

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Física



TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, ÁREA FÍSICA

---

# Más allá de Heisenberg

Relaciones de incerteza  
tipo Landau-Pollak y tipo entrópicas

---

POR LIC. GUSTAVO MARTIN BOSYK

Directora: Dra. Mariela Portesi  
Lugar de trabajo: Departamento de Física

LA PLATA, JULIO 2014

*A mi viejo*

# AGRADECIMIENTOS

---

El haber llegado a este punto de estar a un paso de recibirme de Doctor en Ciencias Físicas (suena fuerte), no es sólo fruto de mi esfuerzo y dedicación de estos 4 años, sino de un montón de personas que de una u otra manera me han ayudado a lo largo de este camino. ¡A todos ellos gracias!

A riesgo de olvidarme de alguno, voy a comenzar con los agradecimientos personales.

Comienzo, como no podía ser de otra forma, con Mariela, mi directora... Gracias por haberme guiado y haber confiado en mí dándome las libertades necesarias para que crezca. Gracias por estar siempre dispuesta y predispuesta a resolver todo tipo de cuestiones, académicas y otras no tanto. Juntos hemos transitado este camino y lo hemos pasado bastante bien, con dedicación y alegría y alguna que otra discusión con los referís... Aprendí y disfruté mucho haber trabajado juntos, y espero que sea la continuación de algo todavía mejor.

Además, gracias a Mariela conocí a Steeve, una persona fenomenal desde donde se lo mire, desde lo académico como desde lo personal. Ojalá que puedas estar en el día de la defensa, para olvidar aquel día de tristeza en el que fuimos a la cancha y descendía el rojo (por suerte ya pasó!!!). Gracias por permitirme trabajar juntos codo a codo. Gracias por haberme invitado a Grenoble y compartir con vos y tu familia y por la clase de esquí. Con vos y Mariela hicimos un lindo equipo de trabajo.

A Angel Plastino por haber dado la oportunidad de trabajar en su grupo y al Instituto de Física La Plata por darme las facilidades para realizar mi Tesis doctoral.

A Walter y Tristán por haberme recibido en Córdoba en dos oportunidades. Por haber tomado la posta en las III Jornadas de Fundamentos de Cuántica que organizamos juntos y que salieron muy bien.

A los granadinos, Jesús, Pablo, Rosario, Juan y Alex por haberme recibido y dejarme participar en su grupo durante mi estadía. Además, gracias por haberme invitado a la escuela Quantum Matter.

A Holik por las infinidad de discusiones de todo tipo, por haber leído la Tesis, por sus observaciones agudas y por estar siempre cuando lo necesité.

A mis amigos de siempre, Emi, Gus, Iván, César, el Fune y el Bure, por ser incondicionales... A todos mis amig@s!!!

---

A la gente que conocí en La Plata! A Felipe y Marielita por tener siempre abiertas las puertas de su oficina para cualquier cosa. A Lore y Mauricio por poder organizar cosas juntos. A Raúl Rossignoli por el curso de teoría de la información cuántica que me gustó muchísimo.

A mi familia. A mi vieja y mi viejo (que siempre lo tengo presente) que desde chiquito me “hincharon” con la educación. A mis hermanas, especialmente a Caro y a Lu por estar siempre, y cocinarme poco esta vez!!! A mis cuñados, Nahuel y Faby. A mi otra familia, la de Lau que ahora también es mía.

Finalmente, a la mejor de todas, a mi amor, Lau, que me banca en todas!!!

*Gustavo Martín Bosyk*

*La Plata, Argentina, Julio 2014*

# PREFACIO

---

La presente Tesis doctoral es presentada a la Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, como requisito parcial para acceder al título de Doctor en Ciencias, Área Física.

Este trabajo corresponde al período Julio 2010 - Julio 2014, realizado en el Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata y en el Instituto de Física La Plata, bajo la dirección de la Dra. Mariela Portesi. Durante este período conté con el financiamiento de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por medio de las becas de postgrado de nivel inicial y de tipo II, respectivamente.

Además, parte de los resultados de esta Tesis fueron desarrollados durante mis estancias de investigación en los siguientes centros:

- Lugar: Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba (Córdoba, Argentina).  
Investigador responsable: Dr. Pedro Walter Lamberti.  
Financiamiento: programa Inter-U de la Secretaría de Políticas Universitarias.  
Período: Mayo 2013.
- Lugar: Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Granada (Granada, España)  
Investigador responsable: Dr. Jesús Sánchez-Dehesa.  
Financiamiento: programa de movilidad entre universidades andaluzas e iberoamericanas de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado.  
Período: Septiembre 2013.
- Lugar: Laboratoire Grenoblois d'Image, Parole, Signal et Automatique (Grenoble, Francia).  
Investigador responsable: Dr. Steeve Zozor.  
Financiamiento: por parte del grupo receptor.  
Período: Enero-Febrero 2014.

La mayor parte de los resultados originales que expongo en esta Tesis dieron lugar a las siguientes publicaciones en revistas científicas internacionales con referato (al final de cada referencia indico el capítulo de la Tesis con el que se corresponde), como así también, fueron presentados en numerosas ponencias en congresos nacionales e internacionales:

- 
1. G.M. Bosyk, T.M. Osán, P.W. Lamberti and M. Portesi.  
*Geometric formulation of the uncertainty principle.*  
Physical Review A **89**, 034101 (2014).  
Capítulo 2.
  2. S. Zozor, G.M Bosyk, and M. Portesi.  
*On a generalized entropic uncertainty relation in the case of the qubit.*  
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, 465301 (2013).  
Capítulo 3.
  3. G.M Bosyk, M. Portesi, F. Holik and A.L. Plastino.  
*On the connection between complementarity and uncertainty principles in the Mach–Zehnder interferometric setting.*  
Physica Scripta **87**, 065002 (2013).  
Capítulo 4.
  4. G.M Bosyk, M. Portesi and A.L. Plastino.  
*Collision entropy and optimal uncertainty.*  
Physical Review A **85**, 012108 (2012).  
Capítulo 3.
  5. G.M Bosyk, M. Portesi, A.L. Plastino and S. Zozor.  
*Comment on “Improved bounds on entropic uncertainty relations”.*  
Physical Review A **84**, 056101 (2011).  
Capítulo 3.

Además de los artículos publicados, los siguientes trabajos se encuentran bajo referato:

1. G.M. Bosyk, S. Zozor, M. Portesi, T.M. Osán and P.W. Lamberti.  
*Uncertainty relations à la Landau–Pollak for Positive Operator Valued Measures.*  
arXiv:1406.3537 [quant-ph] (2014), enviado a Physical Review A.  
Capítulo 2.
2. S. Zozor, G.M Bosyk, and M. Portesi.  
*General entropic uncertainty relations for  $N$ -level systems.*  
arXiv:1311.5602v2 [quant-ph] (2014), enviado a Journal of Physics A, en revisión.  
Capítulo 3.

# RESUMEN

---

En esta Tesis desarrollamos dos formulaciones diferentes (pero vinculadas entre sí) del principio de incerteza de la mecánica cuántica para pares de observables actuando sobre un espacio de Hilbert finito, yendo más allá del alcance de las tradicionales relaciones de incerteza de Heisenberg, de Robertson y de Schrödinger..

Una de las formulaciones que desarrollamos es una extensión de la desigualdad de Landau y Pollak al caso de medidas de operadores con valores positivos y estados mixtos. Para lograr esto hicimos uso de un enfoque geométrico, definiendo la incerteza asociada al resultado de la medición de un observable a partir de métricas entre estados cuánticos. Esto nos permitió mostrar, entre otros resultados, que la métrica de Wootters da la desigualdad más restrictiva a las probabilidades máximas de los observables.

La otra formulación que desarrollamos se basa en un enfoque informacional. Para ello introducimos una familia de entropías generalizadas que cuantifican la incerteza asociada a un vector de probabilidad. Obtuvimos relaciones de incerteza tipo entrópicas resolviendo el problema de minimización de la suma de entropías generalizadas sujeta a la desigualdad de Landau–Pollak. De esta manera, extendimos los resultados de de Vicente y Sánchez-Ruiz que consideraban la entropía de Shannon a otras entropías, medidas cuánticas generalizadas y estados mixtos. Asimismo, realizamos un estudio comparativo entre las cotas obtenidas y otras disponibles en la literatura, obteniendo que en muchas de las situaciones consideradas nuestra cota es más fuerte. Además, consideramos el caso del qubit de manera particular y obtuvimos la cota óptima para este caso.

Por último, estudiamos la conexión entre los principios de incerteza y complementariedad, en el contexto del interferómetro de Mach–Zehnder. Encontramos que las relaciones de Schrödinger y de Landau–Pollak para ciertos observables son equivalentes a la relación de dualidad onda–corpúsculo. Con respecto a las relaciones usando entropías, la equivalencia depende de la elección de los índices entrópicos. En particular, si los índices son iguales no existe tal equivalencia. Mostramos que esta situación sirve para discernir entre los diferentes estados de mínima incerteza.

---

**Palabras Clave:** principio de incerteza, relaciones de incerteza tipo Landau-Pollak, relaciones de incerteza tipo entrópicas, complementariedad.

---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Principio de incerteza de Heisenberg . . . . .	2
1.2	Estados cuánticos y medidas de observables . . . . .	4
1.3	Relación de incerteza de Robertson–Schrödinger . . . . .	6
1.4	Relación de incerteza de Landau–Pollak . . . . .	9
1.5	Relaciones de incerteza entrópicas . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Relaciones de incerteza tipo Landau–Pollak</b>	<b>14</b>
2.1	Desigualdad de Landau–Pollak . . . . .	15
2.2	Métricas y medidas de incerteza . . . . .	16
2.3	Relaciones tipo Landau–Pollak . . . . .	17
2.3.1	Proyectores y estados puros . . . . .	23
2.3.2	Operadores positivos y estados puros . . . . .	24
2.3.3	Operadores positivos y estados mixtos . . . . .	26
2.3.4	Desigualdad más restrictiva . . . . .	27
2.4	Resultados numéricos . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Relaciones de incerteza tipo entrópicas</b>	<b>31</b>
3.1	Entropías generalizadas . . . . .	32
3.2	Formulación del problema y estado del arte . . . . .	34
3.3	Caso $N$ -dimensional . . . . .	39
3.3.1	Cota a la suma de entropías generalizadas . . . . .	39
3.3.2	Comparación con otras cotas . . . . .	42
3.4	Caso qubit ( $N = 2$ ) . . . . .	48
3.4.1	Cota óptima y estados minimizantes . . . . .	48
3.4.2	Cota para índices entrópicos particulares . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Conexión entre los principios de complementariedad e incerteza</b>	<b>56</b>
4.1	Relación de dualidad . . . . .	57
4.2	Dualidad y relación de Robertson–Schrödinger . . . . .	60
4.3	Dualidad y relación de Landau–Pollak . . . . .	62
4.4	Dualidad y relaciones entrópicas . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
5.1	Discusión de los resultados . . . . .	67
5.2	Perspectivas . . . . .	69
<b>A</b>	<b>Generación aleatoria de estados y observables</b>	<b>71</b>
A.1	Generación aleatoria de estados cuánticos . . . . .	72
A.2	Generación aleatoria de matrices unitarias . . . . .	73



## Índice General

---

A.3	Generación aleatoria de POVM . . . . .	74
<b>B</b>	<b>Demostraciones de las relaciones de incerteza tipo entrópicas</b>	<b>75</b>
B.1	Caso $N$ -dimensional . . . . .	76
B.1.1	Demostración de la Proposición 3.1 . . . . .	76
B.1.2	Demostración del Corolario 3.1 . . . . .	82
B.1.3	Demostración del Corolario 3.2 . . . . .	84
B.1.4	Demostración del Corolario 3.3 . . . . .	85
B.2	Caso qubit ( $N = 2$ ) . . . . .	86
B.2.1	Demostración de la Proposición 3.2 . . . . .	86
B.2.2	Demostración del Corolario 3.4 . . . . .	92
B.2.3	Demostración del Corolario 3.5 . . . . .	93
B.2.4	Demostración de la Proposición 3.3 . . . . .	94
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>96</b>

# 1

## INTRODUCCIÓN

---

*“Quantum theory provides us with a striking illustration of the fact that we can fully understand a connection though we can only speak of it in images and parables.”*

*Werner Heisenberg*

---

1.1	Principio de incerteza de Heisenberg . . . . .	2
1.2	Estados cuánticos y medidas de observables . . . . .	4
1.3	Relación de incerteza de Robertson–Schrödinger . . . . .	6
1.4	Relación de incerteza de Landau–Pollak . . . . .	9
1.5	Relaciones de incerteza entrópicas . . . . .	10

---

## 1.1 Principio de incerteza de Heisenberg

No es ninguna exageración decir que el *principio de incerteza de Heisenberg* [Hei27] es una de las “piedras angulares” de la mecánica cuántica, marcando claramente una de las diferencias entre nuestras concepciones del mundo clásico y el cuántico. Esta diferencia se debe fundamentalmente a que la mecánica cuántica es un teoría no determinista, en el sentido de que la teoría sólo predice las probabilidades -calculadas usando la regla de Born- de que en un experimento se obtenga un determinado valor para un observable dado. En este sentido, la medición de una determinada magnitud, conlleva una incertidumbre intrínseca respecto de su resultado. Sin embargo, esta incerteza asociada al resultado de la medición puede ser arbitrariamente pequeña si el sistema es preparado en un estado arbitrariamente “cercano” a alguno de los autoestados del observable en cuestión. Más aún, puede existir certeza respecto del resultado de la medición si el estado del sistema viene representado por uno de estos autoestados. Esta situación cambia drásticamente cuando consideramos la medición de dos (o más) observables incompatibles, lo que da lugar al principio de incerteza que enunciaremos a continuación: *existe una limitación intrínseca en la predicción de los resultados de la medición de dos (o más) observables incompatibles en un sistema cuántico*. De forma equivalente, puede decirse que *no es posible preparar al estado del sistema de forma tal que las distribuciones de probabilidad de los observables estén simultáneamente bien localizadas*.

Vale la pena aclarar que no existe en la literatura un acuerdo general de como enunciar el principio de incerteza. De hecho, aparecen diferentes formulaciones e interpretaciones del mismo [BHL07]. Estas divergencias pueden rastrearse en el problema más general de la falta de consenso respecto de la interpretación de la mecánica cuántica, como así también en las vagas definiciones respecto del término “incerteza” en el trabajo seminal de Heisenberg. Si bien estas cuestiones exceden el objeto de estudio de esta Tesis, nos limitaremos a señalar que existen otros enunciados que también se conocen como principio de incerteza de Heisenberg. Por ejemplo, aquellos que se refieren a la imposibilidad de medir *simultáneamente* observables incompatibles o a la imposibilidad de medir un observable *sin perturbar* al otro [BHL07]. En nuestro caso, seguimos la interpretación estadística de Ballentine [Bal70] y consideramos la preparación de un gran número de sistemas cuánticos en estados idénticos. En unos sistemas se mide un observable y, en el resto, el otro observable. De acuerdo a los principios de la mecánica clásica ambas medidas podrían tener un grado de predictibilidad arbitrario. Sin embargo, el principio de incerteza pone un límite insalvable a esta posibilidad en el caso de observables incompatibles.

En esta Tesis nos enfocamos en diferentes formulaciones cuantitativas del principio de incerteza, más allá del alcance de las tradicionales desigualdades de Heisenberg, Robertson y Schrödinger. Denominamos *relación de incerteza* a cualquier desigualdad matemática que pretenda capturar la esencia del principio. Más aún, nos enfocaremos en relaciones de incerteza de la forma [Deu83,Uff90]

$$\mathcal{U}(A, B; \rho) \geq \mathcal{C}(A, B), \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{U}(A, B; \rho)$  es una cantidad apropiada que refleja la incerteza conjunta de los resultados de la medición de los observables  $A$  y  $B$  cuando el sistema se encuentra descrito por el operador densidad  $\rho$ , y la cota  $\mathcal{C}(A, B)$  es una cantidad fija, independiente del estado del sistema y positiva (salvo que los observables posean al menos un autoestado en común, cosa que ocurre cuando  $A$  y  $B$  conmutan).

La relación de incerteza de Heisenberg [Hei27],

$$\Delta_{\Psi}q\Delta_{\Psi}p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2)$$

es una de las desigualdades más conocidas del ámbito de la Física que incluso, ha traspasado sus fronteras. La demostración formal de la misma se debe a Kennard [Ken27] quien la obtuvo usando propiedades básicas de la transformada de Fourier. Aquí  $\Delta_{\Psi}q = \sqrt{\int (x - \langle x \rangle_{\Psi})^2 |\Psi(x)|^2 dx}$  denota la desviación estándar en posición, siendo  $\langle x \rangle_{\Psi} = \int x |\Psi(x)|^2 dx$  el valor de expectación y  $\Psi(x)$  la función de onda en la representación de posición; de forma análoga,  $\Delta_{\Psi}p$  denota la desviación estándar en momento. Luego, el producto de las desviaciones estándar que, en este caso, cuantifica el grado de predicción simultánea de los valores de la posición y el momento, está acotado inferiormente por una cantidad fija dada por la mitad de la constante de Planck reducida. Es decir, cuanto menor es la incerteza en posición, mayor es en momento, y viceversa. Por lo tanto, la desigualdad (1.2) es una formulación cuantitativa del principio de incerteza para los observables posición y momento. Sin embargo, la extensión de Robertson [Rob29] y de Schrödinger [Sch30] a otros pares de observables incompatibles, en general, no presenta el aspecto de (1.1) como mostramos en la Sección 1.3. Esto ha motivado al desarrollo de formulaciones alternativas del principio. Discutiremos algunas de ellas en las Secciones 1.4 y 1.5.

Nuestro principal aporte es la formulación de dos métodos (diferentes pero vinculados entre sí) que permiten derivar relaciones de incerteza de la forma (1.1). La primer formulación se basa en el desarrollo hecho por Landau y Pollak [LP61] y en su versión cuántica dada por Maassen y Uffink en [MU88,Uff90]. En el Capítulo 2, presentamos un extensión de los resultados de Landau y Pollak a situaciones más generales, haciendo uso de un enfoque geométrico en el espacio de estados cuánticos. La segunda formulación que consideramos es la más

usual en el área de la información cuántica y se centra en el uso de entropías, por ejemplo la de Shannon, como cuantificador de incerteza asociado a los resultados de una medición. Esta línea de trabajo se basa en los trabajos pioneros de [Bec75, BBM75, Deu83, Kra87, MU88], entre otros. En el Capítulo 3, presentamos una extensión de los resultados obtenidos por de Vicente y Sánchez-Ruiz [dVSR08], para entropías que generalizan a la de Shannon. Finalmente, en el Capítulo 4 abordamos un tópico que ha sido de debate en las últimas décadas en el área de los fundamentos de cuántica, como es la conexión entre los principios de complementariedad y de incerteza [WZ79, SEW91, STCW94, ESW95, JSV95, Eng96, BST<sup>+</sup>99, DR00, Lui01, BS06, CKW14]. En particular, discutimos este punto en el contexto del interferómetro de Mach-Zehnder estudiando los vínculos, si es que los hay, entre la relación de dualidad onda-corpúsculo y las distintas relaciones de incerteza.

## 1.2

## Estados cuánticos y medidas de observables

Antes de revisar diferentes formulaciones del principio de incerteza, enunciaremos algunos de los postulados de la mecánica cuántica<sup>1</sup> con el propósito de establecer el marco teórico general dentro del cual hemos desarrollado esta Tesis doctoral.

Consideraríamos sistemas cuánticos con un espacio de Hilbert asociado finito de dimensión  $N$ , es decir,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ .

**Postulado 1.1.** *Cada sistema físico tiene asociado un espacio vectorial complejo con un producto interno, es decir, un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . El estado del sistema está completamente descrito por un operador densidad o matriz densidad  $\rho$  que actúa en  $\mathcal{H}$  tal que  $\rho \geq 0$  (semidefinido positivo) y  $\text{Tr}\rho = 1$  (normalizado).*

Denominamos  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\rho \geq 0 \text{ y } \text{Tr}\rho = 1\}$  al conjunto de operadores densidad que actúan sobre  $\mathcal{H}$ . Este conjunto tiene la propiedad de ser un conjunto convexo. Esto significa que si  $\rho_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  y  $\rho_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  son operadores densidad, la combinación convexa  $\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  también lo es y pertenece a  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Los *puntos puros* de este convexo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , es decir, aquellos puntos que no se pueden escribir como combinación convexa de dos o más puntos del convexo, se conocen como *estados puros* y satisfacen que  $\rho^2 = \rho$ . En este caso, el estado puede ser descrito por un vector  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  de

<sup>1</sup>Introducimos los postulados de la teoría siguiendo el desarrollo dado en el libro de Nielsen y Chuang [NC10].

norma uno, y la matriz densidad toma la forma  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Por el contrario, los *puntos no puros*, es decir, aquellos puntos que sí se pueden escribir como combinación convexa de dos o más puntos, se denominan *estados mixtos*.

**Postulado 1.2.** *Una medida cuántica (generalizada) sobre un observable con  $N_{\mathcal{M}}$  valores se describe por medio de un conjunto de operadores  $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{M}}}$  que actúan sobre  $\mathcal{H}$  y satisfacen la relación de completitud:  $\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{M}}} M_i^\dagger M_i = I$ . El índice  $i$  se refiere al  $i$ -ésimo posible resultado de la medición o valor del observable. Si el estado del sistema inmediatamente antes de realizar la medición es  $\rho$ , la probabilidad de que se dé el  $i$ -ésimo valor está dada por*

$$p_i(\mathcal{M}; \rho) = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho). \quad (1.3)$$

*Además, inmediatamente después de realizado la medida, el estado del sistema pasa a ser*

$$\rho_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)}, \quad (1.4)$$

*en el caso de que se haya obtenido el  $i$ -ésimo resultado.*

Este postulado da cuenta de dos aspectos fundamentales. Por un lado, la expresión (1.3) da la regla (generalización de la regla de Born) que describe la estadística de la medición, esto es, las respectivas probabilidades de ocurrencia de los diferentes valores que puede tomar el observable. Por otro lado, la expresión (1.4) da la regla que describe el estado del sistema luego de la medición.

Para el estudio de relaciones de incerteza lo que nos interesa es la estadística del observable. En este caso, podemos hacer uso del formalismo de las *medidas con valores de operadores positivos* o abreviadamente *POVM* (sigla que viene del inglés, Positive Operator Valued Measures). Un POVM sobre un observable con  $N_{\mathcal{A}}$  posibles valores es un conjunto de operadores positivos  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}}$  que actúan sobre  $\mathcal{H}$  y satisfacen la relación de completitud:  $\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}} A_i = I$ . Si el estado viene dado por  $\rho$ , la estadística de los posibles resultados del POVM  $\mathcal{A}$  está dada por

$$p_i(\mathcal{A}; \rho) = \text{Tr}(A_i \rho). \quad (1.5)$$

Observamos que el POVM no es más que una consecuencia del Postulado 1.2 definiendo  $A_i \equiv M_i^\dagger M_i$ .

Una situación de particular interés es cuando los elementos del POVM, además de ser operadores positivos que satisfacen la relación de completitud, son proyectores ortogonales entre sí. En este caso estamos ante las comúnmente denominadas *medidas proyectivas* o abreviadamente *PVM* (sigla que viene del inglés, Projective Valued Measure). Denotamos con  $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}}$  al conjunto

de proyectores que actúan sobre  $\mathcal{H}$  y decimos que es un PVM si, además, se cumple que  $\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}} P_i = I$  y  $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$  para todo  $i, j = 1 \dots N_{\mathcal{P}}$ . Si el estado está dado por  $\rho$ , la estadística de los posibles resultados del PVM  $\mathcal{P}$  está dada por

$$p_i(\mathcal{P}; \rho) = \text{Tr}(P_i \rho). \quad (1.6)$$

Otro caso particular, el más usual en los libros básicos de mecánica cuántica, es considerar *observables con espectro discreto y no degenerado*. Este caso corresponde a un PVM donde todos sus elementos son proyectores ortogonales entre sí y de rango uno:  $|a_i\rangle\langle a_i|$  siendo  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  la base de autoestados del observable  $A$ . Si el estado está dado por  $\rho$ , la estadística de los valores de  $A$  se reduce a

$$p_i(A; \rho) = \langle a_i | \rho | a_i \rangle. \quad (1.7)$$

Finalmente, si el estado es puro, dado por  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , recuperamos la regla de Born en su formulación más conocida:

$$p_i(A; \Psi) = |\langle a_i | \Psi \rangle|^2. \quad (1.8)$$

A modo de resumen, en la siguiente tabla damos la nomenclatura utilizada para los diferentes casos en el cálculo de las probabilidades:

Caso	Probabilidad
Medida cuántica generalizada $\mathcal{M}$	$p_i(\mathcal{M}; \rho) = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)$
POVM $\mathcal{A}$	$p_i(\mathcal{A}; \rho) = \text{Tr}(A_i \rho)$
PVM $\mathcal{P}$	$p_i(\mathcal{P}; \rho) = \text{Tr}(P_i \rho)$
Observable $A$ con espectro discreto y no degenerado	$p_i(A; \rho) = \langle a_i   \rho   a_i \rangle$
Regla de Born para $A$ y estado puro $ \Psi\rangle$	$p_i(A; \Psi) =  \langle a_i   \Psi \rangle ^2$

**Tabla 1.1:** Nomenclatura utilizada en el cálculo de las probabilidades.

## 1.3 Relación de incerteza de Robertson–Schrödinger

En 1929, Robertson [Rob29] generalizó la relación de incerteza (1.2) planteada por Heisenberg para posición y momento a un par arbitrario de observables  $A$  y  $B$ :

$$(\Delta_\rho A)^2 (\Delta_\rho B)^2 \geq \left| \frac{\langle [A, B] \rangle_\rho}{2i} \right|^2. \quad (1.9)$$

Aquí  $(\Delta_\rho A)^2 = \langle A^2 \rangle_\rho - \langle A \rangle_\rho^2$  denota la varianza del observable  $A$ , siendo  $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(A\rho)$  el valor de expectación y  $\rho$  la matriz densidad que describe el estado del sistema; de forma análoga,  $(\Delta_\rho B)^2$  denota la varianza de  $B$ . En este caso, la cota inferior al producto de las varianzas es proporcional al valor de expectación del conmutador entre los observables,  $[A, B] = AB - BA$ . La demostración de (1.9) se basa en la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Para  $A = p$  y  $B = q$ , la relación de Robertson se reduce a la de Heisenberg, ya que  $[p, q] = i\hbar I$ . Este resultado es compatible con la concepción de Heisenberg, dado que conectaba dos de las peculiaridades de la por entonces revolucionaria teoría cuántica: el principio de incerteza y la no conmutatividad.

Un año después, Schrödinger [Sch30] mejoró la relación de Robertson teniendo en cuenta el término de covarianza,

$$(\Delta_\rho A)^2 (\Delta_\rho B)^2 \geq \left| \frac{\langle \{A, B\} \rangle_\rho}{2} - \langle A \rangle_\rho \langle B \rangle_\rho \right|^2 + \left| \frac{\langle [A, B] \rangle_\rho}{2i} \right|^2, \quad (1.10)$$

donde  $\{A, B\} = AB + BA$  denota el anti-conmutador entre los observables.

