



Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

SOBRE LOS GRAFOS VPT Y LOS GRAFOS EPT

Autor:

María Pía Mazzoleni

Director:

Dra. Marisa Gutierrez

Co-Director:

Dra. Liliana Alcón

Tesis para obtener el título de

DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, AREA MATEMÁTICA

A mis padres
Susana y Alfredo,
mi hermana
Agus,
mis abuelos
Lila y Ruben,
y mi abuela de corazón
Margot.

Agradecimientos

A mis papás, Susana y Alfredo. Por ser mis principales apoyos, por el esfuerzo que hicieron para ayudarme a cumplir mis objetivos.

A mi hermana, Agus. Por ser mi compañera incondicional. Por todos los momentos compartidos y por escucharme siempre.

A mi novio, Mariano. Por estar a mi lado durante todos estos años y acompañarme en cada momento.

A Vale, por tantos años de amistad, por mostrarse siempre interesada en mis cosas y estar siempre que lo necesité.

A Marisa y Liliana por haberme guiado en el desarrollo de este trabajo, por el aporte de su experiencia y conocimiento. Por haberme brindado su tiempo y también su confianza. Por su calidad humana.

A CONICET, por haberme provisto de una Beca de Posgrado sin la cual este trabajo no hubiese sido posible.

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata, por haberme permitido desarrollar las tareas correspondientes a este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	7
3. Reconocimiento de los grafos vértice-intersección de caminos en árboles de grado acotado	14
3.1. Resultados básicos	15
3.2. Caracterización de $[h,2,1]$, para $h \geq 3$	18
3.3. Complejidad	25
3.3.1. Una subclase que es reconocible en tiempo polinomial .	28
4. Caracterización de los grafos $[h,2,1]$ por subgrafos inducidos prohibidos minimales	33
4.1. Preliminaries	34
4.2. Condiciones necesarias para grafos VPT que son minimales no- $[h,2,1]$	36
4.3. Construyendo grafos minimales no- $[h,2,1]$	46
4.4. Caracterización de los grafos minimales no- $[h,2,1]$	47

5. Una condición necesaria para grafos EPT y una nueva familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales	50
5.1. Resultados básicos sobre cliques en grafos EPT	52
5.2. Una condición necesaria para grafos EPT	54
5.3. Nuevos subgrafos prohibidos minimales para la clase EPT . .	56
6. Grafos EPT en árboles de grado acotado	61
6.1. Resultados conocidos	61
6.2. Nuestros resultados	63
7. Conclusiones y trabajo futuro	68
Bibliografía	70

Capítulo 1

Introducción

El **grafo de intersección** de una familia de conjuntos es un grafo cuyos vértices son los miembros de la familia y la adyacencia es definida por la intersección no vacía de los correspondientes miembros. Los grafos de intersección son bastante conocidos y muy estudiados. Un trabajo dedicado a las clases de grafos de intersección es [30], donde se puede encontrar una gran colección de resultados.

Algunas clases de grafos definidas como intersección son hereditarias y pueden ser caracterizadas por subgrafos inducidos prohibidos minimales. Los elementos de las familias y las propiedades que las definen aparecen en varios contextos, modelando diferentes situaciones, inclusive de la vida real [30], lo que es un incentivo adicional para el estudio de estas clases.

Ejemplos clásicos son los grafos de intervalos y los grafos cordales.

Un **grafo de intervalos** es el grafo de intersección de una familia de intervalos en la recta real, o, en forma equivalente, el grafo vértice intersección de una familia de subcaminos de un camino. Llamamos **Intervalos** a la clase

formada por los grafos de intervalos. Un **grafo cordal** es un grafo sin ciclos inducidos de longitud al menos cuatro. Llamamos **Cordal** a la clase formada por los grafos cordales. Gavril probó que un grafo es cordal si y sólo si es el grafo vértice intersección de una familia de subárboles de un árbol [13]. Ambas clases han sido cuidadosamente estudiadas en la literatura. En [7] encontramos un resumen sobre las diferentes clases de grafos.

Con el fin de definir nuevas clases de grafos representadas por subárboles, se imponen condiciones en los árboles, subárboles y en el tamaño de la intersección [25, 26].

Sean h , s y t enteros positivos; una **(h,s,t)-representación** de un grafo G consiste de un árbol huésped T y una colección $(T_v)_{v \in V(G)}$ de subárboles de T , tal que:

1. el grado máximo de T es a lo sumo h ;
2. todo subárbol T_v tiene grado máximo a lo sumo s ;
3. dos vértices v y v' son adyacentes en G si y sólo si los correspondientes subárboles T_v y $T_{v'}$ tienen al menos t vértices en común en T .

La clase de grafos que tiene una (h, s, t) -representación es denotada **[h,s,t]**.

Cuando no hay restricción en el grado máximo de T o en el grado máximo de los subárboles, usamos $h = \infty$ y $s = \infty$ respectivamente. De ahí que, $[\infty, \infty, 1] = \text{Cordal}$ y $[2, 2, 1] = \text{Intervalos}$. Las clases $[\infty, 2, 1]$ y $[\infty, 2, 2]$ son llamadas **VPT** (vertex intersection graph of paths in a tree) y **EPT** (edge intersection graph of paths in a tree) respectivamente en [15]; y **UV** y **UE**, respectivamente en [31].

VPT y EPT son clases incomparables de grafos, pues por el ejemplo el grafo A_4 dado en la Figura 3.6 pertenece a VPT-EPT y el ciclo inducido C_4 pertenece a EPT-VPT. Sin embargo, cuando el grado máximo del árbol huésped es tres la clase de los grafos VPT coincide con la clase de los grafos EPT.

Los grafos VPT son útiles en muchas áreas, entre las cuales cabe destacar la genética, arqueología y ecología.

Los grafos EPT son usados en aplicaciones de redes, donde el problema de planificación de llamadas no dirigidas en una red que es un árbol es equivalente al problema de colorear un grafo EPT. La red de comunicación está representada como un grafo no dirigido de interconexión, donde cada arista es asociada con una conexión física entre nodos. Una llamada no dirigida es un camino en la red. Cuando la red es un árbol, este modelo es claramente una representación EPT. Colorear el grafo EPT de forma tal que dos vértices adyacentes tengan distintos colores, significa que llamadas no dirigidas que comparten una conexión física tienen que planificarse en distintos momentos.

En los últimos años, el estudio de las clases $[h, s, t]$ ha merecido varias publicaciones en la literatura. En [12], el mínimo t tal que un grafo dado pertenece a $[3, 3, t]$ es estudiado. En [32], se muestra que $[3, 3, 1] = \text{Cordal}$. En [21], los $[4, 4, 2]$ grafos son caracterizados y se da un algoritmo polinomial para su reconocimiento. En [20] y [11] respectivamente, las clases $[4, 2, 2]$ y $[4, 3, 2]$ son estudiadas. Reconocimiento, coloración y algunos otros problemas clásicos en la clase $[\infty, 2, t]$ son tratados en [18]. La relación entre diferentes clases de grafos de intersección de caminos en un árbol es analizada en [19].

En [14, 33], se muestra que el problema de reconocer a los grafos VPT es polinomial. Por otro lado, el reconocimiento de los grafos EPT es un problema NP-completo [15].

Esta Tesis está organizada de la siguiente forma:

El Capítulo 2 contiene definiciones que serán utilizadas en los capítulos siguientes y que son necesarias para entender el texto.

En el Capítulo 3 nos enfocamos en las clases $[h, 2, 1]$ para cualquier $h \geq 3$ fijo; éstas son todas subclases de VPT. Caracterizamos a los grafos $[h, 2, 1]$ usando el número cromático. Mostramos que el problema de decidir si un grafo VPT dado pertenece a $[h, 2, 1]$ es NP-completo, mientras que el problema de decidir si el grafo dado pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ es NP-difícil. Ambos problemas permanecen difíciles aún cuando nos restringimos a la clase $VPT \cap \text{Split}$. Adicionalmente, presentamos una subclase no trivial de $VPT \cap \text{Split}$ en la cual estos problemas son polinomiales. El caso $h = 2$ no es considerado porque $[2, 2, 1] = \text{Intervalos}$. Nuestros resultados se aplican para cualquier $h \geq 3$ fijo, pueden ser vistos como una generalización del caso $h = 3$ el cual coincide con la clase $[3, 2, 1] = [3, 2, 2] = VPT \cap EPT = EPT \cap \text{Cordial}$ considerada en [15, 35].

Las clases $[h, 2, 1]$, con $h \geq 2$, son cerradas por subgrafos inducidos, de ahí que cada una puede ser caracterizada por una familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales. Tal familia es conocida sólo para $h = 2$ [28] y hay algunos resultados parciales para $h = 3$ [9]. En este Capítulo asociamos los subgrafos inducidos prohibidos minimales para $[h, 2, 1]$ que son VPT con los grafos (color) críticos. Describimos cómo obtener subgrafos inducidos prohibidos minimales a partir de los grafos críticos, más aún, mostramos que

la familia de grafos obtenida usando nuestro procedimiento es exactamente la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para $[h, 2, 1]$ que son VPT. Esta familia junto con la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para VPT [24, 29], es la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$.

En el Capítulo 4 caracterizamos la clase $[h, 2, 1]$ por subgrafos inducidos prohibidos minimales para cada $h \geq 3$ fijo. Cabe destacar que, tomando $h = 3$, obtenemos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase $\text{VPT} \cap \text{EPT} = \text{EPT} \cap \text{Cordial} = [3, 2, 2] = [3, 2, 1]$ (ver [15]).

En el Capítulo 5 damos una nueva condición necesaria para ser un grafo EPT. Para esto nos basamos en la estructura de los cliques de un grafo EPT. Además, encontramos una nueva familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT.

En el Capítulo 6 nos enfocamos en los grafos EPT que pueden ser representados en un árbol con grado acotado. Respondemos negativamente una pregunta que Golumbic, Lypshteyn y Stern dejaron abierta en [19], basándonos en la representación EPT que tienen los ciclos de un grafo EPT.

Finalmente, en el Capítulo 7, damos algunas conclusiones y analizamos cuáles son los trabajos futuros que nos gustaría realizar.

h	$[h,2,1]$	$[h,2,2]$
1	--	--
2	P	P
3	NP	NP
4	NP	?
⋮	⋮	⋮
∞	P	NP

Figura 1.1: Esta tabla muestra cuál es la complejidad de reconocer a los grafos que pertenecen a las clases $[h, 2, 1]$ y $[h, 2, 2]$ para cualquier $h \geq 2$ fijo.

Capítulo 2

Preliminares

Muchas de las definiciones y notaciones adoptadas en este trabajo son consideradas estándar en Teoría de Grafos, y serán utilizadas sin ninguna introducción previa. En general, tales definiciones pueden ser encontradas en los libros de J. Bondy y U. Murty y de T. McKee y F. McMorris [6, 30]. Las definiciones y notaciones que no son consideradas estándar son introducidas en cada capítulo. Es decir, cada capítulo tiene una pequeña introducción del asunto específico al que se refiere.

Un **grafo** es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito no vacío de **vértices** y E es un conjunto de pares ordenados de vértices distintos llamados **aristas**. Si G es un grafo, $V(G)$ y $E(G)$ denotan el **conjunto de vértices** y **de aristas**, respectivamente. Si $|V(G)| = 1$, G es llamado **trivial**. Una arista $e = uv$ es **incidente** en los vértices u y v , que son los **extremos** de e . Un **vértice** u es **adyacente** a un vértice v en G si u y v son extremos de una misma arista de G . En este caso también decimos que u y v son **vecinos** en G . Dos **aristas** son **adyacentes** cuando tienen algún extremo en común.

El **vecindario abierto** de un vértice v , representado por $N_G(v)$, es el conjunto de vértices adyacentes a v . El **vecindario cerrado** $N_G[v]$ es $N_G(v) \cup \{v\}$. Un vértice v es **aislado** cuando $N(v) = \emptyset$ y es **universal** cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$. El **grado** de v , denotado por $d_G(v)$, es el cardinal de $N_G(v)$. Para simplificar, cuando no haya confusión, omitimos el subíndice G y escribimos $N(v)$, $N[v]$ o $d(v)$. Los vértices $u, v \in V(G)$ son llamados **gemelos verdaderos** si $N[u] = N[v]$.

Dos grafos G y H son **isomorfos** si existe una biyección ψ de $V(G)$ en $V(H)$ tal que la arista $uv \in E(G)$ si y sólo si $\psi(u)\psi(v) \in E(H)$. La función ψ es un **isomorfismo** de G en H .

Un grafo H es un **subgrafo** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si G es un grafo y $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$, entonces el **subgrafo inducido** de G por X es un subgrafo H , tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en X . El subgrafo inducido por X es denotado por $G[X]$. Decimos que G tiene al grafo $G[X]$ como subgrafo inducido. H es un **subgrafo inducido prohibido** o simplemente **subgrafo prohibido** para una clase de grafos \mathcal{C} cuando todo grafo G , que tiene al grafo H como subgrafo inducido no pertenece a la clase \mathcal{C} . Decimos que H es un **subgrafo prohibido minimal** para una clase de grafos \mathcal{C} si H es un subgrafo prohibido para \mathcal{C} y $H - v \in \mathcal{C}$ para todo $v \in V(H)$.

Decimos que G es un grafo **sin el grafo H** cuando G no tiene a H como subgrafo inducido.

Un **camino** $P = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ es una secuencia no vacía de vértices distintos de G tal que, para todo i , $1 \leq i \leq k$, existe una arista $v_{i-1}v_i$ en G . Decimos entonces que P es un camino entre v_0 y v_k y que P pasa por

los vértices y por las aristas que tienen ambos extremos consecutivos en P . El entero k determina la **longitud** de P . Cuando fuera más conveniente, un camino P puede ser expresado por la secuencia $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ de las aristas por donde pasa. En cualquier caso, v_0 y v_k son los **extremos** de P .

Dos caminos P_1 y P_2 **comparten una arista** e si P_1 y P_2 pasan por e . En este caso también decimos que P_1 y P_2 tienen **intersección en aristas**.

Un **ciclo** $C = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ es una secuencia no vacía de vértices donde $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ es un camino, $v_{k-1}v_k \in E(G)$ y $v_0 = v_k$. Un **ciclo es par o impar** cuando su longitud k es par o impar, respectivamente. La **distancia** $d(u, v)$ entre dos vértices u y v de G es la longitud del menor camino entre u y v en G .

Un grafo G es **conexo** si entre cualquier par de vértices distintos de G existe un camino. Una **componente conexa** de G es un subgrafo conexo maximal de G . Un grafo G es **disconexo** cuando no es conexo. Los grafos usados en este trabajo serán conexos, a menos que se diga lo contrario.

Un **árbol** es un grafo conexo que no posee ciclos. Un subgrafo conexo de un árbol es llamado un **subárbol**. Un vértice de grado uno en un árbol es llamado una **hoja**. Decimos que el **árbol es de grado h** cuando el grado máximo de sus vértices es igual a h . Una arista de un árbol T es una **arista pendiente** si uno de sus extremos es una hoja de T .

Un **grafo G es completo** si cualesquiera dos vértices distintos de G son adyacentes. Excepto por isomorfismos, existe un único grafo completo con n vértices y tal grafo es denotado por K_n .

Si G es un grafo, el **complemento de G** , denotado por \overline{G} , es un grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y tal que dados dos vértices distintos u y

v , se tiene que $uv \in E(\overline{G})$ si y solamente si $uv \notin E(G)$.

Un **conjunto completo** es un subconjunto de vértices mutuamente adyacentes. Un **clique** es un conjunto completo maximal. La familia de cliques de G es denotada por $\mathcal{C}(G)$. Un **conjunto estable** es un subconjunto de vértices no adyacentes de a pares.

Sea $C = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ un ciclo en G y $e = uv \in E(G)$, entonces e es una **cuerda** en C si u y v son vértices de C , $e \neq v_{i-1}v_i$ para todo i , $1 \leq i \leq k$. Un ciclo de longitud k sin cuerdas es denotado por C_k . Un grafo G es **cordal** si todo ciclo C en G , con por lo menos cuatro vértices, tiene una cuerda.

Una **coloración** de $V(G)$ es una coloración de los vértices de G y tal que vértices adyacentes reciben distinto color. El **número cromático** de un grafo G , denotado por $\chi(G)$, es el menor número de colores en una coloración de G .

