

DETERMINACIÓN DE ESTRUCTURAS TURBULENTAS MEDIANTE ALGORITMOS NUMÉRICOS

Calandra, María V.^a, Marañón Di Leo, Julio^{b,c} y Delnero, Juan S.^{b,c}

^a Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería, Dto de Ciencias Básicas, Fac. Ingeniería, UNLP, calle 115 y 50, 1900, La Plata.

^b Laboratorio de Capa Límite y Fluidodinámica Ambiental, Dto de Aeronáutica, Fac. Ingeniería, UNLP, calle 116 entre 47 y 48, 1900, La Plata.

^c Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, C1033AAJ, CABA. mava@mate.unlp.edu.ar

Palabras Claves: punto de cambio, algoritmos, turbulencia, vórtices, frecuencias.

Introducción.

Este trabajo tiene como objetivo principal el análisis y la evaluación de una metodología para la detección de variaciones significativas (Puntos de Cambio⁽¹⁾⁽³⁾) en una señal de serie de tiempo de la velocidad de un flujo turbulento corriente abajo del borde de fuga de un perfil aerodinámico, con un dispositivo de control pasivo de flujo (mini-flap de Gurney). El efecto global de este elemento es producir un aumento significativo en la sustentación, acompañado de un incremento relativamente menor en la resistencia del perfil. Su geometría genera desprendimientos vorticosos de escala espacial, aproximadamente h (altura del mini-flap), que modulan la estela e influyen así en la configuración global del flujo.

Se trata de evaluar el empleo de dicha metodología para la detección de eventos característicos en flujos de este tipo que, en un futuro, podrán ser empleados como un sistema de control para la adquisición de datos en el funcionamiento de un anemómetro de hilo caliente. Esta metodología permitiría realizar evaluaciones más precisas con el fin de determinar las diferentes estructuras vorticosas presentes en un flujo de estas características. Con este fin se implementó un algoritmo específico, para la detección de Puntos de Cambio, el cual emplea el método de remuestreo Bootstrap⁽²⁾, sobre una señal medida previamente, con el fin de cotejar los resultados obtenidos mediante herramientas convencionales de análisis. Y otra metodología basada en el Cociente de Verosimilitud.

Metodología de Los Estimadores de Punto de Cambio

Generalidades

Los primeros estudios realizados sobre el estimador de Punto de Cambio datan de 1950. Son numerosos los artículos publicados en revistas y congresos sobre la aplicabilidad del mismo en distintos tópicos⁽³⁾.

En general en estos casos uno tendería a hacerse las siguientes preguntas: ¿ha ocurrido un cambio en la serie de tiempo? ¿Ha ocurrido más de un cambio? ¿Cuándo han ocurrido dichos cambios? ¿Con qué nivel de confianza?. Todas estas preguntas podrían responderse mediante la aplicación del estimador de Punto de Cambio⁽¹⁾. Este estimador permite obtener una detallada información incluyendo el nivel de confianza de la probabilidad de que se produzca un cambio y un intervalo de confianza indicando cuando ocurre.

Métodos utilizados

Para la aplicación de estos métodos supondremos que contamos con una muestra X_1, X_2, \dots, X_N ordenada en el tiempo donde,

$$X_i = \mu_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

donde μ_i es la media en el tiempo i .

Generalmente, $\mu_i = \mu_{i-1}$ excepto para un número finito de valores de i llamados Puntos de Cambio, ε_i es el error aleatorio asociado con el i -ésimo valor. Se asume que los ε_i son independientes con media cero e idénticamente distribuidos⁽⁴⁾.

