ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES DE POISSON COMO PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS

Pintarelli María B.† y Vericat Fernando ‡

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata
† Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina,
mariabea@mate.unlp.edu.ar
‡ Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos(IFLYSIB) CONICET-La Plata, Argentina.

Resumen: Usando la identidad de Green mostramos que encontrar soluciones de la ecuación de Helmholtz y la ecuación de Poisson no lineal bajo condiciones de contorno de Cauchy es equivalente a resolver una ecuación integral de Fredholm de primera clase, la cual puede ser tratada como un problema de momentos bidimensional de Hausdorff en el caso lineal y como un problema inverso de momentos generalizado en el caso no lineal. En ambos casos encontramos soluciones aproximadas de los problemas de momentos obtenidos y cotas para los errores correspondientes. Ilustramos los diferentes casos con ejemplos.

Palabras claves: *problema de momentos, densidad bi-dimensional, estabilidad de la solución, ecuaciones diferenciales parciales.*
2010 AMS Subjects Classification: 44A60 – 35Qxx

1. INTRODUCCIÓN

El problema de momentos de Hausdorff bidimensional consiste en recobrar una función $f(x,y)$ dados sus momentos

$$\mu_{ij} = \iint_I x^i y^j f(x,y)dxdy \qquad i,j = 0,1,2,.... \qquad \text{donde } I = (0,1)\times(0,1).$$

Existe solución cuando $\sum_i \sum_j a_{ij}\mu_{ij} > 0$ para todo polinomio $P(x,y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j$ tomando valores no negativos para todo $(x,y) \in I$ ([2],cap. 1, teorema 1.1).

2. ECUACIÓN DE HELMHOLTZ O ECUACIÓN CON AUTOVALOR.

Consideramos la ecuación

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = au(x,t) + bf(x,t) \quad x > 0 \qquad t > 0 \qquad (1)$$

Tomamos la función auxiliar $h(x,t,r,s) = e^{-x(r+1)}e^{-t(s+1)}$ que verifica

$$h_{rr}(x,t,r,s) + h_{ss}(x,t,r,s) = (x^2+t^2)h(x,t,r,s) \qquad (2).$$

En la región $D = [0,M]\times[0,M]$ aplicamos la identidad de Green

$$\iint_D u\nabla^2 h dA = \oint_{\partial D} u(\nabla h).nd\ell - \iint_D (\nabla u).(\nabla h)dA$$

Reemplazando aquí *h* y usando (2) junto con (1) obtenemos

$$\int_0^M \int_0^M [(x^2+t^2)h(x,t,r,s)u(r,s) - au(r,s)h(x,t,r,s)]drds = \phi(x,t) \qquad (3)$$

donde

$$\phi(x,t)=\int_0^M h(x,t,r,M)[u_s(r,M)+tu(r,M)]dr-\int_0^M h(x,t,M,s)[u_r(M,s)+xu(M,s)]ds-$$
$$\int_0^M h(x,t,r,0)[u_s(r,0)+tu(r,0)]dr+\int_0^M h(x,t,0,s)[u_r(0,s)+xu(0,s)]ds+b\int_0^M\int_0^M f(r,s)drds$$

Asumimos que cuando $M\to\infty$

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M h(x,t,r,M)[u_s(r,M)+tu(r,M)]dr=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{M\to\infty}\int_0^M h(x,t,M,s)[u_r(M,s)+xu(M,s)]ds=0$$

Entonces haciendo $M\to\infty$:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (x^2+t^2-a)h(x,t,r,s)u(r,s)drds=\underbrace{-\int_0^\infty h(x,t,r,0)[u_s(r,0)+tu(r,0)]dr+\int_0^\infty h(x,t,0,s)[u_r(0,s)+xu(0,s)]ds+b\int_0^\infty\int_0^\infty f(r,s)drds}_{\phi 1(x,t)} \qquad (4)$$

