema de maximización del excedente del consumidor. Este problema puede escribirse así:

$$S(\max_{\{q_i\}}) = V_Q\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i \qquad ;$$

y sus condiciones de primer orden nos dan directamente las siguientes funciones de demanda:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial V_Q}{\partial(\Sigma q_i)} + \frac{\partial V_i}{\partial q_i} - p_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_i = v_Q(\Sigma q_i) + v_i(q_i) \qquad ;$$

donde "p_i" es el precio de la iésima variedad, "v_Q" es la valuación marginal (decreciente) del componente homogéneo del producto -que es igual para todas las variedades- y "v_i" es la valuación marginal (decreciente) del componente idiosincrático.

1.1. Análisis de equilibrio

El mercado de nuestro producto diferenciado puede exhibir diferentes tipos de equilibrio bajo distintos supuestos acerca del comportamiento de las empresas que participan en él. Tres posibles alternativas son:

a) Competencia pura: Cada empresa toma "p_i" como dado.

b) Competencia monopolística: Cada empresa toma "v_Q" como dado pero percibe que "v_i" es una función de "q_i".

c) Oligopolio de Cournot: Cada empresa percibe que tanto "v_Q" como "v_i" son funciones de "q_i", pero toma todas las otras "$q_j \neq q_i$" como dadas.

Supongamos ahora que cada empresa tiene una cierta función de costo total "$TC_i(q_i)$" que depende de la cantidad producida por esa empresa pero no de las cantidades producidas por las demás firmas. Supongamos también que esas funciones tienen la siguiente forma:

$$TC_i(q_i) = FC_i + VC_i(q_i) \qquad (\text{si } q_i > 0) \quad ;$$
$$= 0 \qquad (\text{si } q_i = 0) \quad ;$$

donde "$FC_i > 0$" y "$VC_i(q_i)$" es creciente, continuamente diferenciable y estrictamente convexa en "q_i".

Para que una empresa esté dispuesta a producir un cierto nivel de "q_i", deben darse dos condiciones básicas: su costo marginal tiene que ser igual al ingreso marginal percibido por la empresa (cuya definición varía según el supuesto de comportamiento que utilicemos), y sus beneficios no deben ser negativos (o, lo que es lo mismo, su precio debe ser mayor o igual que su costo medio). Esto hace que los tres posibles equilibrios ocurran cuando:

$$p_i = v_Q + v_i = MC_i \geq AC_i \qquad (\text{Competencia pura}) \quad ;$$

$$p_i = v_Q + v_i = MC_i - v_{ii}.q_i \geq AC_i \qquad (\text{Competencia monopolística}) \quad ;$$

$$p_i = v_Q + v_i = MC_i - (v_{QQ} + v_{ii}).q_i \geq AC_i \qquad (\text{Oligopolio de Cournot}) \quad ;$$

donde "MC_i" es el costo marginal, "AC_i" es el costo medio, "v_{ii}" es la derivada de "v_i" con respecto a "q_i" y "v_{QQ}" es la derivada de "v_Q" con respecto a "Σq_i".

Como la concavidad estricta de "V_Q" y "V_i" nos garantiza que los signos de "v_{QQ}" y "v_{ii}" son los dos negativos, la comparación entre nuestros tres tipos de equilibrio implica un apartamiento creciente de la regla de fijación de precios al costo marginal conforme nos movemos de un supuesto de comportamiento al otro. Más aún, la manera en la que estos apartamientos están definidos nos da un procedimiento para identificar la causa de la capacidad de las distintas empresas de cobrar precios por encima de sus costos marginales. En la competencia monopolística, esta causa está dada exclusivamente por la provisión de un producto diferenciado que es valorado por los consumidores (poder de mercado local). Bajo condiciones de oligopolio de Cournot, en cambio, existe una causa adicional de poder de mercado (global), que viene de la posibilidad de restringir la producción total como un modo de incrementar los precios y los beneficios.

La inclusión de una condición de beneficios no negativos (expresada como una relación entre precios y costos medios) incorpora un requisito adicional, que trae aparejado distintos grados de flexibilidad para producir cantidades menores que la que minimiza los costos medios. Dicha flexibilidad está dada por las siguientes expresiones:

$$AC_i - MC_i \leq p_i - MC_i = 0 \qquad \text{(Competencia pura)} \quad ;$$

$$AC_i - MC_i \leq p_i - MC_i = -v_{ii}.q_i \qquad \text{(Competencia monopolística)} \quad ;$$

$$AC_i - MC_i \leq p_i - MC_i = -(v_{QQ} + v_{ii}).q_i \qquad \text{(Oligopolio de Cournot)} \quad ;$$

para las cuales las desigualdades se cumplen como igualdades en los casos de “empresas marginales” (es decir, las que obtienen beneficios nulos).

A fin de estudiar los equilibrios de mercado bajo distintas hipótesis de comportamiento, supondremos que en todos los casos existe por lo menos una empresa marginal. La idea implícita detrás de este supuesto es que estamos considerando mercados en los que hay potencialmente un “exceso de oferta de empresas”, con lo cual siempre terminaremos hallando empresas en actividad y empresas fuera de la actividad (es decir, cuya producción es nula).

