



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESIS DOCTORAL

Transporte en sistemas Luttinger multiterminales

Autor:

Lic. Hugo Alberto AITA

Directores:

Dra. Liliana C. ARRACHEA

Dr. Carlos M. NAÓN

Resumen

En esta Tesis se investigan propiedades de transporte de carga eléctrica y de calor en dispositivos de escala mesoscópica. En particular, estudiamos sistemas mesoscópicos unidimensionales, los cuales no pueden ser entendidos dentro del marco de la teoría del líquido de Fermi, sino que pertenecen a otra clase de universalidad conocida como líquidos de Luttinger.

En el Capítulo 1 se presenta la definición del concepto de sistema mesoscópico y la naturaleza de la resistencia (o conductancia) en este tipo de sistemas. También se describen los dispositivos experimentales que presentan comportamiento tipo Luttinger, como los cables cuánticos y los estados de borde de efecto Hall.

En el Capítulo 2 se detallan de manera resumida las técnicas formales utilizadas para estudiar los problemas abordados: el formalismo de Keldysh de funciones de Green fuera del equilibrio, y la bosonización, que es un método adecuado para estudiar los líquidos de Luttinger.

Los Capítulos 3 y 4 reúnen las contribuciones originales de esta Tesis.

En el Capítulo 3 se presenta el estudio de la resistencia eléctrica en un dispositivo de cuatro terminales, en el que el cable cuántico se acopla a cuatro puntas o contactos modelados como reservorios. En trabajos anteriores [1] se habían considerado contactos no invasivos (acoplamiento muy débiles). En esta Tesis se ha superado la hipótesis de no invasividad, considerando sondas de voltaje que, si bien siguen estando débilmente acopladas a la muestras, introducen decoherencia a través de procesos de dispersión inelástica, así como también posibles efectos de interferencia entre las sondas. Entre otras cuestiones, se ha explorado el comportamiento de la resistencia de cuatro terminales (oscilaciones tipo Friedel, resistencia negativa) bajo el efecto de sondas invasivas. Estas investigaciones han dado lugar a las publicaciones [2, 3]:

- H. Aita, L. Arrachea, C. Naón, *Four-terminal resistance of an interacting quantum wire with weakly invasive contacts*, Journal of Physics: Condensed Matter **23**, 475601 (2011).
- H. Aita, L. Arrachea, C. Naón, *Four-terminal resistance of an interacting quantum wire with invasive contacts*, Physica B: Condensed Matter **407**, Issue 16, 3158 (2012), Proceedings del evento *Frontiers in Condensed Matter V*, Buenos Aires, (2010).

En el Capítulo 4 analizamos el transporte de calor inducido por un gradiente de temperatura aplicado a reservorios que están *acoplados capacitivamente* a un estado de borde

Hall con llenado ν . Consideramos los casos del efecto Hall cuántico entero, con $\nu = 1$ y los estados fraccionarios en la serie de Laughlin, con factor de llenado $\nu = 1/m$ con m impar. Este problema se puede resolver de forma exacta. Para el caso particular de $\nu = 1$, comparamos con el comportamiento del transporte de calor inducido por un gradiente de temperatura en reservorios conectados al borde mediante contactos puntuales del tipo *tunneling*, dado que este caso es también exactamente soluble. En todos los casos nos concentramos en la conductancia térmica del borde y en la temperatura local a lo largo del mismo. La temperatura se define por medio de un termómetro, consistente en un tercer reservorio acoplado débilmente al borde. La temperatura de este último reservorio es tal que el flujo de calor a través del contacto es nulo. Comparando los casos de contactos tipo *tunneling* y *capacitivos*, se ha encontrado un comportamiento cualitativamente diferente para la conductancia de calor, mientras que es similar para la temperatura local. Estos resultados han dado lugar a la publicación [4]:

- H. Aita, L. Arrachea, C. Naón, E. Fradkin, *Heat transport through quantum hall edge states: tunneling versus capacitive coupling to reservoirs*, Phys. Rev. B **88**, 085122 (2013).

Índice general

Resumen	I
1. Introducción	1
1.1. Sistemas Mesoscópicos	1
1.1.1. Escalas que caracterizan el transporte en sistemas mesoscópicos . .	2
1.1.2. Dispositivos mesoscópicos unidimensionales	3
1.1.3. Naturaleza de la resistencia en sistemas mesoscópicos	5
1.2. Efecto Hall cuántico	9
1.2.1. Sistemas de electrones bidimensionales	10
1.2.1.1. Transistores de efecto de campo	11
1.2.1.2. Heteroestructuras semiconductoras	13
1.2.2. Cuantización de Landau	13
1.2.3. Efecto Hall cuántico entero	16
1.2.4. Efecto Hall cuántico fraccionario	18
2. Metodología - Técnicas empleadas	20
2.1. Teoría cuántica de muchos cuerpos fuera del equilibrio	20
2.1.1. Limitaciones de la teoría de muchos cuerpos convencional	20
2.1.2. El contorno de Schwinger-Keldysh	23
2.1.3. Ecuación de Dyson en el contorno	25
2.1.3.1. Relación con las funciones de Green en tiempo real . . .	26
2.1.4. Teorema de Langreth	27
2.2. Líquidos de Luttinger	27
2.2.1. Colapso de la Teoría del líquido de Fermi en una dimensión	28
2.2.2. Modelo de Luttinger y Bosonización	29
2.2.3. Líquidos de Luttinger quirales	32
3. Resistencia de cuatro terminales en un líquido de Luttinger	35
3.1. Introducción	35
3.2. Modelo	37
3.3. Funciones de Green	39
3.4. Corrientes	42
3.5. Caída de voltaje y resistencia de cuatro terminales	44
3.6. Resultados sin impureza	45
3.7. Resultados con impureza	49
3.8. Resumen y conclusiones	51

4. Transporte de calor en un borde Hall	54
4.1. Introducción	54
4.2. Modelos	57
4.2.1. Acoplamiento <i>tunneling</i>	58
4.2.2. Acoplamiento capacitivo	59
4.3. Balance de energía y corriente de calor	60
4.4. Metodología: funciones de Green de no equilibrio	61
4.4.1. Acoplamiento <i>tunneling</i>	61
4.4.2. Acoplamiento capacitivo	62
4.5. Coeficientes de transmisión	64
4.5.1. Acoplamiento <i>tunneling</i>	64
4.5.2. Acoplamiento capacitivo	65
4.6. Conductancia térmica	67
4.6.1. Acoplamiento <i>tunneling</i>	67
4.6.2. Acoplamiento capacitivo	70
4.7. Temperatura local	73
4.7.1. Acoplamiento <i>tunneling</i>	73
4.7.2. Acoplamiento capacitivo	74
4.8. Resumen y conclusiones	76
5. Conclusiones y perspectivas	78
A. Cuantización de Landau	82
A.1. Niveles de Landau	82
A.2. Degeneración	84
B. Cálculos detallados para el problema de la resistencia de 4 terminales	86
C. Cálculos detallados para el problema del transporte de calor en un borde Hall	88
C.1. Ecuaciones de Dyson	88
C.1.1. Acople <i>tunneling</i>	88
C.1.2. Acople capacitivo	90
C.2. Conductancias térmicas	93
C.2.1. Acople <i>tunneling</i>	93
C.2.1.1. Límite de altas temperaturas ($T \gg 1/L$)	95
C.2.1.2. Límite de bajas temperaturas ($\gamma_t \ll T \ll 1/L$)	96
C.2.2. Acople capacitivo	96
C.2.2.1. Límite de bajas temperaturas	98
C.2.2.2. Límite de altas temperaturas	98
C.2.2.3. Límite $\beta/\pi\sqrt{V_1V_2} \rightarrow \infty$	99
C.2.2.4. Límite $\beta/\pi\sqrt{V_1V_2} \rightarrow 0$	100
C.3. Perfiles de temperatura	100
C.3.1. Acople tunneling	100
C.3.2. Acople capacitivo	102
C.3.2.1. Límite $T_{1,2} \ll 1/\sqrt{V_1V_2}$	104

C.3.2.2. Límite $T_{1,2} \gg 1/\sqrt{V_1 V_2}$	105
Agradecimientos	106
Bibliografía	107

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sistemas Mesoscópicos

Los sistemas mesoscópicos, por sus dimensiones y características, constituyen un puente entre los sistemas macroscópicos que manejamos diariamente y la escala atómica [5]. El estudio de estos sistemas es altamente relevante no sólo por el hecho de que nos permite comprender algunas características del límite macroscópico y como se llega él, sino porque además existe una gran cantidad de fenómenos físicos intrínsecos al régimen mesoscópico. La escala mesoscópica tiene longitudes típicas que van desde decenas de nm hasta algunos μm , y es aquella en la que los electrones de un semiconductor o un metal ponen de manifiesto su naturaleza cuántica cuando son enfriados a temperaturas que no superan unos pocos K . La dualidad onda-partícula y la longitud de coherencia cuántica, resultan centrales en la determinación de las propiedades del transporte electrónico en dichos sistemas. Otro aspecto interesante es el modo en que estos sistemas interactúan, vía fonones y excitaciones de muchos cuerpos, y se acoplan a otros de mayores dimensiones, esencialmente macroscópicos. Todos estos efectos influyen, en particular, en las propiedades del transporte electrónico y de calor. Por ejemplo, la intensidad del acoplamiento entre un sistema mesoscópico y otro macroscópico, al que denominaremos *reservorio*, determina la intensidad del intercambio de partículas y energía, dependiendo también de la temperatura de los mismos. La tecnología que ha dado origen a la fabricación de estos sistemas ha progresado rápidamente y actualmente es posible contrastar las predicciones teóricas con resultados experimentales. Existen técnicas que consisten en el crecimiento controlado de nanoestructuras; entre las más conocidas podemos mencionar el método del haz molecular epitaxial, técnicas litográficas de haz de electrones, litografía de rayos X, etc. Por otro lado, mediante la utilización de microscopios de efecto túnel es posible fabricar, analizar y medir estructuras de escala atómica.

En esta Tesis nos centraremos en particular en dispositivos mesoscópicos unidimensionales (1D) en los cuales las interacciones dominantes son las correlaciones entre electrones. En este tipo de sistemas, una aproximación perturbativa al problema está lejos de ser aplicable. Más aún, los sistemas unidimensionales interactuantes no pueden entenderse desde la óptica del líquido de Fermi, siendo necesario un nuevo modelo, conocido como *líquido de Luttinger*. La teoría del mismo se resume en el Capítulo 2. A continuación discutiremos las escalas relevantes en el Transporte Cuántico y haremos un resumen de los dispositivos experimentales estudiados en esta Tesis.

1.1.1. Escalas que caracterizan el transporte en sistemas mesoscópicos

Los sistemas mesoscópicos son sistemas cuyas dimensiones son menores que las longitudes macroscópicas pero mayores que las distancia atómicas. En la Figura 1.1 se muestran algunas longitudes características de este tipo de sistemas.

El transporte en este tipo de sistemas vendrá determinado por la relación existente entre las dimensiones del mismo y otras tres longitudes características, a saber:

- la longitud de onda de Fermi λ_F
- el camino libre medio elástico l
- la longitud de coherencia de fase L_ϕ .

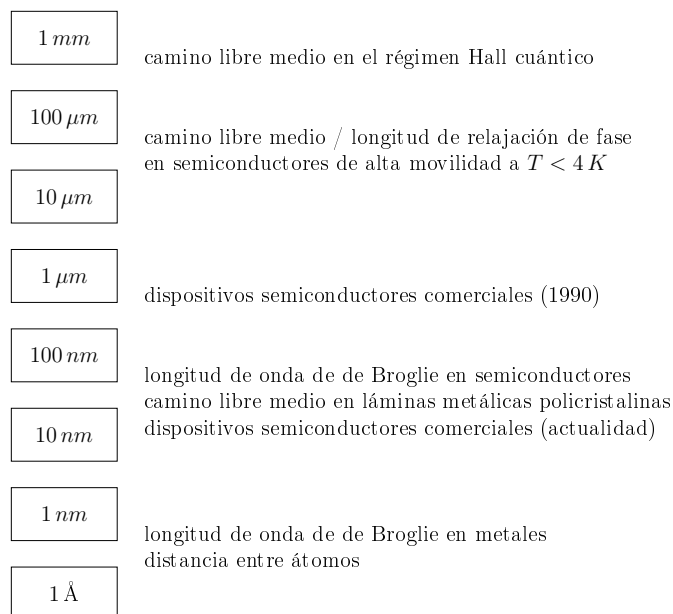


FIGURA 1.1: Escalas relevantes en sistemas mesoscópicos.

La longitud de onda de Fermi λ_F está directamente relacionada con la energía cinética del electrón y por lo tanto con la temperatura del sistema. En general, para metales a muy bajas temperaturas es del orden de la separación interatómica, mientras que en semiconductores ésta puede llegar a los 100 nm . Bajo estas condiciones es necesario utilizar la mecánica cuántica ya que las predicciones clásicas fracasan.

El camino libre medio l es la distancia promedio que recorre un electrón antes de ser dispersado elásticamente por un ion. Puede expresarse como $l = v_F \tau_e$, donde v_F es la velocidad de Fermi y τ_e es el tiempo medio entre colisiones elásticas.

La longitud de coherencia de fase L_ϕ es la distancia dentro de la cual se preserva la fase de la función de onda electrónica. Esta última longitud es la que define el régimen mesoscópico, ya que es necesario que L_ϕ sea mayor que la longitud característica del sistema L para que se observen los fenómenos de interferencia cuántica. Si bien es muy difícil obtener una expresión cerrada para L_ϕ , se puede estimar que $L_\phi \sim (\tau_\phi D)^{1/2}$, donde τ_ϕ es el tiempo medio entre colisiones *inelásticas* y D es el coeficiente de difusión. Los principales procesos que pueden dar lugar a colisiones inelásticas en semiconductores son la interacción electrón-electrón y la interacción electrón-fonón. Estas últimas, al ser menos frecuentes a bajas temperaturas hacen que L_ϕ aumente significativamente. A temperaturas del orden de los mK , L_ϕ es del orden del μm , lo que impone que la mayoría de las mediciones se realicen a bajas temperaturas.

Dado un sistema de longitud finita L , el transporte es coherente siempre y cuando se cumpla que $L < L_\phi$. Esto estará determinado por la influencia de los mecanismos de pérdida de coherencia de fase (dispersión inelástica, impurezas con grados de libertad internos, etc.) sobre los electrones. Dentro del transporte coherente pueden distinguirse a la vez tres regímenes de transporte:

Régimen Balístico el camino libre medio l entre colisiones elásticas es mayor que L .

Régimen Difusivo el camino libre medio l entre colisiones elásticas es menor que L .

Régimen Localizado el camino libre medio l entre colisiones elásticas es mucho menor que L .

1.1.2. Dispositivos mesoscópicos unidimensionales

Los dispositivos mesoscópicos estudiados en esta Tesis, son los *cables nanoscópicos* (*nanowires*), los *nanotubos de carbono* y los bordes de placas en el régimen de efecto Hall cuántico (estos últimos se discutirán en la Sección 1.2).

Los cables cuánticos son sistemas en los que los electrones son confinados en dos direcciones y son capaces de desplazarse a lo largo de la dirección restante. Hay varias maneras de producir cables cuánticos; detallamos aquí la que da como resultado longitudes de coherencia mayores. La configuración experimental se esquematiza en la Figura 1.2. El punto de partida es un gas de electrones bidimensional (2DEG), fabricado utilizando heteroestructuras semiconductoras (ver Subsección 1.2.1.2). Aplicando voltajes a los electrodos metálicos dispuestos sobre el gas, se logra confinar los electrones a una sola dimensión.

Los nanotubos de carbono son cilindros formados por planchas de grafeno enrolladas. Dentro de los nanotubos, existen dos grandes clases: los nanotubos de pared simple (SWNT) (Figura 1.3), y los de pared múltiple (MWNT) los cuales están formados por varios tubos concéntricos. La elección de la dirección de enrollamiento o el vector quiral $\mathbf{C} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$ define el tipo de nanotubo. Entre los más comunes se encuentran el nanotubo tipo *zigzag* ($C = (n, 0)$) y *armchair* ($C = (n, n)$), mientras que en el caso general ($C = (m, n)$) se denomina *quiral*. En estos sistemas, las propiedades de transporte electrónico dependen fuertemente de las características físicas que posee el nanotubo, como ser el diámetro, longitud y quiralidad. Sin embargo, las propiedades básicas pueden capturarse utilizando el modelo del líquido de Luttinger. Para el caso de los nanotubos de pared simple, ésto ha sido corroborado experimentalmente por Bockrath et al. [7]. En dicho trabajo, se midió la conductancia de tiras de nanotubos de carbono, obteniendo leyes de potencias con respecto a la temperatura y al voltaje aplicado, en acuerdo con lo predicho teóricamente utilizando el modelo de Luttinger. En un experimento más reciente, pudo observarse la separación espín-carga predicha por el modelo de Luttinger en un nanotubo SWNT[8].

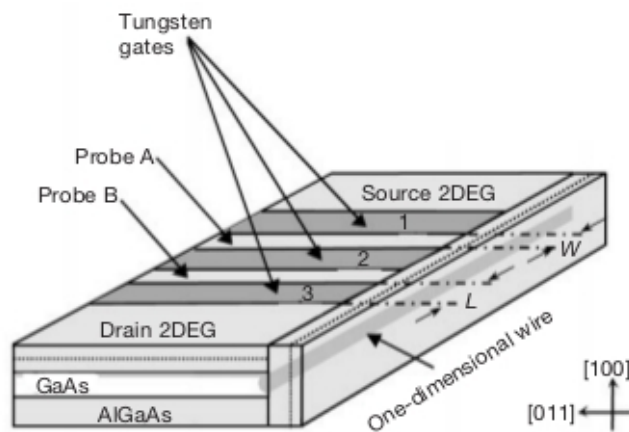


FIGURA 1.2: .

Cable cuántico. Un gas de electrones bidimensional (2DEG) se forma en la interfase entre el AsGa y el AlAsGa. El gas unidimensional se obtiene confinando los electrones, aplicando un voltaje a los electrodos de tungsteno. Extraído de de Picciotto et al. [6]

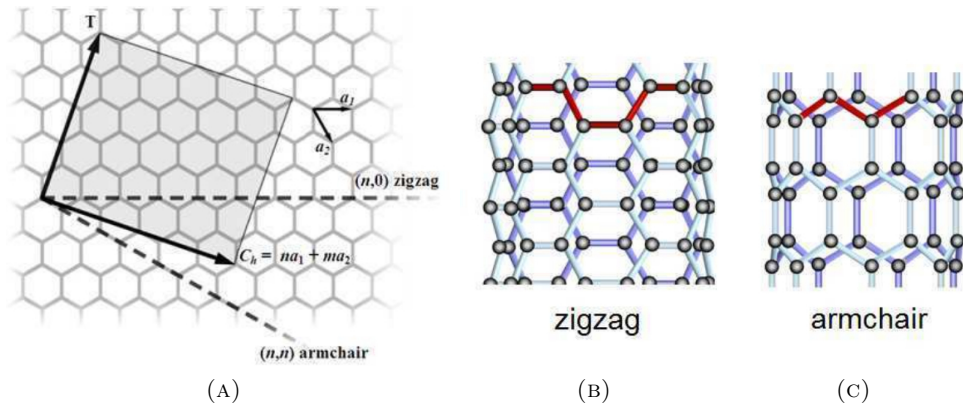


FIGURA 1.3: Representación esquemática de un nanotubo de carbono de pared simple (SWNT). En (a) se detallan los distintos tipos de nanotubos que caracterizados por el vector quiral \mathbf{C} . En (b) y (c) se muestran nanotubos del tipo *zigzag* ($\mathbf{C} = (n, 0)$) y *armchair* ($\mathbf{C} = (n, n)$) respectivamente. Extraído de [5].

El caso de los nanotubos de pared múltiple es más delicado, pudiendo comportarse como líquidos de Luttinger a bajos voltajes aplicados y como líquidos de Fermi a voltajes altos[9].

1.1.3. Naturaleza de la resistencia en sistemas mesoscópicos

Consideremos un conductor entre dos contactos como se muestra en la Figura 1.4. Si las dimensiones del conductor son “grandes”, entonces la conductancia tiene la forma conocida

$$G = \sigma \frac{W}{L}, \quad (1.1)$$

donde la conductividad σ es un parámetro que depende del material y es independiente de las dimensiones de la muestra. Surge entonces la pregunta: ¿qué sucede con la conductancia (1.1) cuando reducimos las dimensiones de la muestra? En principio parecería que la conductancia crece indefinidamente para dimensiones cada vez mas pequeñas. Landauer propuso una configuración experimental para estudiar el transporte cuántico, en el cual la muestra mesoscópica se sitúa entre dos reservorios a potenciales químicos distintos [10]. Büttiker [11] mostró que la conductancia en un cable cuántico no

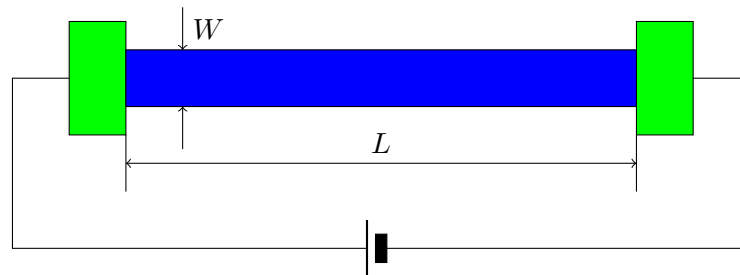


FIGURA 1.4: Esquema del dispositivo de transporte

interactuante y desprovisto de mecanismos de dispersión inelástica viene dada por

$$G = \frac{2e^2}{h}n. \quad (1.2)$$

La conductancia entonces está cuantizada en unidades del *cuanto de conductancia* $G_Q = e^2/h$, el factor 2 viene de la degeneración de espín, y n es el número de *canales de transporte* abiertos. La cuantización de la conductancia ha sido observada experimentalmente utilizando contactos puntuales produciendo una constricción en el conductor [12]. Los resultados del experimento se muestran en la Figura 1.6.

Ahora bien: si el transporte es balístico y no hay disipación de energía en el conductor, cabe preguntarse por el origen de la resistencia. Ésta proviene de la interfase entre el conductor y los contactos por medio de los cuales se aplica el voltaje. Es por eso que la resistencia $R = G^{-1}$ dada por la ecuación (1.2) se conoce como *resistencia de contacto*.

Dado que la resistencia en un sistema mesoscópico libre en el régimen de transporte balístico proviene del acoplamiento entre el sistema y los reservorios a través de los cuales es aplicado el voltaje, es conveniente definir una magnitud física alternativa que sea representativa de la muestra, independiente del efecto de los contactos. Para ello, se analiza la configuración en la que muestra está conectada a varios reservorios, los cuales se encuentran en equilibrio térmico (ver Figura 1.5). La corriente que fluye a través del conductor proviene de dos reservorios, mientras que otros dos son utilizados como sondas de voltaje o de temperatura (termómetros). Los potenciales químicos o temperaturas de los mismos satisfacen la condición de equilibrio electroquímico o térmico local con la muestra, esto es, el potencial químico o la temperatura de los mismos es tal que el flujo de partículas o de calor a través de ellos se anula [13]. Si a través del conductor fluye una corriente I , y los potenciales químicos de las sondas de voltaje son μ_1 y μ_2 , la resistencia de cuatro terminales se define

$$R_{4t} \doteq \frac{\mu_1 - \mu_2}{eI}. \quad (1.3)$$

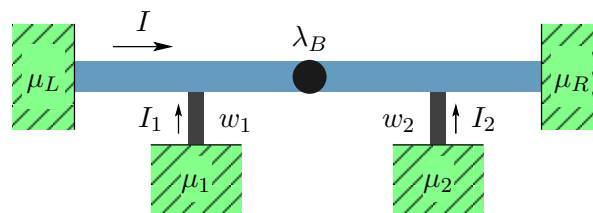


FIGURA 1.5: Esquema del dispositivo: Se aplica una diferencia de potencial V a un Líquido de Luttinger, por medio de los potenciales químicos de los portadores de carga derechos e izquierdos: $\mu_{R,L} = \mu \pm V/2$. Dos sondas de voltaje se conectan en las posiciones x_1, x_2 . Los potenciales químicos μ_1, μ_2 de las mismas satisfacen la condición de equilibrio electroquímico local con la muestra, de modo que las corrientes I_1 e I_2 a través de los contactos es nula. Una impureza tipo *backscattering* se encuentra en la posición x_B .

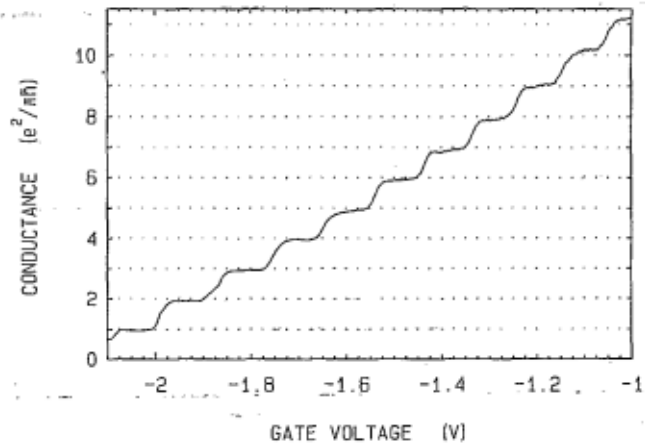


FIGURA 1.6: Conductancia de un contacto puntual en función del voltaje de compuerta V , donde se evidencia la cuantización de la conductancia (B. J. van Wess *et al*, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988)).

Esta manera de definir la resistencia de cuatro terminales fue extendida en el marco de la Teoría de Matriz de *Scattering* para configuraciones multiterminales [14, 15] en cables de electrones no interactuantes con una [16, 17] y varias impurezas [18]. Cabe aclarar que con el formalismo de la Matriz de *Scattering* no es posible tratar sistemas interactuantes. Más aún, las interacciones en sistemas de electrones en una dimensión espacial no pueden tratarse de manera perturbativa. Sin embargo, en el caso en el que no hay interacciones tipo *backscattering*, el problema puede resolverse exactamente por medio de la bosonización. En el Capítulo 2 se detallará la teoría correspondiente.

Entre otras características interesantes, para sistemas no interactuantes, se ha predicho la posibilidad de resistencias de cuatro terminales negativas [14, 16–19]. Esto es consecuencia de la naturaleza coherente de la propagación electrónica a través de una muestra, donde sólo tienen lugar procesos de dispersión elástica con impurezas o barreras. Estas resistencias (longitudinales) negativas en estructuras balísticas fueron por primera vez medidas a finales de la década del '80 [20–22]. Este efecto fue también observado en un experimento más reciente en estructuras semiconductoras [6]. Más tarde el comportamiento de R_{4t} fue estudiado experimentalmente en nanotubos de carbono [23]. En la Figura 1.7 se muestra la configuración experimental de dicho experimento.

Es ampliamente aceptado que el modelo de Luttinger de electrones en 1D captura las principales características observadas en los experimentos de transporte en nanotubos de carbono [24–30]. Una de las predicciones del modelo de Luttinger es que la corriente de *tunneling* satisface leyes de potencia como función del voltaje y/o la temperatura aplicadas. Dicho comportamiento ha sido observado experimentalmente en los sistemas mencionados [31].

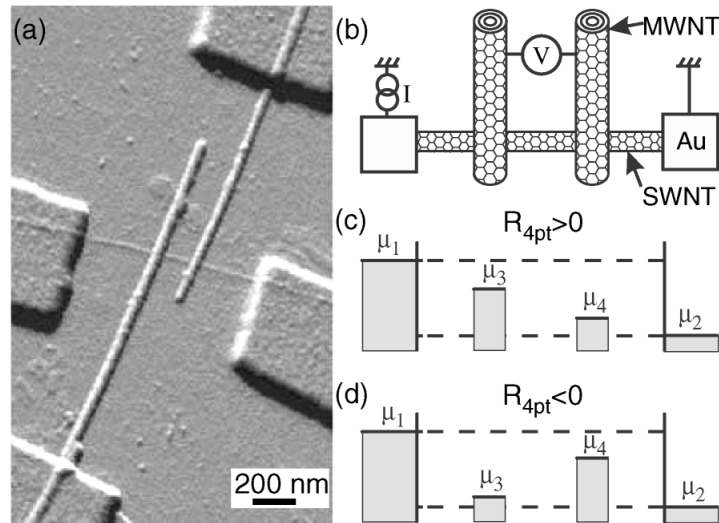


FIGURA 1.7: (a) Imagen de microscopía de fuerza atómica de un nanotubo de carbono de pared simple (SWNT) en contacto con 2 nanotubos de pared múltiple (MWNT) y 2 electrodos de Au. (b) Esquema de la medición de R_{4t} . (c), (d) Niveles del potencial electroquímico para los cuatro electrodos que dan una R_{4t} positiva en (c) y una R_{4t} negativa en (d). (B. Gao, Y. F. Chen, M. S. Fuhrer, D. C. Glattli y A. Bachtold, Phys. Rev. Lett. **95**, 196802 (2005))

El comportamiento de R_{4t} en sistemas Luttinger multiterminales ha sido investigado en la referencia [1]. Estimaciones anteriores para esta cantidad han sido realizadas basándose en una interpretación de la fórmula de Landauer de dos terminales [32, 33]. Esto se debe al hecho de que el transporte cuántico en sistemas Luttinger multiterminales es en general un problema realmente complicado desde el punto de vista técnico. Otros sistemas Luttinger multiterminales en geometrías tipo Y fueron considerados en el régimen de respuesta lineal en el voltaje y utilizando la aproximación de Hartree-Fock en la interacción [34, 35].

En la Referencia [1] se estudia la resistencia de cuatro terminales en un líquido de Luttinger con una impureza, considerando acoplamiento entre el cable y las sondas de voltaje, al orden más bajo en teoría de perturbaciones con respecto a los acoplamiento con las sondas de voltaje. Esto supone que los contactos son no invasivos. Dado que la no invasividad es complicada de lograr experimentalmente, es de interés estudiar contactos débilmente invasivos. En el Capítulo 3, se estudiará el comportamiento de la resistencia de cuatro terminales R_{4t} en un líquido de Luttinger con una impureza, considerando el acoplamiento de las sondas de voltaje con el cable al orden siguiente en teoría de perturbaciones.

1.2. Efecto Hall cuántico

El efecto Hall cuántico es uno de los fenómenos de la Materia Condensada más sorprendentes descubiertos en la segunda mitad del siglo XX. Dicho efecto se observa en sistemas de electrones confinados en dos dimensiones en presencia de un campo magnético perpendicular. En la Figura 1.8 se muestra la configuración básica de este tipo de experimento. La resistencia longitudinal se define

$$R \doteq \frac{V}{I},$$

mientras que la resistencia transversal o resistencia Hall viene dada por

$$R_H \doteq \frac{V_H}{I}.$$

El efecto Hall clásico puede entenderse utilizando el modelo de Drude [36], y predice que la resistencia Hall es proporcional al campo magnético aplicado

$$R_H = \frac{B}{q n_{el}},$$

donde q es la carga de los portadores y n_{el} es la densidad de portadores.

En el año 1980, von Klitzing, Dorda y Pepper descubren el *efecto Hall cuántico entero* (IQHE) [37]. Realizando mediciones en gases de electrones en 2D en dispositivos MOS-FET en presencia de campos magnéticos intensos, obtienen que para valores particulares del campo la resistencia Hall está cuantizada según la ley

$$R_H = \left(\frac{h}{e^2} \right) \frac{1}{\nu}, \quad (1.4)$$

donde ν es un número entero, y la resistencia longitudinal

$$R \rightarrow 0$$

para dichos valores del campo magnético. Este resultado es *universal*, es decir, independiente de las propiedades particulares de la muestra, tales como la geometría, los materiales utilizados para fabricar el gas de electrones 2D, y de la concentración o distribución de impurezas.

Tres años después del descubrimiento del efecto Hall Cuántico Entero, empleando muestras de mayor calidad con mayor movilidad, Tsui, Störmer y Gossard descubren el efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE) [38]: la conductancia Hall tiene la forma (1.4) pero

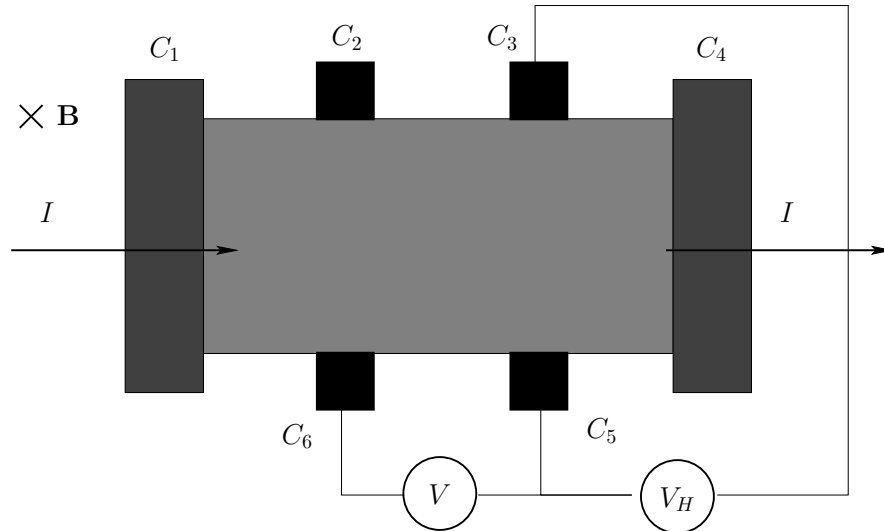


FIGURA 1.8: Electrones en 2D en un campo magnético perpendicular \mathbf{B} . Una corriente I fluye entre los contactos C_1 y C_4 . El voltaje longitudinal se mide entre los contactos C_5 y C_6 . El voltaje Hall se mide entre C_3 y C_5 .

con $\nu = 1/3$. Las partículas condensan en estados cuánticos especiales cuyas excitaciones tienen la propiedad de ser descritos por números cuánticos fraccionarios. Más aún, estos estados poseen propiedades exóticas, tales como carga fraccionaria y estadísticas fraccionarias, esto es, estadísticas intermedias entre las de Bose y Fermi. Posteriormente fue hallada toda otra serie de fracciones.

En la Figura 1.9 se muestran los resultados de un experimento de transporte en el régimen de efecto Hall cuántico. Puede verse que en lugar de obtener el resultado clásico, vemos una serie de *plateaus* Hall, en los cuales ρ_{xy} es una constante universal

$$\rho_{xy} = -\frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2},$$

independiente de los detalles microscópicos y de la intensidad precisa del campo magnético. Asociado a cada uno de estos *plateaus*, la resistencia longitudinal ρ_{xx} se anula, es decir, no hay disipación para la corriente en el dispositivo.

En lo que sigue, haremos un breve resumen de los dispositivos en los que se presenta el efecto, y a continuación una síntesis de los conceptos necesarios para comprender estos fenómenos.

1.2.1. Sistemas de electrones bidimensionales

La historia del efecto Hall cuántico está íntimamente ligada a avances tecnológicos en la fabricación de sistemas de electrones 2D con movilidades electrónicas elevadas. La alta movilidad de los electrones es la que permite medir la estructura fina de la curva

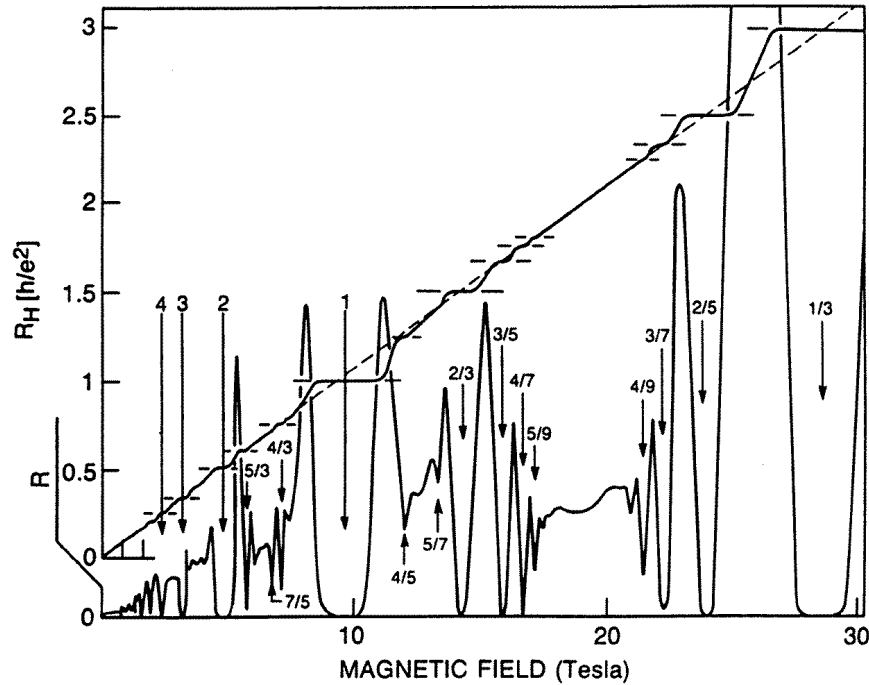


FIGURA 1.9: Mediciones de la resistencia longitudinal R y resistencia Hall R_H en función del campo magnético, aplicado. Pueden observarse los distintos *plateaus* en R_H y la resistencia R nula correspondiente, para llenados enteros y fraccionarios (H. L. Störmer, *Physica B* **177** 401 (1992)).