Un grafo G es **perfecto** cuando el número cromático de cada subgrafo inducido es igual al tamaño del mayor clique de ese subgrafo. Se sabe que todo grafo cordal es perfecto [17].

Sea P una familia de caminos en un árbol huésped T . Se definen dos tipos de grafos de intersección con el par $\langle P, T \rangle$, llamados grafos **VPT** y grafos **EPT**.

El **grafo arista-intersección de P**, $EPT(P)$, tiene vértices que corresponden a los miembros de P , y dos vértices son adyacentes en $EPT(P)$ si y sólo si los correspondientes caminos en P comparten al menos una arista (dos vértices adyacentes) en T . Un grafo no dirigido G es llamado un **grafo arista-intersección de caminos en un árbol (EPT)** si $G =$

$EPT(P)$ para algún P y T , y $\langle P, T \rangle$ es llamada una representación EPT de G . Cuando el grado máximo del árbol huésped es h la representación EPT de G es llamada una **(h,2,2)-representación** de G . La clase de grafos que admite una $(h, 2, 2)$ -representación se denota $[h, 2, 2]$. Notar que la clase de los grafos EPT es la unión de las clases $[h, 2, 2]$ para $h \geq 2$. De ahí que, $EPT = [\infty, 2, 2]$. Los grafos EPT son usados en aplicaciones de redes, donde el problema de planificación de llamadas no dirigidas en una red que es un árbol es equivalente al problema de colorear un grafo EPT. La red de comunicación está representada como un grafo no dirigido de interconexión, donde cada arista es asociada con una conexión física entre nodos. Una llamada no dirigida es un camino en la red. Cuando la red es un árbol, este modelo es claramente una representación EPT. Colorear el grafo EPT de forma tal que dos vértices adyacentes tengan distintos colores, significa que llamadas no dirigidas que comparten una conexión física tienen que planificarse en distintos momentos.

Similarmente, el **grafo vértice-intersección de P**, $VPT(P)$, tiene vértices que corresponden a los miembros de P , y dos vértices son adyacentes en $VPT(P)$ si y sólo si los correspondientes caminos en P comparten al menos un vértice en T . Un grafo no dirigido G es llamado un **grafo vértice-intersección de caminos en un árbol (VPT)** si $G = VPT(P)$ para algún P y T , y $\langle P, T \rangle$ es llamada una representación VPT de G . Cuando el grado máximo del árbol huésped T es h , la representación VPT de G es llamada una **(h,2,1)-representación** de G . La clase de grafos que admite una $(h, 2, 1)$ -representación se denota $[h, 2, 1]$. Notar que la clase de los grafos VPT es la unión de las clases $[h, 2, 1]$ para $h \geq 2$. De ahí que $VPT = [\infty, 2, 1]$. Los grafos

VPT son útiles en muchas áreas, entre las cuales cabe destacar la genética, arqueología y ecología.

Decimos que una familia satisface la **propiedad de Helly** cuando para toda subfamilia cuyos miembros se intersectan dos a dos se tiene que la intersección de esta subfamilia es no vacía.

Dado que una familia de caminos en un árbol huésped T satisface la propiedad de Helly [8], si C es un clique de G entonces existe un vértice q de T tal que $C = \{v \in V(G) \mid q \in V(P_v)\}$. Por otro lado, si q es cualquier vértice del árbol huésped T , el conjunto $\{v \in V(G) \mid q \in V(P_v)\}$, denotado por \mathbf{C}_q , es un conjunto completo de G , pero no necesariamente un clique. Para evitar este inconveniente, se introduce la noción de representación llena en q .

Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT de G y sea q un vértice de grado h de T . Las componentes conexas de $T - q$ son llamadas las **ramas de T en q** . Un camino está **contenido** en una rama si todos sus vértices son vértices de la rama. Notar que si $N_T(q) = \{q_1, q_2, \dots, q_h\}$ entonces T tiene exactamente h ramas en q . La rama que contiene a q_i se denota T_i ; decimos que q_i es la **raíz** de T_i . Las ramas T_i y T_j están **unidas** por un camino $P_v \in \mathcal{P}$ si ambos vértices q_i y q_j pertenecen a $V(P_v)$.

Definición 2.1 *Una representación VPT, $\langle \mathcal{P}, T \rangle$, es **llena en un vértice q de T** si, para cualesquiera dos ramas T_i y T_j de T en q , existen caminos $P_v, P_w, P_u \in \mathcal{P}$ tal que:*

1. *las ramas T_i y T_j están unidas por P_v ;*
2. *P_w está contenido en T_i e intersecta a P_v en al menos un vértice; y*

3. P_u está contenido en T_j e intersecta a P_v en al menos un vértice.

Una representación $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es **llena** si es llena en todo $q \in V(T)$ con $d_T(q) \geq 4$.

Una consecuencia clara de la definición previa es que si $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es llena en un vértice q de T , con $d_T(q) = h \geq 3$, entonces C_q es un clique de G .

Capítulo 3

Reconocimiento de los grafos vértice-intersección de caminos en árboles de grado acotado

Los resultados presentados en este Capítulo fueron publicados en [3].

En este Capítulo, nos enfocamos en las clases $[h, 2, 1]$ para cualquier $h \geq 3$ fijo; ellas son todas subclases de VPT . Caracterizamos a los grafos $[h, 2, 1]$ usando el número cromático. Mostramos que el problema de decidir si un grafo VPT dado pertenece a $[h, 2, 1]$ es NP-completo, mientras que el problema de decidir si el grafo dado pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ es NP-difícil. Ambos problemas permanecen NP-difíciles aún cuando nos restringimos a la clase $VPT \cap \text{Split}$. Adicionalmente, presentamos una subclase no trivial de $VPT \cap \text{Split}$ en la cual éstos problemas son polinomiales. No consideramos el caso $h = 2$ pues $[2, 2, 1] = \text{Intervalos}$. Nuestros resultados se aplican para cualquier $h \geq 3$ y pueden ser vistos como una generalización del caso $h = 3$

el cual conduce a la clase $[3, 2, 1] = [3, 2, 2] = \text{EPT} \cap \text{Cordial}$ considerado en [15, 35].

3.1. Resultados básicos

El siguiente Teorema y su Corolario muestran que una representación VPT que no es llena se puede modificar hasta obtener una representación VPT llena sin aumentar el grado máximo del árbol huésped; y, más aún, disminuyendo el grado de los vértices de T en los cuales la representación no es llena.

Teorema 3.1 *Sea G un grafo y $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT de G . Supongamos que existe un vértice $q \in V(T)$ con $d_T(q) = h \geq 4$ y dos ramas de T en q las cuales no están unidas por un camino de \mathcal{P} . Entonces existe una representación VPT, $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$, de G con $V(T') = V(T) \cup \{q'\}$, $q' \notin V(T)$, y*

$$d_{T'}(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = q'; \\ h - 1 & \text{si } x = q; \\ d_T(x) & \text{si } x \in V(T) \setminus \{q, q'\}. \end{cases}$$

Demostración: Sean q_1 y q_2 los vecinos de q que son raíces de dos ramas que no están unidas. Obtenemos la representación $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ de G como sigue (ver Figura 3.1): el conjunto de vértices de T' es $V(T) \cup \{q'\}$, donde q' es un nuevo vértice. El conjunto de aristas es $(E(T) \setminus \{qq_1, qq_2\}) \cup \{q'q_1, q'q_2, q'q\}$. Observar que el grado de cada vértice $x \in V(T')$ es el requerido en el presente teorema. Ahora definimos los caminos P'_v para $v \in V(G)$: si q_1 y q_2 o q_2 y q pertenecen a $V(P_v)$ entonces $V(P'_v) = V(P_v) \cup \{q'\}$. En cualquier

otro caso, $V(P'_v) = V(P_v)$. Dado que ningún camino de \mathcal{P} contiene a ambos vértices q_1 y q_2 , cada $V(P'_v)$ induce efectivamente un camino en T' . Más aún, dado que todos los caminos donde el vértice q' fue agregado tenían el vértice q en común, es claro que, para cualquier par de vértices $v, w \in V(G)$, $V(P_v) \cap V(P_w) \neq \emptyset$ si y sólo si $V(P'_v) \cap V(P'_w) \neq \emptyset$. Se tiene que $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ es una representación VPT de G y la prueba está completa. \square

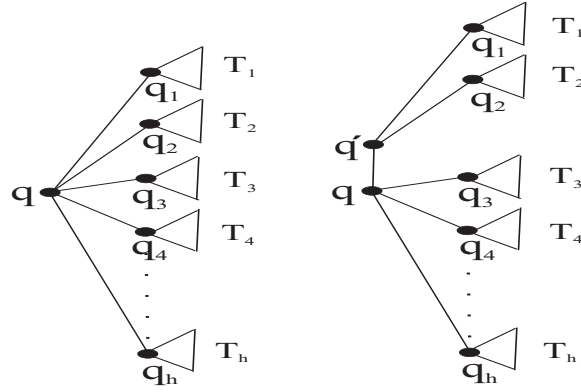


Figura 3.1: Construcción de $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ a partir de $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ en el Teorema 3.1.

Corolario 3.1 *Cualquier grafo $[h, 2, 1]$ admite una $(h, 2, 1)$ -representación llena.*

Demostración: Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una $(h, 2, 1)$ -representación de G . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que si x es un vértice extremo de un camino $P_v \in \mathcal{P}$ entonces existe un camino $P_u \in \mathcal{P}$ que intersecta a P_v sólo en x , en otro caso el vértice x puede ser removido de P_v . Esto implica que cualquier camino P uniendo dos ramas intersecta a caminos contenidos en esas ramas. Luego, la prueba sale inductivamente aplicando el Teorema 3.1 en

un vértice q de T de grado al menos cuatro en el cual $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ no es llena. Más claramente, supongamos que $q \in V(T)$ con $d_T(q) \geq 4$ tal que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ no es llena en q . Esto es, existen ramas T_i, T_j de T en q las cuales no están unidas por un camino de \mathcal{P} . Por el Teorema 3.1 podemos hallar una nueva representación $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$ de G (sin aumentar el grado de los vértices del árbol) la cual es llena en q . Luego, hacemos este procedimiento en cada vértice de T de grado mayor o igual a cuatro, en el cual la representación no es llena. De esta manera, obtenemos un $(h, 2, 1)$ -representación llena de G . \square

Un grafo G es **split** si $V(G)$ se puede particionar en un conjunto estable S y un clique K [7]. El par (S, K) es una **partición split** de G y esta partición es única salvo por isomorfismos. Los vértices en S son llamados **vértices estables**, y K es llamado el **clique central** de G . Un vértice s es un **vértice estable dominado** si $s \in S$ y existe $s' \in S$ tal que $N(s) \subseteq N(s')$. Notar que si G es split entonces $\mathcal{C}(G) = \{K\} \cup \{N[s] \mid s \in S\}$. Llamaremos **Split** a la clase de los grafos que son split.

Lema 3.1 *Sea $G \in VPT \cap Split$ con partición split (S, K) y sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT llena de G . Si $q \in V(T)$ y $C_q \neq K$, entonces $d_T(q) \leq 3$.*

Demostración: Asumamos, para una contradicción, que existe $q \in V(T)$ tal que $C_q \neq K$ y $d_T(q) \geq 4$. Dado que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es llena y $d_T(q) \geq 4$, C_q es un clique de G , esto es, existe $s \in S$ tal que $C_q = N[s]$. Dado que en C_q existen al menos tres vértices que no pertenecen K , entonces s tiene al menos dos vecinos que no están en K . Esto contradice el hecho de que $G \in Split$. \square

Un grafo es **k-coloreable** si sus vértices pueden ser pintados con a lo sumo k colores de manera que dos vértices que son adyacentes reciban distinto color. El **número cromático** de G , denotado por $\chi(G)$, es el menor k tal que G es k -coloreable. Un vértice $v \in V(G)$ o una arista $e \in E(G)$ es un **elemento crítico** de G si $\chi(G - v) < \chi(G)$ o $\chi(G - e) < \chi(G)$. Un grafo G con número cromático h es **h-vértice crítico** (resp. **h-crítico**) si cada uno de sus vértices (resp. aristas) es un elemento crítico.

Teorema 3.2 [27] *Para cualquier $k \geq 3$ fijo, el problema de decidir si un grafo G dado es k -coloreable es NP-completo.*

Un grafo es **perfecto** si y sólo si no contiene ciclos impares de longitud al menos cinco, o su complemento, como subgrafos inducidos [10].

Teorema 3.3 [23] *Para cualquier $k \geq 3$ fijo, el problema de decidir si un grafo perfecto G dado es k -coloreable es polinomial.*

3.2. Caracterización de $[h, 2, 1]$, para $h \geq 3$

En esta Sección, presentamos una caracterización de los grafos VPT que pueden ser representados en un árbol huésped con grado máximo a lo sumo h . La caracterización es dada en términos del número cromático de los grafos ramas.

Definición 3.1 [15] *Sea $C \in \mathcal{C}(G)$. El **grafo rama** de G para el clique C , denotado por $B(G/C)$, es definido como sigue: sus vértices son los vértices de $V(G) - C$ que son adyacentes a al menos vértice de C , y dos vértices u y v son adyacentes en $B(G/C)$ si y sólo si*

1. $uv \notin E(G)$;
2. existe un vértice $x \in C$ tal que $xu \in E(G)$ y $xv \in E(G)$;
3. existe un vértice $y \in C$ tal que $yu \in E(G)$ y $yv \notin E(G)$; y
4. existe un vértice $z \in C$ tal que $zu \notin E(G)$ y $zv \in E(G)$.

Para la conveniencia del lector ofrecemos en la Figura 3.2 un ejemplo donde mostremos que $B(A_4/K) = K_4$, y son destacados para las arista 12 de K_4 los correspondientes vértices x, y, z de A_4 .

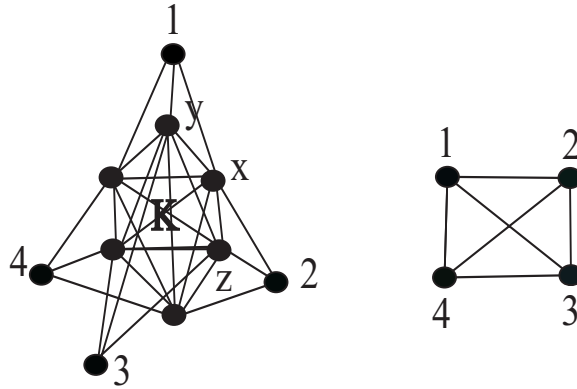


Figura 3.2: El grafo A_4 y el grafo rama $B(A_4/K)$.

Es claro que si $C \in \mathcal{C}(G)$ y $v \in V(G) - C$ entonces $C \in \mathcal{C}(G - v)$. El siguiente lema dice qué pasa con el grafo rama cuando removemos tales vértices. Su prueba es trivial.

Lema 3.2 Sea $C \in \mathcal{C}(G)$ y $v \in V(G) - C$:

1. Si $v \notin V(B(G/C))$ entonces $B((G - v)/C) = B(G/C)$;
2. si $v \in V(B(G/C))$ entonces $B((G - v)/C) = B(G/C) - v$.

Como será visto en lo que sigue, los grafos ramas de grafos VPT pueden ser usados para describir propiedades de las representaciones VPT.

Lema 3.3 *Sea G un grafo VPT. Sea C un clique de G , $\langle (P_v)_{v \in V(G)}, T \rangle$ una representación VPT de G y q un vértice de T tal que $C = C_q$. Si v es un vértice de $B(G/C)$ entonces P_v está contenido en alguna rama de T en q . Si dos vértices u y v son adyacentes en $B(G/C)$ entonces P_u y P_v no están contenidos en una misma rama de T en q .*

Demostración: Por la definición de grafo rama, si $u \in V(B(G/C))$ entonces $u \notin C$. Se tiene que $q \notin V(P_u)$, esto es, P_u está contenido en alguna rama de T en q .