Reemplazando $x=m$ y $t=n$ $(m,n\in N)$ obtenemos

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-mr}e^{-ns}u(r,s)drds=\underbrace{\frac{\phi 1(m,n)\,e^{m+n}}{(m^2+n^2-a)}}_{\mu_{mn}} \qquad m,n=0,1,2,...$$

Esto puede ser visto como un problema de momentos bidimensional generalizado de Stieltjes. Haciendo el cambio de variable $(r,s)\to(z_1,z_2)$ donde $z_1=e^{-r}$ y $z_2=e^{-s}$ se tiene un problema de momentos de Hausdorff dado por

$$\int_0^1\int_0^1 z_1^{\,m} z_2^{\,n} w(z_1,z_2)d\,z_1\,d\,z_2=\overline{\mu}_{mn} \qquad m,n=0,1,2,... \qquad (5)$$

con $\overline{\mu_{mn}}=\phi 1(m+1+\alpha_1,n+1+\alpha_2)$ y $w(z_1,z_2)=u(-\ln z_1,\ln z_2)\,z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}$ (6)

Aquí α_1 y α_2 son elegidos convenientemente para que los momentos $\overline{\mu_{mn}}$ estén bien definidos.

Las ecuaciones (5) y (6) representan un problema de momentos de Hausdorff bidimensional para $w(z_1,z_2)$.

Hemos estudiado este problema en referencia [4].

Consideramos el problema de momentos finito tomando $\overline{\mu_{mn}}$ $m,n=0,1,2,...N$.

Estimamos $w(z_1,z_2)$ por la expansión truncada

$$w_N(z_1,z_2)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\lambda_{ij}P_{ij}(z_1,z_2)$$

donde $P_{ij}(z_1,z_2)=P_i(z_1)P_j(z_2)$ con $P_i(z)$ $(i=1,2,...)$ son los polinomios de Legendre definidos en $[0,1]$ y los coeficientes λ_{ij} son

$$\lambda_{ij}=\sum_{k_1=0}^{i}\sum_{k_2=0}^{j}c_{ik_1}c_{jk_2}\mu_{k_1k_2} \qquad i,j=0,1,2,...,N \qquad\qquad c_{ik}=\sqrt{2i+1}\,(-1)^k\binom{i}{k}\binom{i+k}{k}$$

Para que el método de la expansión truncada [3] sea válido se requiere que [4] $\phi 1(x,t)\in L^2[[0,\infty)\times[0,\infty)]$ y $\int_0^\infty\int_0^\infty [x\,u_x^2(x,t)+t\,u_t^2(x,t)]e^{x+t}dxdt<\infty$

Teorema 1 *Llamando* $u_N(x,t)=w_N(e^{-x},e^{-t})$ *y si* $u(x,t)=w(e^{-x},e^{-t})$ *verifica que*
$u(x,t)e^{\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}t}\in L^2(R_+^2)$; $u_x(x,t)e^{\frac{1}{2}x}e^{-\frac{1}{2}t}\in L^2(R_+^2)$; $u(x,t)e^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}t}\in L^2(R_+^2)$; $u_t(x,t)e^{-\frac{1}{2}x}e^{\frac{1}{2}t}\in L^2(R_+^2)$

y se define la norma $\left\|f(x,t)\right\|_w^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \left|f(x,t)\right|^2 e^{-(1+2\alpha_1)x} e^{-(1+2\alpha_2)t}\,dxdt$, *entonces*

$$\left\|u_N(x,t)-u(x,t)\right\|_w^2 \le \frac{1}{4(N+1)^2}(I_1+I_2)$$

donde

$$I_r = \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha_r^2 u(x,t)^2 e^{-2(\alpha_1+\frac{(-1)r}{2})x} e^{-2(\alpha_2-\frac{(-1)r}{2})t}\,dxdt + \int_0^\infty\int_0^\infty [u_x(x,t)^{2-r}+u_t(x,t)^{r-1}]^2 e^{-2(\alpha_1+\frac{(-1)r}{2})x} e^{-2(\alpha_2-\frac{(-1)r}{2})t}\,dxdt$$

con $r=1,2$. *Si los momentos* $\overline{\mu_{mn}} = \phi 1(m+1+\alpha_1, n+1+\alpha_2)$ *tienen error tal que*

