

ANSATZ LIBRE DE PARÁMETROS PARA INFERIR EL ESTADO FUNDAMENTAL DE LA ECUACIÓN DE MATHIEU

Flego, Silvana P. y Palacio, Luis E.

Grupo de Investigación Teórica y Aplicada en Teoría de la Información (GTyATI).
Área Departamental de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata (UNLP).
1 y 115 s/n, (1900) La Plata, Buenos Aires, Argentina.
flego@fisica.unlp.edu.ar

Resumen

Recientemente fue introducida en la literatura un procedimiento, basada en la conexión existente entre la medida de Información de Fisher y la ecuación de Schrödinger, que permite formular un *ansatz* para la solución del estado fundamental de aquellas SE que incorporan *potenciales convexos simétricos*. Por medio de esta técnica obtenemos una solución-*ansatz*, libre de parámetros, para el estado fundamental de la Ecuación de Mathieu.

Palabras claves: Teoría de la Información, Medida de Fisher, Ecuación de Mathieu.

1. Introducción

La Ecuación de Mathieu (EM) es un excelente paradigma para el estudio de resonancias (o inestabilidad) paramétricas, porque ejemplifica la respuesta de un sistema a perturbaciones periódicas forzadas encontradas en muchos sistemas naturales. Un modelo simple, no lineal, que da origen a esta ecuación es el que se utiliza para describir el movimiento que se origina al perturbar un péndulo cuyo punto pivote oscila periódicamente en la dirección vertical [1,2]. En la dinámica de fluidos se pueden encontrar muchos ejemplos de ondas que se excitan por resonancias paramétricas. La EM describe la estabilidad lineal de las ondas de Faraday que se producen cuando un contenedor de líquido se hace oscilar periódicamente en la dirección vertical [3,4], la estabilidad lineal de la Inestabilidad Kelvin-Helmholtz con el tiempo-periódico [5]... La EM es utilizada además, en el estudio de la mecánica celeste [6,7], de las inestabilidades acústicas en llamas[06], de la convección de Rayleigh-Bénard [9,10]. La EM también es importante en la descripción de las ondas que viajan en un medio espacialmente uniforme. La ecuación temporal que determina la evolución de cada componente de la onda es *de la forma* de la EM [11]. De aquí que esta EM generalizada puede interpretarse como siendo la que rige la evolución de la amplitud de una onda particular, moviéndose a través de un medio que está variando estocásticamente en el tiempo [12].

Es necesario notar que, a pesar de su amplia aplicabilidad, no se conoce su solución analítica exacta y es necesario recurrir a cálculo numérico computacional o a expresiones aproximadas obtenidas con técnicas perturbativas o *ansatz* que incorporan parámetros de ajuste para obtener una descripción del sistema en estudio.

Por otra parte, la conexión existente entre la Medida de Fisher (FIM) y la ecuación de onda de Schrödinger (SE) [13-16], solidificada por una subyacente estructura de Legendre [17], ha permitido introducir en la literatura una serie de importantes resultados [18-25]. En particular, fue introducido un procedimiento, el cual permite de forma simple, obtener una elegante expresión, en términos de cuadraturas, para la función de onda del estado fundamental de la SE asociada a potenciales convexos [24,25]. En esta comunicación aplicando la técnica presentada en [25] hallamos una solución-*ansatz* para el estado fundamental de la EM.

1. La Medida de Fisher.

En lo que sigue, se trata con sistemas invariantes por traslación. Sea x una variable estocástica y sea $f(x) = |\psi(x)|^2$ la función densidad de probabilidad (PDF) para esta variable. En este contexto, la expresión de la FIM es dada por [13]

$$I = \int f(x) \left[\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x} \right]^2 dx = 4 \int \left| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx ; \quad f = |\psi|^2. \quad (1)$$

Consideremos un sistema especificado por un conjunto de M parámetros físicos μ_k .

$$\mu_k = \langle A_k \rangle = \int dx A_k(x) f(x), \quad k = 1, \dots, M. \quad (2)$$