Dicho esto, las condiciones enunciadas pueden traducirse a un diagrama de costos medios y marginales para la empresa marginal individual. Las mismas nos dicen que, bajo un régimen de competencia pura, la empresa opera en el punto donde “$AC_i = MC_i$”, y por lo tanto su costo medio resulta mínimo. Cuando nos movemos hacia otros tipos de equilibrio, la mínima escala rentable de producción se va reduciendo progresivamente, permitiéndonos incrementar la brecha entre el costo medio y el costo marginal. Este fenómeno nos sugiere la existencia de precios de equilibrio más altos, así como la presencia de un número mayor de empresas en actividad.

Para el caso particular en el cual las firmas son idénticas y las variedades son valuadas de manera equivalente por el consumidor, todas las empresas en actividad se vuelven marginales. En dicha situación, las relaciones entre los precios, las cantidades y el número de empresas bajo los distintos equilibrios puede enunciarse y probarse por medio de las siguientes proposiciones:

Proposición 1: Si todas las empresas son marginales, entonces la cantidad de equilibrio producida por cada empresa es mayor bajo competencia pura y menor bajo oligopolio de Cournot que la cantidad de equilibrio producida bajo competencia monopolística (i.e, $q_{PT} > q_{MC} > q_{OL}$).

Prueba:

Si todas las empresas son marginales, entonces el equilibrio puede definirse a través de las siguientes condiciones de beneficio nulo:

$(AC - MC)_{PT} = 0$ (Competencia pura) ;

$(AC - MC)_{MC} = -v_{ii}(q_{MC}).q_{MC} > 0$ (Competencia monopolística) ;

$(AC - MC)_{OL} = -[v_{QQ}(q_{OL}) + v_{ii}(q_{OL})].q_{OL} > 0$ (Oligopolio de Cournot) ;

donde las desigualdades provienen del supuesto de concavidad estricta de "V_Q" y "V_i". Si ahora diferenciamos estas expresiones con respecto a "q" obtenemos:

$$\frac{\partial(AC-MC)}{\partial q} = -\frac{AC(q)-MC(q)}{q} - \frac{\partial MC}{\partial q} < 0 \qquad (\forall q \ / \ AC(q)\text{-}MC(q) \geq 0) \quad ;$$

donde la desigualdad proviene del supuesto de convexidad estricta de "VC". Pero como la concavidad de "V_Q" nos dice que:

$-[v_{QQ}(q) + v_{ii}(q)].q > -v_{ii}(q).q \ (\forall q > 0)$;

combinando todos estos resultados se da que:

$(AC - MC)_{PT} < (AC - MC)_{MC} < (AC - MC)_{OL} \Rightarrow q_{PT} > q_{MC} > q_{OL}$ c.q.d.

Proposición 2: Si todas las empresas son marginales, entonces el precio de equilibrio para cada variedad es menor bajo competencia pura y mayor bajo oligopolio de Cournot que el precio bajo competencia monopolística (i.e, $p_{PT} < p_{MC} < q_{OL}$).

Prueba:

Si todas las empresas son marginales, las condiciones de beneficio nulo son:

$p_{PT} = AC(q_{PT})$; $p_{MC} = AC(q_{MC})$; $p_{OL} = AC(q_{OL})$.

Si diferenciamos "AC" con respecto a "q", se da que:

$$\frac{\partial AC}{\partial q} = -\frac{AC(q) - MC(q)}{q} < 0 \qquad (\forall q \ / \ AC(q)\text{-}MC(q) > 0) \quad .$$

Combinando estos resultados con la proposición 1, llegamos a que:

$$q_{PT} > q_{MC} > q_{OL} \ \Rightarrow \ AC(q_{PT}) < AC(q_{MC}) < AC(q_{OL}) \ \Rightarrow \ p_{PT} < p_{MC} < p_{OL} \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 3: Si todas las empresas son marginales, entonces el número de empresas en actividad es menor bajo competencia pura y mayor bajo oligopolio de Cournot que dicho número bajo competencia monopolística (i.e, $N_{PT} < N_{MC} < N_{OL}$).

Prueba:

Si todas las empresas son marginales, entonces para cualquier "N" se da que:

$$\Pi_i = [v_Q(N.q) + v_i(q)].q - TC(q) \quad ;$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q} = v_Q + v_i - MC + (v_{ii} + v_{QQ} \cdot N) \cdot q \quad .$$

Pero como por la proposición 1 sabemos que:

$$q_{PT} > q_{MC} > q_{OL} > 0 \quad ;$$

y como el hecho de que "V_Q" y "V_i" sean estrictamente cóncavas implica que:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial N} = v_{QQ} \cdot q^2 < 0 \qquad (\forall q > 0) \quad ;$$

$$\left.\frac{\partial \Pi_i}{\partial q}\right|_{PT} = (v_{ii} + v_{QQ} \cdot N_{PT}) \cdot q_{PT} < 0 \quad ; \qquad \left.\frac{\partial \Pi_i}{\partial q}\right|_{MC} = v_{QQ} \cdot N_{MC} \cdot q_{MC} < 0 \quad ;$$

$$\left.\frac{\partial \Pi_i}{\partial q}\right|_{OL} = v_{QQ} \cdot (N_{OL} - 1) \cdot q_{OL} < 0 \quad ;$$

podemos entonces deducir que bajo condiciones de beneficio nulo debe darse que:

$$q_{PT} > q_{MC} > q_{OL} \ \text{ y } \ \Pi_{PT} = \Pi_{MC} = \Pi_{OL} = 0 \ \Rightarrow \ N_{PT} < N_{MC} < N_{OL} \qquad \text{c.q.d.}$$

1.2. Colusión

El estudio de la colusión en un modelo de diferenciación de productos puede realizarse de distintas maneras. Sin embargo, como nuestro propósito no es evaluar la probabilidad de que exista colusión en un entorno como éste, solamente caracterizaremos el resultado colusivo de una forma que resulte comparable con los distintos equilibrios que vimos en la sección anterior. La clase de colusión en la que nos concentraremos, por lo tanto, será la que corresponde al caso más extremo. La definiremos como una situación en la cual el conjunto de todas las empresas decide simultáneamente los niveles de producción de cada variedad individual, teniendo en cuenta todo el impacto que los mismos tienen sobre la demanda del consumidor y apuntando a la maximización de los beneficios agregados.