Las desigualdades (1.2), (1.9) y (1.10) son tres formulaciones cuantitativas del principio de incerteza. No obstante, existe una diferencia fundamental entre ellas, una de las principales motivaciones de esta Tesis y del estudio de otras relaciones de incerteza, a saber: en (1.2) la cota es una cantidad fija, independiente del estado del sistema; por el contrario, en (1.9) y (1.10) la cota depende (en principio) del estado del sistema por medio de los valores de expectación del conmutador y anticonmutador, o sea, no son, en general, de la forma (1.1). De hecho, considerando observables actuando sobre un espacio de Hilbert finito, siempre es posible preparar al sistema de forma tal que las cotas en (1.9) y (1.10) se anulen. En este caso las relaciones de Robertson y Schrödinger se vuelven triviales, y por lo tanto, no expresan satisfactoriamente al principio de incerteza. Esto ocurre, por ejemplo, si uno considera el estado puro  $|\Psi\rangle$  igual a alguno de los autoestados de de los observables, ambas desigualdades se vuelven triviales:  $0 \geq 0$ . Más aún, existen matrices densidad  $\rho$  para las cuales la cota se anula, mientras que el producto de las varianzas no, resultando nuevamente triviales las formulaciones de Robertson y de Schrödinger:  $(\Delta_\rho A)^2 (\Delta_\rho B)^2 \geq 0$ .

Ilustramos esto último con los siguientes ejemplos en un espacio de Hilbert de dimensión 2. Sea  $\rho$  la matriz densidad de un estado cuántico bidimensional, también conocido como un *qubit*. Existe una forma geométrica de visualizar el estado del qubit por medio de la representación de Bloch. De hecho, para cada estado de qubit existe un vector  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$  con  $\|\mathbf{s}\| \leq 1$  de forma tal que la



matriz densidad  $\rho$  se escribe como

$$\rho = \frac{I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad (1.11)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  es el vector formado por las matrices de Pauli. Los estados puros  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  de qubit tienen asociados vectores  $\mathbf{s}$  con norma igual a uno, es decir, vectores sobre la esfera unitaria. Por otra parte, en esta representación, observables con valores  $\pm 1$  toman la forma

$$A = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.12)$$

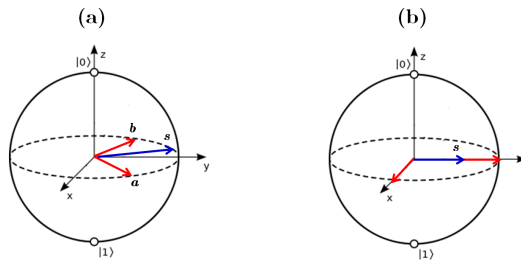
$$B = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.13)$$

donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son dos vectores unitarios de  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, las relaciones de Robertson (1.9) y de Schrödinger (1.10), en la representación de Bloch, se escriben respectivamente como

$$(1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})^2) (1 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{s})^2) \geq |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{s}|^2 \quad (1.14)$$

$$(1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})^2) (1 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{s})^2) \geq |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{s})|^2 + |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{s}|^2 \quad (1.15)$$

Observamos que para  $\mathbf{s} \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ , o sea, estados que no son autoestado de  $A$  ni de  $B$ , el producto de las varianzas es no nulo. Tenemos que cualquier vector  $\mathbf{s}$  que pertenece al plano formado por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , anula la cota en (1.14) (ver Fig. 1.1.(a)). Por lo tanto, la relación de incerteza de Robertson se vuelve trivial. En particular, si consideramos direcciones ortogonales de spin, por ejemplo  $\mathbf{a} = \hat{x}$  y  $\mathbf{b} = \hat{y}$ , los vectores  $\mathbf{s}$  paralelos a  $\hat{x}$  o  $\hat{y}$  con  $\|\mathbf{s}\| < 1$  (estados mixtos), también anulan la cota (1.15) (ver Fig. 1.1.(b)). Por lo que, las relaciones de Robertson y de Schrödinger no dan cuenta de la incompatibilidad entre direcciones ortogonales de spin- $\frac{1}{2}$ .



**Figura 1.1:** Representación de estados sobre la esfera de Bloch que trivializan las relaciones de incerteza de Robertson y de Schrödinger. (a) Cualquier vector  $\mathbf{s}$  (con  $\mathbf{s} \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ) en el plano formado por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  anula la cota inferior en (1.14), y (b) cualquier vector  $\mathbf{s}$  (con  $\|\mathbf{s}\| < 1$ ) sobre el eje  $y$  o  $x$ , anula la cota inferior en (1.15)

Otra crítica que se les hace a estas relaciones de incerteza es el uso de la varianza como cuantificador de la incerteza asociada al resultado de la medición [dV08]. Consideremos dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  distribuidas con el mismo vector de probabilidad  $p \in \mathcal{P}_N = \{[p_1 \cdots p_N]^t \in [0; 1]^N, \sum_i p_i = 1\}$ . Las varianzas no son necesariamente iguales ya que estas dependen no sólo del vector de probabilidad, sino también de los valores que toman las variables aleatorias, es decir, puede suceder que  $(\Delta(X))^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \langle X \rangle_p)^2 p_i \neq (\Delta(Y))^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \langle Y \rangle_p)^2 p_i$  para un mismo  $p$ . Esta situación resulta insatisfactoria, pues la varianza no refleja que las dos variables aleatorias regidas por la misma distribución de probabilidad tienen asociada la misma incertidumbre.

Estas críticas han motivado a diversos autores a revisar la formulación original del principio de incerteza proponiendo nuevas y modernas formulaciones del mismo (ver, por ejemplo, las Refs. [BBM75, Deu83, MU88, Lar90, Lui07, Uff90, WW10, BBR11, Zoz12]). Cabe mencionar que el desarrollo de relaciones de incertezas es un campo de actualidad y de interés en la comunidad cuántica, aún a casi 90 años del trabajo fundacional de Heisenberg, no sólo por ser una cuestión fundamental de la teoría sino también por sus diversas aplicaciones en problemas de información cuántica, por ejemplo, en la detección y caracterización del entrelazamiento [Gio04, GL04, dVSR05, Hua10, ZP10], en la prueba de la seguridad de protocolos criptográficos [NBW12, BLMR13], entre otras aplicaciones [BW07, WYM09, BCC<sup>+</sup>10, WW10, OW10, Ras13, SBH14].

## 1.4 Relación de incerteza de Landau–Pollak

Notablemente, el principio de incerteza también tiene su analogía en la teoría de detección de señales [Gab46]. En este contexto, una relación de incerteza para tiempo y frecuencia que es bien conocida en la comunidad de señales, es la que obtuvieron Landau y Pollak en 1961 [LP61]. Sin embargo, este resultado no tuvo impacto en la comunidad cuántica sino hasta casi tres décadas después de la publicación de dicho trabajo, gracias a los pioneros Maassen y Uffink [MU88, Uff90] quienes dieron la versión cuántica de la relación de Landau y Pollak que enunciamos a continuación.

Consideremos un sistema cuántico preparado en un estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  y sean  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$  bases de autoestados de dos observables  $A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces, se puede probar la desigualdad

$$\arccos \sqrt{P_{A;\Psi}} + \arccos \sqrt{P_{B;\Psi}} \geq \arccos c, \quad (1.16)$$

donde  $P_{A;\Psi} \equiv \max_i p_i(A; \Psi)$  con  $p_i(A; \Psi)$  dado por (1.8) (de forma análoga se define  $P_{B;\Psi}$ ) y

$$c = \max_{ij} |\langle a_i | b_j \rangle|^2 \in \left[ \frac{1}{\sqrt{N}}, 1 \right] \quad (1.17)$$

es el *solapamiento* entre las bases de los observables. Denominamos a la expresión (1.16) relación de incerteza o desigualdad de Landau–Pollak, que abreviamos con las sigla LPI (sigla que viene del inglés, Landau–Pollak inequality).

Observamos que LPI (1.16) captura satisfactoriamente la esencia del principio de incerteza y supera las críticas que discutimos en la Sección anterior. Específicamente, LPI proporciona una cota no trivial e independiente del estado para las estadísticas de los observables cuando  $c < 1$ , impidiendo que las probabilidades máximas estén simultánea y arbitrariamente cerca de 1. Además, la cota se anula sólo cuando  $c = 1$ , que corresponde al caso extremo de observables con al menos un autoestado en común.

El otro caso extremo, que es de particular interés, corresponde a la situación de *observables complementarios*, por ejemplo,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , en cuyo caso el solapamiento vale  $c = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . En este caso, LPI establece que si tenemos certeza acerca de un observable, entonces tenemos máxima ignorancia respecto del otro ya que su estadística viene dada por un vector de probabilidad uniformemente distribuido: si  $P_{A;\Psi} = 1 \Rightarrow p_j(B; \Psi) = \frac{1}{N} \forall j$  (lo mismo sucede intercambiando  $A$  con  $B$ ). Por lo tanto, el solapamiento mide el grado de incompatibilidad entre las dos mediciones de los observables, yendo más allá del alcance del valor medio del conmutador (la cantidad originalmente empleada). Además, en este caso la cota resulta óptima, en el sentido de que existen estado cuánticos para los cuáles se cumple la igualdad; esto sucede por ejemplo para cualquier autoestado de uno de los observables involucrados.

En el siguiente capítulo veremos que LPI puede interpretarse en términos geométricos, y puede obtenerse como consecuencia de la desigualdad triangular para la métrica de Wootters [Woo81]. Además, extenderemos la desigualdad de Landau y Pollak al caso más general de POVM y estados mixtos.

## 1.5 Relaciones de incerteza entrópicas

Con el advenimiento de la teoría de la información [CT12] en la física en general, la mecánica cuántica no fue la excepción, se empezaron a utilizar conceptos y magnitudes informacionales en los mismos fundamentos de la teoría [Whe90]. En este contexto aparecieron los primeros trabajos donde se

utilizó la entropía de Shannon [Sha48] para formular de manera alternativa el principio de incerteza, dando inicio al desarrollo de las llamadas *relaciones de incerteza entrópicas*. La primera relación de este tipo se formuló para los observables posición y momento. Esta relación fue demostrada independientemente por Everett (en su famosa Tesis donde elabora la interpretación de muchos mundos [Eve73]) y por Hirschman [Hir57] en 1957, basándose en la desigualdad de Hausdorff-Young. Además, ambos autores conjeturaron una mejora de su desigualdad ya que no era óptima, sugiriendo que, al igual que en la relación de Heisenberg–Kennard (1.2), las distribuciones gaussianas deberían ser las de mínima incerteza. Efectivamente, esta conjetura fue probada unos 20 años después por Bialynicki-Birula y Mycielski [BBM75], siguiendo la mejora a la desigualdad de Hausdorff-Young hecha por Beckner [Bec75]. Cabe recalcar que la relación entrópica de Bialynicki-Birula y Mycielski resulta más fuerte que la de Heisenberg y Kennard, ya que esta última puede deducirse de la primera. Existen trabajos recientes que abordan la temática en donde se emplean otras entropías que generalizan a la de Shannon, por ejemplo, en las Refs. [BB06, ZV07, ZPV08].

La primera relación de incerteza entrópica para observables de un espacio de Hilbert de dimensión finita, que son los que nos interesan particularmente en esta Tesis, fue deducida en 1983 por Deutsch [Deu83], quien demuestra que:

$$H[p(A; \Psi)] + H[p(B; \Psi)] \geq \mathcal{C}^D(c) \quad \text{con} \quad \mathcal{C}^D(c) \equiv -2 \ln \left( \frac{1+c}{2} \right), \quad (1.18)$$

siendo

$$H[p(A; \Psi)] = - \sum_{i=1}^N p_i(A; \Psi) \ln p_i(A; \Psi) \quad (1.19)$$

la entropía de Shannon de la estadística del observable  $A$ ,  $p(A; \Psi)$  dada por (1.8) (de forma similar para el observable  $B$ ), y  $c$  el solapamiento entre las bases de autoestados de los observables definido en (1.17). La cota inferior de (1.18) es no trivial para cualquier par de observables sin autoestados comunes; sin embargo, a diferencia de LPI no es óptima para el caso de observables complementarios. Más aún, como observan Maassen y Uffink en [MU88], la relación de Deutsch puede derivarse de LPI: maximizando el producto de las probabilidades máximas sujeto a la desigualdad (1.16) uno obtiene que

$$P_{A;\Psi} P_{B;\Psi} \leq e^{-\mathcal{C}^D(c)}, \quad (1.20)$$

y usando que  $H[p(A; \Psi)] \geq -\ln P_{A;\Psi}$  y lo análogo para  $B$ , se reobtiene la relación de Deutsch. Aunque ésta resulte más débil que LPI, su principal mérito reside en que demuestra la posibilidad de formular el principio de incerteza para observables de espectro discreto en términos entrópicos.

Maassen y Uffink en [MU88], además, mejoraron la relación de Deutsch estableciendo que

$$H[p(A; \Psi)] + H[p(B; \Psi)] \geq \mathcal{C}^{MU}(c) \quad \text{con} \quad \mathcal{C}^{MU}(c) \equiv -2 \ln c \quad (1.21)$$

para un par de observables con espectro discreto y no degenerado. Este resultado había sido conjeturado con anterioridad por Kraus [Kra87]. La desigualdad (1.21) se sigue de la aplicación del teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

En el caso particular de que  $A$  y  $B$  sean observables complementarios la cota de Maassen y Uffink,  $\ln N$ , dada en (1.21) es óptima ya que es alcanzada cuando el sistema se encuentra en algún autoestado de  $A$  o de  $B$ . No obstante, dejando aparte este caso especial, la relación no es óptima. El problema de encontrar una cota óptima para un par arbitrario de observables resulta ser muy difícil. De hecho, hasta ahora sólo se ha obtenido la cota óptima restringiéndose a un espacio de Hilbert de dimensión 2 [GG90, SR98, GMR03].

La cota de Maassen y Uffink es plausible de mejora para  $c > \frac{1}{N}$ . Recientemente, de Vicente y Sánchez-Ruiz [dVSR08], siguiendo un razonamiento similar al de Maassen y Uffink para reobtener la cota de Deutsch, mejoraron la cota de Maassen y Uffink en un amplio rango del valor del solapamiento: minimizando la suma de entropías sujeta a LPI, se obtiene [dVSR08, BPPZ11]

$$H[p(A; \Psi)] + H[p(B; \Psi)] \geq \mathcal{C}^{VS}(c) \quad \text{con} \quad \mathcal{C}^{VS}(c) = \begin{cases} -2 \ln c & 0 < c \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathcal{H}_1(c) & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq c^* \\ \mathcal{F}(c) & c^* \leq c \leq 1 \end{cases} \quad (1.22)$$

con

$$\mathcal{F}(c) = -(1+c) \ln \left( \frac{1+c}{2} \right) - (1-c) \ln \left( \frac{1-c}{2} \right) \quad (1.23)$$

y

$$\mathcal{H}_1(c) = -P_A \ln P_A - (1-P_A) \ln(1-P_A) - P_B \ln P_B - (1-P_B) \ln(1-P_B) \quad (1.24)$$

donde

$$P_A \equiv \cos^2 \alpha, \quad P_B \equiv \cos^2(\theta - \alpha), \quad c \equiv \cos \theta, \quad (1.25)$$

y  $\alpha$  es solución de la ecuación

$$\sin(2\alpha) \ln \left( \frac{1 + \cos(2\alpha)}{1 - \cos(2\alpha)} \right) + \sin(2(\alpha - \theta)) \ln \left( \frac{1 + \cos(2(\alpha - \theta))}{2 \cos^2(\alpha - \theta)} \right) = 0. \quad (1.26)$$

El valor de  $c^*$  se obtiene resolviendo la ecuación trascendente

$$c^* \ln \left( \frac{1 + c^*}{1 - c^*} \right) = 2 \Leftrightarrow c^* \operatorname{argtanh} c^* = 1, \quad (1.27)$$

siendo su valor aproximado  $c^* \approx 0.83$ .

Finalmente, observamos que dada la concavidad de la entropía de Shannon, se tiene que si  $\rho = \sum_l \omega_l |\Psi_l\rangle\langle\Psi_l|$ , entonces  $H[p(A; \rho)] \geq \sum_l \omega_l H[p(A; \Psi_l)]$ . Luego, la relaciones de incerteza entrópicas de Deustch (1.18), Maassen y Uffink (1.21) y de Vicente y Sanchez–Ruiz (1.22), también son válidas para el caso de estados mixtos. Además, es posible extender el alcance de las mismas para POVM usando un razonamiento similar al de [KP02].

En el Capítulo 3, mostramos una extensión de estos resultados a otras entropías, como así también a POVM.

# 2

## RELACIONES DE INCERTEZA TIPO LANDAU–POLLAK

---

*“If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.”*

*John von Neumann*

---

<b>2.1</b>	<b>Desigualdad de Landau–Pollak . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Métricas y medidas de incerteza . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Relaciones tipo Landau–Pollak . . . . .</b>	<b>17</b>
2.3.1	Proyectores y estados puros . . . . .	23
2.3.2	Operadores positivos y estados puros . . . . .	24
2.3.3	Operadores positivos y estados mixtos . . . . .	26
2.3.4	Desigualdad más restrictiva . . . . .	27
<b>2.4</b>	<b>Resultados numéricos . . . . .</b>	<b>28</b>

---

## 2.1 Desigualdad de Landau–Pollak

En este Capítulo mostramos una generalización de la relación de incerteza de Landau y Pollak al caso de POVM y estados mixtos [BOLP14, BZP<sup>+</sup>14].

En primer lugar vamos a ver que la desigualdad (1.16) no es más que una consecuencia de la desigualdad triangular verificada por la métrica de Wootters [Woo81], observación realizada por Uffink en su Tesis doctoral [Uff90]. De hecho, para la métrica de Wootters, la desigualdad triangular evaluada en  $|a_i\rangle$ ,  $|b_j\rangle$  (autoestados arbitrarios de  $A$  y  $B$  respectivamente) y  $|\Psi\rangle$  da

$$\arccos |\langle a_i | \Psi \rangle| + \arccos |\langle b_j | \Psi \rangle| \geq \arccos |\langle a_i | b_j \rangle|, \quad (2.1)$$

que es válido para para todo par de índices  $(i, j)$ . En particular, para el par de índices  $(i^{\max}, j^{\max})$  asociado a las probabilidades máximas  $P_{A;\Psi} = \max_i p_i(A; \Psi)$  y  $P_{B;\Psi} = \max_j p_j(B; \Psi)$ , obtenemos

$$\arccos \sqrt{P_{A;\Psi}} + \arccos \sqrt{P_{B;\Psi}} \geq \arccos |\langle a_{i^{\max}} | b_{j^{\max}} \rangle|. \quad (2.2)$$

Luego, teniendo en cuenta que  $|\langle a_{i^{\max}} | b_{j^{\max}} \rangle| \leq \max_{i,j} |\langle a_i | b_j \rangle| = c$  y que el arco coseno es una función decreciente, reobtenemos la desigualdad de Landau–Pollak (LPI)

$$\arccos \sqrt{P_{A;\Psi}} + \arccos \sqrt{P_{B;\Psi}} \geq \arccos c, \quad (2.3)$$

donde

$$c = \max_{i,j} |\langle a_i | b_j \rangle| \in \left[ \frac{1}{\sqrt{N}}, 1 \right] \quad (2.4)$$

es el *solapamiento* entre las bases de autoestados de los observables.

Veremos que LPI vale para el caso de estados mixtos. Sin embargo, la demostración no es directa, a diferencia de lo que sucede con las relaciones de incerteza entrópicas para la entropía de Shannon (1.18), (1.21) y (1.22). Esto se debe a que la función  $\arccos \sqrt{x}$  no tiene concavidad definida en el dominio  $[0, 1]$ . Sólo para el qubit ( $N = 2$ ) se puede usar la concavidad y probar, de manera directa, la validez de (2.3) para estados mixtos del qubit [dV08, Teorema 2.1].

En lo que sigue de este Capítulo, vamos a explotar el enfoque geométrico con el propósito de obtener relaciones de incerteza válidas para el caso de POVM y estados mixtos, como así también, basadas en otras métricas comúnmente usadas en información cuántica.



## 2.2 Métricas y medidas de incerteza

Se llama *métrica* entre estados puros a una función  $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica las siguientes propiedades:

- (i) *no negatividad*:  $d(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) \geq 0$ , y  $d(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = 0$  si y sólo si  $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$ ,
- (ii) *simetría*:  $d(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = d(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle)$ ,
- (iii) *desigualdad triangular*:  $d(|\Psi\rangle, |\Upsilon\rangle) + d(|\Phi\rangle, |\Upsilon\rangle) \geq d(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle)$ .

En lo que sigue vamos a considerar métricas definidas en términos del producto interno en  $\mathcal{H}$ , y a partir de ellas, introducimos una medida de incerteza asociada a la medición de un observable cuántico. Para ello consideraremos funciones  $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  tales que son estrictamente decrecientes y que verifican  $f(1) = 0$ ; definimos métricas entre estados puros, a través de la relación

$$d_f(|\Psi\rangle, |\Phi\rangle) = f(|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2). \quad (2.5)$$

Por ejemplo, algunas funciones  $f$  que caen dentro de esta familia son:

- $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ , que da lugar a la *métrica de Wootters* [Woo81, MLMP05], también conocida como *ángulo* entre los estados [NC10],
- $f(x) = \sqrt{2(1 - \sqrt{x})}$ , que da lugar a la *métrica de Bures* [Bur69], y
- $f(x) = \sqrt{1 - x}$ , que da lugar a la *métrica raíz de la infidelidad* introducida por Gilchrist *et al* [GLN05].

Notar que estas métricas se pueden extender al caso de matrices densidad usando el concepto de purificación [Uhl76, Joz94]. Para este caso, se define  $d_f(\rho, \sigma) = f(F(\rho, \sigma))$ , donde  $F(\rho, \sigma) = (\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}})^2$  es la fidelidad entre las matrices densidad.

A partir de la función  $f$  que define la métrica  $d_f$  (2.5), introducimos la cantidad

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) \equiv f(P_{\mathcal{A};\rho}) \quad \text{con} \quad P_{\mathcal{A};\rho} = \max_i p_i(\mathcal{A}; \rho) \in \left[ \frac{1}{N_{\mathcal{A}}}, 1 \right] \quad (2.6)$$

que es una medida razonable de la incerteza asociada a la medición de un POVM  $\mathcal{A}$ , cuya estadística está dada por (1.5) cuando el sistema cuántico descrito por el operador densidad  $\rho$ . Por construcción, la cantidad (2.6) satisface los requisitos básicos de una medida de incerteza:

- (i)  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho)$  no depende los posibles resultados de la medición, sino de su probabilidad,

- (ii)  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) \geq 0$ , y
- (iii)  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho)$  decrece en términos de la probabilidad máxima  $P_{\mathcal{A}; \rho}$ , con
- (a)  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) = 0$  si y sólo si  $P_{\mathcal{A}; \rho} = 1$ , que es equivalente a tener una distribución delta de Kronecker,  $p_i(\mathcal{A}; \rho) = \delta_{i,k}$  para algún  $k$ , y
- (b)  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho)$  es máxima para  $P_{\mathcal{A}; \rho} = \frac{1}{N_{\mathcal{A}}}$ , que es equivalente a tener una distribución uniforme con  $p_i(\mathcal{A}; \rho) = \frac{1}{N_{\mathcal{A}}}$  para todo  $i$ .

## 2.3 Relaciones tipo Landau–Pollak

El resultado principal de este Capítulo es la obtención de una familia de desigualdades tipo Landau–Pollak para dos conjuntos de operadores positivos y matrices densidad.

**Proposición 2.1.** Sean  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}}$  y  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{N_{\mathcal{B}}}$  dos conjuntos de operadores positivos actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $N$ . Entonces, para cualquier estado descrito por la matriz densidad  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , se verifica la siguiente desigualdad

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) + \mathcal{U}_f(\mathcal{B}; \rho) \geq f(c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^2), \quad (2.7)$$

donde

$$c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \max_{ij} \|\sqrt{A_i} \sqrt{B_j}\| \quad (2.8)$$

es el solapamiento entre los conjuntos de operadores positivos.

**Demostración** La demostración se da en forma constructiva en las Subsecciones 2.3.1–2.3.3. ■

El solapamiento entre los conjuntos de operadores positivos está dado en términos de la norma de un operador. Recordamos que para cualquier operador  $O$  que actúa sobre  $\mathcal{H}$ , tenemos que

$$\|O\| = \max_{|\varphi\rangle \in \mathcal{H}} \frac{\|O|\varphi\rangle\|}{\| |\varphi\rangle \|} = \max_{|\varphi\rangle \in \mathcal{H}} \frac{\langle \varphi | O^\dagger O | \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \varphi | \varphi \rangle^{\frac{1}{2}}} = \max_{|\Psi\rangle \in \mathcal{H}: \|\Psi\|=1} \|O|\Psi\rangle\|,$$

donde  $O^\dagger$  denota el operador adjunto de  $O$ .

Observamos que si los conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  satisfacen la relación de completitud,  $\sum_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}} A_i = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{B}}} B_j = I$ , entonces la Proposición 2.1 aplica para POVM. Para

este caso, enfatizamos que nuestro resultado captura la esencia del principio de incerteza, en el sentido discutido en la Introducción y en las Refs. [Deu83, Uff90], debido a que se tiene que:

- (i) la cota inferior de la suma de las incertezas es universal, es decir, no depende del estado del sistema,
- (ii) para  $c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} < 1$  la desigualdad (2.7) es no trivial, es decir, la suma de las incertezas es positiva, y
- (iii) en el caso  $N_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{B}} = N$  y  $c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \frac{1}{N}$  (observables complementarios), la certeza respecto de un observable implica máxima ignorancia respecto del otro.

Además, notamos que (2.7) es de hecho una familia de desigualdades tipo Landau–Pollak que dependen de la función  $f$  definida en la Sección anterior. Por ejemplo, para las funciones  $f$  que dan las métricas de Wootters, Bures y raíz de la infidelidad tenemos, en particular, las siguientes desigualdades:

- métrica de Wootters:

$$\arccos \sqrt{P_{\mathcal{A};\rho}} + \arccos \sqrt{P_{\mathcal{B};\rho}} \geq \arccos c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}, \quad (2.9)$$

- métrica de Bures:

$$\sqrt{1 - \sqrt{P_{\mathcal{A};\rho}}} + \sqrt{1 - \sqrt{P_{\mathcal{B};\rho}}} \geq \sqrt{1 - c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}, \quad (2.10)$$

- métrica raíz de la infidelidad:

$$\sqrt{1 - P_{\mathcal{A};\rho}} + \sqrt{1 - P_{\mathcal{B};\rho}} \geq \sqrt{1 - c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}. \quad (2.11)$$

La desigualdad (2.9) es la extensión natural de LPI para POVM y estados mixtos, siendo uno de nuestros principales aportes en este tema. Además, las desigualdades (2.10) y (2.11) son novedosas en la literatura de relaciones de incerteza.

En el caso de observables  $A$  y  $B$  con espectro discreto y no degenerado, la desigualdad (2.7) es óptima, para cualquier función  $f$  dentro de las condiciones exigidas. Es decir, existen estados (al menos uno) para los cuales se alcanza la igualdad, independientemente de la elección de la función  $f$ . En efecto, tenemos que  $A_i = |a_i\rangle\langle a_i|$  para  $i = 1, \dots, N$  y  $B_j = |b_j\rangle\langle b_j|$  para  $j = 1, \dots, N$ . Denotamos con  $(i', j')$  al par de índices para el cual se tiene que  $c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \|\sqrt{A_{i'}}\sqrt{B_{j'}}\| = |\langle a_{i'}|b_{j'}\rangle| = c$ . Luego, para  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  con  $|\Psi\rangle = |a_{i'}\rangle$  (ó  $|\Psi\rangle = |b_{j'}\rangle$ ), se verifica la igualdad en (2.7). Aclaremos que esto no implica que todas las desigualdades restringen de la misma manera los pares de probabilidades

máximas  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$ . De hecho, vamos a demostrar que dentro de la familia de desigualdades (2.7), la relación (2.9) basada en la métrica de Wootters es la más restrictiva.