Sumas Acumulativas

Este concepto para análisis estadístico de los datos⁽⁵⁾ se puede emplear para detectar pequeñas desviaciones del promedio de la muestra. Para obtener el diagrama de las sumas acumulativas, se procede de la siguiente manera. Primero se determina el valor medio de la muestra,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{N-1} + X_N}{N} \quad (2)$$

donde N es el número total de valores de la muestra, X_i son los valores correspondientes. Para obtener la sucesión de valores de las sumas acumulativas, se considera el primer valor $S_0 = 0$, luego se comienza a determinar las sumas sucesivas empleando para ello la siguiente fórmula de recurrencia,

$$S_i = S_{i-1} + (X_i - \bar{X}) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Posteriormente, se puede confeccionar el gráfico de sumas acumulativas de los S_i versus el período correspondiente para detectar los puntos de cambio, los cuales se corresponden con el cambio de pendiente en el mismo. A pesar que, de los gráficos de sumas acumulativas se podría obtener la detección de posibles cambios en la media, para realizar un análisis detallado del nivel de confianza con que ocurre el cambio, se emplea el estadístico de una suma acumulativa, S_{dif} . Dicho valor se obtiene de la siguiente expresión,

$$S_{dif} = S_{\max} - S_{\min} \quad (4)$$

siendo,

$$S_{\max} = \max_{i=1 \dots N} S_i \quad (5)$$

$$S_{\min} = \min_{i=1 \dots N} S_i \quad (6)$$

Este estadístico es un estimador de la magnitud del cambio. Definido éste se realiza un remuestro bootstrap, que consiste en obtener nuevas muestras generadas a partir de los X_i originales. Las cuales pueden ser obtenidas reordenando aleatoriamente los X_i originales o extrayendo observaciones X_i de la muestra original con reemplazo. En general se recomienda hacer bootstrap M veces, entre 1000 y 10000 veces. Luego contamos el número de bootstrap en los cuales S_{dif}^0 es menor que S_{dif} y lo denotamos con Y . Entonces el nivel de confianza con que el cambio ocurre se calcula de la siguiente manera,

$$\text{Nivel de confianza} = 100 \frac{Y}{M} \% \quad (7)$$

En general se recomienda un 90% o 95% de nivel de confianza para establecer la existencia de un Punto de Cambio. Por otro lado se puede determinar un intervalo de confianza bootstrap para cada cambio encontrado desarrollado por Efron y Tibshirani⁽²⁾. Para ello nos basamos en el intervalo de confianza para la media de una distribución Normal,

$$\left[\bar{X} - t_{N-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{N-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \quad (8)$$

donde \bar{X} es la media muestral, S es el desvío típico muestral y t es el cuantil $\alpha/2$ de la distribución t-Student de $N-1$ grados de libertad, donde $1 - \alpha$ es el nivel de confianza del intervalo. El mismo es estimado mediante réplicas de la muestra obtenidas por bootstrap.

Una vez detectado un cambio en la pendiente del gráfico de sumas acumulativas se procede a estimar el lugar donde ocurre dicho cambio. Sea m tal que,

$$|S_m| = \max_{i=0, \dots, N} |S_i| \quad (9)$$

S_m es el punto más alejado del cero en el gráfico de sumas acumulativas. Este punto m estima el último punto antes de que el cambio ocurra, y el punto $m+1$ estima el primer punto después del cambio. Una vez detectado el primer cambio se divide la muestra en dos partes, una antes del cambio y otra después, y se repite el procedimiento antes descrito para detectar otros posibles cambios.

Método del cociente de máxima verosimilitud

Para este caso se considera el modelo antes indicado en el que se asume a los ε_i independientes con media cero y con distribución Normal,

$$x_i \sim N(0, \sigma_i^2) \quad (10)$$

El objetivo es testear las siguientes hipótesis:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_c^2 = \sigma^2 \text{ (desconocido)}$$

vs.

$$H_1: \sigma_1^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2 \neq \sigma_{k+1}^2 = \dots = \sigma_c^2 = \sigma^2$$

En caso de rechazar H_0 , se dirá que hay un cambio en el período k . Para este test se plantea el estadístico basado en Cociente de Verosimilitud. El estadístico se corresponde con el criterio de información de Schwarz (SIC)⁽⁶⁾, mediante el cual se puede establecer en que posición se produce un cambio. Se compara el valor del estimador para la muestra completa y el de la muestra hasta el valor k -ésimo. Las expresiones son las siguientes,

$$SIC(n) = n \log 2\pi + n \log \hat{\sigma}^2 + n + \log n \quad (11)$$

$$SIC(k) = n \log 2\pi + k \log \hat{\sigma}_1^2 + (n-k) \log \hat{\sigma}_n^2 + n + 2 \log n \quad (12)$$

donde,

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \mu)^2}{n-k} \quad (13)$$

Se considera que existe un cambio en k cuando se comprueba que,

$$SIC(n) < \min_{2 \leq k \leq n-2} SIC(k) + C_\alpha \quad (14)$$

En el cual C_α es un valor crítico que introduce el nivel de significación α que uno desee al cálculo (en nuestro caso se utilizó 0,05). Una vez detectado un cambio se procede como fue explicado en el método anterior.

APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS.

En análisis de flujos turbulentos es común emplear herramientas como el espectro de densidad de potencia, las autocorrelaciones, la transformada wavelet, aplicadas a los valores de la velocidad obtenida de los ensayos, para encontrar las características particulares de las estructuras turbulentas del flujo. Pudiendo determinar la aparición de eventos presentes en el flujo, escalas temporales y espaciales de dichos eventos, etc.⁽⁷⁾. Compararemos los resultados obtenidos mediante estas metodologías del estimador de Punto de Cambio con aquellos encontrados con las herramientas convencionales.

Características de la medición experimental

Como datos experimentales se tomó una medición, realizada en un túnel de viento de capa límite del Laboratorio de Capa Límite y Fluidodinámica Ambiental del Dto. de Aeronáutica (Fac. Ingeniería - UNLP). El modelo fue una pequeña ala de 45 cm. (C) de cuerda y 80 cm. de envergadura construida con un perfil aerodinámico NACA 4412 con el

agregado de un dispositivo pasivo de control de flujo (mini-flap Gurney) de longitud $h = 2\%C$, ubicado en el borde de fuga del perfil a 90° respecto a la cuerda (ver Figura 1). Se midió a una velocidad media del flujo de 10m/seg. con un ángulo de ataque del perfil de 0° , con un número de Reynolds para el ensayo de 300.000. Este dispositivo genera un aumento de sustentación acompañado por un aumento de la resistencia no tan significativo. Estos efectos están asociados con el desprendimiento de vórtices en la estela del mini flap. Las velocidades se midieron con un anemómetro de hilo caliente de temperatura constante, obteniendo dos componentes de la velocidad (longitudinal u y vertical v). Dicha medición se corresponde a un punto de la estela generada por el perfil aerodinámico a una distancia corriente abajo del borde de fuga de $1h$, a la altura de la cuerda del perfil, con la presencia del mini flap. Al conocerse el campo del flujo producido por la presencia de este dispositivo y sabiendo que genera estructuras vorticosas que se desprenden del perfil, como vórtices contrarrotantes periódicos (ver Figura 2), se consideró la posibilidad de implementar estas metodologías con el fin de detectar los eventos esperados en la estela, los cuales fueron cuantificados mediante un espectro de densidad de potencia, el cálculo de los coeficientes de autocorrelación y la aplicación de la transformada wavelet a la señal.

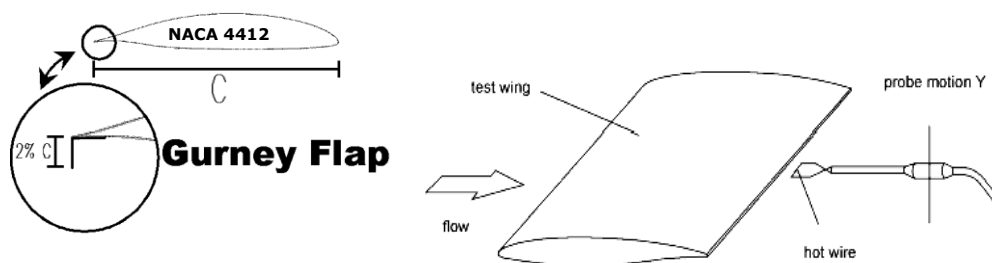


Figura 1. Esquema del modelo y la medición realizada.

Las wavelets están localizadas tanto en el espacio como en la frecuencia, por lo tanto la transformada wavelet analiza una señal localmente en los dominios de frecuencia y el espacio o tiempo⁽⁸⁾. La característica de localización de frecuencia en el tiempo de la transformada wavelet da una gran posibilidad de descubrir las posiciones de singularidades y discontinuidades en una señal, algo que es imposible de alcanzar en el análisis ordinario de Fourier⁽⁹⁾. Se compararon dichos resultados con los arrojados por las metodologías del estimador de Punto de Cambio.