Definamos entonces la función objetivo del conjunto de todas las empresas a través de la siguiente expresión:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i - \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) = v_Q\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i + \sum_{i=1}^{n} v_i(q_i) \cdot q_i - \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) \quad .$$

Para maximizar esta función, deben cumplirse dos requisitos básicos:

a) “$\partial\Pi/\partial q_i$” debe ser cero para toda “$q_i > 0$” y no positiva para toda “$q_i = 0$”;

b) la contribución de cada firma al beneficio agregado debe ser no negativa para toda empresa para la cual “$q_i > 0$” y cero para las que producen “$q_i = 0$”.

Estas dos condiciones pueden interpretarse como dos caras de la misma moneda. La primera de ellas opera sobre el “margen intensivo” de análisis y está relacionada con la elección óptima de una variable unidimensional continua (cantidad). La segunda actúa sobre un “margen extensivo”, y sirve para definir la elección óptima de una variable multidimensional discreta (empresas). Nótese que, en nuestro marco de análisis, las empresas pueden ser distintas unas de otras, tanto desde el punto de vista de sus costos (ya que las funciones “TC_i” pueden diferir) como desde el punto de vista de la valuación del consumidor (ya que las funciones “v_i” pueden ser distintas). El único requisito de similitud que hemos impuesto, por lo tanto, está dado por el hecho de que las unidades que usamos para medir las cantidades resulten conmensurables, de modo de que la idea de una "cantidad total producida por la industria" tenga algún significado tangible (y sea homogéneamente valorada por el consumidor a través de la función "V_Q").

Cuando operamos sobre el margen intensivo de las cantidades, la maximización del beneficio agregado requiere cumplir con las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker[3]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = v_Q + v_{QQ} \cdot \Sigma q_i + v_i + v_{ii} \cdot q_i - MC_i = 0 \qquad \text{(si } q_i > 0) \quad ;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = v_Q + v_{QQ} \cdot \Sigma q_i + v_i + v_{ii} \cdot q_i - MC_i < 0 \qquad \text{(sólo si } q_i = 0) \quad .$$

Si consideramos el margen extensivo de las empresas, en cambio, las condiciones relevantes son:

$$M\Pi_i = \Pi(\max) - \Pi_{-i}(\max) > 0 \qquad \text{(sólo si } q_i > 0) \quad ;$$

$$M\Pi_i = \Pi(\max) - \Pi_{-i}(\max) = 0 \qquad \text{(si } q_i = 0) \quad ;$$

donde "Π_{-i}" es el beneficio agregado cuando sustraemos a la iésima empresa del mercado, y "$M\Pi_i$" es el "beneficio marginal de la iésima empresa" (definido como la diferencia entre el máximo beneficio agregado con y sin ella).

El cómputo del beneficio marginal de las empresas no es una tarea sencilla en esta economía, básicamente porque los valores de las distintas "$q_j \neq q_i$" generalmente cambian cuando la iésima empresa está fuera del mercado. Sin embargo, si suponemos que el impacto de ese cambio es relativamente pequeño (es decir, que "$q_j \approx q_j(-i)$"), resulta posible aproximar la siguiente expresión de "$M\Pi_i$":

$$M\Pi_i \approx \left[v_Q\left(q_i + \sum_{j\neq i} q_j \right) - v_Q\left(\sum_{j\neq i} q_j \right) \right] \cdot \sum_{j\neq i} q_j + \left[v_Q\left(q_i + \sum_{j\neq i} q_j \right) + v_i\left(q_i\right) \right] \cdot q_i - TC_i(q_i) \quad ;$$

donde el primer término de la sumatoria es negativo (ya que "V_Q" es cóncava) y representa una

[3] Nótese que como la función de beneficios agregados no es necesariamente cóncava (ya que las funciones de costos "TC_i" no son convexas para valores pequeños de "q_i") estas condiciones de Kuhn-Tucker, aunque

externalidad que la iésima empresa le crea al resto de la industria[4]. Como la suma de los restantes términos es igual al beneficio de la iésima empresa, podemos entonces concluir que el beneficio marginal de una empresa en actividad es menor que el beneficio que realmente percibe.