El conjunto de los valores μ_k es considerado como el primer conocimiento (información empírica disponible). La PDF físicamente relevante minimiza la FIM condicionada al “primer conocimiento” (2) y a la condición de normalización $\int dx f(x) = 1$. Consecuentemente, introduciendo $(M+1)$ -multiplicadores de Lagrange λ_k ($\lambda_0 = \alpha$), el problema de optimización

$$\delta \left(I - \alpha \int dx f(x) - \sum_{k=1}^M \lambda_k \int dx A_k(x) f(x) \right) = 0, \quad (3)$$

conduce a una ecuación diferencial para la deseada $f(x)$ la cual, escrita en términos de la amplitud $\psi(x)$ es de la forma [14,15]

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \psi(x) = \frac{\alpha}{8} \psi(x), \quad f(x) = |\psi(x)|^2, \quad U(x) = -\frac{1}{8} \sum_{k=1}^M \lambda_k A_k(x), \quad (4)$$

y es interpretada como una SE para una partícula de masa unidad ($\hbar = 1$) moviéndose en un “pseudo-potencial informacional” efectivo $U(x)$ en el cual el multiplicador de Lagrange asociado a la normalización juega el rol de un autovalor de energía ($E = \alpha / 8$) y los λ_k son determinados por medio de la información disponible [15,16].

Para escenarios unidimensionales, $\psi(x)$ es real [27] y se tiene

$$I = \int \psi^2 \left(\frac{\partial \ln \psi^2}{\partial x} \right)^2 dx = 4 \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx = -4 \int \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx \quad (5)$$

Luego, usando las expresiones (4) y (5) se encuentra una simple y conveniente expresión para la FIM,

$$I = \alpha + \sum_{k=1}^M \lambda_k \langle A_k \rangle. \quad (6)$$

La conexión entre la solución variacional f y la termodinámica fue establecida en términos de las típicas relaciones de reciprocidad (RR) de Legendre [15,16]. Estas constituyen el formal y esencial ingrediente termodinámico [28] y pueden ser re-derivadas ‘a la Fisher’ escribiendo (6) en una forma que enfatice el rol de las variables independientes relevantes,

$$I(\langle A_1 \rangle, \dots, \langle A_M \rangle) = \alpha + \sum_{k=1}^M \lambda_k \langle A_k \rangle. \quad (7)$$

La transformada de Legendre cambia la identidad de las variables independientes relevantes. Así, para el multiplicador de Lagrange α , que juega el rol de una autoenergía en (6), tenemos

$$\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = I - \sum_{k=1}^M \lambda_k \langle A_k \rangle. \quad (8)$$

Luego, desde estas preliminares, se encuentran de forma trivial, las tres RR [15]

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_k} = -\langle A_k \rangle; \quad \frac{\partial I}{\partial \langle A_k \rangle} = \lambda_k; \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} = \sum_k^M \lambda_k \frac{\partial \langle A_k \rangle}{\partial \lambda_i}, \quad (9)$$

siendo la última una generalización del teorema de Euler.

Resulta muy interesante el hecho que las RR pueden ser re-derivadas a partir de fundamentos puramente cuánticos [17] a partir del teorema del Virial y del teorema de Hellmann-Feynman, mostrando que una estructura de Legendre subyace la unidimensional SE [17].

Una serie de importantes resultados han sido derivados a partir de este resultado, (ver por ejemplo [18-25]). Es nuestro interés actual hacer referencia a la inmediata consecuencia de poder inferir, para una amplia variedad de potenciales, un ansatz para la PDF y por tanto, para la función de onda del estado fundamental de la SE [24,25].

2. Ansatz para inferir la PDF de potenciales convexos simétricos

Una de las consecuencias directas de la estructura de Legendre subyacente en la SE, es que cuando el potencial que interviene en la teoría es una función *convexa simétrica*, es posible inferir un ansatz, libre de parámetros, para la PDF y por tanto para la autofunción correspondiente al estado fundamental de la asociada SE [25]. El procedimiento es el siguiente.

