

## LA MULTIFRACTALIDAD Y EL EFECTO DE LA TURBULENCIA EN LA DINÁMICA CAÓTICA DE UN LÁSER DE HENE

Damián Gulich<sup>1,2,3</sup>, Gustavo Funes<sup>1,3</sup>, Luciano Zunino<sup>1,2</sup>, Mario Garavaglia<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigaciones Ópticas (CONICET La Plata - CIC). C.C. N° 3, 1897 Gonnet, La Plata, Argentina

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), 1900 La Plata, Argentina

<sup>3</sup>Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), 1900 La Plata, Argentina

[dgulich@ciop.unlp.edu.ar](mailto:dgulich@ciop.unlp.edu.ar)

### Resumen

Dada la dificultad para realizar estimaciones de espectros de Lyapunov, proponemos el empleo del *multifractal detrended fluctuation analysis* (MF-DFA) [1] para cuantificar la influencia de la turbulencia atmosférica sobre la dinámica caótica inducida en un láser de HeNe.

El comportamiento caótico es generado por un arreglo de tipo interferométrico que retroalimenta parte del haz a la cavidad del láser gaseoso. Esta dinámica ha sido estudiada y modelada en función del nivel de retroalimentación [2,3]. Los distintos niveles de turbulencia isotrópica fueron generados con un dispositivo denominado turbulador [4,5], que permite obtener diferentes constantes de estructura para el índice de refracción del aire ajustando un parámetro de diferencia de temperaturas en el aparato.

Teniendo presente el creciente interés [6] en la encriptación de mensajes empleando este tipo de sistemas ópticos caóticos, el estudio del efecto atmosférico permitiría llegar a conclusiones de utilidad en el campo de las comunicaciones ópticas.

Los resultados preliminares permiten interpretar las distintas intensidades de turbulencia como distintos niveles de ruido blanco aditivo sobre la serie caótica original [7].

**Palabras clave:** multifractalidad, láseres gaseosos, caos, turbulencia atmosférica, comunicaciones ópticas

### Introducción

En el pasado se ha estudiado la caoticidad en sistemas de láser gaseoso al introducir un factor de realimentación. Dicho factor actúa como parámetro bifurcante en la dinámica generada [2,3]. Este fenómeno ya había sido observado empíricamente con anterioridad y utilizado con propósitos prácticos de alineación [8].

Proponemos el empleo de MF-DFA [1], una metodología ampliamente utilizada para caracterizar la multifractalidad de series temporales no-estacionarias, para cuantificar la influencia de la turbulencia atmosférica sobre la dinámica caótica inducida en un láser de HeNe. Esta técnica se ha utilizado en el análisis de series temporales de campos tan variados como la econofísica, sismología, biología, medicina, cosmología, materia condensada y música entre otras [9].

El MF-DFA puede resumirse brevemente como sigue:

1. Sea  $x_1, x_2, \dots, x_N$  una serie de  $N$  datos. Dado su promedio  $\langle x \rangle$  determinamos una nueva serie  $Y(1), \dots, Y(N)$  de valores dados por  $Y(i) = \sum_{k=1}^i (x_k - \langle x \rangle)$ .
2. Dividimos la serie de  $Y(1), \dots, Y(N)$  en  $N_S$  ventanas no superpuestas de  $S$  puntos donde  $N_S = \lfloor N/S \rfloor$ . Si  $N$  no es divisible por  $S$ , quedarán algunos valores  $r$  ( $r = N - N_S S$ ) al final de la serie. Para resolver esto, tomamos

otros  $N_S$  segmentos pero comenzando en  $Y(r + 1)$ . Así obtenemos  $2N_S$  ventanas de  $S$  valores.