Si combinamos las condiciones de Kuhn-Tucker con las de beneficio marginal, el resultado de la colusión para este mercado puede caracterizarse a través de la siguiente expresión:

$$p_i = v_Q + v_i = MC_i - v_{QQ}.\Sigma q_i - v_{ii}.q_i \geq AC_i - \Delta v_Q.\Sigma q_j/q_i \quad ;$$

donde "$\Delta v_Q.\Sigma q_j/q_i$" es un número negativo. Todas las empresas en actividad, por lo tanto, terminan obteniendo un beneficio positivo. Esto implica que empresas que podrían obtener un beneficio positivo permanezcan inactivas, en tanto y en cuanto su contribución marginal al conjunto de empresas como un todo sea negativo. Aunque este fenómeno no está relacionado con la diferenciación de productos sino con la existencia de un componente homogéneo en cada variedad diferenciada, la dificultad que el mismo crea para sostener la colusión puede resultar mayor que en el caso de un bien completamente homogéneo. La razón es que cada empresa tiene la posibilidad de crear un nuevo segmento en el mercado para su variedad idiosincrática, y tiene por lo tanto que resignar una fuente adicional de beneficios positivos a fin de maximizar las ganancias agregadas de las otras empresas.

Si consideramos el caso en el que todas las empresas son marginales, la relación entre beneficios totales y beneficios marginales puede probarse más rigurosamente a través de la siguiente proposición:

Proposición 4: Si todas las empresas son marginales, entonces -para el nivel de producción que maximiza los beneficios agregados- el beneficio marginal de cada empresa es menor que su beneficio total (i.e, $M\Pi_i < \Pi_i$).

Prueba:

Si todas las empresas son marginales, la maximización de los beneficios agregados implica que:

---

necesarias, no son suficientes para la existencia de un máximo global.

[4] En rigor, esta externalidad pecuniaria también afecta al consumidor, a través de cambios en sus precios de reserva por el resto de las variedades disponibles en el mercado. Makowski y Ostroy (1995) definen este fenómeno como una "externalidad sobre los precios de reserva" (*reservation price externality*).

$$M\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial N} = v_Q \cdot q + v_i \cdot q - TC_i + v_{QQ} \cdot N \cdot q^2 = 0 \quad .$$

Combinando esta definición con la de beneficio total, llegamos a que:

$$\Pi_i = v_Q \cdot q + v_i \cdot q - TC_i = M\Pi_i - v_{QQ} \cdot N \cdot q^2 > 0 \quad ;$$

donde la desigualdad proviene del supuesto de concavidad estricta de "V_Q". Por lo tanto:

$q = \operatorname{argmax} \Pi \Rightarrow \quad M\Pi_i < \Pi_i$ c.q.d.

1.3. Análisis de eficiencia

El supuesto de preferencias cuasilineales del consumidor tiene la ventaja de que nos permite estudiar todos los temas relacionados con la eficiencia y la distribución del ingreso usando el concepto de "ganancias del comercio". Estas ganancias se representan a través de la siguiente función:

$$G = V_Q\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) + \sum_{i=1}^{n} V_i(q_i) - \sum_{i=1}^{n} TC_i(q_i) \quad .$$

Para obtener una asignación eficiente, debemos elegir un conjunto de cantidades "q_i" que maximicen esta función de ganancias del comercio. Los requisitos son similares a los vistos para el caso de la maximización de los beneficios agregados, es decir:

a) "$\partial G/\partial q_i$" debe ser cero para toda "$q_i > 0$" y no positiva para toda "$q_i = 0$";

b) las contribuciones a las ganancias del comercio deben ser no negativas para todas las empresas que produzcan "$q_i > 0$", y cero para todas las que produzcan "$q_i = 0$".

Una vez más, la primera condición opera sobre el margen intensivo de cantidades y la segunda lo hace sobre el margen extensivo de empresas. Las condiciones de Kuhn-Tucker son por lo tanto las siguientes:

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = v_Q\left(\Sigma q_i\right) + v_i(q_i) - MC_i = 0 \qquad (\text{si } q_i > 0) \quad ;$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = v_Q\left(\Sigma q_i\right) + v_i(q_i) - MC_i < 0 \qquad \text{(sólo si } q_i = 0) \qquad ;$$

en tanto que las condiciones “extensivas” de optimización pueden escribirse como:

$MP_i = G(max) - G_{-i}(max) > 0$ (sólo si $q_i > 0$) ;

$MP_i = G(max) - G_{-i}(max) = 0$ (si $q_i = 0$) ;

donde “G_{-i}” son las ganancias del comercio cuando restamos a la iésima empresa del mercado, y “MP_i” es el “producto marginal de la iésima empresa” (definido como la diferencia entre las ganancias del comercio máximas con y sin ella).

Nótese que la idea del “producto marginal de una empresa”, tomada de la literatura sobre equilibrio general[5], tiene una fuerte conexión con la definición de “beneficio marginal” que vimos en la sección anterior. Allí nuestro objetivo era medir el impacto que las decisiones de una empresa tenían sobre los beneficios del resto de la industria. Aquí extendemos dicho concepto para captar también el efecto sobre el excedente del consumidor, y medir así la influencia que la empresa tiene sobre el excedente total generado por la economía. La analogía con el producto marginal de un recurso viene de considerar a cada firma como un “factor de producción” en el proceso de creación de ganancias del comercio.