Sea v adyacente a u en $B(G/C)$. Supongamos por el absurdo que P_u y P_v están contenidos en una misma rama de T en q . Sean x e y los vértices de P_u y P_v respectivamente que están a menor distancia de q . Dado que existe un vértice de C que es adyacente a u y v , existe un camino en T que contiene a q , x e y . De ahí que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que x está entre q e y o que $x = y$. En ambos casos, $N(v) \cap C \subseteq N(u) \cap C$, lo cual contradice el hecho de que u y v son adyacentes en $B(G/C)$. \square

Lema 3.4 *Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT de G . Sea $C \in \mathcal{C}(G)$ y $q \in V(T)$ tal que $C = C_q$. Si $d_T(q) = h$, entonces $B(G/C)$ es h -coloreable.*

Demostración: Sean T_1, T_2, \dots, T_h las ramas de T en q . Por el Lema 3.3, si coloreamos cada vértice v de $B(G/C)$ con el índice i de la rama T_i que contiene al camino P_v , entonces obtenemos una coloración propia de $B(G/C)$.

Dado que hay h ramas, $B(G/C)$ es h -coloreable. □

Teorema 3.4 *Sea $G \in VPT$ y $h \geq 3$. El grafo G pertenece a $[h, 2, 1]$ si y sólo si $B(G/C)$ es h -coloreable para todo $C \in \mathcal{C}(G)$. La implicación directa es verdadera también para $h = 2$.*

Demostración: Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una $(h, 2, 1)$ -representación de G , con $h \geq 2$. Si $C \in \mathcal{C}(G)$ entonces existe $q \in V(T)$ tal que $C = C_q$. Dado que $d_T(q) = l \leq h$, por el Lema 3.4, $B(G/C)$ es l -coloreable. En consecuencia, $B(G/C)$ es h -coloreable.

La recíproca para $h = 3$ fue probada por Golubic y Jamison en [15]; entonces podemos asumir que $h \geq 4$. En forma similar a lo hecho en [15], probaremos que si $B(G/C)$ es h -coloreable para todo clique C de G , entonces G admite una $(h, 2, 1)$ -representación.

Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT llena de G . Esta existe por el Corolario 3.1.

Procedemos por inducción en el número k de vértices de T cuyo grado es mayor que h . Si $k = 0$ no hay nada que hacer. Si $k > 0$, existe un vértice q de T con grado $d > h$. Dado que la representación es llena, C_q es un clique de G .

Digamos que $N_T(q) = \{q_1, q_2, \dots, q_d\}$ y, para cada i , sea T_i la rama de T en q que contiene a q_i . Podemos asumir que, para cada T_i , existe un vértice $v_i \in V(G)$ tal que el camino correspondiente P_{v_i} está contenido en la rama T_i y $q_i \in V(P_{v_i})$. De otra manera, podemos contraer la arista qq_i para obtener una nueva representación VPT de G sin cambiar la intersección de los

caminos, y repetir este procedimiento tantas veces como sea necesario hasta que lo asumido valga. Notar que durante esta operación algunos vértices de T desaparecen, y que el grado de q podría aumentar, pero el número de vértices cuyo grado es más grande que h no aumenta.

Decimos que v_i es el líder de T_i para $1 \leq i \leq d$. Observar que cada líder v_i es un vértice del grafo rama $B(G/C_q)$. Sea μ_i el color de v_i en una h -coloración propia de $B(G/C_q)$. Coloreamos cada rama T_i con el color μ_i de su líder v_i .

Podemos asumir que si dos ramas T_i y T_j están unidas entonces tienen diferentes colores. Pues, supongamos por el absurdo, que T_i y T_j están unidas por un camino $P_v \in \mathcal{P}$ y tienen el mismo color. Entonces, sus líderes v_i y v_j tienen el mismo color en $B(G/C_q)$, lo cual implica que

$$v_i \text{ y } v_j \text{ no son adyacentes en } B(G/C_q). \quad (3.1)$$

Por la definición del grafo rama y por (3.1), dado que v_i y v_j no son adyacentes en G , $v \in C_q$ y v es adyacente a v_i y a v_j en G , podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $N(v_i) \cap C_q \subseteq N(v_j) \cap C_q$. Esto significa que la rama T_i está unida sólo a la rama T_j ; luego podemos cambiar el color de T_i a cualquiera de los $h - 1$ colores restantes. Repitiendo este procedimiento tantas veces como sea necesario, obtenemos una h -coloración de las ramas de modo que cualesquiera dos ramas que estén unidas tienen diferentes colores.

Ahora, obtenemos una nueva representación VPT, $\langle P', T' \rangle$, de G como sigue. El árbol T' es obtenido de T a través del siguiente procedimiento (en la Figura 3.3 ofrecemos un ejemplo):

para todo i , $1 \leq i \leq d$, removemos la arista qq_i ;

para todo i , $1 \leq i \leq d$, agregamos un vértice q'_i adyacente a q_i ; y

para todo j , $1 \leq j \leq h$, agregamos las aristas necesarias para obtener un camino inducido con vértice extremo q conectando los vértices q'_i tal que la rama correspondiente T_i tiene color μ_j .

El resto del árbol T permanece sin cambios. Notar que $d_{T'}(q) = h$, $d_{T'}(q'_i) \leq 3$ para todo i , y los vértices restantes tienen el mismo grado como vértices de T' que como vértices de T .

Los únicos caminos de \mathcal{P} que son modificados para obtener los caminos de \mathcal{P}' son aquellos que contienen a q . Si un camino $P_v \in \mathcal{P}$ tiene a q como vértice extremo e intersecta una rama T_i , entonces obtenemos P'_v reemplazando en P_v la arista qq_i por el único subcamino de T' uniendo q y q_i . Si P_v tiene a q como un vértice interno, e intersecta dos ramas T_i y T_j , entonces, obtenemos P'_v reemplazando en P_v las aristas qq_i y qq_j por el único subcamino de T' uniendo q_i , q y q_j . Notar que tal subcamino existe pues las ramas que están unidas tienen distintos colores, esto es, q_i y q_j están en distintas ramas de T' en q .

Es fácil de ver que la construcción descrita anteriormente deja el grafo de intersección de caminos sin cambios, mientras que el número de vértices cuyo grado es mayor que h , decrece. Luego, por inducción, la implicación queda probada. \square

Observar que la recíproca del Teorema 3.4 es falsa para $h = 2$; consideremos, por ejemplo, el grafo obtenido de $K_{1,3}$ subdividiendo cada arista con un nuevo vértice. Este grafo, que llamamos T_2^3 , es un subgrafo inducido prohibido para la clase de los grafos de intervalos. Es fácil de ver que $T_2^3 \in \text{VPT}$ y que $B(G/C)$ es 2-coloreable para todo clique C ; sin embargo, $T_2^3 \notin [2, 2, 1]$.

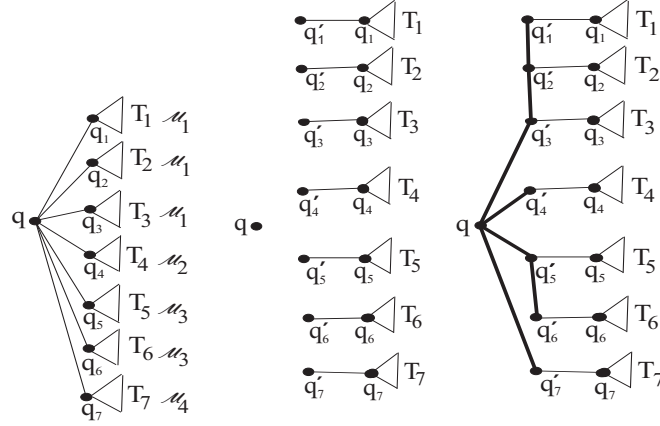


Figura 3.3: $B(G/C_q)$ es 4-coloreable con lo cual G admite una $(4, 2, 2)$ -representación.

Teorema 3.5 *Sea $G \in VPT$ y $h \geq 4$. El grafo G pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ si y sólo si $\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G)}(\chi(B(G/C))) = h$. La recíproca es verdadera también para $h = 3$.*

Demostración: Por el Teorema 3.4, $G \in [h, 2, 1]$ si y sólo si

$$\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G)}(\chi(B(G/C))) \leq h.$$

Y, por el mismo Teorema 3.4, $G \notin [h - 1, 2, 1]$ si y sólo si

$$\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G)}(\chi(B(G/C))) > h - 1.$$

□

3.3. Complejidad

En esta Sección, probamos que, para cualquier $h \geq 3$, el problema de decidir si un grafo dado pertenece a $[h, 2, 1]$ es NP-completo. También mostramos que reconocer a los grafos que están en $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ es NP-difícil para cualquier $h \geq 4$. Nuestros resultados prueban que ambos problemas permanecen difíciles aún cuando los grafos de entrada se restringen a VPT, split y sin vértices estables dominados.

Primero establecemos la siguiente propiedad fundamental de los grafos $VPT \cap Split$ la cual es usada en la prueba de los Teoremas 3.8 y 3.9.

Lema 3.5 *Sea $G \in VPT \cap Split$ con partición split (S, K) , y sea $s \in S$. Entonces, $\chi(B(G/N[s])) \leq 3$.*

Demostración: Sea $\langle P, T \rangle$ una representación VPT llena de G . Existe $q \in V(T)$ tal que $C_q = N[s]$. Dado que $N[s] \neq K$, por el Lema 3.1, $d_T(q) \leq 3$. Luego, por el Lema 3.4, $\chi(B(G/N[s])) \leq d_T(q) \leq 3$. \square

Para la prueba de la NP-completitud, usamos una reducción al bien conocido problema de decidir si un grafo es k -coloreable citado en el Teorema 3.2.

Dado un grafo H construiremos en tiempo polinomial un grafo $G_H \in VPT \cap Split$ sin vértices estables dominados de manera que $\chi(H) = h$ si y sólo si $G_H \in [h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$.

Si $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, entonces G_H tiene el siguiente conjunto de vértices:

$$V(G_H) = \begin{cases} v_i & \text{para cada } 1 \leq i \leq n; \\ v_{ij} & \text{para cada } 1 \leq i < j \leq n \text{ tal que } v_i v_j \in E(H); \\ \tilde{v}_i & \text{para cada } 1 \leq i \leq n \text{ con } d_H(v_i) = 1. \end{cases}$$

Los cliques de G_H son K_H y C_{v_i} para $1 \leq i \leq n$, donde:

$$K_H = \{v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\tilde{v}_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ y } d_H(v_i) = 1\},$$

$$C_{v_i} = \{v_i\} \cup \{v_{ij} \mid v_j \in N_H(v_i)\} \cup \{\tilde{v}_i \mid d_H(v_i) = 1\}.$$

Decimos que G_H es el grafo construido a partir de H . Ver un ejemplo en la Figura 3.4.

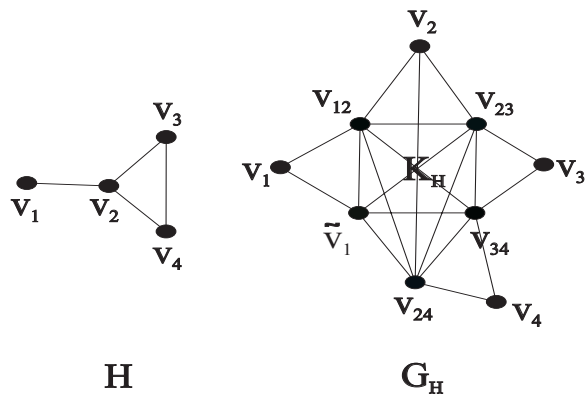


Figura 3.4: Un grafo H y su correspondiente grafo G_H .

Notar que G_H es un grafo split con el conjunto de vértices particionado en un conjunto estable S_H de tamaño $n = |V(H)|$ correspondiendo a los

vértices v_i , y un clique central K_H de tamaño $|E(H)| + |\{v \in V(H) \mid d_H(v) = 1\}|$ correspondiendo a los vértices restantes. La utilidad de G_H se ve en las propiedades descritas en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.6 1. G_H es un grafo $VPT \cap Split$ sin vértices estables dominados; 2. $B(G_H/K_H) = H$.

Demostración: 1. Por cómo fue construido G_H es claro que es un grafo split sin vértices estables dominados.

2. Notar que $B(G_H/K_H)$ tiene exactamente n vértices, que son justamente los vértices del grafo H . Esto es, $V(B(G_H/K_H)) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Veremos que las aristas de $B(G_H/K_H)$ son exactamente las aristas de H . Supongamos que $v_i v_j \in E(B(G_H/K_H))$ entonces, por la definición de grafo rama, existe un vértice de K_H que es adyacente a ambos v_i y v_j , llamaremos a este vértice v_{ij} . Ahora, por cómo fue construido el grafo G_H se tiene que $v_i v_j \in E(H)$.

Recíprocamente, asumamos que $v_i v_j \in E(H)$, entonces v_{ij} es un vértice de K_H y es adyacente a v_i y a v_j en G_H . Afirmamos que existe un vértice de K_H que es adyacente a v_i pero no a v_j . Pues, si $d_H(v_i) = 1$ entonces el vértice requerido de K_H es v_{iq} . Si $d_H(v_i) > 1$, v_i debe tener un vecino v_l con $l \neq j$, entonces el vértice requerido de K_H es v_{il} . En forma análoga, podemos probar que existe un vértice de K_H adyacente a v_j pero no a v_i . Dado que v_i y v_j no son adyacentes en G_H , por la definición de grafo rama, obtenemos que v_i y v_j son adyacentes en $B(G_H/K_H)$. Con lo cual, $E(B(G_H/K_H)) = E(H)$

Concluimos que $B(G_H/K_H) = H$. □

Teorema 3.7 *Sea G_H el grafo obtenido de H como antes. Para cualquier $h \geq 4$, G_H pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ si y sólo si $\chi(H) = h$.*

Demostración: Dado que $h \geq 4$, por el Lema 3.5, $\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G_H)} \chi(B(G_H/C)) = \chi(B(G_H/K_H))$, y, por el Teorema 3.6, $\chi(B(G_H/K_H)) = \chi(H)$. En consecuencia, por el Teorema 3.5, G_H pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ si y sólo si $\chi(H) = h$. \square

Teorema 3.8 *Para cualquier $h \geq 4$, el problema de decidir si un grafo dado pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ es NP-difícil, aún cuando nos restringimos a la clase de los grafos $VPT \cap \text{Split}$ sin vértices estables dominados.*

Además, dado que una $(h, 2, 1)$ -representación es un certificado polinomial de pertenecer a $[h, 2, 1]$; usando el Teorema 3.4 y la construcción anterior, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.9 *Para cualquier $h \geq 3$, el problema de decidir si un grafo dado pertenece a $[h, 2, 1]$ es NP-completo, aún cuando nos restringimos a la clase de los grafos $VPT \cap \text{Split}$ sin vértices estables dominados.*

3.3.1. Una subclase que es reconocible en tiempo polinomial

Hemos probado que decidir si dado un grafo $VPT \cap \text{Split}$ sin vértices estables dominados admite una representación como intersección de caminos de un árbol con grado máximo h es un problema NP-completo. En lo que

sigue describimos una subclase no trivial de $VPT \cap \text{Split}$ donde este problema se resuelve en tiempo polinomial.

Para $n \geq 4$, un **n-sol**, denotado por S_n , es un grafo split con conjunto estable $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, clique central $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $N(s_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ para $1 \leq i \leq n-1$, y $N(s_n) = \{v_n, v_1\}$. En la Figura 3.5 mostramos algunos ejemplos.

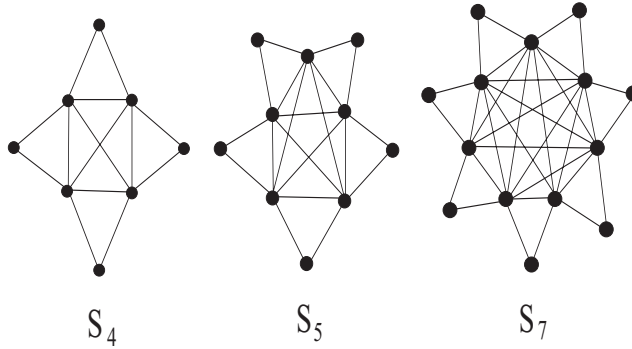


Figura 3.5: Los grafos soles S_4 , S_5 y S_7 .

Decimos que G pertenece a **SVS** (special VPT subclass) si:

- $G \in VPT \cap \text{Split}$,
- para todo $v \in K$, $|N(v) \cap S| \leq 2$, donde (S, K) es la partici3n split de G ,
- si S_k , con $k \in \{4, 2n + 1 \text{ con } n \geq 2\}$, es inducido de G entonces existe $v \in K$ tal que v es adyacente a dos v3rtices no consecutivos del conjunto estable de S_k .

La clase SVS no es trivial, en el sentido de que incluye grafos en $[h, 2, 1]$ para todo $h \geq 4$.