$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \mu_{mn}{}^2 \le \varepsilon^2$ *entonces* $\left\|u_N(x,t)-u(x,t)\right\|_w^2 \le \frac{1}{4(N+1)^2}(I_1+I_2)+\varepsilon^2 c^2$

con $c = (2N+1)(N+1)^2 2^{6N}\frac{2^8}{2^6-1}$.

Ejemplo Numérico

Consideramos la ecuación

$$u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t) = u(x,t) - e^{-x-t}2x + e^{-(t+x)}t(x-2)$$

con condiciones iniciales $u(x,t=0)=0 \quad u_t(x,t=0)=xe^{-x}$
y condiciones de contorno (Cauchy) en el origen: $u(x=0,t)=0 \quad u_x(x=0,t)=te^{-t}$
La solución es $u(x,t)=(xt)e^{-x}e^{-t}$
En la Figura 1 se superponen los gráficos de $u_N(x,t)$ *(gris claro) y* $u(x,t)$ *(gris oscuro)*

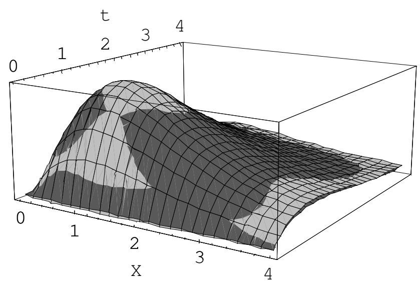

Figura 1

El Teorema 1 provee una estimación de la "exactitud" de la solución aproximada. Calculamos para el ejemplo dado

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|u_N(x,t)-u(x,t)\right|^2 dxdt\right)^{1/2} = 0.000556895$$

$$\phi 1(x,t) = \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{3+2t+2x}{(1+t)^2(1+x)^2}$$

3. Ecuación de Poisson no lineal

Consideremos ahora la ecuación

$$u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t) = ag(u(x,t)) + bf(x,t) \quad \text{con} \quad (x,t)\in I=[a1,b1]\times[a2,b2] \tag{7}$$

Asumimos que la función $u(x,t)$ está sujeta a condiciones iniciales:

$u(x,t=a2)=\varphi 1(x)$; $u(x,t=b2)=\varphi 2(x)$; $u(x=a1,t)=\varphi 3(x)$; $u(x=b1,t)=\varphi 4(x)$;
$u_t(x,t=a2)=\varphi 5(x)$; $u_t(x,t=b2)=\varphi 6(x)$; $u_x(x=a1,t)=\varphi 7(x)$; $u_x(x=b1,t)=\varphi 8(x)$

En este caso tomamos la función auxiliar:

$$h(x,t,r,s) = e^{-x(r+1)}\cos(t(s+1)) \qquad (8)$$

que verifica

$$h_{rr}(x,t,r,s) + h_{ss}(x,t,r,s) = (x^2 - t^2)h(x,t,r,s) \qquad (9).$$

Al tomar $x = t$ en (9) se tiene que

$$h_{rr}(t,t,r,s) + h_{ss}(t,t,r,s) = (t^2 - t^2)h(t,t,r,s) = 0$$

Aplicamos la identidad de Green en la región $D = [a1,b1]\times[a2,b2]$ y obtenemos:

$$\int_{a1}^{b1}\int_{a2}^{b2} g(u(r,s))h(t,t,r,s)dsdr = -\frac{1}{a}\phi(t,t) \qquad (10)$$

con

$$\phi(t,t) = \int_{a1}^{b1} h(t,t,r,b2)[u_s(r,b2) + tu(r,b2)]dr - \int_{a2}^{b2} h(t,t,b1,s)[u_r(b1,s) + tu(b1,s)]ds -$$
$$\int_{a1}^{b1} h(t,t,r,a2)[u_s(r,a2) + tu(r,a2)]dr + \int_{a2}^{b2} h(t,t,a1,s)[u_r(a1,s) + tu(a1,s)]ds + b\int_{a1}^{b1}\int_{a2}^{b2} f(r,s)dsdr$$