Para hallar una expresión del producto marginal de una empresa, seguiremos el mismo procedimiento utilizado en la sección anterior con el beneficio marginal. Así, si suponemos que cuando la iésima empresa está fuera del mercado todas las otras cantidades permanecen aproximadamente constantes (i.e, que “$q_j \approx q_j(-i)$”), podemos escribir que:

$$MP_i \approx \left[V_Q\left(q_i + \sum_{j \neq i} q_j\right) - V_Q\left(\sum_{j \neq i} q_j\right)\right] + V_i(q_i) - TC_i(q_i) \qquad .$$

Más aún, si estamos en una situación en la cual la escala de producción de la iésima empresa es pequeña respecto del mercado total, entonces el valor de “v_Q” no cambia demasiado sin la iésima

[5] Véase, por ejemplo, Makowski y Ostroy (1995) u Ostroy y Zame (1994).

empresa. Por ello, la valuación marginal del componente homogéneo puede aproximarse a través del producto de "v_Q" y "q_i", dándose que:

$$\lim_{\left\{\frac{q_i}{\Sigma q_i}\to 0\right\}} MP_i = v_Q \cdot q_i + V_i(q_i) - TC_i(q_i) \qquad .$$

Con la ayuda de las condiciones de Kuhn-Tucker y de los productos marginales que hemos derivado, es posible evaluar la eficiencia relativa de los cuatro tipos de equilibrio descritos en las secciones anteriores. La observación más sencilla que podemos hacer es que la condición de Kuhn-Tucker para las empresas en actividad se asemeja a la condición de equilibrio bajo competencia pura, y es claramente distinta de las halladas para la competencia monopolística, el oligopolio de Cournot y la colusión. Esto no implica, sin embargo, que un equilibrio de competencia pura sea en este caso eficiente, ya que las empresas que producen bajo este tipo de equilibrio no son necesariamente las mismas que elegiría un maximizador de las ganancias del comercio. Para ver esto basta comparar el "filtro" que el mercado usa para determinar cuáles empresas producen (esto es, beneficios no negativos) con el que garantiza la eficiencia (esto es, productos marginales no negativos). Si, por ejemplo, tomamos la expresión derivada para "MP_i" cuando "q_i" es pequeño respecto del mercado como un todo, la comparación entre beneficios y productos marginales nos dice que:

$$MP_i - \Pi_i \approx V_i(q_i) - v_i.q_i > 0 \qquad ;$$

donde el signo positivo proviene del supuesto de concavidad estricta de "V_i".

Esta desigualdad entre beneficios y productos marginales implica que en un equilibrio de competencia pura existen empresas que no están produciendo pero que podrían contribuir a incrementar las ganancias del comercio si lo hicieran. Esta falla del mercado puede interpretarse de distintas maneras. Una explicación posible es que nuestro equilibrio de competencia pura no es verdaderamente "walrasiano", en el sentido de que el consumidor sólo ve los precios de las variedades que se producen realmente (y no el vector completo de los precios de todas las variedades). Otra interpretación tiene que ver con la existencia del problema de externalidad ya mencionado, debido al hecho de que en esta economía la presencia o ausencia de una variedad adicional afecta directamente los beneficios de las restantes empresas y la valuación de las otras variedades por parte del consumidor. Un tercer enfoque, finalmente, está relacionado con la idea de apropiabilidad: la estructura industrial óptima no puede surgir de un equilibrio de competencia pura ya que las empresas no están apropiándose de toda su contribución a las ganancias del comercio (producto marginal), y por lo tanto se ven inducidas a abandonar el mercado aun en casos en los que su presencia sería valiosa.

Para evaluar la eficiencia de los otros tipos de equilibrio, es necesario considerar conjuntamente las condiciones de Kuhn-Tucker y las de los productos marginales derivadas al maximizar las ganancias del comercio. Estas nos dicen que, para cualquier empresa que produce la cantidad socialmente óptima de su variedad diferenciada, debe darse que:

$$v_Q + v_i = MC_i \quad ; \quad v_Q + V_i/q_i \geq AC_i \quad \Rightarrow \quad AC_i - MC_i \leq V_i/q_i - v_i \quad ;$$

donde "$V_i/q_i - v_i$" es positiva por el supuesto de concavidad estricta de "V_i".

Esta condición de eficiencia (que se cumple como igualdad para la empresa marginal) puede ser comparada con las condiciones equivalentes que hemos derivado para nuestros distintos tipos de equilibrios de mercado. La primera conclusión que surge de esta comparación es que el equilibrio de competencia pura no es eficiente, ya que el comportamiento de la empresa marginal implica que "$AC_i - MC_i = 0$" en vez de darse que "$AC_i - MC_i = V_i/q_i - v_i > 0$". Sin embargo, la "brecha marginal óptima" entre costos medios y marginales definida aquí puede ser mayor o menor que la que se obtiene bajo competencia monopolística u oligopolio de Cournot, y esto crea una cierta ambigüedad en nuestro análisis. En principio, ninguna de estas reglas de comportamiento garantiza la eficiencia, ya que en general "$V_i/q_i - v_i$" es distinto de "$-v_{ii}.q_i$" y de "$-(v_{QQ}+v_{ii}).q_i$". Sin embargo, estas medidas pueden resultar una herramienta interesante para evaluar la eficiencia relativa de distintas estructuras de mercado y para analizar la conveniencia de la intervención pública en casos particulares, en los cuales las distintas hipótesis de comportamiento puedan ranquearse de acuerdo con su cercanía respecto del resultado eficiente.

Para concluir nuestro análisis, volvamos al caso en el que todas las empresas son marginales para mostrar la relación entre beneficios y productos marginales. La misma puede enunciarse y probarse a través de la siguiente proposición:

Proposición 5: Si todas las empresas son marginales, entonces -en el nivel de producción que maximiza las ganancias del comercio- el producto marginal de cada empresa es mayor que su beneficio total (i.e, $MP_i > \Pi_i$).

