# Método de proyecciones oblicuas incompletas para resolver el problema de Mínimos Cuadrados con restricciones de caja

Echebest,Nélida E. Guardarucci,María T. Scolnik,Hugo

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP,47 esq.1, La Plata, marite.guardarucci@ing.unlp.edu.ar

**Palabras claves:** sistemas inconsistentes,proyecciones oblicuas

**INTRODUCCIÓN**

En varias aplicaciones de reconstrucción de imágenes, mecánica computacional , problemas de optimización, etc. aparecen problemas que requieren resolver sistemas de ecuaciones lineales, grandes y esparsos, que a menudo son inconsistentes y requieren que la solución $x^* \in \Re^n$, sea acotada $l_i \leq x_i^* \leq u_i$, $i = 1, \ldots, n$ y minimice alguna función de proximidad.

En [9] presentamos el algoritmo IOP que converge a una solución de mínimos cuadrados pesada del sistema inconsistente $Ax = b$, $A \in \Re^{m \times n}$, $b \in \Re^m$,, usando un esquema de proyecciones oblicuas incompletas sobre el conjunto de soluciones del sistema aumentado $Ax - r = b$. Hemos considerado el problema standart

$$\min_{x \in \Re^n} \|b - Ax\|_{D_m}^2, \tag{1}$$

donde $\|.\|_{D_m}$ es la norma inducida por la matriz diagonal definida positiva $D_m \in \Re^{m \times m}$ basándonos en la equivalencia demostrada entre este problema y el problema

$$\min\{\|p - q\|_D^2 : \quad \text{para } \ p \in \mathcal{P} \text{ y } \quad q \in \mathcal{Q}\},$$

donde

$$\mathcal{P} = \{p : p = [x; r] \in \Re^{n+m}, \quad x \in \Re^n, \quad r \in \Re^m, \quad Ax - r = b\}, \text{ y}$$
$$\mathcal{Q} = \{q : q = [x; 0] \in \Re^{n+m}, \quad x \in \Re^n, 0 \in \Re^m\},$$

y $D$ is a diagonal matrix of order $n + m$, whose $n$ first elements are $1$'s, and the last $m$ coincide with those of $D_m$.

El método IOP propuesto para resolver (1) mediante un esquema de proyecciones alternadas entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, , similar al desarrollado por Csiszár and Tusnády [6], reemplaza el cálculo de la proyección exacta sobre $\mathcal{P}$ por una proyección incompleta que aproxima a la solución de una manera aceptable.

En este trabajo agregamos la condición $x \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B} = \{x : x \in \Re^n, l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, \ldots, n\}$, lo que lleva a redefinir

$$\mathcal{P}^b = \mathcal{P} \bigcap \{(x; r) : x \in \mathcal{B}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{Q}^b = \mathcal{Q} \bigcap \{(x; 0) : x \in \mathcal{B}\}, \tag{2}$$

**Algoritmo 1** *(Esquema Básico Alternante)*

**Paso Iterativo:** *Dado* $p^k = [x^k; r^k] \in \mathcal{P}^b$, *y* $q^k = [x^k; 0] \in \mathcal{Q}^b$,

*hallar* $p_r^{k+1} = [x^{k+1}; r^{k+1}] \in \mathcal{P}^b$ *tal que:*

$$p_r^{k+1} \approx \arg\min\{\|p - q^k\|_D^2 : p \in \mathcal{P}^b\}, \quad \textit{luego}$$

*definir* $p^{k+1} = p_r^{k+1}$, *and* $q^{k+1} \in \mathcal{Q}^b$

$$q^{k+1} = [x^{k+1}; 0] \equiv \arg\min\{\|p^{k+1} - q\|_D^2 : \quad q \in \mathcal{Q}^b\}.$$

Para computar las proyecciones incompletas sobre $\mathcal{P}^b$ aplicamos el algoritmo Halpern-Lions-Wittmann- Bauschke(HLWB) [5]. Cuando HLWB es aplicado para resolver un sistema de desigualdades lineales consistente $\bar{S}y \leq \bar{c}$, la secuencia $\{y^k\}$ generada a partir de un punto inicial $y^0$ converge a una solución que satisface

$$\bar{y}^* = \arg\min\{\|y^* - y^0\|_D^2, \quad y^* \in \Re^n : \bar{S}y^* \leq \bar{c}\}.$$