Hall y detectar los estados más frágiles, tales como los estados fraccionarios $5/2$, $7/2$ y $4/11$. Al día de hoy, las mejores muestras logradas poseen movilidades del orden de $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, en heteroestructuras de GaAs/AlGaAs.

1.2.1.1. Transistores de efecto de campo

Las muestras utilizadas en el descubrimiento y en los primeros estudios del IQHE son los *transistores de efecto de campo de semiconductores metal-óxido* (MOSFET), esquematizado en la Figura 1.10.

Una capa metálica es separada de un semiconductor (típicamente silicio dopado) por una capa óxido aislante (por ejemplo SiO_2). El potencial químico en la capa metálica puede ser variado por un potencial de compuerta V_G . A $V_G = 0$, la energía de Fermi en el semiconductor yace en el *gap* debajo de los niveles aceptores de los dopantes (Figura 1.11). Al bajar el potencial químico en el metal aplicando un potencial de compuerta positivo $V_G > 0$, uno introduce huecos en el metal que atraen electrones desde el semiconductor a la interfase semiconductor-aislante (Figura 1.12). Estos electrones pueblan los niveles aceptores, y como consecuencia, las bandas del semiconductor se doblan hacia abajo cuando se aproximan a la interfase, de modo que los niveles aceptores llenos

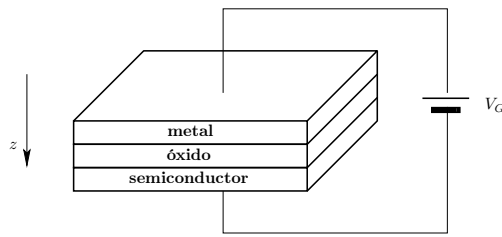


FIGURA 1.10: Esquema de un transistor de efecto de campo MOSFET.

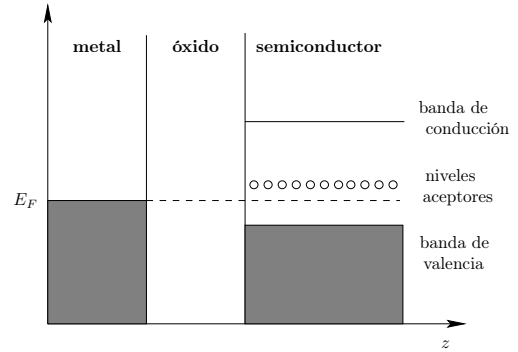


FIGURA 1.11: Estructura de bandas de un MOSFET a $V_G = 0$. En el semiconductor, la energía de Fermi yace en el *gap*.

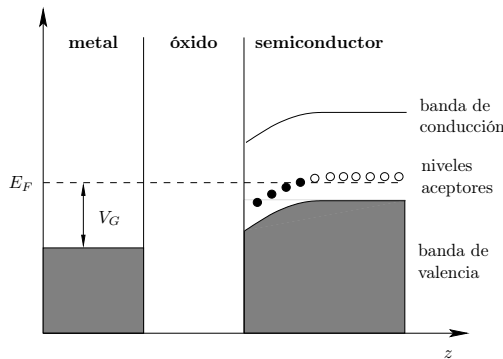


FIGURA 1.12: El potencial químico en la parte metálica puede controlarse por un potencial de compuerta V_G . Como consecuencia de la introducción de huecos en el semiconductor, las bandas se doblan hacia abajo.

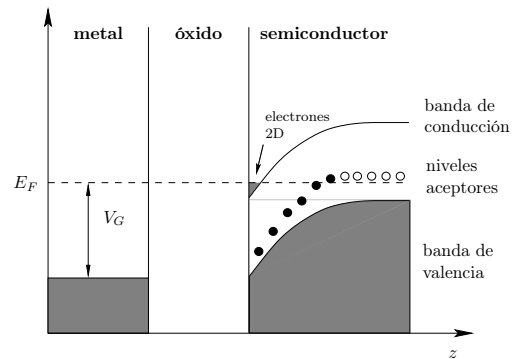


FIGURA 1.13: Por encima de un voltaje de compuerta V_G umbral, la banda de conducción se llena en la vecindad de la interfase con el aislante.

yacen ahora por debajo de la energía de Fermi. Por encima de cierto voltaje de compuerta umbral, la banda de conducción en la vecindad de la interfase se llena también con electrones (Figura 1.13). De este modo se obtiene un potencial confinante de forma triangular para los electrones en la banda de conducción, cuya dinámica está cuantizada en subbandas electrónicas discretas en la dirección perpendicular z . Naturalmente, las funciones de onda electrónicas están extendidas en la dirección z , pero en dispositivos MOSFET típicos sólo la subbanda más baja está llena, de modo que desde el punto de vista dinámico, los electrones son bidimensionales.

Las densidades electrónicas 2D típicas en estos sistemas son del orden de $n_{el} \sim 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, esto es, mucho menores que en los metales convencionales. Esto resulta importante a la hora de estudiar el IQHE y el FQHE, dado que para que estos efectos ocurran, la densidad electrónica debe ser comparable con la densidad de flujo magnético $n_B = B/(h/e)$, medida en unidades del cuanto de flujo h/e . Para metales convencionales, la densidad

superficial es del orden de 10^{14} cm^{-2} , y serían necesarios campos magnéticos inaccesibles ($\sim 1000 \text{ T}$) para conseguir el régimen $n_{el} \sim n_B$ y observar estos efectos.

1.2.1.2. Heteroestructuras semiconductoras

La movilidad en los MOSFETs, que es típicamente del orden $\mu \sim 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, está limitada por la calidad de la interfase óxido-semiconductor. Esta dificultad técnica está resuelta en las *heteroestructuras semiconductoras*, siendo las más usuales las de GaAs/-GaAsAl. Las mismas son fabricadas utilizando la técnica del haz molecular epitaxial (MBE), mediante la cual pueden lograrse interfases de alta calidad con precisión casi atómica, alcanzando movilidades del orden de $\mu \sim 10^7 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, necesarias para observar el FQHE.

En el caso genérico del GaAs/AlGaAs, los dos semiconductores no poseen el mismo *gap*, siendo el del GaAs menor que el del GaAsAl, el cual es dopado químicamente por iones donores a una cierta distancia de la interfase. La energía de Fermi es anclada por estos niveles donores del GaAsAl, los cuales pueden tener una energía mayor que la banda originalmente desocupada en la parte del GaAs, de modo que resulta energéticamente favorable para los electrones en los niveles donores ocupar la banda de conducción del GaAs en la vecindad de la interfase (Figura 1.14). Como consecuencia, las bandas de energía del GaAsAl se doblan hacia arriba, mientras que las del GaAs se tuercen hacia abajo. De manera similar a la mencionada anteriormente para el MOSFET, se obtiene así un gas de electrones 2D en la interfase del lado del GaAs, con un potencial confinante triangular (Figura 1.15).

1.2.2. Cuantización de Landau

El ingrediente básico para comprender tanto el IQHE como el FQHE es la cuantización de Landau, esto es, resolver el problema de una partícula cargada en 2D en un campo magnético perpendicular.

Consideremos una partícula confinada en el plano xy en un campo magnético perpendicular uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Este campo puede describirse haciendo la elección del *gauge*

1

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -yB\hat{x},$$

de modo que $\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{z}$.

¹Esta elección se conoce como *gauge* de Landau, apropiada para estudiar un sistema de forma rectangular.

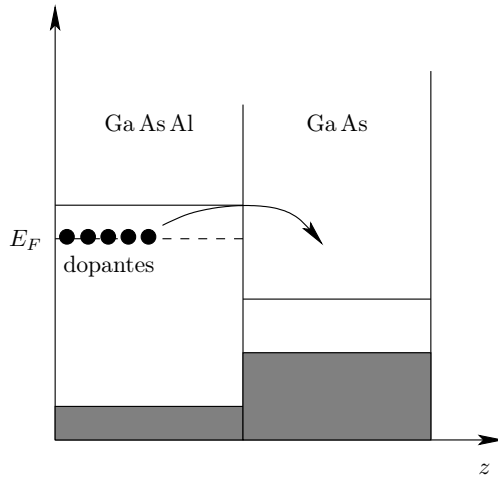


FIGURA 1.14: Heteroestructura semiconductor de GaAs/GaAsAl. Los dopantes son introducidos en el GaAsAl a una cierta distancia de la interfase. La energía de Fermi yace por debajo del *gap* y es elevada por los niveles de los dopantes. La banda de conducción tiene una energía menor que la de los dopantes, de modo que los electrones pueblan la banda de conducción del GaAs en la vecindad de la interfase.

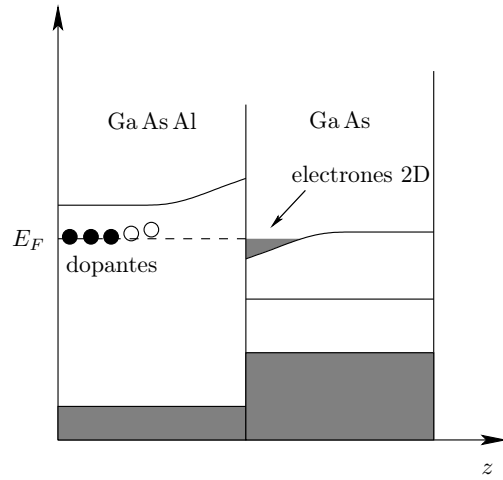


FIGURA 1.15: Heteroestructura semiconductor GaAs/GaAsAl. La polarización dobla las bandas en la vecindad de la interfase, y el gas de electrones 2D se forma en el lado del GaAs.

El Hamiltoniano de una partícula en el campo magnético viene dado por ²

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eB}{c} y \right)^2 + p_y^2 \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde m es la *masa efectiva* de los electrones en la red. El paso siguiente es resolver la ecuación de autovalores y hallar los niveles de energía y sus respectivas autofunciones. Los cálculos detallados se presentan por completitud en el Apéndice A, Sección A.1.

Las autoenergías del Hamiltoniano (1.5) resultan ser del tipo del oscilador armónico

$$E_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

²Puede argumentarse que los electrones no son libres, sino que experimentan el potencial periódico de la red cristalina. Sin embargo, puede mostrarse que el tratamiento es correcto siempre y cuando el espaciado de la red a sea mucho menor que la *longitud magnética* $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$, condición que se cumple en los experimentos.

y las autofunciones asociadas (salvo un factor de normalización)

$$\begin{aligned} \psi_{k_x, n}(\mathbf{r}) &= [\pi 2^{2n} (n!)^2]^{-1/4} e^{ik_x x} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{l_B} - l_B k_x \right)^2 \right] H_n \left(\frac{y}{l_B} - l_B k_x \right), \end{aligned}$$

donde ω_C es la *frecuencia ciclotrónica*

$$\omega_C \doteq \frac{eB}{mc},$$

H_n es el n -ésimo polinomio de Hermite, y l_B es la *longitud magnética*

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}.$$

Los niveles de energía calculados se conocen como *niveles de Landau*. Dado que la energía no depende del número k_x , los niveles son degenerados. Si las dimensiones de la muestra son L_x, L_y , el número total de estados en cada nivel de Landau viene dado por

$$N = N_\Phi,$$

donde

$$N_\Phi \doteq \frac{BL_x L_y}{\Phi_0},$$

y Φ_0 es el *cuanto de flujo*

$$\Phi_0 \doteq \frac{hc}{e}.$$

Hasta aquí hemos considerado una sola partícula y sus posibles estados. Consideremos ahora N electrones independientes a temperatura cero. Debido al Principio de Exclusión de Pauli, los electrones ocupan preferencialmente los niveles de Landau más bajos. Una vez que un dado nivel se llena, los electrones restantes tienden a ocupar los niveles siguientes. Para describir el llenado de los niveles de Landau, es útil introducir la razón entre el número de electrones $N_{el} = n_{el}A$ y el número de cuantos de flujo

$$\nu \doteq \frac{N_{el}}{N_\Phi} = \frac{\hbar n_{el}}{eB},$$

cantidad que se conoce como *factor de llenado*. A número de partículas fijo, una disminución del campo magnético se corresponde con un incremento en el factor de llenado.

1.2.3. Efecto Hall cuántico entero

El tratamiento mecanocuántico del 2DEG en un campo magnético perpendicular es el punto de partida para entender las propiedades básicas del efecto Hall cuántico. Sin embargo, es necesario relacionar la cuantización de la energía cinética con la cuantización de la resistencia, que es la característica esencial del IQHE. Consideremos la fórmula clásica para la resistencia Hall

$$R_H = \frac{B}{\rho e c}.$$

A factores de llenado $\nu = \rho\Phi_0/B$ enteros, la ecuación se reduce a

$$R_H = \frac{h}{ne^2},$$

que es el valor preciso de la resistencia Hall cuantizada. Sin embargo, esto no explica el IQHE, dado que R_H está cuantizada *para cualquier valor de llenado ν cercano a un número entero*.

La clave para entender el fenómeno, está en el efecto del *desorden*. No entraremos aquí en los detalles del problema, pero puede hacerse una idea de lo que sucede razonando semiclásicamente. En el volumen, el potencial producido por las impurezas presentes en la muestra, hace que los electrones giren en órbitas alrededor de las mismas (ver Figura 1.16). Si las líneas equipotenciales son cerradas, lo cual sucede para la mayoría de las mismas, los electrones no pueden viajar desde un contacto a otro. Por lo tanto, los electrones que se mueven en órbitas cerradas no contribuyen al transporte electrónico: el electrón está *localizado*. En el borde, las líneas equipotenciales reflejan el potencial confinante, el cual es cero en el volumen y crece rápidamente al acercarse a y_{min} e y_{max} . En este caso, las líneas son abiertas y conectan un contacto con el otro. Los electrones que ocupan estados cuánticos en estas líneas equipotenciales, conocidos como *estados extendidos*, son los que efectivamente contribuyen al transporte electrónico.

Calculamos la conductancia de un nivel de Landau completamente lleno, es decir, todos los niveles del n -ésimo nivel de Landau están ocupados. La corriente que fluye desde el contacto de la izquierda hacia el de la derecha se calcula

$$I_n^x = -\frac{e}{L} \sum_k \langle n, k | v_x | n, k \rangle,$$

donde la suma se extiende a todos los canales cuánticos N_B etiquetados por el vector de onda $k = 2m\pi/L$,

$$\langle n, k | v_x | n, k \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_{n,k}}{\partial k} = \frac{L}{2\pi\hbar} \frac{\Delta \epsilon_{n,k}}{\Delta k}.$$

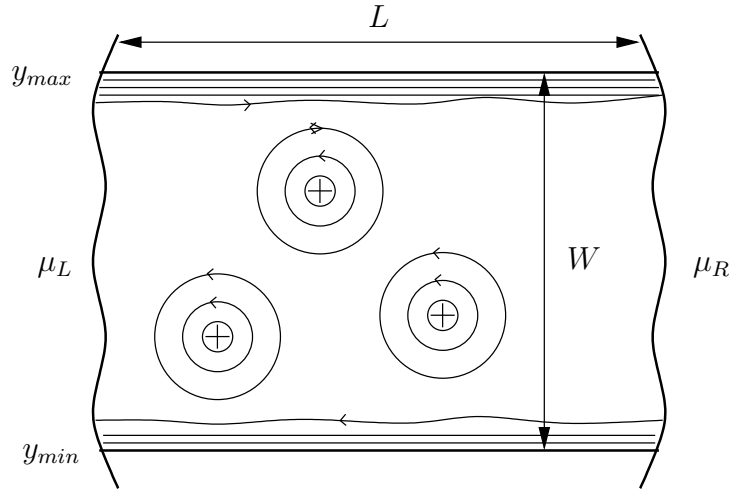


FIGURA 1.16: Potencial electrostático en la muestra. Los contactos metálicos están descritos por potenciales químicos μ_L y μ_R . La muestra está confinada en la dirección y entre y_{min} e y_{max} . Las líneas finas indican las líneas equipotenciales. En los bordes de la muestra, las líneas conectan los dos contactos debido al potencial confinante.

Esta expresión se puede evaluar dando por resultado

$$I_n = -\frac{e}{\hbar} (\mu_{max} - \mu_{min}) = \frac{e^2}{h} V.$$

Cada nivel de Landau contribuye en un *cuanto de conductancia* $G_Q = e^2/h$ al transporte electrónico, y n niveles de Landau completamente llenos contribuyen

$$G = \sum_{m=0}^{n-1} G_m = n \frac{e^2}{h}.$$

Notemos que este es un caso particular de la formula de Landauer-Büttiker para el transporte

$$G_n = \frac{e^2}{h} T_n$$

a través de un canal de conducción n , donde T_n es el coeficiente de transmisión del canal.

El hecho de que la transmisión sea perfecta, puede entenderse a partir del esquema de estados de borde introducido anteriormente (ver Figura 1.17). Consideremos, sin pérdida de generalidad, el borde de arriba. El estado de borde correspondiente al n -ésimo LL es aquél situado en y_{max} , donde el n -ésimo LL cruza la energía de Fermi y donde el factor de llenado salta de $\nu = n + 1$ a n . La deformación hacia arriba inducida por el potencial confinante impone una dirección particular al movimiento electrónico. Este movimiento unidireccional se conoce como *quiralidad* del estado de borde. La quiralidad es la misma para todos los estados de borde n en el mismo lado de la muestra. Por lo tanto, si un electrón es dispersado desde un canal n hacia un canal n' en el mismo borde, éste

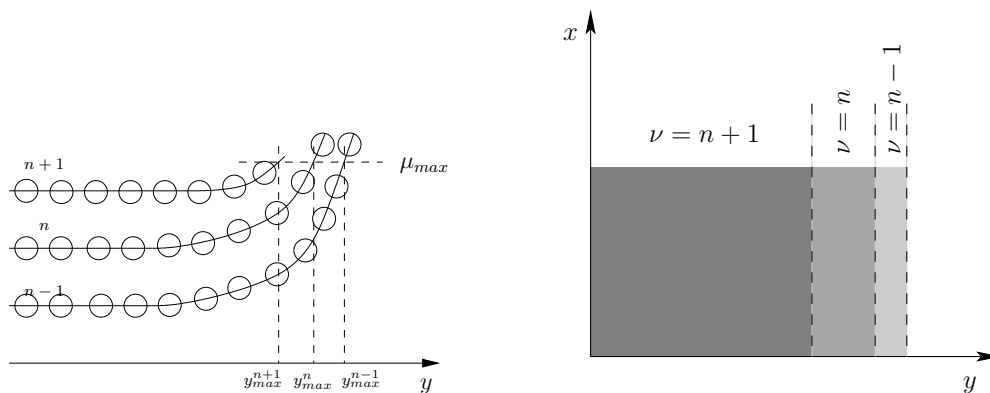


FIGURA 1.17: Estados de borde. **Izquierda:** Los niveles de Landau se doblan hacia arriba al aproximarse al borde de la muestra. A cada LL n puede asociarse un valor y_{max}^n donde el LL cruza el potencial químico μ_{max} . **Derecha:** En cada posición y_{max}^n , el factor de llenado decrece en 1. El n -ésimo estado de borde está asociado con y_{max}^n y el gradiente del potencial de confinamiento impone una dirección para la deriva Hall de dicho estado (*quiralidad*). La quiralidad es la misma para todos los estados de borde (en el mismo borde).

no puede cambiar su dirección. Esto implica que los procesos de *backscattering* están suprimidos y los electrones se propagan sin dispersión desde un contacto al otro.

De este modo, los electrones en el borde superior e inferior están a potenciales químicos μ_L y μ_R respectivamente. La diferencia de potencial entre ambos bordes V es entonces $eV = \mu_L - \mu_R$, y esto da lugar a una resistencia Hall

$$R_H = G^{-1} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n},$$

que es el resultado obtenido experimentalmente.

Luego de los trabajos de Thouless et al. [39] y Niu et al. [40], se entendió que estos estados tienen una naturaleza topológica. Esto constituye el prelude de la revolución topológica que tuvo lugar a partir del descubrimiento de los aisladores topológicos.

1.2.4. Efecto Hall cuántico fraccionario

En la Subsección anterior, vimos que las características esenciales del IQHE pueden entenderse en el marco de 1-partícula, esto es, en términos de la cuantización de Landau. A factores de llenado enteros $\nu = n$ (n niveles de Landau llenos), un electrón adicional es forzado a ocupar el nivel siguiente debido al Principio de Exclusión de Pauli. Este electrón debe “pagar” una energía adicional $\hbar\omega_C$ y es localizado por las impurezas presentes en la muestra. En estos términos, es imposible entonces entender el efecto Hall cuántico fraccionario: si sólo consideramos la energía cinética, el estado fundamental en $\nu = 1/3$ es altamente degenerado y aparentemente no hay *gap* presente en el sistema.

Hasta aquí hemos despreciado la interacción coulombiana entre los electrones, la cual resulta crucial para poder comprender el FQHE. La teoría del FQHE con $\nu = 1/m$ con m impar, fue desarrollada por Laughlin [41]. Estos estados están asociados a la formación de un *líquido electrónico correlacionado incompresible*. No presentaremos aquí la teoría detallada, dado que no resulta relevante para el presente trabajo. Sin embargo, las propiedades de transporte pueden entenderse de manera análoga al IQHE considerando los estados de borde presentes en el FQHE. En un dado *plateau*, el transporte se debe exclusivamente a los estados de borde, mientras que los estados del volumen están localizados de manera similar al IQHE. Los estados de borde en la serie de Laughlin, pueden modelarse como *líquidos de Luttinger quirales* [42–49]. Los líquidos de Luttinger quirales difieren de los metales convencionales (3D) en la ausencia de un polo de partícula simple en la densidad espectral: aparecen dependencias tipo ley de potencias en el momento y en la frecuencia. En experimentos de transporte en los cuales se inyecta o se remueve un electrón del líquido a través de una barrera *tunneling*, se observan leyes de potencia. Esto ocurre tanto en la corriente de tuneleo o en la conductancia diferencial como función de la energía, donde esta energía está fijada por un voltaje externo o por la temperatura.

Para los líquidos de Luttinger quirales, la relación corriente- voltaje satisface una ley de potencias

$$I \sim V^\alpha,$$

donde $\alpha = 1/\nu = m$, con m impar. El exponente es universal para fluidos fraccionarios incompresibles en la serie de Laughlin.

Para fracciones observadas que no pertenecen a la serie de Laughlin, los estados de borde tienen una estructura más complicada, estando formados por varios líquidos de Luttinger quirales con distintas fracciones, que pueden además propagarse en distintos sentidos.

Recientemente [50], se han realizado experimentos de transporte de calor en los que se pone de manifiesto la naturaleza quiral de los estados de borde del efecto Hall entero. Dichos experimentos se comentan en el Capítulo 4, y están basados en contactos de tipo *tunneling* entre el estado de borde y los reservorios. En el Capítulo 4, analizamos el comportamiento de dicho transporte térmico, y su correspondiente sensado mediante termómetros, cuando los contactos son de tipo capacitivo [51]. Los comparamos con el caso *tunneling* y extendemos el estudio al caso de llenados fraccionarios de la secuencia $\nu = 1/m$ con m impar.

Capítulo 2

Metodología - Técnicas empleadas

En el presente Capítulo se exponen las técnicas y herramientas teóricas utilizadas para resolver los problemas estudiados en esta Tesis, a saber, la *teoría cuántica de muchos cuerpos fuera del equilibrio* y la *bosonización*.

2.1. Teoría cuántica de muchos cuerpos fuera del equilibrio

Uno de los problemas centrales de la teoría de muchos cuerpos fuera del equilibrio es calcular funciones de correlación en tiempo real, bajo condiciones que apartan al sistema estudiado del equilibrio termodinámico. La presencia de interacciones dependientes del tiempo es uno de los ejemplos más directos de esta situación. A continuación haremos un breve repaso de la teoría de perturbaciones convencional [52, 53], mostrando en qué aspectos falla cuando se consideran sistemas fuera del equilibrio.

La teoría de muchos cuerpos fuera del equilibrio fue formulada por Schwinger [54], Baym y Kadanoff [55], Baym [56], Keldysh [57]. En lo que sigue presentamos una síntesis de las referencias [58, 59], donde pueden consultarse referencias más específicas.

2.1.1. Limitaciones de la teoría de muchos cuerpos convencional

Uno de los objetos centrales de la teoría de perturbaciones en sistemas de muchas partículas es la *función de Green*. La función de Green temporalmente ordenada de 1-partícula se define

$$iG(x, t; x', t') \doteq \left\langle T \left[\psi(x, t) \psi^\dagger(x', t') \right] \right\rangle = \text{Tr} \rho T \left[\psi(x, t) \psi^\dagger(x', t') \right],$$

donde los operadores ψ son operadores de campo en el esquema de Heisenberg, ρ es una matriz densidad arbitraria, y el orden cronológico T se define como

$$T\psi(x, t)\psi^\dagger(x', t') \doteq \theta(t - t')\psi(x, t)\psi^\dagger(x', t') \pm \theta(t' - t)\psi^\dagger(x', t')\psi(x, t),$$

donde el signo $+$ corresponde a bosones y el $-$ a fermiones.

Consideremos una matriz densidad genérica

$$\rho = \sum_{\Phi} p_{\Phi} |\Phi\rangle \langle \Phi|,$$

donde $|\Phi\rangle$ es un estado cuántico arbitrario y p_{Φ} la probabilidad asociada a dicho estado. Recordemos que en el esquema de Heisenberg, la matriz densidad es independiente del tiempo. Reemplazando (2.1.1) en (2.1.1), se obtiene $G = \sum G_{\Phi}$, donde

$$iG_{\Phi}(x, t; x', t') = \langle \Phi | T \left[\psi(x, t)\psi^\dagger(x', t') \right] | \Phi \rangle.$$

Supongamos que el Hamiltoniano se puede expresar en la forma $\mathcal{H}(t) = H + H'(t)$, donde toda la dependencia con el tiempo se encuentra en H' . H puede contener interacciones, pero es independiente del tiempo. En el esquema de interacción, el operador de campo evoluciona según la ecuación

$$\hat{\psi}(x, t) = e^{iHt}\psi(x)e^{-iHt},$$

mientras que en el esquema de Heisenberg

$$\psi(x, t) = \mathcal{U}^\dagger(t)\psi(x)\mathcal{U}(t) = \mathcal{S}(0, t)\hat{\psi}(x, t),$$

con $\mathcal{S}(t, 0) = e^{iHt}\mathcal{U}(t)$, donde

$$\mathcal{U}(t) = T \exp \left(-i \int_0^t dt_1 \mathcal{H}(t_1) \right)$$

es el *operador evolución*, y \mathcal{S} es la Matriz de *Scattering*. De modo más general,

$$\mathcal{S}(t, t') = e^{iHt}\mathcal{U}(t, t')e^{-iHt'} = T \exp \left(-i \int_{t'}^t dt_1 H'(t_1) \right),$$

donde $\mathcal{U}(t, t') = T \exp \left(-i \int_{t'}^t dt_1 \mathcal{H}(t_1) \right)$ y $\hat{H}'(t) = e^{iHt}H'(t)e^{-iHt}$ es la perturbación fuera del equilibrio en la representación de interacción. Sustituyendo estas relaciones en

la (2.1) obtenemos

$$iG_{\Phi}(x, t; x', t') = \langle \Phi | T \left[\mathcal{S}(0, t) \hat{\psi}(x, t) \mathcal{S}(t, 0) \mathcal{S}(0, t') \hat{\psi}^{\dagger}(x', t') \mathcal{S}(t', 0) \right] | \Phi \rangle$$

Ahora bien, el estado en el esquema de interacción viene dado por

$$|\Phi(t)\rangle_I = \mathcal{S}(t, 0) |\Phi(0)\rangle_I = \mathcal{S}(t, 0) |\Phi(0)\rangle,$$

ya que en $t = 0$ todos los esquemas coinciden. El estado en el tiempo $t = 0$ se puede calcular a partir del estado en $t = \pm\infty$ utilizando la unitariedad de \mathcal{S} , obteniendo

$$|\Phi\rangle = \mathcal{S}(0, \pm\infty) |\Phi(\pm\infty)\rangle.$$

Reemplazando este resultado en (2.1.1) y utilizando propiedades de la matriz \mathcal{S} , encontramos

$$iG_{\Phi}(x, t; x', t') = \langle \Phi(\infty) |_I \mathcal{S}(\infty, 0) T \left[\mathcal{S}(0, t) \hat{\psi}(x, t) \mathcal{S}(t, t') \hat{\psi}^{\dagger}(x', t') \mathcal{S}(t', 0) \right] \times \mathcal{S}(0, -\infty) |\Phi(-\infty)\rangle_I.$$

Dado que la matriz \mathcal{S} es de por sí un producto cronológico, es posible reordenar los factores y obtener la expresión

$$iG_{\Phi}(x, t; x', t') = \langle \Phi(\infty) |_I T \left[\mathcal{S}(\infty, -\infty) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^{\dagger}(x', t') \right] |\Phi(-\infty)\rangle_I. \quad (2.1)$$

Hasta aquí el desarrollo es válido en general, tanto en equilibrio como fuera del equilibrio. Es en este punto donde difieren la teoría de perturbaciones convencional de la teoría de perturbaciones fuera del equilibrio. En la teoría convencional a temperatura cero, *la interacción es encendida adiabáticamente*[52, 58]:

$$\mathcal{H}_{\epsilon} = H + e^{-\epsilon|t|} H', \quad \epsilon > 0.$$

Elegimos $|\Phi\rangle$ como $|\Psi_0\rangle$, el estado fundamental de $\mathcal{H} = H + H'$, donde se supone que el estado fundamental es no degenerado. Dado que la evolución temporal es adiabática, podemos hacer uso del teorema adiabático y concluir que

$$|\Phi(\pm\infty)\rangle_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_{\epsilon}(\pm\infty, 0) |\Psi_0\rangle$$

son ambos autoestados de H . $|\Psi_0\rangle$ es no degenerado, por lo cual los dos estados difieren a lo sumo en un factor de fase

$$|\Phi(\infty)\rangle = e^{iL} |\Phi(-\infty)\rangle_I. \quad (2.2)$$

Empleando la notación $|\Phi_0\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle_I$, obtenemos

$$e^{iL} = \langle \Phi_0 | \mathcal{S}(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle.$$

La relación (2.2) es crucial para obtener la expansión perturbativa de la función de Green en el equilibrio:

$$iG(x, t; x', t') = \frac{\langle \Phi_0 | T \left[S(\infty, -\infty) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^\dagger(x', t') \right] | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | S(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle},$$

y la matriz de dispersión tiene la siguiente expresión formal

$$S(\infty, -\infty) = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \hat{H}'(\tau) \right).$$

Fuera del equilibrio, el teorema adiabático deja de ser válido. Para el caso de un Hamiltoniano dependiente del tiempo $\mathcal{H}(t)$, la evolución temporal no es adiabática. En el caso en que el Hamiltoniano es independiente del tiempo pero la matriz densidad es arbitraria (estados estacionarios), el teorema tampoco es aplicable, dado que los estados genéricos $|\Phi\rangle$ no son necesariamente autoestados de \mathcal{H} . Fuera del equilibrio $|\Phi(\infty)\rangle$ y $|\Phi(-\infty)\rangle$ no se relacionan de un modo simple, dado que cuando un sistema es apartado del equilibrio, el estado asintótico futuro es en general diferente del estado en el pasado remoto. El propósito de las técnicas del contorno temporal cerrado, que describiremos a continuación, es precisamente, el de eludir toda referencia al estado asintótico futuro $|\Phi(\infty)\rangle$, basando todo el desarrollo en el estado remoto $|\Phi(-\infty)\rangle$.

2.1.2. El contorno de Schwinger-Keldysh

Para formular la teoría sin considerar el estado asintótico futuro $|\Phi(\infty)\rangle$, escribimos

$$|\Phi(\infty)\rangle_I = \mathcal{S}(\infty, -\infty) |\Phi(-\infty)\rangle_I.$$

La ecuación (2.1) resulta entonces

$$iG_\Phi(x, t; x', t') = \langle \Phi(-\infty) |_I \mathcal{S}(-\infty, \infty) \\ \times T \left[\mathcal{S}(\infty, -\infty) \hat{\psi}(x, t) \hat{\psi}^\dagger(x', t') \right] | \Phi(-\infty) \rangle_I.$$

Ahora bien, no es posible introducir el factor $\mathcal{S}(-\infty, \infty)$ dentro del orden cronológico y asociarlo con el de evolución temporal hacia adelante $\mathcal{S}(\infty, -\infty)$. Una manera de sortear este inconveniente, es introducir un contorno de dos ramas C y un orden en el mismo

producido por un operador T_C . Este contorno, conocido como *contorno de Schwinger-Keldysh*, consiste en dos ramas separadas $C = C_+ \cup C_-$. La rama hacia adelante C_+ se extiende desde $-\infty$ a ∞ y la rama hacia atrás C_- desde ∞ hasta $-\infty$. Extendemos también las variables temporales t, t' , a variables definidas en el contorno τ, τ' , y definimos el objeto fundamental de la teoría de muchos cuerpos fuera del equilibrio, la *función de Green temporalmente ordenada en el contorno*

$$iG(x, t; x', t') = \left\langle T_C \left[\psi(x, \tau) \psi^\dagger(x', \tau') \right] \right\rangle = \text{Tr} \rho T_C \left[\psi(x, \tau) \psi^\dagger(x', \tau') \right].$$

Con las variables y el orden a lo largo del contorno C , la expresión en el esquema de interacción análoga a (2.1.2) es

$$iG_\Phi(x, \tau; x', \tau') = \langle \Phi(-\infty) |_I T \left[\mathcal{S}_C(-\infty, -\infty) \hat{\psi}(x, \tau) \hat{\psi}^\dagger(x', \tau') \right] | \Phi(-\infty) \rangle_I,$$

donde la matriz de dispersión \mathcal{S}_C en el contorno tiene la expresión formal

$$\mathcal{S}_C(-\infty, -\infty) \doteq T_C \exp \left(-i \oint_C d\tau_1 \hat{H}'(\tau_1) \right),$$

y la integral es una integral de línea a lo largo del contorno C . Notemos que, a diferencia de lo que ocurre en las teorías en equilibrio, en la expansión perturbativa no aparece el factor de fase en el denominador.

De acuerdo a la discusión previa, la función de Green completa viene dada por

$$iG(x, \tau; x', \tau') = \text{Tr} \rho(-\infty) T_C \left[\mathcal{S}_C(-\infty, -\infty) \hat{\psi}(x, \tau) \hat{\psi}^\dagger(x', \tau') \right]$$

donde la matriz densidad está definida por

$$\rho(-\infty) \doteq \sum_{\Phi} p_{\Phi} | \Phi(-\infty) \rangle_I \langle \Phi(-\infty) |_I,$$

donde ahora los estados no están en el esquema de Heisenberg sino en el esquema de interacción en el pasado remoto $| \Phi(-\infty) \rangle_I$. La matriz densidad en el instante $t = 0$ puede calcularse utilizando la matriz de *scattering*

$$\rho(0) = \mathcal{S}(0, -\infty) \rho(-\infty) \mathcal{S}(-\infty, 0).$$

Hasta aquí el tratamiento es general. Ahora, en la teoría de Keldysh la perturbación de no equilibrio V es encendida adiabáticamente en el pasado remoto $t = -\infty$ y permanece hasta el presente $t = 0$, sin ser apagada. De este modo es posible estudiar estados estacionarios fuera del equilibrio, mucho tiempo después de que el sistema fuera sacado

del equilibrio. La matriz densidad $\rho(-\infty)$ se puede identificar como la matriz densidad del sistema en el pasado remoto cuando la perturbación de no equilibrio está apagada. $\rho(-\infty)$ evoluciona en la forma usual con la matriz de dispersión $\mathcal{S}(0, -\infty)$ a una matriz densidad de no equilibrio ρ . Usualmente, $\rho(-\infty)$ es una distribución de equilibrio

$$\rho(-\infty) = e^{-\beta H} / Z,$$

donde $\beta = 1/k_B T$ y Z es la función de partición.

2.1.3. Ecuación de Dyson en el contorno

A partir de la ecuación (2.1.2) y (2.1.2), la función de Green completa de 1 partícula tiene la expresión

$$iG(x, \tau; x', \tau') = \text{Tr} \rho(-\infty) T_C \left[\exp \left(-i \oint_C d\tau_1 \hat{H}'(\tau_1) \right) \hat{\psi}(x, \tau) \hat{\psi}(x', \tau') \right].$$

El desarrollo perturbativo se obtiene expandiendo la exponencial

$$iG(x, \tau; x', \tau') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \oint_C d\tau_1 \dots \oint_C d\tau_n \\ \times \left\langle \hat{\psi}(x, \tau) \hat{H}'(\tau_1) \hat{H}'(\tau_2) \dots \hat{H}'(\tau_n) \hat{\psi}(x', \tau') \right\rangle,$$

donde el valor medio representa la traza con la matriz densidad $\rho(-\infty)$. Aquí es posible aplicar el teorema Wick: el valor medio se factoriza en el producto de todas las contracciones[60]. De igual modo que en la Teoría de Campos en equilibrio, las distintas contribuciones a la expansión perturbativa pueden representarse utilizando diagramas de Feynman.