3. Sea  $\nu$  el índice de las  $2N_S$  ventanas ( $\nu = 1, 2, \dots, 2N_S$ ). Para cada una de las ventanas tomamos el polinomio  $y_\nu(i)$  de grado  $m$  que mejor ajusta a los datos de la ventana de índice  $i$ . Calculamos luego las  $N_S$  varianzas locales para  $\nu = 1, \dots, N_S$ :

$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \{Y[(\nu - 1)S + i] - y_\nu(i)\}^2$$

$m$  es el mismo para cada paso de esta técnica y determina la variante del análisis; así MF-DFA1 significa  $m = 1$ , etc. Si  $N$  no es divisible por  $S$ , entonces también debemos calcular las varianzas de las otras  $N_S$  ventanas ( $\nu = (N_S + 1), \dots, 2N_S$ ) según

$$F^2(\nu, S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \{Y[N - (\nu - N_S)S + i] - y_\nu(i)\}^2$$

4. Calculamos las funciones de fluctuación  $F_q(S)$  según

$$F_q(S) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2N_S} \sum_{\nu=1}^{2N_S} [F^2(\nu, S)]^{q/2} \right\}^{1/q}, & q \neq 0 \\ \exp \left\{ \frac{1}{4N_S} \sum_{\nu=1}^{2N_S} \ln [F^2(\nu, S)] \right\}, & q = 0 \end{cases}$$

Nótese que  $q = 2$  devuelve los resultados de la técnica tradicional de DFA.

5. Repetimos los pasos 2-4 para distintos valores de  $S$ , usualmente en el intervalo  $[10, \lfloor N/4 \rfloor]$  elegidos de manera de obtener un conjunto de valores equidistantes en escala logarítmica (esto es necesario para el siguiente paso).
6. Finalmente determinamos el comportamiento de escala de las funciones de fluctuación analizando la representación en escala log-log de todas las  $F_q(S)$  versus  $S$ . Si los valores originales de  $x_i$  tienen correlaciones de largo alcance, entonces para grandes valores de  $S$ :  $F_q(S) \sim S^{h(q)}$  donde  $h(q)$  es el exponente de Hurst generalizado; el mismo puede ser estimado como la pendiente en el gráfico log-log de  $F_q(S)$ . Si la serie es estacionaria, entonces  $h(2) \equiv H$  es el exponente de Hurst.

En [7] hemos estudiado la influencia del ruido blanco aditivo sobre series de multifractalidad conocida. Esencialmente observamos una disminución de los valores de  $h(q)$  para  $q < 0$ , generando consecuentemente una disminución en el rango multifractal  $\Delta h = h(-\infty) - h(\infty)$ .

### Parte experimental

El comportamiento caótico es generado por un arreglo de tipo interferométrico que retroalimenta parte del haz a la cavidad del láser gaseoso de HeNe como se muestra en la Figura 1. Esta dinámica ha sido estudiada y modelada en función del nivel de retroalimentación [2,3]. El fotodetector envía una señal de tipo audio con valores  $V(t)$  (equivalente a  $x_i$  en el formalismo de MF-DFA) proporcionales a la intensidad lumínica incidente, registrados con una PC a una frecuencia de 44100 Hz.

Los distintos niveles de turbulencia isotrópica fueron generados con un dispositivo denominado *turbulador* [4,5]; dicho dispositivo es un generador de turbulencias estadísticamente repetible basado en la mezcla de dos flujos de aire a diferentes temperaturas. Dicha diferencia de temperaturas ( $\Delta T$ ) está relacionada biunívocamente con la constante de estructura para el índice de refracción del aire  $C_n^2$ .

Se capturaron 26 series de 100.000 datos para cada  $\Delta T$  dada. Las diferencias de temperatura se fijaron en 7 valores distintos barriendo desde los 2,9 hasta los 21,5 °C.



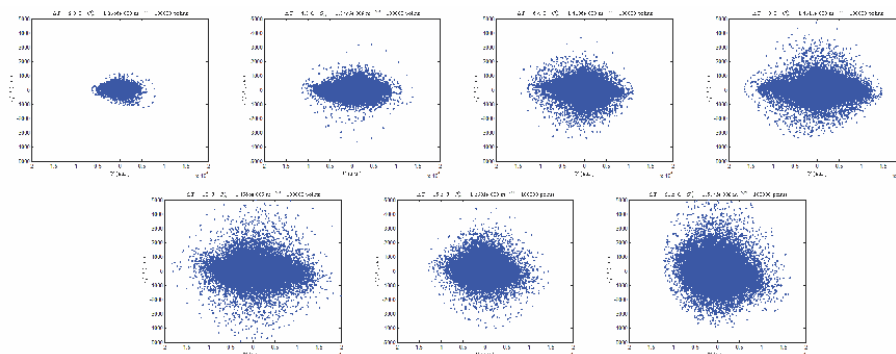
**Figura 1.** Izquierda: esquema del arreglo experimental. Centro: turbulador. Derecha: detector de intensidad lumínica.