Prueba:

Si todas las empresas son marginales, la maximización de las ganancias del comercio implica que:

$$MP_i = \frac{\partial G}{\partial N} = v_Q \cdot q + V_i(q) - TC_i = 0 \qquad .$$

Combinando esta definición con la de beneficio total, llegamos a que:

$$\Pi_i = v_Q \cdot q + v_i \cdot q - TC_i = MP_i + v_i \cdot q - V_i(q) < 0 \qquad ;$$

donde la desigualdad proviene del supuesto de concavidad estricta de "V_i". Por lo tanto:

$q = \text{argmax } G \Rightarrow \quad MP_i > \Pi_i \qquad$ c.q.d.

2. Extensiones en infinitas dimensiones

2.1. Un continuo de empresas con un número finito de tipos

El modelo finito que utilizamos en las secciones anteriores consideraba un solo consumidor representativo y un número finito de empresas diferenciadas. En esta sección extenderemos su alcance a un contexto de un continuo de agentes, pero mantendremos el mismo número de tipos de empresas y consumidores. Esto implica que ahora nuestro único consumidor representativo se convertirá en un continuo de idénticos consumidores infinitesimales con masa igual a uno, y que nuestras "n" firmas pasarán a ser un conjunto de "n" variedades, cada una de ellas con un continuo de empresas infinitesimales.

Definamos ahora un vector "$r = (r_1, r_2, ..., r_n)$" de masas de empresas para cada posible variedad del producto diferenciado. Las máximas ganancias del comercio para la economía se definen entonces de la siguiente manera:

$$G(r) = \underset{\{q_{ti}\}}{G\,(\max)} = V_Q\left(\sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) + \sum_{t=1}^{n} V_t\left(\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) - \sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} TC_t\,(q_{ti})d\mu \qquad ;$$

donde "q_{ti}" es la densidad de la cantidad producida por la iésima empresa de la variedad "t", "$TC_t(q_{ti})$" es el costo total de dicha empresa, y "μ" es una medida de Lebesgue. Esta medida se define como:

$$\int_{i\in t} d\mu = \mu(t) = r_t > 0 \qquad y \qquad \mu(ti) = 0 \qquad \text{(para toda “t” y toda “i”)} \quad ;$$

lo cual implica que cada empresa individual es infinitesimal (es decir, su medida es cero) pero la masa de cada variedad es positiva.

Las condiciones de Kuhn-Tucker necesarias para un nivel óptimo de producción pueden expresarse del siguiente modo:

$$\frac{\partial G}{\partial q_{ti}} = v_Q + v_t - MC_t\,(q_{ti}) = 0 \qquad (\text{si } q_{ti} > 0) \quad ;$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_{ti}} = v_Q + v_t - MC_t\,(q_{ti}) < 0 \qquad (\text{sólo si } q_{ti} = 0) \quad .$$

Como puede apreciarse, estas condiciones son esencialmente las mismas que rigen para el modelo finito. La definición de los productos marginales, en cambio, sí se modifica, ya que ahora el número de empresas (es decir, su masa) deja de ser una variable discreta y se transforma en una variable continua para cada posible variedad. Más aún, como la función de ganancias del comercio máximas "G(r)" es ahora la suma de varias integrales de Lebesgue, podemos pensar en ella como en una función absolutamente continua, contable y aditiva. Esto nos permite definir al producto marginal de cada empresa infinitesimal de la variedad "t" como la derivada de Radon-

Nikodym de la función de ganancias del comercio máximas evaluada en "t"[6], lo cual nos dice que:

$$MP_t = \frac{\partial G(r)}{\partial \mu}(t) = v_Q \cdot q_{ti} + v_t \cdot q_{ti} - TC_t(q_{ti}) \qquad .$$

Como vemos, esta expresión es ahora exacta en vez de aproximada, ya que la propia idea del continuo implica que la escala de cada empresa individual es infinitesimal con respecto al mercado como un todo. Más aún, el efecto de una empresa sobre la valuación idiosincrática que los consumidores tienen de dicha variedad se ha vuelto también despreciable, y por lo tanto el término que captura dicho impacto en la definición del producto marginal pasa a ser igual a "$v_t.q_t$" en vez de "V_t". Lo que sí se mantiene igual es el criterio que determina cuáles son las variedades óptimas que deben operar en el mercado, el cual prescribe que los productos marginales deben ser no negativos para todas las empresas que producen una cantidad positiva, y cero para todas las que no producen nada.

Si consideramos conjuntamente las condiciones de Kuhn-Tucker y las de producto marginal, resulta posible obtener algunas conclusiones respecto de la densidad de producción y de la masa de empresas en actividad óptimas para cada variedad. Estas conclusiones son las siguientes:

a) Todas las empresas en actividad de la misma variedad deben producir lo mismo (ya que, por convexidad estricta de "VC_t", "$\partial G/\partial q_{ti}$" es igual a cero para un solo valor de "q_{ti}").

b) En las variedades para las cuales "$MP_{ti} > 0$" para alguna "$q_{ti} > 0$", todas las empresas deben estar en actividad.

c) En las variedades para las cuales "$MP_{ti} < 0$" para toda "$q_{ti} > 0$", ninguna empresa debe estar en actividad.