La expansión perturbativa completa para la función de Green de 1-partícula ordenada en el contorno puede ser resumada en la forma de una ecuación integral, conocida como *ecuación de Dyson*. Utilizando la notación $1 \doteq (x_1, \tau_1)$, $2 \doteq (x_2, \tau_2)$, etc., la misma tiene

la forma

$$\begin{aligned}
 G(1, 1') &= G_0(1, 1') \\
 &+ \int d2 G_0(1, 2)U(2)G(2, 1') \\
 &+ \int d2 \int d2 G_0(1, 2)\Sigma(2, 3)G(3, 1') \\
 G(1, 1') &= G_0(1, 1') \\
 &+ \int d2 G(1, 2)U(2)G_0(2, 1') \\
 &+ \int d2 \int d2 G(1, 2)\Sigma(2, 3)G_0(3, 1')
 \end{aligned}$$

donde $G(1, 1') \doteq -i \langle T_C[\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle$ es la función de Green exacta y $G_0(1, 1') \doteq -i \langle T_C[\hat{\psi}(1)\hat{\psi}^\dagger(1')] \rangle$ es la función de Green no perturbada con operadores de campo en el esquema de interacción, $U(2)$ es un potencial de 1-partícula y $\Sigma(2, 3)$ es la autoenergía irreducible de 1-partícula, que contiene toda la información acerca de las interacciones de los campos $\hat{\psi}$ con otros grados de libertad, asociados por ejemplo, a reservorios, contactos, etc. El símbolo integral supone una suma sobre todas las variables internas, $\int d2 \doteq \sum_{\sigma_2} \int dx_2 \int_C d\tau_2$. Por simplicidad utilizaremos la notación

$$\begin{aligned}
 G &= G_0 + G_0UG + G_0\Sigma G \\
 G &= G_0 + GUG_0 + G\Sigma G_0
 \end{aligned}$$

2.1.3.1. Relación con las funciones de Green en tiempo real

La función de Green en el contorno representa cuatro funciones distintas, dependiendo de en qué rama se encuentren τ y τ'

$$G(x, \tau; x', \tau') = \begin{cases} G^T(x, t; x', t') \doteq -i \langle T [\psi(x, t)\psi^\dagger(x', t')] \rangle & \text{si } \tau, \tau' \in C_+ \\ G^<(x, t; x', t') \doteq i \langle [\psi^\dagger(x', t')\psi(x, t)] \rangle & \text{si } \tau \in C_+, \tau' \in C_- \\ G^>(x, t; x', t') \doteq i \langle [\psi(x, t)\psi^\dagger(x', t')] \rangle & \text{si } \tau \in C_-, \tau' \in C_+ \\ G^<(x, t; x', t') \doteq -i \langle \tilde{T} [\psi^\dagger(x', t')\psi(x, t)] \rangle & \text{si } \tau, \tau' \in C_- \end{cases},$$

donde G^T y $G^{\tilde{T}}$ son las funciones de Green temporalmente ordenada y anti-temporalmente ordenada respectivamente. $G^{<,>}$ son las funciones menores y mayores, llamadas también *funciones de correlación*. Es conveniente definir una función de Green matricial en tiempo real

$$G = \begin{bmatrix} G^T & G^< \\ G^> & G^{\tilde{T}} \end{bmatrix}$$

Dado que $G^T + G^{\tilde{T}} = G^< + G^>$, sólo tres de estas funciones son independientes. Definimos las funciones de Green *retardada* y *avanzada*

$$\begin{aligned} G^R(x, t; x', t') &= -i\theta(t - t') \left\langle \left[\psi(x, t), \psi^\dagger(x', t') \right]_{+-} \right\rangle \\ G^A(x, t; x', t') &= i\theta(t' - t) \left\langle \left[\psi(x, t), \psi^\dagger(x', t') \right]_{+-} \right\rangle, \end{aligned}$$

donde los signos $+$ y $-$ valen para fermiones y bosones respectivamente. Puede probarse que

$$\begin{aligned} G^R &= G^T - G^< \\ G^A &= G^T - G^>. \end{aligned}$$

2.1.4. Teorema de Langreth

Consideremos los “productos matriciales” que aparecen en las ecuaciones de Dyson (2.1.3) y (2.1.3). Estos son integrales de convolución en el contorno de dos ramas. Consideremos primero el producto de dos cantidades ordenadas en el contorno

$$C(1, 1') = \int d2A(1, 2)B(2, 1')$$

o en notación matricial

$$C = AB$$

Para convertir este producto en una integral sobre el eje real que involucre a las componentes en tiempo real de A y B , apelamos al *Teorema de Langreth*[61]:

$$\begin{aligned} (AB)^{\lessgtr} &= A^R B^{\lessgtr} + A^{\lessgtr} B^A \\ (AB)^{R,A} &= A^{R,A} B^{R,A}, \end{aligned}$$

donde los productos matriciales del lado derecho consisten en suma sobre los grados internos de libertad (espín y coordenadas espaciales) e integrales de convolución en el tiempo *en el eje real* desde $-\infty$ a ∞ .

2.2. Líquidos de Luttinger

Los física de los sistemas estudiados en esta Tesis puede ser capturada por modelos unidimensionales (1D). Las propiedades de estos sistemas interactuantes difieren radicalmente de sus contrapartes en tres dimensiones. Estas peculiaridades dieron lugar a

una nueva clase de universalidad, denominada *líquido de Luttinger* [62, 63]. A continuación se describen estas diferencias, y se detalla el procedimiento de *bosonización*, un método estándar para tratar sistemas interactuantes en una dimensión [64–66].

2.2.1. Colapso de la Teoría del líquido de Fermi en una dimensión

La teoría del líquido de Fermi en tres dimensiones se basa en la existencia de cuasipartículas (cuasihuecos) de larga vida media cuando la energía de excitación tiende a cero, o de manera equivalente, cuando la energía se aproxima a la energía de Fermi [67]. Estas cuasipartículas (cuasihuecos) pueden ser puestas en correspondencia uno a uno con los electrones (huecos) del gas sin interacción, encendiendo las interacciones electrón-electrón de forma adiabática. En efecto, las funciones de Green de las partículas libres y de las cuasipartículas están dadas respectivamente por

$$G_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}}}$$

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Z_{\mathbf{k}}}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}}^*},$$

donde $\epsilon_{\mathbf{k}}$ y $\epsilon_{\mathbf{k}}^*$ son respectivas relaciones de dispersión, y $Z_{\mathbf{k}}$ representa el peso de la cuasipartícula, que se calcula mediante la expresión

$$Z_{\mathbf{k}} = \left(1 - \frac{\partial \Sigma(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)^{-1},$$

donde $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$ es la *autoenergía* dada por

$$\Sigma(\mathbf{k}, \omega) = G_0^{-1}(\mathbf{k}, \omega) - G^{-1}(\mathbf{k}, \omega).$$

Este modelo deja de ser válido en una dimensión. Esto es consecuencia de la estructura del espacio de fases, en particular, del hecho de que la superficie de Fermi consiste de dos puntos discretos ($\pm k_F$) en lugar de una línea o una superficie, y que para cada rama de la dispersión momento-energía (movimiento a izquierda o a derecha) el vector de onda determina unívocamente la energía. Algunas consecuencias notables son:

1. El espacio de fases en 1D reducido conduce a una tasa de *scattering* de las cuasipartículas $\text{Im} \Sigma(\mathbf{k}, \omega) \propto |k - k_F|$ y $\propto \omega$ en lugar de las dependencias $|k - k_F|^2$ y ω^2 en dos y tres dimensiones, y a una divergencia logarítmica en $\text{Re} \Sigma$ en $E = E_F$, donde E_F es la energía de Fermi.
2. Aparecen divergencias logarítmicas en operadores de interacción de dos partículas en segundo orden en teoría de perturbaciones.

3. La divergencia logarítmica en E_F implica que el peso de cuasipartícula se anula. Por lo tanto, la correspondencia uno a uno con los estados no perturbados deja de ser válida.
4. Las excitaciones de baja energía del tipo electrón-hueco pueden ocurrir alrededor de los dos puntos de Fermi $\pm k_F$ con pequeña transferencia de momento $q \ll k_F$, o sobre el mar de Fermi con transferencia de momento $q \approx 2k_F$. Esto indica que a medida que la energía de excitación se aproxima a cero, hay una región prohibida para las excitaciones electrón-hueco en $0 < q < 2k_F$.
5. Las excitaciones elementales de carga y de espín se propagan a velocidades diferentes. La presencia de modos bosónicos de carga y de espín sin *gap* a baja energía es consecuencia de la respuesta finita de espín y de densidad de carga a q y ω pequeños.

Dado que el líquido de Fermi no es un punto de partida válido a la hora de tratar sistemas de electrones 1D interactuantes, es necesario un nuevo modelo. En lo que sigue trataremos un modelo de electrones 1D interactuantes, conocido como *Líquido de Luttinger* y su solución por medio de la bosonización.

2.2.2. Modelo de Luttinger y Bosonización

El modelo de Luttinger es un modelo idealizado de electrones interactuantes en 1D que es exactamente soluble debido a que la relación de dispersión se considera lineal alrededor de $\pm k_F$, y a que se desprecian las interacciones tipo *backscattering*. El Hamiltoniano de Luttinger definido en una línea de longitud L viene dado por [68–70]

$$H_{Lutt} = H_0 + H_I,$$

donde el término cinético H_0 y el de interacción *forwardscattering* H_I vienen dados por

$$\begin{aligned} H_0 &= -iv_F \int_0^L dx \Psi^\dagger(x) \sigma_z \partial_x \Psi(x) \\ &= -iv_F \int_0^L dx \left[\psi_R^\dagger(x) \partial_x \psi_R(x) - \psi_L^\dagger(x) \partial_x \psi_L(x) \right] \\ &= v_F \sum_k k \left(c_{R,k}^\dagger c_{R,k} - c_{L,k}^\dagger c_{L,k} \right) \\ H_I &= 2 \frac{\lambda v_F}{L} \sum_{k,k',q} u_q \left(c_{R,k}^\dagger c_{R,k+q} c_{L,k'}^\dagger c_{L,k'-q} \right). \end{aligned}$$

Aquí v_F es la velocidad de Fermi, $\Psi^\dagger = (\psi_L, \psi_R)$, σ_z es componente z del vector de matrices de Pauli, y los subíndices L y R se refieren a las ramas izquierda y derecha de la relación de dispersión, respectivamente.

La bosonización es una manera natural de atacar el problema de fermiones interactuantes en 1D, dado que para sistemas dominados por interacciones *forward scattering*, las excitaciones elementales son modos bosónicos con dispersión lineal. La idea central del método yace en el rol crucial que juegan los operadores densidad

$$\begin{aligned}\rho_{i,q} &= \sum_k c_{i,k+q}^\dagger c_{ik} \\ \rho_{i,-q} &= \sum_k c_{i,k-q}^\dagger c_{ik},\end{aligned}$$

donde $q > 0$ e $i = L, R$. Esta definición no es completamente rigurosa, y conduce a ambigüedades para $q = 0$ [71, 72]. Para $q = 0$ debe tomarse el orden normal sustrayendo el valor de expectación de $\rho_{i,q=0}$ en el estado fundamental del mar de Fermi lleno

$$\rho_{i,q=0} = \sum_k \left[c_{i,k+q}^\dagger c_{ik} - \langle 0 | c_{i,k+q}^\dagger c_{ik} | 0 \rangle \right]$$

Las relaciones de conmutación para estos operadores resultan ser

$$[\rho_{i,q}, \rho_{j,-q'}] = -\frac{\text{sgn}(i)Lq}{2\pi} \delta_{i,j} \delta_{q,q'},$$

donde $\text{sgn}(i) = +1$ para $i = R$ y $\text{sgn}(i) = -1$ para $i = L$. A partir de estas relaciones se pueden definir operadores de creación y destrucción

$$\begin{aligned}a_q^\dagger &= \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \rho_{R,q} & a_{-q}^\dagger &= \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \rho_{L,-q} \\ a_q &= \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \rho_{R,-q} & a_{-q} &= \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \rho_{L,q}.\end{aligned}$$

Notemos que no hay modo bosónico con $q = 0$. El término cinético del Hamiltoniano se puede escribir en términos de estos operadores en la forma

$$H_0 = v_F \sum_{q>0} |q| \left(a_q^\dagger a_q + a_{-q}^\dagger + a_{-q} \right) + \frac{v_F}{L} [N_R^2 + N_L^2].$$

En términos de los operadores de densidad, el término de interacción que describe procesos *forward scattering* resulta

$$H_{for} = \frac{\pi}{L} \sum_q [V_q (\rho_{R,q} \rho_{R,-q} + \rho_{L,q} \rho_{L,-q}) + U_q (\rho_{R,q} \rho_{L,-q} + \rho_{R,-q} \rho_{L,q})].$$

En términos de los operadores bosónicos el Hamiltoniano total asume la forma cuadrática

$$H = -\frac{1}{2} \sum_q v_F |q| + \frac{\pi}{2L} \left[v_N \left(\frac{k_F L}{\pi} + N_R + N_L \right)^2 + v_J (N_R - N_L)^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_q |q| \left[(v_F + V_q) (a_q^\dagger a_q + a_q a_q^\dagger) + U_q (a_q^\dagger a_{-q}^\dagger + a_q a_{-q}) \right],$$

donde las velocidades $v_N = v_F + V_0 + U_0$ y $v_J = v_F + V_0 - U_0$ caracterizan la propagación de los modos de carga y de corriente asociados a combinaciones simétricas y antisimétricas de N_R y N_L respectivamente a bajas energías, con $N = (k_F L)/\pi + N_R + N_L$ y $J = N_R - N_L$. Esta forma cuadrática se puede diagonalizar por medio de una transformación de Bogoliubov

$$b_q^\dagger = \cosh(\phi_q) a_q^\dagger - \sinh(\phi_q) a_{-q},$$

donde $\phi_q = \frac{1}{2} \tanh^{-1}[-U_q/(v_F + V_q)]$. El Hamiltoniano resultante es

$$H = \sum_q \omega_q b_q^\dagger b_q + \frac{1}{2} \sum_q (\omega_q - v_F |q|) + \frac{\pi}{2L} [v_N N^2 + v_J J^2],$$

donde $\omega_q = \sqrt{(v_F + V_q)^2 - U_q^2} |q|$, mientras que la velocidad del bosón $v_q \rightarrow \sqrt{(v_F + V_q)^2 - U_q^2}$ cuando $q \rightarrow 0$. Para este Hamiltoniano, los números cuánticos N y J asociados a la carga total y la corriente son cantidades conservadas. De la forma del Hamiltoniano se puede ver que las excitaciones de baja energía de este sistema de fermiones interactuantes en 1D son modos bosónicos. Puede probarse que la representación bosónica genera un espacio de Hilbert completo equivalente al espacio de Hilbert fermiónico original [72, 73].

Los operadores de campo fermiónicos ψ pueden expresarse en términos de operadores bosónicos ϕ . La expresión de Luther-Peschel para el campo fermiónico $\psi_{LP,i}(x)$ viene dada por

$$\psi_{LP,i}(x) = \frac{1}{2\pi a} \exp[ik_F x + i\phi_i(x)],$$

donde $i = L, R$, a es un regulador y

$$\phi_i(x) = -\frac{2\pi i}{L} \sum_{q>0} \frac{e^{-aq/2}}{q} [\rho_{i,-q} e^{iqx} - \rho_{i,q} e^{-iqx}].$$

El operador densidad en el espacio real $\rho_i(x)$ se puede escribir como

$$\rho_i(x) = \frac{1}{L} \sum_{q>0} [\rho_{i,-q} e^{iqx} + \rho_{i,q} e^{-iqx}] \\ = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi} \partial_x \phi_i(x) \right)$$

Utilizando la identidad

$$e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A,$$

válida cuando $[A, B]$ es un c-número, puede mostrarse que la expresión (2.2.2) para el campo fermiónico satisface las relaciones de anticonmutación correctas. A partir de dicha expresión es posible deducir todas las leyes de potencia que gobiernan las funciones de Green de una y varias partículas [70, 74–76].

2.2.3. Líquidos de Luttinger quirales

El borde unidimensional del fluido Hall cuántico fraccionario es un sistema fuertemente interactuante en el cual los procesos de *backscattering* están suprimidos. En lo que sigue consideraremos el caso de un fluido de Laughlin con llenado $\nu = 1/m$ con m impar. Basado en la observación de que el fluido Hall fraccionario es irrotacional e incompresible, Wen [42, 44] desarrolló una teoría hidrodinámica de estos estados, que presentamos a continuación. Si llamamos $\rho(x)$ a la densidad en el borde, ésta satisface la ecuación

$$\partial_t \rho(x) - v \partial_x \rho(x) = 0.$$

En un fluido incompresible, la ausencia de disipación y la presencia de una conductancia Hall distinta de cero, genera una corriente persistente a lo largo del borde debido al campo eléctrico en la frontera

$$\mathbf{j} = \sigma_{xy} \hat{z} \times \mathbf{E} = \sigma_{xy} \hat{z} \times [-\nabla V], \quad \sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

donde V es el potencial del borde. Los electrones se mueven en órbitas semiclásicas y fluyen con velocidad $v = (E/B)c$. Introduciendo el desplazamiento vertical $h(x)$ en la posición x a lo largo del borde, relacionado con la densidad por

$$h(x) = \rho(x)n, \quad n = \nu \frac{eB}{hc}$$

donde n es la densidad promedio del fluido Hall fraccionario en el volumen, obtenemos el Hamiltoniano asociado a la onda quiral

$$H = \int dx \frac{1}{2} e \rho(x) h(x) E = \frac{1}{2} \int dx [\rho(x)]^2 \frac{e}{n} = \pi \hbar \frac{v}{\nu} \int dx [\rho(x)]^2.$$

Transformando a la representación de momentos

$$\rho_q = \frac{1}{\sqrt{L}} \int dx e^{iqx} \rho(x)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q \rho_q e^{-iqx},$$

obtenemos

$$H = 2\pi\hbar\frac{v}{\nu} \sum_{q>0} \rho_q \rho_{-q}.$$

Esto da una correspondiente ecuación de onda en el espacio k

$$\dot{\rho}_q = -ivq\rho_q.$$

Las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas y los momentos

$$\dot{q}_q = \frac{\partial H}{\partial p_q} \qquad \dot{p}_q = -\frac{\partial H}{\partial q_q}$$

nos permiten identificar

$$q_q = \rho_q, \quad k > 0, \qquad p_q = \frac{i\hbar}{\nu q} \rho_{-q}, \quad k < 0$$

El paso final es cuantizar el Hamiltoniano imponiendo las relaciones de conmutación canónicas

$$[q_q, p_{q'}] = i\hbar\delta_{q,q'},$$

dando como resultado

$$[\rho_q, \rho_{q'}] = \frac{\nu}{2\pi} q\delta_{q,-q'}$$

$$[H, \rho_q] = -qv\rho_q.$$

Salvo por el factor ν , estas expresiones son parecidas a las del líquido de Luttinger ordinario. Expresando los operadores de densidad en términos de operadores fermiónicos de creación y destrucción,

$$\rho_q = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q \rho_q e^{-iqx},$$

y escribiendo el operador de campo fermiónico $\psi(x)$ en términos del operador de destrucción

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k c_k e^{ikx},$$

obtenemos la relación de conmutación

$$[\rho(x), \psi(x')] = -\delta(x - x')\psi(x),$$

la cual es satisfecha por una representación de $\psi(x)$ en la forma $\tilde{\psi}(x)$:

$$\tilde{\psi}(x) \propto e^{i(1/\nu)\phi}, \quad \partial_x \phi = 2\pi\hbar\rho,$$

donde $\phi(x)$ satisface la relación de conmutación

$$[\phi(x), \phi(x')] = -i\pi\nu \operatorname{sgn}(x - x').$$

Para que la representación de $\tilde{\psi}$ sea válida, $\tilde{\psi}$ debe satisfacer la relación de anticonmutación fermiónica usual $\{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(x')\} = 0$. Haciendo uso de la identidad $e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$ entre dos operadores cuyo conmutador $[A, B]$ es proporcional a la identidad, encontramos

$$\tilde{\psi}(x)\tilde{\psi}(x') = (-1)^{1/\nu}\tilde{\psi}(x')\tilde{\psi}(x),$$

de lo cual se deduce que $1/\nu$ debe ser un entero impar, lo cual es consistente con la condición para un fluido Hall fraccionario simple del tipo de Laughlin.

Capítulo 3

Resistencia de cuatro terminales en un líquido de Luttinger

3.1. Introducción

En este Capítulo nos concentraremos en estudiar el transporte cuántico en dispositivos unidimensionales, tales como cables cuánticos y nanotubos de carbono. En estos casos el efecto de las interacciones electrón-electrón (e-e) es de crucial importancia, y una descripción adecuada se basa en el *Líquido de Luttinger* [77]. Como se mencionó en el Capítulo 1, Subsección 1.1.2, éste está caracterizado por una ley de potencias en la curva de tuneo $I - V$ [78].

La naturaleza del transporte en dispositivos mesoscópicos ha sido de central importancia desde los comienzos en la teoría del transporte cuántico, como se mencionó en el Capítulo 1. Landauer propuso su configuración experimental para estudiar el transporte cuántico, en el cual una muestra mesoscópica se sitúa entre dos reservorios a potenciales químicos distintos[10] (ver Capítulo 1, Subsección 1.1.3). Büttiker mostró que la relación fundamental $G = nG_0$ para la resistencia de dos terminales en un cable cuántico no interactuante, donde n es el número de canales y $G_0 = 2e^2/h$ se conoce como el cuanto universal de conductancia [11]. Una de las consecuencias más importantes de esta ley es que un sistema electrónico no interactuante y desprovisto de mecanismos de dispersión inelástica tiene una resistencia considerable: para un dispositivo con un solo canal $G_0^{-1} = R_0 \simeq 13k\Omega$. Este comportamiento resistivo se debe al acoplamiento entre el sistema y los reservorios a través de los cuales es aplicado el voltaje. Por este motivo, esta cantidad se conoce como la *resistencia de contacto* del sistema ideal no interactuante. Es conveniente definir una magnitud física alternativa que describa el comportamiento resistivo de la muestra y que sea independiente de los efectos de los contactos. La

idea principal es considerar el sistema mesoscópico acoplado localmente a sondas de voltaje o de temperatura (termómetros), modelados como reservorios de partículas. Los potenciales químicos o temperaturas de los mismos satisfacen la condición de equilibrio electroquímico o térmico local con el sistema mesoscópico. Esto implica que los potenciales químicos y temperaturas de los reservorios se ajustan de manera que los flujos electrónico o calorífico a través de los contactos se anulen. Para el caso de dos sondas de voltaje conectadas a la muestra como en la Figura 1.5, la caída de voltaje vendrá dada por $(\mu_1 - \mu_2)/e$. La *resistencia de cuatro terminales* se define mediante la ecuación (1.3).

Este esquema para definir la resistencia de cuatro terminales fue extendido en el marco de la Teoría de Matriz de *Scattering* para configuraciones multiterminales[14, 15] en cables de electrones no interactuantes con una [16, 17] y varias impurezas[18]. En las referencias [16] y [17] se aclara que la inferencia de R_{4t} a partir de cálculos basados en una geometría de dos terminales y en la fórmula original de Landauer [10] no siempre es correcta, lo cual refuerza la importancia de considerar una configuración genuina de cuatro terminales para evaluar esta cantidad adecuadamente.

Entre otras características interesantes, para sistemas no interactuantes se ha predicho que son posibles resistencias de cuatro terminales negativas[14, 16–19]. Esto es consecuencia de la naturaleza coherente de la propagación electrónica a través de una muestra donde sólo tienen lugar procesos de dispersión elástica con impurezas o barreras. Estas resistencias (longitudinales) negativas en estructuras balísticas fueron medidas por primera vez a finales de la década del '80 [20–22]. Este efecto fue también observado en un experimento más reciente en estructuras semiconductoras[6]. Más recientemente, el comportamiento de R_{4t} fue estudiado experimentalmente en nanotubos de carbono [23]. En este caso, valores negativos para la resistencia de cuatro terminales fueron observados en el régimen de baja temperatura. Cabe mencionar que el concepto de resistencia de cuatro terminales, ha sido recientemente extendido al caso de sondas de voltaje dependientes del tiempo para sistemas no interactuantes, dando lugar al concepto de *impedancia de cuatro terminales*[79, 80].

Es ampliamente aceptado que el modelo de Luttinger de electrones en 1D captura las principales características observadas en los experimentos de transporte en nanotubos de carbono [24–30]. En particular, las leyes de potencias de la corriente de *tunneling* como función del voltaje y/o temperatura aplicados predichas por el modelo del líquido de Luttinger han sido observadas experimentalmente en estos sistemas[7, 8]. El comportamiento de R_{4t} en sistemas Luttinger multiterminales ha sido investigado en la referencia [1]. Estimaciones anteriores para esta cantidad han sido realizados basándose en una interpretación de la fórmula de Landauer de dos terminales[32, 33]. Esto se debe al hecho de que el transporte cuántico en sistemas Luttinger multiterminales es en general un

problema realmente complicado desde el punto de vista técnico. Otros sistemas Luttinger multiterminales en geometrías tipo Y fueron considerados en el régimen de respuesta lineal en el voltaje y utilizando la aproximación de Hartre-Fock en la interacción en las referencias [34] y [35].

En la referencia [1] se considera la configuración de la Figura 1.5. Una corriente I fluye a través de un cable Luttinger infinito en respuesta a un voltaje aplicado V , y el voltaje es sentido por otras dos sondas de voltaje, acopladas de forma *no invasiva* al cable. El perfil del voltaje tiene una estructura de oscilaciones tipo Friedel como en el caso de electrones no interactuantes, pero modulados por una envolvente que sigue una ley de potencias con el voltaje aplicado o la temperatura, con un exponente que depende de la intensidad de la interacción electrón-electrón. Sin embargo, es sabido que en el caso opuesto de acoplamiento suficientemente fuerte entre el sistema mesoscópico y las sondas, tienen lugar eventos de dispersión inelástica y comportamiento resistivo clásico[81]. Más aún, las sondas invasivas no ideales no son fáciles de realizar en situaciones experimentales. Por esta razón, el objetivo del siguiente estudio es ir un paso más allá de la suposición de no invasividad, considerando sondas que, si bien siguen estando débilmente acopladas a la muestra, introducen decoherencia a través de procesos de dispersión inelástica, así como también posibles efectos de interferencia entre las sondas. Entre otras cuestiones, se trata de decidir si las características en el comportamiento de la resistencia de cuatro terminales determinadas a partir de sondas no invasivas (oscilaciones tipo Friedel, resistencia negativa) siguen siendo válidas al relajar la hipótesis de no invasividad.

3.2. Modelo

El esquema del sistema estudiado se muestra en la Figura 1.5 (Capítulo 1, Subsección 1.1.3). Consideramos un cable cuántico modelado como un líquido de Luttinger con interacciones *forward scattering* acoplado a reservorios. Los reservorios L y R son los utilizados para aplicar el voltaje exterior, mientras que 1 y 2 representan las sondas utilizadas para medir el voltaje. Éstas están en equilibrio electroquímico local con el cable, de modo que las corrientes entre las mismas y el cable son nulas. Una impureza tipo *backscattering* está situada en la posición x_B .

La acción del sistema considerado viene dada por[1]

$$S = S_{wire} + S_{imp} + S_{res} + S_{cont}$$

donde S_{wire} corresponde a un líquido de Luttinger de longitud infinita, y Viene dado por la expresión

$$S_{wire} = \int dx dt \left\{ \psi_L^\dagger \left[i(\partial_t - \partial_x) - \mu_R \right] \psi_L + \psi_R^\dagger \left[i(\partial_t + \partial_x) - \mu_R \right] \psi_R - g \left[\psi_R^\dagger \psi_R + \psi_L^\dagger \psi_L \right]^2 \right\},$$

donde los dos primeros términos son los términos cinéticos correspondientes a los portadores de carga izquierdos (L) y derechos (R) respectivamente, mientras que g es la intensidad del acoplamiento tipo *forward scattering* electrón-electrón. Los dos potenciales químicos $\mu_L = \mu - V/2$ y $\mu_R = \mu + V/2$ representan el voltaje aplicado V entre las partes izquierda y derecha del cable, que genera la corriente I que fluye a lo largo del mismo. Trabajaremos en unidades tales que $\hbar = k_B = e = v = 1$, recuperando las mismas a la hora de interpretar los resultados.

El efecto de la impureza viene dado por un término de interacción *backscattering* de intensidad λ_B en una dada posición x_B

$$S_{imp} = \lambda_B \int dx dt \delta(x - x_B) \left[e^{-2ik_F x} \psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.} \right].$$

El efecto de las sondas de voltaje viene descrito por S_{res} , correspondiente a electrones no interactuantes con dos quiralidades:

$$S_{res} = \sum_{j=1,2} \int dy_j dt \left\{ \chi_{L_j}^\dagger \left[i(\partial_t - \partial_{y_j}) - \mu_j \right] \chi_{L_j} + \chi_{R_j}^\dagger \left[i(\partial_t + \partial_{y_j}) - \mu_j \right] \chi_{R_j} \right\},$$

El término S_{cont} representa el acoplamiento *tunnelling* entre los reservorios y el cable, y viene dado por

$$S_{cont} = \sum_{\substack{j=1,2 \\ \alpha=r,l, \beta_j=r,l_j}} \int dx dy_j w_j \delta(x - x_j) \delta(y_j - y_j^0) \left[e^{\mp i(k_F x + k_F^{(j)} y_j)} \psi_\alpha^\dagger \chi_{\beta_j} + \text{h.c.} \right].$$

Los signos $-$ y $+$ corresponden a L y R respectivamente, mientras que k_F y $k_F^{(j)}$ son los vectores de Fermi del cable y de los reservorios, respectivamente. Cabe notar aquí que estamos suponiendo que las puntas de voltaje se acoplan de manera simétrica a los portadores L y R en el líquido de Luttinger. Esta suposición es natural en ausencia de campos magnéticos e interacciones espín-órbita. Dado que nuestro mayor interés es discutir los efectos originados en la intensidad de los acoplamientos, más adelante consideraremos que los acoplamientos son iguales ($w_1 = w_2$). De todas maneras, es sabido que acoplamientos asimétricos ($w_1 \neq w_2$) son suficientes para producir una resistencia negativa [1, 20–22].

La corriente de *tunneling* que fluye entre la sonda j y el cable se calcula

$$I_j = iw_j \sum_{\alpha, \beta=L,R} \langle \chi_{j,\alpha}^\dagger(x_j, t) \psi_\beta(x_j, t) - \text{h.c.} \rangle.$$

Para poder hacer uso del formalismo, escribimos esta expresión en la forma

$$I_j = 2 \sum_{\alpha, \beta_j} \text{Re} \left[w_j G_{\alpha\beta_j}^<(x_j, y_j^0; t, t) \right], \quad (3.1)$$

donde la función de Green $G_{\alpha\beta_j}^<$

$$G_{\alpha\beta_j}^<(x, y_j; t, t') \doteq i \langle \chi_{\beta_j}^\dagger(y_j, t') \psi_\alpha(x, t) \rangle, \quad (3.2)$$

es la función de Green menor que involucra grados de libertad del cable y de los reservorios (ver Capítulo 2).

3.3. Funciones de Green

Además de la función de Green menor definida en (3.2), definimos las siguientes funciones de Green retardadas

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^R(x, x'; t, t') &= -i\Theta(t - t') \langle \{ \psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^\dagger(x', t') \} \rangle \\ G_{\alpha\beta_j}^R(x, x'; t, t') &= -i\Theta(t - t') \langle \{ \psi_\alpha(x, t), \chi_{\beta_j}^\dagger(x', t') \} \rangle, \end{aligned}$$

donde la primera corresponde a grados de libertad del cable, mientras que la segunda involucra grados de libertad del cable y del reservorio j .

Para evaluar estas funciones de Green es necesario resolver las ecuaciones de Dyson (ver Capítulo 2). Para simplificar la notación, es conveniente realizar las transformaciones de *gauge*

$$\begin{aligned} \psi_{L,R}^\dagger(x) &\rightarrow \psi_{L,R}^\dagger(x) e^{\pm ik_F x} \\ \chi_{L_j, R_j}^\dagger(y_j) &\rightarrow e^{\pm ik_F^{(j)} y_j} \chi_{L_j, R_j}^\dagger(y_j). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Dyson para las funciones retardadas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 \{-i\partial_{t'} \pm k_F - \mu_\beta \pm i\partial_{x'}\} G_{\alpha\beta}^R(x, x'; t, t') &= \delta(t - t') \delta_{\alpha\beta} \\
 &+ \lambda_B G_{\alpha\bar{\beta}}^R(x, x'; t, t') \delta(x' - x_b) \\
 &+ \sum_j w_j G_{\alpha\beta_j}^R(x, y_j^0; t, t') \delta(x' - x_j) \\
 &+ \sum_\gamma \int dx'' d\tau G_{\alpha\gamma}^R(x, x''; t, \tau) \\
 &\quad \times \Sigma_{\gamma\beta}^{int}(x'', x'; \tau, t') \\
 \{-i\partial_{t'} \pm k_F^{(j)} \pm i\partial_{y_j}\} G_{\alpha\beta_j}^R(x, y_j; t, t') &= w_j \sum_\beta G_{\alpha\beta}^R(x, x_j; t, t') \delta(y_j - y_j^0), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

donde los signos $+$ y $-$ corresponden a $\beta = L, R$ y $\beta_j = L_j, R_j$ respectivamente, y $\bar{L} = R, \bar{R} = L$, mientras que $\Sigma_{\gamma\beta}^{int}(x'', x'; \tau, t')$ es la autoenergía exacta debido al término de interacción e-e con constante de acoplamiento g .

Notemos que el operador

$$-i\partial_{t'} \pm k_F^{(j)} \pm i\partial_{y_j'} = \left\{ g_{\beta_j}^R(y_j, y_j'; t, t') \right\}^{-1},$$

es el inverso de la función de Green retardada correspondiente a los grados de libertad β_j del reservorio j . Por lo tanto, la ecuación (3.3) se puede expresar en la forma

$$G_{\alpha\beta_j}^R(x, y_j^0; t, t') = w_j \sum_\beta \int d\tau G_{\alpha\beta}^R(x, x_j; t, \tau) g_{\beta_j}^R(y_j^0, y_j^0; \tau, t').$$

Sustituyendo esta última ecuación en (3.3) y definiendo

$$\Sigma_{\gamma\beta}^{res}(x, x'; t, t') = \sum_{j=1,2,\beta_j} \delta(x - x_j) \delta(x' - x_j) |w_j|^2 g_{\beta_j}^R(y_j^0, y_j^0; t, t'),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 \{-i\partial_{t'} \pm k_F - \mu_\beta \pm i\partial_{x'}\} G_{\alpha\beta}^R(x, x'; t, t') &= \delta(t - t') \delta_{\alpha\beta} \\
 &+ \lambda_B G_{\alpha\bar{\beta}}^R(x, x'; t, t') \delta(x' - x_B) \\
 &+ \sum_\gamma \int dx'' d\tau G_{\alpha\gamma}^R(x, x''; t, \tau) \\
 &\quad \times \left\{ \Sigma_{\gamma\beta}^{int}(x'', x'; \tau, t') \right. \\
 &\quad \left. + \Sigma_{\gamma\beta}^{res}(x'', x'; \tau, t') \right\}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

La función de Green menor que aparece en la expresión (3.1) para las corrientes I_j se puede obtener por medio de las reglas de Langreth [61] (ver Capítulo 2), obteniendo

$$G_{\alpha\beta_j}^<(x_j^0, y_j^0; t, t') = w_j \int d\tau \left[G_{\alpha\alpha}^<(x_j^0, x_j^0; t, \tau) g_{\beta_j}^A(y_j^0, y_j^0; \tau, t') + G_{\alpha\alpha}^R(x_j^0, x_j^0; t, \tau) g_{\beta_j}^R(y_j^0, y_j^0; \tau, t') \right], \quad (3.5)$$

donde $g^A = [g^R]^\dagger$ es la función de Green avanzada del reservorio desacoplado.

Hasta aquí todas las ecuaciones son exactas. El paso crucial para obtener la función de Green exacta resolviendo las ecuaciones de Dyson es la evaluación de Σ^{int} , que corresponde al diagrama completo para la autoenergía correspondiente a la interacción electrón-electrón, teniendo en cuenta el acoplamiento de los reservorios, así como también el efecto de la impureza. Introducimos ahora la siguiente aproximación para el límite de acoplamiento para los reservorios y la impureza $w_j \ll g$ y $\lambda_B \ll g$:

$$\Sigma_{\gamma\beta}^{int}(x, x'; t, t') \simeq \Sigma_{\gamma\beta}^{Lutt}(x, x'; t, t'), \quad (3.6)$$

donde

$$\Sigma_{\gamma\beta}^{Lutt}(x, x'; t, t') = [G^{R,Lutt}(x, x'; t, t')]_{\gamma\beta}^{-1} - \{-i\partial_{t'} \pm k_F \pm i\partial_{x'}\} \delta_{\gamma\beta},$$

es la autoenergía del líquido de Luttinger (infinito) sin impureza y desacoplado de los reservorios, mientras que $G^{R,Lutt}(x, x'; t, t')$ es la función de Green retardada exacta del líquido de Luttinger. La aproximación (3.6) implica evaluar la autoenergía asociada a la interacción e-e, despreciando correcciones de vértice debido al escape a los reservorios y debido a la dispersión con la impureza. Una aproximación similar ha sido realizada en la tesis de Venturelli [82]. Esta aproximación es válida sólo en el límite de w_j y λ_B pequeños.