Por ejemplo, para $n \geq 4$, sea A_n (ver [19]) el grafo split con conjunto estable $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, clique central $K = \{v_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ y $N(v_{ij}) = \{s_i, s_j\}$, para todo $1 \leq i < j \leq n$. Es fácil ver que A_n pertenece a SVS, y $B(A_n/K)$ es un grafo completo con conjunto de vértices $\{s_1, \dots, s_n\}$. En consecuencia, dado que $\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(A_n)} \chi(B(A_n/C)) = \chi(B(A_n/K)) = n$, por el Teorema 3.5, tenemos que $A_n \in [n, 2, 1] - [n-1, 2, 1]$. (Como un ejemplo ver la Figura 3.6).

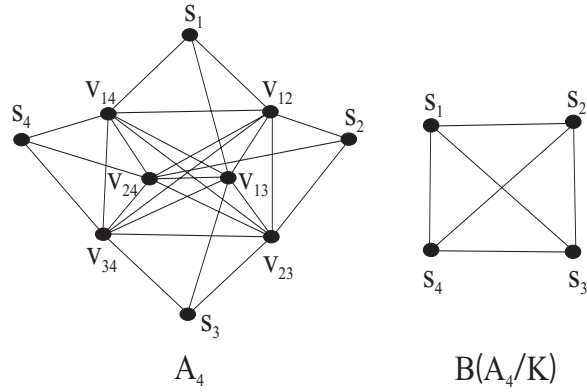


Figura 3.6: El grafo A_4 pertenece a SVS y $A_4 \in [4, 2, 1] - [3, 2, 1]$.

Los siguientes dos lemas son usados en la prueba del Teorema principal 3.10 el cual establece que en la clase SVS, los grafos pertenecientes a $[h, 2, 1]$ se pueden reconocer eficientemente, para cualquier $h \geq 4$

Lema 3.6 *Sea $G \in VPT \cap \text{Split}$ con partición split (S, K) tal que para todo $v \in K$, $|N(v) \cap S| \leq 2$, y sea $n \geq 4$. Si $B(G/K)$ tiene un C_n como inducido entonces G tiene un S_n como inducido.*

Demostración: Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación VPT de G y sea $q \in V(T)$ tal que $K = C_q$. Sea C_n un ciclo inducido de $B(G/K)$ con vértices s_1, s_2, \dots, s_n .

Es claro que todo $s_i \in S$. Como s_i es adyacente a s_{i+1} en $B(G/K)$, existe $v_i \in K$ tal que v_i es adyacente a s_i y a s_{i+1} en G . Además, dado que, para todo $v \in K$, $|N(v) \cap S| \leq 2$, se tiene que si $i, i' \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i \neq i'$ entonces $v_i \neq v_{i'}$, con lo cual $s_1, s_2, \dots, s_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ inducen un n -sol en G y la prueba queda completa. \square

Lema 3.7 *Si $G \in SVS$ con partición split (S, K) , entonces $B(G/K)$ es perfecto.*

Demostración: Supongamos por el absurdo que $B(G/K)$ no es perfecto, entonces $B(G/K)$ tiene un ciclo impar o su complemento como subgrafos inducidos. Dado que el complemento de C_5 es C_5 ; y el complemento de cualquier ciclo impar de tamaño 7 o más tiene como inducido un C_4 , se tiene que $B(G/K)$ tiene como inducido un C_k , para algún $k \in \{4, 2n + 1 \text{ con } n \geq 2\}$. De ahí que, por el Lema 3.6, G tiene un S_k como inducido. Dado que $G \in SVS$, existe $v \in K$ tal que v es adyacente a dos vértices no consecutivos s y s' del conjunto estable de S_k . Notar que la existencia de v implica que los vértices s y s' son adyacentes en $B(G/K)$. Esto contradice el hecho de que C_k es un ciclo inducido de $B(G/K)$. \square

Teorema 3.10 *Para cualquier $h \geq 4$ fijo, el problema de decidir si un grafo dado $G \in SVS$ pertenece a $[h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$ es polinomial.*

Demostración: Dado $G \in SVS$, para determinar si $G \in [h, 2, 1] - [h - 1, 2, 1]$, por el Teorema 3.5 y el Lema 3.5, es suficiente con calcular el número cromático de $B(G/K)$, donde K es el clique central de G . Notar que el grafo rama

$B(G/K)$ puede ser obtenido en tiempo polinomial. Por otro lado, por el Lema 3.7, $B(G/K)$ es perfecto. Luego, por el Teorema 3.3, su número cromático puede ser calculado en tiempo polinomial. \square

Capítulo 4

Caracterización de los grafos [h,2,1] por subgrafos inducidos prohibidos minimales

Un método de caracterización de clases de grafos que es ampliamente empleado es el que da la **definición por prohibición de subgrafos inducidos**. Este método consiste en caracterizar una clase de grafos especificando el conjunto más simple de grafos que no pertenecen a la clase que se quiere caracterizar, y tal que los elementos de la clase son exactamente aquellos que no contienen ningún grafo del conjunto especificado como subgrafo inducido.

Las definiciones por prohibición son aplicables en diversas áreas de la Matemática [22]. Estas son interesantes tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista práctico, pues condensan mucha información sobre la estructura de la clase en un enunciado conciso, y esta información, muchas veces, da origen a algoritmos eficientes para la solución de diversos

problemas que son difíciles en general [7].

Una caracterización de la clase VPT por prohibición fue obtenida parcialmente por M. Gutierrez, S. B. Tondato y J. L. Szwarcfiter en 2005 [24] y dada de manera completa por B. Lévêque, F. Maffray y M. Preissman en 2009 [29]. La prueba de dicha caracterización se basa en el Teorema del Arbol Característico [31], y en propiedades especiales de esos árboles para grafos VPT. Sin embargo, como la prueba es muy específica no entraremos en mayores detalles en cuanto a ella.

Teorema 4.1 (*Caracterización de VPT por prohibidos*) *Un grafo es VPT si y sólo si no contiene a ninguno de los miembros de las familias F_0, \dots, F_{16} como subgrafos inducidos. (Ver Figura 4.1).*

En este Capítulo caracterizamos la clase $[h, 2, 1]$ por subgrafos inducidos prohibidos minimales para cada $h \geq 3$ fijo.

Parte de los resultados que aquí presentamos fueron publicados en [4]. El resto, está siendo evaluado para su futura publicación (ver [5]).

4.1. Preliminaries

Definición 4.1 *Un clique K de un grafo G es llamado **principal** si*

$$\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G)}(\chi(B(G/C))) = \chi(B(G/K)).$$

Lema 4.1 *Si (S, K) es la partición split de $G \in VPT \cap \text{Split}$, entonces K es un clique principal de G .*

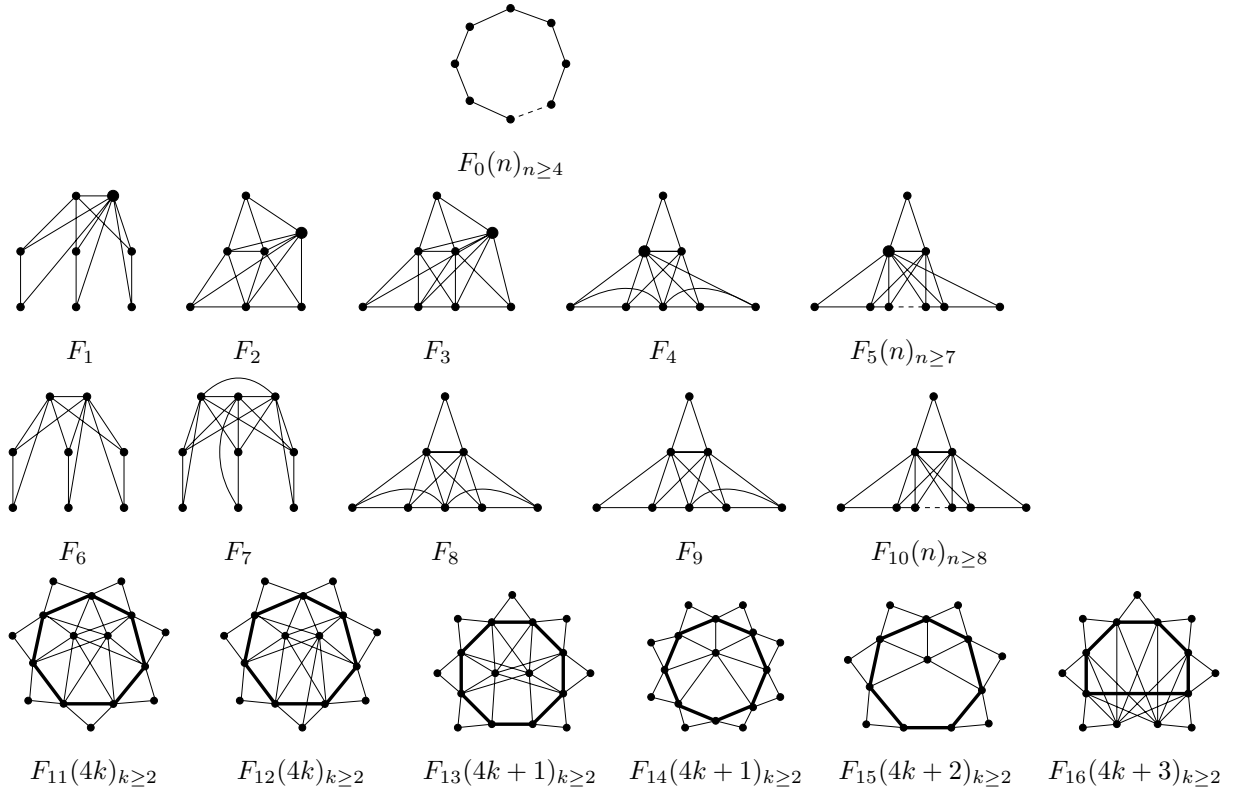


Figura 4.1: Subgrafos inducidos prohibidos minimales para VPT (los vértices en el ciclo marcados con aristas negras forman un clique).

Demostración: Sea $s \in S$, sabemos que $N[s] \in \mathcal{C}(G)$. Observar que $V(B(G/N[s])) = (K - N(s)) \cup S'$, con $S' = \{x \in S \mid N(x) \cap N(s) \neq \emptyset\}$. Afirmamos que los vértices de $K - N(s)$ son aislados en $B(G/N[s])$. Pues, sea $x \in K - N(s)$; si $y \in K - N(s)$, entonces $xy \notin E(B(G/N[s]))$ ya que $xy \in E(G)$ y, si $y \in S'$ entonces $xy \notin E(B(G/N[s]))$ ya que $N(y) \subseteq N[x]$. Luego, el número cromático de $B(G/N[s])$ es igual al número cromático del subgrafo de $B(G/K)$ inducido por S' , el cual es claramente un subgrafo de $B(G/K)$. Esto es, $\chi(B(G/N[s])) \leq \chi(B(G/K))$. En consecuencia, $\text{Max}_{C \in \mathcal{C}(G)}(\chi(B(G/C))) = \chi(B(G/K))$, con lo cual, K es un clique principal de G . \square

4.2. Condiciones necesarias para grafos VPT que son minimales no- $[h, 2, 1]$

En esta Sección damos condiciones necesarias para ser un grafo VPT minimal no- $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$. El resultado más importante de esta Sección es el Teorema 4.4 el cual nos dirá que dado un grafo $G \in VPT$ y $h \geq 3$, si G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ entonces $G \in Split$ sin vértices estables dominados.

Recordemos que:

Definición 4.2 *Un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ es un subgrafo inducido prohibido minimal para la clase $[h, 2, 1]$, esto significa un grafo G tal que $G \notin [h, 2, 1]$ pero $G - v \in [h, 2, 1]$ para cualquier vértice $v \in V(G)$.*

Teorema 4.2 *Sea $G \in VPT$ y $h \geq 3$. Si G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ entonces $G \in [h + 1, 2, 1]$.*

Demostración: Sea $C \in \mathcal{C}(G)$ y $v \notin C$. Sabemos que $G - v \in [h, 2, 1]$ entonces, por el Teorema 3.5, $\chi(B((G - v)/C)) \leq h$. Por el Lema 3.2, $\chi(B((G - v)/C)) \geq \chi(B(G/C) - v) \geq \chi(B(G/C)) - 1$. Esto es, $\chi(B(G/C)) - 1 \leq h$ y entonces $\chi(B(G/C)) \leq h + 1$. Luego, por el Teorema 3.4, $G \in [h + 1, 2, 1]$. \square

Teorema 4.3 *Sea K un clique principal de un grafo VPT minimal no $[h, 2, 1]$ G , con $h \geq 3$. Luego:*

1. $V(B(G/K)) = V(G) - K$;
2. si $v \in V(G) - K$ entonces $|N(v) \cap K| > 1$;
3. $B(G/K)$ es $(h + 1)$ -vértice crítico;
4. si $s_1, s_2 \in V(G) - K$ entonces $N(s_1) \cap K \neq N(s_2) \cap K$.
5. $K - \{k\} \in \mathcal{C}(G - k)$ para todo $k \in K$.

Demostración: Por el Teorema 4.2, $G \in [h + 1, 2, 1]$. Como $G \notin [h, 2, 1]$, por el Teorema 3.5, dado que K es un clique principal de G , tenemos que

$$\chi(B(G/K)) = h + 1. \quad (4.1)$$

1. Es claro que $V(B(G/K)) \subseteq V(G) - K$. Supongamos que existe $v \in V(G) - K$ tal que $v \notin V(B(G/K))$. Entonces, por el Lema 3.2, $B((G - v)/K) = B(G/K)$. Dado que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$, $G - v \in [h, 2, 1]$ y, por el Teorema 3.4, $B((G - v)/K)$ es h -coloreable. Esto es, $B(G/K)$ es h -coloreable lo cual contradice la condición (4.1).

2. Sea $v \in V(G) - K$. Por el ítem 1., sabemos que $v \in V(B(G/K))$; entonces $|N(v) \cap K| \geq 1$. Si $|N(v) \cap K| = 1$, v sería un vértice aislado de $B(G/K)$ y $\chi(B(G/K)) = \chi(B(G/K) - v)$. Pero, por el Lema 3.2 y el Teorema 3.4, dado que $G - v \in [h, 2, 1]$ tenemos que $\chi(B(G/K) - v) = \chi(B((G - v)/K)) \leq h$, lo cual también contradice la condición (4.1).

3. Por la condición (4.1), $\chi(B(G/K)) = h + 1$; asumamos, para obtener una contradicción, que $B(G/K)$ no es $(h + 1)$ -vértice crítico; entonces existe $v \in V(B(G/K))$ tal que $\chi(B(G/K) - v) = h + 1$. Entonces, dado que $v \in V(B(G/K))$, por el Lema 3.2, $\chi(B((G - v)/K)) = \chi(B(G/K) - v) = h + 1$, lo cual contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

4. Veremos que si $N(s_1) \cap K = N(s_2) \cap K$ entonces $s_1 s_2 \notin E(B(G/K))$ y $N_{B(G/K)}(s_1) = N_{B(G/K)}(s_2)$, lo cual contradice que $B(G/K)$ es $(h+1)$ -vértice crítico. Pues, si $N(s_1) \cap K = N(s_2) \cap K$ entonces $s_1 s_2 \notin E(B(G/K))$ por la definición del grafo rama. Más aún, si $s_3 \in N_{B(G/K)}(s_1)$ entonces existen $k_1, k_2, k_3 \in K$ tales que: $k_1 s_1 \in E(G)$, $k_1 s_3 \in E(G)$; $k_2 s_1 \in E(G)$, $k_2 s_3 \notin E(G)$; $k_3 s_1 \notin E(G)$, $k_3 s_3 \in E(G)$. Y, dado que $N(s_1) \cap K = N(s_2) \cap K$, se tiene que $k_1 s_2 \in E(G)$, $k_2 s_2 \in E(G)$, $k_3 s_2 \notin E(G)$. Además, $s_3 s_2 \notin E(G)$ porque en otro caso habría un 4-ciclo inducido $\{s_2, k_2, k_3, s_3\}$ en G , lo cual contradice que $G \in \text{VPT}$ (ver Figura 4.1). En consecuencia, $s_3 \in N_{B(G/K)}(s_2)$; con lo cual hemos probado que $N_{B(G/K)}(s_1) \subseteq N_{B(G/K)}(s_2)$. De manera similar, es fácil ver que $N_{B(G/K)}(s_2) \subseteq N_{B(G/K)}(s_1)$.

5. Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una $(h+1, 2, 1)$ -representación de G y sea $q \in V(T)$ tal que $K = C_q$. Afirmamos que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es llena en q . Pues, supongamos, para una contradicción, que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ no es llena en q . Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que si x es un extremo de un camino $P_v \in \mathcal{P}$ entonces existe un camino $P_u \in \mathcal{P}$ intersectando a P_v sólo en x , en otro caso el vértice x podría removerse de P_v . Esto implica que cualquier camino de \mathcal{P} uniendo dos ramas intersecta caminos contenidos en esas ramas. Luego, dado que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ no es llena en q , existen ramas T_i y T_j de T en q las cuales no están unidas por un camino de \mathcal{P} . Entonces, por el Teorema 3.1, podemos obtener una nueva representación VPT, $\langle \mathcal{P}', T' \rangle$, de G con $d_{T'}(q) \leq h$. Esto es, por el Lema 3.4, $B(G/C_q)$ es h -coloreable lo cual contradice que C_q es un clique principal de G .

Luego, como $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es llena en q , cualquier par de ramas de T en q están unidas por un camino de \mathcal{P} . Si existiera $k \in C_q$ tal que $C_q - \{k\}$ no es un

clique de $G - k$, existiría $v \in V(G) - C_q$ tal que v es adyacente a todos los vértices de $C_q - \{k\}$. Sean T_1, T_2, \dots, T_{h+1} las ramas de T en q . Asumamos, sin pérdida de generalidad, que P_k está contenido en $\{q\} \cup T_1 \cup T_2$. Como $v \in V(G) - C_q$, existe i tal que P_v está contenido en T_i . Y, como $h \geq 3$, existe una rama T_s , con $s \neq 1, 2, i$. Sea P_u el camino de \mathcal{P} uniendo T_s y T_r , con $r \neq i$. Es claro que $u \in C_q$ y v no es adyacente a u , lo cual contradice que v es adyacente a todos los vértices de $C_q - \{k\}$. Luego, $C_q - \{k\} \in \mathcal{C}(G - k)$. \square

La siguiente definición será usada en la prueba del Teorema 4.4 el cual establece que cualquier grafo VPT minimal no- $[h, 2, 1]$ es split y no tiene vértices estables dominados.

Definición 4.3 *Una representación VPT canónica de G es un par $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ donde T es un árbol cuyos vértices son los miembros de $\mathcal{C}(G)$, \mathcal{P} es la familia $(P_v)_{v \in V(G)}$ con $P_v = \{C \in \mathcal{C}(G) \mid v \in C\}$ y P_v induce un subcamino de T para todo $v \in V(G)$.*

En [31] fue probado que todo grafo VPT admite una representación VPT canónica.

Teorema 4.4 *Sea G un grafo VPT y $h \geq 3$. Si G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$, entonces $G \in \text{Split}$ sin vértices estables dominados.*

Demostración: Caso (1): Supongamos que $G \in \text{Split}$ con partición split (S, K) , y G tiene vértices estables dominados. Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una VPT representación canónica de G , y sea $q \in V(T)$ tal que $K = C_q$. Asumamos que $N_T(q) = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$, con $k > h$, y llamemos T_1, T_2, \dots, T_k a las ramas de T

en q conteniendo a los vértices q_1, q_2, \dots, q_k respectivamente. Es claro que para cada q_i , con $1 \leq i \leq k$, existe $P_{w_i} \in \mathcal{P}$ tal que $q_i \in V(P_{w_i})$ y $q \notin V(P_{w_i})$. Notar que todo $w_i \in S$.

Supongamos que $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Dado que G tiene vértices estables dominados, por el ítem 4. del Teorema 4.3 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $N(w_1) \not\subseteq N(w_2)$. Esto significa que w_1 y w_2 no son adyacentes en $B(G/C_q)$; esto es, por el ítem 3. del Teorema 4.3, $N_{B(G/C_q)}(w_1) \not\subseteq N_{B(G/C_q)}(w_2)$. En consecuencia, existe $l \in V(B(G/C_q)) - \{w_1, w_2\}$, tal que $l \in N_{B(G/C_q)}(w_1) - N_{B(G/C_q)}(w_2)$. Dado que $V(B(G/C_q)) = S$ (por el ítem 1. del Teorema 4.3 y por ser $G = (S, K)$) podemos asumir que $l = w_3$. Entonces, por la definición de grafo rama, existe $z \in C_q$ tal que $zw_1 \in E(G)$, $zw_3 \in E(G)$ y, dado que $N(w_1) \not\subseteq N(w_2)$, $zw_2 \in E(G)$, lo cual implica que P_z contiene a los vértices q_1, q_2 y q_3 . Entonces P_z no es un camino. Lo que contradice que $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ es una representación VPT de G .

Concluimos que $S' = S - \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \neq \emptyset$. Sea $G' = G - S'$. Notar que $C_q \in \mathcal{C}(G')$ y $V(B(G'/C_q)) = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Dado que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$, entonces $G' \in [h, 2, 1]$ y $\chi(B(G'/C_q)) \leq h$.

Afirmamos que existe una h -coloración de $B(G'/C_q)$ tal que si existe $x \in C_q$ y $w_i, w_j \in \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ con $xw_i \in E(G)$, $xw_j \in E(G)$ entonces

$$w_i \text{ y } w_j \text{ tienen diferentes colores en } B(G'/C_q). \quad (4.2)$$

Pues, si w_i y w_j tienen el mismo color en $B(G'/C_q)$ entonces $w_i w_j \notin E(B(G'/C_q))$. Luego podemos asumir que $N(w_i) \subseteq N(w_j)$, dado que, por hipótesis, existe $x \in C_q$ tal que $xw_i \in E(G)$ y $xw_j \in E(G)$. Lo cual implica que w_i es un vértice aislado de $B(G'/C_q)$. Con lo cual, podemos cambiar

el color de w_i a alguno de los $h - 1$ colores restantes. Este proceso puede ser hecho tantas veces como sea necesario hasta que obtengamos la deseada h -coloración de $B(G'/C_q)$.

En consecuencia, consideramos una h -coloración, digamos c' , de $B(G'/C_q)$ satisfaciendo la condición (4.2).

Ahora, damos una h -coloración, digamos c , de $B(G/C_q)$ como sigue: dado $w \in V(B(G/C_q))$, por el Lema 3.3, existe $1 \leq i \leq k$ tal que P_w está contenido en T_i , definimos $c(w) = c'(w_i)$. Notar que, en particular, $c(w_i) = c'(w_i)$.

Veremos que c es una coloración propia de $B(G/C_q)$. Esto es, tenemos que ver que si $uv \in E(B(G/C_q))$ entonces $c(u) \neq c(v)$. Dado que $uv \in E(B(G/C_q))$, por el Lema 3.3, P_u y P_v están en diferentes ramas de T en q digamos T_i y T_j . Más aún, existe $x \in C_q$ tal que $xu \in E(G)$ y $xv \in E(G)$, pero esto implica que $xw_i \in E(G)$ y $xw_j \in E(G)$. Luego, dado que nuestra coloración satisface la condición (4.2), $c'(w_i) \neq c'(w_j)$. Con lo cual, $c(u) \neq c(v)$. De ahí que, nuestra coloración es propia.

Entonces, tenemos una h -coloración propia de $B(G/C_q)$ lo cual contradice que C_q es un clique principal de G . Concluimos que, si $G \in \text{Split}$ entonces G no tiene vértices estables dominados.

Caso (2): Supongamos que $G \notin \text{Split}$. Como G es un grafo minimal no $[h, 2, 1]$, por el Teorema 4.2, $G \in [h + 1, 2, 1]$. Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una $(h + 1, 2, 1)$ -representación de G y sea $q \in V(T)$ tal que C_q es un clique principal de G . Sabemos, por el item 1. del Teorema 4.3, que $V(B(G/C_q)) = V(G) - C_q$. Dado que $G \notin \text{Split}$ existen $x, y \in V(B(G/C_q))$ tal que $xy \in E(G)$.

Sea \tilde{G} el grafo que tiene una $(h + 1, 2, 1)$ -representación, $\langle \mathcal{P}', T \rangle$, donde $\mathcal{P}' = (P'_v)_{v \in V(G)}$ tal que:

$$P'_v = \begin{cases} P_v & \text{si } v \in C_q; \\ q_v & \text{si } v \in V(G) - C_q, \text{ donde } q_v \text{ es el v\u00e9rtice de } P_v \text{ m\u00e1s cercano a } q. \end{cases}$$

Notar que $V(\tilde{G}) = V(G)$. Afirmamos que \tilde{G} es un grafo split, con partici\u00f3n split $(V(G) - C_q, C_q)$. Pues, si $x, y \in V(G) - C_q$ y $xy \in E(\tilde{G})$ entonces $q_x = q_y$. Esto es, $N_G(x) \cap C_q = N_G(y) \cap C_q$ lo cual contradice el item 4. del Teorema 4.3. Luego, $\tilde{G} \in \text{Split}$ y, por el Lema 4.1, C_q es un clique principal de \tilde{G} .

Veremos que $B(G/C_q) = B(\tilde{G}/C_q)$, de ah\u00ed que $\tilde{G} \in [h + 1, 2, 1] - [h, 2, 1]$.

Podemos asumir, por el item 4. del Teorema 4.3, que $N_G(x) \cap C_q \subseteq N_G(y) \cap C_q$, porque en otro caso G contendr\u00eda un 4-ciclo inducido, lo cual contradice que $G \in \text{VPT}$ (ver Figura 4.1). Con lo cual, existe $w \in C_q$ tal que $wx \in E(G)$, $wy \in E(G)$. Y, dado que $xy \in E(G)$ entonces P_x y P_y est\u00e1n en una misma rama de T en q . Adem\u00e1s, por el item 4. del Teorema 4.3, $N_G(x) \cap C_q \neq N_G(y) \cap C_q$, con lo cual existe $w' \in C_q$ tal que $w' \in (N(y) \cap C_q) - (N(x) \cap C_q)$. Luego, por la existencia de w y w' , q_y est\u00e1 en el camino de T entre q y q_x . Esto implica que \tilde{G} tiene v\u00e9rtices estables dominados. Ahora es f\u00e1cil ver que $B(G/C_q) = B(\tilde{G}/C_q)$, de ah\u00ed que $\tilde{G} \in [h + 1, 2, 1] - [h, 2, 1]$.

Entonces, por Caso (1), \tilde{G} no es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. Esto es, existe $v \in V(\tilde{G})$ tal que $(\tilde{G} - v) \in [h + 1, 2, 1]$.

Si $v \in V(B(\tilde{G}/C_q))$, entonces $\chi(B((\tilde{G} - v)/C_q)) = h + 1$. M\u00e1s a\u00fan, por el Lema 3.2 y como $B(\tilde{G}/C_q) = B(G/C_q)$, tenemos que $B((\tilde{G} - v)/C_q) = B(\tilde{G}/C_q) - v = B(G/C_q) - v = B((G - v)/C_q)$. Luego, $\chi(B((G - v)/C_q)) = h + 1$ lo cual contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

Si $v \in C_q$, entonces, por el item 5. del Teorema 4.3, $C_q - v \in \mathcal{C}(G - v)$; con lo cual $C_q - v \in \mathcal{C}(\tilde{G} - v)$. Esto es, $\tilde{G} - v \in \text{Split}$ con partici\u00f3n split

$(V(G) - C_q, C_q - v)$. Luego, por el Lema 4.1, $C_q - v$ es un clique principal de $\tilde{G} - v$. En consecuencia, $\chi(B((\tilde{G} - v)/(C_q - v))) = h + 1$. Además, es fácil ver que $B((\tilde{G} - v)/(C_q - v)) = B((G - v)/(C_q - v))$; esto es $\chi(B((\tilde{G} - v)/(C_q - v))) = \chi(B((G - v)/(C_q - v))) = h + 1$ lo cual contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

Concluimos que $G \in \text{Split}$. □

En el Teorema 4.3 dimos algunas condiciones necesarias en el grafo rama con respecto al clique principal de un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. En lo que sigue, en el Teorema 4.5, usando el hecho de que todos los grafos minimales no- $[h, 2, 1]$ son split sin vértices dominados en el estable y el hecho de que el clique central de un grafo split es principal, daremos más condiciones necesarias para grafos minimales no- $[h, 2, 1]$.

Teorema 4.5 *Sea G un grafo VPT y sea $h \geq 3$. Si G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ con partición split (S, K) entonces:*

1. *para todo $k \in K$, $|N(k) \cap S| = 2$;*
2. *$|E(B(G/K))| = |K|$;*
3. *$B(G/K)$ es $(h + 1)$ -crítico.*

Demostración: Por el Teorema 4.4, $G \in \text{Split}$ sin vértices estables dominados. Sea (S, K) la partición split de G . Por el Lema 4.1, K es un clique principal de G .

1. Dado que $G \in \text{VPT} \cap \text{Split}$ sin vértices estables dominados, $|N(k) \cap S| \leq 2$ para todo $k \in K$. Supongamos que existe $k' \in K$ tal que $|N(k') \cap S| < 2$.
2. Veremos que para todo $k \in K$ se tiene que $|N(k) \cap S| = 2$.

Por el Teorema 4.2, $G \in [h+1, 2, 1]$. Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una $(h+1, 2, 1)$ -representación de G y sea $q \in V(T)$ tal que $K = C_q$. Por el ítem 5. del Teorema 4.3, $C_q - \{k'\} \in \mathcal{C}(G - k')$.

(i) Si $|N(k') \cap S| = 0$: Entonces $B((G - k')/(C_q - \{k'\})) = B(G/C_q)$. Esto es, $\chi(B((G - k')/(C_q - \{k'\}))) = \chi(B(G/C_q)) = h + 1$, lo cual contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

(ii) Si $|N(k') \cap S| = 1$: Veremos que $B((G - k')/(C_q - \{k'\})) = B(G/C_q)$. Es claro, por el ítem 2. del Teorema 4.3, que $V(B((G - k')/(C_q - \{k'\}))) = V(B(G/C_q))$ y $E(B((G - k')/(C_q - \{k'\}))) \subseteq E(B(G/C_q))$. Sea $uv \in E(B(G/C_q))$ tal que $uv \notin E(B((G - k')/(C_q - \{k'\})))$. Como $|N(k') \cap S| = 1$ podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $(N(v) \cap C_q) - (N(u) \cap C_q) = \{k'\}$. Luego, tenemos que $N_{B(G/C_q)}(v) = \{u\}$, pues si existiera $w \neq u$ tal que $w \in N_{B(G/C_q)}(v)$, entonces existiría $\tilde{k} \in C_q$ tal que $\tilde{k}w \in E(G)$, $\tilde{k}v \in E(G)$. Y, dado que $|N(k') \cap S| = 1$, tenemos que $\tilde{k} \neq k'$; esto es $\tilde{k}u \in E(G)$, pues $(N(v) \cap C_q) - (N(u) \cap C_q) = \{k'\}$. Pero entonces $\{u, v, w\} \subseteq N(\tilde{k}) \cap S$, lo cual contradice el hecho de que $|N(k) \cap S| \leq 2$ para todo $k \in K$.

En consecuencia, $d_{B(G/C_q)}(v) = 1$ lo cual contradice el ítem 3. del Teorema 4.3, el cual establece que $B(G/C_q)$ es $(h + 1)$ -vértice crítico.

2. Primero probaremos que $|E(B(G/K))| \leq |K|$. Sea $e = uv \in E(B(G/K))$. Por la definición de grafo rama, existe $k \in K$ tal que $ku \in E(G)$, $kv \in E(G)$. Esto es, para cada $e \in E(B(G/K))$ existe $k \in K$. En consecuencia, por el ítem 1., $|E(B(G/K))| \leq |K|$.

Ahora veremos que $|K| \leq |E(B(G/K))|$. Sea $k \in K$. Por el ítem 1., $|N(k) \cap S| = 2$. Supongamos que $N(k) \cap S = \{u, v\}$, luego $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$. Como no hay vértices estables dominados, $N(u) \not\subseteq N(v)$, $N(v) \not\subseteq N(u)$.