Las condiciones de eficiencia obtenidas pueden compararse con las que surgen en una situación de equilibrio en la cual los consumidores y las empresas toman sus decisiones de manera

[6] Esta aplicación del teorema de Radon-Nikodym sigue el espíritu de la definición de Shilov y Gurevich (1966), capítulo 9. Una manera alternativa de calcular los productos marginales sería utilizar el concepto de derivada direccional de "G(r)" en la dirección del tipo "t". Véase Ostroy y Zame (1994).

descentralizada. En tal caso, la demanda por cada variedad proviene de la maximización del siguiente excedente agregado:

$$S = V_Q\left(\sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) + \sum_{t=1}^{n} V_t\left(\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) - \sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} p_{ti}q_{ti}d\mu \qquad ;$$

la cual implica que:

$$\frac{\partial S}{\partial q_{ti}} = v_Q\left(\sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) + v_t\left(\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) - p_{ti} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_{ti} = p_t = v_Q + v_t \quad .$$

El problema de la empresa individual, en cambio, implica maximizar la siguiente función de beneficios:

$$\Pi_{ti} = p_t \cdot q_{ti} - TC_t(q_{ti}) = \left[v_Q\left(\sum_{t=1}^{n}\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right) + v_t\left(\int_{i\in t} q_{ti}d\mu\right)\right]\cdot q_{ti} - TC_t(q_{ti}) \quad .$$

para la cual las condiciones de optimización son:

$p_t = v_Q + v_t = MC_{ti} \geq AC_{ti}$ (Competencia pura) ;

$p_t = v_Q + v_t = MC_{ti} - v_{tt}.q_{ti}.\mu(ti) \geq AC_{ti}$ (Competencia monopolística) ;

$p_t = v_Q + v_t = MC_{ti} - (v_{QQ} + v_{tt}).q_{ti}.\mu(ti) \geq AC_{ti}$ (Oligopolio de Cournot) .

Pero, como se da que "$\mu(ti) = 0$" para todas las empresas individuales, estas condiciones colapsan con la misma regla de optimización de un tomador de precios que iguala precio con costo marginal mientras que sus beneficios sean no negativos. Cuando hay un continuo de empresas pero un número finito de variedades, por lo tanto, los supuestos de comportamiento del oligopolio de Cournot, la competencia monopolística y la competencia pura nos llevan al mismo equilibrio.

Este equilibrio, además, resulta ser eficiente. Esto puede verse si comparamos simultáneamente las condiciones de Kuhn-Tucker que maximizan "G" y "Π_{ti}", y el beneficio de cada empresa con su producto marginal. Como ambos pares de expresiones son iguales, esto implica que las decisiones privadas acerca de producir o no se toman usando los mismos criterios que garantizan la maximización de las ganancias del comercio. De hecho, la equivalencia entre equilibrio y óptimo es tan fuerte en esta versión de nuestro modelo que puede extenderse también a casos de colusión entre un número finito de empresas. El argumento detrás de esto tiene que ver con que, si la medida de cada empresa individual es cero, entonces la masa total de cualquier posible coalición de un número finito de firmas también es cero. La maximización de los beneficios conjuntos no brinda entonces ninguna ventaja adicional a ningún conjunto finito de empresas que pueda formarse, ya que de cualquier modo su capacidad de influir sobre los precios de mercado resultará nula.

2.2. Un continuo de tipos de empresas

Consideremos ahora otra versión continua de nuestro modelo básico, en el cual el número de tipos de empresas también sea infinito. Los consumidores siguen siendo un continuo de agentes de un único tipo cuya masa es igual a uno, pero las empresas son elementos de un conjunto compacto "$I = [0, r]$", en el cual a cada número real le corresponde un tipo diferente. En este caso, el carácter compacto quiere decir que existe efectivamente una empresa para cada elemento "$i \in I$" y que, para toda secuencia "i^m" que converge a "i", la función "TC_i^m" converge a "TC_i".

En dicho contexto, las máximas ganancias del comercio son:

$$G(r) = G(\max_{\{q_i\}}) = V_Q(\int_I q_i d\mu) + \int_I V_i(q_i) d\mu - \int_I TC_i(q_i) d\mu \quad ;$$

donde "r" es la masa total de empresas y "μ" es una medida uniforme definida de modo tal que:

$$\int_{[a,b]} d\mu = b - a > 0 \quad ; \quad \int_I d\mu = r \quad y \quad \mu(i) = 0 \quad \text{(para toda "i")} \quad .$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker para maximizar las ganancias del comercio son:

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = v_Q + v_i - MC_i = 0 \qquad \text{(si } q_i > 0\text{)} \quad ;$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = v_Q + v_i - MC_i < 0 \qquad \text{(sólo si } q_i = 0\text{)} \quad ;$$

en tanto que el producto marginal de la íesima empresa se define como:

$$MP_i = \frac{\partial G(r)}{\partial \mu}(i) = v_Q\left(\int_I q_i d\mu\right) \cdot q_i + V_i(q_i) - TC_i(q_i) \quad .$$

Nótese que en esta definición suponemos implícitamente que la demanda de cada consumidor es infinitesimal para cada empresa, y que la oferta de cada empresa es infinitesimal para cada consumidor. Además, tomamos como dada la distribución de las empresas entre los distintos tipos, con lo cual el grado de diferenciación de los productos es un dato y no una variable de decisión.

