

APLICACIÓN DE UN MÉTODO DE RESOLUCIÓN IMPLÍCITO Y UNO EXPLÍCITO AL ESTUDIO DE UN PROBLEMA DE FRACTURA NO LINEAL

María P. Zappitelli

Departamento de Construcciones, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
Calle 48 y 115 s/n, (B1900TAG) La Plata, Provincia de Buenos Aires, República Argentina
paulazappitelli@hotmail.com

Palabras clave: Métodos implícitos, métodos explícitos, Método de los Elementos Finitos, Modelo de Fisura Cohesiva

INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es uno de los más utilizados para la resolución de una gran cantidad de problemas ingenieriles cuya solución exacta sería muy compleja. La utilización del MEF implica la integración de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno en estudio. Así por ejemplo, la ecuación de equilibrio que gobierna la respuesta dinámica lineal de un sistema de elementos finitos se expresa de la siguiente manera:

$$M^{NM} \ddot{u}^M + I^N - P^N = 0 \quad (1)$$

donde M^{NM} es la matriz de masa, I^N el vector de fuerzas internas y P^N el de fuerzas externas.

La resolución de la ecuación (1) puede llevarse a cabo utilizando diferentes métodos entre los cuales se encuentran los métodos de integración directa, según los cuales la ecuación (1) se integra utilizando un procedimiento numérico paso a paso. El término "directa" significa que, previamente a la integración numérica, no se realiza una transformación de las ecuaciones a una forma diferente.

Los métodos de integración directa pueden ser a su vez de tipo implícito o explícito. Los de tipo explícito obtienen la solución de la ecuación (1), $U^{t+\Delta t}$, basada en la utilización de las condiciones de equilibrio en el tiempo t y por tal razón no requieren el cálculo de la inversa de la matriz de rigidez efectiva (suma de las matrices de rigidez y de amortiguamiento) en la solución paso a paso ni realizar un procedimiento iterativo. En cambio los métodos implícitos utilizan la condición de equilibrio en el tiempo $t+\Delta t$ para obtener la solución $U^{t+\Delta t}$, lo cual implica la necesidad de invertir la matriz de rigidez efectiva.

Los métodos explícitos son por definición condicionalmente estables, ya que requieren la utilización de un paso de tiempo Δt más pequeño que el paso de tiempo crítico, $\Delta t_c = T_n/\pi$, donde T_n es el período más pequeño del ensamblaje de elementos con n grados de libertad. Si se utilizara un paso de tiempo mayor la integración sería inestable, lo cual significa que cualquier error de redondeo crece y genera que la respuesta calculada carezca de validez. En cambio los métodos implícitos son incondicionalmente estables ya que la solución, para cualquier condición inicial, no crece sin límites para cualquier paso de tiempo Δt , en particular para $\Delta t/T$ grande, donde T representa el período natural.

La solución implícita se reduce a un análisis estático si se desprecian los efectos de la masa y el amortiguamiento, mientras que esto no puede realizarse con un método explícito. Aplicar métodos explícitos a problemas cuasi-estáticos requiere algunas consideraciones especiales. Dado que una solución estática es una solución a largo plazo, es computacionalmente impracticable realizar la simulación explícita en una escala de tiempo real ya que requeriría un número excesivo de incrementos de tiempo pequeños. Para obtener una solución económica, el evento debe ser acelerado de algún modo.

El problema que se presenta se debe a que a medida que el evento se acelera, el estado de equilibrio estático se convierte en un estado de equilibrio dinámico en el que las fuerzas de inercia cada vez son más dominantes. El objetivo es modelar el problema en el período de tiempo más corto para el cual las fuerzas de inercia sean despreciables.

En el presente trabajo se aplica un criterio implícito de integración desarrollado por Hilber, Hughes y Taylor y el método explícito de diferencias centrales a la resolución de un problema clásico de Mecánica de Fractura no lineal correspondiente al comportamiento en fractura de una viga entallada de hormigón ensayada en régimen estático, con el objetivo de demostrar que puede aplicarse un método explícito a la resolución de problemas estáticos.