**Proposición 2.2.** *En el contexto de la Proposición 2.1, la desigualdad más restrictiva para el par de valores de probabilidades máximas  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$  corresponde a la función  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ , asociada a la métrica de Wootters.*

**Demostración** La demostración se da en la Subsección 2.3.4. ■

Notemos que si  $P_{\mathcal{A};\rho} \leq c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2$ , entonces  $\mathcal{U}_f(\mathcal{A};\rho) = f(P_{\mathcal{A};\rho}) \geq f(c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2)$ , por lo que la desigualdad (2.7) se satisface trivialmente para cualquier  $P_{\mathcal{B};\rho}$ . Un resultado similar se obtiene intercambiando  $\mathcal{A}$  por  $\mathcal{B}$ . Dicho de otra manera, la desigualdad impone restricciones sólo cuando el punto  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$  pertenece al cuadrado  $(c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2, 1]^2$ . Definimos la función:

$$\begin{cases} h_c^f : [c^2, 1] \rightarrow [c^2, 1] \\ h_c^f(x) = f^{-1}(f(c^2) - f(x)). \end{cases} \quad (2.12)$$

En la Fig. 2.1 ilustramos de manera esquemática en el plano  $P_{\mathcal{A};\rho}$ – $P_{\mathcal{B};\rho}$  la región permitidas para los valores de las probabilidades máximas a partir de la desigualdad (2.7) en el caso de observables con espectro discreto y no degenerado. Esto nos permite visualizar que la región permitida depende de la elección de la función  $f$ . El hecho de que la cota es alcanzada se traduce en que los puntos  $(c^2, 1)$  y  $(1, c^2)$  pertenecen a la región permitida para cualquier elección de  $f$ .

Es interesante notar que la Proposición 2.1 nos permite también abordar la cuestión de cuantificar la incerteza inherente asociada a *un único* POVM. Este problema ha sido abordado desde las perspectivas de las relaciones de incerteza de Robertson y entrópicas [KP02, Mas07, Mas08, Ras08]. En nuestro caso vamos a ver que se obtiene un resultado no trivial cuando ningún elemento del POVM tiene autovalor igual a 1.

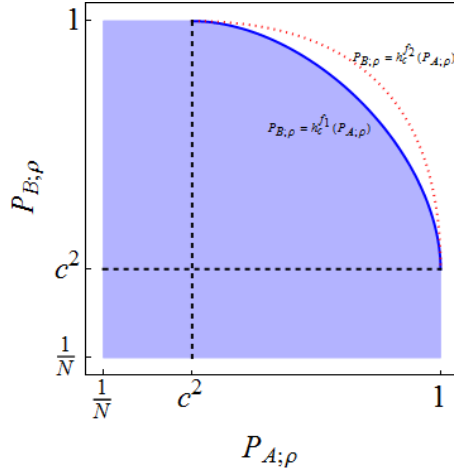
**Corolario 2.1.** *Sea un POVM  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}}$  actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $N$ . Entonces, para cualquier estado descripto por la matriz densidad  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , se verifica la siguiente desigualdad*

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A};\rho) \geq f(c_{\mathcal{A}}^2), \quad (2.13)$$

donde

$$c_{\mathcal{A}} = \max_i \|\sqrt{A_i}\| = \sqrt{\max_i \|A_i\|} \quad (2.14)$$

es el (auto) solapamiento entre los elementos del POVM.



**Figura 2.1:** Plano  $P_{A;\rho}$ – $P_{B;\rho}$  en el caso de observables con espectro discreto y no degenerado. Probabilidades máximas permitidas según (2.7) para una dada elección de  $f = f_1$  (región azul). Las curvas límite  $P_{B;\rho} = h_{c^2}^f(P_{A;\rho})$  para dos funciones  $f = f_1$  (curva azul) y  $f = f_2$  (curva roja punteada) tienen los mismos puntos extremos  $(c^2, 1)$  y  $(1, c^2)$ ; sin embargo, las regiones por debajo de las mismas no coinciden (en este ejemplo,  $f_1$  es más restrictiva que  $f_2$ ).

La cota inferior en (2.13) es no trivial (diferente de cero) para los POVM formados por operadores que no tienen ningún autovalor igual a 1.

**Demostración** La demostración del Corolario es directa evaluando la Proposición 2.1 en el POVM  $\mathcal{A}$  y en el conjunto  $\mathcal{B} = \{I\}$ . También se puede demostrar sin apelar a la Proposición, partiendo de que

$$\begin{aligned} p_i(\mathcal{A}; \Psi) &= \langle \Psi | A_i | \Psi \rangle \leq \| |\Psi\rangle \| \| A_i | \Psi \rangle \| \\ &\leq \| |\Psi\rangle \|^2 \| A_i \| = \| A_i \| \end{aligned} \quad (2.15)$$

para todo estado (normalizado) puro. Luego, escribiendo a la matriz  $\rho$  en la base que la diagonaliza tenemos

$$\begin{aligned} p_i(\mathcal{A}; \rho) &= \text{Tr} \left( A_i \sum_{l=1}^N \omega_l |l\rangle \langle l| \right) \\ &= \sum_{l=1}^N \omega_l \text{Tr} (A_i |l\rangle \langle l|) \leq \| A_i \|, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde hemos usados la linealidad de la traza, el resultado (2.15) aplicado a cada estado puro  $|l\rangle \langle l|$  y  $\sum_i^N \omega_l = 1$ . La desigualdad (2.16) vale para todo  $i$ ,

en particular, tenemos que

$$P_{\mathcal{A};\rho} \leq \|A_{i^{\max}}\| \leq c_{\mathcal{A}}^2, \quad (2.17)$$

donde  $i^{\max}$  es el índice que corresponde a la máxima probabilidad. La prueba (alternativa) finaliza aplicando la función  $f$  y teniendo en cuenta de que es decreciente.

■

Además, encontramos que el (auto) solapamiento de un POVM  $\mathcal{A}$  está acotado inferior y superiormente:

$$\frac{1}{\sqrt{N_{\mathcal{A}}}} \leq c_{\mathcal{A}} \leq 1. \quad (2.18)$$

De hecho, por definición  $c_{\mathcal{A}}^2 \geq \|\sqrt{A_i}\|^2 \geq \langle \Psi | \sqrt{A_i} \sqrt{A_i} | \Psi \rangle$  para todo  $i = 1, \dots, N_{\mathcal{A}}$  y cualquier estado puro normalizado  $|\Psi\rangle$ . Luego, sumando sobre  $i$ , considerando la relación de completitud del POVM  $\mathcal{A}$  y que el estado  $|\Psi\rangle$  está normalizado, se llega a:  $N_{\mathcal{A}} c_{\mathcal{A}}^2 \geq 1$ . Por otra parte,  $\langle \Psi | A_i | \Psi \rangle \leq 1$  implica que  $\|\sqrt{A_i}\| \leq 1$ , para todo  $i$ , en particular,  $c_{\mathcal{A}} \leq 1$ . Un resultado análogo a (2.18) se tiene para  $c_{\mathcal{B}}$ .

Consideremos nuevamente la situación de dos POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , para la cual obtenemos los siguientes Corolarios.

**Corolario 2.2.** *En el contexto de la Proposición 2.1, tenemos la siguiente desigualdad*

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) + \mathcal{U}_f(\mathcal{B}; \rho) \geq \max\{f(c_{\mathcal{A}}^2) + f(c_{\mathcal{B}}^2), f(c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2)\}. \quad (2.19)$$

**Demostración** La prueba es directa a partir de la Proposición 2.1 y del Corolario 2.1.

■

**Corolario 2.3.** *En el contexto de la Proposición 2.1, tenemos que la región más restrictiva para los pares de los valores  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$  depende de la terna de solapamientos*

$$\mathbf{c} = (c_{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{B}}, c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}), \quad (2.20)$$

y está dada por

$$\left[ \frac{1}{N_{\mathcal{A}}}, c_{\mathcal{A}}^2 \right] \times \left[ \frac{1}{N_{\mathcal{B}}}, c_{\mathcal{B}}^2 \right], \quad (2.21)$$

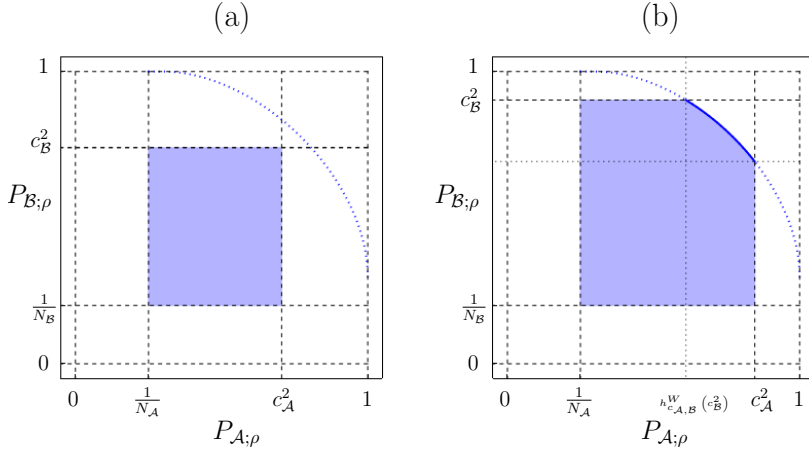
si  $c_{\mathcal{B}}^2 \leq h_{c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}^W(c_{\mathcal{A}}^2)$ , o bien

$$\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^W = \left\{ (P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho}) \in \left[ \frac{1}{N_{\mathcal{A}}}, c_{\mathcal{A}}^2 \right] \times \left[ \frac{1}{N_{\mathcal{B}}}, c_{\mathcal{B}}^2 \right] : \right. \\ \left. P_{\mathcal{B};\rho} \leq h_{c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}^W(P_{\mathcal{A};\rho}) \quad \text{y} \quad P_{\mathcal{A};\rho} \geq c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2 \right\}, \quad (2.22)$$

si  $c_B^2 > h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ .

**Demostración** La prueba es directa a partir de las Proposiciones 2.1 y 2.2, del Corolario 2.2 y de la función  $h_c^W(x) = \left(c\sqrt{x} + \sqrt{(1-c^2)(1-x)}\right)^2$  que se obtiene de (2.12) para  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ . ■

En la Fig. 2.2 ilustramos esquemáticamente las regiones de las probabilidades máximas permitidas de acuerdo al Corolario 2.3, según sea la terna de solapamientos  $\mathbf{c}$ .



**Figura 2.2:** Plano  $P_{A;\rho}$ - $P_{B;\rho}$  para los POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Probabilidades máximas permitidas (región azul): (a) región (2.21), si  $c_B^2 \leq h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ , (b) región (2.22), si  $c_B^2 > h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ .

Finalmente, observamos que el valor del solapamiento  $c_{A,B}$  (2.8) entre los POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  está acotado inferior y superiormente por:

$$\max \left\{ \frac{c_A}{\sqrt{N_B}}, \frac{c_B}{\sqrt{N_A}} \right\} \leq c_{A,B} \leq c_A c_B, \quad (2.23)$$

donde el (auto) solapamiento  $c_A$  del POVM  $\mathcal{A}$  está definido en (2.14) (y de forma análoga se define  $c_B$ ). Por un lado, para obtener la cota inferior usamos que  $c_{A,B}^2 \geq \|\sqrt{A_i} \sqrt{B_j}\|^2 \geq \langle \Psi | \sqrt{A_i} B_j \sqrt{A_i} | \Psi \rangle$  para todo  $i, j$  y estado puro  $|\Psi\rangle$ . Luego, sumamos sobre  $j$ , consideramos la relación de completitud del POVM  $\mathcal{B}$ , y tomamos el máximo sobre  $|\Psi\rangle$  y sobre  $i$  para obtener:  $N_B c_{A,B}^2 \geq c_A^2$ . Intercambiando  $A_i$  por  $B_j$  en la definición del solapamiento, llegamos a una desigualdad análoga:  $N_A c_{A,B}^2 \geq c_B^2$ . Obtenemos la cota inferior considerando la mayor de estas cotas. Por otro lado, la cota superior en (2.23) es consecuencia

de la propiedad submultiplicativa de la norma del operador y de la definiciones de  $c_A$  y  $c_B$ :  $\|\sqrt{A_i}\sqrt{B_j}\| \leq \|\sqrt{A_i}\| \|\sqrt{B_j}\| \leq c_A c_B$ , para todo  $i, j$ .

### 2.3.1 Proyectores y estados puros

Con el fin de demostrar las Proposiciones de la Sección anterior, en primer lugar vamos a relajar la condición de no degeneración de los espectros de los observables que supusimos en (2.1)–(2.4) para obtener LPI. De esta manera, obtenemos nuestra primera generalización, que formalizamos en el siguiente Lema:

**Lema 2.1.** Sean  $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{P}}}$  y  $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^{N_{\mathcal{Q}}}$  dos conjuntos de proyectores actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $N$ . Entonces, para cualquier estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  se tiene la siguiente relación

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) + \mathcal{U}_f(\mathcal{Q}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) \geq f(c_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}^2), \quad (2.24)$$

donde

$$c_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} = \max_{ij} \|P_i Q_j\| \quad (2.25)$$

es el solapamiento entre los conjuntos de proyectores.

**Demostración** Dado un estado puro  $|\Psi\rangle$ , consideramos los proyectores tales que  $\|P_i|\Psi\rangle\| \neq 0$  y  $\|Q_j|\Psi\rangle\| \neq 0$ , y definimos los estados puros normalizados:

$$|\psi_i\rangle = \frac{P_i|\Psi\rangle}{\|P_i|\Psi\rangle\|} \quad \text{y} \quad |\varphi_j\rangle = \frac{Q_j|\Psi\rangle}{\|Q_j|\Psi\rangle\|}. \quad (2.26)$$

Entonces, tenemos que

$$|\langle\Psi|\psi_i\rangle|^2 = \frac{\langle\Psi|P_i|\Psi\rangle^2}{\langle\Psi|P_i^2|\Psi\rangle} = \langle\Psi|P_i|\Psi\rangle \quad \text{y} \quad |\langle\Psi|\varphi_j\rangle|^2 = \langle\Psi|Q_j|\Psi\rangle \quad (2.27)$$

dado que  $P_i^2 = P_i$  y  $Q_j^2 = Q_j$  por ser proyectores.

Por un lado, tenemos que la desigualdad triangular verificada por la métrica  $d_f$  (2.5) aplicada a  $|\psi_i\rangle, |\varphi_j\rangle$  y  $|\Psi\rangle$  conduce a:

$$f(\langle\Psi|P_i|\Psi\rangle) + f(\langle\Psi|Q_j|\Psi\rangle) \geq f\left(\frac{|\langle\Psi|P_i Q_j|\Psi\rangle|^2}{\|P_i|\Psi\rangle\|^2 \|Q_j|\Psi\rangle\|^2}\right), \quad (2.28)$$

válida para cualquier par de índices  $i, j$ .



Por otro lado, notamos que

$$|\langle \Psi | P_i Q_j | \Psi \rangle| = |\langle \Psi | \sqrt{P_i} \sqrt{P_i} \sqrt{Q_j} \sqrt{Q_j} | \Psi \rangle| \quad (2.29)$$

$$\leq \|\sqrt{P_i} | \Psi \rangle\| \|\sqrt{P_i} \sqrt{Q_j} \sqrt{Q_j} | \Psi \rangle\| \quad (2.30)$$

$$\leq \|\sqrt{P_i} | \Psi \rangle\| \|\sqrt{Q_j} | \Psi \rangle\| \|\sqrt{P_i} \sqrt{Q_j}\|, \quad (2.31)$$

donde la primera desigualdad se deduce de la desigualdad de Cauchy–Schwartz y la segunda de la definición de la norma de un operador.

Luego, eligiendo los índices  $i^{\max}, j^{\max}$  asociados a las probabilidades máximas  $\langle \Psi | P_{i^{\max}} | \Psi \rangle = \max_i \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle$  y  $\langle \Psi | Q_{j^{\max}} | \Psi \rangle = \max_j \langle \Psi | Q_j | \Psi \rangle$ , junto con la definición de  $\mathcal{U}_f$  (2.6), obtenemos

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) + \mathcal{U}_f(\mathcal{Q}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) \geq f \left( \max_{ij} \|\sqrt{P_i} \sqrt{Q_j}\|^2 \right). \quad (2.32)$$

Concluimos la demostración, notando que en (2.29)–(2.31) podemos intercambiar los roles entre  $P_i$  y  $Q_j$ . Realizando esto se llega a una desigualdad similar a (2.32), en donde la cota inferior es igual a  $f \left( \max_{ij} \|\sqrt{Q_j} \sqrt{P_i}\|^2 \right)$ . Ambas cotas coinciden dado que los operadores  $\sqrt{P_i}$  y  $\sqrt{Q_j}$  son hermíticos y que  $\|O\| = \|O^\dagger\|$  para cualquier operador lineal y acotado actuando sobre  $\mathcal{H}$  [RS80]. Por último, obtenemos el solapamiento (2.25) usando que  $\sqrt{P_i} = P_i$  y  $\sqrt{Q_j} = Q_j$ , por ser proyectores. ■

Observamos que los conjuntos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$  no necesariamente tienen que estar formados por proyectores ortogonales entre sí, ni satisfacer la relación de completitud; es decir, la desigualdad (2.24) aplica más allá de la descripción de los observables por medio de medidas proyectivas.

### 2.3.2 Operadores positivos y estados puros

Damos aquí una segunda generalización, considerando el caso de dos conjuntos de operadores positivos, no necesariamente proyectores.

**Lema 2.2.** Sean  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{N_{\mathcal{A}}}$  y  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{N_{\mathcal{B}}}$  dos conjuntos de operadores positivos actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $N$ . Entonces, para cualquier estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  se tiene la siguiente relación

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) + \mathcal{U}_f(\mathcal{B}; |\Psi\rangle\langle\Psi|) \geq f(c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2), \quad (2.33)$$

donde

$$c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \max_{ij} \|\sqrt{A_i}\sqrt{B_j}\| \quad (2.34)$$

es el solapamiento entre los conjuntos de operadores positivos.

**Demostración** Consideremos el estado puro  $|\Phi\rangle = |\Psi\rangle \oplus 0 \oplus 0$  que pertenece al espacio de Hilbert extendido por medio de la suma directa  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\text{aux}} \oplus \mathcal{H}^{\text{aux}}$ , y sean los proyectores  $P_i$  y  $Q_j$  de la forma [MI07]:

$$P_i = \begin{pmatrix} A_i & \sqrt{A_i(I - A_i)} & 0 \\ \sqrt{A_i(I - A_i)} & I - A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (2.35)$$

$$Q_j = \begin{pmatrix} B_j & 0 & \sqrt{B_j(I - B_j)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{B_j(I - B_j)} & 0 & I - B_j \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Es fácil ver que  $P_i^2 = P_i$  para cada  $i$  y que  $Q_j^2 = Q_j$  para cada  $j$  (aunque no necesariamente se cumple que  $P_i P_{i'} = \delta_{ii'} P_i$  ó  $Q_j Q_{j'} = \delta_{jj'} Q_j$ ).

Usando que

$$\langle \Phi | P_i | \Phi \rangle = \langle \Psi | A_i | \Psi \rangle, \quad (2.37)$$

$$\langle \Phi | Q_j | \Phi \rangle = \langle \Psi | B_j | \Psi \rangle \quad \text{y} \quad (2.38)$$

$$\frac{|\langle \Phi | P_i Q_j | \Phi \rangle|}{\|P_i | \Phi \rangle\| \|Q_j | \Phi \rangle\|} = \frac{|\langle \Psi | A_i B_j | \Psi \rangle|}{\|\sqrt{A_i} | \Psi \rangle\| \|\sqrt{B_j} | \Psi \rangle\|} \quad (2.39)$$

la desigualdad (2.28) aplicada a los operadores  $P_i, Q_j$  y al estado  $|\Phi\rangle$ , suponiendo  $\langle \Phi | P_i | \Phi \rangle \neq 0 \neq \langle \Phi | Q_j | \Phi \rangle$ , da

$$f(\langle \Psi | A_i | \Psi \rangle) + f(\langle \Psi | B_j | \Psi \rangle) \geq f\left(\frac{|\langle \Psi | A_i B_j | \Psi \rangle|^2}{\|\sqrt{A_i} | \Psi \rangle\|^2 \|\sqrt{B_j} | \Psi \rangle\|^2}\right). \quad (2.40)$$

Ahora, siguiendo un razonamiento similar al de (2.29)–(2.31), llegamos a que

$$\frac{|\langle \Psi | A_i B_j | \Psi \rangle|}{\|\sqrt{A_i} | \Psi \rangle\| \|\sqrt{B_j} | \Psi \rangle\|} \leq \|\sqrt{A_i} \sqrt{B_j}\|. \quad (2.41)$$

La prueba finaliza de manera similar a la demostración del Lema 2.1. ■

Observamos que si los conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  satisfacen la relación de completitud, entonces el Lema 2.2 aplica para POVM.

2.3.3

 Operadores positivos y estados mixtos

Ahora estamos en condiciones de probar la Proposición 2.1.

Consideremos el estado descrito por la matriz densidad  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  y sea  $\{|l\rangle\}_{l=1}^N$  la base ortonormal de  $\mathcal{H}$  que diagonaliza a  $\rho$ , de modo que podemos expresar la matriz densidad de la forma

$$\rho = \sum_{l=1}^N w_l |l\rangle\langle l|, \quad (2.42)$$

con  $0 \leq w_l \leq 1$  para cada  $l$ , y  $\sum_{l=1}^N w_l = 1$ . Por otro lado, sea  $|\Phi'\rangle$  una *purificación* de  $\rho$ , de forma tal que el estado puro pertenece a un espacio de Hilbert extendido dado por el producto  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\text{aux}}$ , y se escribe como (descomposición de Schmidt):

$$|\Phi'\rangle = \sum_{l=1}^N \sqrt{w_l} |l\rangle \otimes |l^{\text{aux}}\rangle, \quad (2.43)$$

donde  $\{|l^{\text{aux}}\rangle\}_{l=1}^N$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}^{\text{aux}}$  (hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que  $\mathcal{H}^{\text{aux}}$  es de dimensión igual a  $N$ ). Por construcción,  $\rho$  se recupera realizando la traza parcial sobre los grados de libertad auxiliares, es decir,

$$\text{Tr}_{\text{aux}}(|\Phi'\rangle\langle\Phi'|) = \sum_{l=1}^N w_l |l\rangle\langle l| = \rho. \quad (2.44)$$

Ahora consideremos las siguientes identidades entre operadores que actúan sobre el espacio extendido  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\text{aux}}$  y operadores que actúan sobre  $\mathcal{H}$ :

$$\langle\Phi'|A_i \otimes I|\Phi'\rangle = \text{Tr}(A_i\rho), \quad (2.45)$$

$$\langle\Phi'|B_j \otimes I|\Phi'\rangle = \text{Tr}(B_j\rho), \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sqrt{A_i} \otimes I \right) \left( \sqrt{B_j} \otimes I \right) \right\| &= \left\| \left( \sqrt{A_i} \otimes I \right) \left( \sqrt{B_j} \otimes I \right) \right\| \\ &= \left\| \left( \sqrt{A_i} \sqrt{B_j} \right) \otimes I \right\| \\ &= \left\| \sqrt{A_i} \sqrt{B_j} \right\|. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Finalmente, evaluando la desigualdad (2.33) en  $A_i \otimes I$ ,  $B_j \otimes I$  y  $|\Phi'\rangle$  y usando las identidades (2.45)–(2.47), obtenemos

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{A}; \rho) + \mathcal{U}_f(\mathcal{B}; \rho) \geq f(c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^2), \quad (2.48)$$

lo que concluye la demostración de la Proposición 2.1, válida en general para POVM y estados mixtos.

### 2.3.4 Desigualdad más restrictiva

Ahora vamos a demostrar la Proposición 2.2.

En primer lugar, recordemos que para la función  $\arccos \sqrt{x}$  asociada a la métrica de Wootters tenemos que

$$h_{c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}}^W(x) = \left( c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}\sqrt{x} + \sqrt{1 - c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^2}\sqrt{1-x} \right)^2. \quad (2.49)$$

Realizando el cambio de variables

$$c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \cos \gamma \quad (2.50)$$

$$x = \cos^2 \theta \quad \text{con } \theta \in [0, \gamma] \quad (2.51)$$

reescribimos (2.49) como

$$h_{\gamma}^W(\cos^2 \theta) = \cos^2(\gamma - \theta). \quad (2.52)$$

En segundo lugar, fijamos una función  $f$  decreciente y suponemos que existe un  $\theta_f \in [0, \gamma]$  de modo que

$$f(\cos^2 \theta_f) < h_{\gamma}^W(\cos^2 \theta_f) = \cos^2(\gamma - \theta_f). \quad (2.53)$$

De esta manera, tenemos que la desigualdad (2.7) definida a partir de esta elección de la función  $f$  es más restrictiva que la desigualdad definida a partir de la función  $\arccos \sqrt{x}$  asociada a la métrica de Wootters.

En tercer lugar, tenemos que a partir de la definición de  $h_{\gamma}^f$  y del decrecimiento de  $f$ , la desigualdad (2.53) se reescribe como

$$f(\cos^2 \theta_f) + f(\cos^2(\gamma - \theta_f)) < f(\cos^2 \gamma). \quad (2.54)$$

Por último, consideramos  $|\psi_1\rangle$  y  $|\Psi\rangle$  dos estados ortonormales de  $\mathcal{H}$ , y los estados puros

$$|\phi\rangle = \cos \theta_f |\psi_1\rangle + \sin \theta_f |\Psi\rangle \quad (2.55)$$

$$|\psi_2\rangle = \cos \gamma |\psi_1\rangle + \sin \gamma |\Psi\rangle, \quad (2.56)$$

de modo que

$$|\langle \phi | \psi_1 \rangle|^2 = \cos^2 \theta_f \quad (2.57)$$

$$|\langle \phi | \psi_2 \rangle|^2 = \cos^2(\gamma - \theta_f) \quad (2.58)$$

$$|\langle \phi_2 | \psi_1 \rangle|^2 = \cos^2 \gamma. \quad (2.59)$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$f(|\langle \phi | \psi_1 \rangle|^2) + f(|\langle \phi | \psi_2 \rangle|^2) < f(|\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle|^2), \quad (2.60)$$

es decir, para esta función  $f$ , tenemos que  $d_f(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle) = f(|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2)$  no es una métrica ya que no satisface la desigualdad triangular.

Luego, no existe una función  $f$  que verifique (2.53), y al mismo tiempo, que defina una métrica.

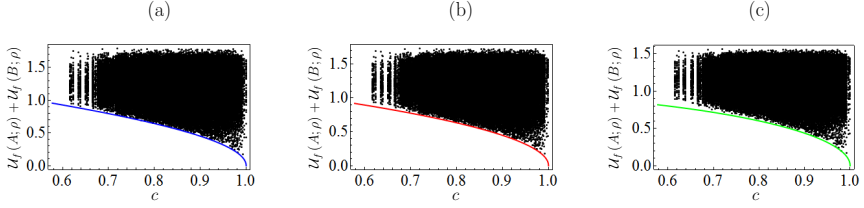
En conclusión, tenemos que de la familia de desigualdades (2.7) la métrica de Wootters conduce a la desigualdad más restrictiva, con lo que finalizamos la demostración de la Proposición 2.2.

## 2.4 Resultados numéricos

En esta Sección ilustramos con algunas simulaciones el alcance de la Proposición 2.1 (y los Corolarios).

