Sobre el significado de las constantes lógicas: el caso de la armonía como principio de inversión

Alejandro Adan

El impacto de los hallazgos en el campo de la lógica del eminente Gerhard Gentzen aún no ha sido enteramente dimensionado. Sus reflexiones en torno a la teoría de la deducción a partir de los sistemas de deducción natural y el cálculo de secuentes permitieron pensar una semántica de la demostración y constituyen una perspectiva independiente y novedosa para el análisis de la noción de consecuencia lógica.
La motivación filosófica particular de los sistemas de deducción natural, se centra en la representación precisa de ciertas propiedades estructurales del proceder deductivo en el campo de las matemáticas. A su vez, las derivaciones en los sistemas de deducción natural, en oposición a la producción de teoremas y a la determinación del significado de las constantes en los tradicionales sistemas axiomáticos, permiten construir implicaciones a partir de supuestos y presentan reglas de inferencia en pares que determinan en sus operaciones el significado de las constantes lógicas (Gentzen 1934). Este modo de caracterizar las reglas de inferencia en relación a la operación que realizan fue denominado por Haskell Curry (1960, pp 119-121) como la perspectiva inferencialista. El presente trabajo se inscribe dentro de una investigación mayor sobre el alcance del programa mencionado. Discutiremos las ventajas estratégicas de sobrellevar la objeción de Arthur Prior sobre la perspectiva inferencial del significado de las constantes lógicas y la posibilidad de evitar constantes problemáticas como *"tonk"* (Prior 1960, pp. 38-39) a partir del análisis del concepto de armonía como principio de inversión de Dag Prawitz.

La *"validez analítica"* de las reglas de inferencia y particularmente el modo de establecer el significado de las constantes lógicas fue criticado irónicamente por Prior en su inquietante artículo "*The runabout inference-ticket*". Un antecedente a la reconstrucción de la perspectiva inferencialista criticada por Prior en el mencionado artículo lo encontramos en Rudolf Carnap (Carnap 1934):

"Hasta ahora, al construir un lenguaje, el procedimiento usual ha consistido en asignar en primer lugar significado a los símbolos lógico-matemáticos fundamentales y a continuación considerar qué oraciones e inferencias han de ser vistas como correctas en concordancia con los significados que se asignaron. Como la asignación de significado se expresaba con palabras, y son, en consecuencia, inexactas, las conclusiones a las que se arriba por ese método no podrán ser de otra forma que inexactas y ambiguas. Esta conexión solo resultaría clara si se invirtiera el camino: los postulados y las reglas de inferencia pueden elegirse arbitrariamente pero esta elección determinará el significado que habrá de asignarse a los símbolos lógicos fundamentales".

La posibilidad de producir arbitrariamente reglas de inferencia es la clave de su crítica.
Comienza por caracterizar el caso de una constante lógica simple como el caso de la conjunción. Sin embargo, continúa, si alguien nos preguntara por el significado de la conjunción, bastará, primeramente, por mostrarle las reglas que la determinan y simplemente referir que cualquiera que ha aprendido a realizar estas inferencias conoce el significado de dicha constante. Así, el significado será inherente a la posibilidad de realizar estas inferencias y las cuestiones sobre la misma quedan fuera de lugar.

ISSN 2250-4494 - web http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

Pero la indeterminación en la definición de las constantes lógicas posibilita la construcción de otras reglas problemáticas como las de la seudoconectiva "*tonk"*. Así pues, Prior , realiza una crítica por el absurdo del mecanismo de construcción determinado, en principio, por Carnap. Propone, entonces, una nueva conectiva *"tonk*" y establece las condiciones inferenciales que determinan su significado:

1)

(Introducción *"tonk"*)

$$\frac{A}{A \text{ “}\textit{tonk}\text{” } B}$$

2)