Esto es, $uv \in E(B(G/K))$. Con lo cual, para cada $k \in K$ existe $u, v \in S$ tal que $uv \in E(B(G/K))$. Observar que si $\tilde{k} \in K$ tal que $\tilde{k} \neq k$, entonces $N(\tilde{k}) \cap S \neq N(k) \cap S$. Pues si $N(\tilde{k}) \cap S = N(k) \cap S$, entonces \tilde{k} y k son gemelos verdaderos en G lo que contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. De ahí que, $|K| \leq |E(B(G/K))|$.

3. Sea $e = uv$ una arista de $B(G/K)$, probaremos que $\chi(B(G/K) - e) < \chi(B(G/K))$. Notar que es suficiente con mostrar que existe $k \in K$ tal que $B(G/K) - e = B((G - k)/(K - \{k\}))$, pues dado que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$, tenemos que $G - k \in [h, 2, 1]$, y entonces $\chi(B((G - k)/(K - \{k\}))) \leq h < h + 1 = \chi(B(G/K))$.

Sea k un vértice de K adyacente a u y v . Observar que, por el ítem 5. del Teorema 4.3, $K - \{k\}$ es un clique de $G - k$. Dado que todo vértice de S es adyacente a al menos dos vértices de K , tenemos que $V(B((G - k)/(K - \{k\}))) = V(B(G/K) - e)$. Por otro lado, es claro que cualesquiera dos vértices adyacentes en $B((G - k)/(K - \{k\}))$ son adyacentes en $B(G/K)$. Luego, sólo nos queda ver que $E(B(G/K) - e) \subseteq E(B((G - k)/(K - \{k\})))$.

Sea xy una arista de $B(G/K) - e$, y sean k_1, k_2, k_3 vértices de K tal que $k_1x \in E(G)$, $k_1y \in E(G)$, $k_2x \in E(G)$, $k_2y \notin E(G)$, $k_3x \notin E(G)$, $k_3y \in E(G)$. Notar que $k_1 \neq k$ pues todo vértice de K tiene exactamente dos vecinos en S y $e \neq xy$. De ahí que, si $k_2 \neq k$ y $k_3 \neq k$, tenemos que $xy \in E(B((G - k)/(K - \{k\})))$ y la prueba es completada. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $k_2 = k$ y, dado que los únicos vecinos de k en S son u y v también, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x = u$.

Dado que, por el ítem 3. del Teorema 4.3, $B(G/K)$ es $(h + 1)$ -vértice crítico, tenemos que todo vértice de $B(G/K)$ tiene grado al menos h . Con lo

cual existe $k_4 \in K$ tal que $k_4x \in E(G)$ y $k_4 \neq k$, $k_4 \neq k_1$. Si $k_4y \in E(G)$, entonces $N[k_1] = N[k_4] = \{x, y\} \cup K$ lo cual significa que k_1 y k_4 son gemelos verdaderos en G , y esto contradice la minimalidad de G . La existencia de los vértices k_1, k_3, k_4 implica que $xy \in E(B((G - k)/(K - \{k\})))$. \square

4.3. Construyendo grafos minimales no- $[h, 2, 1]$

Recordemos que dado un grafo cualquiera H llamamos G_H al grafo construido a partir de H utilizando el procedimiento dado en la Sección 3.3.

Teorema 4.6 *Sea $h \geq 3$. El grafo G_H es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ si y sólo si H es $(h + 1)$ -crítico.*

Demostración: Asumamos que G_H es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. Por el ítem 2. del Teorema 3.6, $B(G_H/K_H) = H$. En consecuencia, por el 3. del Teorema 4.5, H es $(h + 1)$ -crítico.

Ahora, sea H un grafo $(h + 1)$ -crítico con $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Por el Teorema 3.6 y el Lema 4.1, $Max_{C \in \mathcal{C}(G_H)}(\chi(B(G_H/C))) = \chi(B(G_H/K_H)) = \chi(H) = h + 1$. Luego, por el Teorema 3.5, $G_H \in [h + 1, 2, 1] - [h, 2, 1]$. Veamos que $G_H - v \in [h, 2, 1]$, para todo $v \in V(G_H)$. Primero, si $v = v_i \in V(H)$, usando el Lema 3.2 y el ítem 2. del Teorema 3.6, $B((G_H - v_i)/K_H) = B(G_H/K_H) - v_i = H - v_i$. Como H es $(h + 1)$ -vértice crítico, $\chi(B((G_H - v_i)/K_H)) = h$. Luego, $G_H - v_i \in [h, 2, 1]$. Segundo, si $v = v_{ij}$ donde $e = v_i v_j \in E(H)$, como una consecuencia directa de la forma en que el grafo G_H fue obtenido de H , tenemos que $B((G_H - v_{ij})/(K_H - \{v_{ij}\})) = H - e$.

Entonces $\chi(B((G_H - v_{ij})/(K_H - \{v_{ij}\}))) = \chi(H - e)$. Y, $\chi(H - e) = h$ pues H es $(h + 1)$ -crítico. Con lo cual, $G_H - v_{ij} \in [h, 2, 1]$. Dado que H no tiene vértices de grado 1, G_H no tiene más vértices. \square

4.4. Caracterización de los grafos minimales no- $[h, 2, 1]$

En esta Sección, damos una caracterización de los grafos minimales no- $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$. El principal resultado de esta Sección es el Teorema 4.7 el cual establece que los únicos grafos VPT minimales no- $[h, 2, 1]$ son los grafos G_H construídos a partir de un grafo $(h + 1)$ -crítico H .

Además, en el Teorema 4.8, mostramos que la familia de grafos construídos a partir de grafos $(h + 1)$ -críticos junto con la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para VPT [24, 29], es la familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$.

Teorema 4.7 *Sea $h \geq 3$ y sea G un grafo VPT. G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$ si y sólo si existe un grafo $(h + 1)$ -crítico H tal que $G \simeq G_H$.*

Demostración: La recíproca sale directamente aplicando el Teorema 4.6.

Sea G un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. Por el Teorema 4.4, sabemos que $G \in$ Split sin vértices estables dominados. Sea (S, K) una partición split de G . Por el Teorema 4.2, $G \in [h+1, 2, 1]$. Sea $H = B(G/K)$. Por el ítem 3. del Teorema 4.5, H es un grafo $(h + 1)$ -crítico. Veamos que $G \simeq G_H$. Sea $G_H = (S_H, K_H)$. Por el ítem 2. del Teorema 3.6, $B(G_H/K_H) = H$; entonces $B(G_H/K_H) =$

$B(G/K)$. Luego, como $V(B(G_H/K_H)) = V(B(G/K))$, $S_H = S$. Además, dado que $E(B(G_H/K_H)) = E(B(G/K))$, por el ítem 2. del Teorema 4.5, $|K_H| = |K|$ y, por el ítem 1. del Teorema 4.5, $|N(k) \cap S| = 2$ para todo $k \in K$. Supongamos que $N(k) \cap S = \{v_i, v_j\}$; veremos que $v_i v_j \in E(H)$. Es claro que $v_i k \in E(G)$ y $v_j k \in E(G)$. Además, por el ítem 2. del Teorema 4.3, existen $k', k'' \in K$ tales que $k' v_i \in E(G)$, $k'' v_j \in E(G)$. Si $k' = k''$ entonces, como $|N(k) \cap S| = 2$ para todo $k \in K$, tenemos que k' y k son gemelos verdaderos en G , lo cual contradice que G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$. Luego, $k' \neq k''$. Esto es, $k' v_j \notin E(G)$ y $k'' v_i \notin E(G)$. De ahí que, $v_i v_j \in E(H)$.

En consecuencia, podemos definir una función f que asigna a cada vértice $k \in K$ una arista $v_i v_j \in E(H)$, esto es, un elemento de K_H . Notar que en G_H el vértice $v_{ij} \in K_H$ es adyacente exactamente a v_i y v_j . Luego, la función f puede ser extendida a una nueva función \tilde{f} desde $K \cup S$ a $K_H \cup S_H$, siendo la identidad desde S a S_H . Además, \tilde{f} es un isomorfismo entre G y G_H . \square

Teorema 4.8 *Sea $h \geq 3$. Un grafo G es minimal no- $[h, 2, 1]$ si y sólo si G es uno de los miembros de F_0, F_1, \dots, F_{16} o $G \simeq G_H$, donde H es un grafo $(h+1)$ -crítico.*

Demostración: Por el Teorema 4.7, si $G \simeq G_H$ donde H es un grafo $(h+1)$ -crítico, entonces G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

Si G es alguno de los miembros de F_0, \dots, F_{16} entonces $G \notin \text{VPT}$ y $G - v \in \text{VPT}$, para todo $v \in V(G)$. Además, en [9] fue probado que $G - v \in \text{EPT}$, para todo $v \in V(G)$. Esto es, $G - v \in \text{VPT} \cap \text{EPT} = [3, 2, 1]$ [20], lo cual implica que $G - v \in [h, 2, 1]$. En consecuencia, G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

Sea $h \geq 3$ y sea G un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$.

Caso (1): $G \notin \text{VPT}$. Como G es un grafo minimal no- $[h, 2, 1]$, entonces $G - v \in [h, 2, 1]$ para todo $v \in V(G)$. Luego, $G - v \in \text{VPT}$ para todo $v \in V(G)$. Entonces, G es un subgrafo inducido prohibido minimal de VPT. En consecuencia, G es uno de los miembros de F_0, F_1, \dots, F_{16} .

Caso (2): $G \in \text{VPT}$. Entonces, por el Teorema 4.7, $G \simeq G_H$, donde H es un grafo $(h + 1)$ -crítico.

Notar que, como todo G_H es un grafo VPT, ningún miembro de F_0, F_1, \dots, F_{16} es un subgrafo inducido de G_H . \square

Capítulo 5

Una condición necesaria para grafos **EPT** y una nueva familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales

Un camino en un árbol puede ser dado tanto por su conjunto de vértices como por su conjunto de aristas. En este último caso, si G es el grafo de intersección de una familia de caminos en un árbol, es decir, los vértices de G corresponden a los caminos, y dos vértices de G son adyacentes en G si y sólo si los caminos correspondientes comparten al menos una arista, decimos que G es el **grafo arista-intersección** de estos caminos y lo denotamos por $G = EPT(P)$, donde P es una familia de caminos en un árbol huésped T .

Decimos que G es **EPT** si es el grafo arista-intersección de una familia de caminos en un árbol.

Observamos que, por ser una clase de grafos de intersección, la clase de grafos EPT es hereditaria, es decir, si un grafo G es EPT entonces todo subgrafo inducido H de G también es EPT. De hecho, si $G = EPT(P)$ para formar una representación EPT de H , basta con tomar los caminos de P que corresponden a vértices de H y el mismo árbol T .

Los grafos EPT fueron introducidos por Syslo, en 1978, donde fueron denominados los **grafos ciclo fundamental** [34]. Su estudio fue motivado por encontrar el mayor conjunto posible de aristas en un árbol generador de un grafo de modo que los ciclos formados por dichas aristas no se intersecten. Además, en [34], Syslo conjeturó que $EPT \cap \text{Cordal} = EPT \cap \text{VPT}$. Una prueba de esta conjetura fue presentada por él mismo en [35] en el año 1985 usando los resultados estructurales obtenidos por Golubic y Jamison en [15], en particular las caracterizaciones de los grafos que son simultáneamente VPT y EPT.

Golubic y Jamison presentaron varios resultados para la clase EPT [16]. Estos resultados son referentes a los cliques, a la estructura de los grafos y al comportamiento de la clase para algunos problemas en grafos en relación con la Conjetura Fuerte de los Grafos Perfectos. Los mismos autores, en [15], probaron que el problema de reconocimiento de los grafos EPT es NP-completo. Tarjan consideró la descomposición por cliques de estos grafos en [36].

Finalmente, en 1986, Monma y Wei publicaron el trabajo más completo, hasta entonces, sobre las clases de grafos de intersección de caminos en un árbol donde estandarizaron tanto la terminología como el enfoque para el estudio de estas clases [31].

Si consideramos la intersección por vértices de subárboles de un árbol, tenemos exactamente la clase de los grafos cordales. Una pregunta natural es el análisis de la intersección por aristas de subárboles de un árbol. Otro caso a analizar es el de la intersección de una familia de caminos en un grafo cualquiera, sea ésta en aristas o en vértices. Golombic y Jamison mostraron que, en los casos citados, no se crea ninguna nueva clase y que los grafos en cuestión son todos los grafos [16]. Como consecuencia del análisis hecho para obtener estos resultados, es posible también mostrar que todo grafo es un grafo de intersección por aristas de subestrellas de una estrella.

Los resultados presentados en este Capítulo fueron publicados en [1].

En este Capítulo, damos una nueva condición necesaria para ser un grafo EPT. Para esto nos basamos en la estructura de los cliques de un grafo EPT. Además, encontramos una nueva familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT.

5.1. Resultados básicos sobre cliques en grafos EPT

En los grafos EPT los cliques tienen una estructura particular (ver [16]) la cual es muy importante para nuestro resultado.

El **grafo garra** $K_{1,3}$ consiste de un vértice central y tres aristas incidentes en él. Estas aristas son llamadas las patas de la garra (ver Figura 5.1).

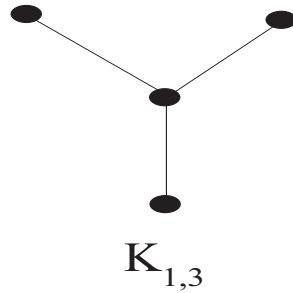


Figura 5.1: Grafo garra.

Sea $\langle P, T \rangle$ una representación EPT de G . Para cualquier arista e de T , sea $P[e] = \{P \in P \mid e \text{ es una arista de } P\}$. Para cualquier garra $K_{1,3}$ en T , sea $P[K_{1,3}] = \{P \in P \mid P \text{ contiene dos patas de } K_{1,3}\}$. La colección $P[e]$ corresponde a un clique en G y es llamada un **clique arista**. Similarmente, $P[K_{1,3}]$ también corresponde a un clique en G y es llamada un **clique garra**. (Ver un ejemplo en la Figura 5.2).

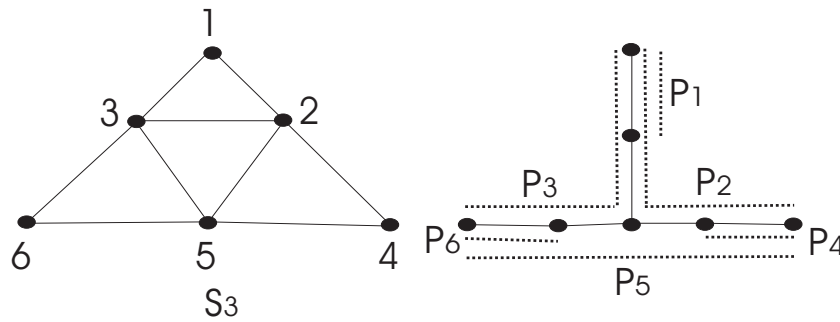


Figura 5.2: Una representación EPT del sol S_3 . El triángulo central $\{2, 3, 5\}$ es un clique garra; los otros tres triángulos son cliques aristas.

Teorema 5.1 [16] *Sea G un grafo y $\langle P, T \rangle$ una representación EPT de G . Cualquier clique de G corresponde o a una subcolección de caminos de la*

forma $P[e]$ para alguna arista e en T o de la forma $P[K_{1,3}]$ para alguna garra $K_{1,3}$ en T .

5.2. Una condición necesaria para grafos EPT

En esta sección damos una nueva condición necesaria para ser un grafo EPT basada en los siguientes conceptos:

Definición 5.1 Sea $C \in \mathcal{C}(G)$. Un vértice v de G es un **satélite de C** si $v \notin C$ y $B_v = N(v) \cap C$ es un subconjunto propio no vacío de C .

El conjunto B_v es llamado la **base de v** y éste se dice **minimal** si ninguna otra base de un satélite de C está propiamente contenida en B_v .

Teorema 5.2 Sea G un grafo EPT y sea C un clique de G . Si $w \in C$ entonces w pertenece a lo sumo a dos bases minimales diferentes de satélites no adyacentes de C .

Demostración: Sea $\langle P, T \rangle$ una representación EPT de G . Por el Teorema 5.1 sabemos que C es un clique arista o un clique garra. Consideramos las dos posibilidades:

Caso (1): $C = \{v_1, \dots, v_k\}$ es un clique arista, esto es, cada camino P_{v_i} , con $1 \leq i \leq k$, representando vértices de C en $\langle P, T \rangle$, tiene una arista $e = xy$ de T en común.