MODELADO DEL PROBLEMA

Fundamento numérico

El operador implícito de Hilber, Hughes y Taylor es un operador de parámetro único con amortiguamiento numérico controlable. Este amortiguamiento es más valioso en el esquema de paso de tiempo automático, debido a que el ruido numérico introducido por las ligeras altas frecuencias cuando se cambia el paso de tiempo, es removido rápidamente por una pequeña cantidad de amortiguamiento numérico, sin tener un efecto significativo en la respuesta a bajas frecuencias. Este operador reemplaza la ecuación (1) con el balance de fuerzas de d'Alembert al final del paso de tiempo y una ponderación promedio de las fuerzas estáticas al comienzo y al final del paso de tiempo:

$$M^{NM} \ddot{u}^M|_{t+\Delta t} + (1 + \alpha)(I^N|_{t+\Delta t} - P^N|_{t+\Delta t}) - \alpha(I^N|_t - P^N|_t) + L^N|_{t+\Delta t} = 0, \quad (2)$$

El término $L^N|_{t+\Delta t}$ es la suma de todas las fuerzas del multiplicador de Lagrange asociadas con los grados de libertad N . La definición del operador se completa con la fórmula de Newmark para la integración de desplazamientos y velocidades:

$$u|_{t+\Delta t} = u|_t + \Delta t \dot{u}|_t + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}|_t + \beta \ddot{u}|_{t+\Delta t} \right) \quad (3)$$

$$\dot{u}|_{t+\Delta t} = \dot{u}|_t + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{u}|_t + \gamma \ddot{u}|_{t+\Delta t} \right) \quad (4)$$

donde:

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2, \quad -\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha$$

El principal interés de este operador es su amortiguamiento numérico controlable y la forma en que éste funciona, creciendo lentamente para bajas frecuencias y más rápido para altas frecuencias. El control sobre la cantidad de dicho amortiguamiento es ejercida por el parámetro α . Cuando $\alpha=0$ no hay amortiguamiento y el operador es la regla del trapecio ($\beta=1/4$) pero para $\alpha=-1/3$ habrá un amortiguamiento significativo.

Por otro lado el método explícito de diferencias centrales se describe a partir de las siguientes expresiones:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{u}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(i)} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{u}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{u}}^{(i+\frac{1}{2})} \quad (6)$$

Donde $\dot{\mathbf{u}}$ representa a la velocidad y $\ddot{\mathbf{u}}$ la aceleración. El superíndice (i) representa el número de incremento, $(i-1/2)$ e $(i+1/2)$ se refieren a valores a la mitad del incremento.

La clave de la eficiencia computacional del procedimiento explícito se encuentra en el uso de una matriz de masa diagonal:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{(i)} - \mathbf{I}^{(i)}) \quad (7)$$

El operador de diferencias centrales requiere de un procedimiento de arranque debido a que el valor de las velocidades medias debe ser definido. Los valores iniciales (para $t=0$) de la velocidad y la aceleración son fijados en cero, a menos que se proponga otro valor. Se establece la siguiente condición:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{u}}^{(0)} + \frac{\Delta t^{(1)}}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(0)} \quad (8)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (8) en la expresión (5) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(-\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \frac{\Delta t^{(0)}}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(0)} \quad (9)$$

Descripción del modelo

Se propone, empleando los métodos descritos, realizar una modelación 3D de tres geometrías de vigas entalladas presentes en la publicación de Roesler y otros. Se implementó un Modelo de Fisura Cohesiva (MFC) en un código comercial de cálculo por el Método de los Elementos Finitos (ABAQUS 6.9). En el MFC la zona dañada se representa mediante una fisura ficticia entre cuyas caras se pueden transmitir tensiones, cuya magnitud viene dada por la separación entre las mismas. La relación entre tensión y separación se materializa a través de la curva o función de ablandamiento, la cual es una propiedad del material y uno de los parámetros fundamentales del modelo. La curva de ablandamiento empleada en el presente trabajo es de tipo bilineal.