(Eliminación *"tonk"*)

$$\frac{A \text{ “}\textit{tonk}\text{” } B}{B}$$

Por ello, siendo que *"tonk"* establece reglas claras de introducción y eliminación que determinan su significado, según Prior, no podría dar lugar a objeción alguna. Puesto que bastaría con indicar a quien cuestione dicha adición, que al igual que en el caso de la conjunción, la seudoconstante *"tonk"* se encuentra prolijamente determinada en virtud de sus reglas y cualquiera que realice inferencias de este tipo conoce su significado. Por lo tanto, el establecimiento del significado de las constantes lógicas, sin sobrellevar estas críticas, pareciera que debería quedar por fuera del programa inferencialista. Es obvio que un sistema que incluya constantes como "*tonk*" permite inferir cualquier fórmula, lo que es claramente inapropiado.
Nuel D. Belnap considera que la aparición de tal constante *"tonk"*, o de otras similares, transgreden supuestos sistémicos previamente asumidos. Existen un conjunto de reglas sistémicas que definen la noción de consecuencia lógica: *reflexividad, permutación, contracción, monotonía y corte* y las constantes lógicas deben preservar esas condiciones sistémicas de la teoría lógica. La negligencia de seudoconstantes como "*tonk"* se evidenciaría en la posibilidad de una nueva regla sistémica, transgresora de las anteriores, que permite la derivación irrestricta de cualquier fórmula, a saber:

B *es una consecuencia lógica de* A

Para Belnap un conjunto de reglas serán adecuadas para un sistema L si y sólo si ese conjunto de reglas preserva extensionalmente las reglas originales presupuestas inherentes al sistema. Como la regla última metateórica resultante de adicionar *"tonk"* no preserva la extensión original del sistema, resulta como consecuencia que *"tonk"* no debería aceptarse como una adición extensional conservativa. Dummett caracteriza este método constrictivo para la generación de constantes lógicas como armonía extensional conservativa o armonía total (Dummett, 1991 pp. 200-220). El conjunto de las

constantes lógicas tienen la propiedad de armonía respecto del conjunto de las reglas que condicionan al sistema.
Ahora bien, esta restricción a la posibilidad de crear seudoconstantes como "*tonk*" no es útil a los fines de rescatar la perspectiva inferencialista, en la medida que no restringe ni determina más acabadamente la producción de reglas de inferencia. Una clave para esta problemática estaba en alguna medida ya establecida en la propuesta seminal de Gentzen. Según Gentzen la relación entre las reglas de introducción y eliminación no se liberaban a lo arbitrario como parecía establecer Carnap:

"*Las introducciones representan, por así decirlo, las definiciones de los símbolos en cuestión, y las eliminaciones son, al final de cuentas, tan sólo consecuencias de aquellas"*[1] (Gentzen 1934, p. 189).

Esta relación de fundamentación entre las reglas de introducción y las reglas de eliminación para cada constante lógica es la piedra fundamental para la construcción de la *Teoría Semántica de la Demostración* y nos permite ver con mayor detalle la importancia filosófica del programa de la deducción natural.

Considerando estos conceptos fundamentales, Prawitz propone una estrategia alternativa para evadir la crítica de Prior, consistente con la idea de que las constantes lógicas pueden justificarse *per se*, sin recurrir a propiedades externas. La respuesta que ofrece Prawitz tiene el supuesto inicial que la determinación del significado de las constantes lógicas y de la noción de consecuencia lógica debe fundamentarse en el concepto de demostración más que en el concepto de verdad, como se propone en la *Teoría de Modelos* de Tarski (Tarski, 1936).

Recordemos las características más importantes de los sistemas de deducción natural y sus componentes:

1. Derivaciones a partir de supuestos (en oposición a la utilización de axiomas)
2. Separación de las constantes lógicas por regla de inferencia
3. División entre reglas de introducción y eliminación de cada constante.

Los supuestos abiertos son argumentos de una derivación que determinan otro argumento resultante. Llamamos a una derivación abierta cuando posee argumentos abiertos. Por ejemplo,

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

En cambio, una derivación estará cerrada en la medida de no depender de argumentos abiertos y variables libres.

En el contexto del ejemplo comprendemos el símbolo □ como un argumento válido que justifica A y B.