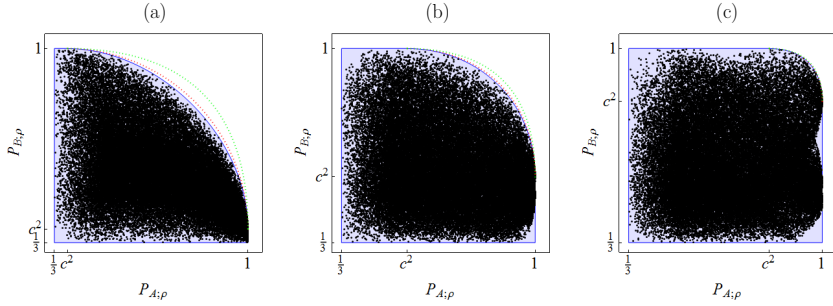
En primer lugar, consideramos el caso de observables  $A$  y  $B$  con espectro discreto y no degenerado actuando en un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 3$ . En las Figs. 2.3.(a)–(c), graficamos la suma de incertezas  $\mathcal{U}_f(A^m; \rho^n) + \mathcal{U}_f(B^m; \rho^n)$  para el par de observables  $m$ -ésimo y la  $n$ -ésima matriz densidad en función del solapamiento  $c$  y comparamos con la cota  $f(c^2)$  para: (a) la métrica de Wootters  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ , (b) la métrica de Bures  $f(x) = \sqrt{2(1 - \sqrt{x})}$ , y (c) la métrica raíz de la infidelidad  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ . Estas figuras ilustran que, en este caso, las cotas son óptimas, en el sentido de que se alcanzan las mismas en un rango amplio del solapamiento, independientemente de la función  $f$ .

No obstante, como ya hemos mostrado, no todas las funciones  $f$  restringen de la misma manera los valores de las probabilidades máximas. Ilustramos esto en la Figs. 2.4.(a)–(c), donde graficamos los puntos  $(P_{A;\rho^n}, P_{B;\rho^n})$  fijando tres pares de observables con diferente solapamiento  $c$ . Comparamos los puntos generados con la región definida en (2.22) (observar que, en este caso,  $c_A = c_B = 1$  y  $c_{A,B} = c$ ). Como era de esperar por la Proposición 2.2, vemos que la métrica de Wootters da la región más restringida. Además, estos ejemplos sugieren



**Figura 2.3:** Caso de observables con espectro discreto y no degenerado actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 3$ . Suma de incertezas  $\mathcal{U}_f(A^m; \rho^l) + \mathcal{U}_f(B^m; \rho^l)$  (puntos negros) y cotas  $f(c^2)$  (líneas sólidas en colores) versus el solapamiento  $c$ , para cada par  $A^m, B^m$  y para cada estado  $\rho^l$ , generados aleatoriamente, con: (a)  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$  (Wootters), (b)  $f(x) = \sqrt{2(1 - \sqrt{x})}$  (Bures), y (c)  $f(x) = \sqrt{1 - x}$  (raíz de la infidelidad).

que, en el caso de observables con espectro discreto y no degenerado, la región inducida por la métrica de Wootters (2.22) es óptima, en el sentido de que los conjuntos  $\mathcal{D}_c^W$  y  $\mathcal{D}(A, B) = \{(P_{A;\rho}, P_{B;\rho}) \mid \forall \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$  coinciden. No obstante, resta probar formalmente esta conjetura.



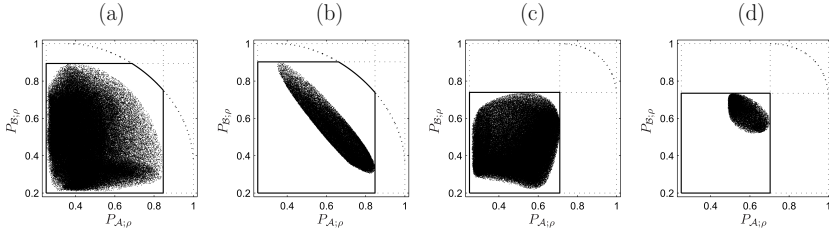
**Figura 2.4:** Plano  $P_{A;\rho} - P_{B;\rho}$  para el caso de observables con espectro discreto y no degenerado actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 3$ . Puntos  $(P_{A;\rho^n}, P_{B;\rho^n})$  para estados  $\rho^n$  generados aleatoriamente tomando un par de observables fijos con solapamiento igual a: (a)  $c = 0.61$ , (b)  $c = 0.74$  y (c)  $c = 0.90$ . Se indica también la región dada por el Corolario 2.3 (región delimitada por la curva cerrada azul) y se grafican las curvas  $P_{B;\rho} = h_c^f(P_{A;\rho})$  para  $f(x) = \sqrt{2(1 - \sqrt{x})}$  (línea roja punteada) y  $f(x) = \sqrt{1 - x}$  (línea verde punteada).

Por otro lado, en la Fig. 2.5 graficamos los puntos  $(P_{A;\rho^n}, P_{B;\rho^n})$  del plano  $P_{A;\rho} - P_{B;\rho}$  generados aleatoriamente, yendo más allá del caso no degenerado. En particular, consideramos  $N = 3$ ,  $N_A = 4$  y  $N_B = 5$ . En las Fig. 2.5.(a) y (b), consideramos que  $c_B^2 > h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ , por el contrario, en las Fig. 2.5.(c) y (d), fijamos  $c_B^2 < h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ , de esta manera, mostramos las dos situaciones para las cuales el Corolario 2.3 da la región  $\mathcal{D}_c^W$  o bien la región  $\left[\frac{1}{N_A}, c_A^2\right] \times \left[\frac{1}{N_B}, c_B^2\right]$ , respectivamente. Además, hemos considerados la misma terna de solapamientos

$\mathbf{c}$  en las Figs. 2.5.(a) y (b) (y el mismo  $\mathbf{c}$  en las Figs. 2.5.(c) y (d)), es por ello que el Corolario da las mismas regiones. No obstante, los pares de POVM generados aleatoriamente son diferentes. A partir de estos ejemplos observamos que la región a la cual pertenecen los puntos  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$  no depende sólo de los solapamientos, sino que depende del par de POVM en sí. Esto nos permite clasificar entre dos tipos de regiones óptimas:

- $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -óptima:  $\mathcal{D}_{\text{opt}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho}) \mid \forall \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$ , es decir, dado los POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , es la región formado por todos los puntos  $(P_{\mathcal{A};\rho}, P_{\mathcal{B};\rho})$ .
- $\mathbf{c}$ -óptima:  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}\text{-opt}} = \bigcup_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) : \mathbf{c}} \mathcal{D}_{\text{opt}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , es decir, la unión de todas las regiones  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -óptimas que tienen la misma terna de solapamientos.

En general, estas regiones no coinciden. Más aún, los ejemplos muestran que las regiones del Corolario 2.3 no son  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -óptimas. La pregunta: ¿las regiones del Corolario 2.3 son  $\mathbf{c}$ -óptimas? queda sin responder, pero los ejemplos considerados permiten aventurar una respuesta afirmativa.



**Figura 2.5:** Plano  $P_{\mathcal{A};\rho}$ - $P_{\mathcal{B};\rho}$  para distintos pares de POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , con  $N = 3$ ,  $N_{\mathcal{A}} = 4$ ,  $N_{\mathcal{B}} = 5$ . Los puntos corresponden a los pares  $(P_{\mathcal{A};\rho^n}, P_{\mathcal{B};\rho^n})$  para estados  $\rho^n$  generados aleatoriamente. Las regiones del Corolario 2.3 están indicadas (región delimitada por la curva cerrada negra), siendo  $\mathbf{c} = (c_{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{B}}, c_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$  igual a: (a) y (b)  $(0.92, 0.95, 0.60)$ , y (c) y (d)  $(0.84, 0.86, 0.84)$ .

# 3

## RELACIONES DE INCERTEZA TIPO ENTRÓPICAS

---

*“You should call it entropy, for two reasons. In the first place your uncertainty function has been used in statistical mechanics under that name, so it already has a name. In the second place, and more important, nobody knows what entropy really is, so in a debate you will always have the advantage.”*

John von Neumann a Claude E Shannon

---

<b>3.1</b>	<b>Entropías generalizadas . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulación del problema y estado del arte . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Caso <math>N</math>-dimensional . . . . .</b>	<b>39</b>
3.3.1	Cota a la suma de entropías generalizadas . . . . .	39
3.3.2	Comparación con otras cotas . . . . .	42
<b>3.4</b>	<b>Caso qubit (<math>N = 2</math>) . . . . .</b>	<b>48</b>
3.4.1	Cota óptima y estados minimizantes . . . . .	48
3.4.2	Cota para índices entrópicos particulares . . . . .	52

---



## 3.1 Entropías generalizadas

En este Capítulo estamos interesados en formulaciones cuantitativas del principio de incerteza, por medio del uso de cantidades provenientes de la teoría de la información [Sha48, CT12]. Específicamente, como medida de incerteza asociada a un vector de probabilidad  $p \in \mathcal{P}_N = \{[p_1 \cdots p_N]^t \in [0; 1]^N, \sum_i p_i = 1\}$ , proponemos el uso de  $(f, \lambda)$ -entropías generalizadas de la forma

$$F_\lambda[p] = \frac{f(\|p\|_\lambda^\lambda)}{1 - \lambda} = \frac{f\left(\sum_{i=1}^N p_i^\lambda\right)}{1 - \lambda} \quad (3.1)$$

siendo  $\lambda$  un parámetro mayor o igual que cero, al que denominamos *índice entrópico*,  $\|\cdot\|_\lambda$  representa la (pseudo)  $\lambda$ -norma de un vector, y la función  $f^1$  es tal que:

- (i) su forma funcional es independiente del índice entrópico  $\lambda$ ,
- (ii)  $f$  es continua, estrictamente creciente en  $\mathbb{R}_+$  y, sin pérdida de generalidad, consideramos que  $f(1) = 0$ ,
- (iii)  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}_+$  y, sin pérdida de generalidad, consideramos que  $f'(1) = 1$ .

Como consecuencia de estas condiciones, el caso límite  $\lambda \rightarrow 1$  está bien definido y conduce a la *entropía de Shannon* [Sha48]:

$$F_1[p] \equiv H[p] = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (3.2)$$

En este sentido decimos que  $F_\lambda$  generaliza la noción de entropía de Shannon, siendo el índice entrópico un parámetro que caracteriza el “peso relativo” de las probabilidades de los distintos eventos en la suma  $\sum_i p_i^\lambda$ . Para  $\lambda < 1$ , la contribución de las diferentes componentes del vector  $p$  en la suma tienden a uniformizarse respecto del caso  $\lambda = 1$ . Por el contrario, para  $\lambda > 1$ , se acentúa la contribución en la suma de las componentes de mayor valor. Por ejemplo, los casos extremos  $\lambda = 0$  y  $\lambda \rightarrow \infty$  dan cuenta de este comportamiento. El primero corresponde a la  $(f, 0)$ -entropía generalizada, siendo  $F_0[p]$  simplemente una función del número de componentes no nulas del vector  $p$ ; mientras que el

<sup>1</sup>La función generadora de la entropía,  $f$ , no debe confundirse con la función que define la métrica en (2.5).

segundo corresponde a la  $(f, \infty)$ -entropía generalizada, donde  $F_\infty[p]$  depende sólo del máximo elemento del vector de probabilidad.

Además, observamos que  $F_\lambda$  satisface las propiedades (usuales) de una entropía informacional, a saber:

- (i)  $F_\lambda[p]$  es una función Schur-cóncava respecto de  $p$ , es decir, si  $p$  es mayorizado por  $q$ , lo que denotamos como  $p \prec q^2$ , entonces,  $F_\lambda[p] \geq F_\lambda[q]$ . Esta propiedad es consecuencia de la Schur-concavidad (resp. concavidad) de  $p \mapsto \|p\|_\lambda^\lambda$  para  $\lambda > 1$  (resp.  $\lambda < 1$ ; ver por ejemplo [MO79, Cap. 3, Prop. C.1]), y del hecho de que  $f$  es creciente. En el caso límite  $\lambda \rightarrow 1$ , la entropía de Shannon es sabido que es Schur-cóncava [MO79, Cap. 3, Prop. C.1].
- (ii)  $F_\lambda[p] \geq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_N$ , con la igualdad si y sólo si  $p_i = \delta_{i,k}$  para algún  $k$ , es decir, la entropía es una cantidad positiva salvo que se tenga certeza respecto del resultado. Esto se puede probar directamente haciendo uso de la Schur-concavidad de  $F_\lambda$ , dado que  $p \prec [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^t$  para todo  $p \in \mathcal{P}_N$ , junto con  $f(1) = 0$ .
- (iii)  $F_\lambda[p] \leq \frac{1}{1-\lambda} f(N^{1-\lambda}) \quad \forall p \in \mathcal{P}_N$ , con la igualdad si y sólo si el vector de probabilidad es uniforme,  $p_i = \frac{1}{N}$  para todo  $i$ , es decir, la incerteza es máxima cuando todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. De nuevo, esta propiedad se puede ver como una consecuencia directa de la Schur-concavidad de  $F_\lambda$ , dado que  $[\frac{1}{N} \ \cdots \ \frac{1}{N}]^t \prec p$  para todo  $p \in \mathcal{P}_N$ . En el caso límite  $\lambda \rightarrow 1$ , la entropía máxima vale  $\ln N$ .
- (iv)  $F_\lambda[p]$  es una función cóncava de  $p$  para  $\lambda \in [0; 1]$  si  $f$  es cóncava. Esto se debe a que  $p \mapsto \|p\|_\lambda^\lambda$  para  $\lambda < 1$  es cóncavo, al hecho de que la composición de funciones cóncavas preserva la concavidad, y a la positividad de  $1 - \lambda$ ; en el caso límite  $\lambda \rightarrow 1$ , la entropía de Shannon es sabido que es cóncava [CT12].
- (v)  $F_\lambda[p]$  es una función cóncava de  $p$  para  $\lambda \in (1; +\infty)$  si  $f$  es convexa. Esto se debe a la convexidad de  $p \mapsto \|p\|_\lambda^\lambda$  para  $\lambda > 1$ , al hecho de que la composición de funciones convexas preserva la convexidad, y a la negatividad de  $1 - \lambda$ .
- (vi)  $F_\lambda[p]$  decrece con el índice entrópico  $\lambda$  para  $p$  fijo.

Por motivos históricos, dos casos de particular interés corresponden a las funciones  $f$  tales que se obtiene la entropía de Rényi o la entropía de Tsallis:

---

<sup>2</sup> $p \prec q$  significa que dados  $p$  y  $q$  con sus componentes ordenadas en forma decreciente, se tiene que  $\sum_{i=1}^m p_i \leq \sum_{i=1}^m q_i$ , para todo  $m = 1, \dots, N-1$ , y  $\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N q_i$ .

- Para  $f(x) = \ln x$ , la entropía generalizada (3.1) corresponde a la *entropía de Rényi* de índice  $\lambda$  [R61]:

$$R_\lambda[p] = \frac{1}{1-\lambda} \ln \left( \sum_{i=1}^N p_i^\lambda \right). \quad (3.3)$$

La entropía de Rényi es cóncava en  $p$  para  $\lambda \in [0; 1]$ ; además, puede demostrarse que existe un índice  $N$ -dependiente  $\lambda_*(N)$  mayor que 1, hasta el cual la concavidad se mantiene [BŽ06, pag. 57].

- Para  $f(x) = x - 1$ , la entropía generalizada (3.1) corresponde a la llamada *entropía de Tsallis* de índice  $\lambda$  [HC67, Dar70, Tsa88]:

$$S_\lambda[p] = \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^\lambda}{\lambda - 1}. \quad (3.4)$$

La entropía de Tsallis, a diferencia de la de Rényi, es cóncava en  $p$  para cualquier valor del índice entrópico.

Adelantamos que el hecho de haber introducido la  $(f, \lambda)$ -entropía nos va a permitir trabajar dentro del mismo marco y al mismo tiempo con los casos particulares de Shannon, Rényi y Tsallis.

Finalmente, observamos que dadas dos entropías generalizadas  $F_\lambda$  y  $G_\lambda$  de la forma (3.1) generadas a partir del mismo índice entrópico pero con funciones  $f$  y  $g$  diferentes, existe una correspondencia uno a uno entre ambas,

$$G_\lambda[p] = \frac{1}{1-\lambda} g \circ f^{-1} ((1-\lambda)F_\lambda[p]) \quad (3.5)$$

para cada  $\lambda$ . Por ejemplo, las correspondencias uno a uno entre las entropías de Rényi (3.3) y de Tsallis (3.4) son

$$S_\lambda[p] = \frac{1 - \exp((1-\lambda)R_\lambda[p])}{\lambda - 1}, \quad (3.6)$$

$$R_\lambda[p] = \frac{1}{1-\lambda} \ln(1 + (1-\lambda)S_\lambda[p]). \quad (3.7)$$

## 3.2

## Formulación del problema y estado del arte

Consideremos dos POVM  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  que actúan sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $N$ . Sean  $p(\mathcal{A}; \rho)$  y  $p(\mathcal{B}; \rho)$  vectores de probabilidad cuyas

componentes tienen la forma (1.5), asociados a las estadísticas de los POVM para un sistema cuántico descrito por la matriz densidad  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Una *relación de incerteza tipo entrópica* es una desigualdad de la forma

$$F_\alpha[p(\mathcal{A}; \rho)] + F_\beta[p(\mathcal{B}; \rho)] \geq \mathcal{C}_{\alpha, \beta; f}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (3.8)$$

para una dada función  $f$  y un par de índices entrópicos  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ , donde la cota es no trivial (positiva) e independiente del estado del sistema. Por lo tanto, la desigualdad (3.8) es de la forma (1.1) discutida en la Introducción.

El objetivo último es encontrar la cota óptima que, por definición, es

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; f}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \min_{\rho} (F_\alpha[p(\mathcal{A}, \rho)] + F_\beta[p(\mathcal{B}, \rho)]) \geq \mathcal{C}_{\alpha, \beta; f}(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (3.9)$$

Este problema de optimización es, en una situación general, muy difícil de resolver. Por este motivo, en este Capítulo nos enfocaremos en encontrar cotas que dependen de la *terna de solapamientos*:

$$\mathbf{c} = (c_{\mathcal{A}}, c_{\mathcal{B}}, c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} c_{\mathcal{A}} &= \max_i \|\sqrt{A_i}\| \\ c_{\mathcal{B}} &= \max_j \|\sqrt{B_j}\| \\ c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} &= \max_{i,j} \|\sqrt{A_i} \sqrt{B_j}\|. \end{cases} \quad (3.10)$$

En el caso de que los observables sean de espectro discreto y no degenerado, la cota óptima (3.9) depende de la matriz unitaria  $T$ , cuyos elementos vienen dados por

$$T_{ji} = \langle b_j | a_i \rangle, \quad (3.11)$$

con  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$  bases de autoestados de los observables  $A$  y  $B$ , respectivamente. El máximo de los módulos de los elementos de la matriz  $T$  corresponde al solapamiento  $c$  entre las bases:

$$c = \max_{ij} |T_{ji}| = \max_{ij} |\langle b_j | a_i \rangle| \in \left[ \frac{1}{\sqrt{N}}, 1 \right]. \quad (3.12)$$

Denominamos cota  $c$ -óptima aquella para la cual se tiene

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; f; N}(c) \equiv \min_{T \in \mathcal{U}(N): \max_{i,j} |T_{ij}| = c} \bar{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; f}(T), \quad (3.13)$$

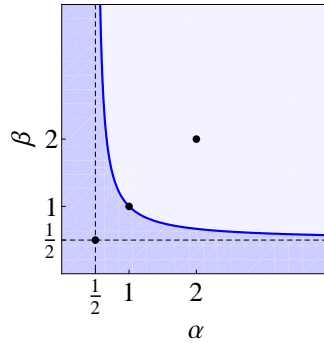
donde  $\mathcal{U}(N)$  es el conjunto de matrices unitarias de  $N \times N$ . Encontrar cotas  $c$ -óptimas es, como veremos, un problema no trivial.

Con el propósito de una comparación ulterior, vamos a revisar las formulaciones entrópicas más relevantes de la literatura, clasificándolas de acuerdo a la

función  $f$  y al par de índices entrópicos  $(\alpha, \beta)$  que generan la entropía (3.1). Introducimos las siguientes regiones en el plano  $\alpha$ - $\beta$  de índices entrópicos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)^2 : \beta = \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right\} \\ \underline{\mathcal{R}} = \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+ \cup \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha > \frac{1}{2}, \beta < \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right\} \\ \overline{\mathcal{R}} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 : \alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right\} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

a las cuales denominamos *curva de conjugación* y regiones *por debajo* y *por encima* de la curva de conjugación, respectivamente (ver Fig. 3.1). Llamamos par de *índices conjugados* al que pertenece a la curva de conjugación.



**Figura 3.1:** Regiones (3.14) en el plano  $\alpha$ - $\beta$  de índices entrópicos: curva de conjugación  $\mathcal{R}$ , rama positiva de la hipérbola  $\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} = 1$ , (línea azul), y regiones por debajo  $\underline{\mathcal{R}}$  (región azul oscuro) y por encima  $\overline{\mathcal{R}}$  (región azul claro) de la curva de conjugación. Se indican en particular los puntos  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, 2)$  que son relevantes en la literatura para el caso del qubit.

Resumimos los resultados principales de la literatura con los cuales vamos a comparar:

- Entropía de Shannon:  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ 
  - ◊ Cota de Deutsch (D) [Deu83]:

$$\mathcal{C}^D(c) = -2 \ln \left( \frac{1+c}{2} \right). \quad (3.15)$$

- ◊ Cota de Maassen y Uffink (MU) [MU88]:

$$\mathcal{C}^{MU}(c) = -2 \ln c. \quad (3.16)$$

◇ Cota de de Vicente y Sánchez-Ruiz (VS) [dVSR08]:

$$\mathcal{C}^{VS}(c) = \begin{cases} -2 \ln c & 0 < c \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mathcal{H}_1(c) & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq c^* \\ \mathcal{F}(c) & c^* \leq c \leq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

con  $\mathcal{H}_1(c)$ ,  $\mathcal{F}(c)$  y  $c^*$  definidos en (1.24), (1.23) y (1.27), respectivamente.

• Entropía de Rényi ( $f = \ln$ ):

- ◇ Para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ , vale la cota  $\mathcal{C}^{MU}(c)$ . Recientemente Rastegin extendió este resultado para el caso de estados mixtos y POVM [Ras10, Ras12]. Estos trabajos están principalmente basados en el teorema de Riesz–Thorin que impone que los índices sean conjugados. La cota  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  no es óptima salvo para  $c = \frac{1}{\sqrt{N}}$  [BB06, ZPV08].
- ◇ Para  $(\alpha, \beta) \in \underline{\mathcal{R}}$ , la cota  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  es válida. Esto se debe al decrecimiento de la entropía de Rényi con el índice entrópico. Nuevamente, sólo para  $c = \frac{1}{\sqrt{N}}$  la cota es óptima [BB06, ZPV08].
- ◇ Para  $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{R}}$ , la cota  $\mathcal{C}^D(c)$  es válida. Esto se deduce del trabajo de Maassen y Uffink [MU88] junto con el decrecimiento de la entropía versus el índice entrópico. Notar que la cota de Deutsch es, de hecho, válida en todo el primer cuadrante del plano  $\alpha$ - $\beta$ , aunque claramente no es  $c$ -óptima.
- ◇ Para  $\beta = \alpha$ , Puchała, Rudnicki y Życzkowski (PRZ) [PRŻ13] recientemente obtuvieron una serie de  $N - 1$  cotas que dependen de la matriz unitaria  $T$ , acotando el producto de Kronecker<sup>3</sup>  $p(A, \Psi) \otimes p(B, \Psi)$  usando la teoría de mayorización. Denotamos por

$$\mathcal{C}_{\alpha; \ln}^{PRZ}(T) \quad (3.18)$$

a la mejor de todas las cotas, la cual no es óptima, aunque mejora las anteriores en muchas situaciones. La cota más débil de esta serie depende exclusivamente del solapamiento y se expresa como

$$\mathcal{C}_{\alpha; \ln; 2}^{PRZ}(c) = \frac{1}{1 - \alpha} \ln \left( \left( \frac{1+c}{2} \right)^{2\alpha} + \left( 1 - \left( \frac{1+c}{2} \right)^2 \right)^\alpha \right), \quad (3.19)$$

aunque no es  $c$ -óptima. Friedland *et al.* [FGG13] extendieron este trabajo al caso de POVM y estados mixtos, como así también

<sup>3</sup> $[p_1 \cdots p_N]^t \otimes [q_1 \cdots q_N]^t = [p_1 q_1 \cdots p_1 q_N \cdots p_N q_1 \cdots p_N q_N]^t$

consideraron la situación de más de dos observables.

- Entropía de Tsallis ( $f = id - 1$ ):
  - ◊ Para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ , disponemos de la cota de Rastegin [Ras11, Ras12, Ras13]:

$$\mathcal{C}_{\alpha, \beta; id-1}^R(c) = \frac{1 - c^{2(\lambda-1)}}{\lambda - 1} \quad (3.20)$$

con  $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$ .

- ◊ Para  $(\alpha, \beta) \in \underline{\mathcal{R}}$ , la cota  $\mathcal{C}_{\alpha, \beta; id-1}^R(c)$  es válida. Esto se debe a que la entropía de Tsallis decrece con el índice entrópico.

Además, algunas de las cotas anteriores también son válidas para el caso de  $(f, \lambda)$ -entropías generales:

- $(f, \lambda)$ -entropía generalizada:
  - ◊ Para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \cup \underline{\mathcal{R}}$ , con la condición adicional de que  $xf'(x)$  sea creciente, se tiene la cota de Rastegin extendida:

$$\mathcal{C}_{\alpha, \beta; f}^R(c) = \frac{f(c^{2(\lambda-1)})}{1 - \lambda} \quad (3.21)$$

con  $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$ , siendo casos particulares la cota  $\mathcal{C}^{MU}$  si se fija  $f(x) = \ln x$ , y la cota  $\mathcal{C}_{\alpha, \beta; id-1}^R(c)$  si se fija  $f(x) = x - 1$ .

- ◊ Para  $\beta = \alpha$ , vale la cota de PRZ extendida, denotada por

$$\mathcal{C}_{\alpha; f}^{PRZ}(T). \quad (3.22)$$

- Para  $\alpha \geq 1$ , esto es consecuencia de la Schur-concavidad de  $F_\lambda$ , que junto con el Colorario 2 de [PRŽ13] permite encontrar una cota inferior a  $F_\alpha[p(A, \rho) \otimes p(B, \rho)]$  que depende de  $T$ . Además, si  $f(x) + f(y) \leq f(xy)$  para  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , entonces  $F_\alpha[p(A, \rho)] + F_\alpha[p(B, \rho)] \geq F_\alpha[p(A, \rho) \otimes p(B, \rho)]$  (las entropías de Rényi y de Tsallis con índice entrópico mayor o igual que 1 cumplen con este requisito).
- Para  $\alpha \leq 1$  se debe, nuevamente, a la Schur-concavidad de  $F_\lambda$ , que junto con el Colorario 2 de [PRŽ13] permite encontrar una cota inferior a  $F_\alpha[p(A, \rho) \otimes p(B, \rho)]$  que depende de  $T$ . Ahora, si  $f(x) + f(y) \geq f(xy)$  para  $x, y \geq 1$ , se tiene  $F_\alpha[p(A, \rho)] + F_\alpha[p(B, \rho)] \geq F_\alpha[p(A, \rho) \otimes p(B, \rho)]$ . Un caso particular es la entropía de Rényi con índice entrópico menor que 1 (la entropía de Tsallis no satisface, en este caso, la condición).