Bajo esta aproximación en la autoenergía y realizando la transformada de Fourier con respecto a $t - t'$, la ecuación (3.4) se puede expresar en la forma

$$G_{\alpha\beta}^R(x, x'; \omega) = G_{\alpha\beta}^{R,Lutt}(x, x'; \omega) + \sum_j G_{\alpha\alpha}^R(x, x_j, \omega) \Sigma_{\alpha\beta}^{res}(x_j, x_j; \omega) G_{\beta\beta}^{R,Lutt}(x_j, x'; \omega) + \lambda_B G_{\alpha\alpha}^R(x, x_B, \omega) G_{\beta\beta}^{R,Lutt}(x_B, x'; \omega). \quad (3.7)$$

Esta ecuación permite evaluar la función de Green retardada. En lo que sigue, resolvemos la misma al orden más bajo en el término *backscattering* λ_B y a orden $\mathcal{O}(w_j^2)$ en los acoplamientos con las sondas de voltaje. Es importante hacer notar que en el límite de interacción Coulombiana nula ($g = 0$), la ecuación (3.7) conduce a la función retardada exacta del problema.

3.4. Corrientes

Sustituyendo la ecuación (3.5) en la definición de la corriente (3.1), obtenemos la siguiente expresión para la corriente que fluye a través del contacto entre el reservorio j -ésimo y el cable

$$I_j = -2 \sum_{\alpha\beta,j} \text{Re} \left\{ w_j^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[G_{\alpha\alpha}^<(x_j^0, x_j^0; \omega) g_{\beta_j}^A(r_j^0, r_j^0; \omega) + G_{\alpha\alpha}^R(x_j^0, x_j^0; \omega) g_{\beta_j}^<(r_j^0, r_j^0; \omega) \right] \right\}.$$

Haciendo uso de la suposición de acoplamiento débil entre los reservorios y el cable, y la amplitud débil en el término de *backscattering* inducido por la impureza, evaluamos las funciones de Green $G_{\alpha\alpha}^<(x_j^0, x_j^0; \omega)$ y $G_{\alpha\alpha}^R(x_j^0, x_j^0; \omega)$ perturbativamente al orden $\mathcal{O}(w_j^2)$ y $\mathcal{O}(\lambda_B)$. Concretamente, esto implica resolver (3.7) en la forma

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^R(x, x'; \omega) &\simeq G_{\alpha\beta}^{R,Lutt}(x, x'; \omega) \\ &+ \sum_j G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x, x_j, \omega) \Sigma_{\alpha\beta}^{res}(x_j, x_j; \omega) G_{\beta\beta}^{R,Lutt}(x_j, x'; \omega) \\ &+ \lambda_B G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x, x_B, \omega) G_{\beta\beta}^{R,Lutt}(x_B, x'; \omega), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde la función menor correspondiente se puede derivar de la ecuación (3.8) utilizando las reglas de Langreth. Luego de cierto trabajo algebraico, las corrientes a través de los contactos se pueden expresar en la forma

$$I_j = I_j^{(1)} + I_j^{(2)},$$

donde $I_j^{(1)} \propto |w_j|^2$, $I_j^{(2)} \propto |w_j|^4$, siendo

$$\begin{aligned} I_j^{(1)} &= 2w_j^2 \sum_{\alpha=l,r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(G_{\alpha\alpha}^{<,Lutt}(x_j, x_j, \omega) g_j^>(\omega) - G_{\alpha\alpha}^{>,Lutt}(x_j, x_j, \omega) g_j^<(\omega) \right. \\ &+ \lambda_B \left\{ \left[G_{\alpha\alpha}^{<,Lutt}(x_j - x_B; \omega) \left(G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j - x_B; \omega) \right)^* \right. \right. \\ &+ \left. \left. G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j - x_B; \omega) G_{\alpha\alpha}^{<,Lutt}(x_B - x_j; \omega) \right] g_j^>(\omega) \right. \\ &- \left. \left[G_{\alpha\alpha}^{>,Lutt}(x_j - x_B; \omega) \left(G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j - x_B; \omega) \right)^* \right. \right. \\ &+ \left. \left. G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j - x_B; \omega) G_{\alpha\alpha}^{>,Lutt}(x_B - x_j; \omega) \right] g_j^<(\omega) \right\} \Big), \end{aligned} \quad (3.9)$$

y

$$\begin{aligned}
 I_j^{(2)} = & 4w_j^2 \sum_{\substack{i=1,2 \\ \alpha,\beta=r,l}} w_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j, x_i, \omega) G_{\beta\beta}^{A,Lutt}(x_i, x_j, \omega) \right. \\
 & \times \left[g_j^>(\omega) g_i^<(\omega) - g_j^<(\omega) g_i^>(\omega) \right] \\
 & + G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_j, x_i, \omega) g_i^R(\omega) \\
 & \times \left[G_{\beta\beta}^{<,Lutt}(x_i, x_j, \omega) g_j^>(\omega) - G_{\beta\beta}^{>,Lutt}(x_i, x_j, \omega) g_j^<(\omega) \right] \\
 & + G_{\alpha\alpha}^{A,Lutt}(x_i, x_j, \omega) g_i^A(\omega) \\
 & \left. \times \left[G_{\beta\beta}^{<,Lutt}(x_j, x_i, \omega) g_j^>(\omega) - G_{\beta\beta}^{>,Lutt}(x_j, x_i, \omega) g_j^<(\omega) \right] \right\}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

El término $I_j^{(1)}$ corresponde al límite de contactos no invasivos ideales considerados en la referencia [1]. Se deriva descartando el segundo término en la ecuación (3.8) y el término correspondiente en la función de Green menor. Esto conduce a la solución exacta al orden $\mathcal{O}(w_j)$ de las ecuaciones (3.4) y (3.5) para $\lambda_B = 0$. En las soluciones de segundo orden (3.8) hemos introducido la aproximación adicional de despreciar las correcciones de vértice $\propto w_j^2$ y $\propto \lambda_B$ en la evaluación de la autoenergía Σ^{int} . Notemos que las dos sondas están completamente no correlacionadas en la componente no invasiva $I^{(1)}$. En la contribución de orden superior es posible distinguir dos tipos de términos. Por un lado, tenemos los que son $\propto w_j^4$; éstos tienen en cuenta el efecto de *dephasing* y comportamiento disipativo inducido por procesos de dispersión inelástica debido al acoplamiento con los reservorios. Por otra parte, términos del tipo $\propto w_1^2 w_2^2$ describen efectos de interferencia entre ambos reservorios.

Es conveniente expresar las funciones de Green mayores y menores en términos de las funciones espectrales

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha,\alpha}^{<,Lutt}(x_1 - x_2; \omega + \mu_\alpha) &= i f_{\alpha,j}(\omega) \rho_\alpha(x_1 - x_2; \omega) \\
 G_{\alpha,\alpha}^{>,Lutt}(x_1 - x_2; \omega + \mu_\alpha) &= -i [1 - f_{\alpha,j}(\omega)] \rho_\alpha(x_1 - x_2; \omega) \\
 g_j^<(\omega) &= i f_{\alpha,j}(\omega) \rho_j(\omega) \\
 g_j^>(\omega) &= -i [1 - f_{\alpha,j}(\omega)] \rho_j(\omega)
 \end{aligned}$$

donde $f_{\alpha,j}(\omega) = 1/(e^{(\omega \pm V/2)/T} + 1)$ son las funciones de distribución de Fermi de los portadores L y R del cable, $f_j(\omega) = 1/(e^{(\omega - \mu_j)/T} + 1)$, las funciones de Fermi correspondientes a los reservorios, y μ_j representa el potencial químico de los electrones en el reservorio j , relativo al potencial químico promedio μ del cable. La temperatura T es la misma en todo el cable y en las sondas, mientras que $\rho_\alpha(\omega)$ y $\rho_j(\omega) \doteq \rho_j(0, \omega)$ son las densidades espectrales del líquido de Luttinger y del reservorio j respectivamente (ver Apéndice B). Es sabido que las mismas están relacionadas con las funciones de Green mediante las expresiones [52, 53]

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(\omega) &= iG_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_1 - x_2; \omega) - i[G_{\alpha\alpha}^{R,Lutt}(x_2 - x_1; \omega)]^* \\ \rho_j(\omega) &= -2 \operatorname{Im} g_j^R(\omega).\end{aligned}$$

Reemplazando en (3.9) y (3.10), la expresión completa para la corriente a través del contacto j resulta

$$\begin{aligned}I_j &= 2w_j^2 \sum_{\alpha,\beta=l,r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [f_\alpha(\omega) - f_j(\omega)] \rho_j(\omega) \\ &\quad \left\{ \rho_\alpha(0, \omega) \left[1 + 2w_j^2 \operatorname{Re} \left(G_\beta^{R,Lutt}(0, \omega) g_j^R(\omega) \right) \right] \right. \\ &\quad + 2\lambda_B \operatorname{Re} \left[\rho_\alpha(x_j - x_b; \omega) \left(G_\alpha^{R,Lutt}(x_j - x_b; \omega) \right)^* \right] \\ &\quad \left. + 2w_j^2 \operatorname{Re} \left[\rho_\alpha(x_j - x_{\bar{j}}; \omega) G_\beta^{R,Lutt}(x_j - x_{\bar{j}}; \omega) g_j^R(\omega) \right] \right\} \\ &+ 2w_j^2 w_{\bar{j}}^2 \sum_{\alpha,\beta=l,r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} [f_{\bar{j}}(\omega - \mu_{\bar{j}}) - f_j(\omega - \mu_j)] \\ &\quad \times \rho_j(\omega) \rho_{\bar{j}}(\omega) G_\beta^{R,Lutt}(x_j - x_{\bar{j}}; \omega) \left(G_\alpha^{R,Lutt}(x_j - x_{\bar{j}}; \omega) \right)^*,\end{aligned}\tag{3.11}$$

donde hemos utilizado la notación j, \bar{j} de modo que $\bar{1} = 2$ y $\bar{2} = 1$.

3.5. Caída de voltaje y resistencia de cuatro terminales

Los potenciales químicos μ_j en las expresiones de las Secciones anteriores se ajustan de manera que se satisfagan las condiciones de equilibrio electroquímico local entre las puntas y el cable. Esto implica que los potenciales químicos se ajustan al requerimiento $I_j = 0$ para $j = 1, 2$, donde las corrientes fueron definidas anteriormente en (3.11). En el caso de puntas no invasivas, no hay ningún tipo de correlación entre las sondas de voltaje, y el problema se reduce al del cable acoplado a una sola punta, que sensa el potencial químico local del cable. Para contactos invasivos, es necesario resolver un sistema de dos

ecuaciones no lineales para calcular μ_1 y μ_2 , a partir de los cuales podemos calcular la caída de voltaje $\Delta V = \mu_1 - \mu_2$ entre los puntos x_1 y x_2 . La misma contiene no solo información de los procesos de dispersión en el cable, sino también de procesos inelásticos y efectos de interferencia introducidos por las propias sondas de medición. La resistencia de cuatro terminales se puede evaluar a partir de la ecuación (1.3), y el cociente entre la resistencia de cuatro terminales y la de dos terminales se calcula entonces

$$\frac{R_{4t}}{R_{2t}} = \frac{\Delta V}{V}.$$

Los dos potenciales químicos son evaluados numéricamente a partir de (3.11), con las funciones de Green dadas en el Apéndice B.

3.6. Resultados sin impureza

En esta Sección se exponen los resultados para el cociente entre R_{4t}/R_{2t} en el caso $\lambda_B = 0$, esto es, sin impureza presente en el cable. Es importante mencionar que en el límite de contactos no invasivos, dicho cociente se anula idénticamente. Por lo tanto, todos los comportamientos de la resistencia que se discuten en esta Sección se deben exclusivamente a la naturaleza invasiva de las sondas de voltaje.

La intensidad de las interacciones e-e viene caracterizada por el parámetro $K = (1 + 2g/\pi)^{-1/2}$. El límite de electrones no interactuantes corresponde a $K = 1$, mientras que para interacción repulsiva entre los electrones, los valores típicos de K (determinados experimentalmente en medidas de transporte en nanodispositivos) están en el rango $0,25 < K < 0,75$ [83].

En la Figura 3.1 se muestran el comportamiento de R_{4t}/R_{2t} en función del voltaje aplicado V a temperatura $T = 0$, para posiciones fijas de los contactos y diferentes valores del parámetro de interacción e-e, K . Para comprender mejor el comportamiento del cociente entre las resistencias, notemos que para voltaje aplicado nulo ($V = 0$), la caída de voltaje ΔV debe ser igual a cero, por lo cual debe anularse también R_{4t}/R_{2t} . Para valores de V suficientemente pequeños, R_{4t}/R_{2t} sigue una ley de potencias en V

$$\frac{R_{4t}}{R_{2t}} \propto V^{2\gamma+1},$$

donde el exponente γ está relacionado con el parámetro de Luttinger K de la forma $\gamma = (K + K^{-1} - 2)/4$. Este resultado puede derivarse haciendo una expansión de I_j para V pequeño. Por otra parte, un comportamiento resistivo clásico (óhmico) se caracteriza

por un valor constante de R_{4t}/R_{2t} . En la Figura 3.1 se puede observar que este comportamiento se logra cuando el voltaje aplicado supera un cierto valor V_c , el cual viene dado aproximadamente por

$$eV_c \sim \frac{\hbar v}{2K |x_1 - x_2|},$$

donde hemos recuperado las unidades en términos de \hbar , e y v . Esta escala de energías se interpreta notando que v/K es la velocidad del plasmón en el cable y $\tau_p = 2K |x_1 - x_2| / v$ es el tiempo que estas excitaciones tardan en ir y volver de un contacto al otro. Este tiempo τ_p define el tiempo característico para los procesos de *backscattering* inelástico. Notemos que aunque el cable Luttinger es un sistema elástico, donde los electrones se propagan de manera balística, las sondas de voltaje acopladas al sistema actúan como un baño disipativo. Es precisamente el acoplamiento a reservorios el procedimiento que se utiliza en la literatura para modelar la disipación de tipo óhmica [34, 81]. En este caso, suponiendo que el voltaje se aplica de izquierda a derecha, la energía de Fermi de los electrones R es eV más grande que la de los portadores L . Entonces, la energía asociada al voltaje crítico eV_c corresponde a la energía disipada en los contactos. Un electrón con energía de Fermi μ_R viaja con velocidad v/K desde la sonda de la izquierda (conectada en x_1) a la sonda de la derecha (conectada en x_2), sufre un proceso de *backscattering* en x_2 y vuelve a x_1 con una energía de Fermi μ_L . Una estimación para la energía transferida en el proceso disipativo es, precisamente $\hbar\tau_p^{-1}$. El argumento anterior puede reproducirse fácilmente para el caso en el que el voltaje está aplicado en sentido opuesto, en cuyo caso, la energía es transferida inelásticamente de los portadores R a los L . Notemos que en cualquier caso, la energía disipada en los contactos está asociada a una caída de voltaje que tiene la misma dirección que el voltaje externo, como es de esperar para un proceso clásico de tipo óhmico. Es interesante señalar que $2\tau_p^{-1}$ es equivalente a la frecuencia balística definida en la Ref. [30] para un líquido de Luttinger interactuante de longitud finita conectado a reservorios.

En resumen, dada una separación $|x_1 - x_2|$ entre los contactos, V_c define el voltaje de *crossover* para el cual los procesos inelásticos de tipo *backscattering* entre las puntas son relevantes. Notemos que el régimen de voltaje pequeño $V \ll V_c$, depende de la intensidad de la interacción e-e g , siendo más ancho para valores de g mayores (K menores). En general, el efecto de esta interacción es disminuir el valor de la resistencia. Un análisis más detallado de la Figura 3.1 muestra que R_{4t}/R_{2t} presenta un comportamiento oscilatorio como función del voltaje aplicado V para $V \gg V_c$. Esto puede interpretarse como consecuencia de efectos de interferencia entre las sondas de voltaje. Ajustando los datos numéricos, encontramos que este comportamiento es reproducido por una función de la forma

$$\frac{R_{4t}}{R_{2t}} \sim A + \frac{B}{V^{2\gamma+1}} \sin[KV(x_2 - x_1)], \quad V \gg V_c,$$

donde A y B dependen de K y son proporcionales a w^2 , si bien este resultado no ha sido derivado de forma analítica. De todos modos, es interesante notar que un comportamiento resistivo similar se obtiene para un líquido de Luttinger de longitud finita en presencia de procesos *backscattering* [30, 84]. Otra observación interesante es que el valor de saturación A disminuye al aumentar la intensidad de las interacciones e-e. Esto indica que las mismas tienden a apantallar los procesos de dispersión inelástica introducidos por el acoplamiento con los reservorios.

En la Figura 3.3 se muestra el comportamiento de la razón entre las resistencias manteniendo fija la posición de una de las puntas mientras movemos la segunda a lo largo del cable. Este patrón revela una dependencia funcional de la forma

$$\frac{R_{4t}}{R_{2t}} \approx A + \frac{B}{V^{2\gamma+1}} \sin [2k_F(x_2 - x_1)] \sin [KV(x_2 - x_1)],$$

dentro del régimen de voltaje alto $V \gg V_c$, correspondiendo, respectivamente a las líneas sólidas y de trazos en la Figura. La modulación de período $2k_F$ se asemeja al comportamiento encontrado en el perfil de voltaje de puntas no invasivas en un sistema con una impureza, las cuales se observan tanto en sistemas no interactuantes [16, 17, 19] como interactuantes [1]. En estos casos, el origen de dicho comportamiento es la ocurrencia de interferencia en el paquete de ondas electrónico generado por los procesos de *backscattering* que tienen lugar en la impureza. En nuestro caso, la interferencia se origina por procesos de dispersión en las propias sondas. A diferencia del comportamiento para sondas no invasivas, en este caso la caída de voltaje inducido por los contactos tiene el mismo signo que el voltaje externo aplicado. Como resultado, la resistencia de cuatro terminales para contactos invasivos en un cable limpio es siempre positiva, mas allá de las oscilaciones tipo Friedel $2k_F$. Esto está en contraste con el problema de contactos no invasivos, donde estas oscilaciones proveen de un mecanismo para que $R_{4t} < 0$. En la Figura 3.4 se ilustra la misma situación, pero para voltaje fijo y variando el parámetro de interacción e-e, K . Se ve que, en general, valores grandes de la interacción e-e, producen valores más pequeños de R_{4t}/R_{2t} . Concluimos que, aunque no es posible obtener valores negativos de la resistencia de cuatro terminales en ausencia de impurezas, las interacciones e-e tienden a facilitar la ocurrencia de los mismos.

En la Figura 3.2 se muestra el efecto de la temperatura en el comportamiento de R_{4t}/R_{2t} . Queda claro que a medida que la temperatura aumenta, las oscilaciones en el régimen de alto voltaje $V \gg V_c$ discutidas anteriormente disminuyen en intensidad, y la resistencia tiende a un valor constante. Este comportamiento se ve más claramente en las Figuras 3.5 y 3.6, donde se grafica R_{4t}/R_{2t} como función de la temperatura T para tres valores diferentes del voltaje aplicado V . De manera análoga al comportamiento a $T = 0$ como función de V discutido anteriormente, hay una temperatura de *crossover*

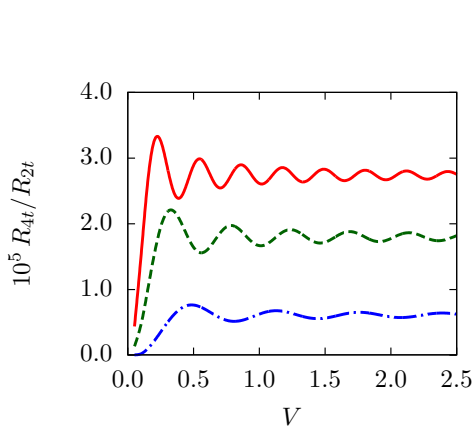


FIGURA 3.1: R_{4t}/R_{2t} en función del voltaje V , para diferentes valores de la intensidad de la interacción e-e: $K = 1$. (curva roja, sólida), $K = 0,7$ (curva verde, trazos), $K = 0,5$ (curva azul, puntos-trazos). Las contactos están ubicados en $x_1 = -10$ y $x_2 = 10$, y las intensidades de los acoplamientos tienen los valores $w_1 = w_2 = 0,1$. La temperatura es $T = 0$.

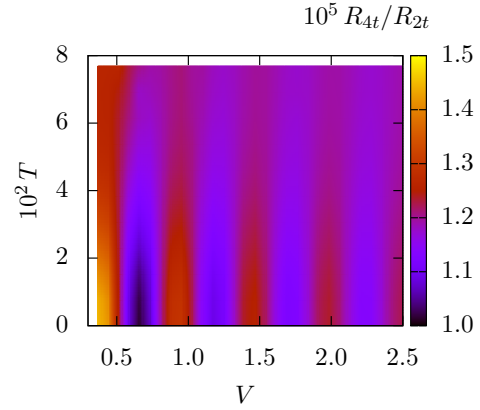


FIGURA 3.2: Mapa en colores para R_{4t}/R_{2t} en función del voltaje V y de la temperatura T , para $K = 0,7$. Los contactos están ubicados en las posiciones $x_1 = -10$, $x_2 = 10$, y las intensidades de los acoplamientos tienen los valores $w_1 = w_2 = 0,1$.

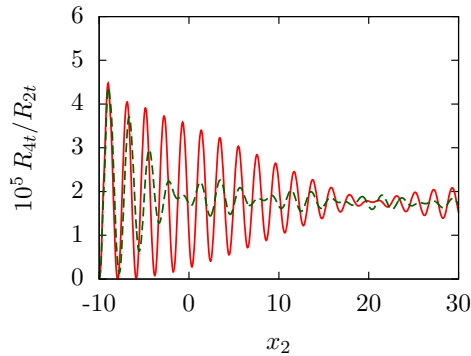


FIGURA 3.3: R_{4t}/R_{2t} en función de la posición x_2 de la segunda sonda, habiendo fijado la primera en $x_1 = -10$, para diferentes valores del voltaje V . La línea roja sólida corresponde a $V = 0,3$, mientras que la línea verde de trazos representa $V = 1$. La intensidad de la interacción e-e es $K = 1$, y las constantes de acoplamiento tienen los valores $w_1 = w_2 = 0,1$. Los resultados son a $T = 0$.

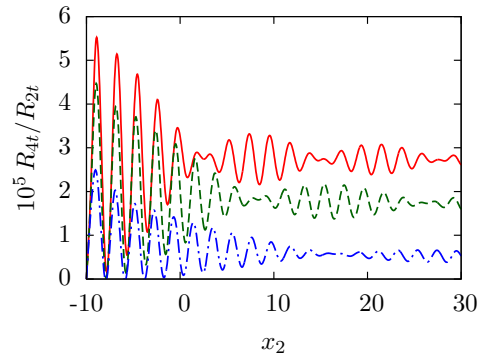


FIGURA 3.4: R_{4t}/R_{2t} en función de la posición de la segunda sonda x_2 , habiendo fijado la primera en $x_1 = -10$, para diferentes valores del parámetro de interacción e-e: $K = 1$. (curva roja, sólida), $K = 0,7$ (curva verde, trazos), $K = 0,5$ (curva azul, puntos-trazos). Hemos fijado $T = 0$, $w_1 = w_2 = 0,1$ y $V = 1$.

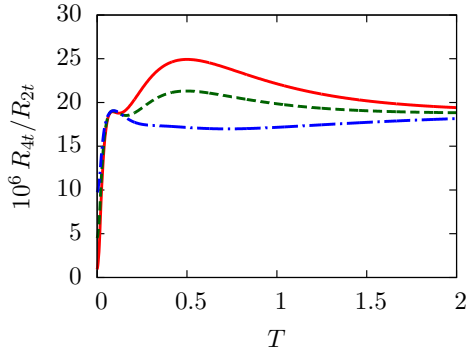


FIGURA 3.5: R_{4t}/R_{2t} en función de la temperatura T , para distintos valores del voltaje aplicado: $V = 0,05$ (curva roja, sólida), $V = 0,10$ (curva verde, trazos), $V = 0,15$ (curva azul, puntos-trazos). La intensidad de la interacción e-e es $K = 0,7$ y los contactos están situados en las posiciones $x_1 = -10$ y $x_2 = 10$, siendo las constantes de acoplamiento $w_1 = w_2 = 0,1$.

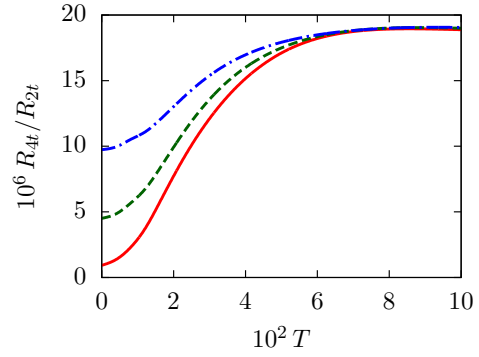


FIGURA 3.6: Idem Figura 3.5, mostrando el régimen de bajas temperaturas.

dada por

$$T_c \sim \hbar \frac{v}{2K |x_1 - x_2|},$$

que permite distinguir entre los regímenes de alta y baja temperatura. Para temperaturas bajas ($T \ll T_c$), hemos verificado numéricamente que la razón de las resistencias se comporta en la forma

$$\frac{R_{4t}}{R_{2t}} \simeq a + bT^{2\gamma+1},$$

donde a y b dependen de V . Para altas temperaturas ($T \gg T_c$), R_{4t}/R_{2t} tiende a un valor constante. A medida que la temperatura aumenta, la coherencia tiende a desaparecer, y por este motivo, no se observa ningún comportamiento oscilatorio en esta región. El juego entre T y V da lugar a la posible ocurrencia de un máximo global de R_{4t}/R_{2t} . El valor de la temperatura que corresponde a este máximo, de encontrarse, depende de K y $|x_1 - x_2|$.

3.7. Resultados con impureza

En esta Sección analizamos el comportamiento de R_{4t}/R_{2t} a temperatura cero, para un cable con una impureza tipo *backscattering* con intensidad de acoplamiento λ_B . En el caso de contactos no invasivos, el voltaje local muestra oscilaciones tipo Friedel $2k_F$

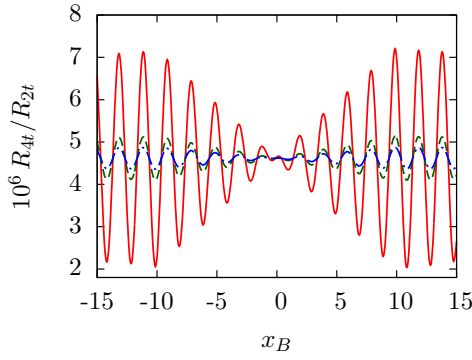


FIGURA 3.7: R_{4t}/R_{2t} en función de la posición de la impureza x_B , para distintos valores de la intensidad del acoplamiento con la impureza: $\lambda_B = 5 \cdot 10^{-5}$ (curva roja, sólida), $\lambda_B = 1 \cdot 10^{-5}$ (curva verde, trazos), $\lambda_B = 5 \cdot 10^{-6}$ (curva azul, puntos-trazos). Las sondas están conectadas en las posiciones $x_1 = -10$. y $x_2 = 10$. El voltaje aplicado es $V = 0,5$, el parámetro de la interacción e-e es $K = 0,7$ y los acoplamientos con los reservorios tienen los valores $w_1 = w_2 = 0,1$.

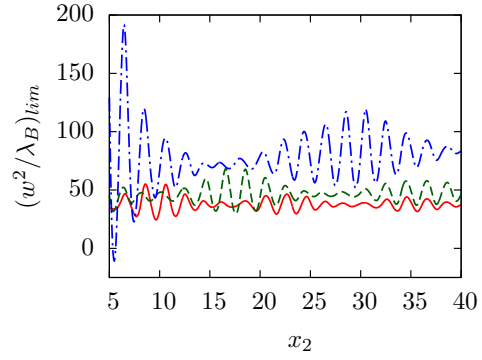


FIGURA 3.8: Razón $(w_j^2/\lambda_B)_{lim}$ para la cual $R_{4t} = 0$ en función de la posición del segundo contacto x_2 , para distintos valores del parámetro de interacción e-e: $K = 1$. (curva roja, sólida), $K = 0,7$ (curva verde, trazos), $K = 0,5$ (curva azul, puntos-trazos). El voltaje aplicado es $V = 0,5$, y la sonda 1 y la impureza se encuentran en las posiciones $x_1 = -10$ y $x_B = -10$.

con amplitud constante para electrones no interactuantes [16, 17, 19], y con amplitud modulada en el caso con interacciones.

En la Figura 3.7 se muestra la razón R_{4t}/R_{2t} para las sondas conectadas en posiciones fijas, en función de la posición de la impureza x_B . Se observan oscilaciones tipo Friedel con período $2k_F$, aumentando la amplitud de las mismas al incrementar la intensidad del acoplamiento λ_B . Como en el caso de contactos no invasivos, dicha amplitud está modulada para electrones interactuantes, alcanzando el voltaje local su máximo valor en la posición de la impureza. A diferencia del caso de sondas no invasivas, las oscilaciones tienen lugar alrededor de un valor constante positivo, el cual está determinado por la intensidad de acoplamiento w_j con los reservorios. Para los parámetros utilizados en el cálculo de la Figura 3.7, R_{4t} es siempre una cantidad positiva.

Aparte de los efectos de interferencia, queda claro que el acoplamiento con los reservorios genera un comportamiento resistivo clásico mediante procesos de dispersión inelástica, mientras que la dispersión elástica con la impureza da lugar a las oscilaciones de Friedel. El primer tipo de procesos tiene lugar con una intensidad $\propto w_j^2/\Lambda'$, donde Λ' es el ancho de banda de los reservorios, mientras que el segundo lo hace con intensidad λ_B . Los dos mecanismos son competitivos a la hora de poder observar una resistencia negativa $R_{4t} < 0$. Con el fin de analizar esta situación, definimos en primer lugar la cantidad

$(w_j^2/\lambda_B)_{lim}$, que corresponde al valor de la razón w_j^2/λ_B tal que $R_{4t}/R_{2t} = 0$. De este modo, para valores de w_j^2/λ_B que satisfacen $w_j^2/\lambda_B > (w_j^2/\lambda_B)_{lim}$, el cociente R_{4t}/R_{2t} es positiva para cualquier valor de x_B . Por otra parte, la condición $w_j^2/\lambda_B < (w_j^2/\lambda_B)_{lim}$ define las razones entre las constantes de acoplamiento para las cuales es posible observar una resistencia de cuatro terminales negativa. En la Figura 3.8, se muestra la gráfica de $(w_j^2/\lambda_B)_{lim}$ en función de la posición del segundo contacto x_2 , para distintos valores del parámetro de interacción e-e K , fijando la posición de la primera sonda y de la impureza en $x_1 = x_B = -10$. (recordemos que R_{4t}/R_{2t} alcanza su valor mínimo cuando $x_{1,2} = x_B$). De este modo, es posible analizar el rol de las interacciones e-e a la hora de poder observar una resistencia de cuatro terminales negativa.

Basados en los resultados obtenidos para contactos no invasivos [1, 16, 17, 19], sería esperable que las interacciones e-e se opongan a tal posibilidad, debido al hecho de que para interacciones más intensas (valores más pequeños de K) la amplitud de las oscilaciones provenientes de la presencia de la impureza disminuye. Sin embargo, en el presente caso este efecto compite con el efecto resistivo clásico introducido por las sondas de voltaje. En otras palabras, como se mencionó en la Sección 3.6, la invasividad débil de los contactos, que en nuestra formulación está contenida en $I_j^{(2)}$ (ec. (3.10)), produce una caída de voltaje que tiene el mismo sentido que el voltaje aplicado V . De acuerdo a los resultados presentados en dicha Sección, la magnitud de tal desplazamiento “hacia arriba” de R_{4t}/R_{2t} depende también de K , y disminuye al incrementar las interacciones e-e (K menores), como se expone en las Figuras 3.1 y 3.3. La combinación de estos dos efectos da origen al resultado mostrado en la Figura 3.8, donde se observa que para sondas de voltaje suficientemente separadas, las interacciones e-e tienden a facilitar la ocurrencia de valores negativos para la resistencia de cuatro terminales.

3.8. Resumen y conclusiones

Hemos analizado el comportamiento de la resistencia de cuatro terminales en un cable cuántico con una impureza en presencia de interacciones electrón-electrón. El cable ha sido modelado como un líquido de Luttinger de longitud infinita donde el voltaje aplicado está representado por los diferentes potenciales químicos de los portadores de carga L y R , y la impureza por un término del tipo *backscattering*. Consideramos las sondas de voltaje como reservorios de electrones no interactuantes. Estos sistemas están acoplados débilmente de forma local al cable y tienen potenciales químicos tales que la corriente a través del contacto se anula en valor medio. La diferencia entre los potenciales químicos determinados por esta condición dan el valor para la caída de voltaje, a partir del cual se puede calcular la razón R_{4t}/R_{2t} entre las resistencias de cuatro y de dos terminales. El

problema fue resuelto utilizando Teoría de Perturbaciones en la intensidad de la impureza y en los acoplamientos de *tunneling* entre las sondas y el cable, dentro del marco del formalismo de las funciones de Green fuera del equilibrio. Hemos despreciado las correcciones de vértice en la autoenergía de interacción e-e asociada a procesos de dispersión inelástica debidos al escape hacia los contactos y a los procesos de dispersión elástica en la impureza. Suponemos que esta aproximación es válida cuando las constantes de acoplamiento λ_B y $w_{1,2}$ son pequeñas.

Hemos analizado la caída de voltaje más allá de la suposición de acoplamiento no invasivo de los reservorios con el cable, esto es, considerando efectos debidos no sólo a la dispersión elástica con la impureza, sino también con las propias sondas de voltaje. Estos procesos debidos al acople invasivo con las sondas inducen una caída de voltaje con una ley de potencias como función del voltaje aplicado para valores pequeños de éste, con un exponente que depende de la intensidad de la interacción e-e. En el límite de electrones no interactuantes, se reduce a una dependencia lineal en función del voltaje aplicado. Este comportamiento tiene características clásicas y cuánticas: la caída de voltaje debido a la invasividad de los contactos es siempre en el mismo sentido que el voltaje aplicado, y aparece un patrón de oscilaciones que indican interferencia cuántica entre las sondas. Estas características son apantalladas por la interacción e-e.

En nuestros cálculos consideramos un cable infinito. Sin embargo, la separación entre los contactos fija una escala natural de longitud en el sistema, la cual determina el valor de *crossover* del voltaje aplicado a partir del cual los procesos de dispersión inelástica pasan a ser relevantes. En el caso de un cable de longitud finita, es de esperar que los resultados obtenidos sigan siendo válidos siempre y cuando la longitud del cable sea mucho más grande que la separación entre las sondas de voltaje. En presencia de una impureza, las oscilaciones de período espacial $2k_F$ provenientes de procesos de dispersión elástica con la impureza detectados por sondas no invasivas[1] se superponen con los procesos inelásticos inducidos por los contactos.

Estos resultados son importantes en relación a mediciones experimentales de la resistencia de cuatro terminales en sistemas reales. Esto es, para sondas invasivas, los efectos elásticos del tipo *backscattering* producidos por impurezas pueden conducir a una caída de voltaje de sentido opuesto al voltaje aplicado, dando lugar a una resistencia de cuatro terminales negativa. Sin embargo, la amplitud de estos procesos debe ser lo suficientemente grande como para superar el efecto resistivo clásico introducido por la invasividad de las sondas.

Los efectos de la interacción e-e juegan un papel fundamental en las magnitudes calculadas. Para valores más grandes de la interacción e-e, la amplitud de las oscilaciones provenientes de la impureza disminuye, pero también disminuyen los efectos invasivos de

las sondas de voltaje. Para separaciones de las puntas lo suficientemente grandes, la posibilidad de medir resistencias de cuatro terminales negativas aumenta para interacciones e-e más intensas.

Capítulo 4

Transporte de calor en un borde Hall

4.1. Introducción

Una de las propiedades más importantes del efecto Hall cuántico es la existencia de estados de borde quirales topológicamente protegidos [48, 49, 85]. La estabilidad de estos estados es consecuencia de la naturaleza quiral y topológica del efecto Hall cuántico [43]. Estos estados son realizaciones de un líquido de Luttinger quiral que puede investigarse mediante experimentos de transporte [42, 44], como se mencionó en el Capítulo 1.

La estructura de los estados de borde revela las propiedades fundamentales de los estados del efecto Hall. Para factor de llenado $\nu = 1$, consiste de un solo estado situado en el borde de la muestra, donde los electrones se propagan de manera quiral. Los estados de efecto Hall fraccionario generalmente tienen una estructura más compleja de estados de borde, con uno o más de estos estados. En general, cada estado tiene una quiralidad determinada (que puede ser diferente de la de otros estados de borde) y sus excitaciones tienen números cuánticos no triviales tales como la carga o el espín. Algunos estados de borde no son excitaciones de carga (o de espín) y son neutros. Por lo tanto, estos estados de Efecto Hall Cuántico Fraccionario contribuyen de manera no trivial al transporte de carga (y posiblemente de espín) en estos sistemas. Además, los estados transportan energía y por ende contribuyen al transporte de calor. Estas características han sido recientemente investigadas en sistemas en efecto Hall cuántico entero y fraccionario por medio de diferentes técnicas termométricas [50, 86]. En este Capítulo nos centramos en las propiedades del transporte de energía (calor) de los estados de borde de efecto Hall cuántico fraccionario más simples, los estados de Laughlin.