1 Gentzen, Gerhard. 1934. *Untersuchungen über das logische Schließen.* Mathematische Zeitschrift 39, pp. 176-210 y 405-431. Trad. inglesa en The Collected Papers of Gerhard Gentzen, comp. por M. E. Szabó. Amsterdam, North-Holland, 1968.

$$\frac{\begin{matrix}\square_1 \\ \square_2 \\ A \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

A partir de estos conceptos, Prawitz, caracteriza a los argumentos canónicos. Un argumento es canónico si concluye con la aplicación de una regla de introducción y contiene argumentos válidos que justifican las premisas. Los argumentos canónicos se definen respecto de la validez de los mismos de modo recursivo. Un argumento cerrado es válido en la medida en que pueda reducirse a un argumento canónico o en la medida en que el mismo constituya un argumento canónico. Un argumento abierto es válido si pueden reemplazarse sus supuestos por argumentos válidos.

Prawitz reconoce dos propiedades metalógicas fundamentales de los sistemas de deducción natural:

1. Reducción: Puede eliminarse a todo rodeo resultante de la aplicación de una regla de introducción seguida por una eliminación.
2. Normalización: Al eliminar completamente los rodeos las derivaciones adquieren su forma normal.

Estas propiedades del sistema dan forma a la afirmación inicial de Gentzen en la medida que las reglas de introducción conforman argumentos canónicos a los cuales las reglas de eliminación pueden reducirse. Consideremos más de cerca el ejemplo de las reglas de la conjunción.

Regla de introducción cerrada

$$\frac{\begin{matrix}\square_1 \\ \square_2 \\ A \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

Por tanto, la regla de introducción no necesita explicación o más bien se autojustifica en la medida en que representa un argumento canónico.

Regla de eliminación cerrada

$$\frac{\begin{matrix}\square_3 \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}$$

En cuanto a la regla de eliminación para poder establecerla como válida deberíamos poder reducirla a un argumento canónico. $\square_2$ representa un argumento canónico para $A \wedge B$. Por ello o es un argumento canónico o se reduce a un argumento canónico.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\square_4 \quad \square_5 \\ A \quad B\end{array}}{A \wedge B}$$

En consecuencia, podemos construir un argumento canónico para B, puesto que $\square_5$ es un argumento canónico para B. Un corolario de este procedimiento es que las reglas de eliminación son accesorias en la medida en que son reducibles a las introducciones correspondientes: lo que indicamos como el programa original de Gentzen. Este procedimiento constituye lo que se ha dado en llamar armonía por principio de inversión.

Como veremos, este mecanismo sirve para eliminar constantes indeseables como *"tonk"*. Puesto que para que las reglas de *"tonk"* constituyan una constante lógica deberían o bien ser un argumentos canónicos o bien ser reducibles a argumentos canónicos.
Consideremos la regla de eliminación en forma cerrada:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\square_1 \\ A \text{ "}\mathit{tonk}\text{" } B\end{array}}{B}$$

Como se observa, no hay ningún mecanismo reductivo que nos permita arribar a B. Por tanto, es claro que la regla de eliminación de *"tonk"* no tiene armonía respecto de su regla de introducción.

Hemos ofrecido hasta aquí el desarrollo del concepto de armonía propio de la *Teoría Semántica de la Demostración* como estrategia para eliminar la posibilidad de seudoconstantes como *"tonk"*. Este procedimiento permite caracterizar las reglas de inferencia desde las reglas operativas del sistema. Pero podríamos preguntarnos entonces ¿Cuál es la noción de consecuencia lógica subyacente al concepto de armonía como principio de inversión?
Como todos saben la regla de doble negación (¬¬) constituye un principio de la lógica clásica. Pero en términos de este concepto de armonía como principio de inversión, de la fórmula ¬¬A no se sigue de modo válido A. El caso es que en los sistemas de deducción natural, tal como los caracteriza Prawitz, ¬A se define en términos intuicionistas en la regla de introducción de la negación:

$$\dfrac{\begin{array}{c}A \\ \square\end{array}}{\neg A}$$

Esto determina la problemática de la caracterización de la regla de doble negación a partir de la complejidad de construir una derivación válida de A de la fórmula (A □ □)□ □, que expresaría la ¬¬A . Pero claramente no disponemos de la capacidad deductiva para construir un argumento canónico para A que responda a los criterios establecidos por Prawitz. Es por ello que de acuerdo a la formulación de la armonía como principio de inversión en tanto criterio para la determinación de la noción de consecuencia lógica obtenemos como corolario obligado que solo la lógica intuicionista[2] responde a los estándares dispuestos por Prawitz, mientras que la lógica clásica quedaría afuera.

