Anexo A

El teorema de convergencia

Esta versión del teorema de convergencia es una traducción directa del trabajo de [4].

A.1 Teorema de Convergencia

Sea $\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq ... \geq \sigma_n \geq 0$ *una secuencia decreciente de números positivos que satisface*

$$\sigma_k \leq \sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j, \quad 0 \leq k \leq n$$

Sea r un número que satisface

$$|r| \leq \sigma_n + \sum_{j=0}^{n} \sigma_j$$

Se define la secuencia $s_0 = 0$ *y* $s_{k+1} = s_k + \rho_k \sigma_k$, $k = 0, 1, ..., n$ *en donde*

$$\rho_k = \operatorname{sgn}(r - s_k) = \begin{cases} 1, & r \geq s_k \\ -1, & r < s_k \end{cases}$$

Entonces

$$|r - s_k| \leq \sigma_n + \sum_{j=k}^{n} \sigma_j, \quad 0 \leq k \leq n$$

En particular, $|r - s_{n+1}| \leq \sigma_n$

Demostración. La demostración se realizara por inducción sobre k. Para k = 0, se tiene

$$|r - s_0| = |r| \leq \sigma_n + \sum_{j=0}^{n} \sigma_j$$

Si se asume que el teorema es válido para k, se obtiene la siguiente hipótesis inductiva (HI)

$$\left|r - s_k\right| \leq \sigma_n + \sum_{j=k}^{n} \sigma_j$$

Considerando el caso para k + 1, se debe demostrar que vale la siguiente tesis inductiva (TI)

$$\left|r - s_{k+1}\right| \leq \sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j$$

Si se opera partiendo del lado izquierdo de la TI, se tiene que

$$\left|r - s_{k+1}\right| = \left|r - s_k - \rho_k \sigma_k\right|$$

Si $r - s_k \geq 0$, entonces $\rho_k = 1$ y $\left|r - s_k - \rho_k \sigma_k\right| = \left|\left|r - s_k\right| - \sigma_k\right|$

Si $r - s_k < 0$, entonces $\rho_k = -1$ y $\left|r - s_k - \rho_k \sigma_k\right| = \left|r - s_k + \sigma_k\right| = \left|\left|r - s_k\right| - \sigma_k\right|$

Por lo tanto en ambos casos $\left|r - s_{k+1}\right| = \left|\left|r - s_k\right| - \sigma_k\right|$

De la primera desigualdad

$$-\left(\sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j\right) \leq -\sigma_k \leq \left|r - s_k\right| - \sigma_k$$

Por HI

$$\left|r - s_k\right| - \sigma_k \leq \left(\sigma_n + \sum_{j=k}^{n} \sigma_j\right) - \sigma_k = \left(\sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j\right)$$

Si se combinan ambas desigualdades

$$\left|r - s_{k+1}\right| = \left|\left|r - s_k\right| - \sigma_k\right| \leq \sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n} \sigma_j$$

Lo que demuestra que el teorema vale para k + 1.

Por último $-\sigma_n \leq \left|r - s_n\right| - \sigma_n \leq 2\sigma_n - \sigma_n = \sigma_n$ y entonces $\left|r - s_{n+1}\right| = \left|\left|r - s_n\right| - \sigma_n\right| \leq \sigma_n$ lo que completa la demostración.

■

Teorema. *Para* $n > 3$*, la secuencia* $\sigma_k = \operatorname{arctg}\left(2^{-k}\right)$ $;k = 0,1,..,n$ *satisface las hipótesis del teorema de convergencia citado en el punto anterior, para todo* $|r| \le \frac{\pi}{2}$.

Demostración. La secuencia

$$\operatorname{arctg}\left(2^{0}\right), \operatorname{arctg}\left(2^{-1}\right), \operatorname{arctg}\left(2^{-2}\right), ..., \operatorname{arctg}\left(2^{-n}\right)$$
$$= \operatorname{arctg}(1), \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right), ..., \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2^{n}}\right)$$

es claramente una secuencia decreciente de números positivos.

El Teorema del Valor Medio (TVM) afirma que existe un número c entre a y b tal que,

$$\frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a} = \frac{1}{1+c^2} \quad ,a < c < b$$

Sea $a = 2^{-(j+1)}$ y $b = 2^{-j}$ en la ecuación del TVM. Entonces $b - a = 2^{-(j+1)}$ y además se verifica que

$$\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+2^{-2(j+1)}} = \frac{2^{2(j+1)}}{1+2^{2(j+1)}}$$

Luego

$$\sigma_j - \sigma_{j+1} = (b-a)\frac{1}{1+c^2} \le \frac{1}{2^{j+1}}\frac{2^{2(j+1)}}{1+2^{2(j+1)}} = \frac{2^{j+1}}{1+2^{2(j+1)}}$$

Sean $a = 0$ y $b = 2^{-j}$ en la ecuación del TVM. Entonces se verifica que

$$\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+b^2} = \frac{1}{1+2^{-2j}} = \frac{2^{2j}}{1+2^{2j}} \qquad \text{y} \qquad \sigma_j = b\frac{1}{1+c^2} \ge \frac{1}{2^j}\frac{2^{2j}}{1+2^{2j}} = \frac{2^j}{1+2^{2j}}$$

se combinan las desigualdades que involucran a las σ_j utilizando series.

$$\sigma_k - \sigma_n = \left(\sigma_k - \sigma_{k+1}\right) + \left(\sigma_{k+1} - \sigma_{k+2}\right) + ... + \left(\sigma_{n-1} - \sigma_n\right)$$

$$= \sum_{j=k}^{n-1}\left(\sigma_j - \sigma_{j+1}\right) \le \sum_{j=k}^{n-1}\frac{2^{j+1}}{1+2^{2(j+1)}} = \sum_{j=k+1}^{n}\frac{2^j}{1+2^{2j}} \le \sum_{j=k+1}^{n}\sigma_j$$

con lo que se concluye que

$$\sigma_k \le \sigma_n + \sum_{j=k+1}^{n}\sigma_j \quad ,0 \le k < n$$

Como la secuencia $\operatorname{arctg}(1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2^n}\right)>\frac{\pi}{2} \quad, n \geq 3$ se puede concluir que

$$|r| \leq \frac{\pi}{2} < \sum_{j=0}^{3} \operatorname{arctg}\left(2^{-j}\right) < \sigma_n + \sum_{j=0}^{n} \sigma_j$$

con lo que queda demostrado el teorema.

■

A.2 Convergencia del algoritmo CORDIC

Si se define la secuencia $s_k = \phi - z_k = \sum_{j=0}^{k-1} d_j \sigma_j$ puede apreciarse que

$$s_0 = \phi - z_0 = 0$$

$$\ldots$$

$$s_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} d_j \sigma_j = s_k + d_k \sigma_k$$

Con $r = \phi$ se tiene que $\rho_k = \operatorname{sgn}(r - s_k) = \operatorname{sgn}(\phi - s_k) = \operatorname{sgn}(z_k) = d_k$

Por lo tanto la secuencia $|\phi - s_{n+1}| \leq \sigma_n = \operatorname{arctg}\left(2^{-n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ satisface el teorema de convergencia y se puede concluir que la secuencia utilizada por el algoritmo CORDIC, converge de acuerdo a lo establecido en el teorema anterior.

■