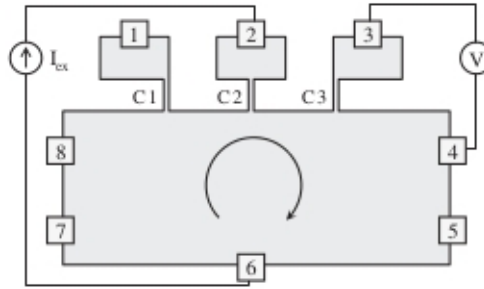


FIGURA 4.1: Diagrama esquemático del dispositivo estudiado en el experimento de Granger et al. [50]. Los cuadrados numerados representan contactos Ohmicos; $C1$, $C2$ y $C3$ representan constricciones en el 2DEG.

En el experimento realizado por Granger et al. [50] se presenta evidencia experimental de la propagación quirral del calor en un estado de borde en un gas de electrones 2D en el llenado $\nu = 1$, realizado en una heteroestructura de GaAs/AlGaAs. La configuración experimental utilizada en dicho trabajo se esquematiza en la Figura 4.1. Se colocaron contactos óhmicos a lo largo de tres bordes de un 2DEG grande rectangular, representados por los cuadrados numerados más pequeños. En el borde restante (borde superior de la Figura 4.1), tres constricciones angostas ($C1$, $C2$ y $C3$) separan la región 2D principal de otras regiones 2D más pequeñas pero macroscópicas. Una excitación alterna de baja frecuencia f se aplica entre los contactos 2 y 6. De este modo, $C2$ representa la fuente de calor. Las diferencias de temperatura en el 2DEG se detectaron midiendo la diferencia de potencial V entre los contactos óhmicos 3 y 4. Las diferencias de temperatura se corresponden con la componente alterna de frecuencia V_{2f} , mientras que la componente de frecuencia V_f está asociada a los efectos resistivos. En la Figura 4.2 se muestran los resultados obtenidos de V_f y V_{2f} en función del campo magnético, colocando el detector en $C3$ (Subfiguras (a) y (c)) y en $C1$ (Subfiguras (b) y (d)), para distintas quiralidades. La región central de las gráficas corresponde al *plateau* $\nu = 1$. Vemos que en todos los casos, en dicha región la componente V_f es nula, lo cual es consistente con la conductividad perfecta de los estados de borde. Las curvas de V_{2f} revelan claramente la naturaleza quirral de la propagación del calor. En las gráficas (a) y (b), se observa que la componente V_{2f} (asociada a la temperatura) detectada en $C3$ es mayor que la observada en $C1$. Esto es, los electrones que llegan a $C1$ han termalizado en los contactos óhmicos, mientras que los que arriban a $C3$ no han disipado la energía absorbida en la fuente de calor. Al invertir la quiralidad mediante la inversión del campo magnético (gráficas (c) y (d)), se observa el efecto contrario: el voltaje V_{2f} detectado en $C1$ es mayor que en $C3$.

Estas características experimentales pueden ser capturadas por un modelo simple unidimensional de fermiones quirales no interactuantes conectados a reservorios por medio de contactos tipo *tunneling* [87]. Dentro del marco del modelo, puede argumentarse que si en lugar de calentar con una corriente alterna se aplica un gradiente de temperaturas

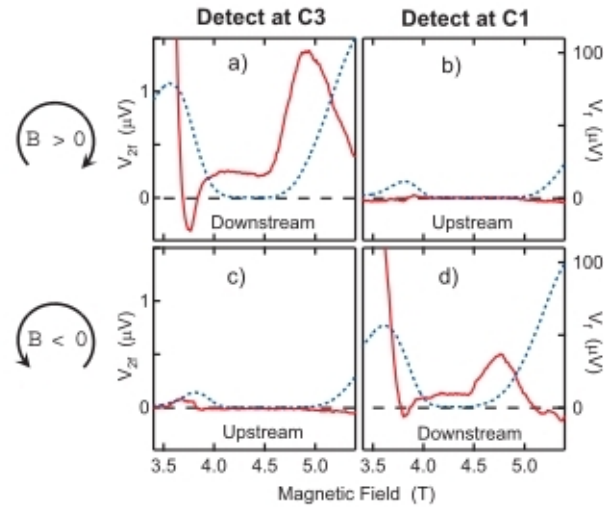


FIGURA 4.2: Resultados del experimento realizado por Granger et al. [50]. Se observa la quiralidad del transporte de calor a $\nu = 1$ y $T = 0,1K$. (a) y (d): V_{2f} (línea sólida) y V_f (línea de puntos), observados hacia abajo de la constricción de la fuente de calor, C2. (b) y (d) V_{2f} y V_f observados hacia arriba de la fuente. A la izquierda se indican la quiralidad de los estados de borde y las direcciones del campo magnético.

entre los reservorios fuente y drenaje, se obtendría una propagación quiral del calor similar. Gracias a los nuevos avances en la tecnología de la manipulación de los estados de borde, es posible utilizar también contactos de tipo capacitivo [51]. Mientras que para el caso del acople tipo *tunneling* la corriente de calor es acompañada por una corriente de partículas, para acoplamientos capacitivos las corrientes de energía están aisladas del flujo de partículas. Esta característica es interesante dado que abre la posibilidad del estudio de la propagación de carga y energía por separado.

El transporte de carga por acoplamiento *tunneling* a los estados de borde ha sido ampliamente estudiado teóricamente [48, 85, 88–91], mientras que el transporte de calor ha sido considerado en un número menor de trabajos. Además del trabajo de Kane y Fisher[92] podemos mencionar la Ref. [87], en la cual se considera un borde con llenado $\nu = 1$ con un voltaje externo alternado que sigue el trabajo experimental de Granger et al. [50]. Otra referencia importante es la Viola et al. [93], en la cual se analizan los efectos termoeléctricos entre los estados de borde a través de un punto cuántico en contacto con una barra Hall con llenados $\nu = 5/2$ y $\nu = 2/3$.

En el presente Capítulo analizamos el transporte de calor inducido por un gradiente de temperatura aplicado a reservorios que están *acoplados capacitivamente* a un estado de borde Hall con llenado ν . Consideramos los casos del Efecto Hall Cuántico Entero, con $\nu = 1$ y los estados generales de Laughlin fraccionarios con factor de llenado $\nu = 1/m$ con m impar. Este problema se puede resolver de forma exacta. Para el caso particular de $\nu = 1$, comparamos con el comportamiento del transporte de calor inducido por un

gradiente de temperatura en reservorios conectados al borde por contactos puntuales del tipo *tunneling*, dado que este caso es también exactamente soluble. En todos los casos nos concentraremos en la conductancia térmica del borde y en la temperatura local a lo largo del mismo. Esta última se define por medio de un termómetro, el cual es realizado por un tercer reservorio acoplado débilmente al borde. La temperatura de este último reservorio es tal que el flujo de calor a través del contacto se anula. Comparando los casos de acoplamiento capacitivo y *tunneling*, veremos que el comportamiento es cualitativamente diferente para la conductancia de calor, mientras que es similar para la temperatura local.

4.2. Modelos

El sistema considerado se esquematiza en la Figura 4.3. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = H_{borde} + \sum_{\alpha=1}^M [H_{\alpha} + H_{c,\alpha}], \quad (4.1)$$

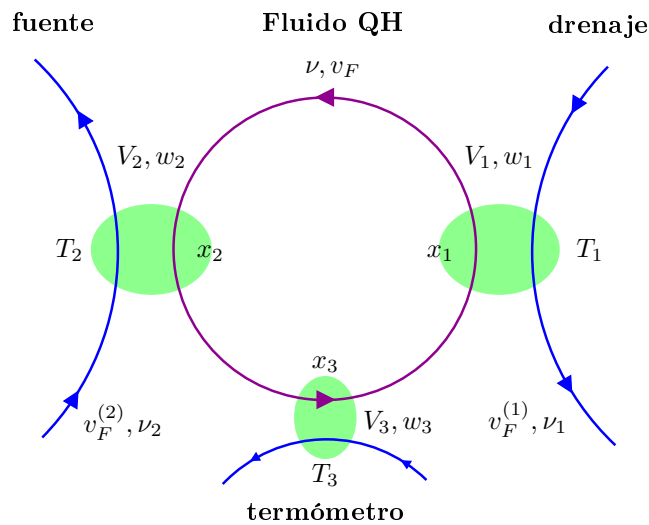


FIGURA 4.3: Esquema del dispositivo estudiado para un fluido Hall fraccionario tipo Laughlin en contacto con una fuente, drenaje y un termómetro. El estado de borde Hall fraccionario está representado por un anillo de longitud L . Dos reservorios, drenaje y fuente, con temperaturas $T_1 < T_2$, están conectados al anillo en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente, mediante contactos que permiten el tuneo de partículas con intensidades de acoplamiento w_1, w_2 , o bien mediante acoplamientos capacitivos con intensidades V_1 y V_2 donde solo puede fluir energía a través de los contactos. Un tercer reservorio está débilmente acoplado en la posición x_3 para sensar la temperatura local T_3 . Para contactos tipo *tunneling*, el único caso soluble exactamente corresponde al llenado $\nu = 1$. Para acoplamientos capacitivos, cualquier llenado $\nu = 1/m$ puede ser tratado exactamente.

donde H_{borde} es el Hamiltoniano del borde, H_α es el Hamiltoniano del reservorio α , y $H_{c,\alpha}$ representa la interacción entre el borde y los reservorios. Los estados de borde de un fluido Hall cuántico son unidimensionales, por lo cual los representamos por un anillo de longitud L , a lo largo del cual circulan fermiones quirales con velocidad v_F . El borde del fluido está acoplado a M reservorios (contactos), los cuales son modelados por un conjunto de estados de borde. Los mismos pueden representar un líquido nominal de Fermi (estados de borde con $\nu_{1,2} = 1$)¹ de longitud infinita u otros estados de borde ($\nu_{1,2} = 1/m$ con m impar).

Nos centraremos, en particular, en la configuración esquematizada en la Figura 4.3, con $M = 3$ reservorios. El drenaje ($\alpha = 1$) y la fuente ($\alpha = 2$) se encuentran a temperaturas T_1 y T_2 respectivamente, con $T_2 > T_1$. El tercer reservorio corresponde al termómetro, el cual mide la temperatura local T_3 [13]. Esta última está definida a partir de la condición de equilibrio térmico local, esto es, que el flujo de calor entre el termómetro y el borde es nulo. Trabajaremos en unidades de $\hbar = k_B = e = 1$, restaurando las mismas a la hora de discutir los resultados.

4.2.1. Acoplamiento *tunneling*

Para este tipo de acople, consideramos un estado Hall cuántico con llenado entero $\nu = 1$, que es el único caso exactamente soluble para la presente geometría bajo los efectos de un gradiente térmico. El Hamiltoniano del borde viene dado por

$$\begin{aligned} H_{borde} &= -iv_F \int_0^L dx : \Psi^\dagger(x) \partial_x \Psi(x) : \\ &= \sum_p v_F p \Psi_p^\dagger \Psi_p, \end{aligned}$$

donde $p = 2n\pi/L$, con n entero, y Ψ es el campo fermiónico de los electrones del borde. Supondremos que existe un *cutoff* ultravioleta $\Lambda = D/v$, donde D es el ancho de banda de los estados de borde. También suponemos que el ancho de banda D es pequeño comparado con la separación entre los niveles de Landau.

Modelamos los reservorios por sistemas de fermiones quirales en una dimensión de longitud L_α , que supondremos que es termodinámicamente grande, $L_\alpha \rightarrow \infty$. El Hamiltoniano correspondiente H_α para cada uno de estos sistemas es

$$H_\alpha = -iv_F^\alpha \int_0^{L_\alpha} dr_\alpha \Psi^\dagger(r_\alpha) \partial_{r_\alpha} \Psi(r_\alpha).$$

¹Puede probarse que el contacto puntual entre un borde y un líquido de Fermi en tres dimensiones puede mapearse a un problema con un contacto a un líquido quiral en una dimensión [91].

Tanto el reservorio de drenaje como la fuente y el termómetro se encuentran al mismo potencial químico μ .

Los contactos vienen descritos por los Hamiltonianos

$$H_{c,\alpha} = w_\alpha \sum_{\sigma} \left[\Psi_{\sigma}^{\dagger}(x_{\alpha}) \Psi_{\sigma}(r_{\alpha}^0) + \text{h.c.} \right],$$

donde x_{α} y r_{α}^0 son las posiciones en las cuales se establece el contacto entre el anillo y el reservorio, respectivamente. Suponemos que el parámetro de tuneo w_3 entre el anillo y el termómetro es débil, de modo que no introduce *dephasing* en la propagación de la partícula a lo largo del anillo. Los campos fermiónicos satisfacen las relaciones de anticonmutación usuales

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi(x), \Psi^{\dagger}(x') \right\} &= \delta(x - x') \\ \left\{ \Psi_{\alpha}(r_{\alpha}), \Psi_{\alpha}^{\dagger}(r'_{\alpha}) \right\} &= \delta(r_{\alpha} - r'_{\alpha}). \end{aligned}$$

4.2.2. Acoplamiento capacitivo

Suponiendo que el acoplamiento es local, el término de contacto en (4.1) para este caso viene dado por

$$H_{c,\alpha} = V_{\alpha} \Psi^{\dagger}(x_{\alpha}) \Psi(x_{\alpha}) \Psi^{\dagger}(r_{\alpha}^0) \Psi(r_{\alpha}^0),$$

donde r_{α}^0 y x_{α} son las coordenadas del reservorio y del borde, respectivamente. Este tipo de interacciones cuárticas en los operadores pueden tratarse introduciendo una representación bosónica de los estados de borde. En este lenguaje, la densidad fermiónica resulta proporcional a la derivada espacial de un campo quiral bosónico libre $\phi(x)$, el cual representa las fluctuaciones cuánticas que se propagan a lo largo del borde del fluido Hall cuántico. Dado que el bulto del fluido Hall cuántico presenta un *gap* (es incompresible), el borde del fluido se puede considerar como un anillo de longitud finita L de bosones quirales no interactuantes acoplado capacitivamente a los reservorios a distintas temperaturas. Los reservorios son entonces descritos por bosones quirales en una dimensión de longitud infinita, con el radio de compactificación correspondiente a los fermiones libres.

El Hamiltoniano total tiene la estructura de la ecuación (4.1). En el lenguaje bosónico el Hamiltoniano para el borde viene dado por

$$H_{borde} = \frac{v_F}{4\pi\nu} \int_0^L dx : (\partial_x \phi(x))^2 : + \frac{\pi}{L} \hat{N}(\hat{N} + 1),$$

donde \hat{N} es el operador número correspondiente al sistema electrónico original [72], y ν es el factor de llenado. El presente caso se puede resolver para un estado Hall cuántico con fracción de llenado ν , el cual puede ser tanto entero como fraccionario del tipo $\nu = 1/m$, con m impar.

Los Hamiltonianos de los reservorios vienen dados por

$$H_\alpha = \frac{v_F^\alpha}{4\pi\nu_\alpha} \int_0^{L_\alpha} dr_\alpha : (\partial_{r_\alpha} \phi(r_\alpha))^2 : .$$

Como en el caso *tunneling*, consideramos que los reservorios son infinitamente largos: $L_\alpha \rightarrow \infty$. El contacto entre el sistema central y los dos reservorios se escribe en el lenguaje bosónico en la forma

$$H_{c,\alpha} = V_\alpha \partial_{r_\alpha} \phi(r_\alpha)|_{r_\alpha=r_\alpha^0} \partial_x \phi(x)|_{x=x_\alpha},$$

donde x_α y r_α^0 son los puntos en los cuales hace contacto el anillo y el reservorio, respectivamente.

Los campos bosónicos quirales $\phi(x)$ y $\phi(r_\alpha)$ satisfacen las relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\begin{aligned} [\phi(r_\alpha), \phi(x)] &= 0 \\ [\phi(x), \phi(x')] &= -i\pi\nu \operatorname{sgn}(x - x') \\ [\phi(r_\alpha), \phi(r'_\alpha)] &= -i\pi\nu_\alpha \operatorname{sgn}(r_\alpha - r'_\alpha). \end{aligned}$$

4.3. Balance de energía y corriente de calor

La idea es evaluar la corriente de calor que fluye a través de los contactos entre el estado de borde y un reservorio dado α . Para ello analizamos la dependencia temporal de la energía del mismo. En el caso del acople *tunneling*, consideramos

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{E}_\alpha - \mu \dot{N}_\alpha = -i \langle [H_\alpha - \mu N_\alpha, H_{c,\alpha}] \rangle = J_\alpha^{Q,t},$$

donde E_α y N_α son la energía y la carga del reservorio α , respectivamente. Para relacionar el flujo de energía con el flujo de calor hemos sustraído la componente convectiva $\mu \dot{N}_\alpha$. El cálculo del conmutador da como resultado

$$J_\alpha^{Q,t} = -2 \operatorname{Re} \left\{ \int \frac{dp_\alpha}{2\pi} w_{p_\alpha} (v_F^\alpha p_\alpha - \mu) \tilde{G}^<(x_\alpha, p_\alpha; t, t) \right\} \quad (4.5)$$

donde $w_{p_\alpha} = w_\alpha e^{-ip_\alpha r_\alpha^0} / \sqrt{L_\alpha}$, y la función de Green menor mixta viene dada por

$$\tilde{G}^<(x_\alpha, p_\alpha; t, t') = i \langle c_{p_\alpha}^\dagger(t') \Psi(x_\alpha, t) \rangle.$$

En el caso capacitivo no hay flujo de partículas, de modo que el flujo de energía equivale al flujo de calor:

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{E}_\alpha = -i \langle [H_\alpha, H_{c,\alpha}] \rangle = J_\alpha^{Q,c}.$$

El cálculo da por resultado

$$J_\alpha^{Q,c} = iw_F^\alpha V_\alpha \partial_x \partial_{r_\alpha}^2 D^<(x, r_\alpha; t, t')|_{x=x_\alpha, r=r_\alpha^0}, \quad (4.6)$$

con la función menor definida como

$$D^<(x, r_\alpha; t, t') = i \langle \phi(r_\alpha)(t') \phi(x, t) \rangle. \quad (4.7)$$

Notemos que $[\hat{N}, \partial_x \phi(x)] = 0$, por lo cual el término de Haldane no contribuye a la corriente de calor.

4.4. Metodología: funciones de Green de no equilibrio

4.4.1. Acoplamiento *tunneling*

Para poder calcular la corriente, debemos evaluar la función de Green menor dada por la ecuación (4.7). Para ello, definimos la correspondiente función de Green retardada

$$G^R(x, x'; t, t') \doteq -i \Theta(t - t') \langle \{ \Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t') \} \rangle,$$

donde x, x' son las coordenadas en el anillo. La función de Green menor que aparece en la expresión de la corriente (4.5) se calcula mediante las ecuaciones de Dyson; el cálculo detallado se expone en la Subsección C.1.1. El resultado final es

$$J_\alpha^{Q,t} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\omega - \mu) \left[f_\alpha(\omega) 2 \text{Im}[G^R(x_\alpha, x_\alpha; \omega)] + \sum_{\beta=1}^M \Gamma_\alpha^t(\omega) |G^R(x_\alpha, x_\beta; \omega)|^2 \Gamma_\beta^t(\omega) f_\beta(\omega) \right]. \quad (4.8)$$

Aquí $f_\alpha(\omega)$ es la función de Fermi-Dirac del reservorio α , $\Gamma_\alpha^t(\omega)$ es la función de hibridación del reservorio α

$$\Gamma_\alpha^t(\omega) = \frac{|w_\alpha|^2}{v_F^\alpha} \Theta(\Lambda - |\omega|),$$

y $G^R(x_\alpha, x_\beta; \omega)$ es la función de Green retardada completa del anillo. Puede probarse que las funciones de Green retardadas y avanzadas G^R y G^A satisfacen la identidad (ver Subsección C.1.1)

$$G^R(x, x'; \omega) - G^A(x', x; \omega) = -i \sum_{\beta=1}^M G^R(x, x_\beta; \omega) \Gamma_\beta^t(\omega) G^A(x_\beta, x'; \omega).$$

Reemplazando en (4.8) obtenemos la expresión alternativa

$$J_\alpha^{Q,t} = \sum_{\beta=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (\omega - \mu) T_{\alpha,\beta}^t(\omega) [f_\alpha(\omega) - f_\beta(\omega)], \quad (4.9)$$

que tiene la forma familiar de la fórmula de Landauer-Büttiker. La corriente de calor se expresa en términos de la diferencia de las funciones de Fermi de los reservorios multiplicada por la cantidad de calor transferida por el tuneo de partículas $\omega - \mu$, y por una función de transmisión que cuantifica la transparencia del sistema en contacto con los reservorios. Esta última función se escribe

$$T_{\alpha,\beta}^t(\omega) = \Gamma_\alpha^t(\omega) |G^R(x_\alpha, x_\beta; \omega)|^2 \Gamma_\beta^t(\omega),$$

que depende de la función de Green del borde acoplado y de las funciones de hibridización de los reservorios acoplados.

4.4.2. Acoplamiento capacitivo

En este caso, para evaluar la corriente de calor de la ecuación (4.6), es necesario calcular la función de Green menor dada por la ecuación (4.7). Definimos entonces la función de Green retardada

$$D^R(x, x'; t, t') = -i\Theta(t - t') \langle [\phi(x, t), \phi(x', t')] \rangle,$$

En el Apéndice C.1.2 se detalla el cálculo de las ecuaciones de Dyson correspondientes. Sustituyendo la ec. (C.12) en la ec. (4.6), obtenemos la ecuación explícita

$$J_\alpha^{Q,c} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \left[2 \text{Im}[D^R(x_\alpha, x_\alpha; \omega)] n_\alpha(\omega) + \sum_{\beta=1}^M \Gamma_\alpha^c(\omega) |D^R(x_\alpha, x_\beta; \omega)|^2 \Gamma_\beta^c(\omega) n_\beta(\omega) \right], \quad (4.10)$$

donde la función de Green retardada $\mathcal{D}^R(x, x'; \omega)$ viene dada por

$$\mathcal{D}^R(x, x'; \omega) = \frac{1}{2\pi} \partial_x \partial_{x'} D^R(x, x'; \omega),$$

y $\Gamma_\alpha^c(\omega)$ tiene la expresión

$$\Gamma_\alpha^c(\omega) = (2\pi)^2 \frac{V_\alpha^2}{(v_F^\alpha)^2} \nu_\alpha \omega \Theta(\Lambda - |\omega|).$$

De manera análoga al acople *tunneling*, las funciones retardadas y avanzadas satisfacen la identidad

$$\mathcal{D}^R(x, x'; \omega) - \mathcal{D}^A(x', x; \omega) = -i \sum_{\alpha=1}^M \mathcal{D}^R(x, x_\alpha; \omega) \Gamma_\alpha^c(\omega) \mathcal{D}^A(x_\alpha, x'; \omega).$$

Reemplazando en (4.10), la corriente de calor puede escribirse en la forma alternativa

$$J_\alpha^{Q,c} = \sum_{\beta=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega T_{\alpha,\beta}^c(\omega) [n_\alpha(\omega) - n_\beta(\omega)], \quad (4.11)$$

donde hemos definido la función de transmisión

$$T_{\alpha,\beta}^c(\omega) = \Gamma_\alpha^c(\omega) |\mathcal{D}^R(x_\alpha, x_\beta; \omega)|^2 \Gamma_\beta^c(\omega) / 2.$$

Esta función tiene propiedades análogas a su contraparte *tunneling*, $T_{\alpha,\beta}^t(\omega)$. En particular, satisface la simetría

$$T_{\alpha,\beta}^c(\omega) = T_{\beta,\alpha}^c(\omega), \quad \forall \alpha, \beta,$$

lo cual conduce a la continuidad de la corriente de calor

$$\sum_{\alpha} J_\alpha^{Q,c} = 0.$$

La expresión dada anteriormente para la corriente de calor tiene la misma estructura que la correspondiente a una para contactos tipo *tunneling* dada por la ec. (4.9). La diferencia de temperatura impuesta, en este caso entra en las funciones de distribución de Bose-Einstein en lugar de en las de Fermi-Dirac. En este caso, no hay flujo de partículas, por lo que la energía transferida ω coincide con el calor transferido.

4.5. Coeficientes de transmisión

Las cantidades calculadas (conductancia térmica y temperatura local) dependen de manera crucial de la estructura de los coeficientes de transmisión. Éstos pueden calcularse de manera exacta para ambos tipos de acoplamiento, en el límite del *cutoff* $\Lambda \rightarrow \infty$. En esta Sección estudiamos estos coeficientes para el caso de dos reservorios, esto es, sin considerar el termómetro. Aquí y en lo que sigue, recuperamos las unidades en términos de \hbar , k_B .

4.5.1. Acoplamiento *tunneling*

Para el caso *tunneling*, el coeficiente de transmisión viene dado por

$$T_{12}^t(\omega) = \frac{4\tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)^2} \frac{1}{\sin^2(\omega L/2v_F) + (\epsilon L/2)^2 \cos^2(\omega L/2v_F)},$$

donde hemos definido

$$\frac{\epsilon L}{2} \doteq \frac{\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)},$$

y

$$\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{2\sqrt{\hbar^2 v_F v_F^{(1)}}}$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{2\sqrt{\hbar^2 v_F v_F^{(2)}}}.$$

En la Figura 4.4 se muestran distintas gráficas del coeficiente de transmisión para acoplamiento *tunneling*, para distintos valores de las constantes de acoplamiento \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 con los reservorios.

La estructura del coeficiente de transmisión T_{12}^t depende de la intensidad de los acoplamientos con los reservorios. Para acoplamientos suficientemente pequeños ($w_{1,2}^2 \ll \hbar^2 v_F v_F^{(1,2)}$) o suficientemente grandes ($w_{1,2}^2 \gg \hbar^2 v_F v_F^{(1,2)}$) tiene una estructura de picos centrados en las posiciones $\omega = 2n\pi v_F/L$, que corresponden a los niveles de energía del anillo desacoplado. El ancho de los mismos viene dado por

$$\gamma_t \sim \frac{v_F}{L} \sqrt{\frac{\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)}}, \quad (4.12)$$

mientras que la altura es

$$T_{12}^{t,max} = \frac{4\tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)^2}.$$

Para acoplamientos iguales $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2$, la altura de los picos es igual a 1.

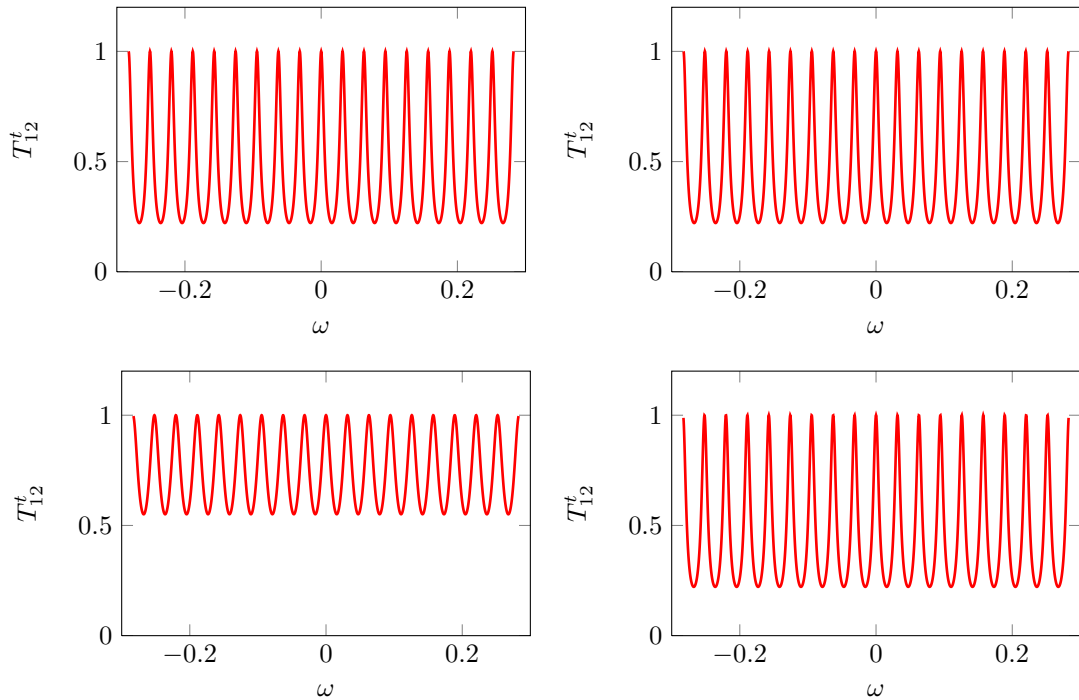


FIGURA 4.4: Función de transmisión T_{12}^t en función de ω para acoplamiento *tunneling* entre el borde y dos reservorios, para distintos valores de los acoplamientos: $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0,5$ (izquierda, arriba), $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1,0$ (derecha, arriba), $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1,5$ (izquierda, abajo), $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 2,0$ (derecha, abajo). Los parámetros restantes comunes a ambos casos, son $L = 200$, $x_1 = 0.$, $x_2 = 100$, $v_F = v_F^{(1),(2)} = 1.$.

Notemos además que para $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1$, T_{12}^t tiende a la unidad, y la transmisión es perfecta.

4.5.2. Acoplamiento capacitivo

El coeficiente de transmisión para el caso capacitivo también puede calcularse de manera exacta. La expresión resultante es

$$T_{12}^c(\omega) = \frac{(2\pi)^4 \tilde{V}_1^2 \tilde{V}_2^2 \hbar^4 \omega^4}{4 \left[\left(1 + \pi^4 \tilde{V}_1^2 \tilde{V}_2^2 \hbar^4 \omega^4 \right)^2 \sin^2(\omega L / 2v_F) + \pi^4 (\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2)^2 \hbar^4 \omega^4 \cos^2(\omega L / 2v_F) \right]}, \quad (4.13)$$

donde hemos definido $\tilde{V}_\alpha = \sqrt{\nu \nu_\alpha} V_\alpha / (\hbar v_F) (\hbar v_F^\alpha)$.

El coeficiente de transmisión para contactos capacitivos tiene una estructura distinta que para el caso *tunneling*. Podemos mencionar que no hay transmisión para $\omega = 0$, lo cual conduce a que la conductancia térmica esté suprimida a bajas temperaturas. Por otra parte, a diferencia del caso anterior, el ancho de los picos del coeficiente de transmisión

depende de ω . Para valores de ω que satisfacen $\hbar\omega \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1\tilde{V}_2}$, el ancho de los picos viene dado por

$$\gamma_c(\omega) \sim \frac{v_F}{L} \left(\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2 \right) (\hbar\omega)^2,$$

mientras que para $\hbar\omega \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1\tilde{V}_2}$ el ancho resulta

$$\gamma_c(\omega) \sim \frac{v_F}{L} \frac{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}{\tilde{V}_1^2 \tilde{V}_2^2 \hbar^2 \omega^2}$$

A diferencia del caso anterior, no existen valores de \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 para los cuales la transmisión sea perfecta.

En la Figura 4.5 se muestran distintas gráficas del coeficiente de transmisión para acoplamiento capacitivo, para distintos valores de las constantes de acoplamiento \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 con los reservorios.

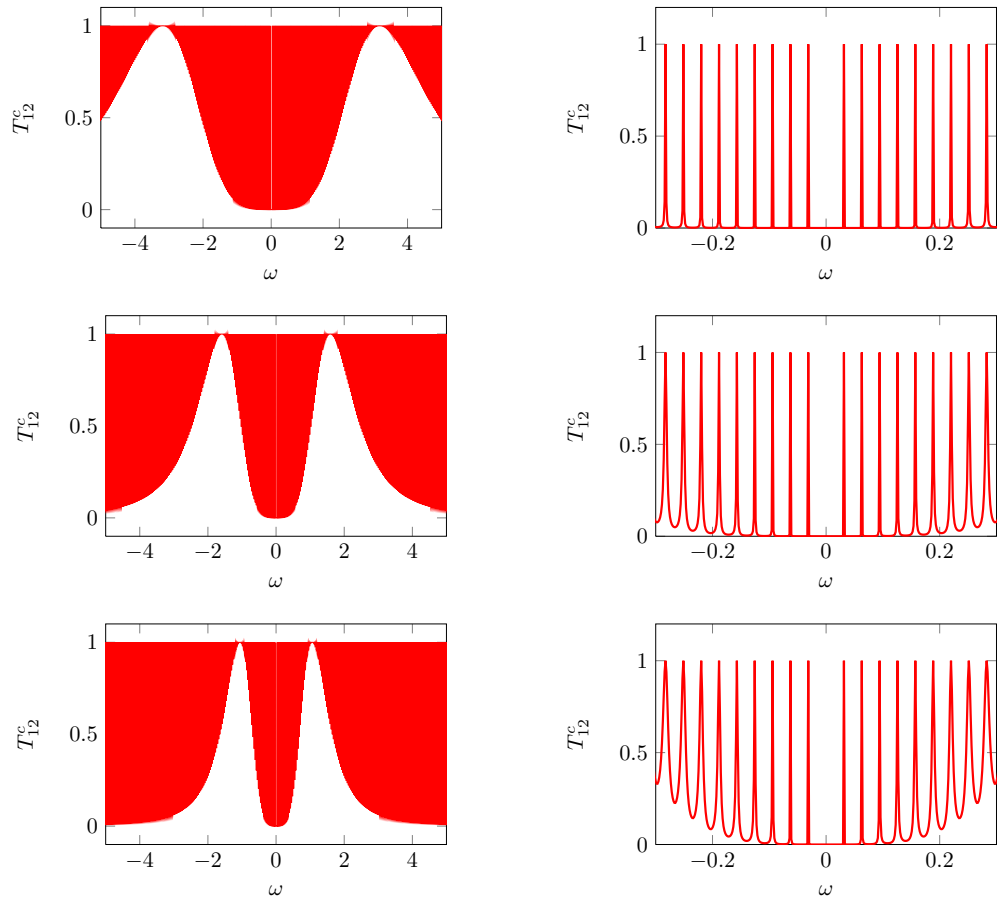


FIGURA 4.5: Función de transmisión T_{12}^c en función de ω para acoplamiento capacitivo entre el borde y dos reservorios, para distintos valores de los acoplamientos: $V_1 = V_2 = 0,2$ (izquierda, arriba), $V_1 = V_2 = 0,4$ (derecha, arriba), $V_1 = V_2 = 0,6$ (izquierda, abajo), $V_1 = V_2 = 0,8$ (derecha, abajo). Los parámetros restantes comunes a ambos casos, son $v_F = 1$, $L = 200$, $x_1 = 0.$, $x_2 = 100$. Todas las energías están expresadas en unidades naturales ($\hbar = 1$).

4.6. Conductancia térmica

Consideramos los reservorios fuente y drenaje a temperaturas ligeramente diferentes $T_1 = T$ y $T_2 = T + \Delta T$. La conductancia térmica del borde acoplado se define

$$G_{th} \doteq \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{J^Q(T + \Delta T) - J^Q(T)}{\Delta T},$$

donde J^Q es la corriente de calor que fluye a través de los contactos entre el borde y los reservorios. Notemos que es la misma para ambos contactos gracias a la continuidad del flujo de corriente y de energía.

Los cálculos detallados se exponen en el Apéndice C, Sección C.2.

4.6.1. Acoplamiento *tunneling*

Para este tipo de acoplamiento, podemos diferenciar tres regímenes distintos:

temperaturas ultra-bajas energía térmica menor que el ancho del pico ($k_B T \ll \hbar \gamma_t$),
Figura 4.6b

temperaturas intermedias energía térmica mayor que el ancho del pico y menor que la separación entre niveles ($\hbar \gamma_t \ll k_B T \ll \Delta$), Figura 4.6a

temperaturas altas energía térmica mayor que la separación entre niveles ($k_B T \gg \Delta$), Figura 4.6a

Para los dos primeros casos, la conductancia depende no sólo de la temperatura sino también de la longitud del anillo y del potencial químico μ de los reservorios. Es esperable que la conductancia sea mayor cuando el potencial químico μ coincida con la posición de los picos del coeficiente de transmisión. En este límite, la conductancia sigue una ley lineal con la temperatura

$$G_{th}^t = \frac{4\tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2^2)^2} \frac{k_B^2 \pi^2 T / 3h}{\sin^2(\mu L / 2v_F) + (\epsilon L / 2)^2 \cos^2(\mu L / 2v_F)}.$$

Este resultado se muestra en la Figura 4.6b, para distintos valores del potencial químico de los reservorios.

En el régimen de temperaturas intermedias ($\gamma_t \ll k_B T \ll \hbar v_F / L$), la contribución al transporte viene dada por los picos cuya energía es cercana al potencial químico. La

conductancia térmica en este caso puede aproximarse por la expresión

$$G_{th}^t = \frac{1}{L} \frac{4\tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)^2} \sum_{n=n_{-1}, n_0, n_1} \frac{\beta^2(\omega_n - \mu)^2 e^{\beta(\omega_n - \mu)}}{[1 + e^{\beta(\omega_n - \mu)}]^2},$$

donde $\beta = 1/k_B T$, ω_n viene dado por

$$\omega_n = \frac{2n\pi\hbar v_F}{L},$$

y la suma se realiza sobre los valores

$$\begin{aligned} n_0 &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] \\ n_1 &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] + 1 \\ n_{-1} &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] - 1, \end{aligned}$$

donde los corchetes dobles denotan la parte entera del argumento. Este régimen se muestra en la Figura 4.6a, para distintos valores del potencial químico μ .

En el régimen de altas temperaturas $k_B T \gg \Delta$, la conductancia crece linealmente con T y es independiente de μ y de la longitud L :

$$G_{th}^t = f(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \frac{k_B^2 \pi^2}{3h} T, \quad (4.14)$$

donde la función $f(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ tiene la forma

$$f(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = \frac{4\tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2}{\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2} \frac{1}{(1 + \tilde{w}_1^2\tilde{w}_2^2)}. \quad (4.15)$$

La deducción analítica de este resultado se presenta en el Apéndice C, Subsección C.2.1. C.2.1.