Para la resolución del problema se simuló la mitad de las vigas divididas en dos partes, una de ellas formada por los elementos cohesivos y la otra constituida por la viga propiamente dicha. Esta división en dos partes se empleó para poder realizar un mallado más fino en la zona cohesiva en relación al mallado en la viga propiamente dicha, ya que los elementos cohesivos requieren un importante refinamiento de la malla para funcionar adecuadamente. Para la vinculación de ambas partes se utilizaron Tie Constraints. Para ambos métodos la cantidad y tipo de elementos empleados fueron los mismos, sólo varió el tipo de resolución. Para poder aplicar la condición de simetría en el plano medio de la viga se emplearon Equation Constraints en las direcciones vertical y lateral.

En la Fig. 1 y en la Tabla 1 se presentan las características geométricas de las vigas. Por su parte, en la Fig. 2 y en la Tabla 2 se indican los parámetros de la función de ablandamiento del hormigón, habiéndose considerado en todos los casos $E = 32 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,3$.

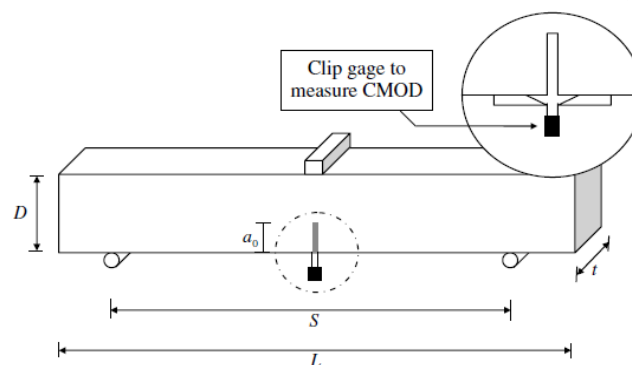


Figura 1 – Geometría de las vigas estudiadas

Caso	L	D	t	a0	S
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
Viga 63-80	350	63	80	21	250
Viga 150-80	700	150	80	50	600
Viga 250-80	1100	250	80	83	1000

Tabla 1 – Parámetros geométricos de las vigas estudiadas

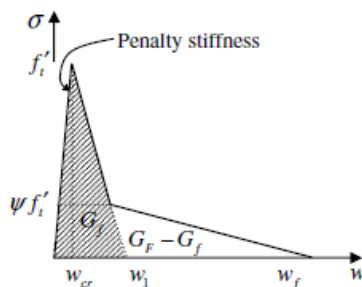


Figura 2 – Función de ablandamiento

Caso	Parámetros de la función de ablandamiento						
	K [N/mm]	f t [MPa]	GF [Nmm/mm^2]	Gf [Nmm/mm^2]	Wcr [mm]	Wf [mm]	φ
Viga 63-80	32000	4.15	0.106	0.055	1.30E-04	1.25E-01	0.25
Viga 150-80	32000	4.15	0.159	0.055	1.30E-04	2.27E-01	0.25
Viga 250-80	32000	4.15	0.193	0.055	1.30E-04	2.92E-01	0.25

Tabla 2 – Parámetros de la función de ablandamiento

El estado de carga aplicado consiste en un desplazamiento de 2.5mm en dirección vertical en el centro de la viga. Las vigas se encuentran simplemente apoyadas, y por ser simétricas respecto del plano medio se modeló sólo la mitad de las mismas aplicando condiciones de simetría, restringiendo los desplazamientos en la dirección del eje de las vigas. En la Fig. 3 se muestra el mallado de la geometría para la viga 250-80.

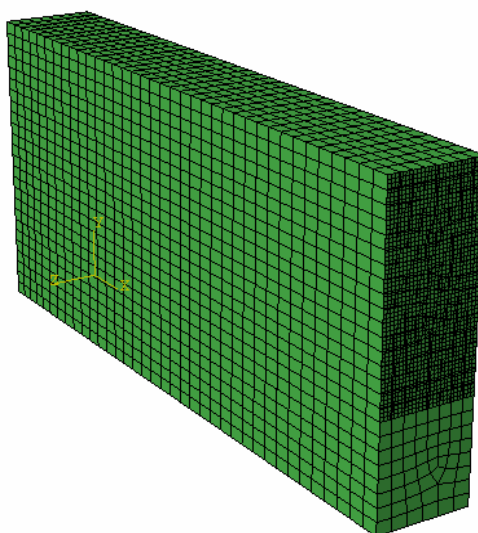


Figura 3 – Mallado correspondiente a la viga 250-80

En el método implícito se consideró la no linealidad de la geometría y el tamaño mínimo de incremento empleado fue de $1E^{-20}$ seg. En éste el período de tiempo empleado en la aplicación de la carga fue de 1 seg.