Presentaremos el algoritmo $BIOP$ basado en el esquema básico, proponiendo una condición para aceptar una solución $p_r^{k+1}$ en $\mathcal{P}^b$ que aproxime a la proyección exacta de manera tal de asegurar convergencia a una solución de (1)

**RESULTADOS**

Usaremos la notación:$\|x\|_D$ para la norma inducida por una matriz $D$ definida positiva, $\mathbf{m}_i^T$ para referirnos a la fila $i$ de una matriz $M$, $R(M)$ para el subespacio generado por las columnas de $M$, $P_M$ and $P_M^D$ para los proyectores ortogonales y oblicuos sobre $R(M)$ , $R(M)^\perp$ para el subespacio D-ortogonal a $R(M)$ y $P_{M^\perp}^D$ para su correspondiente proyector.

Supondremos que el sistema $\bar{A}y = \bar{b}$, $\bar{A} \in \Re^{m\times n}$, $\bar{b} \in \Re^m$ es compatible y que cada fila de $A$ tiene norma Euclídea igual a $1$. Para cada restricción en el sistema denotaremos $L_i = \{y \in \Re^n : \bar{\mathbf{a}}_i^T y = \bar{b}_i\}$, $r_i(y) = \bar{\mathbf{a}}_i^T y - \bar{b}_i$, and the oblique projection of $y$ onto $L_i$ por

$$P_i^D(y) = y - \frac{r_i(y)}{\bar{\mathbf{a}}_i^T D^{-1}\bar{\mathbf{a}}_i} D^{-1}\bar{\mathbf{a}}_i. \tag{3}$$

Dado un sistema de $m$ inecuaciones lineales

$$\mathcal{S} := \{y \in \Re^n : \ s_j^T y \leq c_j, \ j = 1, 2, \ldots, m\} \tag{4}$$

supondremos que tiene solución, denotaremos con $S$ a la matriz del sistema y llamaremos $y^*$ a cualquier solución admisible de $Sy \leq c$. Cuando $z$ no pertenezca a algún semiespacio particular $\mathcal{S}_j$, es decir cuando $r_j = s_j^T z - c_j > 0$, la proyección exacta de $z$ sobre $\mathcal{S}_j$ será calculada por $y_j = P_{\mathcal{S}_j}(z) = z + s_j(-r_j)/\|s_j\|^2$.

Tal como dijimos, para sistemas acotados, posiblemente inconsistentes, $Ax = b$, $x \in \mathcal{B}$, $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$, $m \geq n$, trabajamos con el problema asociado

$$\min_{x\in\mathcal{B}} \|Ax - b\|_{D_m}^2. \tag{5}$$

Usando un esquema de proyecciones alternantes sobre los conjuntos $\mathcal{P}^b$ y $\mathcal{Q}^b$ .

Dado $p^k \in \mathcal{P}^b$, y su proyección $q^k$ sobre $\mathcal{Q}^b$, denotamos $p_{min}^D(q^k)$ a la proyección exacta de $q^k$ sobre $\mathcal{P}^b$, solución del problema

$$\min\{\|p - q^k\|_D : \ \ p \in \mathcal{P}^b\}. \tag{6}$$

En el nuevo algoritmo, dado $q^k \in \mathcal{Q}^b$ reemplazamos el cálculo de $p^{k+1} = p_{min}^D(q^k)$, resolviendo en forma incompleta (6) y definiendo una proyección aproximada $p_r^{k+1}$,

En [9] hemos presentado la teoría de proyecciones inexactas sobre el conjunto de soluciones de $Ax - r = b$. Para definir $p_r^{k+1} \approx p_{min}^D(q^k)$, consideraremos la siguiente:

**Definición 1** *Si $\hat{p} = [z_j; \mu_j]$, $z \in \Re^n$ , $\mu \in \Re^m$, es una solucón aproximada de $p_{min}^D(q^k)$, denotamos con $P^b(\hat{p}) = [z^b; r(z^b)]$, donde $z^b$ es la proyección of $z_j$ sobre $x_i \geq l_i$, o $x_i \leq u_i$, $i = 1, \ldots, n$, y $r(z^b) = Az^b - b$.*