Notemos que en todos los casos, la conductancia térmica G_{th}^t tiene un comportamiento no monótono como función de las intensidades de los acoplamientos, como se muestra en la Figura 4.8 para el régimen de altas temperaturas. Un comportamiento similar ha sido encontrado previamente en el trabajo de Karevski y Platini [94] para la corriente de magnetización en una cadena XX de espín-1/2 acoplado a reservorios cuánticos, y también en el estado estacionario de la corriente de calor en una cadena XY de espín 1/2 abierta [95]. También hemos verificado numéricamente que un comportamiento similar tiene lugar para la conductancia térmica en una cadena *tight-binding* conectada a reservorios electrónicos unidimensionales mediante un acoplamiento tipo *tunneling*. El hecho de que la conductancia a una dada temperatura T aumente como función de la intensidad de los acoplamientos con los reservorios hasta un valor máximo y luego

decrezca para intensidades aún más grandes es, en principio, un resultado poco intuitivo. Este comportamiento es resultado de la naturaleza coherente de la propagación del calor. Notemos que la cantidad $v_t^\alpha = w_\alpha/2\hbar$ se puede interpretar como la velocidad con la cual los electrones viajan a través del contacto, mientras que las constantes $\tilde{w}_\alpha^2 = (v_t^\alpha/v_F^\alpha)(v_t^\alpha/v_F)$ que aparecen en la ecuación (4.15) representan la discrepancia para el movimiento del electrón a través de la juntura, en el reservorio y en el anillo.

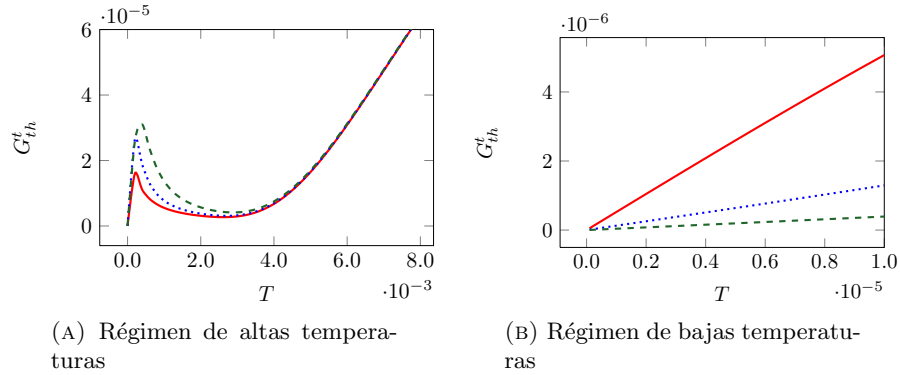


FIGURA 4.6: Conductancia térmica G_{th}^t en función de la temperatura T , para acoplamiento *tunneling*, para distintos valores del potencial químico ($\mu = 0$ (rojo, sólida), $\mu = 0,25 \gamma_t$ (azul, puntos), $\mu = 0,5 \gamma_t$ (verde, trazos)), donde γ_t es el ancho de los picos dado por la ecuación (4.12). Los restantes parámetros son $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0,1$, $L = 200$. Las gráficas izquierda y derecha corresponden a los regímenes de alta y baja temperatura respectivamente.

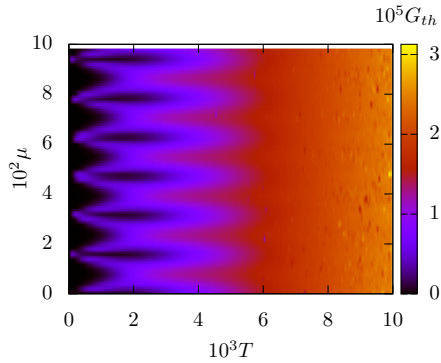


FIGURA 4.7: Mapa en colores para la conductancia térmica en el caso de acople tipo *tunneling* a través de los reservorios 1 y 2, como función de la temperatura y del potencial químico de los reservorios. Los acoplamientos son $w_1 = w_2 = 0,1$ y la longitud del anillo es $L = 400$.

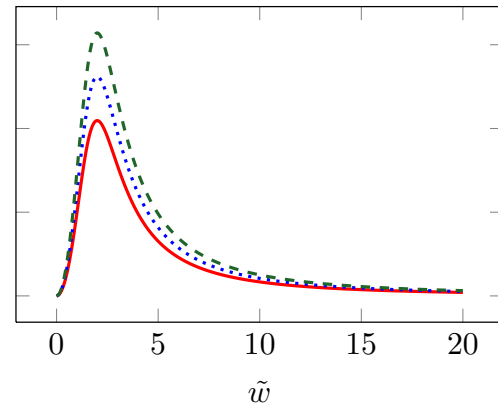


FIGURA 4.8: Conductancia térmica G_{th}^t para el caso *tunneling*, habiendo fijado $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = \tilde{w}$, para diferentes temperaturas: $T = 0,01$ (roja, sólida), $T = 0,02$ (azul, puntos), $T = 0,03$ (verde, trazos).

En la Figura 4.8 se observa que un flujo térmico pequeño entre los dos reservorios es esperable cuando la discrepancia entre estas tres velocidades es grande. Esto puede

ocurrir para acoplamientos débiles \tilde{w}_α , donde la velocidad de tuneo es mucho menor que las velocidades que los electrones tienen dentro de los reservorios y en el anillo. Un efecto similar es esperable para \tilde{w}_α grandes, que corresponde a $v_t^\alpha \gg v_F^\alpha$, $v_t^\alpha \gg v_F$. En este caso, los electrones saltan a través del contacto a una velocidad mucho mayor que la velocidad con la cual se propagan en los reservorios y a lo largo del anillo, lo cual resulta en una transmisión neta deficiente entre un reservorio y el otro. Es importante señalar que la función $f(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \leq 1$. La conductancia térmica está acotada por el valor balístico $\kappa_0 T = k_B^2 \pi^2 T / 3h$ y satisface el límite fijado en la Ref. [96]. Una derivación alternativa de tipo heurística para este límite consiste en requerir que la conductancia térmica satisfaga el principio de incertidumbre $\Delta E \tau \geq \hbar/2$, donde $\Delta E \sim k_B \delta T$ y $\tau = k_B T / J^{Q,t}$. Usando $J^{Q,t} = G_{th}^t \delta T$, obtenemos $G_{th}^t \leq 2k_B^2 T / \hbar$, que es aproximadamente la cota superior exacta.

La diferencia entre los distintos regímenes se ilustran en las Figuras 4.6a y 4.6b. La curva roja sólida corresponde a un potencial químico μ resonante. Para $k_B T \gg \hbar \gamma_t$ se observa una estructura relacionada al borde del pico, mientras que para $k_B T \gg \Delta$ crece nuevamente de forma lineal. En las otras gráficas, correspondientes a valores de μ no-resonantes, se puede ver que la conductancia es prácticamente nula para $k_B T < |\mu - \varepsilon_c|$, donde ε_c es la energía del nivel del borde más próximo a μ . Se observa un máximo relacionado a la existencia de un pico cercano, y para valores más grandes de T la conductancia es nuevamente lineal. Este comportamiento se repite al variar μ a lo largo de la secuencia de picos y valles, como se muestra en el mapa de la Figura 4.7.

En resumen, el comportamiento universal de la conductancia térmica [92]

$$G_{th}^c = \frac{k_B^2 \pi^2}{3h} T$$

es esperable en el límite de temperaturas ultra-bajas $k_B T \ll \gamma$ y para μ resonantes. En el régimen de altas temperaturas $k_B T \gg \Delta$, la conductancia resulta independiente del potencial químico μ y crece nuevamente de manera lineal, pero la pendiente no es universal y depende de las constantes de acoplamiento con los reservorios según las ecuaciones (4.14) y (4.15).

4.6.2. Acoplamiento capacitivo

En este caso, la corriente de calor viene dada por la ec. (4.11), que depende de la diferencia de funciones de distribución de Bose-Einstein. El comportamiento detallado depende de las propiedades espectrales descritas por la función de transmisión $T_{12}^c(\omega)$. Como se muestra en la Figura 4.5, esta función consiste en picos Lorentzianos centrados en las energías del anillo desacoplado.

Para este tipo de acoplamiento, podemos distinguir tres regímenes distintos (ver Figura 4.9):

temperaturas bajas $k_B T \ll \Delta$

temperaturas intermedias $\Delta \ll k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$

temperaturas altas $k_B T \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$

Para temperaturas suficientemente bajas, menores que el espaciado medio de los niveles del anillo $\Delta = 2\pi\hbar v_F/L$ ($k_B T \ll \Delta$), podemos expandir la función de transmisión alrededor de $\omega = 0$;

$$T_{12}^c(\omega) \sim \gamma_c \omega^2$$

El comportamiento de bajas temperaturas para la corriente de calor viene dado por

$$J^{Q,c} = \gamma_c \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^3 [n(T_1) - n(T_2)].$$

La integral se puede evaluar en el límite de $T \rightarrow 0$, dando como resultado

$$J^{Q,c} = (\gamma_c k_B^4 \pi^2 / 30) (T_1^4 - T_2^4)$$

lo cual conduce a la siguiente ley para el comportamiento de bajas temperaturas para la conductancia térmica

$$G_{th}^c(T) = \kappa_1 T^3, \quad k_B T \ll \Delta,$$

con

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 k_B^2 \lambda_1, \\ \lambda_1 &= \frac{128\pi^6}{5} \frac{\hbar^2 v_F^2}{L^2} (\tilde{V}_1 \tilde{V}_2)^2, \end{aligned}$$

$$\text{y } \tilde{V}_\alpha = \sqrt{\nu_\alpha} V_\alpha / (\hbar v_F) (\hbar v_F^\alpha).$$

Para temperaturas altas el análisis se torna más sutil. Puede realizarse un cálculo analítico considerando una forma aproximada de (4.11), válida en este límite. Este análisis de expone en el Apéndice C.2.2. En el régimen intermedio ($k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$), la conductancia térmica sigue nuevamente una ley de cúbica con la temperatura, pero con un prefactor que es independiente de la longitud del anillo,

$$G_{th}^c(T) = \kappa_2 T^3, \quad \Delta \ll k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2},$$

con

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \kappa_0 k_B^2 \lambda_2, \\ \lambda_2 &= \frac{32\pi^4}{5} \frac{\tilde{V}_1^2 \tilde{V}_2^2}{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}.\end{aligned}$$

Por otra parte, en el régimen de altas temperaturas ($k_B T \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$), la conductancia alcanza un valor de saturación

$$G_{th}^c = \frac{\sqrt{2}k_B}{\pi\hbar} \frac{\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}}{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}, \quad k_B T \gg \frac{1}{\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}}. \quad (4.16)$$

En la Figura 4.10, se muestra la conductancia térmica a una temperatura fija T , dentro del régimen $k_B T \gg \Delta$ como función de la intensidad del acoplamiento. Como en el caso de los contactos tipo *tunneling*, la conductancia decrece cuando el acoplamiento tiende a cero y cuando tiende a infinito, mientras que se hace máxima en algún punto intermedio. Esto sugiere un mecanismo similar para explicar este comportamiento. Sin embargo, la naturaleza del contacto es diferente y la discrepancia del acoplamiento en este caso está cuantificada por el parámetro $\mathcal{M}_\alpha = (k_B T) \tilde{V}_\alpha$. Por análisis dimensional sabemos que $[V_\alpha] = EL^2$. Es entonces apropiado reexpresar este parámetro como $V_\alpha = \mathcal{V}_\alpha / (k_F^\alpha k_F)$, donde $[\mathcal{V}_\alpha] = E$ y k_F^α y k_F son los vectores de onda de Fermi para las partículas de los reservorios y del anillo, respectivamente. Con estas definiciones, $\tilde{V}_\alpha = \sqrt{\nu\nu_\alpha} \mathcal{V}_\alpha / (\varepsilon_F^\alpha \varepsilon_F)$, donde ε_F^α y ε_F son las energías de Fermi de los electrones de los reservorios y del borde, respectivamente. Entonces $[\tilde{V}_\alpha] = E^{-1}$ y la medida de la discrepancia $\mathcal{M}_\alpha = (k_B T) \sqrt{\nu\nu_\alpha} \mathcal{V}_\alpha / (\varepsilon_F^\alpha \varepsilon_F)$ es adimensional y puede ser interpretada como la razón entre la energía térmica multiplicada por la energía de acoplamiento en el contacto y la energía de las partículas en el reservorio por la energía de las partículas del borde. Como la temperatura entra en la medida de la discrepancia, el acoplamiento óptimo para el cual la conductancia alcanza su máximo valor depende de T , como se muestra en la Figura 4.10. Este comportamiento contrasta con aquel de la conductancia térmica para el acople *tunneling*, en el cual el máximo es independiente de la temperatura (ver Figura 4.8). La dependencia con T de la medida de discrepancia también sugiere que la conductancia satura a temperaturas altas. Notemos que para satisfacer el límite cuántico $G_{th}^c \leq \kappa_0 T = k_B^2 \pi^2 T / 3\hbar$ debe cumplirse la condición [96]

$$\lambda_2 (k_B T)^2 \leq 1,$$

lo cual conduce a un valor constante de G_{th}^c para $(k_B T)^2 > 1/(\tilde{V}_1 \tilde{V}_2)$, que es el obtenido en la ecuación (4.16).

El comportamiento de la conductancia térmica dentro de los diferentes regímenes aquí discutidos se ilustran en la Figura 4.9 para sistemas con diferentes longitudes. Notemos que la longitud del sistema afecta solamente a la ley cúbica de bajas temperaturas $k_B T < \Delta$. Una característica remarcable es la dependencia en los factores de llenado ν_α y ν de la conductancia térmica en los tres regímenes.

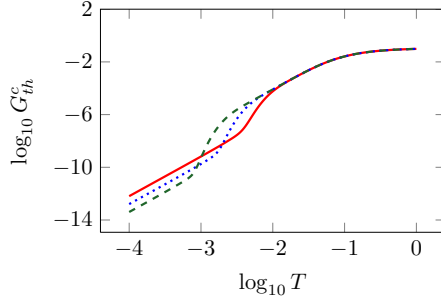


FIGURA 4.9: Conductancia térmica para acoplamiento capacitivo en función de la temperatura para varias longitudes del anillo: $L = 100$ (roja, sólida), 200 (azul, puntos), 400 (verde, trazos). Los acoplamientos son $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 = 1$.

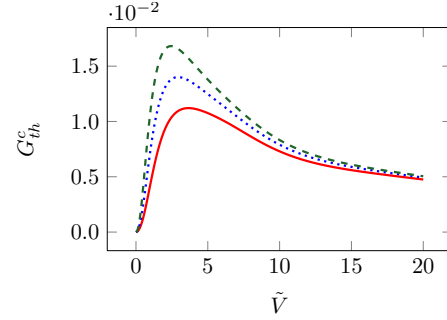


FIGURA 4.10: Conductancia térmica capacitiva G_{th}^c en función del acoplamiento $\sqrt{\nu\nu'}V$ para diferentes temperaturas $T = 0,04$ (roja, sólida), $T = 0,05$ (azul, puntos), $T = 0,06$ (verde, trazos). Hemos fijado $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 = \tilde{V}$ y $\nu_1 = \nu_2 = \nu'$, ν es el factor de llenado del anillo y la longitud es $L = 200$. Todas las energías están expresadas en unidades naturales ($\hbar = 1, k_B = 1$).

4.7. Temperatura local

Para definir la temperatura local, seguimos un procedimiento similar al introducido originalmente en la Ref. [13]. Consideramos un termómetro modelado como un tercer reservorio acoplado de manera no invasiva ($w_3, V_3 \rightarrow 0$) al borde en un punto x_3 . Este reservorio debe satisfacer la condición de equilibrio térmico local con el borde, lo cual significa que tiene una temperatura T_3 para la cual la corriente de calor se anula: $J_3^{Q,t,c} = 0$. La temperatura T_3 determinada de este modo define la temperatura local sensada por el termómetro.

4.7.1. Acoplamiento *tunneling*

Nos concentramos en el límite de bajas temperaturas comparadas con el potencial químico pero dentro del rango $k_B T \gg \Delta$. El cálculo es análogo al de la conductancia térmica

(ver Sección C.3). El resultado obtenido es

$$T_3 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\tilde{w}_1^2 (1 - \tilde{w}_2^2)^2 T_1^2 + (1 + \tilde{w}_1^2)^2 \tilde{w}_2^2 T_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2^2) (\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2)}} & \text{si } x_1 < x_2 < x_3 \\ \sqrt{\frac{\tilde{w}_1^2 (1 + \tilde{w}_2^2)^2 T_1^2 + (1 - \tilde{w}_2^2)^2 \tilde{w}_2^2 T_2^2}{(1 + \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2^2) (\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2)}} & \text{si } x_1 < x_3 < x_2 \end{cases}$$

donde nuevamente, $\tilde{w}_\alpha = w_\alpha / 2\hbar \sqrt{v_F v_F^\alpha}$.

Los resultados se muestran en la Figura 4.11a para acoplamientos iguales $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2$ entre el anillo y la fuente y el drenaje, los cuales están al mismo potencial químico pero a diferentes temperaturas $T_1 > T_2$. Se muestra el perfil de la temperatura local en función de la posición x_3 del termómetro. Hay que destacar las discontinuidades en las posiciones donde se conectan la fuente y el drenaje, las cuales aumentan a medida que aumenta la intensidad de las constantes de acoplamiento en el rango considerado. Este comportamiento es equivalente al obtenido en la Ref. [87], donde el transporte de calor es inducido por inyección de una corriente alterna en el reservorio fuente, en lugar de estableciendo una diferencia de temperatura de manera explícita.

Este resultado puede interpretarse físicamente como sigue. Los electrones a temperatura alta tunelean desde el reservorio fuente y se propagan a lo largo del borde con una quiralidad definida hasta que llegan al reservorio drenaje (frío), al cual pueden tunelear. Un proceso análogo ocurre para los electrones que tunelean desde el reservorio drenaje (frío). El resultado neto es que el brazo “downstream” del borde es visitado principalmente por electrones calientes, mientras que el “upstream” es visitado por los fríos. Como consecuencia se tiene una temperatura más alta para el primer brazo del anillo en comparación con el segundo, que es lo que se observa en la Figura. La temperatura a lo largo de los brazos es constante. Los valores de estas temperaturas en cada brazo siguen una dependencia con los acoplamientos \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 similar al de la conductancia térmica. La diferencia de temperaturas entre ambos brazos decrece a medida que los acoplamientos se hacen suficientemente pequeños ($\tilde{w}_{1,2} \ll 1$) o suficientemente grandes, mientras que para $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 1$, ésta se hace máxima. Para este caso, la temperatura de cada brazo es igual a la del reservorio más cercano consistente con la propagación quiral del calor.

4.7.2. Acoplamiento capacitivo

Los correspondientes perfiles de temperatura se muestran en la Figura 4.11b. En comparación con las gráficas para el acoplamiento *tunneling* mostrados en la Fig. 4.11a, encontramos el mismo comportamiento cualitativo para la temperatura a lo largo del borde. Aparecen discontinuidades en la temperatura local en las posiciones donde están

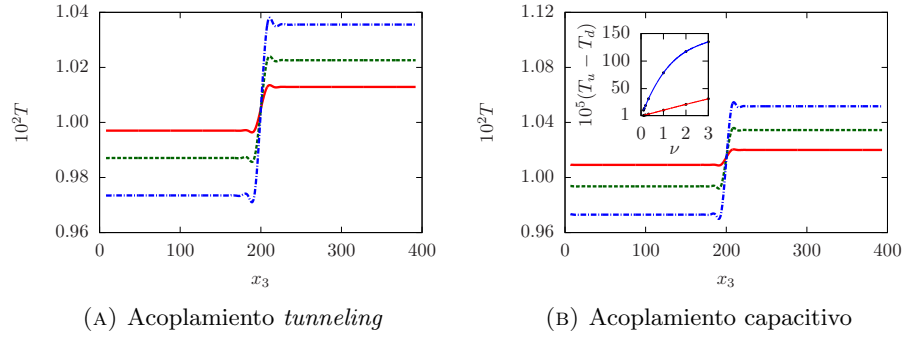


FIGURA 4.11: Temperatura local a lo largo del anillo en función de la posición del termómetro, para diferentes valores de los acoplamientos con los reservorios. Para el caso *tunneling*, (Fig. 4.11a) hemos fijado $\tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 = 0,2$ (curva roja, sólida), 0,3 (azul, trazos), 0,4 (verde, puntos-trazos). Para el caso capacitivo (Fig. 4.11b), los correspondientes valores son $V_1 = V_2 = 1$. (roja, sólida), 2. (verde, trazos), 3. (azul, puntos-trazos). Los parámetros restantes valen $x_1 = 0.$, $x_2 = 200.$, $L = 400.$, $T_1 = 0,009$, $T_2 = 0,011$. Consideramos un factor de llenado $\nu = 1$. En el inset se muestra la diferencia de temperaturas entre los brazos del anillo como función de ν , para dos valores de los acoplamientos $V_1 = V_2 = 1, 3$.

conectados los reservorios, de acuerdo con la propagación quirral de las partículas a lo largo del borde. Respecto del efecto del factor de llenado en el perfil de temperaturas, el papel que juega es similar a una renormalización de la intensidad del acoplamiento con los reservorios V_1 , V_2 , como se puede inferir de la dependencia de las funciones de Green en ν . Por ende, el efecto de termalización de cada brazo con el reservorio más cercano es más pronunciado a medida que este parámetro aumenta. Esto se ilustra en el *inset* de la Fig. 4.11b, donde mostramos la diferencia entre la temperatura promedio a lo largo del brazo *downstream* T_u y la correspondiente al *upstream* T_d , como función de ν para dos valores diferentes del acoplamiento con los reservorios. El salto de temperatura $T_u - T_d$ aumenta con ν siguiendo una ley no universal.

De manera análoga al caso de acople *tunneling*, la temperatura local se puede calcular analíticamente. El calculo detallado se presenta en el Apéndice C, Subsección C.3.2. Para el régimen $\Delta \ll k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, el resultado es

$$T_3 = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{\tilde{V}_1^2 T_1^4 \left(1 - \frac{80}{21} \pi^4 \tilde{V}_2^2 T_1^2\right) + \tilde{V}_2^2 T_2^4 \left(1 - \frac{80}{21} \pi^4 \tilde{V}_1^2 T_2^2\right)}{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}} & \text{si } x_1 < x_3 < x_2 \\ \sqrt[4]{\frac{\tilde{V}_1^2 T_1^4 \left(1 + \frac{80}{21} \pi^4 \tilde{V}_2^2 T_1^2\right) + \tilde{V}_2^2 T_2^4 \left(1 + \frac{80}{21} \pi^4 \tilde{V}_1^2 T_2^2\right)}{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}} & \text{si } x_1 < x_2 < x_3 \end{cases}$$

Cuando $k_B T \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, que corresponde al caso saturante para la conductancia discutido en la Sección anterior, la temperatura del anillo es homogénea y tiene el valor

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{\tilde{V}_2^2 T_1^4 + \tilde{V}_1^2 T_2^4}{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_2^2}}.$$

4.8. Resumen y conclusiones

En este Capítulo hemos analizado el transporte de calor a través de estados de borde de un gas de electrones bidimensional en el efecto Hall cuántico. Consideramos dos configuraciones exactamente solubles. Uno de los casos corresponde a un sistema con un factor de llenado $\nu = 1$ acoplado a reservorios a diferentes temperaturas a través de contactos tipo *tunneling*. El segundo caso corresponde a acoplamiento capacitivo entre el borde y los reservorios, con factores de llenado enteros o fraccionarios para los mismos, de la forma $\nu = 1/m$ y $\nu_{1,2} = 1/m$ con m impar.

Los resultados principales se pueden caracterizar en términos de dos regímenes de temperaturas, definidos con respecto al espaciado de los niveles del borde $\Delta = 2\pi\hbar v_F/L$. En el régimen de bajas temperaturas ($k_B T \ll \Delta$), el comportamiento del transporte de calor se ve afectado por efectos de tamaño finito relacionados al espaciado de los niveles del borde. En el caso *tunneling*, la conductancia térmica de dos terminales G_{th}^t tiene un comportamiento distinto dependiendo de la posición del potencial químico, relativa a la posición de los niveles de energía del anillo. Para temperaturas ultrabajas ($k_B T \ll \gamma$), donde γ es el ancho de los picos y μ resonante, ésta crece linealmente con T , según la ley universal $G_{th}^t = \kappa_0 T$, donde κ_0 es el cuanto universal de conductancia térmica.

En el caso capacitivo, la conductancia térmica se comporta de un modo muy diferente en este régimen. Obedece una ley cúbica no universal $G_{th}^c \propto T^3$, con un coeficiente que depende de los acoplamientos con los reservorios y de la longitud del anillo, a través de la combinación $\tilde{V}_1^2 \tilde{V}_2^2 / L^2$.

En el régimen de altas temperaturas ($k_B T > \Delta$), los efectos de tamaño finito resultan irrelevantes, y el transporte de calor se vuelve independiente de la longitud del sistema. Sin embargo, el régimen no es universal, dado que hay una fuerte dependencia en los acoplamientos con los reservorios, tanto para el caso *tunneling* como para el capacitivo. En particular, para el caso *tunneling*, la conductancia térmica de dos terminales sigue siendo una función lineal de la temperatura, pero ahora el coeficiente de proporcionalidad es una función no monótona de las intensidades de acoplamiento. En el caso capacitivo, este régimen se extiende a cualquier otro llenado ν . Es interesante destacar que en este caso, aparece un régimen intermedio para $\Delta \ll k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, con una conductancia

térmica caracterizada nuevamente por una ley de potencias $G_{th}^c(T) = \kappa T^3$, donde κ depende de los factores de llenado ν_1, ν_2 , y de los acoplamientos V_1 y V_2 . Como en el caso *tunneling*, κ es una función no monótona de los acoplamientos. A altas temperaturas $k_B T \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, la conductancia térmica capacitiva alcanza un valor de saturación $G_{th}^c \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\sqrt{\nu_1 \nu_2 \tilde{V}_1 \tilde{V}_2}}{\nu_1 \tilde{V}_1^2 + \nu_2 \tilde{V}_2^2}$. Este resultado difiere notablemente del comportamiento lineal de la conductancia térmica *tunneling* en el mismo régimen. Respecto de la dependencia con los factores de llenado, el caso $\nu \neq 1$ para contactos *tunneling* no es soluble exactamente, y no hemos podido verificar que la conductancia es también independiente del llenado. Sin embargo, si notamos que la conductancia eléctrica de dos terminales para contactos *tunneling* puntuales es $G = e^2/h$ y es independiente de ν [91], es probable que la conductancia térmica resulte ser también independiente del llenado para este tipo de contactos.

Nuestros resultados indican que el comportamiento de la temperatura local a la largo del borde, definida por medio del acoplamiento a un termómetro, es cualitativamente la misma para acoplamientos *tunneling* y capacitivos. Como en el caso del borde estimulado por corriente alterna considerado en las referencias [50, 87], el perfil de la temperatura local como función de la posición a lo largo del borde, es completamente consistente con la propagación quiral de la energía a lo largo del estado de borde. Esto significa que para una dada configuración del borde en contacto con reservorios a diferentes temperaturas, cada brazo del borde tiende a termalizar con el reservorio *upstream* más próximo. Notablemente, este comportamiento no depende de la naturaleza del contacto. Es cualitativamente el mismo para un contacto *tunneling*, que inyecta partículas que transportan energía, que para un contacto de tipo capacitivo donde sólo se intercambia energía y no hay transporte de partículas.

La consecuencia práctica de estos resultados es el hecho de que los contactos capacitivos son aptos para estudiar el transporte de calor en estados de borde del mismo modo que los contactos *tunneling*. Esto abre la posibilidad de estudiar configuraciones híbridas que incluyan ambos tipos de contactos. Esto puede ser particularmente interesante a la hora de estudiar los estados de borde del efecto Hall cuántico con llenados $\nu = 2/3$ y $\nu = 5/2$, los que tienen modos cargados junto con modos neutros, los cuales son insensibles al acople capacitivo. Por otra parte, dado que nuestros resultados indican que el transporte de calor con contactos capacitivos es sensible a los valores de ν, ν_1 y ν_2 , se podría concebir un dispositivo térmico capacitivo diseñado para medir los factores de llenado de muestras de efecto Hall cuántico.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En esta Tesis se han estudiado propiedades del transporte cuántico de la carga eléctrica y del calor, en dos dispositivos de interés fundamental: una estructura conductora unidimensional acoplada a cuatro puntas y un estado de borde correspondiente a un gas bidimensional de electrones en el régimen de efecto Hall cuántico.

En el primer ejemplo (ver Capítulo 3) se estudió la llamada resistencia de cuatro puntas, siendo el principal aporte original la consideración de contactos débilmente invasivos. Nuestros resultados permitieron develar nuevos aspectos del transporte, asociados a la correlación entre contactos. En particular, los procesos asociados al acople invasivo con las sondas inducen una caída de voltaje con una ley de potencias como función del voltaje aplicado para valores pequeños de éste, con un exponente que depende de la interacción e-e. Este comportamiento tiene características clásicas y cuánticas: la caída de voltaje es siempre en el mismo sentido que el voltaje aplicado, y aparece un patrón de oscilaciones que indican interferencia cuántica entre las sondas. Estas características son apantalladas por la interacción e-e. Estos resultados son importantes en relación a mediciones experimentales de la resistencia de cuatro terminales en sistemas reales. Esto es, para sondas invasivas, los efectos elásticos del tipo *backscattering* producidos por impurezas pueden conducir a una caída de voltaje de sentido opuesto al voltaje aplicado, dando lugar a una resistencia de cuatro terminales negativa. Sin embargo, la amplitud de estos procesos debe ser lo suficientemente grande como para superar el efecto resistivo clásico introducido por las sondas. Para separaciones de las puntas lo suficientemente grandes, la posibilidad de medir resistencias de cuatro terminales negativas aumenta para interacciones e-e más intensas.

La segunda serie de contribuciones originales de esta Tesis corresponde a las propiedades del transporte térmico en un borde Hall (ver Capítulo 4). Consideramos dos configuraciones exactamente solubles. Uno de los casos corresponde a un sistema con un factor

de llenado $\nu = 1$ acoplado a reservorios a diferentes temperaturas a través de contactos tipo *tunneling*. El segundo caso corresponde a acoplamiento capacitivo entre el borde y los reservorios, con factores de llenado enteros o fraccionarios de la forma $\nu = 1/m$. Para ambos casos se estudió el comportamiento de la conductancia térmica del borde y del perfil de temperaturas. Es importante mencionar que la presente propuesta constituye el primer aporte teórico para describir el transporte termico en el caso de contactos capacitivos, lo cual ha sido recientemente reconocido en otros trabajos[97].

Los resultados principales se pueden caracterizar en términos de dos regímenes de temperaturas, definidos con respecto al espaciado de los niveles del borde $\Delta = 2\pi\hbar v_F/L$. En el régimen de bajas temperaturas ($k_B T \ll \Delta$), el comportamiento del transporte de calor se ve afectado por efectos de tamaño finito relacionados al espaciado de los niveles del borde. En el caso *tunneling*, la conductancia térmica de dos terminales G_{th}^t tiene un comportamiento distinto dependiendo de la posición del potencial químico, relativa a la posición de los niveles de energía del anillo. Para temperaturas ultrabajas ($k_B T \ll \gamma_t$), donde γ_t es proporcional a la vida media de los niveles del borde, la conductancia térmica crece linealmente con T , según la ley universal $G_{th}^t = \kappa_0$, donde $\kappa_0 = \pi^2 k_B^2 T / 3h$ es el cuanto universal de conductancia térmica.

En el caso capacitivo, la conductancia térmica se comporta de un modo muy diferente en este régimen. Obedece una ley cúbica no universal $G_{th}^c \propto T^3$, con un coeficiente que depende de los acoplamientos con los reservorios y de la longitud del anillo, a través de la combinación $V_1^2 V_2^2 / L^2$.

En el régimen de temperaturas intermedias y altas ($k_B T > \Delta$), los efectos de tamaño finito resultan irrelevantes, y el transporte de calor se vuelve independiente de la longitud del sistema. Sin embargo, el régimen no es universal, dado que hay una fuerte dependencia en los acoplamientos con los reservorios, tanto para el caso *tunneling* como para el capacitivo. En particular, para el caso *tunneling*, la conductancia térmica de dos terminales sigue siendo una función lineal de la temperatura, pero ahora el coeficiente de proporcionalidad es una función no monótona de las intensidades de acoplamiento. En el caso capacitivo, este régimen se extiende a cualquier otro llenado ν . Es interesante destacar que en este caso, aparece un régimen intermedio para $\Delta \ll k_B T \ll 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, donde \tilde{V}_1 y \tilde{V}_2 fueron definidos en la ecuación (4.13). En este régimen, la conductancia térmica satisface nuevamente una ley de potencias de la forma $G_{th}^c(T) = \kappa T^3$, donde κ depende de los factores de llenado ν_1, ν_2 , y de los acoplamientos V_1 y V_2 . Como en el caso *tunneling*, κ es una función no monótona de los acoplamientos. A temperaturas altas $k_B T \gg 1/\sqrt{\tilde{V}_1 \tilde{V}_2}$, la conductancia térmica capacitiva alcanza un valor de saturación que depende de los acoplamientos con el borde y de los factores de llenado ν, ν_1 y ν_2 . Este resultado difiere notablemente del comportamiento lineal de la conductancia

térmica *tunneling* en el mismo régimen. Respecto de la dependencia con los factores de llenado, el caso $\nu \neq 1$ para contactos *tunneling* no es soluble exactamente, y no hemos podido verificar que la conductancia sea también independiente del llenado. Sin embargo, si notamos que la conductancia eléctrica de dos terminales para contactos *tunneling* puntuales es $G = e^2/h$ y es independiente de ν [91], es probable que la conductancia térmica también lo sea.

Nuestros resultados indican que el comportamiento de la temperatura local a la largo del borde, definida por medio del acoplamiento a un termómetro, es cualitativamente la misma para acoplamientos *tunneling* y capacitivos. Como en el caso del borde estimulado por corriente alterna considerado en las referencias [50, 87], el perfil de la temperatura local como función de la posición a lo largo del borde, es completamente consistente con la propagación quiral de la energía a lo largo del estado de borde. Esto significa que para una dada configuración del borde en contacto con reservorios a diferentes temperaturas, cada brazo del borde tiende a termalizar con el reservorio *upstream* más próximo. Notablemente, este comportamiento no depende de la naturaleza del contacto. Es cualitativamente el mismo para un contacto *tunneling*, que inyecta partículas que transportan energía, que para un contacto de tipo capacitivo donde sólo se intercambia energía y no hay transporte de partículas.

En conclusión, nuestras investigaciones han permitido desentrañar nuevos aspectos del transporte cuántico y predecir algunos efectos que podrían verificarse en futuros experimentos. Para el caso del transporte de carga en cables cuánticos, los resultados obtenidos son relevantes en relación a mediciones experimentales de la resistencia de cuatro terminales en sistemas reales. Para separaciones entre las sondas de voltaje lo suficientemente grandes, la posibilidad de medir resistencias de cuatro terminales negativas aumenta para interacciones e-e más intensas. En el caso del transporte de calor en un borde Hall, mostramos que los contactos capacitivos son aptos para estudiar el transporte de calor en estados de borde del mismo modo que los contactos *tunneling*.

Estos estudios, a su vez, han abierto nuevos interrogantes que darán lugar a futuras investigaciones.

Dentro del marco del transporte de carga en sistemas Luttinger, quedan varias cuestiones por estudiar. En la referencia [1], se considera también el caso de sondas de voltaje “desordenadas”, esto es, con densidades de estados asimétricas. En particular, considerando un modelo de Breit-Wigner para una de las puntas, se obtiene que la resistencia de cuatro terminales es distinta de cero, pudiendo incluso asumir valores negativos, aún en ausencia de impurezas en el cable y al orden más bajo en los acoplamientos w_j . Cabe preguntarse cómo se modifican dichos resultados al considerar contactos débilmente

invasivos. Este problema puede atacarse de manera casi inmediata, utilizando el mismo formalismo que en el Capítulo 3.

El problema del transporte de calor en bordes Hall, es un área que ha despertado gran interés recientemente. En particular, la utilización de contactos capacitivos parece ser promisoría a la hora de entender los estados Hall cuya estructura consta de modos de carga y modos neutros, por ejemplo los fluidos Hall con llenados $\nu = 2/3$ y $\nu = 5/2$. Dado que los modos neutros son insensibles al acople capacitivo, pueden estudiarse configuraciones híbridas que incluyan ambos tipos de contactos, con el objeto de dilucidar la compleja estructura de estos fluidos. Actualmente estamos estudiando el transporte de calor en un fluido Hall para un llenado de Laughlin, en el cual los reservorios de temperatura se acoplan capacitivamente, pero considerando un termómetro tipo *tunneling* no invasivo para sensar la temperatura. Esto es un primer paso para luego considerar el fluido con llenado $\nu = 2/3$.