Sea $U(x)$ un potencial convexo simétrico que alcanza su valor mínimo en el punto crítico $x_c = \xi$. Efectuando una transformación de traslación ($u = x - \xi$) y denotando con barra las magnitudes referidas al nuevo referencial, tenemos

$$\bar{U}(u) = U(u + \xi) = U(x), \quad \bar{f}(u) = f(u + \xi) = f(x), \quad (10)$$

Debido a la invariancia traslacional de la FIM [13] $I = \bar{I}$, esta se puede expresar virialmente como,

$$I = -4 \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right\rangle = 4 \left\langle u \frac{\partial \bar{U}}{\partial u} \right\rangle \rightarrow \int du \bar{f}(u) \left(\frac{\partial \ln \bar{f}(u)}{\partial u} \right)^2 = 4 \int du \bar{f}(u) u \frac{\partial}{\partial u} \bar{U}(u) \quad (11)$$

Note que, si $U(x)$ es un potencial convexo simétrico respecto de $x_c = \xi$, se tiene que en el nuevo referencial, $\bar{U}(u)$ es un potencial convexo par,

$$\forall u \in \text{Dom}(\bar{U}), \quad u \frac{\partial}{\partial u} \bar{U}(u) \geq 0. \quad (12)$$

Luego, se infiere el ansatz \bar{f}_A que, por construcción, verifica (11). Simplemente se pide que

$$\left(\frac{\partial \ln \bar{f}_A(u)}{\partial u} \right)^2 = 4 u \frac{\partial}{\partial u} \bar{U}(u) \quad (13)$$

y se obtienen dos soluciones independientes

$$\bar{f}_A^\pm(u) = A \exp\left(\pm 2 \int du \sqrt{u \frac{\partial}{\partial u} \bar{U}(u)}\right), \quad (14)$$

siendo A una constante de integración. Regresando al referencial original mediante la transformación $x = u + \xi$, se obtiene

$$f_A^\pm(x) = A \exp\left(\pm 2 \int dx \sqrt{(x - \xi) \frac{\partial}{\partial x} U(x)}\right) \quad (15)$$

La ec.(25) proporciona una herramienta para construir un ansatz para la PDF relatada a *potenciales convexos simétricos* respecto del punto crítico $x_c = \xi$.

3. Autofunción-Ansatz para el estado fundamental de la Ecuación de Mathieu

La Ecuación de Mathieu (EM) es una ecuación de Schrödinger (SE) unidimensional, dada por

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q^2 \cos 2x \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad \psi(0) = \psi(\pi) \quad (16)$$

Dado que no se dispone de una expresión explícita para las autofunciones de esta ecuación, utilizando el procedimiento relatado en la sección anterior, buscamos una autofunción-ansatz para el estado fundamental $\psi_o(x)$ de la EM.

Comenzamos asociando a la EM (16) una FIM [18] y establecemos que el estado fundamental tiene asociada una PDF $f(x) = \psi_o^2(x)$. Luego, procedemos a estudiar el potencial,

$$U(x) = q^2 \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (17)$$

Comenzamos obteniendo los puntos críticos

$$U'(x_c) = 0 \quad \rightarrow \quad -2q^2 \sin 2x_c = 0 \quad (18)$$

En el intervalo de definición $[0, \pi]$ hallamos $x_c = 0, \pi/2, \pi$. Usando el criterio de la derivada segunda, estudiamos la naturaleza de estos puntos

$$U''(x) = -4q^2 \cos 2x \quad \rightarrow \quad U''(0) = -4q^2 < 0, \quad U''(\pi/2) = 4q^2 > 0, \quad U''(\pi) = -4q^2 < 0$$

y encontramos que el mínimo del potencial ocurre en $\xi = \pi/2$. Realizamos una transformación de translación $u = x - \pi/2$ y tenemos

$$U(x) = U(u + \pi/2) = \bar{U}(u) \quad \rightarrow \quad \bar{U}(u) = -q^2 \cos 2u \quad \text{con } -\pi/2 \leq u \leq \pi/2$$

En el intervalo de definición, \bar{U} es una función par

$$\forall u \in [-\pi/2, \pi/2], \quad \bar{U}(-u) = \bar{U}(u)$$

y se verifica la condición (12),

$$\forall u \in [-\pi/2, \pi/2], \quad u U'(u) = 2q^2 u \sin 2u \geq 0$$

Luego, podemos utilizar (14) para inferir un ansatz para la autofunción trasladada $\bar{\psi}_o(u)$,

$$\bar{\psi}_A^2(u) = \bar{f}_A(u) \quad \rightarrow \quad \bar{\psi}_A^\pm(u) = A \exp\left(\pm \int du \sqrt{u \bar{U}'(u)}\right), \quad (19)$$

$$\bar{\psi}_A^\pm(u) = A \exp\left(\pm \int du \sqrt{2q^2 u \sin 2u}\right), \quad -\pi/2 \leq u \leq \pi/2 \quad (20)$$