## Resultados y discusión

En la Figura 2 se muestran las derivadas temporales de las señales adquiridas,  $V'(t)$ , versus la señal  $V(t)$  (espacio de fase).

Se analizaron las funciones de fluctuación para  $q$  entre -15 y 15 para determinar una región común de ajuste; en este caso se empleó el rango de  $S$  entre 4500 y 24000. Cada punto de los espectros multifractales que se pueden ver en la Figura 3 representa el promedio de  $h(q)$  de las 26 realizaciones; las barras de error corresponden a la desviación estándar. Se observan fundamentalmente modificaciones debido a la turbulencia en el espectro multifractal para valores de  $q$  negativos (fluctuaciones pequeñas). En tanto que la región de  $q$  positivos (fluctuaciones grandes) permanece prácticamente inalterada. Resultados similares se obtienen luego de analizar los espectros de multifractales estándares al contaminarlos con ruido blanco aditivo [7].

En la Figura 4 se muestra el rango multifractal (tomado en este caso como  $\Delta h = h(-15) - h(15)$ ) en función de  $C_n^2$  donde se observa una tendencia decreciente a partir de  $1,45 \times 10^{-9} \text{ m}^{-2/3}$ .



**Figura 2.** Representación de la derivada de la señal de intensidad lumínica  $V'(t)$  versus la señal original  $V(t)$  para diversas intensidades de turbulencia en orden creciente (comenzando arriba de izquierda a derecha y continuando abajo en el mismo sentido). Todas las figuras están en el mismo rango; las escalas están en unidades arbitrarias.

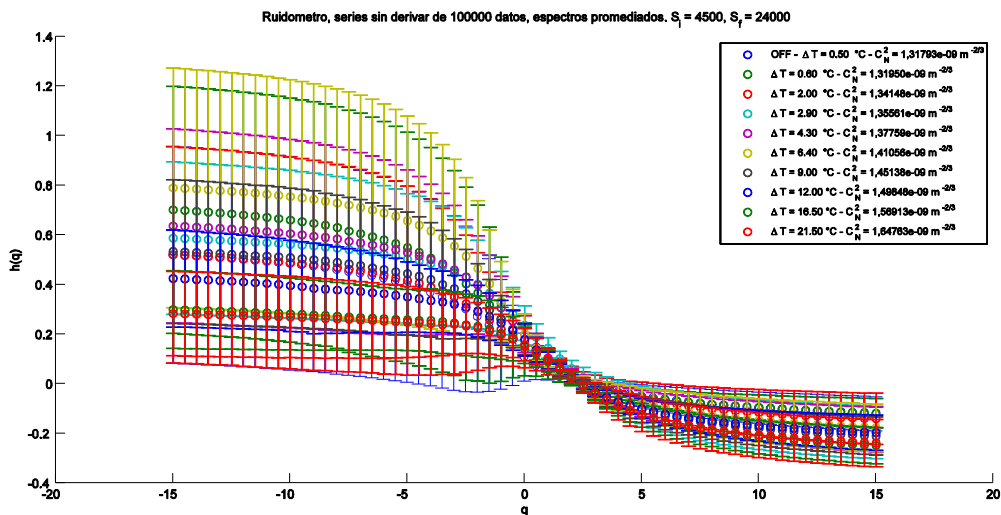


Figura 3. Espectros multifractales obtenidos en función de  $\Delta T$  ( $\equiv C_N^2$ ).