Para que la sucesión $\{p^k\}$ generada por el nuevo algoritmo garantice convergencia a la solución de (5), establecemos la condición de aceptación que $\hat{p} = [z_j; \mu_j]$ debe cumplir

**Definición 2** *Condición de Aceptación.*

*Dada una sucesión $\{\beta_k\}$ que tiende a $0$ cuando $k$ tiende a $\infty$, diremos que $\hat{p_j} = [z_j; \mu_j]$ es una aproximación aceptable de $p^D_{min}(q^k)$ si la proyección inexacta $P^b(\hat{p}) = [z^b; r(z^b)]$, satisface:*

$$(i)\|\hat{p_j} - T(p_{j-1})\|_D \leq \beta_k \|q^k - T(p_{j-1})\|_D \tag{7}$$

$$(ii)\|P^b(\hat{p_j}) - q^k\|^2_D < \|p^k - q^k\|^2_D, \text{y} \|P^b(\hat{p}) - \hat{p}\|^2_D \leq \gamma \|p^k - P^b(\hat{p})\|^2_D,\ 0 < \gamma < 1, \tag{8}$$

En ese caso aceptamos $p^{k+1}_r = P^b(\hat{p^j})$ como solución aproximada de $p^D_{min}(q^k)$.

**Lema 1** *Si el problema (6) es resuelto mediante el algoritmo HWLB entonces es posible hallar un iterado $\hat{p_j}$ que satisfaga las condiciones (7) y (8).*

**Algoritmo 2** *Bounded Incomplete Oblique Projections (BIOP)*

**Inicialización:** *Dado $0 < \gamma < 1$; una matriz diagonal, de orden $m$, definida positiva $D_m$ y $p^0 = [x^0; r^0]$, con $x^0 \in \mathcal{B}$, y $r^0 = Ax^0 - b$; $q^0 = [x^0; 0] \in \mathcal{Q}^b$ y $k = 0$.*

**Paso Iterativo:** *Dado $p^k = [x^k; r^k]$, definimos $q^k = [x^k; 0]$, $x^k \in \mathcal{B}$.*

- Calculamos $\hat{p}$, aproximación de $p^D_{min}(q^k)$ que satisfaga las condiciones (7) y (8), aplicando HLWB como sigue: *Definimos $y^0 = [z^0; \mu^0] = q^k$ punto inicial. Iteramos hasta hallar $\hat{p}^j = [z^j; \mu^j]$,que satisfaga las condiciones (7) y (8).*
- Definimos $p^{k+1} == P^b([z^j, \mu^j]) = [x^{k+1}; r^{k+1}]$
- Definimos $q^{k+1} = [x^{k+1}; 0] \in \mathcal{Q}^b$.
- $k \leftarrow k + 1$.

Denominaremos con $L^{sq}_{D_m}$ al conjunto de soluciones del problema (1):

$$L^{sq}_{D_m} = \{x^* \in \mathcal{B} : \quad \text{tal que } r^* = Ax^* - b \text{ satisface } A^T D_m r^* = \mu^*,\} \tag{9}$$

con $\mu^*_i \geq 0$ si $x^*_i = l_i$, o $\mu^*_i \leq 0$, si $u_i = x^*_i$, o $\mu^*_i = 0$, cuando $l_i < x^*_i < u_i$.

Definimos $\mathcal{S}_{D_m} = \{p^* : p^* = [x^*; r^*] \in \mathcal{P}^b \text{tal que } \ x^* \in L^{sq}_{D_m}\}$

**Lema 2** *Si $\{p^k\} = \{[x^k; r^k]\}$ es la sucesión generada por el Algoritmo 2, entonces*

*(i) $p^k = [x^k; r^k]$ y $p^{k+1} = [x^{k+1}; r^{k+1}]$ satisfacen*
$\|r^{k+1}\|^2_{D_m} \leq \|r^k\|^2_{D_m} - \|x^k - x^{k+1}\|^2$.

*(ii) La sucesión $\{\|r^k\|_{D_m}\}$ es decreciente y acotada y por tanto convergente*

*(iii) Las 3 sucesiones que siguen tienden a $0$*
$\{\|p^{k+1} - p^k\|^2_D\}$,
$\{\|p^{k+1} - p^D_{min}(q^k)\|^2_D\}$ y $\{\|p^k - p^D_{min}(q^k)\|^2_D\}$.