La integral definida contenida en (20) no es trivial, no conocemos su primitiva. Dado que el interés es disponer de una expresión analítica explícita, expandimos el potencial en la base $\{u, u^2, u^3, \dots\} \in \mathcal{L}_2$ y consideramos una aproximación hasta el cuarto orden. Con un poco de álgebra, obtenemos

$$u \bar{U}'(u) \approx u \bar{U}'_{\text{aprox}}(u) = 4q^2 u^2 \left(1 - \frac{2}{3} u^2\right) \quad (21)$$

El nuevo dominio de definición generado por la aproximación del potencial es determinado a partir de la condición que U_{aprox} sea una función convexa par en el intervalo $[-\eta, \eta]$, donde η es determinado a partir de la condición que

$$\forall u \in [-\eta, \eta] \quad u \bar{U}'_{aprox}(u) \geq 0. \quad (22)$$

la cual conduce a

$$\eta = \sqrt{3/2} < \pi / 2 \quad (23)$$

Finalmente, substituyendo (21) en (19) y realizando una integración elemental, obtenemos

$$\bar{\psi}_A(u) = A \exp \left[q \left(1 - \frac{2}{3} u^2 \right)^{3/2} \right], \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} \leq u \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (24)$$

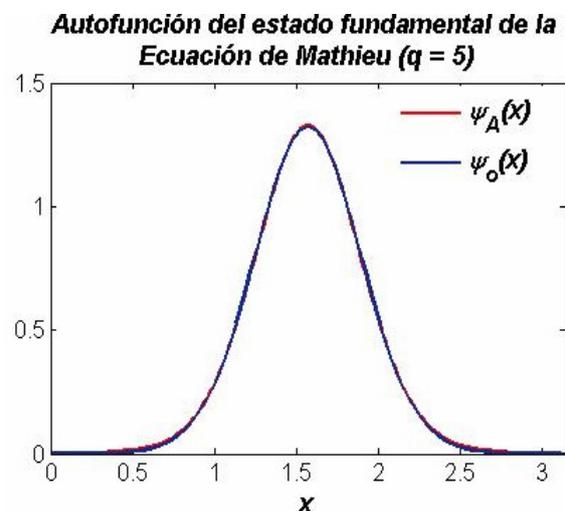
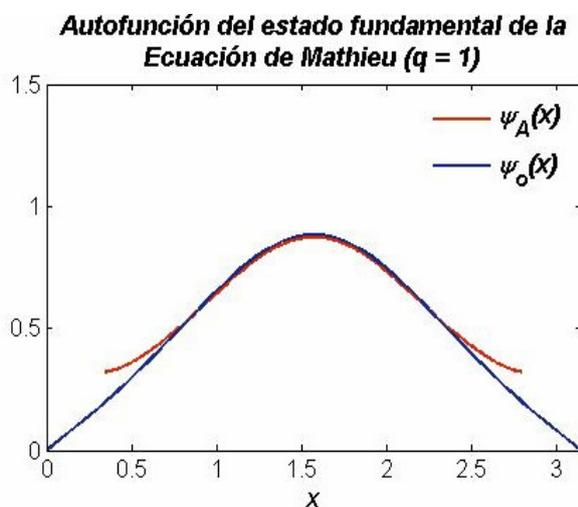
Si regresamos al referencial original mediante la transformación $x = u + \pi / 2$, la autofunción-ansatz es dada por

$$\psi_A(x) = N \exp \left\{ q \left[1 - \frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]^{3/2} \right\}, \quad \frac{\pi}{2} - \eta \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \eta \quad (25)$$

donde el signo de la exponencial fue elegido de manera de satisfacer condiciones de contorno y N es la constante de normalización, determinada a partir de la condición

$$\int_{\pi/2-\eta}^{\pi/2+\eta} |\psi_A|^2 dx = 1 \quad (26)$$

El valor del parámetro q depende del sistema en estudio. En la figuras son graficadas la autofunción del estado fundamental de la EM, obtenida por cálculo numérico-computacional (se utilizó el programa Matslise) y la autofunción-ansatz (25) para $q=1$ y $q=5$. Como el lector puede observar, para valores grandes de q , el ansatz se confunde con la solución numérica. Este resultado nos muestra que el procedimiento propuesto en [25] conduce a un excelente ansatz. Consideramos que el hecho que para valores pequeños de q aparezcan discrepancias en torno a $\pi / 2 \pm \eta$ es una consecuencia directa del orden de aproximación utilizado para tratar el potencial.