El problema del transporte de calor en bordes Hall puede extenderse en otra dirección. La cuantización de la conductancia térmica ha sido predicha teóricamente en los trabajos de Pendry [96], Rego y Kirczenow [98], obteniendo que la misma debe estar cuantizada en unidades del cuanto de conductancia térmica $\kappa_0 = \pi^2 k_B^2 T / 3h$. Este resultado ha sido corroborado en experimentos recientes [99, 100]. En este contexto resulta de interés profundizar el estudio de la conductancia termica con contactos capacitivos, estudiando otras configuraciones para los contactos que permitan identificar bajo qué condiciones se consigue observar exactamente el cuanto de conductancia térmica.

Apéndice A

Cuantización de Landau

A.1. Niveles de Landau

El Hamiltoniano para un electrón sin espín no relativista en dos dimensiones en un campo magnético perpendicular viene dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2.$$

Aquí, e es una cantidad positiva, siendo la carga del electrón $-e$ y m es la *masa efectiva* del electrón. Para un campo magnético uniforme,

$$\nabla \times \mathbf{A} = B \hat{\mathbf{z}}$$

El potencial vector \mathbf{A} es una función lineal de las coordenadas espaciales. Se sigue que H es un hamiltoniano del tipo del oscilador armónico generalizado, que es cuadrático tanto en las coordenadas espaciales como en el momento *canónico* $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, y por lo tanto puede ser diagonalizado de manera exacta.

La ecuación de Schrödinger

$$H \Psi = E \Psi$$

es invariante ante la transformación de *gauge*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &\rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \xi(\mathbf{r}) \\ \Psi(\mathbf{r}) &\rightarrow \exp \left[\frac{-ie}{\hbar c} \xi(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

El problema puede resolverse de manera independiente del *gauge*. No presentaremos aquí dicho tratamiento, no siendo necesario para nuestros propósitos. El lector interesado puede consultar las referencias [85, 101]. Resolveremos el problema eligiendo un *gauge* particular, conocido como *gauge de Landau*. Elegimos el potencial vector \mathbf{A} de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -yB\hat{\mathbf{x}},$$

Sustituyendo esta expresión en el Hamiltoniano, éste resulta independiente de x y por lo tanto conmuta con p_x . Esto implica que $p_x = \hbar k_x$ es un buen número cuántico. Es conveniente introducir como unidad de longitud la *longitud magnética*, definida como

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}.$$

En términos de cantidades adimensionales,

$$y' = \frac{y}{l_B} - l_B k_x$$

y

$$p'_y = \frac{l_B p_y}{\hbar},$$

obtenemos para el Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_C [y'^2 + p_y'^2],$$

que tiene la forma conocida para el oscilador armónico unidimensional. Aquí $\omega_C = eB/mc$ es la frecuencia ciclotrónica. Los niveles de energía están cuantizados de la forma

$$E_n = \hbar \omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

donde $n = 0, 1, \dots$. Estos niveles se conocen como *niveles de Landau*. Las funciones de onda asociadas a estos niveles tienen la forma

$$\eta_{n,k_x}(\mathbf{r}) = [\pi 2^{2n} (n!)^2]^{-1/4} e^{ik_x x} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{l_B} - l_B k_x \right)^2 \right] H_n \left(\frac{y}{l_B} - l_B k_x \right),$$

donde H_n son los polinomios de Hermite.

Es importante notar que

- La energía no depende de k_x . Los autoestados en un dado nivel de Landau para diferentes valores de k_x son degenerados.

- La posición y depende de k_x . Una autofunción dada está localizada de manera Gaussiana en una banda angosta de ancho $\sim l_B$ centrada en $y = k_x l_B^2$.

A.2. Degeneración

Cada nivel de Landau tiene orbitales degenerados etiquetados por los números cuánticos k_x . La degeneración por unidad de área es la misma en cada nivel de Landau, pero depende del campo magnético. El orbital etiquetado por k_x está localizado en $y = k_x l_B^2$. Para facilitar el conteo de estados, consideremos una muestra de longitud L_x en la dirección x , e impongamos condiciones periódicas de contorno en esta dirección:

$$e^{ik_x(x+L_x)} = e^{ik_x x}.$$

Los valores permitidos de k_x son entonces

$$k_x = 2\pi \frac{n_x}{L_x}.$$

Ahora contamos el número de estados en una dada área, pongamos la región de área $L_x L_y$ definida por $y = 0$ e $y = L_y$. El estado en $y = 0$ es etiquetado por $n_x = 0$ y el $y = L_y$ por el vector de onda $k_x = L_y/l_B^2$, o por un número entero

$$N_x = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2}.$$

Despreciando efectos de orden $O(1)$, N_x es el número de estados en el área $L_x L_y$, y la degeneración por unidad de área viene dada por

$$G = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{B}{\Phi_0},$$

donde $\Phi_0 = \hbar c/e$ es el cuanto de flujo. Vemos entonces que hay precisamente un estado por cuanto de flujo en cada nivel de Landau.

El *factor de llenado* se define

$$\nu \doteq \frac{n_{el}}{G} = 2\pi l_B^2 n_{el} = \frac{n_{el}}{B/\Phi_0},$$

donde n_{el} es la densidad de electrones 2D. El factor de llenado equivale al número de electrones por cuantos de flujo que penetran la muestra. Representa el número de niveles de Landau ocupados por electrones *no interactuantes* a un dado valor del campo magnético. El factor de llenado es inversamente proporcional al campo magnético. A medida que se incrementa la intensidad del campo magnético, cada nivel de Landau

puede acomodar mayor cantidad de electrones, y como consecuencia menos niveles de Landau resultan ocupados.

Apéndice B

Cálculos detallados para el problema de la resistencia de 4 terminales

Detallamos aquí el cálculo de la función de Green exacta para el líquido de Luttinger aislado.

La densidad espectral $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ de un sistema con invarianza traslacional viene dada en términos de la función de Green retardada $G(\mathbf{k}, \omega)$ por la expresión[52, 53]

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -2 \operatorname{Im} G^R(\mathbf{k}; \omega).$$

Es importante notar que esta expresión vale en la representación (\mathbf{k}, ω) . Consideremos el caso unidimensional. Transformando Fourier obtenemos la densidad espectral en la representación (x, ω) :

$$\begin{aligned} \rho(x - x', \omega) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')} \rho(k, \omega) \\ &= -2i \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')} [G^R(k; \omega) - G^R(k; \omega)^*] \\ &= i \left[\int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x-x')} G^R(k; \omega) - \left(\int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} G^R(k; \omega) \right)^* \right]. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$\rho(x - x'; \omega) = i [G^R(x - x'; \omega) - G^R(x' - x; \omega)^*].$$

En particular, la densidad espectral de los portadores $\alpha = L, R$ del líquido de Luttinger a potenciales químicos μ_α se calcula

$$\rho_\alpha(x, x'; \omega) = i[G_\alpha^{R,Lutt}(x - x'; \omega) - G_\alpha^{R,Lutt}(x' - x; \omega)^*].$$

La densidad espectral de un líquido de Luttinger puede calcularse analíticamente [102–104]; el resultado es

$$\rho_\alpha(x, x'; \omega + \mu_\alpha) = C \exp \left[\mp i \left(\frac{\omega}{v} - k_F \right) x \right] |\omega|^{2\gamma} \phi(\gamma, 2\gamma + 1, \pm 2ix\omega/v),$$

donde ϕ es la función Hipergeométrica de Kummer, $\gamma = (K + K^{-1} - 2)/4$ y $v = 1/K$ y C es una constante de normalización. Para poder realizar cálculos numéricos, introducimos un *cutoff* en energías Λ de modo que

$$\rho(x, \omega + \mu) \rightarrow \rho(x, \omega + \mu) \Theta(\Lambda - |\omega|).$$

La constante de normalización C puede evaluarse mediante la condición de normalización

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(x, \omega) \Big|_{x=0} = 1.$$

Para calcular las funciones de Green retardadas y avanzadas, utilizamos las relaciones de Kramers-Kronig

$$\begin{aligned} G^{R,Lutt}(x, \omega) &= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho(x, \omega')}{\omega - \omega' + i\eta} \\ &= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\text{Re}[\rho(x, \omega')] + i \text{Im}[\rho(x, \omega')]}{\omega - \omega' + i\eta} \\ &= \text{PP} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho(x, \omega')}{\omega - \omega'} - \frac{i}{2} \rho(x, \omega). \end{aligned}$$

La parte real de la función de Green la evaluamos numéricamente. Hemos verificado que fijando el *cutoff* en $\Lambda \approx 20$, la caída de voltaje obtenida $\Delta V = \mu_1 - \mu_2$ es independiente del mismo.

Para los reservorios, consideramos una densidad constante de estados con un *cutoff* en energías $\pm\Lambda'$. De este modo, la función de Green retardada para los reservorios empleando las relaciones de Kramers-Kronig, obteniendo la expresión

$$g_j^R(\omega + \mu) \doteq g_j^R(0, \omega + \mu) = \frac{1}{2\Lambda'} \ln \left| \frac{\omega + \Lambda'}{\omega - \Lambda'} \right| - \frac{i\pi}{2\Lambda'} \Theta(\Lambda' - |\omega|).$$

Apéndice C

Cálculos detallados para el problema del transporte de calor en un borde Hall

C.1. Ecuaciones de Dyson

C.1.1. Acople *tunneling*

Definimos la función de Green retardada mixta

$$\tilde{G}^R(x, r_\alpha; t, t') = -i\Theta(t - t')\langle\{\Psi(x, t), \Psi^\dagger(r_\alpha, t')\}\rangle,$$

y la función de Green retardada del anillo

$$G^R(x, x'; t, t') = -i\Theta(t - t')\langle\{\Psi(x, t), \Psi^\dagger(x', t')\}\rangle.$$

Las ecuaciones de Dyson para estas funciones resultan

$$(\partial_{t'} - v_F \partial_{x'}) G^R(x, x'; t - t') = \tag{C.1a}$$

$$\delta(t - t')\delta(x - x') + \sum_{\alpha} w_{\alpha} \tilde{G}^R(x, r_{\alpha}; t - t')\delta(r_{\alpha} - r_{\alpha}^0)\delta(x - x_{\alpha})$$

$$(\partial_{t'} - v_F^{\alpha} \partial_{r_{\alpha}}) \tilde{G}^R(x, r_{\alpha}; t - t') = w_{\alpha} G^R(x, x'; t - t')\delta(r_{\alpha} - r_{\alpha}^0)\delta(x' - x_{\alpha}). \tag{C.1b}$$

Introducimos los inversos de los operadores diferenciales

$$(\partial_{t'} - v_F \partial_{x'}) G^{0,R}(x - x'; t - t') = \delta(t - t') \delta(x - x') \quad (\text{C.2a})$$

$$(\partial_{t'} - v_F^\alpha \partial_{r_\alpha}) g^R(r_\alpha - r'_\alpha, t - t') = \delta(t - t') \delta(r_\alpha - r'_\alpha), \quad (\text{C.2b})$$

que identificamos como las funciones de Green retardadas *libres* del anillo y de los reservorios, respectivamente. Transformando Fourier con respecto a $t - t'$ y $r_\alpha - r'_\alpha$ en las ecuaciones (C.1a) y (C.2a) obtenemos

$$G^R(x, x'; \omega) = G^{0,R}(x, x'; \omega) - \sum_{p_\alpha} \tilde{G}^R(x, p_\alpha; \omega) w_{p_\alpha} G^{0,R}(x_\alpha, x'; \omega) \quad (\text{C.3a})$$

$$\tilde{G}^R(x, p_\alpha; \omega) = -w_{p_\alpha} G^R(x, x_\alpha; \omega) g^R(p_\alpha, \omega), \quad (\text{C.3b})$$

donde $w_{p_\alpha} = w_\alpha e^{-ip_\alpha r_\alpha^0} / \sqrt{L_\alpha}$ y

$$g^R(p_\alpha, \omega) = [g^A(p_\alpha, \omega)]^* = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{p_\alpha} + i\eta},$$

donde $\varepsilon_{p_\alpha} = v_F^\alpha p_\alpha$. Reemplazando la ecuación (C.3b) en la (C.3a) se obtiene

$$\begin{aligned} G^R(x, x'; \omega) &= G^{0,R}(x, x'; \omega) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M G^R(x, x_\alpha; \omega) \Sigma_\alpha^{t,R}(\omega) G^{0,R}(x_\alpha, x'; \omega), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

donde hemos definido las autoenergías

$$\Sigma_\alpha^{t,R}(\omega) = |w_\alpha|^2 \int \frac{dp_\alpha}{2\pi} g^R(p_\alpha, \omega),$$

las cuales tienen en cuenta el efecto del acoplamiento con los reservorios. Es de utilidad definir la función espectral

$$\Gamma_\alpha^t(\omega) \doteq -2 \text{Im}[\Sigma_\alpha^{t,R}(\omega)]$$

que tiene la forma explícita

$$\Gamma_\alpha^t(\omega) = \frac{|w_\alpha|^2}{v_F^\alpha} \Theta(\Lambda - |\omega|),$$

donde Λ es un *cutoff* de altas energías que define que ancho de banda del reservorio, mientras que la correspondiente expresión explícita para la autoenergía retardada es

$$\Sigma_\alpha^{t,R}(\omega) = \ln \left| \frac{\Lambda - \omega}{\Lambda + \omega} \right| - i \frac{\Gamma_\alpha^t(\omega)}{2}.$$

Es fácil verificar que las funciones de Green evaluadas a partir de (C.4) satisfacen la identidad

$$G^R(x, x'; \omega) - G^A(x', x; \omega) = -i \sum_{\beta=1}^M G^R(x, x_\beta; \omega) \Gamma_\beta^t(\omega) G^A(x_\beta, x'; \omega), \quad (\text{C.5})$$

donde $G^A(x', x; \omega) = [G^R(x, x'; \omega)]^*$ es la función de Green avanzada.

Las ecuación de Dyson para las funciones de Green menores se pueden derivar de manera inmediata a partir de las ecuaciones (C.4) utilizando las reglas de Langreth [61]

$$\begin{aligned} G^<(x, p_\alpha; \omega) &= -G^<(x, x_\alpha; \omega) w_{p_\alpha} g_{p_\alpha}^A(\omega) - G^R(x, x_\alpha; \omega) w_{p_\alpha} g_{p_\alpha}^<(\omega), \\ G^<(x, x'; \omega) &= \sum_{\alpha=1}^M G^R(x, x_\alpha; \omega) \Sigma_\alpha^{t,<}(\omega) [G^R(x', x_\alpha; \omega)]^*, \end{aligned}$$

donde

$$\Sigma_\alpha^{t,<}(\omega) = i \Gamma_\alpha^t(\omega) f_\alpha(\omega),$$

mientras que

$$g_{p_\alpha}^<(\omega) = 2\pi i f_\alpha(\omega) \delta(\omega - \varepsilon_{p_\alpha}),$$

y f_α es la distribución de Fermi-Dirac del reservorio α

$$f_\alpha(\omega) = \frac{1}{e^{(\omega - \mu_\alpha)/T_\alpha} + 1}$$

La función de Green del anillo desacoplado viene dada por la sumatoria

$$G^{0,R}(x, x'; \omega) = \frac{1}{L} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{ik_n(x-x')}}{\omega - \varepsilon_{k_n} + i\eta},$$

donde $\varepsilon_{k_n} = v_F k_n$, con $k_n = 2n\pi/L$ y N es un número entero positivo que define el *cutoff* de altas energías $\Lambda_r = v_F 2\pi N/L$ del anillo. En el límite de $N \rightarrow \infty$, la suma en la función de Green libre se puede calcular de manera analítica, dando como resultado

$$G^{0,R}(x, x'; \omega) = \frac{1}{2v_F} \frac{e^{-i\omega(x-x')/v_F}}{\sin(\omega L/2v_F)} \left[\Theta(x-x') e^{i\omega L/2v_F} + \Theta(x'-x) e^{-i\omega L/2v_F} \right]$$

C.1.2. Acople capacitivo

El procedimiento es similar al expuesto para el caso *tunneling*. La diferencia yace en que las relaciones de conmutación (4.2) para los campos bosónicos son distintas al caso fermiónico. De manera análoga al caso fermiónico, definimos la función de Green retardada

correspondiente al anillo

$$D^R(x, x'; t, t') = -i\Theta(t - t')\langle[\phi(x, t), \phi(x', t')]\rangle$$

y a grados de libertad mixtos

$$\tilde{D}^R(x, r; t, t') = -i\Theta(t - t')\langle[\phi(x, t), \phi(r_\alpha, t')]\rangle.$$

Para derivar las ecuaciones de Dyson, evaluamos la evolución temporal de los campos.

Para la funciones de Green retardadas definidas anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} (\partial_{t'} - v_F \partial_{x'}) D^R(x, x'; t - t') &= \delta(t - t') \operatorname{sgn}(x - x') + 2\pi \sum_{\alpha} V_{\alpha} \partial_{r_{\alpha}} \tilde{D}^R(x, r_{\alpha}; t - t') \delta(r_{\alpha} - r_{\alpha}^0) \delta(x - x_{\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{C.6a})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{\alpha}} (\partial_{t'} - v_F^{\alpha} \partial_{r_{\alpha}}) \tilde{D}^R(x, r_{\alpha}; t - t') &= 2\pi V_{\alpha} \delta(r_{\alpha} - r_{\alpha}^0) \delta(x' - x_{\alpha}) \partial_{x'} D^R(x, x'; t - t'). \end{aligned} \quad (\text{C.6b})$$

Es conveniente introducir los inversos de los operadores diferenciales $(\partial_{t'} - v_F^{\alpha} \partial_{r_{\alpha}})$ and $(\partial_{t'} - v_F \partial_{x'})$ los cuales corresponden a las soluciones de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{\alpha}} (\partial_{t'} - v_F^{\alpha} \partial_{r_{\alpha}}) d^{0,R}(r_{\alpha}, r'_{\alpha}; t - t') &= \delta(t - t') \delta(r_{\alpha} - r'_{\alpha}) \\ \frac{1}{\nu} \{\partial_{t'} - v_F \partial_{x'}\} D^{0,R}(x, x'; t - t') &= \delta(t - t') \delta(x - x'). \end{aligned}$$

Transformando Fourier las funciones $d^{0,R}$ y $D^{0,R}$ respecto del tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} d^{0,R}(r_{\alpha}, r'_{\alpha}; \omega) &= \nu_{\alpha} \int \frac{dp_{\alpha}}{2\pi} \frac{e^{-ip_{\alpha}(r_{\alpha} - r'_{\alpha})}}{i(\omega - v_F^{\alpha} p_{\alpha} + i\eta)}, \\ D^{0,R}(x, x'; \omega) &= \frac{\nu}{L} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{ik_n(x-x')}}{\omega - \varepsilon_{k_n} + i\eta}. \end{aligned}$$

Transformando Fourier con respecto a $t - t'$, combinando las ecuaciones (C.6a) y (C.6b), y calculando las derivadas con respecto a x, x' obtenemos la expresión

$$\mathcal{D}^R(x, x'; \omega) = \mathcal{D}^{0,R}(x, x'; \omega) + \sum_{\alpha=1}^M \mathcal{D}^R(x, x_{\alpha}; \omega) \Sigma_{\alpha}^{R,c}(\omega) \mathcal{D}^{0,R}(x_{\alpha}, x'; \omega), \quad (\text{C.9})$$

donde hemos definido

$$\mathcal{D}^R(x, x'; \omega) \doteq \frac{1}{2\pi} \partial_x \partial_{x'} D^R(x, x'; \omega)$$

y

$$\mathcal{D}^{0,R}(x, x'; \omega) \doteq \partial_{x'} D^{0,R}(x, x'; \omega)$$

De modo análogo al caso *tunneling*, hemos eliminado los grados de libertad de los reservorios a partir de la ec. de Dyson definiendo las autoenergías

$$\Sigma_\alpha^{c,R}(\omega) = (2\pi V_\alpha)^2 \frac{\nu_\alpha}{v_F^\alpha} \lim_{r'_\alpha \rightarrow r_\alpha^0+} \partial_{r'_\alpha} \int_{-P}^{+P} \frac{dp_\alpha}{2\pi i} \frac{e^{-ip_\alpha(r_\alpha^0 - r'_\alpha)}}{\omega - v_F^\alpha p_\alpha + i\eta},$$

las cuales dependen del acoplamiento con el reservorio así como también de la densidad de estados de los mismos. En el límite del *cutoff* $\Lambda = v_F P \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\Sigma_\alpha^{c,R} = \frac{i}{2} \Gamma_\alpha^c(\omega),$$

donde

$$\Gamma_\alpha^c(\omega) = (2\pi)^2 \frac{V_\alpha^2}{(v_F^\alpha)^2} \nu_\alpha \omega \Theta(\Lambda - |\omega|).$$

Notemos que la ec. (C.9) tiene la misma estructura que la (C.4). Por lo tanto, estas funciones de Green, satisfacen identidades análogas a las (C.5)

$$\mathcal{D}^R(x, x'; \omega) - \mathcal{D}^A(x', x; \omega) = -i \sum_{\alpha=1}^M \mathcal{D}^R(x, x_\alpha; \omega) \Gamma_\alpha^c(\omega) \mathcal{D}^A(x_\alpha, x'; \omega),$$

donde la función avanzada esta relacionada con la retardada por $\mathcal{D}^A(x', x; \omega) = [\mathcal{D}^R(x, x'; \omega)]^*$.

De la ecuación (C.9) podemos derivar las ecuaciones de Dyson para las funciones de Green menores utilizando las reglas de Langreth [61]

$$\mathcal{D}^<(x, x'; \omega) = \sum_{\alpha=1}^M \mathcal{D}^R(x, x_\alpha; \omega) \Sigma_\alpha^{c,<}(\omega) \mathcal{D}^A(x_\alpha, x'; \omega),$$

donde

$$\Sigma_\alpha^{c,<}(\omega) = i\Gamma_\alpha^c(\omega) n_\alpha(\omega)$$

y n_α es la distribución de Bose-Einstein correspondiente a la temperatura T_α del reservorio α

$$n_\alpha(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/T_\alpha} - 1}.$$

Por último, haciendo uso de las reglas de Langreth en la transformada de Fourier de la ecuación (C.6b) y tomando la derivada con respecto a x y la derivada segunda con respecto a r_α obtenemos

$$\partial_x \partial_{r_\alpha}^2 D^<(x, r'_\alpha; \omega)|_{r_\alpha=r_\alpha^0} = (2\pi)^2 V_\alpha \left\{ \mathcal{D}^<(x, x'; \omega)|_{x'=x_\alpha} \partial_{r_\alpha}^2 D^{0,A}(r_\alpha^0, r_\alpha; \omega)|_{r_\alpha=r_\alpha^0} + \mathcal{D}^R(x, x'; \omega)|_{x'=x_\alpha} \partial_{r_\alpha}^2 D^{0,<}(r_\alpha^0, r_\alpha; \omega)|_{r_\alpha=r_\alpha^0} \right\},$$

donde $D^{0,A}(r_\alpha, r'_\alpha; \omega) = [D^{0,R}(r'_\alpha, r_\alpha; \omega)]^*$ y

$$\partial_{r_\alpha}^2 D^{0,<}(r_\alpha^0, r_\alpha; \omega)|_{r_\alpha=r_\alpha^0} = - \int_{-P}^{+P} dp_\alpha p_\alpha^2 n_\alpha(\omega) \delta(\omega - v_F^\alpha p_\alpha). \quad (\text{C.12})$$

C.2. Conductancias térmicas

En esta Sección se detalla el cálculo analítico de las conductancias térmicas. Por simplicidad, fijamos $\hbar = k_B = v_F = v_F^\alpha = 1$, y también los factores de llenado $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 1$.

C.2.1. Acople *tunneling*

La conductancia térmica G_{th}^t viene dada por

$$G_{th}^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T_{12}^t(\omega) \frac{(\omega - \mu)^2 \beta^2 e^{\beta(\omega - \mu)}}{(1 + e^{\beta(\omega - \mu)})^2}$$

donde el coeficiente de transmisión tiene la expresión

$$T_{12}^t(\omega) = \Gamma_1(\omega) \Gamma_2(\omega) |G^R(x_1, x_2; \omega)|^2,$$

y en el límite de $\Lambda \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= w_{1,2}^2 \\ \Sigma_{1,2}^R &= -\frac{i}{2} w_{1,2}^2. \end{aligned}$$

La función de Green exacta del anillo viene dada por

$$G^R(x_1, x_2; \omega) = \frac{G_0^R(x_1 - x_2; \omega)}{\Delta^R(x_1, x_2; \omega)}, \quad (\text{C.15})$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^R(x_1, x_2; \omega) &= (1 - \Sigma_1^R G_0^R(0, \omega)) (1 - \Sigma_2^R G_0^R(0, \omega)) \\ &\quad - \Sigma_1^R \Sigma_2^R G_0^R(x_1 - x_2, \omega) G_0^R(x_1 - x_2, \omega) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Suponiendo que $x_2 > x_1$, las funciones de Green libres tienen la expresión exacta

$$\begin{aligned} G_0^R(x_1 - x_2; \omega) &= \frac{1}{2} \frac{e^{-i(x_1-x_2)\omega} e^{-i\omega L/2}}{\sin(\omega L/2)} \\ G_0^R(x_2 - x_1; \omega) &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(x_1-x_2)\omega} e^{i\omega L/2}}{\sin(\omega L/2)} \\ G_0^R(0; \omega) &= \frac{1}{2} \cot\left(\frac{\omega L}{2}\right). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (C.23), obtenemos

$$\Delta^R = 1 + \frac{w_1^2 w_2^2}{16} + \frac{i}{4} (w_1^2 + w_2^2) \cot\left(\frac{\omega L}{2}\right),$$

y sustituyendo en (C.15), la función de Green del anillo acoplada a los reservorios resulta

$$\begin{aligned} G^R(x_1, x_2; \omega) &= \frac{e^{-i(x_1-x_2)\omega} e^{-i\omega L/2}}{2 \left[(1 + w_1^2 w_2^2 / 16) \sin(\omega L/2) + \frac{i}{4} (w_1^2 + w_2^2) \cos(\omega L/2) \right]} \\ &= \frac{1}{2 (1 + w_1^2 w_2^2 / 16)} \cdot \frac{e^{-i(x_1-x_2)\omega} e^{-i\omega L/2}}{\sin(\omega L/2) + \frac{i\epsilon L}{2} \cos(\omega L/2)}, \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$\frac{\epsilon L}{2} \doteq \frac{(w_1^2 + w_2^2)}{4 (1 + w_1^2 w_2^2 / 16)}.$$

Podemos ahora escribir la expresión exacta para el coeficiente de transmisión entre los reservorios 1 y 2:

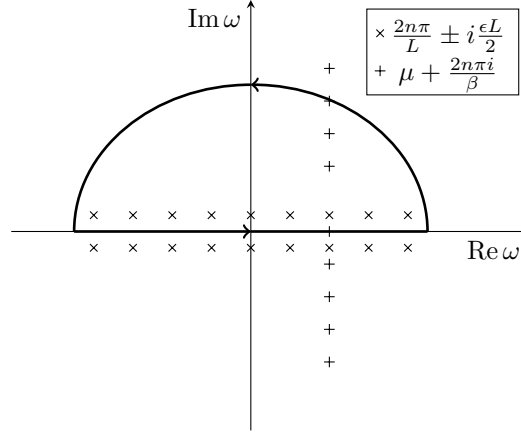
$$T_{12}^t(\omega) = \frac{w_1^2 w_2^2}{4 (1 + w_1^2 w_2^2 / 16)^2} \frac{1}{\sin^2(\omega L/2) + (\epsilon L/2)^2 \cos^2(\omega L/2)}.$$

Para poder calcular la conductancia térmica, debemos evaluar la integral

$$G_{th}^t = \frac{w_1^2 w_2^2}{4 (1 + w_1^2 w_2^2 / 16)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sin^2(\omega L/2) + (\epsilon L/2)^2 \cos^2(\omega L/2)} \frac{(\omega - \mu)^2 e^{\beta(\omega - \mu)}}{(1 + e^{\beta(\omega - \mu)})^2}.$$

La integral se puede evaluar cerrando el contorno de integración en el semiplano complejo superior y utilizando el Método de los Residuos. La estructura anítica del integrando se muestra en la Figura C.1. Hay dos series de polos: una proviene de las funciones de Fermi y son polos dobles situados en los puntos

$$\omega_n^F = \mu + \frac{(2n+1)\pi i}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$


 FIGURA C.1: Estructura analítica del integrando para la conductancia *tunneling*.

Puede probarse que estos polos no contribuyen a la integral. La otra serie proviene del coeficiente de transmisión, y están situados en los puntos

$$\sin(\omega L/2) - \frac{i\epsilon L}{2} \cos(\omega L/2) = 0,$$

esto es,

$$\omega_n = \frac{i}{L} \ln \left| \frac{1 + \epsilon L/2}{1 - \epsilon L/2} \right| + \frac{2n\pi}{L}.$$

Los residuos pueden calcularse de manera exacta. Luego de cierto trabajo algebraico, obtenemos la expresión

$$\text{Res}(\omega_n) = -\frac{i}{2\pi L} \frac{w_1^2 w_2^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16)(w_1^2 + w_2^2)} \frac{\beta^2 (2n\pi/L - \mu)^2 e^{\beta(2n\pi/L - \mu)}}{(1 + e^{\beta(2n\pi/L - \mu)})^2}.$$

La integral puede entonces expresarse como una suma infinita

$$G_{th}^t = \frac{1}{L} \frac{w_1^2 w_2^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16)(w_1^2 + w_2^2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 (2n\pi/L - \mu)^2 e^{\beta(2n\pi/L - \mu)}}{(1 + e^{\beta(2n\pi/L - \mu)})^2}. \quad (\text{C.17})$$

C.2.1.1. Límite de altas temperaturas ($T \gg 1/L$)

En este límite, la suma puede transformarse en una integral

$$G_{th}^t = f(w_1, w_2) \frac{2\pi}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{\beta^2 (2n\pi/L - \mu)^2 e^{\beta(2n\pi/L - \mu)}}{(1 + e^{\beta(2n\pi/L - \mu)})^2}.$$

Realizando la sustitución $k = 2n\pi\beta/L - \beta\mu$, $dk = 2\pi\beta/L dn$, obtenemos

$$G_{th}^t = f(w_1, w_2) \frac{2\pi}{L} \frac{L}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 e^k}{(1 + e^k)^2},$$

donde hemos definido

$$f(w_1, w_2) = \frac{w_1^2 w_2^2}{w_1^2 + w_2^2} \frac{1}{(1 + w_1^2 w_2^2 / 16)}.$$

La integral restante se encuentra en tabla [105] y tiene el valor $\pi^2/3$. La conductancia para acoplamiento *tunneling* en el límite de altas temperaturas resulta finalmente

$$G_{th}^t = f(w_1, w_2) \frac{\pi^2 T}{3}, \quad T \gg \frac{1}{L}.$$

C.2.1.2. Límite de bajas temperaturas ($\gamma_t \ll T \ll 1/L$)

En este caso, la contribución al transporte viene dada por los picos cuya energía es cercana al potencial químico. Esto es, de la suma dada en la ecuación (C.17), elegimos los valores de n tales que $2n\pi/L$ sea cercano al potencial químico:

$$\frac{2n\pi}{L} \approx \mu,$$

esto es,

$$n \approx \frac{\mu L}{2\pi},$$

Entonces, sumamos sólo sobre los n

$$\begin{aligned} n_0 &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] \\ n_1 &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] + 1 \\ n_{-1} &= \left[\left[\frac{\mu L}{2\pi v_F \hbar} \right] \right] - 1. \end{aligned}$$

C.2.2. Acople capacitivo

Para el caso capacitivo, la conductancia térmica G_{th}^c viene dada por

$$G_{th}^c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} T_{12}^c(\omega) \frac{\beta^2 \omega^2 e^{\beta\omega}}{(1 - e^{\beta\omega})^2}, \quad (\text{C.18})$$

donde el coeficiente de transmisión T_{12}^c tiene la expresión

$$T_{12}^c(\omega) = \Gamma_1^c(\omega) \Gamma_2^c(\omega) |D^R(x_1, x_2; \omega)|^2,$$

donde

$$D^R(x, x'; \omega) \doteq \frac{1}{2\pi} \partial_x \partial_{x'} D^R(x, x'; \omega).$$

En el límite del *cutoff* $\Lambda \rightarrow \infty$, $\Gamma_{1,2}^c$ tiene la forma

$$\Gamma_{1,2}^c = (2\pi)^2 V_{1,2}^2 \omega$$

y la función de Green exacta viene dada por

$$\mathcal{D}^R(x_1, x_2; \omega) = \frac{\mathcal{D}_0^R(x_1 - x_2; \omega)}{\Delta^R(x_1, x_2; \omega)}, \quad (\text{C.20})$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^R(x_1, x_2; \omega) &= (1 - \Sigma_1^R \mathcal{D}_0^R(0, \omega)) (1 - \Sigma_2^R \mathcal{D}_0^R(0, \omega)) \\ &\quad - \Sigma_1^R \Sigma_2^R \mathcal{D}_0^R(x_1 - x_2, \omega) \mathcal{D}_0^R(x_2 - x_1, \omega). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Aquí Σ_α^R son las autoenergías para acoplamiento capacitivo, que en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ tienen la expresión

$$\Sigma_{1,2}^R(\omega) = -\frac{i}{2} (2\pi)^2 V_{1,2}^2 \omega.$$

Suponiendo que $x_2 > x_1$, las funciones de Green libres vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^R(x_1 - x_2; \omega) &= \frac{\omega e^{-i(x_1-x_2)\omega} e^{-i\omega L/2}}{2 \sin(\omega L/2)} \\ \mathcal{D}_0^R(x_2 - x_1; \omega) &= \frac{\omega e^{i(x_1-x_2)\omega} e^{i\omega L/2}}{2 \sin(\omega L/2)} \\ \mathcal{D}_0^R(0; \omega) &= \frac{\omega}{2} \cot\left(\frac{\omega L}{2}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando en la ec. (C.21),

$$\Delta^R = 1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4 + i\pi^2 (V_1^2 + V_2^2) \omega^2 \cot\left(\frac{\omega L}{2}\right).$$

Sustituyendo en (C.20), obtenemos la expresión exacta para la función de Green del anillo

$$\mathcal{D}^R(x_1, x_2; \omega) = \frac{\omega e^{-i(x_1-x_2)\omega} e^{-i\omega L/2}}{2 \left[(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4) \sin(\omega L/2) + i\pi^2 (V_1^2 + V_2^2) \omega^2 \cos(\omega L/2) \right]}.$$

El coeficiente de transmisión para acoplamiento capacitivo tiene entonces la forma

$$T_{12}^c(\omega) = \frac{(2\pi)^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4}{4 \left[(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4)^2 \sin^2(\omega L/2) + \pi^4 (V_1^2 + V_2^2)^2 \omega^4 \cos^2(\omega L/2) \right]}$$

C.2.2.1. Límite de bajas temperaturas

Para evaluar la conductancia en el límite $T \ll \Delta$ ($\Delta = 2n\pi/L$), desarrollamos el coeficiente T_{12}^c en serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$, dando por resultado

$$T_{12}^c(\omega) = 16\pi^4 \frac{V_1^2 V_2^2}{L^2} \omega^2 + O\left(\frac{V\omega}{L}\right)^4.$$

Reemplazando en la ecuación (C.18) para la conductancia obtenemos

$$\begin{aligned} G_{th}^c &= 16\pi^4 \frac{V_1^2 V_2^2}{L^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^4 \frac{\beta^2 e^{\beta\omega}}{(1 - e^{\beta\omega})^2} \\ &= 32\pi^4 \frac{V_1^2 V_2^2}{L^2} \frac{d}{dT} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^3 \frac{1}{1 - e^{\beta\omega}} \right] \end{aligned}$$

La integral restante se encuentra en la tabla. La conductancia térmica para acoplamiento capacitivo en el régimen de bajas temperaturas resulta entonces

$$G_{th}^c = \frac{64}{15} \pi^7 \frac{V_1^2 V_2^2}{L^2} T^3, \quad T \ll \frac{1}{L}.$$

C.2.2.2. Límite de altas temperaturas

En este caso es necesario apelar al Método de los Residuos, de manera análoga a la realizada para acoplamiento *tunneling*. De manera a dicho caso, hay dos series de polos: una proveniente del coeficiente de transmisión, y otra de la función de distribución. También puede mostrarse que los residuos en los polos provenientes de la función de distribución no contribuyen a la integral.