*(iv) La sucesión $\{A^T D_m r^k - \mu^k_{min}\}$ tiende a zero, donde $\mu^k_{min}$ es el vector de los multiplicadores KKT asociado a las restricciones de cota en la solución del problema (6).*

*(v) La sucesión $\{\mu^k_{min_i} * \min(x^k_i - l_i, u_i - x^k_i)\}$ tiende a zero.*

**Lema 3** *Si $\{p^k\} = \{[x^k; r^k]\}$ es la sucesión generada por el Algoritmo 2, entonces*

*(i) Existe una subsucesión $\{p^k\}$, $\{p^{k_s}\} = \{[x^{k_s}; r^{k_s}]\}$, satisfaciendo $r^{k_s} = Ax^{k_s} - b$, convergente a $[\overline{x}; \overline{r}] \in \mathcal{S}_{D_m}$.*

*(ii) Todo punto límite de $\{p^k\}$, está en $\mathcal{S}_{D_m}$.*

*(iii) Si $\mathcal{S}_{D_m}$ es un conjunto unitario, la sucesión $\{[x^k; r^k]\}$ converge a $p^*$, $p^* \in \mathcal{S}_{D_m}$.*

**PARTE EXPERIMENTAL**

Hemos implementado nuestro algoritmo $BIOP$ en MATLAB con el fin de compararlo con el algoritmo $SBLS2$ para resolver problemas de mínimos cuadrados con restricciones de caja del sistema SSL(http://www.math.liu.se/ milun/sls). El algoritmo $SBLS2$ está basado en el método presentado en [1]. Nuestro método $BIOP$ está implementado en forma secuencial con $\gamma = 10^{-2}$ en la iteración inicial y $\gamma = 10^{-1}$ en las siguientes. La matriz $D_m$ fue elegida como la matriz Identidad.El punto inicial fue siempre $x^0 = 0$. La condición de parada para ambos algoritmos es : $| \, \|r^{k+1}\| - \|r^k\| \, | < \epsilon \max(\|r^0\|, 1)$, con $\epsilon = 10^{-6}$. También se contempla parar cuando el residuo se estanca.

Algunos de los problemas usados en los test provienen de RRA(real,rectangular)de la colección Harwell-Boeing. Del paquete LSQ hemos trabajado con 4 matrices que presentan el mismo patrón WELL1033, ILLC1033(real,no simétrica, 1033 x 320), WELL1850 y ILLC1850 (real nosimétrica,1850 x 712)pero las segunda y cuarta muy mal condicionadas. Para problemas de grandes dimensiones hemos usado matrices densas generadas al azar con DQRT15(LAPACK), fijando el parámetro RKSEL = 2 a fin de que sean de rango deficiente. Indicamos con $m$ el nde filas y $n$ el número de columnas de A, con rango $= \frac{3}{4}\min(m,n)$.

Otros sistemas provienen de problemas de reconstruccón de imágenes provenientes de geotomografía y usados por Popa y Zdunek [8] y del paquete SNARK, problemas B1,B4 y B6 con $m \geq n$.

En la tabla 2 mostramos el número de iteraciones (**Iter**) y el tiempo de CPU ‘para alcanzar el criterio de convergencia. En la tabla 1 comparamos el número de iteraciones y tiempo

| | CPU/Iter | | $R_E(p)$ | |
|---|---|---|---|---|
| p | BIOP | SBLS2 | BIOP | SBLS2 |
| B1 3452 x 1025 | 1.31/163 | 563.23/275 | 8.44 | 8.43 |
| B6 896 x 625 | 0.37/275 | 213.58/307 | 3.80 | 3.80 |
| Well 1033x322 | 0.25/382 | 29.2 /152 | 4362.7 | 4362.1 |
| Illc 1033x322 | 0.75/678 | 19.3 /129 | 5188.2 | 5187.6 |
| Well 1850x712 | 1.95/1728 | 814.4 /388 | 4757.8 | 4757.6 |
| Illc 1850x712 | 6.7 /2297 | 214.2/240 | 5469.0 | 5468.6 |
| A1 case (b) 144 x 144 | 0.01 /111 | 5.9 /186 | 0.5 | 0.7 |
| A2 case (b) 900 x 900 | 0.39 /145 | 6741.4 /1120 | 2.9 | 2.9 |
| Rand 40 x 20 | 0.06 /932 | 0.05 /9 | 4.76 | 4.76 |
| Rand 500 x 300 | 0.06 /9 | NC*/900 | 0.14 | NC* |