4. Conclusiones

A partir de la conexión Fisher-Schrödinger es posible obtener un ansatz para la PDF con potenciales convexos simétricos [25], los cuales constituyen una amplia familia de potenciales. Mostramos en esta comunicación que, el ansatz que surge de la estructura de Legendre contenida en la ecuación de Schrödinger, da muy buenos resultados, no solo en el caso de potenciales pares [24,26] sino también en el caso de potenciales convexos simétricos como es el caso de la ecuación de Mathieu.

Por otra parte, una vez que disponemos de un ansatz para el estado fundamental de la EM, el cual no incorpora parámetros libres, es de esperar que se puedan inferir nuevos resultados teóricos para aquellas situaciones físicas en las que esta ecuación desempeña un rol importante. Estamos trabajando en esa línea.

Bibliografía

1. J. Stoker: *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*. (New York, NY: Interscience Publishers.1950).
2. A.H.Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*. (New York, NY: Wiley Interscience, 1995.)
3. T. B. Benjamin, F. Ursell. Proc. R. Soc. A **224** (1954) 505–515. (doi:10.1098/rspa.1954.0218)
4. M. Faraday. Phil. Trans. R. Soc. Lond. **121** (1931) 299–340. (doi:10.1098/rstl.1831.0018)
5. R. Kelly. J. Fluid Mech. **27** (1967) 656–689. (doi:10.1017/S0022112067002538)
6. J. J. Binney, Mon. Not. R. Astron. Soc. **183** (1978) 779–797.
7. J. J. Binney, Mon. Not. R. Astron. Soc. **196** (1981) 455–467.
8. P. Sammarco, H.H. Tran, O. Gottlieb. J. Fluid Mech. **349** (1997) 327. (doi:10.1017/S0022112097006836)
9. P. Hall, G. Seminara. J. Fluid Mech. **101** (1980) 423. (doi:10.1017/S0022112080001735)
10. G. Vittori. J. Hydraul. Eng. **124** (1998) 406. (doi:10.1061/(ASCE)0733-9429)
11. S. Fauve. *Pattern forming instabilities. In Hydrodynamics and nonlinear instabilities* (eds C. Godreèche & P. Manneville), (1998) 387–491. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
12. F. J. Poulin, G. R. Flierl. Proc.R. Soc. A **464** (2008)1885-1904 doi:10.1098/rspa.2008.0007
13. B. R. Frieden, *Science from Fisher Information: A Unification* (Cambridge, University Press; Cambridge,2004).
14. M. Reginatto, Phys. Rev. E **58** (1998)1775.
15. B. R. Frieden, A. Plastino, A. R. Plastino, B. H. Soffer, Phys. Rev. E **60** (1999) 48.
16. S. P. Flego, B. R. Frieden, A. Plastino, A. R. Plastino, B. H. Soffer, Phys. Rev. E **68** (2003) 016105.
17. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, Physica A **390** (2011) 2276-2282.
18. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, Ann. Phys. (N.Y.) **326** (2011) 2533-2543.
19. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, Physica A **390** (2011) 4702-4712.
20. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, J. Math. Phys. **52** 082103 (2011).
21. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, J. Modern Phys. **2** (2011) 1390.
22. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino. Entropy, 13 (2011)2049-2058.
23. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino: Cent. Eur. J. Phys. **10(2)** (2012) 390-397.
24. S. P. Flego, A. Plastino and A. R. Plastino, Phys. Scr. **85** (2012) 055002(7pp).
25. Flego, Silvana P.: “*Ansatz libre de parámetros para obtener la función de distribución de probabilidades de Fisher de potenciales convexos*” en: *Actas de las Segundas Jornadas de Investigación y Transferencia*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata (UNLP), Abril de 2013.
26. Flego, Silvana P., Uriona, Hugo N.: “*Autofunción-ansatz para el estado fundamental de la ecuación de Coffey-Evans*” en: *Actas de las Segundas Jornadas de Investigación y Transferencia*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata (UNLP), Abril de 2013.
27. W. Greiner and B. Müller, *Quantum mechanics. An Introduction*. (Springer, Berlin, 1988).
28. A. Desloge, *Thermal Physics* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968).