En lo que sigue del Capítulo, exponemos nuestras contribuciones al tema.

### 3.3 Caso $N$ -dimensional

#### 3.3.1 Cota a la suma de entropías generalizadas

En esta Sección nos enfocamos en obtener una cota inferior a la suma de entropías generalizadas para un par de observables arbitrarios actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita.

La metodología propuesta sigue el mismo espíritu que el de Maassen y Uffink para obtener la cota de Deutsch (ver (1.20)) y, principalmente, que el de de Vicente y Sánchez-Ruiz [dVSR08, BPPZ11] para obtener la cota inferior (3.17) a la suma de entropías de Shannon. Específicamente, resolvemos [ZBP14] el problema de minimización de la suma de entropías generalizadas, sujeta a la desigualdad de Landau y Pollak.

A continuación damos el resultado principal de esta Sección:

**Proposición 3.1.** Sean  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^{N_A}$  y  $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{N_B}$  dos POVM actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita  $N$ . Entonces, para cualquier estado descrito por la matriz densidad  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , se tiene la siguiente desigualdad:

$$F_\alpha[p(\mathcal{A}, \rho)] + F_\beta[p(\mathcal{B}, \rho)] \geq C_{\alpha, \beta; f}(\mathbf{c}), \quad (3.23)$$

con  $\mathbf{c} = (c_A, c_B, c_{A,B})$  la terna de solapamientos, y la cota  $C_{\alpha, \beta; f}(\mathbf{c})$  dada por

$$\begin{cases} \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\gamma_A))}{1-\alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_B))}{1-\beta} & \gamma_{A,B} \leq \gamma_A + \gamma_B \\ \min_{\theta \in [\gamma_A, \gamma_{A,B} - \gamma_B]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1-\alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_{A,B} - \theta))}{1-\beta} \right) & \gamma_{A,B} > \gamma_A + \gamma_B, \end{cases} \quad (3.24)$$

siendo los ángulos

$$\gamma_{A,B} \equiv \arccos c_{A,B}, \quad \gamma_A \equiv \arccos c_A, \quad \gamma_B \equiv \arccos c_B,$$

y la función

$$\mathcal{D}_\lambda(\theta) \equiv \left\lfloor \frac{1}{\cos^2 \theta} \right\rfloor (\cos^2 \theta)^\lambda + \left( 1 - \left\lfloor \frac{1}{\cos^2 \theta} \right\rfloor \cos^2 \theta \right)^\lambda,$$

con  $\lfloor \cdot \rfloor$  la parte entera inferior.



**Demostración** Ver Apéndice B.1.1. ■

Observamos los siguientes puntos a partir de la Proposición 3.1:

- La cota  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}(c)$  no depende explícitamente ni de  $N$ , ni de  $N_{\mathcal{A}}$  o  $N_{\mathcal{B}}$ .
- El resultado obtenido por de Vicente y Sánchez-Ruiz [dVSR08] es extendido aquí a  $(f, \lambda)$ -entropías generalizadas, recuperándolo en el caso límite  $(\alpha, \beta) \rightarrow (1, 1)$ . Más aún, nuestro resultado aplica para POVM y estados mixtos.
- Para la entropía de Tsallis y con  $\beta = \alpha$ , resulta

$$S_{\alpha}[p(\mathcal{A}, \rho)] + S_{\alpha}[p(\mathcal{B}, \rho)] + (1 - \alpha)S_{\alpha}[p(\mathcal{A}, \rho)]S_{\alpha}[p(\mathcal{B}, \rho)] \geq \frac{1 - \exp((1 - \alpha)\mathcal{C}_{\alpha,\alpha;\ln}(c_{\mathcal{A},\mathcal{B}}))}{\alpha - 1} \quad (3.25)$$

que mejora y generaliza el resultado obtenido en [PP96].

En lo que sigue de esta Sección consideramos observables con espectro no degenerado. En este caso tenemos  $N_{\mathcal{A}} = N_{\mathcal{B}} = N$ ,  $c_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{B}} = 1$  y  $c_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = c$ . Luego, la cota (3.24) obtenida en la Proposición 3.1 depende sólo del solapamiento entre las bases de autoestados, y se reduce a

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}(c) = \min_{\theta \in [0;\gamma]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_{\alpha}(\theta))}{1 - \alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_{\beta}(\gamma - \theta))}{1 - \beta} \right), \quad (3.26)$$

siendo  $\gamma = \arccos c$  fijo, con  $c \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{N}}\right]$ . Observamos que esta cota no es, en general,  $c$ -óptima. Esto se debe a que el método propuesto, en un primer paso, trata separadamente las estadísticas de los observables; mientras que, recién en un segundo paso, se tienen en cuenta las estadísticas de forma simultánea por medio de la desigualdad de Landau y Pollak. Sin embargo, para ciertos valores del solapamiento la cota sí resulta  $c$ -óptima:

**Corolario 3.1.** *Para  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $N = 2$  ó  $N \geq 4$ , la cota (3.26) es  $c$ -óptima.*

**Demostración** Ver Apéndice B.1.2. ■

La relevancia de este Corolario se reside en que, en este rango del solapamiento, la cota (3.26) coincide con la del qubit (3.33), por lo tanto, nuestra cota mejora todas las demás que dependen del solapamiento  $c$ , tales como las cotas de Maassen y Uffink  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  [MU88] y la de Rastegin  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}^R(c)$  [Ras10, Ras11, Ras12, Ras13]. La validez o no de este Corolario para el caso  $N = 3$  queda aún

por probar, aunque tenemos resultados numéricos que nos aventuran a dar una respuesta afirmativa (ver Apéndice B.1.2). Por otro lado, lo que sí podemos asegurar es: para  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $N \geq 2$ ,

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) \geq \mathcal{C}^{MU} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}(c) \geq \mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}^R(c).$$

Esto es consecuencia del Corolario 3.1 y de que las cotas  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  y  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}^R(c)$  no dependen de  $N$  (dimensión del espacio de Hilbert).

Ahora, si en particular fijamos la función  $f(x) = \ln x$  (entropía de Rényi), entonces tenemos los siguientes Corolarios.

**Corolario 3.2.** *Para  $f(x) = \ln x$  (entropía de Rényi), la cota (3.26) es mayor que la de Deutsch:*

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) \geq \mathcal{C}^D(c) = -2 \ln \left( \frac{1+c}{2} \right). \quad (3.27)$$

**Demostración** Ver Apéndice B.1.3. ■

Este resultado es particularmente interesante por sobre la curva de conjugación,  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ , ya que en esta región  $\mathcal{C}^D(c)$  es, según nuestro conocimiento, la única cota inferior a la suma de entropías de Rényi que depende del solapamiento  $c$  y que tiene una expresión analítica.

Por debajo de la curva de conjugación  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ , la suma de entropías de Rényi está acotada inferiormente por  $\mathcal{C}^{MU}(c)$ . Para  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , como consecuencia de la Proposición 3.1 mejoramos esta cota. Sin embargo, para  $c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  no siempre logramos una mejora. De hecho, tenemos que:

**Corolario 3.3.** *En el rango  $c \leq \frac{1}{2}$ , para  $f(x) = \ln x$  (entropía de Rényi) e índices entrópicos  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$ , la cota (3.26) es menor que la de Maassen-Uffink:*

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) \leq \mathcal{C}^{MU}(c) = -2 \ln c. \quad (3.28)$$

**Demostración** Ver Apéndice B.1.4. ■

Para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}$  y en este rango del solapamiento, la cota de Maassen y Uffink resulta, según nuestro conocimiento, la mejor de entre todas las cotas de la literatura que dependen del solapamiento  $c$ .

### 3.3.2 Comparación con otras cotas

En la Subsección precedente establecimos nuestros resultados analíticos, cuyas demostraciones figuran en el Apéndice B. En esta parte mostramos, a modo de ejemplo, algunos resultados numéricos, lo que nos sirve además para comparar con resultados de la literatura en el caso de observables con espectro no degenerado.

#### 3.3.2.1 Cotas de Maassen-Uffink y de Rastegin en $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}$

Comparamos nuestra cota (3.26) con la de Maassen y Uffink (3.16), y con la de Rastegin (3.20) para índices entrópicos en la curva de conjugación y en la región por debajo de ella.

Por un lado, consideramos el caso de entropía de Rényi fijando  $f(x) = \ln x$ . Calculamos la diferencia relativa entre nuestra cota y la de Maassen-Uffink:

$$\frac{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) - \mathcal{C}^{MU}(c)}{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c)}, \quad (3.29)$$

para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}$ . En las Figs. 3.2.(a)–(d) graficamos mapas de nivel de la diferencia relativa (3.29) en el plano  $\alpha$ – $\beta$ , para valores característicos del solapamiento  $c$ . En general, tenemos que:

- Para  $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$  (mostramos el caso  $c = 0.5$  en la Fig. 3.2.(a)), la diferencia relativa (3.29) es negativa o cero, en consecuencia nuestra cota no mejora la de MU (Corolario 3.3).
- Para  $\frac{1}{2} < c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  (mostramos el caso  $c = 0.706$  en la Fig. 3.2.(b)), la diferencia relativa (3.29) es positiva o negativa, en consecuencia nuestra cota mejora la de MU en algunas regiones del plano  $\alpha$ – $\beta$ .
- Para  $\frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1$  (mostramos los casos  $c = 0.708$  y  $0.9$  en las Figs. 3.2.(c) y (d), respectivamente), la diferencia relativa (3.29) es positiva, en consecuencia nuestra cota mejora la de MU (Corolario 3.1); la mejora crece significativamente con el solapamiento.

Por otro lado, consideramos el caso de entropía de Tsallis fijando  $f(x) = x - 1$ . Calculamos la diferencia relativa entre nuestra cota y la de Rastegin:

$$\frac{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;id-1}(c) - \mathcal{C}_{\alpha,\beta;id-1}^R(c)}{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;id-1}(c)}, \quad (3.30)$$

para  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}$ . En las Figs. 3.3.(a)–(d) graficamos los mapas de nivel de la diferencia relativa (3.30) en el plano  $\alpha$ – $\beta$ , para valores característicos del solapamiento  $c$ . En general, tenemos que:

- Para  $0 \leq c \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  (mostramos los casos  $c = 0.5$  y  $0.706$  en las Figs. 3.3.(a) y (b), respectivamente), la diferencia relativa (3.30) es positiva o negativa, en consecuencia nuestra cota mejora la de Rastegin en algunas regiones del plano  $\alpha$ – $\beta$ . Remarcamos que, a diferencia del caso de Rényi, logramos una mejora aún para  $c \leq \frac{1}{2}$ .
- Para  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c < 1$  (mostramos los casos  $c = 0.708$  y  $0.9$  en las Figs. 3.3.(c) y (d), respectivamente), la diferencia relativa (3.30) es positiva, en consecuencia nuestra cota mejora la de Rastegin (Corolario 3.1); la mejora crece significativamente con el solapamiento.

### 3.3.2.2 Cotas para matrices de permutación y $\beta = \alpha$

Consideramos uno de los ejemplos estudiados en [PRŽ13]. Específicamente, evaluamos nuestra cota para pares de observables tales que la matriz  $T$  tiene la forma de una potencia de una matriz de permutación de  $3 \times 3$ :

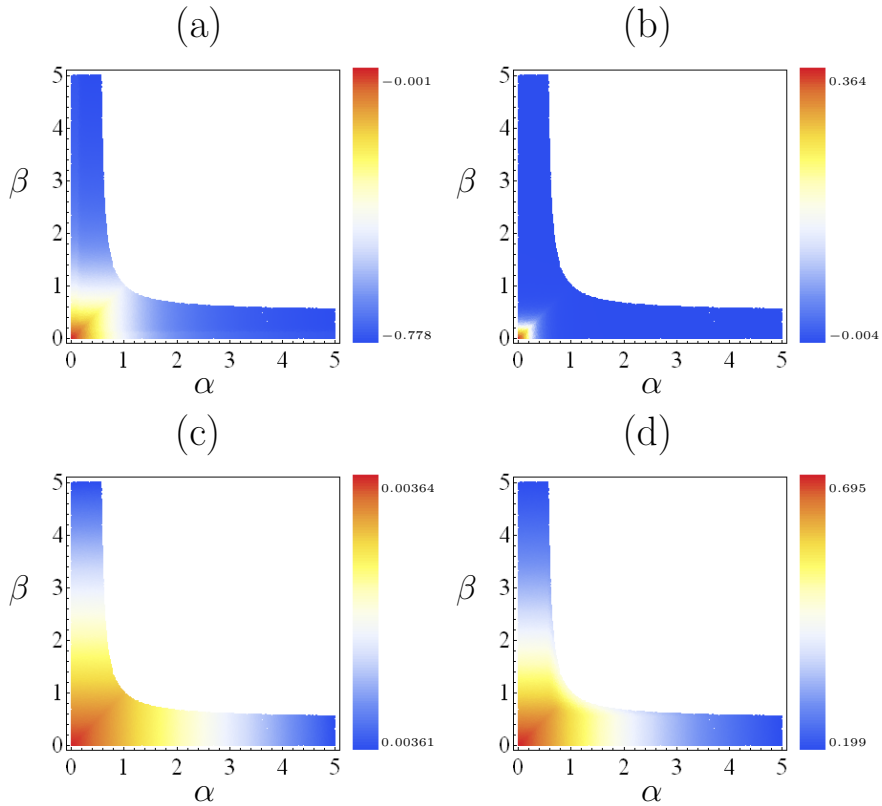
$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^s, \quad (3.31)$$

para  $s \in [0, \frac{1}{2}]$ . Observamos que el solapamiento depende del exponente:  $c = c(s)$ . Calculamos las cotas para índices entrópicos iguales  $\beta = \alpha$ .

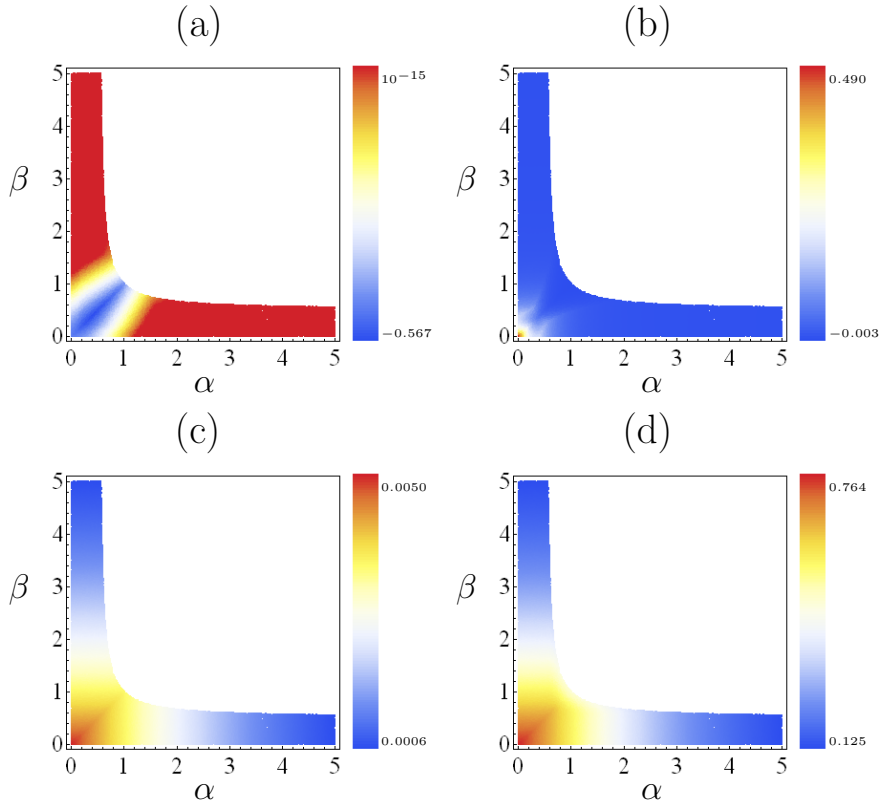
Por un lado, consideramos el caso de entropía de Rényi fijando  $f(x) = \ln x$ . En las Figs. 3.4.(a) y (b) graficamos las cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; \ln}(c)$ ,  $\mathcal{C}_{\alpha; \ln}^{PRZ}(T)$ ,  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  y  $\mathcal{C}^D(c)$  en función del exponente  $s$ , para  $\alpha = 0.8$  y  $1.4$ . También graficamos el solapamiento  $c = c(s)$  correspondiente a la matriz  $T = T(s)$ . Observamos que:

- Para  $\alpha = 0.8$ , nuestra cota mejora las de PRZ y MU para un amplio rango de valores de  $s$ .
- Para  $\alpha = 1.4$ , nuestra cota mejora la de Deutsch (Corolario 3.2), como así también mejora la de PRZ en todo el rango de valores de  $s$ .

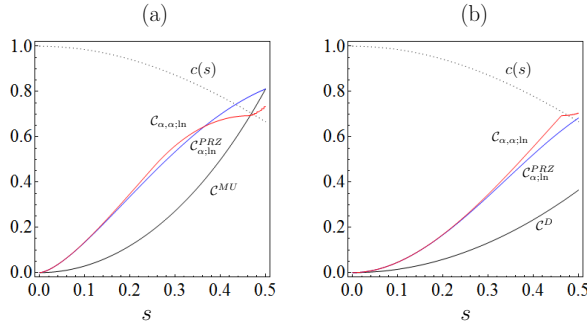
Por otro lado, consideramos el caso de entropía de Tsallis fijando  $f(x) = x - 1$ . En las Figs. 3.5.(a) y (b) graficamos las cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; id-1}(c)$ ,  $\mathcal{C}_{\alpha; id-1}^R(c)$ , y  $\mathcal{C}_{\alpha; id-1}^{PRZ}(T)$  en función del exponente  $s$ , para  $\alpha = 0.8$  y  $1.4$ . Observamos que:



**Figura 3.2:** Entropía de Rényi. Mapa de nivel en el plano  $\alpha$ - $\beta$  de la diferencia relativa  $\frac{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) - \mathcal{C}^{MU}(c)}{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c)}$  con  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \cup \underline{\mathcal{R}}$ , para: (a)  $c = 0.5$ , (b)  $c = 0.706$ , (c)  $c = 0.708$ , y (d)  $c = 0.9$ .

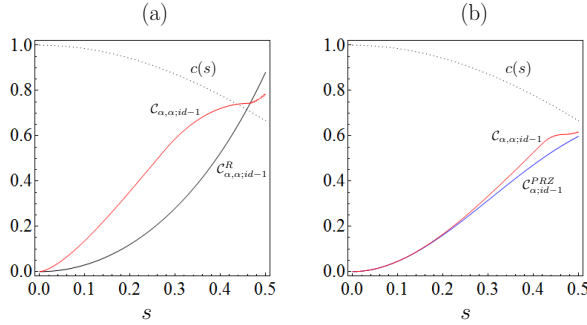


**Figura 3.3:** Entropía de Tsallis. Mapa de nivel en el plano  $\alpha$ - $\beta$  de la diferencia relativa  $\frac{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;i d-1}(c) - \mathcal{C}_{\alpha,\beta;i d-1}^R(c)}{\mathcal{C}_{\alpha,\beta;i d-1}(c)}$  con  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \cup \underline{\mathcal{R}}$ , para: (a)  $c = 0.5$ , (b)  $c = 0.706$ , (c)  $c = 0.708$ , y (d)  $c = 0.9$ .



**Figura 3.4:** Entropía de Rényi. Cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; \ln}(c)$  (línea roja),  $\mathcal{C}_{\alpha; \ln}^{PRZ}(T)$  (línea azul),  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  (izquierda, línea negra) y  $\mathcal{C}^D(c)$  (derecha, línea negra), en función del exponente  $s$  de la matriz unitaria (3.31), para: (a)  $\alpha = 0.8$ , y (b)  $\alpha = 1.4$ . Se muestra en el mismo gráfico el solapamiento  $c = c(s)$  (línea punteada).

- Para  $\alpha = 0.8$ , nuestra cota mejora la de Rastegin en un amplio rango de valores de  $s$ .
- Para  $\alpha = 1.4$ , nuestra cota mejora la de PRZ en todo el rango de valores  $s$ .



**Figura 3.5:** Entropía de Tsallis. Cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; id-1}(c)$  (línea roja),  $\mathcal{C}^R(c)$  (izquierda, línea negra),  $\mathcal{C}_{\alpha; id-1}^{PRZ}(T)$  (derecha, línea azul), en términos del exponente  $s$ , para: (a)  $\alpha = 0.8$ , y (b)  $\alpha = 1.4$ . Se muestra en el mismo gráfico el solapamiento  $c = c(s)$  (línea punteada).

**3.3.2.3**

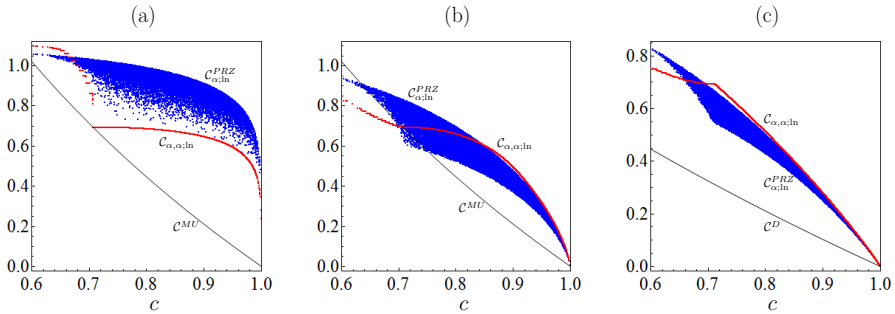
Cotas para matrices unitarias aleatorias y  $\beta = \alpha$

Concluimos esta Subsección de comparaciones evaluando nuestra cota en el caso de pares de observables vinculados por matrices unitarias  $T$  generadas aleatoriamente. Específicamente, generamos  $10^5$  matrices unitarias  $T$  de  $3 \times 3$  de

acuerdo con la distribución (uniforme) de Haar [ZK94, Mez07] (ver Apéndice A). Calculamos las cotas para índices entrópicos iguales  $\beta = \alpha$ .

Por un lado, consideramos el caso de entropía de Rényi fijando  $f(x) = \ln x$ . En las Figs. 3.6.(a)–(c) graficamos las cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; \ln}(c)$ ,  $\mathcal{C}^{MU}(c)$ ,  $\mathcal{C}_{\alpha; \ln}^{PRZ}(T)$ , y  $\mathcal{C}^D(c)$  en función del solapamiento  $c$ , para  $\alpha = 0.2, 0.8$  y  $1.4$ . Observamos que:

- Para  $\alpha = 0.2$ , nuestra cota mejora la de MU en todo el rango del solapamiento  $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ . Además, vemos que existen matrices  $T$  para las cuales nuestra cota mejora la de PRZ, sin embargo, tienen baja frecuencia de ocurrencia.
- Para  $\alpha = 0.8$ , nuestra cota mejora la de MU para  $c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  (Corolario 3.1). Además, vemos que existen matrices  $T$  para las cuales nuestra cota mejora la de PRZ, con una frecuencia de ocurrencia mayor que el caso anterior y creciente con  $c$ .
- Para  $\alpha = 1.4$ , nuestra cota mejora la de Deutsch en todo el rango del solapamiento (Corolario 3.2). Nuevamente, vemos que existen matrices  $T$  para las cuales nuestra cota mejora la de PRZ, con una frecuencia de ocurrencia mayor que los casos anteriores y creciente con  $c$ .



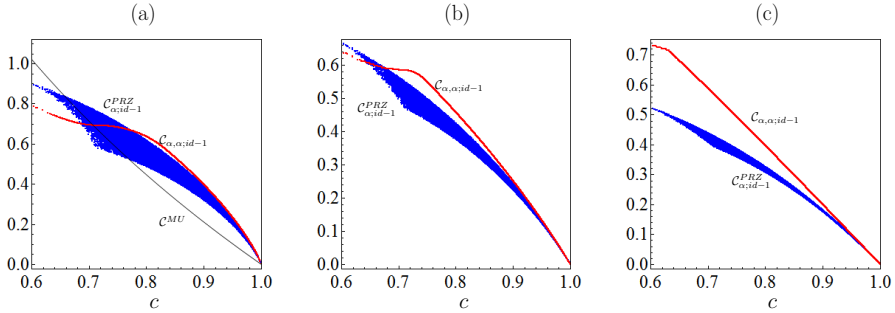
**Figura 3.6:** Entropía de Rényi. Cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; \ln}(c)$  (puntos rojos),  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  (izquierda y centro, línea negra),  $\mathcal{C}_{\alpha; \ln}^{PRZ}(T)$  (puntos azules), y  $\mathcal{C}^D(c)$  (derecha, línea negra), en función del solapamiento  $c$  para: (a)  $\alpha = 0.2$ , (b)  $0.8$ , y (c)  $1.4$ .

Por otro lado, consideramos el caso de entropía de Tsallis fijando  $f(x) = x - 1$ . En las Figs. 3.7 graficamos las cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; id-1}(c)$ ,  $\mathcal{C}^{MU}(c)$ , y  $\mathcal{C}_{\alpha; id-1}^{PRZ}(T)$  en función del solapamiento  $c$ , para  $\alpha = 1, 1.5$  y  $2$ . Observamos que:

- Para  $\alpha = 1$  (caso Shannon), nuestra cota mejora la de MU en el rango  $c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  (Corolario 3.1). Además, vemos que existen matrices unitarias  $T$  para las cuales nuestra cota mejora la de PRZ, con una frecuencia de ocurrencia relativamente alta.



- Para  $\alpha = 1.5$ , existen matrices unitarias  $T$  para las cuales nuestra cota mejora la de PRZ en un amplio rango del solapamiento, con una frecuencia de ocurrencia mayor que el caso anterior.
- Para  $\alpha = 2$ , para todas las matrices generadas nuestra cota mejora la de PRZ en todo el rango del solapamiento.



**Figura 3.7:** Entropía de Tsallis. Cotas  $\mathcal{C}_{\alpha, \alpha; id-1}(c)$  (puntos rojos),  $\mathcal{C}^{MU}(c)$  (izquierda, línea negra), y  $\mathcal{C}_{\alpha; id-1}^{PRZ}(T)$  (puntos azules), en función del solapamiento  $c$ , para: (a)  $\alpha = 1$ , (b)  $\alpha = 1.5$ , y (c)  $\alpha = 2$ .

Para  $N > 3$  y  $c \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , es de esperar que se den los mismos comportamientos relativos entre nuestra cota y la de Maassen–Uffink, y entre nuestra cota y la de Rastegin, ya que estas dependen solamente del solapamiento  $c$ . Por el contrario, esperamos que la mejora de nuestra cota respecto de la de Puchała *et al.* disminuya con la dimensión  $N$ , ya que la cota PRZ depende de la matriz  $T$  completa. No obstante, nuestra cota tiene la ventaja de que es más fácil de calcular que la de Puchała *et al.*, ya que la complejidad de cálculo esta última crece de manera combinatoria con  $N$ .

## 3.4 Caso qubit ( $N = 2$ )

### 3.4.1 Cota óptima y estados minimizantes

La Proposición 3.1 vale, en particular, para el caso del *qubit* ( $N = 2$ ). No obstante, dada la importancia del qubit en información cuántica, vale la pena tratar este caso por separado. Con este propósito, en lo que sigue consideramos observables actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión 2. Para esta

situación logramos resolver el problema de optimización correspondiente a la suma de entropías generalizadas [ZBP13]. En consecuencia, hemos logrado obtener la cota óptima y generalizar los resultados de la literatura que sólo consideran entropías de Rényi específicas, por ejemplo, aquellas con el par  $(\alpha, \beta)$  de índices entrópicos fijo e igual a  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  [Ras12],  $(1, 1)$  (caso entropía de Shannon) [GG90, SR98, GMR03] ó  $(2, 2)$  (caso entropía de colisión) [BPP12].