Si definimos el excedente agregado de los consumidores como:

$$S = V_Q\left(\int_I q_i d\mu\right) + \int_I V_i(q_i) d\mu - \int_I [p_i \cdot q_i] d\mu \quad ;$$

su maximización implica que:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = v_Q\left(\int_I q_i d\mu\right) + v_i(q_i) - p_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_i = v_Q\left(\int_I q_i d\mu\right) + v_i(q_i) \quad .$$

A su vez, el problema de maximización de beneficios de la iésima empresa puede expresarse del siguiente modo:

$$\Pi_i(\max_{\{q_i\}}) = p_i \cdot q_i - TC_i = \left[v_Q\left(\int_I q_i d\mu\right) + v_i(q_i)\right] \cdot q_i - TC_i(q_i) \quad ;$$

lo cual nos da las siguientes condiciones de optimización para nuestros cuatro supuestos de comportamiento:

$p_i = v_Q + v_i = MC_i \geq AC_i$ (Competencia pura) ;

$p_i = v_Q + v_i = MC_i - v_{ii}.q_i \geq AC_i$ (Competencia monopolística) ;

$p_i = v_Q + v_i = MC_i - v_{ii}.q_i + v_{QQ}.q_i.\mu(i) \geq AC_i$ (Oligopolio de Cournot) ;

$p_i = v_Q + v_i = MC_i - v_{ii}.q_i + v_{QQ}.\Sigma q_i.\mu(i) \geq AC_i$ (Colusión "finita") .

Como vemos, el hecho de que "$\mu(i) = 0$" implica que la solución de competencia monopolística coincide con la del oligopolio de Cournot y la de colusión finita, pero no es la misma que la de competencia pura. Esto sucede porque ahora cada empresa produce una variedad distinta y, aunque el número de empresas sea infinito, el poder de mercado local surgido de la diferenciación de productos no desaparece.

Usando la lógica de la apropiación, resulta posible obtener una conclusión adicional: en este caso la brecha entre los beneficios y los productos marginales de las empresas aún subsiste. Dicha brecha queda definida por la siguiente desigualdad:

$$MP_i = v_Q \cdot q_i + V_i(q_i) - TC_i(q_i) > v_Q \cdot q_i + v_i \cdot q_i - TC_i(q_i) = \Pi_i \quad .$$

Este es un resultado acerca de la inapropiabilidad de las ganancias del comercio en un entorno de competencia monopolística, el cual resulta independiente del número de consumidores y empresas. El mismo se relaciona directamente con el supuesto de concavidad estricta de la función "V_i", el cual hace que "$V_i - v_i.q_i > 0$"[7].

3. Conclusiones

Las conclusiones básicas de nuestro trabajo pueden resumirse del siguiente modo:

a) La diferenciación de productos puede modelarse como una situación en la cual los

[7] Si las funciones "V_i" fueran lineales, sin embargo, el entorno sería perfectamente competitivo. Este fenómeno es similar al que ocurre en el "modelo de asignación continuo" (*continuous assignment model*), en el cual cada consumidor termina consumiendo sólo una variedad pero en el agregado existe perfecta sustituibilidad entre las distintas marcas. En equilibrio, por lo tanto, cada empresa puede cobrar un precio diferente, pero su función de demanda es perfectamente elástica. Véase Gretsky, Ostroy y Zame (1996).

consumidores valoran separadamente los componentes homogéneos e idiosincráticos de los bienes.

b) Esto nos permite distinguir el poder de mercado local que las empresas poseen debido a su posición monopólica dentro de su propia variedad del poder de mercado global proveniente de la existencia de interacción estratégica o conductas colusivas.

c) Esta distinción nos da la posibilidad de evaluar las características de eficiencia y apropiabilidad de distintos tipos de equilibrio, basados en cuatro supuestos de comportamiento (competencia pura, competencia monopolística, oligopolio de Cournot y colusión).

d) Esta evaluación nos dice que ninguno de dichos equilibrios maximiza las ganancias del comercio, y que esa ineficiencia está directamente relacionada con la brecha que existe entre los beneficios totales, los beneficios marginales y los productos marginales de las empresas.

e) Cuando extendemos nuestro modelo al caso de un continuo de empresas, el poder de mercado global siempre desaparece, pero el poder de mercado local puede sobrevivir si el número de variedades se vuelve infinito.

f) Si ambos tipos de poder de mercado desaparecen, entonces todos los equilibrios convergen hacia una solución de competencia pura que resulta eficiente.

g) Si, en cambio, el poder de mercado local aún subsiste, entonces aparecen los mismos resultados de ineficiencia e inapropiabilidad del modelo finito.

Referencias bibliográficas

Benassy, Jean Pascal. "Monopolistic Competition"; en Hildenbrand, W. y Sonnenschein, H: *Handbook of Mathematical Economics*, vol 4, pgs 1997-2045. Amsterdam, North Holland, 1991.

Eaton, B. C. y Lipsey, Richard. "Product differentiation"; en Schmalensee, R. y Willig, R: *Handbook of Industrial Organization*, vol 1, pgs 723-768. Amsterdam, North Holland, 1989.

Gretsky, Neil; Ostroy, Joseph y Zame, William. "Competition and Manipulation in the Continuous Assignment Model"; UCLA, mimeo, 1996.

Makowski, Louis y Ostroy, Joseph. "Appropriation and Efficiency: A Revision of the First Theorem of Welfare Economics"; *American Economic Review*, vol 85, pgs 808-827, 1995.

Ostroy, Joseph y Zame, William. "Nonatomic Economies and the Boundaries of Perfect Competition"; *Econometrica*, vol 62, pgs 593-635, 1994.

Shilov, G. E. y Gurevich, B. L. *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1966.