Se debe resolver

$$\int_{a1}^{b1}\int_{a2}^{b2} g(u(r,s))\,K_m(r,s)drds = \mu_m \quad m = 0,1,2,\dots ,$$

con $$K_m(r,s) = \int_{a2}^{b2} K(t,r,s)\,\Psi_m(t)dt \qquad \mu_m = -\frac{1}{a}\int_{a2}^{b2}\phi(t,t)\,\psi_m(t)dt$$

donde $K(t,r,s) = e^{-(r+1)t}\cos((s+1)t)$ y $\Psi_m(t)$ una base de $L^2(I)$.
Si las funciones $K_m(r,s)$ $m = 0,1,2,\dots$ son linealmente independientes el problema de momentos generalizado definido por las ecuaciones anteriores puede ser resuelto como se detalla en [5]: encontrando la solución $\psi(r,s) = g(u(r,s))$ para el correspondiente problema finito con $m = 0,1,2,\dots,N$.
Así si $g(u)$ tiene inversa continua, entonces $g^{-1}(\psi(r,s))$ será una estimación de $u(r,s)$.
Consideramos la base $\varphi_i(r,s)$ $i = 0,1,2,\dots$ obtenida por aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre $K_m(r,s)$ $m = 0,1,2,\dots,N$ y adicionando al conjunto resultante las funciones necesarias hasta alcanzar una base ortonormal.
Aproximamos la solución $\psi(r,s) = g(u(r,s))$ con [5]:

$$\psi_N(r,s) = \sum_{i=0}^{N}\lambda_i\varphi_i(r,s) \qquad \text{donde} \qquad \lambda_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\,\mu_j \quad i = 0,1,2,\dots,N$$

y los coeficientes C_{ij} verifican

$$C_{ij} = \left(\sum_{k=j}^{i-1} (-1) \frac{\langle K_i(r,s) \mid \varphi_k(r,s) \rangle}{\left\| \varphi_k(r,s) \right\|^2} C_{kj} \right) \cdot \left\| \varphi_i(r,s) \right\|^{-1} \qquad 1 < i \le N \quad ; \quad 1 \le j < i$$

Los términos de la diagonal son $\quad C_{ij} = \left\| \varphi_i(r,s) \right\|^{-1} \qquad i = 0,1,\ldots, N$

Teorema 2 *Sea el conjunto de números reales* $\{\mu_k\}_{k=0}^{N}$ *y sean* ε *y* E *dos números positivos tales que*

$$\sum_{k=0}^{N} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty K_k(r,s)\psi(r,s)drds - \mu_k \right|^2 \le \varepsilon^2 \qquad y \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty (r\psi_r^2 + s\psi_s^2) e^r e^s drds \le E^2$$

y además

$$r^k \psi(r,s) \to 0 \quad \text{para} \quad r \to \infty \quad \forall s, \ k \in N \qquad s^k \psi(r,s) \to 0 \quad \text{para} \quad s \to \infty \quad \forall r, \ k \in N$$

entonces

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \psi_N(r,s) - \psi(r,s) \right|^2 drds \le \left\| C^T C \right\|^2 \varepsilon^2 + \frac{E^2}{2(N+1)}$$