En las siguientes Proposiciones enunciamos nuestros principales resultados.

**Proposición 3.2.** *Sean  $A$  y  $B$  un par de observables con espectro no degenerado actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión 2, con sus respectivas bases de autoestados  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$  y  $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$ . Entonces para cualquier estado del qubit, descrito por la matriz densidad  $\rho$ , se tiene la siguiente desigualdad:*

$$F_\alpha [p(A; \rho)] + F_\beta [p(B; \rho)] \geq \bar{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; f; 2}(c) \quad (3.32)$$

donde la cota inferior resulta óptima y vale

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; f; 2}(c) = \min_{\theta \in [0, \gamma]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1 - \alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma - \theta))}{1 - \beta} \right), \quad (3.33)$$

con el solapamiento entre las bases de autoestados dado por

$$c \equiv \max_{i, j=1, 2} |T_{ij}| \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right], \quad (3.34)$$

siendo

$$\gamma = \arccos c \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_\lambda(\theta) \equiv (\cos^2 \theta)^\lambda + (\sin^2 \theta)^\lambda. \quad (3.35)$$

**Demostración** Ver Apéndice B.2.1. ■

La relevancia de esta Proposición reside en que, para el caso del qubit, da la *cota óptima*, reduciendo el problema de optimización general (3.9) a uno más fácil de una sola variable (3.33). Más aún, para este problema hemos logrado hallar una expresión de los estados para los cuales la cota se alcanza, esto es, los estados minimizantes de la suma entrópica.

**Proposición 3.3.** *Bajo las condiciones de la Proposición 3.2, consideremos la parametrización de la matriz  $T$  en la forma [Dit03, Jar05]*

$$T = \Phi(\mathbf{u}) V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v}) \quad (3.36)$$

donde

$$\Phi(\cdot) = \exp(i \text{Diag}(\cdot)) \quad y \quad V(\gamma_T) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_T & \sin \gamma_T \\ -\sin \gamma_T & \cos \gamma_T \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

en términos de  $\gamma_T \in [0, \frac{\pi}{2}]$  y de los vectores  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Denotamos con  $\{\theta_{\text{opt}}^{(i)}\}_{i \in \mathcal{I}}$  el conjunto de argumentos que minimizan la expresión (3.33), donde  $\mathcal{I}$  es la lista de todas las posibles soluciones. Entonces, la cota se alcanza para los qubits estados puros cuyas proyecciones en la base de autoestados de  $A$  son

$$\psi_{\text{opt}}^{(i,n,\varphi)} = e^{i\varphi} \Phi(-\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \cos \left( \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

con

$$\varphi \in [0, 2\pi), \quad \varepsilon_T = \text{sign} \left( \frac{\pi}{4} - \gamma_T \right) \quad y \quad n = 0, 1 \quad (3.39)$$

**Demostración** Ver Apéndice B.2.4. ■

Observamos que existe una conexión *a posteriori* de este resultado con la desigualdad de Landau–Pollak (1.16). Con este propósito, introducimos los vectores de probabilidad  $p(A; \psi_{\text{opt}})$  y  $p(B; \psi_{\text{opt}})$  que se obtiene de los estados minimizantes (3.38)

$$p(A; \psi_{\text{opt}}) = \begin{bmatrix} \cos^2 \left( \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin^2 \left( \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \quad y \quad (3.40)$$

$$p(B; \psi_{\text{opt}}) = \begin{bmatrix} \cos^2 \left( \gamma_T - \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} - n \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin^2 \left( \gamma_T - \varepsilon_T \theta_{\text{opt}}^{(i)} - n \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Por inspección de todos los casos de  $\gamma_T$  y  $n$ , obtenemos que

$$\arccos \sqrt{\max_{i=1,2} p_i(A; \psi_{\text{opt}})} + \arccos \sqrt{\max_{j=1,2} p_j(B; \psi_{\text{opt}})} = \arccos c \quad (3.42)$$

donde  $\arccos c = \gamma = \min \left( \gamma_T, \frac{\pi}{2} - \gamma_T \right) = \frac{\pi}{4} - \left| \frac{\pi}{4} - \gamma_T \right| \in [0, \frac{\pi}{4}]$ . Dicho de otra manera, los estados (3.38) que minimizan la relación de incerteza entrópica (3.32), también minimizan la relación de incerteza LPI (1.16) para el caso del qubit. Por este motivo la cota (3.26) para  $N = 2$  y la cota (3.33) coinciden.

En lo que sigue de esta Sección nos concentramos en algunas derivaciones y consecuencias de las Proposiciones 3.2 y 3.3. Además, con el propósito de comparar con otros resultados disponibles en la literatura, nos restringiremos al caso de entropía de Rényi (3.3) fijando  $f(x) = \ln x$ .

Es evidente que *nuestra cota* (3.33) es mejor (o al menos igual) que todas las cotas que se pueden encontrar en la literatura para el caso del qubit, ya que resolvimos el problema de optimización correspondiente. No obstante, es interesante tener una noción cualitativa del “grado de mejora” de nuestra cota respecto de otras que no son óptimas.

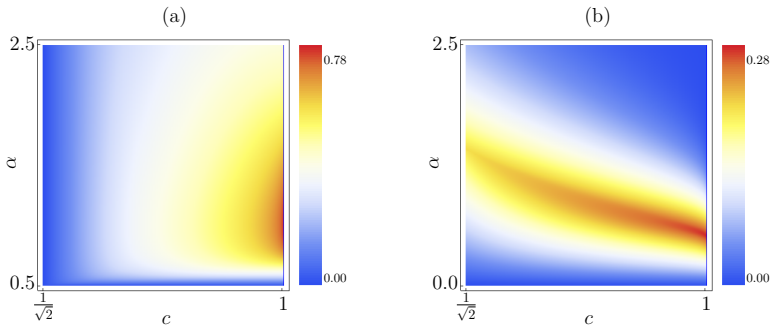
Para ilustrar esto, por un lado, consideramos la diferencia relativa entre nuestra cota y la de Maassen y Uffink (Fig. 3.8.(a)) para índices entrópicos conjugados  $\beta = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$ :

$$\frac{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c) - \mathcal{C}^{MU}(c)}{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c)}. \quad (3.43)$$

Por otro lado, consideramos la diferencia relativa entre nuestra cota y la de Puchała *et al.* (Fig. 3.8.(b)) para índices entrópicos iguales  $\beta = \alpha$ :

$$\frac{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(c) - \mathcal{C}_{\alpha;\ln;2}^{PRZ}(c)}{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(c)}. \quad (3.44)$$

Como mostramos en las Figs. 3.8.(a) y (b), las diferencias relativas son positivas para todo  $c$  y  $\alpha$ , llegando, en algunos casos, hasta una mejora del 78% y 28% respecto de las cotas de Maassen–Uffink y de Puchała *et al.*, respectivamente.



**Figura 3.8:** Mapa de nivel en el plano  $c$ - $\alpha$  de la diferencia relativa: (a)  $\frac{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c) - \mathcal{C}^{MU}(c)}{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c)}$  para índices conjugados  $\beta = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$ , y (b)  $\frac{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(c) - \mathcal{C}_{\alpha;\ln;2}^{PRZ}(c)}{\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(c)}$  para índices iguales  $\beta = \alpha$ .

### 3.4.2 Cota para índices entrópicos particulares

Como hemos señalado, la cota óptima  $\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c)$  tiene que ser calculada en general numéricamente, resolviendo el problema de minimización unidimensional (3.33). Sin embargo, existen algunas regiones en el plano  $\alpha$ - $\beta$  para las cuales hemos encontrado una expresión analítica o semi-analítica de la cota. Presentamos esto en los siguientes Corolarios.

**Corolario 3.4.** *En el contexto de las Proposiciones 3.2 y 3.3 con  $f(x) = \ln x$ , si los índices entrópicos pertenecen a la región*

$$(\alpha, \beta) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \quad (3.45)$$

la cota óptima (3.33) se reduce a la expresión analítica

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;\ln;2}(c) = \frac{\ln((c^2)^\lambda + (1-c^2)^\lambda)}{1-\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \max\{\alpha, \beta\}. \quad (3.46)$$

Más aún, los estados minimizantes (3.38) para los cuales es alcanzada la cota corresponden a:  $\theta_{\text{opt}} = 0$  si  $\alpha < \beta$ ,  $\theta_{\text{opt}} = \gamma$  si  $\alpha > \beta$ , y ambas soluciones si  $\alpha = \beta$ .

**Demostración** Ver Apéndice B.2.2. ■

En primer lugar, observamos que existe una “transición” en términos de los índices entrópicos para  $\alpha = \beta$ , ya que en esta situación ambos ángulos  $\theta_{\text{opt}} = 0$  y  $\theta_{\text{opt}} = \gamma$  conllevan a estados minimizantes. Además, notamos que el Corolario 3.4 incluye como casos particulares a algunos resultados previos de la literatura. Por un lado, cuando  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , y los índices son: (i) conjugados, reobtenemos la cota dada en Refs. [BB06, ZPV08], o (ii) iguales, reobtenemos nuestro resultado dado en Ref. [BPHP13]. Por otro lado, para cualquier  $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$  e índices  $\beta = \alpha = \frac{1}{2}$ , recuperamos la cota dada en Ref. [Ras12].

Sobre la recta  $\beta = \alpha$ , obtenemos el siguiente resultado semi-analítico:

**Corolario 3.5.** *En el contexto de las Proposiciones 3.2 y 3.3 con  $f(x) = \ln x$*

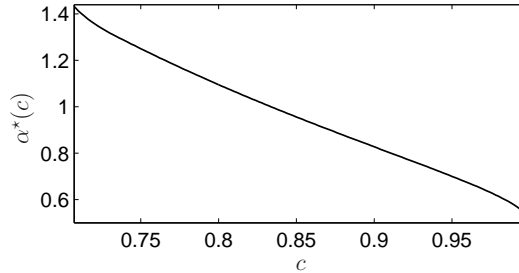
e índices entrópicos iguales ( $\beta = \alpha$ ), la cota se expresa como

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(c) = \begin{cases} \frac{\ln((c^2)^\alpha + (1-c^2)^\alpha)}{1-\alpha} & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \left(1 - \delta_{c, \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \alpha^\dagger \delta_{c, \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \min_{\theta \in (0, \frac{\gamma}{2}]} \frac{\ln D_\alpha(\theta) + \ln D_\alpha(\gamma - \theta)}{1-\alpha} & \frac{1}{2} \left(1 - \delta_{c, \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \alpha^\dagger \leq \alpha \leq \alpha^*(c) \\ \frac{2 \ln\left(\left(\frac{1+c}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{1-c}{2}\right)^\alpha\right)}{1-\alpha} & \alpha > \alpha^*(c) \end{cases} \quad (3.47)$$

con  $\gamma = \arccos c$ ,  $\alpha^\dagger \approx 1.43$  única solución de  $\frac{2}{1-\alpha} \ln \left[ \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^\alpha + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^\alpha \right] = \ln 2$ ,  $\alpha^*(c)$  se muestra en Fig. 3.9, y  $\delta_{c, \frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$  cuando  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y 0 en cualquier otro caso.

Más aún, la cota es alcanzada para  $\theta_{\text{opt}}^{(i)} = \frac{\gamma}{2} + i \left(\frac{\gamma}{2} - \theta_{\text{opt}}\right)$  con  $i = \pm 1$  y  $\theta_{\text{opt}} = 0$  en el primer intervalo,  $\theta_{\text{opt}}$  es la solución (única y numérica) de la minimización en el segundo intervalo, y  $\theta_{\text{opt}} = \frac{\gamma}{2}$  en el tercer intervalo.

**Demostración** Ver Apéndice B.2.3. ■

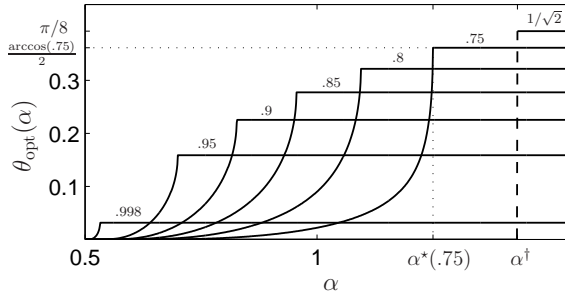


**Figura 3.9:**  $\alpha^*(c)$  versus  $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ .

A partir de este Corolario hacemos las siguientes observaciones:

- Para  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , tenemos que  $\alpha^*\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \alpha^\dagger$ . Luego, el segundo intervalo en (3.47) se reduce a un solo punto y la cota toma el mismo valor,  $\ln 2$ , que en el primer intervalo. En este caso, existe una transición en el valor de la cota versus  $\alpha$ , en  $\alpha = \alpha^\dagger$ . Esto se puede ver de los estados minimizantes, ya que los ángulos óptimos son  $\theta_{\text{opt}} = 0$ , ó 0 y  $\frac{\gamma}{2}$ , ó  $\frac{\gamma}{2}$ , dependiendo de si  $\alpha$  es menor, igual o mayor que  $\alpha^\dagger$ , respectivamente. Esto concuerda con las observaciones realizadas en [Lui11], donde el valor  $\alpha^\dagger$  es calculado como aquel que anula la derivada segunda respecto de  $\theta$  de  $\frac{\ln D_\alpha(\theta) + \ln D_\alpha(\gamma - \theta)}{1-\alpha}$  en  $\theta = \frac{\gamma}{2}$ .

- Para  $c \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ , la situación correspondiente al primer intervalo en (3.47) está contemplada por el Corolario 3.4; el tamaño del segundo y tercer intervalo depende del valor de  $c$ , ya que  $\alpha^*(c)$  decrece con  $c$  desde  $\alpha^\dagger$  a  $\frac{1}{2}$  (ver Fig. 3.9). Por encima de  $\alpha = \frac{1}{2}$ , el ángulo óptimo  $\theta_{\text{opt}}$  crece con  $\alpha$  continuamente desde 0 a  $\frac{\gamma}{2}$ , como se muestra en la Fig. 3.10. En este caso no hay una transición en el valor de la cota.
- Para  $c = 1$ , tenemos  $\gamma = 0$  y obtenemos, como era de esperar, la cota trivial:  $\bar{C}_{\alpha, \alpha; \ln; 2}(1) = 0$ .



**Figura 3.10:** Ángulo óptimo  $\theta_{\text{opt}}$  en función de  $\alpha > \frac{1}{2}$ , para algunos valores dados de  $c$ . Como ejemplo ilustrativo, especificamos la situación para  $c = 0.75$ .

El caso  $\beta = \alpha$  es precisamente el tratado por Puchała *et al.* en [PRŻ13], en el caso  $N$ -dimensional. Sin embargo, como ya hemos señalado, para  $N = 2$  la cota  $C_{\alpha; \ln; 2}^{PRZ}(c)$  (3.19) no es óptima (ver Fig. 3.8.(b)). Además, observamos que este Corolario incluye dos casos particulares de la literatura. Por un lado, tomando el límite  $\alpha \rightarrow 1$  reobtenemos la cota  $C^{VS}(c)$  (3.17), es decir, la cota de de Vicente y Sánchez-Ruiz [dVSR08] es óptima para el caso del qubit. Por otro lado, tomando  $\alpha = 2$  reobtenemos la cota óptima que derivamos en [BPP12] para la suma de entropías de colisión.

Finalmente, usando el hecho de que la entropía de Rényi  $H_\lambda$  decrece con  $\lambda$ , obtenemos el siguiente resultado (no óptimo):

**Corolario 3.6.** *En el contexto de la Proposición 3.2, si  $f(x) = \ln x$ , la suma de entropías de Rényi está inferiormente acotada de la forma*

$$R_\alpha[p(A; \rho)] + R_\beta[p(B; \rho)] \geq C_{\lambda, \lambda; \ln; 2}(c) \quad \text{con } \lambda = \max\{\alpha, \beta\} \quad (3.48)$$

para cualquier par  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ , con  $C_{\lambda, \lambda; \ln; 2}(c)$  dada en la expresión (3.47).

**Demostración** La prueba es directa usando el Corolario 3.5 y el hecho de que la entropía de Rényi decrece con el índice entrópico. ■

Por último, observamos que tomando el límite de  $\beta = \alpha \rightarrow \infty$  en (3.48), reobtenemos

$$R_\alpha[p(A; \rho)] + R_\beta[p(B; \rho)] \geq R_\infty[p(A; \rho)] + R_\infty[p(B; \rho)] \geq C^D(c), \quad (3.49)$$

donde  $C^D(c)$  es la cota de Deutsch definida en (3.15).



# 4

## CONEXIÓN ENTRE LOS PRINCIPIOS DE COMPLEMENTARIEDAD E INCERTEZA

---

*“The very nature of the quantum theory forces us to regard the space-time coordination and the claim of causality, the union of which characterizes the classical theories, as complementary but exclusive features of the description, symbolizing the idealization of observation and description, respectively.”*

*Niels Bohr*

---

4.1	Relación de dualidad . . . . .	57
4.2	Dualidad y relación de Robertson–Schrödinger . . .	60
4.3	Dualidad y relación de Landau–Pollak . . . . .	62
4.4	Dualidad y relaciones entrópicas . . . . .	63

---

## 4.1 Relación de dualidad

El *principio de complementariedad de Bohr* [Boh28, Boh37] es, junto con el principio de incerteza, otro de los pilares de la mecánica cuántica. Este principio establece que los sistemas cuánticos pueden poseer propiedades mutuamente excluyentes que dan lugar a experimentos incompatibles entre sí, pero que al mismo tiempo son necesarias para una descripción completa de los fenómenos que trata la teoría. El ejemplo paradigmático es la *dualidad onda-corpúsculo* de una partícula cuántica en un interferómetro de dos caminos. Según Feynman, todo el misterio de la cuántica se encuentra en este ejemplo [FLS63].

El interferómetro de Mach–Zehnder (MZ) es particularmente adecuado para las discusiones sobre la dualidad onda-corpúsculo [JSV95, Eng96, BS06, LHG<sup>+</sup>12]. En este sentido, el aspecto ondulatorio (relacionado con las franjas de interferencia) y el aspecto corpuscular (relacionado con el camino seguido en el interferómetro) están representados por las cantidades medibles *visibilidad*  $V$  y *predictibilidad*  $P$ , respectivamente, las cuales satisfacen la relación de dualidad [JSV95, Eng96]

$$P^2 + V^2 \leq 1. \quad (4.1)$$

Esta relación también ha sido dada de forma implícita en las Refs. [WZ79, Man91].

La desigualdad (4.1) es una formulación cuantitativa de la complementariedad que se expresa de forma similar a las desigualdades del principio de incerteza. Sin embargo, la derivación original de (4.1) *no* involucra a las fluctuaciones inherentes de las cantidades medidas. La conexión entre ambos principios, si es que la hay, ha sido tema de debate en la última década [Lui01, DR00, BST<sup>+</sup>99, BS06, LHG<sup>+</sup>12]. En concreto, nos vamos a concentrar en responder la pregunta: *¿es la inecuación (4.1) la expresión de una relación de incerteza?* Respuestas en ambos sentidos han sido formuladas por otros autores [Eng96, BST<sup>+</sup>99, DR00, BS06]. Nuestro objetivo es avanzar sobre las conexiones con las relaciones de incerteza estudiadas en los Capítulos previos.

Antes de especificar los vínculos entre ambos principios, vamos a dar la demostración de la relación de dualidad (4.1).

El interferómetro de MZ (ver Fig. 4.1) es un dispositivo que es usado en varias ramas de la física, en particular, para el estudio del principio de complementariedad. En este contexto, una cantidad que mide la información sobre qué

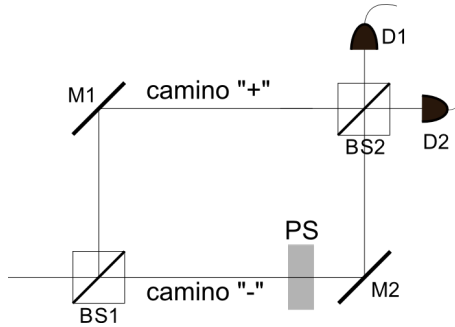
camino toma la partícula es la predictibilidad:

$$P = 2 \max\{w_+, w_-\} - 1, \quad (4.2)$$

donde  $w_+$  y  $w_-$  son las probabilidades de que la partícula tome el camino “+” o “-”, respectivamente. Por otra parte, la visibilidad de las franjas de interferencia es cuantificada de la manera usual por

$$V = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} \quad (4.3)$$

donde  $p$  denota la probabilidad de la partícula sea detectada por alguno de los detectores D1 o D2, siendo  $p_{\max}$  y  $p_{\min}$  la máxima y la mínima probabilidad de detección. Las cantidades  $P$  y  $V$  toman valores entre 0 y 1. Sin embargo, la expresión (4.1) prohíbe que ambas magnitudes sean iguales a 1. Esto implica que el sistema cuántico no puede manifestar al mismo tiempo los dos aspectos, el corpuscular y el ondulatorio, bien definidos.



**Figura 4.1:** Interferómetro de Mach-Zehnder: BS1 y BS2 son divisores de haz, PS es un retardador de fase, M1 y M2 son espejos, y D1 y D2 son detectores.

El interferómetro MZ tiene dos modos espaciales que pueden ser representados por un espacio de Hilbert de dimensión 2. Expandimos el espacio de Hilbert usando la base ortonormal  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  formada por los autoestados del operador  $\sigma_z$ , que representan los caminos del interferómetro. Consideramos que el estado del sistema luego del primer divisor de haz está dado, indistintamente en la representación de Bloch, o bien, en la representación matricial en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , por:

$$\rho = \frac{I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} = \begin{pmatrix} w_+ & r e^{-i\theta} \\ r e^{i\theta} & w_- \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  denota el vector de matrices de Pauli,  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ , y  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = (2r \cos \theta, 2r \sin \theta, 2w_+ - 1)$  es el vector de Bloch (con  $\|\mathbf{s}\| \leq 1$ ) que caracteriza el estado del sistema. Luego, la

predictibilidad  $P$  resulta:

$$P = 2 \max\{w_+, w_-\} - 1 = |s_z|. \quad (4.5)$$

Consideramos la acción del retardador de fase PS descrita por la transformación unitaria,

$$U_{\text{PS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix},$$

mientras que, sin pérdida de generalidad, consideramos un segundo divisor de haz 50:50, BS2, descrito por la transformación unitaria

$$U_{\text{BS}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ambas expresiones están dadas en la representación matricial en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Teniendo en cuenta esto, el estado final del sistema está dado por la matriz densidad:  $\rho^f = U_{\text{BS}} U_{\text{PS}} \rho U_{\text{PS}}^\dagger U_{\text{BS}}^\dagger$ . Luego, la probabilidad de detección en D1 o D2 es

$$p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm 2r \sin(\theta + \phi)), \quad (4.6)$$

por lo que la visibilidad resulta

$$V = 2r = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}. \quad (4.7)$$

Finalmente, la relación de dualidad (4.1) se obtiene *directamente de la positividad de la matriz densidad*

$$P^2 + V^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \leq 1, \quad (4.8)$$

donde la igualdad se da para  $\|\mathbf{s}\| = 1$ , o sea, para cualquier estado puro de un qubit.

Para analizar la conexión entre la relación de dualidad (4.1) con las diferentes relaciones de incerteza, es necesario definir los observables pertinentes. En este sentido, seguimos la definiciones de los observables dadas en la Ref. [BST<sup>+</sup>99]. A la predictibilidad  $P$  se le asocia un observable  $\hat{P}$ , mientras que a la visibilidad  $V$  se le asocia el observable  $\hat{V}_\phi$  o  $\hat{V}_\phi^\perp$ , dependiendo de la elección de la fase  $\phi$ . Expresamos estos observables en términos de las matrices de Pauli:

$$\hat{P} = \sigma_z \quad (4.9)$$

$$\hat{V}_\phi = (\cos \phi) \sigma_x + (\sin \phi) \sigma_y \quad (4.10)$$

$$\hat{V}_\phi^\perp = -(\sin \phi) \sigma_x + (\cos \phi) \sigma_y \quad (4.11)$$

con  $\phi$  en el rango de 0 a  $2\pi$ . Observar que  $\hat{P}$ ,  $\hat{V}_\phi$ , y  $\hat{V}_\phi^\perp$  son (para cada  $\phi$ ) un conjunto de observables mutuamente complementarios, esto es, si se tiene certeza respecto del resultado de uno, entonces se tiene máxima ignorancia respecto de los otros dos. En [Lui01] se da una definición alternativa de los observables.

Vemos que los valores de expectación de estos observables están directamente conectados con la predictibilidad y visibilidad, respectivamente. De hecho, para un matriz densidad  $\rho$  con vector de Bloch  $\mathbf{s}$ , tenemos que

$$|\langle \hat{P} \rangle| = |s_z| = P. \quad (4.12)$$

Por otro lado, la visibilidad  $V$  puede ser derivada de los valores de expectación  $\hat{V}_\phi$  o de  $\hat{V}_\phi^\perp$ :

$$\langle \hat{V}_\phi \rangle = 2r \cos(\theta - \phi) \quad \text{y} \quad (4.13)$$

$$\langle \hat{V}_\phi^\perp \rangle = 2r \sin(\theta - \phi), \quad (4.14)$$

eligiendo de forma adecuada la fase  $\phi$ . Luego, la visibilidad  $V$  es el máximo valor de alguno de estos valores de expectación, que se obtiene de  $\hat{V}_\phi$  si uno fija la fase  $\phi = \theta$ , o de  $\hat{V}_\phi^\perp$  si se fija  $\phi = \theta - \pi/2$ .

Remarcamos que la medición de los observables (4.9) y (4.10), o (4.9) y (4.11), sólo puede ser llevada a cabo en arreglos experimentales *incompatibles* y en ningún momento hacemos referencia a la medición simultánea. Por lo tanto, la relación (4.1) expresa la *complementariedad en la preparación del estado* [BS06], esto es, la imposibilidad de preparar el sistema de tal forma que tenga los aspectos corpuscular y ondulatorio bien definidos.

## 4.2

## Dualidad y relación de Robertson–Schrödinger

Las varianzas de los observables dados en las Ecs. (4.9)–(4.11) son obtenidas en términos de la predictibilidad  $P$  y visibilidad  $V$  como

$$(\Delta \hat{P})^2 = 1 - P^2 \quad (4.15)$$

$$(\Delta \hat{V}_\phi)^2 = 1 - V^2 \cos^2(\theta - \phi) \quad (4.16)$$

$$(\Delta \hat{V}_\phi^\perp)^2 = 1 - V^2 \sin^2(\theta - \phi), \quad (4.17)$$

donde  $\theta$  es el ángulo relacionado con el estado del sistema (ver Ec. (4.4)). Remarcamos que la elección adecuada de los observables (entiéndase operadores

Hermíticos actuando en un espacio de Hilbert de dimensión 2), es el primer paso a seguir para comprobar si la desigualdad (4.1) es la expresión de una relación de incerteza.