En los elementos cohesivos se aplicó viscosidad para ayudar a la convergencia, con un valor de $1E^{-5}$ 1/seg para la viga 63-80 y $1E^{-6}$ 1/seg para las vigas 150-80 y 250-80. En todos los casos se corroboró que la energía disipada por el parámetro viscoso no superara el 10% de la energía de deformación.

Para la modelación de la viga empleando el solver ABAQUS/Explicit se utilizó el comando Mass Scaling para acelerar el tiempo de resolución del problema y poder de esta manera considerarlo cuasi-estático. Para ello se especificó que debían escalarse los elementos de masa que se encontraran por debajo del mínimo incremento target, que en este caso fue de 0.001 seg para la viga 63-80, 0.005 seg para la viga 150-80 y 0.007 seg para la viga 250-80. Al terminar la simulación se verificó que la energía cinética no superara el 10% de la energía de deformación y así verificar la hipótesis de comportamiento cuasi-estático. Además la energía cinética no debía presentar una forma oscilante a lo largo del tiempo.

En el método explícito se tuvo que aplicar el desplazamiento a lo largo de un período de tiempo, coincidente con la duración del ensayo, y no en forma instantánea. Dicho período fue de 60 seg y para su aplicación se utilizó una curva de amplitud tipo smooth step, para evitar problemas de discontinuidades en el cálculo de las derivadas primeras y segundas.

RESULTADOS

A partir del empleo de los métodos implícito y explícito se obtuvieron las curvas Carga-CMOD (Carga- apertura de fisura) para cada una de las geometrías de vigas indicadas en la Tabla (1) y se las comparó con los resultados experimentales presentes en la publicación de Roesler y otros, como se observa en la Fig. 4.