Si $g^{-1}(x)$ *es Lipschitz en* R^2 *, es decir si* $\left\| g^{-1}(x) - g^{-1}(y) \right\| \le \lambda \left\| x - y \right\|$ *para algún* λ *y* $\forall x, y \in R^2$ *entonces de acuerdo al teorema previo*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| u_N(r,s) - u(r,s) \right|^2 drds \le \lambda \left(\left\| C^T C \right\|^2 \varepsilon^2 + \frac{E^2}{2(N+1)} \right)$$

Ejemplo Numérico

Consideramos la ecuación $\quad u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = e^{u(x,t)} \quad$ en $(0,3) \times (0,1)$
con condiciones iniciales

$$u(x,t=0) = \ln\left(\frac{4}{(1+x)^2} \right) \qquad u_t(x,t=0) = -\frac{2}{1+x}$$

$$u_t(x,t=1) = -\frac{2}{2+x} \qquad u(x,t=1) = \ln\left(\frac{4}{(2+x)^2} \right)$$

y condiciones de contorno (Cauchy)

$$u(x=0,t) = \ln\left(\frac{4}{(1+t)^2} \right) \qquad u_x(x=3,t) = -\frac{2}{4+t}$$

$$u(x=3,t) = \ln\left(\frac{4}{(4+t)^2} \right) \qquad u_x(x=0,t) = -\frac{2}{1+t}$$

La solución es

$$u(x,t) = \ln\left(\frac{4}{(x+t+1)^2} \right)$$

En la Figura 2 se superponen los gráficos de $u_N(x,t)$ *(gris claro) y* $u(x,t)$ *(gris oscuro)*
El Teorema 2 provee una estimación de la "exactitud" de la solución aproximada. Calculamos para el ejemplo dado

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|u_N(x,t)-u(x,t)\right|^2 dxdt\right)^{1/2} = 0.317865$$

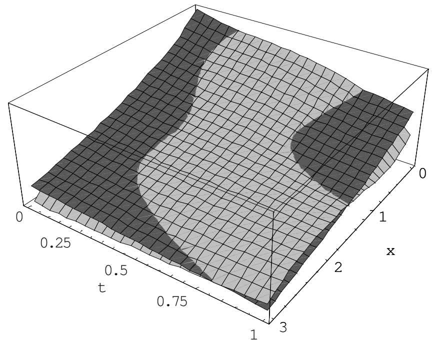

Figura 2

Conclusiones

Aplicando la identidad de Green se puede llevar una ecuación en derivadas parciales a una ecuación integral. Si la ecuación integral es de la forma

$$\int_{a1}^{b1}\int_{a2}^{b2} K(x,t,r,s)g(u(r,s))drds = \varphi(x,t)$$

donde $K(m,n,r,s)$ con $m,n = 0,1,2,...$ son linealmente independientes entonces se podría resolver la ecuación integral con las técnicas de problema inverso de momentos.
Análogamente si $K(x,t,r,s)$ es tal que

$$K_{mn}(r,s) = \int_{a2}^{b2}\int_{a1}^{b1} K(x,t,r,s)\,\Psi_{mn}(x,t)dxdt \quad m.n = 0,1,2.,...$$

son linealmente independientes siendo $\Psi_{mn}(x,t)$ una base de $L^2([a1,b1]\times[a2,b2]\ )$.

Referencias

[1] D.D. ANG, R. GORENFLO, V.K. LE and D.D. TRONG, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
[2] J.A. SHOHAT and J.D. TAMARKIN, *The problem of Moments*, Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943
[3] G. TALENTI, *Recovering a function from a finite number of moments,* Inverse Problems 3 (1987), pp.501- 517.
[4] M. B. PINTARELLI and F. VERICAT, *Bi-dimensional inverse moment problems*, Far East Journal of Mathematical Sciences 54 (2011), pp. 1-23.
[5] M. B. PINTARELLI and F. VERICAT, *Stability theorem and inversion algorithm for a generalized moment problem*, Far East Journal of Mathematical Sciences 30 (2008), pp. 253-274.