Este problema fue abordado, particularmente, en las Refs. [BST<sup>+</sup>99, DR00, BS06]. Comenzamos con algunas observaciones críticas respecto de los resultados de estos trabajos. En la Ref. [DR00], la *equivalencia* entre ambos principios es afirmada: de hecho, la relación de incerteza de Robertson es calculada para los pares de observables  $\hat{P}$  y  $\hat{V}_\theta^\perp$ , o  $\hat{V}_\theta$  y  $\hat{V}_\theta^\perp$  (fijando la fase  $\phi = \theta$ ). Haciendo esto, se obtienen las siguientes relaciones de incerteza

$$(\Delta\hat{P})^2(\Delta\hat{V}_\theta^\perp)^2 = 1 - P^2 \geq V^2 \quad (4.18)$$

$$(\Delta\hat{V}_\theta)^2(\Delta\hat{V}_\theta^\perp)^2 = 1 - V^2 \geq P^2. \quad (4.19)$$

De estas desigualdades (para cada  $\theta$ ) se reobtiene directamente la relación de dualidad (4.1). La principal crítica al respecto, de la que los mismos autores también dan cuenta, es que el uso de  $\hat{V}_\theta^\perp$  no tiene interpretación directa en términos de la predictibilidad ni en términos de la visibilidad, dado que  $\langle\hat{V}_\theta^\perp\rangle = 0$  y  $\Delta\hat{V}_\theta^\perp = 1$  para cualquier estado (4.4). Más aún, si se eligen los observables  $\hat{P}$  y  $\hat{V}_\theta$ , los cuales sí tienen interpretación directa en términos de predictibilidad y visibilidad, entonces la correspondiente relación de Robertson se vuelve trivial:  $(\Delta\hat{P})^2(\Delta\hat{V}_\theta)^2 \geq 0$ .

De forma independiente, en la Ref. [BST<sup>+</sup>99] también tratan con el mismo problema. En este trabajo insinúan que el uso de la relación de incerteza de Schrödinger podría servir para conectar ambos principios. Sin embargo, una prueba acabada de la equivalencia entre ambos principios en el contexto del interferómetro MZ, se da en [BS06], donde se evalúa la relación de incerteza de Schrödinger para los observables  $\hat{P}$  y  $\hat{V}_\theta$ . Para estos observables, la relación de incerteza de Schrödinger toma la forma

$$(1 - P^2)[1 - V^2 \cos^2(\theta - \phi)] \geq P^2 V^2 \cos^2(\theta - \phi) + V^2 \sin^2(\theta - \phi), \quad (4.20)$$

válida para  $\phi$  arbitrario. Se puede ver que la relación de dualidad (4.1) se obtiene directamente de (4.20), y que la igualdad se alcanza para cualquier estado puro. Enfatizamos que la desigualdad (4.20) es válida para *cualquier* fase  $\phi$  introducida por el retardador PS en el interferómetro. En particular, vale para la fase adecuada  $\phi = \theta$ . Por lo tanto, se tiene una *equivalencia* entre la relación de Schrödinger para los observables  $\hat{P}$  y  $\hat{V}_\theta$  con la relación de dualidad entre la predictibilidad y la visibilidad, superando la crítica del trabajo [DR00].

Finalmente, mencionamos que en el reciente trabajo [LHG<sup>+</sup>12], se investigan experimental y teóricamente el vínculo de la dualidad onda–corpúsculo con las

fluctuaciones cuánticas, obteniendo la siguiente igualdad entre las cantidades  $P$  y  $V$  y sus respectivas varianzas:

$$P^2 + V^2 + (\Delta P)^2 + (\Delta V)^2 = 2. \quad (4.21)$$

Sin embargo, esta expresión es obtenida independientemente de las relaciones de incerteza.

### 4.3 Dualidad y relación de Landau–Pollak

En esta Sección vamos a ver que la expresión (4.1) también se puede derivar de la desigualdad de Landau–Pollak (1.16), como hemos demostrado en [BPHP13]. Las probabilidades máximas asociadas a los observables  $\hat{P}$  y  $\hat{V}_\theta$ , en términos de la predictibilidad y visibilidad, son

$$P_{\hat{P};\rho} = \frac{1+P}{2}, \quad (4.22)$$

$$P_{\hat{V}_\theta;\rho} = \frac{1+V}{2}. \quad (4.23)$$

Reemplazando estas probabilidades en la desigualdad de Landau y Pollak (1.16) y fijando el solapamiento  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (dado que los observables son complementarios), obtenemos que

$$\arccos \sqrt{\frac{1+P}{2}} + \arccos \sqrt{\frac{1+V}{2}} \geq \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.24)$$

Usando la identidad [GR07, Ec. 1.6257]

$$\arccos x + \arccos y = \arccos \left( xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} \right)$$

obtenemos que (4.24) se reduce a

$$\sqrt{\left(\frac{1+P}{2}\right) \left(\frac{1+V}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1-P}{2}\right) \left(\frac{1-V}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.25)$$

Finalmente, operando algebraicamente esta desigualdad llegamos a

$$(1-P^2)(1-V^2) \geq (PV)^2, \quad (4.26)$$

expresión que coincide con la desigualdad (4.20) para  $\phi = \theta$  y, como hemos notado anteriormente, puede ser reescrita fácilmente de la forma  $P^2 + V^2 \leq 1$ .

Esto implica que la relación de dualidad puede ser deducida de la desigualdad de Landau–Pollak. Como consecuencia, existe una completa correspondencia entre las relaciones de incerteza de Schrödinger y de Landau y Pollak, un hecho remarcable que no se mantiene para otros pares de observables.

## 4.4 Dualidad y relaciones entrópicas

Este caso es aún más interesante, ya que tenemos la libertad de elegir la entropía y los índices entrópicos para comparar con la relación de dualidad (4.1). Por simplicidad vamos a trabajar con la entropía de Rényi para dos situaciones: (i) en una, elegimos un índice entrópico igual a  $\frac{1}{2}$  y el otro igual a  $\infty$  [CKW14], y (ii) en la otra, tomamos los índices entrópicos iguales [BPHP13].

Para el estado del sistema  $\rho$  de la forma (4.4), las expresiones de las entropías de Rényi para las estadísticas  $p(\hat{P}; \rho)$  y  $p(\hat{V}_\theta; \rho)$ , en términos de  $P$  y  $V$ , son

$$R_\alpha[P] = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left( \left( \frac{1+P}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1-P}{2} \right)^\alpha \right), \quad (4.27)$$

$$R_\beta[V] = \frac{1}{1-\beta} \ln \left( \left( \frac{1+V}{2} \right)^\beta + \left( \frac{1-V}{2} \right)^\beta \right). \quad (4.28)$$

Por un lado, si consideramos el par de índices entrópicos  $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{2}, \infty)$  (ó  $(\alpha, \beta) = (\infty, \frac{1}{2})$ ) que pertenece a la curva de conjugación  $\mathcal{R}$  (ver Fig. 3.1), de la Proposición 3.2 (o de la cota de Maassen–Uffink) con  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y de las entropías (4.27) y (4.28), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$2 \ln \left( \left( \frac{1+P}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1-P}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \ln \left( \frac{1+V}{2} \right) \geq \ln 2. \quad (4.29)$$

Como se observa en [CKW14], manipulando algebraicamente la desigualdad (4.29) se llega a la expresión (4.1). Nuevamente podemos afirmar que existe una equivalencia entre la relación de dualidad y la relación de incerteza entrópica para el caso de entropía de Rényi con índices conjugados de valores  $\frac{1}{2}$  e  $\infty$ .

Aunque la elección anterior de los índices entrópicos resuelve el tema de la equivalencia, resulta interesante considerar otros casos como el de índices entrópicos iguales:  $\beta = \alpha$ . Usando el Corolario 3.5 con  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , obtenemos la



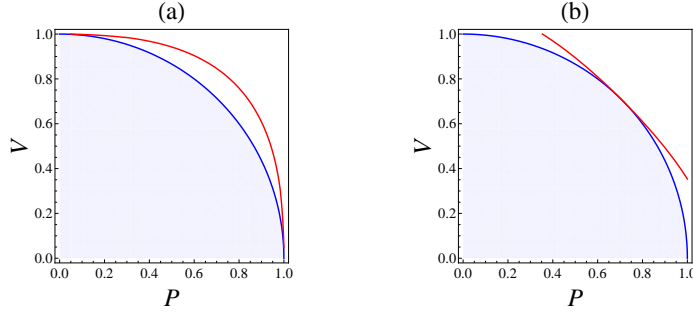
siguiente relación de incerteza entrópica:

$$R_\alpha[P] + R_\alpha[V] \geq \bar{C}_{\alpha,\alpha;\ln;2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.30)$$

con las expresiones de las entropías dadas en (4.27) y (4.28) y la cota inferior igual a

$$\bar{C}_{\alpha,\alpha;\ln;2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \begin{cases} \ln 2 & 0 \leq \alpha \leq \alpha^\dagger \\ \frac{2}{1-\alpha} \ln \left[ \left( \frac{1+1/\sqrt{2}}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1-1/\sqrt{2}}{2} \right)^\alpha \right] & \alpha \geq \alpha^\dagger, \end{cases} \quad (4.31)$$

donde  $\alpha^\dagger \approx 1.43$ . A diferencia del caso anterior, se puede ver que esta desigualdad *no* se puede llevar a la forma:  $P^2 + V^2 \leq 1$  [BPHP13]. Por ejemplo, en la Fig. 4.2 mostramos que los valores permitidos de  $P$  y  $V$  por las desigualdades (4.1) y (4.30) para  $\alpha = 1$  (Fig. 4.2.(a)) y  $\alpha = 2$  (Fig. 4.2.(b)) son diferentes entre sí.



**Figura 4.2:** Plano  $P$ - $V$ . Curva  $P^2 + V^2 = 1$  (azul) y curva  $R_\alpha[P] + R_\alpha[V] = \bar{C}_{\alpha,\alpha;\ln;2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$  (línea roja) para: (a)  $\alpha = 1$  (entropía de Shannon), y (b)  $\alpha = 2$  (entropía de colisión). Los valores posibles de  $P$  y  $V$  son los que verifican (4.1) (línea azul y región celeste).

Sin embargo, esta disparidad no resulta una desventaja de (4.30) respecto de (4.29), si uno está interesado en los estados para los cuales se alcanza la cota. En efecto, la desigualdad (4.30) se satura para los estados puros que son:

1. *intermedios* si  $\alpha < \alpha^\dagger$ ,
2. *intermedios* o *extremos* si  $\alpha = \alpha^\dagger$ , y
3. *extremos* si  $\alpha > \alpha^\dagger$ ,

donde hemos empleado la misma clasificación que en [Lui11]. Los estados extremos son estados puros de la forma (4.4) con vectores de Bloch (normaliza-

dos):  $\pm(0, 0, 1)$  ó  $\pm(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . Estos estados corresponden a la situación física de que el sistema manifiesta el aspecto corpuscular ( $P = 1$  y  $V = 0$ ), o bien, a que el sistema manifiesta el aspecto ondulatorio ( $P = 0$  y  $V = 1$ ). Por otro lado, los estados intermedios son estados puros de la forma (4.4), con vectores de Bloch (normalizados):  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \pm 1)$ . En este caso, estamos ante la situación física de que el sistema no tiene ninguno de los dos aspectos bien definidos, es decir,  $P = V = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Estas situaciones son transparentes para la desigualdades (4.1), (4.20), (4.26) y (4.29) ya que no distinguen entre los diferentes estados puros que la saturan.

# 5

## CONCLUSIONES

---

*‘After you learn quantum mechanics you’re never really the same again.’  
Steven Weinberg*

---

5.1	Discusión de los resultados . . . . .	67
5.2	Perspectivas . . . . .	69

---

## 5.1 Discusión de los resultados

A lo largo de esta Tesis mostramos diferentes formulaciones cuantitativas del principio de incerteza que derivamos para pares de observables actuando en espacios de Hilbert finitos. En el Capítulo 1 motivamos el estudio de la temática analizando los defectos de la formulación original dada por las desigualdades de Robertson y de Schrödinger. Vimos ejemplos concretos de cómo éstas fallan a la hora de expresar el principio de incerteza en su expresión matemática más general (1.1).

Nuestros aportes originales los desarrollamos en los Capítulos 2, 3 y 4. Las conclusiones principales de los mismos son:

*Capítulo 2: Relaciones de incerteza tipo Landau–Pollak.*

En primer lugar, introdujimos de manera geométrica una medida de la incerteza asociada a la medición de un POVM (2.6). El resultado principal de este Capítulo es la obtención de una familia de desigualdades (2.7) que expresan satisfactoriamente el principio de incerteza, para un par de POVM y estados mixtos (Proposición 2.1). En consecuencia, la relación de incerteza de Landau y Pollak (1.16) dada por Maassen y Uffink en [MU88, Uff90], se deriva de nuestro resultado considerando la métrica de Wootters, observables con espectro discreto y no degenerado, y estados puros. Además, concluimos que de todas las métricas definidas en la Sección 2.2, la de Wootters da la desigualdad más restrictiva (Proposición 2.1). Este resultado es interesante ya que da una respuesta en el contexto de las relaciones de incerteza, a la pregunta más general de *¿cuál es la métrica en información cuántica?* Por otra parte, obtuvimos que un POVM tiene asociado una incerteza inherente (Corolario 2.1) que es, como era de esperar, no nula si ningún elemento del POVM tiene autovalor igual a 1. Esto permitió mejorar la cota obtenida (Corolario 2.2) y dar la expresión del dominio más acotado de las probabilidades máximas asociadas a un par de POVM (Corolario 2.3), que sirve de base en el Capítulo 3 para obtener relaciones de incerteza tipo entrópicas.

*Capítulo 3: Relaciones de incerteza tipo entrópicas.*

En este caso abordamos el problema desde una perspectiva informacional. En efecto, definimos una  $(f, \lambda)$ -entropía generalizada que cuantifica la incerteza de un vector de probabilidad (3.1). Esta definición permite trabajar de manera unificada con los casos particulares de Shannon ( $\lambda = 1$ ), de Rényi ( $f(x) = \ln x$ ) y de Tsallis ( $f(x) = 1 - x$ ). Nuestro principal aporte en este Capítulo es la obtención de una cota inferior a la suma de entropías generalizadas

para un par de POVM (Proposición 3.1). Este resultado es una formulación entrópica del principio de incerteza que generaliza la obtenida por de Vicente y Sánchez-Ruiz en [dVSR08]. Además, para el caso de observables con espectro discreto y no degenerado, concluimos que nuestra cota es  $c$ -óptima en el rango del solapamiento  $c$  comprendido entre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  y 1 (Corolario 3.1). En consecuencia, mejoramos la cota de Maassen–Uffink (3.16) en este rango. No obstante, para  $c \leq \frac{1}{2}$  mostramos que no se mejora dicha cota (Corolario 3.3) mediante nuestra propuesta. Además, consideramos resolver el problema de optimización (3.9) en el caso del qubit ( $N = 2$ ) con el fin de obtener la cota óptima a la suma de entropías generalizadas. Logramos reducir la complejidad del mismo, resolviendo un problema equivalente de minimización de una sola variable (Proposición 3.2). Además, obtuvimos una expresión para los estados que alcanzan la cota (Proposición 3.3). En consecuencia, los resultados obtenidos en las Refs. [GG90,SR98,GMR03,Ras12] se pueden derivar de nuestra propuesta. Además, para la entropía de Rényi y ciertas regiones del plano  $\alpha$ - $\beta$  de índices entrópicos, encontramos que la cota óptima tiene una expresión analítica (Corolario 3.4) o semi-analítica (Corolario 3.5), lo cual simplifica su cálculo. Finalmente, señalamos que es posible extender los resultados de este Capítulo para el caso de las  $(h, \phi)$ -entropías de Salicru [SMMP93,MMPS97]<sup>1</sup>:

$$H_{(h,\phi)}[p] = h \left( \sum_{i=1}^N \phi(p_i) \right), \quad (5.1)$$

donde  $p \in \mathcal{P}_N$  y las funciones involucradas  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  son tales que:

- $h$  creciente y  $\phi$  cóncava, o bien
- $h$  decreciente y  $\phi$  convexa.

La  $F_\lambda$  entropía introducida en (3.1) es un caso particular, con  $h(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda}$  y  $\phi(x) = x^\lambda$ .

*Capítulo 4: Conexión entre los principios de complementariedad e incerteza.*

Estudiamos la conexión entre los principios de complementariedad y de incerteza en el contexto del interferómetro de Mach–Zehnder. En efecto, analizamos los vínculos entre la relación de dualidad onda–corpúsculo y las relaciones de incerteza previamente obtenidas. Concluimos que, eligiendo de manera adecuada los observables (4.9)–(4.11), las relaciones de Schrödinger (1.15) y de Landau–Pollak (1.16) son equivalentes a la relación de dualidad (4.1). Con respecto a las relaciones de incerteza entrópicas surgen dos situaciones, dependiendo del valor de los índices entrópicos. Si los índices son  $\frac{1}{2}$  e  $\infty$  (conjugados), también

<sup>1</sup>No incluimos este resultado en el cuerpo principal de la Tesis, ya que este surgió una vez finalizada la redacción de la misma luego de una revisión de nuestro trabajo [ZBP14].

se obtiene una equivalencia con la relación de dualidad [CKW14]. No obstante, si los índices entrópicos son iguales, entonces no existe tal equivalencia. Este caso permite discernir entre diferentes estados de mínima incerteza, extremos e intermedios, que dan lugar a situaciones físicas completamente diferentes.

## 5.2 Perspectivas

Quedan, sin embargo, varias cuestiones abiertas por abordar. Presentamos algunas de ellas:

*Varios observables y bases mutuamente no sesgadas.*

Una pregunta válida es si es posible extender los resultados de los Capítulos 2 y 3 para más de dos observables. En particular, este problema es interesante tratarlo en el caso de bases mutuamente no sesgadas (MUB), que se puede interpretar como una generalización de observables complementarios. De hecho, se dice que las  $M$  bases de autoestados  $\{|a_i^m\rangle\}_{i=1}^N$  de los observables  $A^m$  que actúan sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita  $N$  son mutuamente no sesgadas, si el solapamiento entre todas las bases es el mismo e igual a

$$c = |\langle a_i^m | a_{i'}^{m'} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (5.2)$$

para todo  $i, i' = 1, \dots, N$  y  $m, m' = 1, \dots, M$  con  $m \neq m'$ .

La respuesta trivial consiste en considerar las relaciones de incerteza de a pares y realizar la suma correspondiente. Realizando esto para las relaciones de incerteza tipo Landau–Pollak obtenemos que:

$$\sum_{m=1}^M \mathcal{U}_f(A^m; \rho) \geq \frac{M}{2} f\left(\frac{1}{N}\right). \quad (5.3)$$

Por otro lado, para el caso entrópico tenemos que:

$$\sum_{m=1}^M F_\alpha[p(A^m; \rho)] \geq \frac{M}{2} \mathcal{C}_{\alpha, \alpha; f}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (5.4)$$

Sin embargo, esta manera de obtener relaciones de incerteza para  $M$  MUB, no es óptima y es plausible mejorar la cota. Por ejemplo, Miyadera e Himai obtienen una cota superior no trivial a la suma de las probabilidades máximas de las  $M$  bases. Además, generalizan el resultado para el caso de  $M$  POVM.

Para el caso entrópico, la mayor parte de los resultados se centran en el uso de la entropía de Shannon [Iva92, SR95, BW07, WYM09], y algunos resultados con la min-entropía y la entropía de colisión se dan en [WW10]. Estudiar si es posible extender nuestros métodos a MUB y comparar con los resultados de la literatura es una posible línea de investigación.

*Criterio de entrelazamiento.*

Otra posible línea de investigación es estudiar la caracterización del entrelazamiento de sistemas bipartitos a partir de las relaciones de incerteza obtenidas. La idea esencial es que los estados separables del sistema compuesto heredan las relaciones de incerteza de los subsistemas. Una violación de estas relaciones a nivel global da cuenta del entrelazamiento del estado. Esta propuesta fue introducida originalmente por Hofmann y Takeuchi en [HT03], usando relaciones de incerteza basadas en la suma de varianzas. Este método permite una realización experimental [KH04], y es capaz de detectar algunos estados entrelazados ligados [Hof03]. Sucesivos trabajos [Güh04, SB06, GMTA06, KB07, ZNZG10] exploran la eficiencia del criterio y mejoran la propuesta original. Por otra parte, las relaciones de incerteza entrópicas también son útiles para derivar condiciones necesarias de separabilidad en este contexto. Por ejemplo, en [Gio04] se emplean desigualdades entrópicas basadas en la entropía de Shannon, mientras que en [GL04] se emplean desigualdades entrópicas basadas en la entropía de Tsallis. Los resultados obtenidos hasta el momento muestran que, sorprendentemente, el uso de varianzas sería más eficiente para detectar estados entrelazados [dV08]. También han sido desarrollados criterios de entrelazamiento a partir de una versión débil de la desigualdad de Landau–Pollak [dVSR05, MI07]. A la luz de los antecedentes en el tema, resulta interesante evaluar estas conexiones en detalle para identificar el alcance de las relaciones de incerteza propuestas en esta Tesis.

# A

## GENERACIÓN ALEATORIA DE ESTADOS Y OBSERVABLES

---

---

A.1	Generación aleatoria de estados cuánticos . . . . .	72
A.2	Generación aleatoria de matrices unitarias . . . . .	73
A.3	Generación aleatoria de POVM . . . . .	74

---



## A.1 Generación aleatoria de estados cuánticos

El problema de la generación de estados cuánticos aleatorios es un tópico de un gran interés en el área de información cuántica. Los estados aleatorios aparecen de forma natural en muchas situaciones en el procesamiento de la información, especialmente cuando hay que hacer frente a la interacción inevitable del sistema en cuestión con el medio ambiente (ver por ejemplo la Ref. [Mis12] y sus referencias). Si bien estas cuestiones exceden el objeto de estudio de esta Tesis, nos limitaremos a señalar los métodos que utilizamos para generar de forma aleatoria estados cuánticos para usarlos en las simulaciones del Capítulo 2.

*Estados puros.*

Sea  $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^N$ , usamos la parametrización del estado

$$|\Psi\rangle = \Phi(\varphi) \frac{|x\rangle}{\| |x\rangle \|}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\Phi(\varphi)$  es una matriz diagonal de  $N \times N$  y  $\frac{|x\rangle}{\| |x\rangle \|}$  un vector unitario en la hipersfera  $\mathbb{S}^{N-1}$ . Para generar estados aleatorios de la forma (A.1), procedemos en dos pasos:

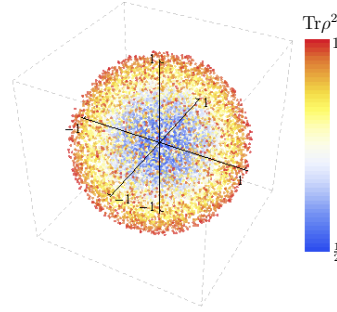
1. generar aleatoriamente  $N$  fases  $\varphi_i$  independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con distribución uniforme en el rango  $[0, 2\pi)$ ,
2. generar aleatoriamente el vector  $\frac{|x\rangle}{\| |x\rangle \|} \in \mathbb{S}^{N-1}$  a partir de las  $N$  componentes i.i.d. con distribución normal estándar (esperanza 0 y varianza 1) [Mar72].

*Estados mixtos.*

Para generar estados mixtos, seguimos el siguiente procedimiento [Mis12]:

1. generar una matriz compleja  $Z$  de  $N \times N$  a partir de elementos  $z_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$  con los  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  i.i.d. con distribución normal estándar,
2. generar la matriz densidad  $\rho = \frac{ZZ^\dagger}{\text{Tr}ZZ^\dagger}$ .

A modo de ejemplo, en la Fig. A.1 visualizamos en la esfera de Bloch  $10^4$  matrices densidad de qubit generadas aleatoriamente.



**Figura A.1:** Visualización sobre la esfera de Bloch de  $10^4$  matrices densidad de qubit generados aleatoriamente. Indicamos, mediante un mapa de temperatura, la pureza  $\text{Tr}\rho^2$  del estado.

## A.2 Generación aleatoria de matrices unitarias

Reproducimos a continuación el algoritmo que implementamos para generar matrices unitarias  $T$  de  $N \times N$  ( $T^\dagger T = T T^\dagger = I$  donde  $\dagger$  denota la transpuesta conjugada) con distribución uniforme (dada por la medida de Haar):

1. generar una matriz compleja  $Z$  de  $N \times N$  a partir de elementos  $z_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$  con los  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$  i.i.d. con distribución normal estándar,
2. realizar la descomposición  $QR$  de  $Z$ ,
3. generar la matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{|r_{11}|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{r_{NN}}{|r_{NN}|} \end{pmatrix},$$

donde los  $r_{ii}$ 's son los elementos diagonales de  $R$ ,

4. generar la matriz  $T = Q\Lambda$ .

De acuerdo a [Mez07], el resultado de este algoritmo es una matriz unitaria distribuída con la medida de Haar.

## A.3 Generación aleatoria de POVM

Hasta donde conocemos, no hay en la literatura algoritmos para generar POVM aleatorios con distribución dada.

Una posibilidad para generar un POVM consiste en:

1. generar una matriz unitaria  $U$  de acuerdo al procedimiento de la Sección anterior,
2. generar  $N_{\mathcal{A}}$  matrices diagonales  $D_i$  cuyos elementos están i.i.d. con distribución uniforme en el rango  $[0, 1]$ ,
3. formar el POVM  $\mathcal{A}$  cuyos elementos son  $A_i = U \left( \sum_j D_j \right)^{-1} D_i U^\dagger$ .

Por construcción los  $A_i$  son positivos y cumplen con la resolución de la identidad. Sin embargo, este método tiene la desventaja de que los  $A_i$  comparten el mismo subespacio propio. Una forma de evitar esto es seguir el siguiente procedimiento<sup>1</sup>:

1. generar  $N_{\mathcal{A}}$  matrices unitarias  $U_i$  de acuerdo al procedimiento de la Sección anterior,
2. generar  $N_{\mathcal{A}}$  matrices diagonales  $D_i$  cuyos elementos están i.i.d. con distribución uniforme en el rango  $[0, 1]$ ,
3. formar el POVM  $\mathcal{A}$  cuyos elementos son

$$\begin{aligned} A_i &= R_i U_i D_i U_i^\dagger R_i^\dagger \quad \text{para } i = 1 \dots N_{\mathcal{A}} - 1 \quad \text{y} \\ A_{N_{\mathcal{A}}} &= R_{N_{\mathcal{A}}-1} U_{N_{\mathcal{A}}-1} (I - D_{N_{\mathcal{A}}-1}) U_{N_{\mathcal{A}}-1}^\dagger R_{N_{\mathcal{A}}-1}^\dagger, \end{aligned}$$

donde  $R_1 = I$  y  $R_i = R_{i-1} U_{i-1} \sqrt{I - D_i}$  para  $i = 2 \dots N_{\mathcal{A}} - 1$ .

Por construcción los  $A_i$  son positivos y cumplen con la resolución de la identidad.

<sup>1</sup>Agradecemos a Pr. Pierre Comon de GIPSA-Lab quien le sugirió a Steeve Zozor esta posibilidad.

# B

## DEMOSTRACIONES DE LAS RELACIONES DE INCERTEZA TIPO ENTRÓPICAS

---

---

<b>B.1</b>	<b>Caso <math>N</math>-dimensional . . . . .</b>	<b>76</b>
B.1.1	Demostración de la Proposición 3.1 . . . . .	76
B.1.2	Demostración del Corolario 3.1 . . . . .	82
B.1.3	Demostración del Corolario 3.2 . . . . .	84
B.1.4	Demostración del Corolario 3.3 . . . . .	85
<b>B.2</b>	<b>Caso qubit (<math>N = 2</math>) . . . . .</b>	<b>86</b>
B.2.1	Demostración de la Proposición 3.2 . . . . .	86
B.2.2	Demostración del Corolario 3.4 . . . . .	92
B.2.3	Demostración del Corolario 3.5 . . . . .	93
B.2.4	Demostración de la Proposición 3.3 . . . . .	94

---

## B.1 Caso $N$ -dimensional

### B.1.1 Demostración de la Proposición 3.1

Nuestro objetivo es, dadas las estadísticas  $p(\mathcal{A}; \rho)$  y  $p(\mathcal{B}; \rho)$ , minimizar la suma de entropías generalizadas sujeta a la desigualdad de Landau y Pollak. En este sentido, seguimos y avanzamos sobre la propuesta de de Vicente y Sánchez-Ruiz, la cuál consiste en dos pasos:

1. Minimizar  $F_\lambda[p]$  sujeta a  $\max_i p_i = P$ . En este punto, las dos estadísticas son tratadas separadamente. Luego, denotando con  $F_{\lambda, \min}[P]$  a la entropía mínima, llegamos a la desigualdad

$$F_\alpha[p(\mathcal{A}; \rho)] + F_\beta[p(\mathcal{B}; \rho)] \geq F_{\alpha, \min}[P_{\mathcal{A}; \rho}] + F_{\beta, \min}[P_{\mathcal{B}; \rho}],$$

donde el lado derecho depende *sólo* de las probabilidades máximas.