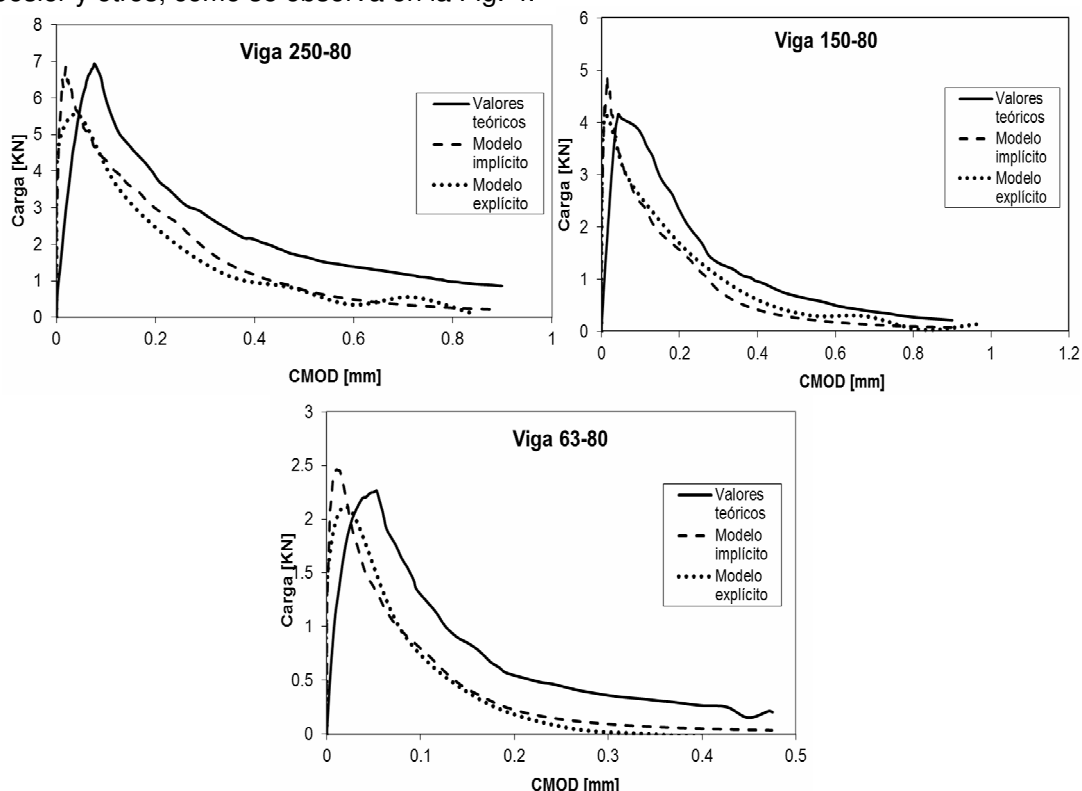


Figura 4 – Curvas Carga-CMOD

Para hacer efectiva la comparación se consideraron los valores máximos de las distintas variables estudiadas y se los comparó con los valores máximos experimentales, a través de la estimación del error alcanzado, como se observa en las Tablas 4 y 5.

	Viga 63-80		Viga 150-80		Viga 250-80	
	Máxima carga	Máximo CMOD	Máxima carga	Máximo CMOD	Máxima carga	Máximo CMOD
	[KN]	[mm]	[KN]	[mm]	[KN]	[mm]
Experimental	2.27E+00	4.75E-01	4.16E+00	9.00E-01	6.94E+00	8.99E-01
Implícito	2.46E+00	4.75E-01	4.89E+00	9.02E-01	6.85E+00	8.91E-01
Explícito	2.10E+00	4.38E-01	4.09E+00	9.70E-01	5.53E+00	8.41E-01

Tabla 4 – Valores máximos de Carga y CMOD

	Comparación con valores experimentales					
	Viga 63-80		Viga 150-80		Viga 250-80	
	Máxima carga	Máximo CMOD	Máxima carga	Máximo CMOD	Máxima carga	Máximo CMOD
	[KN]	[mm]	[KN]	[mm]	[KN]	[mm]
Implícito	8.70%	0.14%	17.36%	0.18%	1.34%	0.89%
Explícito	7.40%	7.81%	1.74%	7.79%	20.23%	6.47%

Tabla 5 – Comparación con valores experimentales

Como puede observarse el error obtenido con el modelo es muy bajo en relación con los valores experimentales. En particular el error es menor con respecto a la solución con el método explícito al considerar máxima carga, excepto para la viga 250-80. Para el caso de máxima CMOD el error es menor para el método implícito.

DISCUSIÓN FINAL Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se proponía resolver un problema clásico de Mecánica de Fractura no Lineal con el Método de los Elementos Finitos utilizando un método implícito y otro explícito y validar los resultados obtenidos con los modelos con resultados experimentales. A partir de lo expuesto en el apartado Resultados, podemos considerar que se cumplió con ello.

A partir del reducido error obtenido podemos considerar que la aproximación alcanzada con ambos métodos, con el mallado y las condiciones de borde empleadas, son aceptables. Por lo tanto pudimos comprobar que el método explícito puede emplearse para la resolución de problemas estáticos, ya que los resultados obtenidos con el mismo son tan válidos como los obtenidos con el método implícito. De esta forma podemos tomar ventaja de todas las bondades de la solución explícita, en particular para el caso de problemas complejos altamente no lineales, como el presente en el que se emplean elementos cohesivos, los cuales originan cambios en la rigidez del problema debido al ablandamiento que sufren, situación que lleva a que la resolución utilizando métodos implícitos sea inestable y requiera el empleo de amortiguadores viscosos que actúan como estabilizadores. Los métodos explícitos eliminan esa necesidad, por ser la solución más estable.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Roesler, G.H. Paulino, K. Park, C. Gaedicke. Concrete fracture prediction using bilinear softening. *Cement & Concrete Composites* 29, pp. 300-312, 2007
- [2] ABAQUS, User's Manual Version 6.9, Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc, 2009.
- [3] ABAQUS, Theory Manual Version 6.9, Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc, 2009.
- [4] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Cap 5 pp. 471-477. Prentice Hall, 1996.
- [5] E.I. Villa y J.F. Bissio. Aplicación de un modelo no lineal al estudio del comportamiento en fractura del hormigón. *Primera Jornadas de Investigación y Transferencia, Facultad de Ingeniería, UNLP*, pp. 160-167, 2011.