Figura 2. Esquema de las estructuras vorticosas contrarrotativas.

Se presentan los resultados encontrados en los cálculos para la componente vertical de la velocidad (v) de la señal analizada. En la Figura 3 se muestra el mapa de wavelets utilizando una onda del tipo Mexican Hat, mediante la cual se pueden rastrear los máximos de la señal⁽⁹⁾. Allí se observa la aparición de un evento turbulento periódico asociado a uno de los vórtices contrarrotativos que se desprenden corriente abajo del dispositivo. En dicha Figura 3 el valor de ordenadas correspondiente a Escalas se define con la siguiente expresión:

$$Escala = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} \quad (15)$$

Donde t corresponde al tiempo en segundos de la longitud en el tiempo de la onda correspondiente. Las estructuras marcadas en el mapa de wavelets concuerdan con la frecuencia del pico de energía encontrado mediante el análisis realizado por el cálculo del

espectro de densidad de potencia (Figura 4). Se observa un pico de energía para una frecuencia de 141,6Hz. el cual se corresponde con la periodicidad encontrada en los máximos secundarios con un intervalo de tiempo de 0,007 segundos.

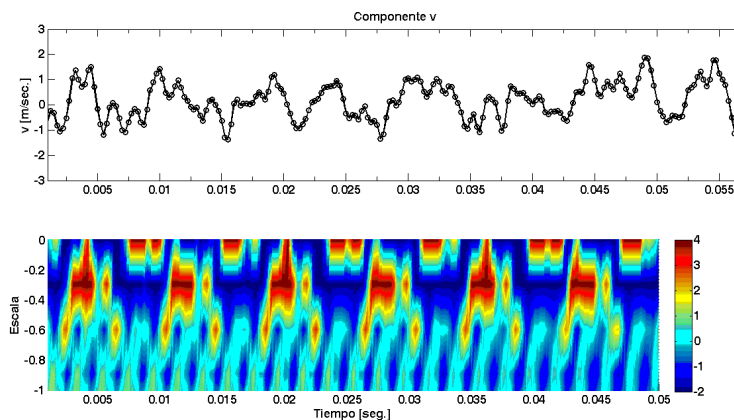


Figura 3. Mapa de wavelets y valores de la fluctuación de la componente vertical de la velocidad.

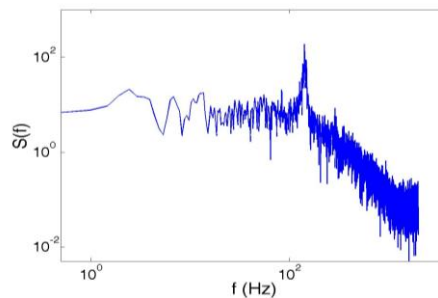


Figura 4. Espectro de densidad de potencia.

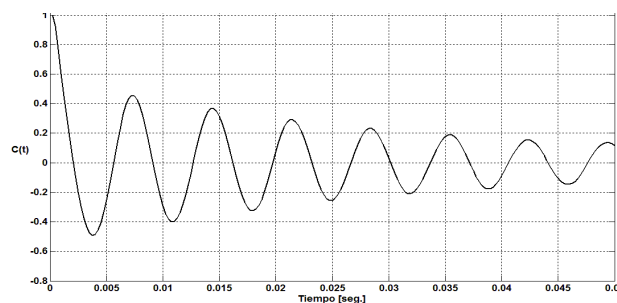


Figura 5. Coeficiente de autocorrelación (C(t)) de la componente v de la velocidad.