Bibliografía

Belnap, Nuel D. Jr. "“Tonk”, Plonk, and Plink", Analysis, 22, pp 130-134, 1961.
Carnap, Rudolph. “Logische Syntax der Sprache”. (English translation, The Logical Syntax of Language. London, Kegan Paul, 1937.
Curry H.B. 1960, “The inferential approach to logical calculus”, Logique & Analyse, n.s., 3, pp. 119-136.
Dummett, Michael. 1978. “The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic”. En Truth on Other Enigmas, Londres, Duckworth, pp. 215-247.
Dummett, Michael. 1991. The Logical Basis of Metaphysics. Cambridge (Mass.), Harvard University Press.
Gabbay D. Comp. 1994. What is a Logical System? Oxford, Clarendom Press .
Gentzen, Gerhard. 1934. “Untersuchungen über das logische Schließen”. Mathematische Zeitschrift 39, pp. 176-210 y 405-431. Trad. inglesa en The Collected Papers of Gerhard Gentzen, comp. por M. E. Szabó. Amsterdam, North-Holland, 1968.
Kreisel, Georg. 1971. Reseña de The Collected Papers of Gerhard Gentzen, comp. por M. E. Szabó. En The Journal of Philosophy 68, pp. 238-265.
Kahle, Reinhard & Peter Schroeder-Heister. 2006. “Introduction: Proof-Theoretic Semantics”. Synthese 148, pp. 503-506.
Kutschera, Franz von. 1968. “Die Vollständigkei des Operatorensystems für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik”. Archiv für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 11 (1968), pp.
3-16. Repr. en Ausgewählte Aufsätze, Paderborn, Mentis, 2004, pp. 31- 46. Legris, Javier. 1994. “Ideas acerca de los conceptos de demostración y de verdad matemática”. Análisis Filosófico 14 , pp. 149-159.
Legris, Javier. 1999. “Observaciones sobre el desarrollo de la teoría de la demostración y su relevancia para la filosofía de la lógica”. En Revista Patagónica de Filosofía 1 (1999), pp. 115-132.
Legris, Javier. 2008. “Intención y conflicto: sobre la interpretación de la negación en el intuicionismo matemático”. En O que nos faz pensar. Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio 23 (2008), pp. 77-89.
Negri, S. ; Von Plato, J. 2001. Structural Proof Theory. Cambridge University Press.
Pelletier, F. J. 1999."A Brief History of Natural Deduction". History and Philosophy of Logic vol. 20 (1999) pp. 1-31.
Prawitz, Dag. 1965. “Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study”. Stockholm. AWE.
Prawitz, Dag. 1977. “Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic”. Theoria 43, pp. 2-40.

2 Además de la lógica intuicionista, se podría determinar la lógica minimal.

Prawitz, Dag. 1978. “Proofs and the Meaning and Completeness of the Logical Constants”. En Essays on Mathematical and Philosophical Logic, comp. por J. Hintikka, I. Niiniluoto & E. Saarinen. Dordrecht, Reidel, pp. 25-40.
Prawitz, Dag. 1998. “Truth and Objectivity from a Verificacionist Point of View”. En Truth in Mathematics, comp. por H. G. Dale et al. Oxford, Clarendon Press, pp. 41-51.
Prawitz, Dag. “Logical Consequence from a Constructive Point of View,” through p. 671-695. In Stewart Shapiro “The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic, Oxford University Press, 2001.
Prior, Arthur. "The runabout inference ticket." Analysis, 21, pp 38-39, 1960.
Schröder-Heister, Peter. 1991. “Uniform Proof-Theoretic Semantics for Logical Constants” (abstract), Journal of Symbolic Logic 56 (1991), p. 1142.
Von Plato, Jan. 2007. From Hilbert's program to Gentzen's program, in E. Menzler-Trott, Logic's Lost Genius, pp. 365-402, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.