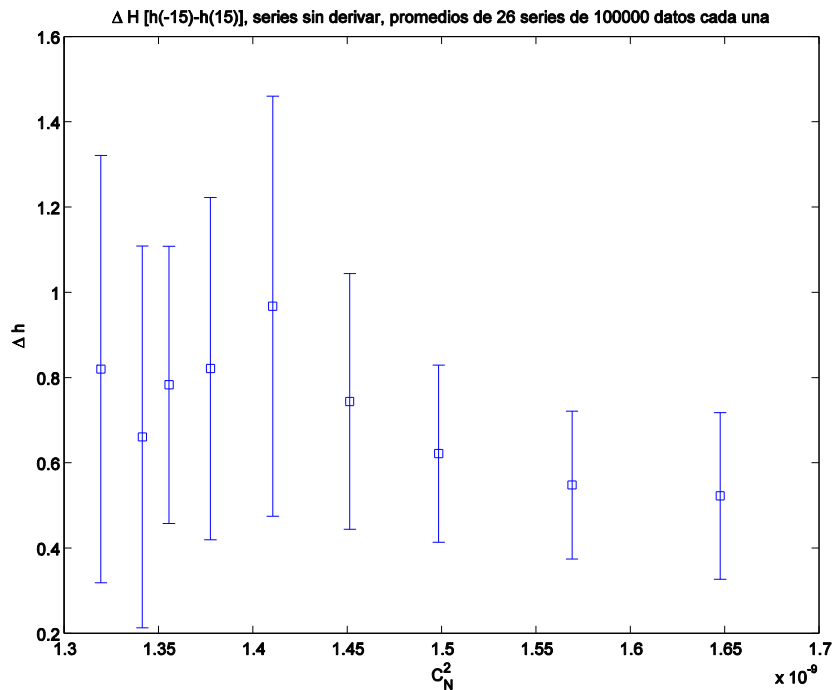


Figura 4. Rango multifractal en función de la constante de estructura (las unidades de  $C_N^2$  son m<sup>-2/3</sup>).

### Conclusiones

El aumento de la dispersión de los puntos a medida que se intensifica la turbulencia (Figura 2) es interpretable como un indicador directo de la influencia de ésta sobre la señal.

Estos resultados (preliminares) muestran cierta tendencia decreciente en  $\Delta h$  versus  $C_N^2$ , interpretable, en principio, como un efecto de tipo de ruido blanco aditivo aportado por la turbulencia atmosférica sobre la serie caótica original [7].

Dado el creciente interés [6] en la encriptación de mensajes empleando este tipo de dispositivos, el estudio del efecto atmosférico permitiría llegar a conclusiones de utilidad en el campo de las comunicaciones ópticas. Mediciones más detalladas se encuentran en progreso y serán reportadas en publicaciones futuras.

## Bibliografía

[1] Kantelhardt, J. W.; Zschiegner, S. A.; Koscielny-Bunde, E.; Havlin, S.; Bunde, A. & Stanley, H. (2002), 'Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series', *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **316**(1-4), 87 - 114.

[2] Kuwashima, F.; Ichikawa, T.; Kitazima, I. & Iwasawa, H. (1999), 'Chaotic Oscillation in a Single-Mode Class a He-Ne Laser (6328 Å) ii', *Japanese Journal of Applied Physics* **38**(Part 1, No. 11), 6321-6326.

[3] Kuwashima, F.; Kitazima, I. & Iwasawa, H. (1998), 'The Chaotic Oscillation of the Single-Mode he-ne(6328 Å) Class a Laser', *Japanese Journal of Applied Physics* **37**(Part 2, No. 3B), L325-L328.

[4] Keskin, O.; Jolissaint, L. & Bradley, C. (2006), 'Hot-air optical turbulence generator for the testing of adaptive optics systems - principles and characterization', *Applied Optics* **45**(20), 4888-4897.

[5] Gulich, M. Damián. (2011), 'Construcción y caracterización de un generador de turbulencias isotrópicas en aire caliente', Trabajo de Diploma, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata.

[6] Rulkov, N. F.; Vorontsov, M. A. & Illing, L. (2002), 'Chaotic Free-Space Laser Communication over a Turbulent Channel', *Phys. Rev. Lett.* **89**, 277905.

[7] Gulich, D. & Zunino, L. (2012), 'The effects of observational correlated noises on multifractal detrended fluctuation analysis', *Physica A* **391**(16), 4100-4110.

[8] H. Ranea-Sandoval and M. Gallardo, "Measuring flatness of large tables: new methods," *Applied Optics* **25**, 1370-1371 (1986).

[9] J.W. Kantelhardt, Fractal and multifractal time series, in: R.A. Meyers (Ed.), *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, Springer, 2009.