Table 1: BIOP-BVLS

| p | CPU/Iter | | $R_E(p)$ | |
|---|---|---|---|---|
| | BIOP | SBLS2 | BIOP | SBLS2 |
| B1 3452 x 1025 | 1.77/163 | 1.95/6 | 8.44 | 8.45 |
| B4 896 x 625 | 0.34/135 | 0.78/9 | 3.82 | 3.91 |
| B6 896 x 625 | 0.55/216 | 0.77/9 | 3.80 | 3.91 |
| B7 27376 x 9025 | 34.1/153 | NC*/100 | 74.3 | NC* |
| Well 1033 x 322 | 0.44/336 | NC* /100 | 4346.9 | NC* |
| Illc 1033x322 | 0.52/406 | 0.09 /10 | 5182.0 | 5155.0 |
| Well 1850 x 712 | 0.55/225 | 0.05 /9 | 4679.6 | 4749.9 |
| Illc 1850x712 | 0.61 /261 | NC*/100 | 5845.2 | NC* |
| A1 case (b) 144 x 144 | 0.02 /95 | NC* / | 0.70 | NC* |
| A2 case (b) 900 x 900 | 0.75 /200 | NC* / | 2.90 | NC* |
| Rand 2000 x 750 | 0.16 /43 | 0.40 /12 | 2.28e09 | 2.28e09 |
| Rand 1200 x 760 | 0.05 /24 | 0.30 /13 | 3.58e07 | 3.58e07 |
| Rand 1000 x 765 | 0.03 /20 | NC* /100 | 6.25e07 | NC* |

Table 2: BIOP-SBLS2

de CPU en segundos requerido por SBLS2 para alcanzar un residuo $R_E(p)$, menor o igual al obtenido por BIOP cuando la tolerancia es $\epsilon = 10^{-6}$.Para BIOP reportamos el número de iteraciones internas. Indicamos con $NC*$ cuando el algoritmo no converge a una solución en la caja.

**CONCLUSIONES**

Hemos presentado resultados mostrando el comportamiento del algoritmo IOP cuando se incluyen restricciones de cota.Los resultados muestran que BIOP es más rápido que algoritmos conocidos y capaz de reducir el residuo más rápidamente.

Los resultados numéricos muestran la efectividad de BIOP respecto de SBLS2 ya que no falla en la convergencia

## References

[1] M.Adlers, Sparse Least Squares Problems with Box Constraints, Linkping Universitet, Linkping, Sweden, 1998.

[2] J. A. Browne, G. T. Herman, D. Odhner, *SNARK93: A Programming System for Image Reconstruction from Projections*, Department of Radiology, University of Pennsylvania, Medical Image Processing Group, Technical Report MIPG198, 1993.

[3] Y. Censor and S. Zenios, "Parallel Optimization: Theory and Applications," Oxford University Press, New York, 1997.

[4] Y. Censor , *Computational acceleration of Projections algorithms for linear best approximation problem*, Linear Algebra and its Applications, **416** (2006), 111–123.

[5] P. L. Combettes, *Construction d'un point fixe commun a famille de contractions fermes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. 320 (1995).

[6] I. Csiszár and G. Tusnády, *Information geometry and alternating minimization procedures*, Statistics and Decisions, Supplement, **1** (1984), 205–237.

[7] Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York and London (1970).

[8] C. Popa, R. Zdunek, *Kaczmarz extended algorithm for tomographic image reconstruction from limited-data*, Mathematics and Computers in Simulation, **65** (2004), 579–598.

[9] H. D. Scolnik, N. Echebest, M. T. Guardarucci, M. C. Vacchino, *Incomplete Oblique Projections for Solving Large Inconsistent Linear Systems*, Mathematical Programming B, **111** (2008), 273–300.

[10] Y. Xiao, D. Michalski, Y. Censor and J.M. Galvin, *Inherent smoothness of intensity patterns for intensity radiation therapy generated by simultaneous projection algorithms*, Phisics in Medicine and Biology **49** (2004), 3227–3245.