Sea $w \in C$, supongamos por el absurdo, que w está en tres bases minimales diferentes de satélites no adyacentes de C , digamos y_1, y_2, y_3 .

Sea P_w el camino correspondiente al vértice w en $\langle P, T \rangle$, entonces $|V(P_w) \cap V(P_{y_i})| \geq 2$, para $i = 1, 2, 3$. Dado que P_w es un camino que pasa por la arista e y w es adyacente a y_i , para $i = 1, 2, 3$, tenemos que al menos dos de los caminos P_{y_i} , $1 \leq i \leq 3$, deben estar en una misma componente conexa del grafo $(T - e)$. Supongamos que P_{y_1} y P_{y_2} son esos caminos. Dado que y_1 e y_2 son ambos adyacentes a w tenemos que los caminos P_{y_1} y P_{y_2} deben tener al menos una arista en común con el camino P_w , y esta arista no puede ser la misma para ambos caminos dado que y_1 no es adyacente a y_2 . Sean e_1 , e_2 esas aristas. Es claro que $e_1 \neq e$ y $e_2 \neq e$, porque $y_1 \notin C$ e $y_2 \notin C$, por definición de satélite de C . Entonces, dado que P_w es un camino estas aristas e_1, e_2 estarán en un mismo camino P de $(T - e)$. Supongamos que e_1 está más cercana a e que e_2 en este camino P , entonces cada camino P_{v_i} , con $v_i \in C$, que pasa por e_2 pasará por e_1 también, esto es, cada camino P_{v_i} , con $v_i \in C$, que intersecta a P_{y_2} en al menos una arista, intersectará a P_{y_1} en al menos una arista también, lo cual contradice la minimalidad de las bases.

Caso (2): $C = \{v_1, \dots, v_k\}$ es un clique garra en el cual la garra está formada por las aristas e_1, e_2, e_3 y un vértice central z .

Entonces todo camino P_{v_i} , $1 \leq i \leq k$, tiene exactamente dos de las aristas e_i , con $i = 1, 2, 3$, dado que ellos son caminos que se tocan en al menos dos vértices del árbol huésped T . Sea $w \in C$, supongamos, por el absurdo, que w está en tres bases minimales diferentes de satélites no adyacentes de C , digamos y_1, y_2, y_3 . Sea P_w el camino que representa a w en $\langle P, T \rangle$.

Observemos que $(T - z)$ es un grafo que tiene tres componentes conexas, digamos C_1, C_2 y C_3 . Si los caminos P_{y_i} correspondientes a los satélites y_i , $1 \leq i \leq 3$, intersectan más de una componente conexa de $(T - \{z\})$ estamos

en el Caso (1). Entonces cada P_{y_i} , $1 \leq i \leq 3$, intersecta exactamente una componente conexa de $(T - \{z\})$. Supongamos que P_{y_i} intersecta C_i , para $i = 1, 2, 3$. Dado que w es adyacente a y_i , $1 \leq i \leq 3$, tenemos que el camino P_w debe tener al menos una arista en común con cada camino P_{y_i} , $1 \leq i \leq 3$. Pero dado que los caminos P_{y_i} intersectan sólo a la componente conexa C_i , para cada $1 \leq i \leq 3$, P_w tendría a e_1 , e_2 y e_3 como aristas, lo cual contradice el hecho de que P_w es un camino. \square

Cabe destacar que el Teorema 5.2 da una condición necesaria para ser un grafo EPT, pero no una condición suficiente. Por ejemplo la familia de los grafos A_n , con $n \geq 4$, es una familia de grafos que no son EPT y que, sin embargo, verifican que si C es un clique de A_n y $w \in C$ entonces w pertenece a lo sumo a dos bases minimales diferentes de satélites no adyacentes de C (ver [19]).

5.3. Nuevos subgrafos prohibidos minimales para la clase EPT

En esta Sección analizaremos si con el resultado del Teorema 5.2 podrían aparecer nuevos grafos prohibidos minimales para la clase EPT (ver [19]). Más claramente, veremos que el resultado dado en el Teorema 5.2 conduce a exactamente tres nuevos subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT. (Ver Figura 5.7).

Supongamos que C es un clique, y_1, y_2, y_3 son tres satélites de C y B_1, B_2, B_3 son bases de y_1, y_2 e y_3 , respectivamente. Dado que estamos interesados

en configuraciones minimales que no satisfagan las condiciones del Teorema 5.2 estas bases deben tener las siguientes propiedades:

1. Existe un único vértice de C , digamos 1, tal que $1 \in B_i$, para $i = 1, 2, 3$,
2. $B_i \not\subseteq B_j$, para $i \neq j$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$,
3. $\bigcup B_i = C$,
4. $B_i \subsetneq C$, para $i = 1, 2, 3$.

Caso (1): Supongamos que los vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a lo sumo a una base. Notar que debe haber exactamente un vértice, diferente de 1, perteneciendo a cada base, por 2. y la minimalidad. Supongamos que $2 \in B_1$, $3 \in B_2$ y $4 \in B_3$ (Ver Figura 5.3).

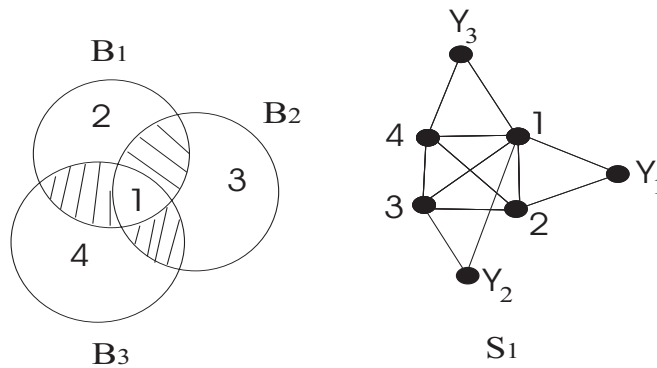


Figura 5.3: Los vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a lo sumo a una base, y el grafo obtenido en este caso.

Caso (2): Supongamos que exactamente un vértice de C , diferente de 1, pertenece a dos bases minimales distintas, digamos $2 \in B_1 \cap B_2$. Dado que las bases son minimales y diferentes debe haber al menos un vértice de C

perteneciendo sólo a B_2 , digamos $3 \in B_2$. Ahora, debe existir un vértice de C perteneciendo sólo a B_1 , porque en otro caso tendríamos que $B_1 \subseteq B_2$, supongamos que $4 \in B_1$. Por el mismo motivo, debe existir un vértice de C perteneciendo sólo a B_3 , digamos $5 \in B_3$, en otro caso tendríamos que $B_3 \subseteq B_1$ o $B_3 \subseteq B_2$. Pero notemos que en este caso si removemos el vértice 2 retornamos al caso anterior. Entonces el grafo G obtenido tiene S_1 como subgrafo inducido (Ver Figura 5.4).

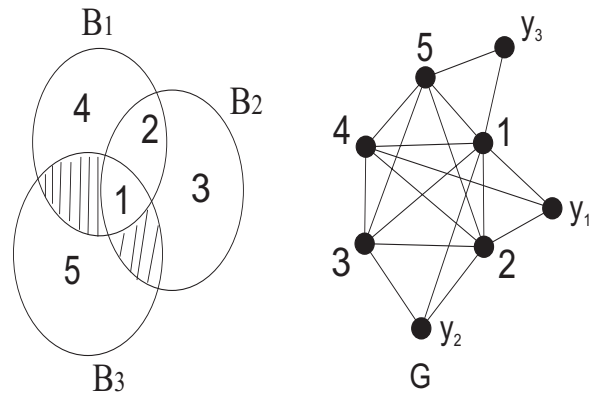


Figura 5.4: Exactamente un vértice de C , diferente de 1, pertenece a dos bases minimales diferentes.

Caso (3): Supongamos que exactamente dos vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a dos bases minimales diferentes, supongamos que $2 \in B_1 \cap B_2$, $3 \in B_1 \cap B_3$. Ahora vemos que debe haber al menos un vértice de C perteneciendo sólo a B_2 , porque en otro caso tendríamos que $B_2 \subseteq B_1$, supongamos que $4 \in B_2$. Y debe haber al menos un vértice perteneciendo sólo a B_3 , en otro caso tendríamos que $B_3 \subseteq B_1$, supongamos que $5 \in B_3$ (Ver Figura 5.5).

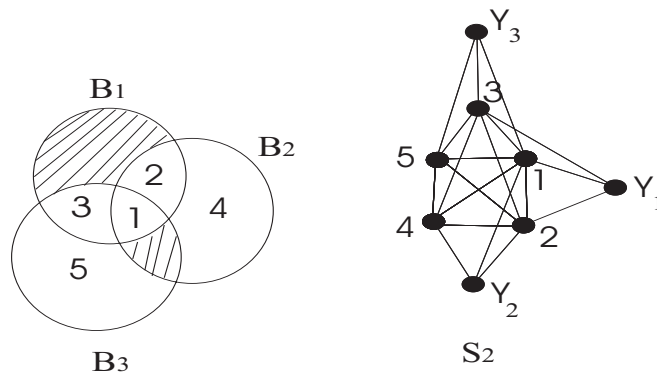


Figura 5.5: Exactamente dos vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a dos bases minimales diferentes, y el grafo obtenido en este caso.

Caso (4): Supongamos que exactamente tres vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a dos bases minimales diferentes, digamos $2 \in B_1 \cap B_2$, $3 \in B_2 \cap B_3$, $4 \in B_1 \cap B_3$. Notemos que no es necesario agregar ningún otro vértice a las bases por las condiciones de minimalidad. (Ver Figura 5.6).

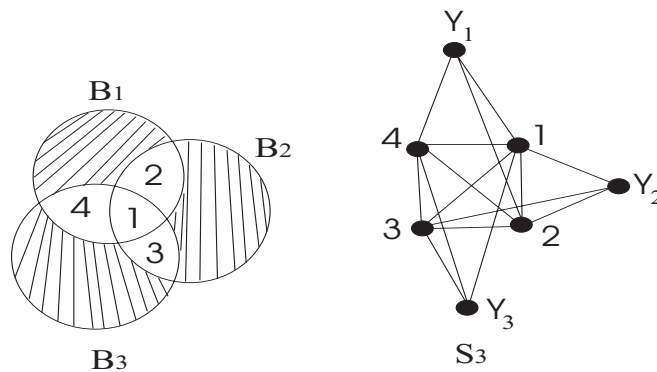


Figura 5.6: Exactamente tres vértices de C , diferentes de 1, pertenecen a dos bases minimales diferentes, y el grafo obtenido en este caso.

Es fácil de ver que los subgrafos obtenidos removiendo cualquier vértice

de S_1 , S_2 o S_3 son grafos EPT, esto es, todo subgrafo inducido de S_1 , S_2 o S_3 es un grafo EPT.

Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.3 S_1 , S_2 , S_3 son subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT.

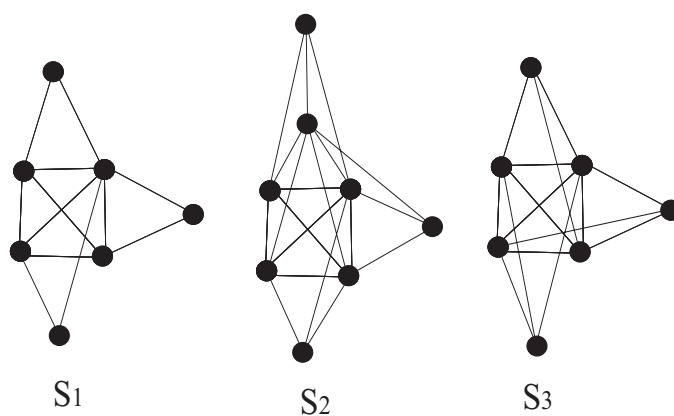


Figura 5.7: Una nueva familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT.

Capítulo 6

Grafos EPT en árboles de grado acotado

En este Capítulo nos enfocamos en los grafos EPT que pueden ser representados en un árbol con grado acotado. Respondemos negativamente una pregunta que Golubic, Lyshteyn y Stern dejaron abierta en [19], para esto nos basamos en la representación EPT que tienen los ciclos de un grafo EPT.

Los resultados presentados en este Capítulo están incluidos en un trabajo que se encuentra en prensa [2].

6.1. Resultados conocidos

Definición 6.1 [19] Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación EPT de un grafo G . Una **torta de tamaño n** es un subgrafo estrella de T con vértice central q y vecinos q_1, \dots, q_n tal que cada “porción” $q_i q_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$ está contenida en un miembro diferente de \mathcal{P} ; asumimos que la adición es módulo n . (Ver

Figura 6.1).

Sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación EPT de un grafo G . Se sabe que los ciclos sin cuerdas de n vértices, denotados por C_n , son grafos EPT. Además, en [19] fue probado que si G tiene un ciclo sin cuerdas de longitud $n \geq 4$, entonces $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ contiene una torta de tamaño n .

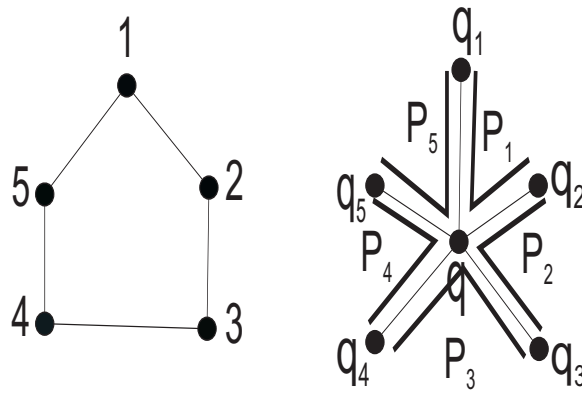


Figura 6.1: El ciclo C_5 y una representación EPT: una torta de tamaño 5.

Notemos que, en una torta, los caminos correspondientes a k vértices consecutivos del ciclo cubren $k + 1$ aristas incidentes en q .

Dado que una torta de tamaño n para un ciclo C_n de tamaño n requiere un árbol huésped con un vértice de grado n , tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.1 [16] *Sea $G \in EPT$ y $h \geq 3$. Si $G \in [h, 2, 2]$, entonces G es libre de $\{C_n \mid n > h\}$.*

En [19], Golubic, Lipshteyn y Stern estudiaron varios aspectos de las clases $[h, 2, 2]$, para $h \geq 2$. En particular probaron que en la clase de los grafos EPT, la recíproca del Teorema 6.1 es verdadera para $h = 3$ y falsa

para $h = 4$. Usaron resultados generales sobre los grafos Cordales y los grafos Débilmente Cordales (recordemos que un grafo es Débilmente Cordal si no contiene ciclos inducidos C_n , con $n \geq 5$, ni sus complementos como subgrafos inducidos) los cuales se aplican sólo cuando $h = 3$ o $h = 4$. Su prueba es basada en los hechos de que $[3, 2, 2] = \text{EPT} \cap \text{Cordal}$ y $[4, 2, 2] = \text{EPT} \cap \text{Débilmente Cordal}$ [20]. Dejaron abierta la pregunta de si la recíproca del Teorema 6.1 es verdadera para $h \geq 5$.

En este trabajo, se responde negativamente a esta pregunta. Describimos, para cada $h \geq 5$, un grafo EPT libre de $\{C_n \mid n > h\}$ y que sin embargo no se puede representar en un árbol huésped con grado máximo h .

6.2. Nuestros resultados

En lo que sigue presentamos los grafos que serán usados para responder la pregunta hecha por Golubic et al. en [19]: Puede cualquier grafo EPT sin ciclos inducidos de tamaño más grande que h ser representado en un árbol huésped con grado máximo h ?

Definición 6.2 Sean n_1, n_2 y n_3 enteros positivos. Un **prisma general** F_{n_1, n_2, n_3} consiste de dos triángulos $\{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$; y tres caminos disjuntos sin cuerdas Q_i para $1 \leq i \leq 3$ de longitud (número de aristas) n_i y vértices extremos a_i, b_i respectivamente. (En la Figura 6.2 se muestra un ejemplo).

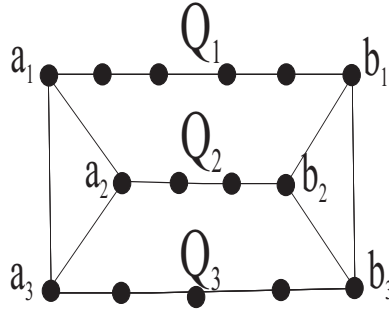


Figura 6.2: El prisma general $F_{5,3,4}$.