Para poder encontrar los polos que yacen en el semiplano complejo superior, es necesario resolver la ecuación

$$(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4) \sin(\omega L/2) - i\pi^2 (V_1^2 + V_2^2) \omega^2 \cos(\omega L/2) = 0,$$

que puede reescribirse de la forma

$$\omega_n = \frac{2i}{L} \operatorname{arctanh} F(\omega) + \frac{2n\pi}{L},$$

donde hemos definido la función

$$F(\omega) \doteq \frac{\pi^2 (V_1^2 + V_2^2) \omega^2}{1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4}.$$

Esta es una ecuación trascendente que no puede resolverse de forma exacta. Sin embargo, una buena aproximación a la misma se obtiene tomando

$$\begin{aligned}\omega_n &\approx \frac{2n\pi}{L} + \frac{2i}{L} \operatorname{arctanh} F\left(\frac{2n\pi}{L}\right) \\ &= \frac{2n\pi}{L} + \frac{i}{L} \ln \left[\frac{1 + F(2n\pi/L)}{1 - F(2n\pi/L)} \right].\end{aligned}$$

Podemos entonces calcular los residuos aproximados en estos valores. Trabajando algebraicamente encontramos

$$\operatorname{Res}I(\omega_n) = \frac{(2\pi) V_1^2 V_2^2}{L(V_1^2 + V_2^2)} \cdot \frac{\beta^2 (2n\pi/L)^4}{(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 (2n\pi/L)^4)} \cdot \frac{e^{2n\pi\beta/L}}{(1 - e^{2n\pi\beta/L})^2}.$$

La integral para la conductancia puede expresarse como una suma infinita

$$G_{th}^c = \frac{1}{L} (2\pi)^2 \cdot \frac{V_1^2 V_2^2}{V_1^2 + V_2^2} \sum_n \frac{(2n\pi/L)^4}{(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 (2n\pi/L)^4)} \cdot \frac{\beta^2 e^{2n\pi\beta/L}}{(1 - e^{2n\pi\beta/L})^2}.$$

Transformando la sumatoria en una integral, obtenemos

$$G_{th}^c = (2\pi) \frac{V_1^2 V_2^2}{(V_1^2 + V_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^4}{(1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4)} \cdot \frac{\beta^2 e^{\beta x}}{(1 - e^{\beta x})^2}.$$

Si realizamos el cambio de variable $u = \pi\sqrt{V_1 V_2}x$ y definimos $a = \beta/\pi\sqrt{V_1 V_2}$, la conductancia en el límite $\beta/L \rightarrow 0$ ($T \ll \Delta$) viene dada por la integral

$$G_{th}^c = (2\pi) \frac{V_1^2 V_2^2}{(V_1^2 + V_2^2)} \frac{1}{\pi^4 V_1^2 V_2^2} \frac{V_1 V_2}{\pi\sqrt{V_1 V_2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u^4}{(1 + u^4)} \cdot \frac{a^2 e^{au}}{(1 - e^{au})^2}.$$

A partir de aquí, es posible hallar expansiones asintóticas para la conductancia en los límites $\beta/\pi\sqrt{V_1 V_2} \rightarrow \infty$ y $\beta/\pi\sqrt{V_1 V_2} \rightarrow 0$.

C.2.2.3. Límite $\beta/\pi\sqrt{V_1 V_2} \rightarrow \infty$

Para obtener la expansión asintótica, conviene reescribir la conductancia en la forma

$$G_{th}^c = (2\pi) \frac{1}{(V_1^2 + V_2^2)} \frac{1}{\pi^4} 2 \frac{d}{dT} \int_0^{\infty} du \frac{u^3}{(1 + u^4)} \cdot \frac{1}{1 - e^{au}}.$$

Expandiendo el factor $(1 + u^4)^{-1}$ y quedándonos sólo con el primer término, obtenemos

$$\begin{aligned} G_{th}^c &= (2\pi) \frac{1}{(V_1^2 + V_2^2)} \frac{2}{\pi^4} \frac{d}{dT} \int_0^\infty du \frac{u^3}{1 - e^{-au}} \\ &= (2\pi) \frac{1}{(V_1^2 + V_2^2)} \frac{2}{\pi^4} \frac{d}{dT} \left[\frac{\pi^8 V_1^2 V_2^2 T^4}{15} \right] \\ &= \frac{16\pi^5}{15} \frac{V_1^2 V_2^2}{V_1^2 + V_2^2} T^3, \quad T \gg \frac{1}{L}, T \ll \frac{1}{\sqrt{V_1 V_2}}. \end{aligned}$$

C.2.2.4. Límite $\beta/\pi\sqrt{V_1 V_2} \rightarrow 0$

En este caso, desarrollamos la el término de la exponencial en serie de Taylor

$$G_{th} = \frac{(2\pi)}{(V_1^2 + V_2^2)} \frac{1}{\pi^4} \frac{1}{\pi\sqrt{V_1 V_2}} \int_{-\infty}^\infty du \frac{u^4}{(1 + u^4)} \cdot \frac{\beta^2}{(\beta u/\pi\sqrt{V_1 V_2})^2}.$$

Evaluando la integral restante obtenemos el valor de saturación para la conductancia

$$G_{th}^c = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{V_1 V_2}}{(V_1^2 + V_2^2)} \quad T \gg \frac{1}{L}, T \gg \frac{1}{\sqrt{V_1 V_2}}.$$

C.3. Perfiles de temperatura

En esta Sección se presenta el cálculo detallado para los perfiles de temperatura en el régimen de altas temperaturas, $T \gg 1/L$. El procedimiento es muy similar al utilizado para obtener las expresiones para las conductancias térmicas.

C.3.1. Acople tunneling

La corriente de calor que fluye a través del termómetro viene dada por

$$\begin{aligned} J_3^{Q,t} &= \int_{-\infty}^\infty (\omega - \mu) d\omega T_{31}^t(\omega) \left[\frac{1}{e^{\beta_3 \omega} + 1} - \frac{1}{e^{\beta_1 \omega} + 1} \right] \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty (\omega - \mu) d\omega T_{32}^t(\omega) \left[\frac{1}{e^{\beta_3 \omega} + 1} - \frac{1}{e^{\beta_2 \omega} + 1} \right], \end{aligned}$$

donde la temperatura local $T_3 = 1/\beta_3$ es tal que $J_3^{Q,t} = 0$.

Los coeficientes de transmisión T_{31}^t y T_{32}^t tienen la forma

$$\begin{aligned} T_{31}^t(\omega) &= \Gamma_3^t(\omega) \Gamma_1^t(\omega) |G^R(x_3, x_1; \omega)|^2 \\ T_{32}^t(\omega) &= \Gamma_3^t(\omega) \Gamma_2^t(\omega) |G^R(x_3, x_2; \omega)|^2. \end{aligned} \tag{C.22}$$

En el límite del *cutoff* $\Lambda \rightarrow \infty$, $\Gamma_1^t(\omega)$ y $\Gamma_2^t(\omega)$ adoptan la forma simple

$$\Gamma_{1,2} = w_{1,2}^2.$$

La función de Green G^R exacta del anillo evaluada en los puntos (x_3, x_1) viene dada por

$$G^R(x_3, x_1; \omega) = \frac{G_0^R(x_3 - x_1; \omega) (1 - \Sigma_2^R G_0^R(0, \omega)) + G_0^R(x_3 - x_2; \omega) \Sigma_2^R G_0^R(x_2 - x_1; \omega)}{\Delta^R(x_1, x_2; \omega)},$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^R(x_1, x_2; \omega) = & (1 - \Sigma_1^R G_0^R(0, \omega)) (1 - \Sigma_2^R G_0^R(0, \omega)) \\ & - \Sigma_1^R \Sigma_2^R G_0^R(x_1 - x_2, \omega) G_0^R(x_2 - x_1, \omega), \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

y las autoenergías $\Sigma_{1,2}^R$ en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ son de la forma

$$\Sigma_{1,2}^R = -\frac{i}{2} w_{1,2}^2.$$

Suponiendo que $x_2 > x_1$, $x_3 > x_2$, y utilizando las expresiones de las funciones de Green libres, obtenemos expresión para la función de Green exacta del anillo evaluada en (x_3, x_1) :

$$G^R(x_3 - x_1; \omega) = \frac{1}{4} \frac{1 - w_2^2/4}{1 + w_1^2 w_2^2/16} \left(\frac{e^{i(x_1 - x_3)\omega} e^{i\omega L/2}}{\sin(\omega L/2) + i\epsilon L/2 \cos(\omega L/2)} \right).$$

Sustituyendo en la ecuación (C.22), el coeficiente de transmisión T_{31}^t resulta entonces

$$T_{31}^t = \frac{1}{16} \frac{(1 - w_2^2/4)^2 w_3^2 w_1^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16)^2} \frac{1}{\sin^2(\omega L/2) + (\epsilon L/2)^2 \cos^2(\omega L/2)}.$$

De manera completamente análoga puede calcularse el coeficiente T_{32}^t . El resultado es

$$T_{32}^t = \frac{1}{16} \frac{(1 + w_1^2/4)^2 w_3^2 w_2^2}{1 + w_1^2 w_2^2/16} \frac{1}{\sin^2(\omega L/2) + (\epsilon L/2)^2 \cos^2(\omega L/2)}$$

La corriente a través del termómetro puede calcularse empleando el Método de los Residuos, de manera análoga al utilizado para la conductancia en la Subsección C.2.1. La integral para la corriente de calor puede expresarse como sumas infinitas de la forma

$$\begin{aligned} J_3^{Q,t} = & C \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_1^2 \left(1 - \frac{w_2^2}{4}\right)^2 \left[\frac{(2n\pi/L)}{1 + e^{2n\pi\beta_3/L}} - \frac{(2n\pi/L)}{1 + e^{2n\pi\beta_1/L}} \right] \\ & + C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{w_1^2}{4}\right)^2 w_2^2 \left[\frac{(2n\pi/L)}{1 + e^{2n\pi\beta_3/L}} - \frac{(2n\pi/L)}{1 + e^{2n\pi\beta_2/L}} \right], \end{aligned}$$

donde C es una constante cuyo valor es irrelevante a la hora de calcular la temperatura local. En el límite de altas temperaturas $T \gg 1/L$, podemos transformar las sumatorias en integrales, las cuales pueden evaluarse obteniendo la expresión

$$J_3^{Q,t} = C \left[w_1^2 \left(1 - \frac{w_2^2}{4}\right)^2 (T_3^2 - T_1^2) + \left(1 + \frac{w_1^2}{4}\right)^2 w_2^2 (T_3^2 - T_2^2) \right].$$

Fijando la corriente a cero obtenemos la temperatura local T_3 , dando como resultado

$$T_3 = \sqrt{\frac{w_1^2 (1 - w_2^2/4)^2 T_1^2 + (1 + w_1^2/4)^2 w_2^2 T_2^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16) (w_1^2 + w_2^2)}}, \quad x_3 > x_2.$$

Cuando $x_1 < x_3 < x_2$, la fórmula para la temperatura local puede obtenerse reemplazando $T_1 \rightarrow T_2$. Finalmente, obtenemos el resultado para la temperatura local del anillo en el régimen de altas temperaturas

$$T_3 = \begin{cases} \sqrt{\frac{w_1^2 (1 - w_2^2/4)^2 T_1^2 + (1 + w_1^2/4)^2 w_2^2 T_2^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16) (w_1^2 + w_2^2)}} & \text{si } x_1 < x_2 < x_3 \\ \sqrt{\frac{w_1^2 (1 + w_2^2/4)^2 T_1^2 + (1 - w_2^2/4)^2 w_2^2 T_2^2}{(1 + w_1^2 w_2^2/16) (w_1^2 + w_2^2)}} & \text{si } x_1 < x_3 < x_2. \end{cases}$$

C.3.2. Acople capacitivo

La corriente de calor que fluye a través del reservorio viene dada por

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega T_{31}^c(\omega) \left[\frac{\omega}{e^{\beta_3 \omega} - 1} - \frac{\omega}{e^{\beta_1 \omega} - 1} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega T_{32}^c(\omega) \left[\frac{\omega}{e^{\beta_3 \omega} - 1} - \frac{\omega}{e^{\beta_2 \omega} - 1} \right]$$

Los coeficientes de transmisión T_{31}^c y T_{32}^c tiene la forma

$$\begin{aligned} T_{31}^c(\omega) &= \Gamma_3(\omega) \Gamma_1(\omega) |\mathcal{D}^R(x_3, x_1; \omega)|^2 \\ T_{32}^c(\omega) &= \Gamma_3(\omega) \Gamma_2(\omega) |\mathcal{D}^R(x_3, x_2; \omega)|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

. En el límite del *cutoff* $\Lambda \rightarrow \infty$, $\Gamma_1^c(\omega)$ y $\Gamma_2^c(\omega)$ adoptan la forma simple

$$\Gamma_{1,2}^c = (2\pi)^2 V_{1,2}^2 \omega.$$

La función de correlación densidad-densidad exacta \mathcal{D}^R del anillo evaluada en los puntos (x_3, x_1) viene dada por

$$\mathcal{D}^R(x_3, x_1; \omega) = \frac{\mathcal{D}_0^R(x_3 - x_1; \omega) (1 - \Sigma_2^R \mathcal{D}_0^R(0, \omega)) + \mathcal{D}_0^R(x_3 - x_2; \omega) \Sigma_2^R \mathcal{D}_0^R(x_2 - x_1; \omega)}{\Delta^R(x_1, x_2; \omega)},$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta^R(x_1, x_2; \omega) &= (1 - \Sigma_1^R \mathcal{D}_0^R(0, \omega)) (1 - \Sigma_1^R \mathcal{D}_0^R(0, \omega)) \\ &\quad - \Sigma_1^R \Sigma_2^R \mathcal{D}_0^R(x_1 - x_2, \omega) \mathcal{D}_0^R(x_1 - x_2, \omega), \end{aligned}$$

y las autoenergías $\Sigma_{1,2}^R$ en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ son de la forma

$$\Sigma_{1,2}^R(\omega) = -\frac{i}{2} (2\pi)^2 V_{1,2}^2 \omega.$$

Suponiendo que $x_1 > x_2$, $x_3 > x_2$, y utilizando las expresiones de las funciones de Green libres \mathcal{D}_0 , obtenemos expresión para la función de Green exacta del anillo evaluada en (x_3, x_1) :

$$\mathcal{D}^R(x_3 - x_1; \omega) = \frac{\omega e^{i(x_1 - x_3)\omega} e^{i\omega L/2} (1 - \pi^2 V_2^2 \omega^2)}{2 \sin(\omega L/2) (1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4) + i\pi^2 (V_1^2 + V_2^2) \omega^2 \cos(\omega L/2)}$$

Sustituyendo en la ecuación (C.24), el coeficiente de transmisión T_{31}^c resulta entonces

$$T_{31}^c(\omega) = \frac{(2\pi)^4 V_3^2 V_1^2 \omega^4 (1 - \pi^2 V_2^2 \omega^2)^2}{4 \left[\sin^2(\omega L/2) (1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4)^2 + \pi^4 (V_1^2 + V_2^2)^2 \omega^4 \cos^2(\omega L/2) \right]}.$$

De manera análoga obtenemos la expresión para T_{32}^c :

$$T_{32}^c(\omega) = \frac{(2\pi)^4 V_3^2 V_2^2 \omega^4 (1 + \pi^2 V_1^2 \omega^2)^2}{4 \left[\sin^2(\omega L/2) (1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 \omega^4)^2 + \pi^4 (V_1^2 + V_2^2)^2 \omega^4 \cos^2(\omega L/2) \right]}.$$

La corriente a través del termómetro puede calcularse empleando el Método de los Residuos, de manera análoga al utilizado para la conductancia en la Subsección C.2.2. La integral para la corriente de calor puede expresarse como sumas infinitas de la forma

$$\begin{aligned} J_3^{Q,c} &= C \sum_n \frac{V_1^2 (2n\pi/L)^3 [1 - \pi^2 V_2^2 (2n\pi/L)^2]^2}{1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 (2n\pi/L)^4} \left[\frac{1}{e^{2n\pi\beta_3/L} - 1} - \frac{1}{e^{2n\pi\beta_1/L} - 1} \right] \\ &\quad + C \sum_n \frac{V_2^2 (2n\pi/L)^3 [1 + \pi^2 V_1^2 (2n\pi/L)^2]^2}{1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 (2n\pi/L)^4} \left[\frac{1}{e^{2n\pi\beta_3/L} - 1} - \frac{1}{e^{2n\pi\beta_2/L} - 1} \right], \end{aligned}$$

donde C es una constante cuyo valor es irrelevante a la hora de calcular la temperatura local.

En el límite de altas temperaturas $T \gg 1/L$, podemos transformar las sumatorias en integrales, obteniendo la expresión

$$\begin{aligned}
 J_3^{Q,c} = & C \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{V_1^2 x^3 (1 - \pi^2 V_2^2 x^2)^2}{1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4} \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_1 x} - 1} \right] \\
 & + C \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{V_2^2 x^3 (1 + \pi^2 V_1^2 x^2)^2}{1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4} \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_2 x} - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

C.3.2.1. Límite $T_{1,2} \ll 1/\sqrt{V_1 V_2}$

En este límite, es lícito aproximamar el denominador $1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4 \approx 1$ y obtener

$$\begin{aligned}
 J_3^{Q,c} = & C \int_{-\infty}^{\infty} dx V_1^2 x^3 (1 - 2\pi^2 V_2^2 x^2 + \pi^4 V_2^4 x^4) \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_1 x} - 1} \right] \\
 & + C \int_{-\infty}^{\infty} dx V_2^2 x^3 (1 + 2\pi^2 V_1^2 x^2 + \pi^4 V_1^4 x^4) \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_2 x} - 1} \right].
 \end{aligned}$$

Las integrales restantes se encuentran en las tablas. Evaluando las mismas obtenemos la expresión para la corriente de calor, en la cual aparecen términos de orden $\sim V_\alpha^2 T_i^4$, $\sim V_\alpha^4 T_i^6$ y $\sim V_\alpha^6 T_i^8$. Despreciando estos últimos, y trahjando algebraicamente arribamos a la expresión

$$\begin{aligned}
 J_3^{Q,c} \propto & - (V_1^2 + V_2^2) T_3^4 \\
 & + V_1^2 T_1^4 \left(1 - \frac{80}{21} \pi^4 V_2^2 T_1^2 \right) \\
 & + V_2^2 T_2^4 \left(1 + \frac{80}{21} \pi^4 V_1^2 T_2^2 \right), \quad 1/L \ll T \ll 1/\sqrt{V_1 V_2}.
 \end{aligned}$$

Igualando $J_3^{Q,c}$ a cero y despejando T_3 obtenemos el valor para la temperatura local para $x_1 < x_2 < x_3$

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{V_1^2 T_1^4 (1 - \frac{80}{21} \pi^4 V_2^2 T_1^2) + V_2^2 T_2^4 (1 + \frac{80}{21} \pi^4 V_1^2 T_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}}, \quad 1/L \ll T \ll 1/\sqrt{V_1 V_2}.$$

La temperatura en el otro brazo del anillo se obtiene cambiando los signos que aparecen dentro del paréntesis. Finalmente obtenemos el perfil de temperaturas del anillo en el límite $1/L \ll T \ll 1/\sqrt{V_1 V_2}$:

$$T_3 = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{V_1^2 T_1^4 (1 - \frac{80}{21} \pi^4 V_2^2 T_1^2) + V_2^2 T_2^4 (1 + \frac{80}{21} \pi^4 V_1^2 T_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} & \text{si } x_1 < x_2 < x_3 \\ \sqrt[4]{\frac{V_1^2 T_1^4 (1 + \frac{80}{21} \pi^4 V_2^2 T_1^2) + V_2^2 T_2^4 (1 - \frac{80}{21} \pi^4 V_1^2 T_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} & \text{si } x_1 < x_3 < x_2. \end{cases}$$

C.3.2.2. Límite $T_{1,2} \gg 1/\sqrt{V_1 V_2}$

En este caso, aproximamos los denominadores en la integral (C.25) $1 + \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4 \approx \pi^4 V_1^2 V_2^2 x^4$ y en los numeradores los factores de la forma $1 \pm \pi^2 V_{1,2}^2 x^2 \approx \pi^2 V_{1,2}^2 x^2$. La corriente de calor resulta en este límite

$$J_3^{Q,c} = C \int_{-\infty}^{\infty} dx V_2^2 x^3 \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_1 x} - 1} \right] + C \int_{-\infty}^{\infty} dx V_1^2 x^3 \left[\frac{1}{e^{\beta_3 x} - 1} - \frac{1}{e^{\beta_2 x} - 1} \right].$$

Realizando en cada término el cambio de variable $u = \beta_j x$, $du = \beta_j dx$, obtenemos

$$J_3^{Q,c} = C' [(V_1^2 + V_2^2) T_3^4 - V_2^2 T_1^4 - V_1^2 T_2^4].$$

Igualando a cero y despejando T_3 llegamos finalmente a la expresión para la temperatura local:

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{V_2^2 T_1^4 + V_1^2 T_2^4}{V_1^2 + V_2^2}}, \quad T \gg 1/L, \quad T \gg 1/\sqrt{V_1 V_2}.$$

Agradecimientos

Deseo agradecer a mis directores, Carlos y Lili, quienes han guiado mi formación a lo largo de estos años, compartiendo conmigo no sólo sus conocimientos sino además brindándome su permanente apoyo y contención.

También agradezco a la gente del grupo de Teoría de Campos Estadística, Vicky, Aníbal y Mariano, por la calidez con la cual me han recibido, haciendo del lugar de trabajo un ámbito agradable donde ha primado un valioso intercambio de ideas y opiniones.

Al Departamento de Física de la Universidad Nacional de La Plata, por su excelente calidad académica y humana.

No puedo dejar de mencionar a los socios del Club de Bochas “Los espines”, con quienes he compartido, café de por medio, buenos momentos de debate y de ocio, supervisado por el Dr. Daniel Cabra.

A mis padres, por su apoyo incondicional, sin los cuales nada de esto hubiera sido posible. A mi hermano Martín y a Mariana. A mi primo Adrián. A mi nueva familia, Pipo, Alicia y Binnie.

A Daniela.

Bibliografía

- [1] L. Arrachea, C. Naón, y M. Salvay, “Voltage profile and four-terminal resistance of an interacting quantum wire,” *Phys. Rev. B* **77**, 233105 (2008).
- [2] H. Aita, L. Arrachea, y C. Naón, “Four-terminal resistance of an interacting quantum wire with weakly invasive contacts,” *Journal of Physics: Condensed Matter* **23**, 475601 (2011).
- [3] H. Aita, L. Arrachea, y C. Naón, “Four-terminal resistance in a clean interacting quantum wire with invasive contacts,” *Physica B: Condensed Matter* **407**, 3158 (2012).
- [4] H. Aita, L. Arrachea, C. Naón, y E. Fradkin, “Heat transport through quantum hall edge states: Tunneling versus capacitive coupling to reservoirs,” *Phys. Rev. B* **88**, 085122 (2013).
- [5] F. Foieri, Ph.D. thesis, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires (2010).
- [6] R. de Picciotto, H. Stormer, L. Pfeiffer, K. Baldwin, K. West, et al., “Four-terminal resistance of a ballistic quantum wire,” *Nature* **411**, 51 (2001).
- [7] M. Bockrath, D. H. Cobden, J. Lu, A. G. Rinzler, R. E. Smalley, L. Balents, y P. L. Mceuen, “Luttinger-liquid behaviour in carbon nanotubes,” *Nature* **397**, 598 (1999).
- [8] J. Lee, S. Eggert, H. Kim, S.-J. Kahng, H. Shinohara, y Y. Kuk, “Real space imaging of one-dimensional standing waves: Direct evidence for a luttinger liquid,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, 166403 (2004).
- [9] R. Tarkiainen, M. Ahlskog, J. Penttilä, L. Roschier, P. Hakonen, M. Paalanen, y E. Sonin, “Multiwalled carbon nanotube: Luttinger versus fermi liquid,” *Phys. Rev. B* **64**, 195412 (2001).
- [10] R. Landauer, “Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices,” *Philosophical Magazine* **21**, 863 (1970).

-
- [11] M. Büttiker, “Absence of backscattering in the quantum hall effect in multiprobe conductors,” *Phys. Rev. B* **38**, 9375 (1988).
- [12] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, y C. T. Foxon, “Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas,” *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848 (1988).
- [13] H.-L. Engquist y P. W. Anderson, “Definition and measurement of the electrical and thermal resistances,” *Phys. Rev. B* **24**, 1151 (1981).
- [14] M. Büttiker, “Four-terminal phase-coherent conductance,” *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1761 (1986).
- [15] M. Buttiker, “Symmetry of electrical conduction,” *IBM Journal of Research and Development* **32**, 317 (1988).
- [16] M. Büttiker, “Chemical potential oscillations near a barrier in the presence of transport,” *Phys. Rev. B* **40**, 3409 (1989).
- [17] T. Gramspacher y M. Büttiker, “Nanosopic tunneling contacts on mesoscopic multiprobe conductors,” *Phys. Rev. B* **56**, 13026 (1997).
- [18] V. A. Gopar, M. Martínez, y P. A. Mello, “Random-matrix study of multiprobe mesoscopic devices. ii. a four-probe one-dimensional system,” *Phys. Rev. B* **50**, 2502 (1994).
- [19] P. L. Pernas, A. Martin-Rodero, y F. Flores, “Electrochemical-potential variations across a constriction,” *Phys. Rev. B* **41**, 8553 (1990).
- [20] Y. Takagaki, K. Gamo, S. Namba, S. Ishida, S. Takaoka, K. Murase, K. Ishibashi, y Y. Aoyagi, “Nonlocal quantum transport in narrow multibranching electron wave guide of gaas-algaas,” *Solid State Communications* **68**, 1051 (1988), ISSN 0038-1098.
- [21] Y. Takagaki, K. Gamo, S. Namba, S. Takaoka, K. Murase, y S. Ishida, “Overshoot of four-terminal magnetoresistance at gaas-algaas narrow wire junctions,” *Solid State Communications* **71**, 809 (1989), ISSN 0038-1098.
- [22] Y. Takagaki, K. Gamo, S. Namba, S. Takaoka, K. Murase, S. Ishida, K. Ishibashi, y Y. Aoyagi, “Nonlocal voltage fluctuations in a quasi ballistic electron waveguide,” *Solid State Communications* **69**, 811 (1989), ISSN 0038-1098.
- [23] B. Gao, Y. F. Chen, M. S. Fuhrer, D. C. Glatli, y A. Bachtold, “Four-point resistance of individual single-wall carbon nanotubes,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 196802 (2005).

- [24] W. Apel y T. M. Rice, “Combined effect of disorder and interaction on the conductance of a one-dimensional fermion system,” *Phys. Rev. B* **26**, 7063 (1982).
- [25] C. L. Kane y M. P. A. Fisher, “Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas,” *Phys. Rev. B* **46**, 15233 (1992).
- [26] D. L. Maslov y M. Stone, “Landauer conductance of luttinger liquids with leads,” *Phys. Rev. B* **52**, R5539 (1995).
- [27] V. V. Ponomarenko, “Renormalization of the one-dimensional conductance in the luttinger-liquid model,” *Phys. Rev. B* **52**, R8666 (1995).
- [28] I. Safi y H. J. Schulz, “Transport in an inhomogeneous interacting one-dimensional system,” *Phys. Rev. B* **52**, R17040 (1995).
- [29] R. Egger y A. O. Gogolin, “Effective low-energy theory for correlated carbon nanotubes,” *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5082 (1997).
- [30] F. Dolcini, B. Trauzettel, I. Safi, y H. Grabert, “Transport properties of single-channel quantum wires with an impurity: influence of finite length and temperature on average current and noise,” *Phys. Rev. B* **71**, 165309 (2005).
- [31] R. Egger, A. Bachtold, M. Fuhrer, M. Bockrath, D. Cobden, y P. McEuen, in *Interacting Electrons in Nanostructures* (Springer, 2001), pp. 125–146.
- [32] R. Egger y H. Grabert, “Voltage-biased quantum wire with impurities,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 538 (1996).
- [33] R. Egger y H. Grabert, “Applying voltage sources to a luttinger liquid with arbitrary transmission,” *Phys. Rev. B* **58**, 10761 (1998).
- [34] M. A. Cazalilla, F. Sols, y F. Guinea, “Dissipation-driven quantum phase transitions in a tomonaga-luttinger liquid electrostatically coupled to a metallic gate,” *Phys. Rev. Lett.* **97**, 076401 (2006).
- [35] Z. Ristivojevic y T. Nattermann, “Transport in a dissipative luttinger liquid,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 016405 (2008).
- [36] N. W. Ashcroft y D. N. Mermin, *Solid state physics* (Thomson Learning, Toronto, 1976), 1st ed., ISBN 0030839939.
- [37] K. v. Klitzing, G. Dorda, y M. Pepper, “New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance,” *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).

- [38] D. C. Tsui, H. L. Stormer, y A. C. Gossard, “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [39] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, y M. den Nijs, “Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential,” *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [40] Q. Niu, D. J. Thouless, y Y.-S. Wu, “Quantized hall conductance as a topological invariant,” *Phys. Rev. B* **31**, 3372 (1985).
- [41] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum hall effect: An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [42] X. G. Wen, “Electrodynamical properties of gapless edge excitations in the fractional quantum hall states,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2206 (1990).
- [43] X. G. Wen y Q. Niu, “Ground-state degeneracy of the fractional quantum hall states in the presence of a random potential and on high-genus riemann surfaces,” *Phys. Rev. B* **41**, 9377 (1990).
- [44] X. G. Wen, “Chiral luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum hall states,” *Phys. Rev. B* **41**, 12838 (1990).
- [45] X. G. Wen, “Gapless boundary excitations in the quantum hall states and in the chiral spin states,” *Phys. Rev. B* **43**, 11025 (1991).
- [46] X.-G. Wen, “Edge transport properties of the fractional quantum hall states and weak-impurity scattering of a one-dimensional charge-density wave,” *Phys. Rev. B* **44**, 5708 (1991).
- [47] X.-G. Wen, “Theory of the edge states in fractional quantum hall effects,” *International Journal of Modern Physics B* **6**, 1711 (1992).
- [48] X.-G. Wen, “Topological orders and edge excitations in fractional quantum hall states,” *Advances in Physics* **44**, 405 (1995), <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00018739500101566>.
- [49] A. M. Chang, “Chiral luttinger liquids at the fractional quantum hall edge,” *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1449 (2003).
- [50] G. Granger, J. P. Eisenstein, y J. L. Reno, “Observation of chiral heat transport in the quantum hall regime,” *Phys. Rev. Lett.* **102**, 086803 (2009).
- [51] B. S. Kim, W. Zhou, Y. D. Shah, C. Zhou, N. Işik, y M. Grayson, “Generalized four-point characterization method using capacitive and ohmic contacts,” *Review of Scientific Instruments* **83**, 024703 (pages 11) (2012).

-
- [52] A. Fetter y J. Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2003), ISBN 9780486428277.
- [53] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Plenum, New York, N.Y., 1993), 2nd ed.
- [54] J. Schwinger, “Brownian motion of a quantum oscillator,” *Journal of Mathematical Physics* **2**, 407 (1961).
- [55] G. Baym y L. P. Kadanoff, “Conservation laws and correlation functions,” *Phys. Rev.* **124**, 287 (1961).
- [56] G. Baym, “Self-consistent approximations in many-body systems,” *Phys. Rev.* **127**, 1391 (1962).
- [57] L. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965).
- [58] J. Maciejko, “An introduction to nonequilibrium many-body theory,” (2007).
- [59] A. Jauho, “Introduction to the keldysh nonequilibrium green function technique,” (2006).
- [60] J. Rammer, *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States* (Cambridge University Press, 2007), ISBN 9781139465014.
- [61] D. C. Langreth, in *Linear and Nonlinear Electron Transport in Solids*, edited by J. T. Devreese y V. E. van Doren (Plenum Press, 1976), 1st ed., ISBN 978-0-306-35717-6.
- [62] J. Solyom, “The fermi gas model of one-dimensional conductors,” *Advances in Physics* **28**, 201 (1979).
- [63] J. Voit, “One-dimensional fermi liquids,” *Reports on Progress in Physics* **58**, 977 (1995).
- [64] M. Stone, *Bosonization*, Bosonization (World Scientific, 1994), ISBN 9789810218478.
- [65] A. Gogolin, A. Nersesyan, y A. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems* (Cambridge University Press, 2004), ISBN 9780521617192.
- [66] J. Von Delft y H. Schoeller, “Bosonization for beginners—refermionization for experts,” arXiv preprint cond-mat/9805275 (1998).
- [67] E. M. Lifshitz y L. P. Pitaevskii, *Course of Theoretical Physics, Volume IX: Statistical Physics (Part 2)* (Butterworth-Heinemann, 1980), ISBN 0750626364.

- [68] J. Luttinger, “An exactly soluble model of a many-fermion system,” *Journal of Mathematical Physics* **4**, 1154 (1963).
- [69] D. C. Mattis y E. H. Lieb, “Exact solution of a many-fermion system and its associated boson field,” *Journal of Mathematical Physics* **6**, 304 (1965).
- [70] A. Luther y I. Peschel, “Single-particle states, kohn anomaly, and pairing fluctuations in one dimension,” *Phys. Rev. B* **9**, 2911 (1974).
- [71] F. Haldane, “Coupling between charge and spin degrees of freedom in the one-dimensional fermi gas with backscattering,” *Journal of Physics C: Solid State Physics* **12**, 4791 (1979).
- [72] F. D. M. Haldane, “‘luttinger liquid theory’ of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas,” *Journal of Physics C: Solid State Physics* **14**, 2585 (1981).
- [73] A. Overhauser, “Note on the band theory of ferromagnetism,” *Physics* **1**, 307 (1965).
- [74] A. Theumann, “Single-particle green’s function for a one-dimensional many-fermion system,” *Journal of Mathematical Physics* **8**, 2460 (1967).
- [75] C. B. Dover, “Properties of the luttinger model,” *Annals of Physics* **50**, 500 (1968).
- [76] K. Efetov y A. Larkin, “Correlation functions in one-dimensional systems with a strong interaction,” *Sov. Phys. JETP* **42**, 12 (1976).
- [77] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One dimension* (Clarendon Press, Oxford, 2004).
- [78] M. Monteverde y M. Núñez Regueiro, “Pressure control of conducting channels in single-wall carbon nanotube networks,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 235501 (2005).
- [79] F. Foieri, L. Arrachea, y M. J. Sánchez, “dc four-point resistance of a double-barrier quantum pump,” *Phys. Rev. B* **79**, 085430 (2009).
- [80] F. Foieri y L. Arrachea, “ac-dc voltage profile and four point impedance of a quantum driven system,” *Phys. Rev. B* **82**, 125434 (2010).
- [81] J. L. D’Amato y H. M. Pastawski, “Conductance of a disordered linear chain including inelastic scattering events,” *Phys. Rev. B* **41**, 7411 (1990).
- [82] D. Venturelli, Ph.D. thesis, SISSA (2011).

- [83] O. M. Auslaender, H. Steinberg, A. Yacoby, Y. Tserkovnyak, B. I. Halperin, K. W. Baldwin, L. N. Pfeiffer, y K. W. West, “Spin-charge separation and localization in one dimension,” *Science* **308**, 88 (2005), <http://www.sciencemag.org/content/308/5718/88.full.pdf>.
- [84] S. Puggnetti, F. Dolcini, D. Bercioux, y H. Grabert, “Electron tunneling into a quantum wire in the fabry-pérot regime,” *Phys. Rev. B* **79**, 035121 (2009).
- [85] E. Fradkin, *Field theories of condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2013).
- [86] V. Venkatachalam, S. Hart, L. Pfeiffer, K. West, y A. Yacoby, “Local thermometry of neutral modes on the quantum hall edge,” *Nature Physics* **8**, 676 (2012).
- [87] L. Arrachea y E. Fradkin, “Chiral heat transport in driven quantum hall and quantum spin hall edge states,” *Phys. Rev. B* **84**, 235436 (2011).
- [88] C. L. Kane y M. P. A. Fisher, “Contacts and edge-state equilibration in the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. B* **52**, 17393 (1995).
- [89] C. L. Kane y M. P. A. Fisher, “Nonequilibrium noise and fractional charge in the quantum hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 724 (1994).
- [90] C. d. C. Chamon, D. E. Freed, y X. G. Wen, “Tunneling and quantum noise in one-dimensional luttinger liquids,” *Phys. Rev. B* **51**, 2363 (1995).
- [91] C. Chamon y E. Fradkin, “Distinct universal conductances in tunneling to quantum hall states: The role of contacts,” *Phys. Rev. B* **56**, 2012 (1997).
- [92] C. L. Kane y M. P. A. Fisher, “Quantized thermal transport in the fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. B* **55**, 15832 (1997).
- [93] G. Viola, S. Das, E. Grosfeld, y A. Stern, “Thermoelectric probe for neutral edge modes in the fractional quantum hall regime,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 146801 (2012).
- [94] D. Karevski y T. Platini, “Quantum nonequilibrium steady states induced by repeated interactions,” *Phys. Rev. Lett.* **102**, 207207 (2009).
- [95] T. Prosen y B. Žunkovič, “Exact solution of markovian master equations for quadratic fermi systems: thermal baths, open xy spin chains and non-equilibrium phase transition,” *New Journal of Physics* **12**, 025016 (2010).
- [96] J. B. Pendry, “Quantum limits to the flow of information and entropy,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **16**, 2161 (1983).

-
- [97] G. Viola y D. P. DiVincenzo, “Hall effect gyrators and circulators,” arXiv preprint arXiv:1312.5190 (2013).
- [98] L. G. C. Rego y G. Kirczenow, “Fractional exclusion statistics and the universal quantum of thermal conductance: A unifying approach,” *Phys. Rev. B* **59**, 13080 (1999).
- [99] B. Sothmann y C. Flindt, “Quantized electronic heat flow,” *Science* **342**, 569 (2013).
- [100] S. Jezouin, F. Parmentier, A. Anthore, U. Gennser, A. Cavanna, Y. Jin, y F. Pierre, “Quantum limit of heat flow across a single electronic channel,” *Science* **342**, 601 (2013).
- [101] J. Jain, *Composite Fermions* (Cambridge University Press, 2012), ISBN 9781107404250.
- [102] V. Meden y K. Schönhammer, “Spectral functions for the tomonaga-luttinger model,” *Phys. Rev. B* **46**, 15753 (1992).
- [103] J. Voit, “Charge-spin separation and the spectral properties of luttinger liquids,” *Phys. Rev. B* **47**, 6740 (1993).
- [104] S. Eggert, H. Johannesson, y A. Mattsson, “Boundary effects on spectral properties of interacting electrons in one dimension,” *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1505 (1996).
- [105] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products, Fifth Edition* (Academic Press, 1994), 5th ed., ISBN 012294755X.