De la autocorrelación de las fluctuaciones (Figura 5), y considerando la teoría del primer corte por cero, se establece para la componente v una escala temporal de 0,002 segundos, lo cual se traduce mediante la teoría de “flujo congelado” en una escala espacial de 0,02m ($0,002\text{seg.} \cdot 10\text{m/seg.} = 0,02\text{m}$, igual a la longitud del miniflap). Por consiguiente las estructuras detectadas se corresponden con los eventos turbulentos generados por el dispositivo. Para el caso del método de las sumas acumulativas, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla 1, se observan tres columnas, la primera indica el instante de tiempo en el que se produce el cambio (nivel de confianza del 99%), la segunda el intervalo de confianza en el cual se ubica el cambio (nivel de confianza del 90%), y los valores de la media acumulada antes y después del cambio. El intervalo de tiempo promedio entre cambios es 0,0032 segundos. Los puntos de cambio encontrados se aproximan a los máximos del mapa de wavelets para la escala de -0,3, con una periodicidad de 0,007 segundos, que se corresponden con las estructuras vorticosas contrarrotantes conocidas. El algoritmo de Punto de Cambio detecta los valores máximos y mínimos que se observan en el mapa de wavelets, por ello es que se encuentra una periodicidad de la mitad del valor

obtenido mediante las otras metodologías. El remuestreo bootstrap utilizado es de 1000 muestras. En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos por el método SIC con el cual se logran detectar cambios secundarios de escala $-0,9$ en el mapa de wavelets (Figura 3).

TABLA 1: CAMBIOS CON SUMAS ACUMULATIVAS.

Tiempo [seg.]	Intervalo de confianza (90%)	Cambio de la media acumulada
0,0025	(0,0025; 0,0025)	de 1,2714 a 2,8689
0,00475	(0,00475; 0,0050)	de 2,8689 a 1,3889
0,009	(0,00875; 0,0090)	de 1,3889 a 2,6116
0,01225	(0,01225; 0,0125)	de 2,6116 a 1,5018
0,01575	(0,01525; 0,0160)	de 1,5018 a 2,2889
0,020	(0,0195; 0,0200)	de 2,2889 a 1,3487
0,022	(0,0220; 0,0220)	de 1,3487 a 2,4285

TABLA 2: CAMBIOS CON EL MÉTODO SIC.

Puntos de Cambio - SIC			
Posición	Tiempo [seg.]	Posición	Tiempo [seg.]
1	0	11	0,0105
2	0,0013	12	0,011
3	0,0025	13	0,012
4	0,0035	14	0,0127
5	0,0047	15	0,0138
6	0,006	16	0,0143
7	0,0065	17	0,0147
8	0,0077	18	0,016
9	0,0088	19	0,0173
10	0,0092	20	0,0182

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran una buena aproximación de los eventos detectados por las metodologías tradicionales, en comparación con la aplicación del estimador de Punto de Cambio. Los cambios detectados concuerdan con la aparición de los eventos esperados en la estela, para el dispositivo. El estimador de Punto de Cambio se presenta como una herramienta factible para ser empleada en la adquisición de datos experimentales. Se prevé seguir analizando la aplicación de estos estimadores, generando un software que lo incluya y permita el control del equipo.

BIBLIOGRAFÍA

- 1- Taylor, W.A., Change-Point Analysis: A Powerful New Tool For Detecting Changes, Quality Engineering (2000).
- 2- Efron, B. y Tibshirani, R., An introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall, New York (1993).
- 3- Chen, J. y Gupta, A.K., Parametrical statistical change point analysis, Birkhauser Boston (2000).
- 4- Krishnaiah, P.R, y Miao, B.Q., Review About Estimation of Change Points, Handbook of Statistics, 7,(1988).
- 5- Miller, I., Freund, J.E. y Johnson, R.A., Probabilidad y Estadística para Ingenieros, Prentice-Hall Hisp. S.A. (1992).
- 6- Schwarz, G., "Estimating the Dimension of a Model", Annals of Statistics, 6, 461–464. (1978),
- 7- Hinze, J. O., Turbulence. Mc Graw-Hill, New York (1975).
- 8- Farge, M., Annu, Rev, Fluid Mech, 24: 395-457 (1992).
- 9- Giacopinelli, P.E.L., Scarabino, A.E., Delnero, J.S. y Bacchi, F.A. Detección y análisis con wavelets de estructuras organizadas en la estela de un perfil aerodinámico, 2do. Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica, Córdoba, 24 al 29 de noviembre de 2010.