Observar que:

- (1) El prisma general $F_{1,1,1}$ es isomorfo al complemento del grafo C_6 .
- (2) Por simetría, en un prisma general, el orden de los subíndices es irrelevante, esto es, $F_{n_1, n_2, n_3} \simeq F_{n_1, n_3, n_2} \simeq F_{n_2, n_1, n_3} \simeq F_{n_2, n_3, n_1} \simeq F_{n_3, n_2, n_1} \simeq F_{n_3, n_1, n_2}$.
- (3) El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} tiene $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ vértices.
- (4) El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} sin los vértices a_1 y b_3 es un camino sin cuerdas de longitud $n_1 + n_2 + n_3$.
- (5) El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} contiene exactamente tres ciclos inducidos:

$$\begin{aligned}
 Q_1 \widehat{Q_2} & \text{ de longitud } n_1 + n_2 + 2; \\
 Q_1 \widehat{Q_3} & \text{ de longitud } n_1 + n_3 + 2; \\
 Q_2 \widehat{Q_3} & \text{ de longitud } n_2 + n_3 + 2;
 \end{aligned}$$

donde $Q_i \widehat{Q_j}$ es la concatenación de los caminos Q_i y la reversa de Q_j .

Lema 6.1 *El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} es un $[h, 2, 2]$ grafo para $h = n_1 + n_2 + n_3 + 2$.*

Demostración: Sea T una estrella con vértice central q y vértices pendientes q_i para $1 \leq i \leq n_1 + n_2 + n_3 + 2$. Para cada i , $1 \leq i \leq n_1 + n_2 + n_3 + 1$, sea P_i el subcamino del árbol huésped T inducido por los vértices q_i, q y q_{i+1} .

El grafo arista-intersección de esta familia de caminos es un camino sin cuerdas isomorfo a F_{n_1, n_2, n_3} sin los vértices a_1 y b_3 ; esto es, necesitamos agregar a esta familia otros dos caminos, digamos P y P' , representando a los vértices a_1 y b_3 respectivamente.

Sea P el subcamino de T inducido por los vértices q_1, q y $q_{n_1+n_2+2}$; y sea P' el subcamino de T inducido por los vértices $q_{n_1+n_2+n_3+2}, q$ y q_{n_1+1} . Ver Figura 6.3.

Es claro que el vértice representado por P es adyacente a aquellos representados por $P_1, P_{n_1+n_2+1}$ y $P_{n_1+n_2+2}$; mientras que el vértice representado por P' es adyacente a aquellos representados por $P_{n_1+n_2+n_3+1}, P_{n_1}$ y P_{n_1+1} ; de esta manera obtenemos un $(h, 2, 2)$ -representación del prisma general F_{n_1, n_2, n_3} . \square

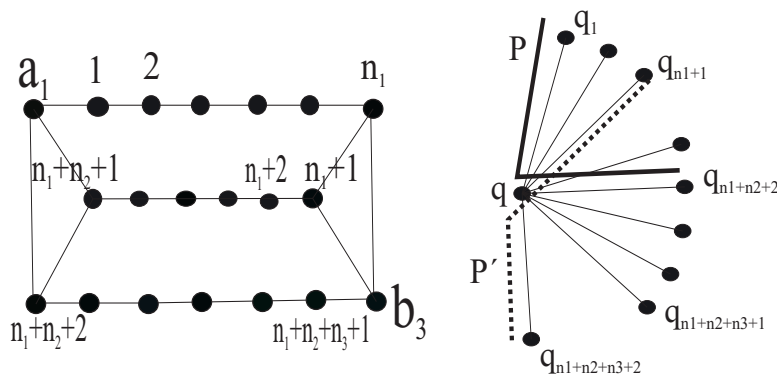


Figura 6.3: El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} y una $(h, 2, 2)$ -representación, donde $h = n_1 + n_2 + n_3 + 2$.

El siguiente teorema muestra que los ciclos inducidos no son las únicas estructuras en un grafo EPT que imponen condiciones en los grados de los vértices del árbol huésped.

Teorema 6.2 *Sea $h = n_1 + n_2 + n_3 + 1$. El prisma general F_{n_1, n_2, n_3} no es un $[h, 2, 2]$ grafo, sin embargo es libre de $\{C_n \mid n > h\}$.*

Demostración: El caso $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ fue resuelto por Golumbic et al. en [19] como mencionamos en la Sección 6.1. Luego, asumimos $n_1 \geq 2$, lo cual significa que Q_1 tiene al menos tres vértices.

Supongamos que $F_{n_1, n_2, n_3} \in [h, 2, 2]$ para $h = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; y sea $\langle \mathcal{P}, T \rangle$ una representación EPT satisfaciendo que el grado de todo vértice de T es menor o igual que h .

Dado que $Q_1 \widehat{Q_2}$ induce un ciclo de tamaño $n_1 + n_2 + 2$, en la representación hay una torta de tamaño $n_1 + n_2 + 2$. Llamamos q al vértice central de esta torta.

Por otro lado, dado que $Q_1 \widehat{Q_3}$ también induce un ciclo, en la representación hay otra torta. Afirmamos que el vértice central de la segunda torta es el mismo vértice q . Esto se sigue de que:

(i) en una torta, la intersección por vértices de tres caminos correspondientes a tres vértices consecutivos es exactamente el vértice central de la torta;

(ii) los primeros tres vértices de Q_1 son consecutivos en ambos ciclos $Q_1 \widehat{Q_2}$ y $Q_1 \widehat{Q_3}$.

Ahora, los caminos correspondientes a los vértices de $Q_1 \widehat{Q_2}$ cubren $n_1 + n_2 + 2$ aristas de T incidentes en q .

Por otro lado, los caminos correspondientes a los $n_3 - 1$ vértices internos de Q_3 deben cubrir n_3 aristas de T incidentes en q las cuales son diferentes de las $n_1 + n_2 + 2$ cubiertas por los vértices de $Q_1\widehat{Q_2}$, porque ningún vértice interno de Q_3 es adyacente a un vértice de $Q_1\widehat{Q_2}$.

Obtenemos que q tiene grado al menos $n_3 + (n_1 + n_2 + 2)$, lo cual contradice la asunción de que cada vértice de T tiene grado a lo sumo $h = n_1 + n_2 + n_3 + 1$.

Finalmente, por (5) y dado que $n_1 + n_2 + 2 \leq n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1 + n_3 + 2 \leq n_1 + n_2 + n_3 + 1$ y $n_2 + n_3 + 2 \leq n_1 + n_2 + n_3 + 1$, el prisma general F_{n_1, n_2, n_3} no tiene ciclos de tamaño más grande que $h = n_1 + n_2 + n_3 + 1$. \square

Finalmente, damos el siguiente teorema el cual generaliza el Teorema 6.1:

Teorema 6.3 *Sea $h \geq 4$. Si $G \in [h, 2, 2]$, entonces G es libre de $\{F_{n_1, n_2, n_3}, C_n | n > h \text{ y } n_1 + n_2 + n_3 + 1 = h\}$.*

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

- En el Capítulo 3, damos, para cualquier $h \geq 3$, una caracterización de los grafos $[h, 2, 1]$, y probamos que reconocer los grafos que pertenecen a esta clase es un problema NP-completo. Además, mostramos una familia, llamada SVS, en la cual este problema es polinomial.

Estamos trabajando en describir una subclase más grande de VPT donde este problema permanezca polinomial. Por otro lado, estamos analizando la posibilidad de extender las técnicas usadas en este capítulo para caracterizar las clases $[h, 2, 2]$.

- En el Capítulo 4, mostramos que todos los grafos VPT que son minimales no- $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$, son split sin vértices estables dominados (ver Figura 7.1). Usando este resultado, caracterizamos la clase $[h, 2, 1]$ por subgrafos inducidos prohibidos minimales para cada $h \geq 3$ fijo.

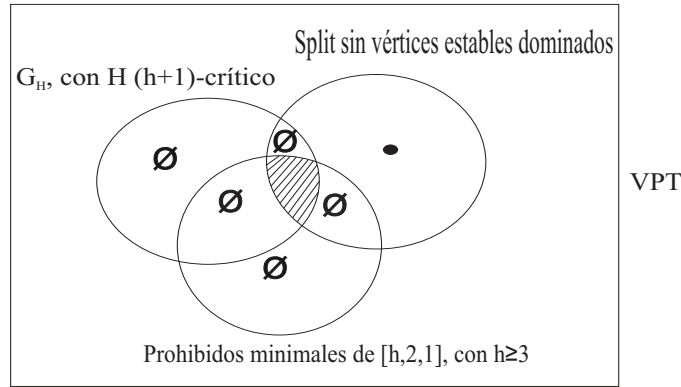


Figura 7.1: Todos los prohibidos minimales de $[h, 2, 1]$, con $h \geq 3$, que son VPT pueden ser obtenidos de un grafo $(h + 1)$ -crítico.

Notar que, tomando $h = 3$, obtenemos una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase $VPT \cap EPT = EPT \cap \text{Cordial} = [3, 2, 2] = [3, 2, 1]$ (ver [15]).

Nos gustaría encontrar algunas propiedades sobre la representación de los grafos VPT que son minimales no- $[h, 2, 1]$, para $h \geq 3$.

- En el Capítulo 5 damos una nueva familia finita de subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT, pero sabemos que esta familia es incompleta pues por ejemplo el grafo A_4 (ver Figura 7.2) es un grafo minimal no-EPT [19] y A_4 no está en nuestra familia de subgrafos inducidos prohibidos minimales.

Estamos trabajando en encontrar nuevos subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase EPT.

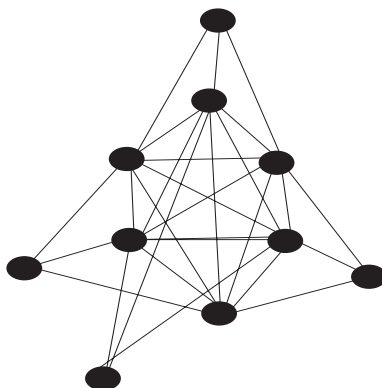


Figura 7.2: A_4 no es un grafo EPT.

- En [19], Golumbic, Lipshteyn y Stern estudiaron varios aspectos de las clases $[h, 2, 2]$, para $h \geq 2$. En particular probaron que en la clase de los grafos EPT, la recíproca del Teorema 6.1 es verdadera para $h = 3$ y es falsa para $h = 4$. Usaron varios resultados generales de las clases de los grafos Cordales y Débilmente Cordales (ver [7] para las definiciones) los cuales se aplican sólo cuando $h = 3$ o $h = 4$. Dejaron abierta la pregunta de saber si la recíproca del Teorema 6.1 es verdadera para $h \geq 5$. En el Capítulo 6, respondemos negativamente a esta pregunta. Describimos, para todo $h \geq 5$, un grafo EPT que es libre de $\{C_n | n > h\}$ y, sin embargo, no puede ser representado en un árbol huésped de grado h .

Estamos trabajando en encontrar la lista completa de grafos EPT que son subgrafos inducidos prohibidos minimales para la clase $[h, 2, 2]$.

Bibliografía

- [1] L. Alcón, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, *A necessary condition for EPT graphs and a new family of minimal forbidden subgraphs*, Matemática Contemporánea. 39 (2010) 111-120.
- [2] L. Alcón, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, *EPT graphs on bounded degree trees*, aceptado para publicar en Matemática Contemporánea. (2014)
- [3] L. Alcón, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, *Recognizing vertex intersection graphs of paths on bounded degree trees*, Discrete Applied Mathematics. 162 (2014) 70-77.
- [4] L. Alcón, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, *On minimal non $[h,2,1]$ graphs*, Electronics Notes in Discrete Mathematics. 44 (2013) 115-120.
- [5] L. Alcón, M. Gutierrez, M. P. Mazzoleni, *Characterizing $[h,2,1]$ graphs by minimal forbidden induced subgraphs*, arXiv:1307.2139, manuscript. (2013).
- [6] J. Bondy, U. Murty, *Graph Theory*, Springer, New York, NY, USA. (2007).

- [7] A. Brandstädt, V. B. Le, J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. (1999).
- [8] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam. (1973).
- [9] M. R. Cerioli, H. I. Nobrega, P. Viana, *A partial characterization by forbidden subgraphs of edge path graphs*, Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization. (2011) 109-112.
- [10] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics. 164 (2006) 51-229.
- [11] E. Cohen, M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, M. Stern, *What is between chordal and weakly chordal graphs?*, Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Lecture Notes in Computer Science. 5344 (2008) 275-286.
- [12] N. Eaton, Z. Füredi, A. V. Kostochka, J. Skokan, *Tree representations of graphs*, European Journal of Combinatorics. 28 (2007) 1087-1098.
- [13] F. Gavril, *The intersection graphs of subtrees in a tree are exactly the chordal graphs*, Journal of Combinatorial Theory. 16 (1974) 47-56.
- [14] F. Gavril, *A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees*, Discrete Math. 23 (1978) 211-227.
- [15] M. C. Golumbic, R. E. Jamison, *Edge and vertex intersection of paths in a tree*, Discrete Mathematics. 38 (1985) 151-159.
- [16] M. C. Golumbic, R. E. Jamison *The edge intersection graphs of paths in a tree*, Journal of Combinatorial Theory. 55 (1985) 8-22.

- [17] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, In: Annals of Discrete Mathematics, North Holland. 57 (2004).
- [18] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, M. Stern, *The k -edge intersection graphs of paths in a tree*, Discrete Applied Mathematics. 156 (2008) 451-461.
- [19] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, M. Stern, *Equivalences and the complete hierarchy of intersection graphs of paths in a tree*, Discrete Applied Mathematics. 156 (2008) 3203-3215.
- [20] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, M. Stern, *Representing edge intersection graphs of paths on degree 4 trees*, Discrete Mathematics. 308 (2008) 1381-1387.
- [21] M. C. Golumbic, M. Lipshteyn, M. Stern, *Intersection models of weakly chordal graphs*, Discrete Applied Mathematics. 157 (2009) 2031-2047.
- [22] D. L. Greenwell, R. L. Hemminger, J. B. Klerlein *Forbidden subgraphs*, In: F. Hoffman, R. Lavow and R. Thomas (Eds.), Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing. Utilitas Mathematica. (1973) 389-394.
- [23] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica 1. (1981) 169-197.
- [24] M. Gutierrez, S. B. Tondato, J. L. Szwarcfiter, *A forbidden subgraph characterization of paths graphs*, Electronics Notes in Discrete Mathematics. Proceedings of GRACO 2005. 19 (2005) 281-287.

- [25] R. E. Jamison, H. M. Mulder, *Tolerance intersection graphs on binary trees with constant tolerance 3*, Discrete Mathematics. 215 (2000) 115-131.
- [26] R. E. Jamison, H. M. Mulder, *Constant tolerance intersection graphs of subtrees of a tree*, Discrete Mathematics. 290 (2005) 27-46.
- [27] R. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, In: R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, Complexity of Computer Computations. (1972) 85-104.
- [28] C. G. Lekkerkerker, J. C. Boland, *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*, Fundamenta Mathematicae. 51 (1962) 45-64.
- [29] B. L ev eque, F. Maffray, M. Preissmann, *Characterizing path graphs by forbidden induced subgraphs*, Journal of Graph Theory 62 (2009) 369-384.
- [30] T. McKee, F. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory*, SIAM: Philadelphia, PA, USA. (1999).
- [31] C. L. Monma, V. K. Wei, *Intersection graphs of paths in a tree*, Journal of Combinatorial Theory. (1986) 140-181.
- [32] F. R. Morris, E. Scheinerman, *Connectivity threshold for random chordal graphs*, Graphs and Combinatorics. 7 (1991) 177-181.
- [33] A. A. Schaffer, *A faster algorithm to recognize undirected path graphs*, Discrete Applied Mathematics. 43 (1993) 261-295.

- [34] M. M. Syslo, *On characterizations of cycle graphs and on other families of intersection graphs*, Tech. Rep., Institute of Computer Science, University of Wroclaw, Poland. 40 (1978).
- [35] M. M. Syslo, *Triangulated edge intersection graphs of paths in a tree*, Discrete Mathematics. 55 (1985) 217-220.
- [36] R. Tarjan, *Decomposition by clique separators*, Discrete Mathematics. 55 (1985) 221-232.