2. Minimización de

$$F_{\alpha, \min}[P_{\mathcal{A}; \rho}] + F_{\beta, \min}[P_{\mathcal{B}; \rho}]$$

sujea a la desigualdad de Landau–Pollak:

$$\arccos \sqrt{P_{\mathcal{A}; \rho}} + \arccos \sqrt{P_{\mathcal{B}; \rho}} \geq \arccos c_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}.$$

#### B.1.1.1 Primer paso: entropía mínima

El problema consiste en encontrar los vectores  $p = [p_1 \ \dots \ p_N]^t \in \mathcal{P}_N$  que minimizan a la  $(f, \lambda)$ -entropía con la restricción de la probabilidad máxima dada, es decir, resolver<sup>1</sup>

$$\min_{p \in \mathcal{P}_N} F_\lambda(p) = \min_{p \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{1 - \lambda} f \left( \sum_{k=1}^N p_k^\lambda \right) \quad \text{con} \quad \max_i p_i = P. \quad (\text{B.1})$$

<sup>1</sup>En el contexto de la entropía de Shannon, este problema fue resuelto en [FM94], usando las condiciones suficientes de Karush–Khun–Tucker.

La probabilidad máxima es tal que<sup>2</sup>

$$P \in \left[ \frac{1}{N}, 1 \right]. \quad (\text{B.2})$$

Además, en el caso de  $P = \frac{1}{N}$ , todos los  $p_i$ 's son iguales a  $\frac{1}{N}$  (distribución uniforme), por lo que el problema se vuelve trivial.

Ahora vamos a reformular el problema original por uno equivalente. Dado que  $f$  es creciente, tenemos que:

$$\lambda < 1: \quad \arg \min \frac{f(\|x\|_\lambda^\lambda)}{1-\lambda} = \arg \min \|x\|_\lambda^\lambda = \arg \max \frac{\|x\|_\lambda^\lambda - 1}{\lambda - 1} \quad (\text{B.3})$$

$$\lambda > 1: \quad \arg \min \frac{f(\|x\|_\lambda^\lambda)}{1-\lambda} = \arg \max \|x\|_\lambda^\lambda = \arg \max \frac{\|x\|_\lambda^\lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad (\text{B.4})$$

donde el caso  $\lambda = 1$  se recupera tomando el límite correspondiente. Luego, para cualquier función  $f$  e índice entrópico  $\lambda$ , minimizar  $F_\lambda[p]$  es equivalente a maximizar  $\frac{\|p\|_\lambda^\lambda - 1}{\lambda - 1}$ . De esta manera, nos independizamos de la función  $f$  y nos permite tratar de forma unificada a las entropías de Rényi y Tsallis.

Además, usando el hecho de que la función a ser maximizada es invariante ante permutaciones del vector de probabilidad, reducimos la dimensionalidad del problema de la siguiente manera: fijamos, sin pérdida de generalidad,  $p_1 \equiv P$  y definimos  $q = [q_1 \ \dots \ q_{N-1}]^t \equiv [p_2 \ \dots \ p_N]^t$ ; luego, resolver el problema (B.1) es equivalente a resolver

$$\max_{q \in \mathcal{PT}_P} \varphi_\lambda(q), \quad (\text{B.5})$$

siendo la función<sup>3</sup>

$$\varphi_\lambda(q) = \frac{1}{\lambda - 1} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} q_k^\lambda - (1 - P) \right] \quad (\text{B.6})$$

y el dominio de  $q$

$$\mathcal{PT}_P = \left\{ q \in \mathbb{R}^{N-1} : 0 \leq q_k \leq P \wedge \sum_{k=1}^{N-1} q_k = 1 - P \right\} = \mathcal{HC}_P \cap \mathcal{HP}_P, \quad (\text{B.7})$$

con el hipercubo  $(N-1)$ -dimensional  $\mathcal{HC}_P = [0, P]^{N-1}$  y el hiperplano  $(N-2)$ -dimensional  $\mathcal{HP}_P = \left\{ q \in \mathbb{R}^{N-1} : \sum_{k=1}^{N-1} q_k = 1 - P \right\}$  que es perpendicular al

<sup>2</sup>Si  $P < \frac{1}{N} \Rightarrow \sum_k p_k \leq NP < 1$ , lo que contradice la normalización.

<sup>3</sup>El caso límite  $\lambda \rightarrow 1$  está bien definido y da  $\varphi_1(q) = \sum_{i=1}^{N-1} q_k \ln q_k$ .

vector  $\mathbf{1} = [1 \ \cdots \ 1]^t$ . Notamos que el punto  $\frac{1-P}{N-1} [1 \ \cdots \ 1]^t$  pertenece al hipercubo  $\mathcal{HC}_P$  y al hiperplano  $\mathcal{HP}_P$ , garantizando que la intersección entre ambos no es vacía. Además, se puede ver que  $\mathcal{PT}_P$  es un politopo convexo embebido en  $\mathcal{HC}_P$  [LFC09], es decir, es la envoltura convexa de los vértices del politopo, los que son, además, los puntos puros del mismo [Egg66].

Por otro lado, observamos que  $\varphi_\lambda$  es una función convexa en  $\mathbb{R}_+^{N-1}$  y lo es también en el politopo  $\mathcal{PT}_P$  [HLP52]. Por lo tanto, la función  $\varphi_\lambda$  alcanza su máximo en uno o más puntos extremos (puntos puros) de  $\mathcal{PT}_P$ . Luego, el problema de maximización (B.5) es equivalente a determinar el conjunto de puntos puros de (B.7).

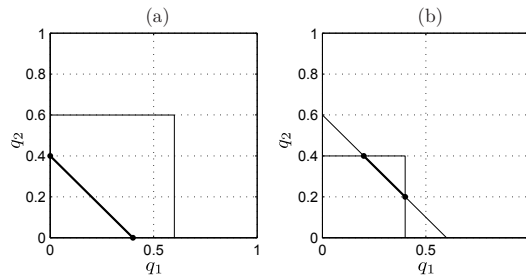
Antes de pasar al caso general  $N$ , vamos a estudiar los casos  $N = 3$  y  $N = 4$  (el caso  $N = 2$  es trivial ya que  $\mathcal{PT}_P$  se reduce al punto  $1 - P$ , y la solución al problema es el vector  $[P, 1 - P]^t$  con  $P \in [\frac{1}{2}, 1]$ ).

*Caso  $N = 3$ :*

La intersección de la recta  $q_1 + q_2 = 1 - P$  con el cuadrado  $[0, P]^2$  da a lugar a dos situaciones:

- si  $\frac{1}{2} < P \leq 1$ , la recta interseca al cuadrado en los lados inferior e izquierdo, es decir, la recta restringida al primer cuadrante se encuentra dentro del cuadrado:  $\mathcal{HP}_P \subset \mathcal{HC}_P$ , entonces  $\mathcal{PT}_P = \mathcal{HP}_P$  es el segmento que une los puntos  $[1 - P, 0]^t$  y  $[0, 1 - P]^t$  (ver Fig. B.1.(a)). Estos son los puntos puros de  $\mathcal{PT}_P$  y ambos dan lugar el mismo valor máximo de  $\varphi_\lambda$ .
- si  $\frac{1}{3} < P \leq \frac{1}{2}$ , la intersección de la recta con el cuadrado es el segmento que une los puntos  $[P, 1 - 2P]^t$  y  $[1 - 2P, P]^t$  (ver Fig. B.1.(b)). Estos son los puntos puros de  $\mathcal{PT}_P$  y ambos dan lugar el mismo valor máximo de  $\varphi_\lambda$ .

En ambas situaciones, los puntos puros están sobre los lados del cuadrado.



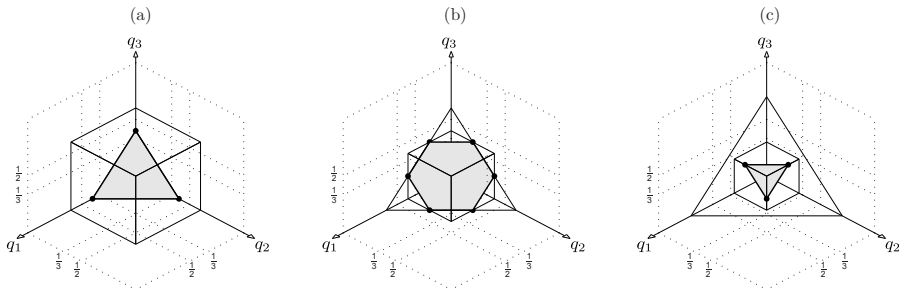
**Figura B.1:** Intersección de la recta  $q_1 + q_2 = 1 - P$  con el cuadrado  $[0, P]^2$ , que da el dominio  $\mathcal{PT}_P$  (línea negra) en el caso  $N = 3$ , para: (a)  $P = 0.6$ , y (b)  $0.4$ . Se indican los puntos puros del politopo  $\mathcal{PT}_P$  sobre los lados del cuadrado.

Caso  $N = 4$ :

Ahora, la intersección del plano  $q_1 + q_2 + q_3 = 1 - P$  con el cubo  $[0, P]^3$  da a lugar a tres situaciones:

- si  $\frac{1}{2} < P \leq 1$ , el plano interseca al cubo en las caras traseras e inferior, es decir, el plano restringido al primer octante está dentro del cubo (ver Fig B.2.(a)). Luego, el dominio  $\mathcal{PT}_P$  es el cuerpo convexo delimitado por el triángulo de vértices  $[1 - P, 0, 0]^t$ ,  $[0, 1 - P, 0]^t$  y  $[0, 0, 1 - P]^t$ . Estos son los puntos puros y todos alcanzan el mismo valor de  $\varphi_\lambda$ .
- si  $\frac{1}{3} < P \leq \frac{1}{2}$ , el plano interseca las 6 caras del cubo, de modo que  $\mathcal{PT}_P$  es el cuerpo convexo delimitado por los vértices del hexágono  $[P, 1 - 2P, 0]^t$ ,  $[1 - 2P, P, 0]^t$ ,  $[0, 1 - 2P, P]^t$ ,  $[0, P, 1 - 2P]^t$ ,  $[1 - 2P, 0, P]^t$ , y  $[P, 0, 1 - 2P]^t$ , que son los puntos puros (ver Fig. B.2.(b)). Todos ellos dan el mismo valor  $\varphi_\lambda$ .
- si  $\frac{1}{4} < P \leq \frac{1}{3}$ , el plano interseca al cubo en las caras delantera y superior del cubo, de modo que  $\mathcal{PT}_P$  es el cuerpo convexo delimitado por el triángulo de vértices  $[P, P, 1 - 3P]^t$ ,  $[1 - 3P, P, P]^t$  y  $[P, 1 - 3P, P]^t$ , que son los puntos puros (ver Fig. B.2.(c)). Nuevamente, todos ellos dan el mismo valor de  $\varphi_\lambda$ .

Notamos que los puntos puros pertenecen a las aristas del cubo.



**Figura B.2:** Intersección del plano  $q_1 + q_2 + q_3 = 1 - P$  con el cubo  $[0, P]^3$ , que da el dominio  $\mathcal{PT}_P$  (superficie en gris) en el caso de  $N = 4$ , para: (a)  $P = 0.6$ , (b)  $P = 0.4$ , y (c)  $P = 0.3$ . Se indican los puntos puros del politopo  $\mathcal{PT}_P$  sobre las aristas del cubo.

Caso  $N$  arbitrario:

Como hemos mencionado antes, la intersección de un hipercubo con un hiperplano es el politopo formado por la envoltura convexa de sus vértices, los cuáles son, además, los puntos puros del convexo. Más aún, los vértices del politopo están en las aristas del hipercubo [LFC09]. Encontrar los vértices (puntos puros) de tal politopo es, en general, una tarea difícil de llevar cabo, ya que el número de ellos crece exponencialmente con la dimensión  $N$  [LFC09]. Sin embargo, en



nuestro problema la complejidad se simplifica dada la regularidad del hipercubo  $\mathcal{HC}_P = [0, P]^{N-1}$ . De hecho, las  $(N-1)2^{N-2}$  aristas del hipercubo son de la forma

$$E_P^\downarrow = \left\{ \left[ \underbrace{P, \dots, P}_{M-1 \text{ veces}}, s, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-M-1 \text{ veces}} \right]^t, \quad 0 \leq s < P \right\} \quad (\text{B.8})$$

para cada  $M = 1, 2, \dots, N-1$ , donde  $\cdot^\downarrow$  denota que las componentes de la  $(N-1)$ -tupla están en orden decreciente.

Un punto en  $E_P^\downarrow$  es un vértice del politopo  $\mathcal{PT}_P$  si, además, pertenece a  $\mathcal{HP}_P$ . Esto ocurre para  $s^* \in [0, P]$  tal que  $(M-1)P + s^* = 1 - P$ . Luego, tenemos que:  $\frac{1}{P} - 1 \leq M = \frac{1-s^*}{P} \leq \frac{1}{P}$ . Finalmente, dado que  $M$  es un entero (positivo), encontramos que, dado  $P$ , los puntos puros son tales que

$$M = \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor \quad \text{y} \quad s^* = 1 - \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor P, \quad (\text{B.9})$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota la parte entera inferior.

*Vector óptimo y entropía mínima:*

En definitiva, encontramos que los vectores de probabilidad que minimizan la entropía generalizada con la restricción de la probabilidad máxima dada, problema (B.1), son de la forma

$$p^\downarrow = \left[ \underbrace{P \dots P}_{\lfloor \frac{1}{P} \rfloor \text{ veces}}, 1 - \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor P, \underbrace{0 \dots 0}_{N - \lfloor \frac{1}{P} \rfloor - 1 \text{ veces}} \right]^t \quad (\text{B.10})$$

y la expresión de la entropía mínima es

$$F_{\lambda, \min}[P] = \frac{1}{1-\lambda} f \left( \left( \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor P^\lambda + \left( 1 - \left\lfloor \frac{1}{P} \right\rfloor P \right)^\lambda \right) \right), \quad (\text{B.11})$$

donde  $P \in \left[ \frac{1}{N}, 1 \right]$ .

El resultado (B.10) no es sorprendente ya que podemos verificar *a posteriori* que este vector mayoriza a todos los vectores de probabilidad con probabilidad máxima  $P$  dada. Luego, usando la Schur-convexidad de la  $(f, \lambda)$ -entropía se llega que el vector de probabilidad (B.10) minimiza la entropía.

**B.1.1.2** Segundo paso: minimización de la suma de entropías sujeta a LPI

Ahora seguimos con el segundo paso, resolver el problema de minimización:

$$\min_{\arccos \sqrt{P_{A;\rho}} + \arccos \sqrt{P_{B;\rho}} \geq \arccos c_{A,B}} F_{\alpha,\min} [P_{A;\rho}] + F_{\beta,\min} [P_{B;\rho}]. \quad (\text{B.12})$$

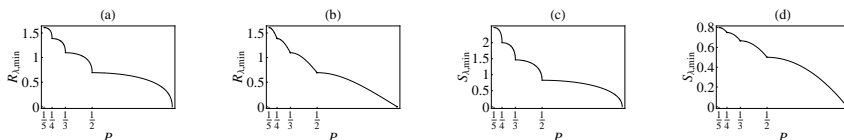
Por un lado, tenemos que del Corolario 2.3 la desigualdad de Landau–Pollak restringe los valores de  $(P_{A;\rho}, P_{B;\rho})$  según el valor de  $\mathbf{c} = (c_A, c_B, c_{A,B})$ . Luego, la restricción en el problema de minimización (B.12) es:

- i  $\left[ \frac{1}{N_A}, c_A^2 \right] \times \left[ \frac{1}{N_B}, c_B^2 \right]$ , si  $c_B^2 \leq h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ , o
- ii  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^W$  dado en (2.22), si  $c_B^2 > h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ .

Por otro lado, observamos que, para  $M = 1, 2, \dots, N - 1$ , la función  $F_{\lambda,\min}[P]$  es diferenciable a trozos en el intervalo  $P \in \left( \frac{1}{M+1}, \frac{1}{M} \right)$ , con

$$\frac{\partial F_{\lambda,\min}[P]}{\partial P} = M \lambda f'(MP^\lambda + (1 - MP^\lambda)) \frac{P^{\lambda-1} - (1 - MP^\lambda)^{\lambda-1}}{1 - \lambda}.$$

Dado que  $f$  es diferenciable y creciente, el signo de  $\frac{\partial F_{\lambda,\min}[P]}{\partial P}$  es el mismo que el signo de  $\frac{P^{\lambda-1} - (1 - MP^\lambda)^{\lambda-1}}{1 - \lambda}$ . Esta cantidad es negativa independientemente del valor de  $\lambda$ , ya que  $P > 1 - MP^\lambda$ . Por lo tanto,  $F_{\lambda,\min}[P]$  decrece en cada intervalo  $\left( \frac{1}{M+1}, \frac{1}{M} \right)$ . Luego, por la continuidad de  $F_{\lambda,\min}[P]$ , ésta decrece en todo el intervalo  $\left[ \frac{1}{N}, 1 \right]$ . Ilustramos este comportamiento en la Fig. B.3 para las entropías de Rényi y de Tsallis.



**Figura B.3:**  $F_{\lambda,\min}[P]$  versus  $P \in \left[ \frac{1}{N}, 1 \right]$  con  $N = 5$ , para: entropía de Rényi con (a)  $\lambda = 0.5$  y (b)  $\lambda = 2$ , y para entropía de Tsallis con (c)  $\lambda = 0.5$  y (d)  $\lambda = 2$ .

Luego, obtenemos que el mínimo se alcanza en:

- i  $(P_{A;\rho}, P_{B;\rho}) = (c_A^2, c_B^2)$ , si  $c_B^2 \leq h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ , o
- ii  $P_{B;\rho} = h_{c_{A,B}}^W(P_{A;\rho})$  con  $P_{A;\rho} \in \left[ h_{c_{A,B}}^W(c_B^2), c_A^2 \right]$ , si  $c_B^2 > h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$ .

Definiendo los ángulos

$$\gamma_{A,B} \equiv \arccos c_{A,B}, \quad \gamma_A \equiv \arccos c_A, \quad \gamma_B \equiv \arccos c_B,$$

el cambio de variables

$$P_{A,\rho} \equiv \cos^2 \theta \quad \text{con} \quad \theta \in [\gamma_A, \gamma_{A,B} - \gamma_B]$$

y la función

$$\mathcal{D}_\lambda(\theta) \equiv \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] (\cos^2 \theta)^\lambda + \left( 1 - \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] \cos^2 \theta \right)^\lambda,$$

obtenemos que

- la condición  $c_B^2 \leq h_{c_{A,B}}^W(c_A^2)$  se simplifica a  $\gamma_{A,B} \leq \gamma_A + \gamma_B$ ,
- $F_{\alpha,\min}[c_A^2] = \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\gamma_A))}{1-\alpha}$  y  $F_{\beta,\min}[c_B^2] = \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_B))}{1-\beta}$ ,
- $F_{\alpha,\min}[P_{A;\rho}] = \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1-\alpha}$  y  $F_{\beta,\min}[h_{c_{A,B}}^W(P_{A;\rho})] = \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_{A,B}-\theta))}{1-\beta}$ .

Por lo tanto, el valor mínimo de la suma de entropías mínimas está dado por la expresión

$$\begin{cases} \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\gamma_A))}{1-\alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_B))}{1-\beta} & \gamma_{A,B} \leq \gamma_A + \gamma_B \\ \min_{\theta \in [\gamma_A, \gamma_{A,B} - \gamma_B]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1-\alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma_{A,B} - \theta))}{1-\beta} \right) & \gamma_{A,B} > \gamma_A + \gamma_B, \end{cases}$$

con lo cual finalizamos la demostración de la Proposición 3.1.

### **B.1.2** Demostración del Corolario 3.1

En lo que resta de este Apéndice vamos a considerar observables con espectro discreto y no degenerado. Recordamos que, en este caso, tenemos  $N_A = N_B = N$ ,  $c_A = c_B = 1$  y  $c_{A,B} = c$ .

Para  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , tenemos que  $\left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} \right] = 1$ , por lo que la cota (3.26) se reduce a la cota del qubit ( $N = 2$ ) dada en (3.33).

*Caso  $N = 2$ :*

En este caso, la cota es  $c$ -óptima como vimos en la Sección 3.4.

*Caso  $N \geq 3$ :*

Sea  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  un estado puro actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita  $N$ , con  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ . Expresamos al vector de estado  $|\Psi\rangle$  de la forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^N \psi_i |a_i\rangle = \sum_{j=1}^N \tilde{\psi}_j |b_j\rangle, \quad (\text{B.13})$$

siendo  $\psi_i$  y  $\tilde{\psi}_j$  coeficientes complejos, y  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^N$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^N$  las bases de autoestados de  $A$  y de  $B$ , respectivamente. Reagrupamos los coeficientes complejos en los vectores:  $\psi = [\psi_1 \cdots \psi_N]^t \in \mathbb{C}^N$  y  $\tilde{\psi} = [\tilde{\psi}_1 \cdots \tilde{\psi}_N]^t \in \mathbb{C}^N$ . Por la ortonormalidad de las bases tenemos que

$$\tilde{\psi} = T\psi \quad \text{con} \quad T_{ji} = \langle b_j | a_i \rangle. \quad (\text{B.14})$$

Bajo esta notación, definimos los vectores de probabilidad

$$|\psi|^2 \equiv p(A; \rho) = [|\psi_1|^2 \cdots |\psi_N|^2]^t \quad \text{y} \quad |\tilde{\psi}|^2 \equiv p(B; \rho) = [|\tilde{\psi}_1|^2 \cdots |\tilde{\psi}_N|^2]^t, \quad (\text{B.15})$$

asociados a los observables  $A$  y  $B$ , respectivamente.

Ahora, consideramos matrices unitarias de  $N \times N$  de la forma

$$T = \begin{bmatrix} T^{(2)} & 0 \\ 0 & T^{(N-2)} \end{bmatrix},$$

donde  $T^{(n)}$  denota una matriz unitaria de  $n \times n$ , con la condición de que el máximo elemento de  $T$  se encuentre localizado en  $T^{(2)}$ , es decir,  $c = \max_{ij} |T_{ij}| = \max_{ij} |T_{ij}^{(2)}|$ . Esta condición puede ser verificada sólo si  $N \geq 4$ , dado que  $c \geq \max_{ij} |T_{ij}^{(N-2)}| \in \left[ \frac{1}{\sqrt{N-2}}, 1 \right]$ .

Sea  $|\Psi^{(2)}\rangle = \psi_1^{(2)} |a_1\rangle + \psi_2^{(2)} |a_2\rangle$  el estado puro del qubit que minimiza la suma de entropías para una dada matriz  $T^{(2)}$ , de modo que

$$F_\alpha \left[ |\psi^{(2)}|^2 \right] + F_\beta \left[ |\tilde{\psi}^{(2)}|^2 \right] = \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; 2; f}(c).$$

Consideremos ahora la matriz densidad  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  construida a partir del estado puro extendido  $|\Psi\rangle$  cuyo vector de coeficientes en la base de  $A$  está dado por  $\psi = \left[ \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)} 0 \dots 0 \right]^t$ . Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned} F_\alpha \left[ |\psi|^2 \right] + F_\beta \left[ |\tilde{\psi}|^2 \right] &= F_\alpha \left[ |\psi^{(2)}|^2 \right] + F_\beta \left[ |\tilde{\psi}^{(2)}|^2 \right] \\ &= \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha, \beta; 2; f}(c) = \mathcal{C}_{\alpha, \beta; f}(c), \end{aligned}$$

donde la primer igualdad se sigue de la elección de  $T$  y  $\rho$ , mientras que la

última igualdad se debe a que en este rango del solapamiento ( $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) la cota para  $N$  arbitrario, Ec. (3.26), coincide con la cota del qubit ( $N = 2$ ), Ec. (3.33). Finalmente, tenemos que

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}(c) = F_\alpha [p(A, \rho)] + F_\beta [p(B, \rho)] \geq \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f}(c).$$

Por otro lado, de la definición de cota  $c$ -óptima se llega a

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta;f}(c) \leq \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f}(c),$$

dando por probado que la cota (3.26) es  $c$ -óptima para  $c > \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $N \geq 4$ .

Para  $N = 3$  queda aún por probar si la cota es  $c$ -óptima. Sospechamos que sí lo es, de hecho no hemos encontrado contraejemplos que muestren lo contrario.

**B.1.3** Demostración del Corolario 3.2

Consideremos la cota (3.26) evaluada en  $f(x) = \ln x$  (entropía de Rényi) y tomemos el límite  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\infty, \infty)$ :

$$\mathcal{C}_{\infty,\infty;\ln}(c) = \min_{\theta \in [0, \gamma]} (-2 \ln(\cos \theta) - 2 \ln(\cos(\gamma - \theta))).$$

Observamos que el mínimo se alcanza en  $\theta = \frac{\gamma}{2}$ , de modo que recuperamos la cota de Deutsch:  $\mathcal{C}_{\infty,\infty;\ln}(c) = -2 \ln\left(\frac{1+c}{2}\right) = \mathcal{C}^D(c)$ .

Ahora consideremos la cota  $\mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c)$  para un par de índices arbitrarios y sea  $P_{A;\rho}$  la probabilidad máxima para la cual se alcanza dicha cota.

Dado que la entropía de Rényi decrece con el índice entrópico, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) &= R_{\alpha,\min} [P_{A;\rho}] + R_{\beta,\min} [h_c^W(P_{A;\rho})] \\ &\geq R_{\infty,\min} [P_{A;\rho}] + R_{\infty,\min} [h_c^W(P_{A;\rho})] \\ &\geq \mathcal{C}_{\infty,\infty;\ln}(c) = \mathcal{C}^D(c), \end{aligned}$$

que prueba que mejoramos la cota de Deutsch en todo el rango del solapamiento.

<b>B.1.4</b>	Demostración del Corolario 3.3
--------------	--------------------------------

Reescribimos la cota (3.26) para  $f(x) = \ln x$  (entropía de Rényi) y el par de índices  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  de la forma:

$$\mathcal{C}_{0,0;\ln}(c) = \min_{P_{A,\rho} \in [c^2, 1]} (R_{0,\min}[P_{A,\rho}] + R_{0,\min}[h_c^W(P_{A,\rho})]).$$

Por simetría de las cantidades en la suma, dado que  $h_c^W(\frac{1+c}{2}) = \frac{1+c}{2}$ , se puede restringir el intervalo de búsqueda a  $[c^2, \frac{1+c}{2}]$ . Entonces:

- Para  $P_{A,\rho} = c^2$ , se tiene que  $h_c^W(P_{A,\rho}) = 1$ . Por lo tanto,  $R_{0,\min}[h_c^W(P_{A,\rho})] = 0$  y  $R_{0,\min}[P_{A,\rho}] = \ln(\lceil \frac{1}{c^2} \rceil)$ , donde  $\lceil \cdot \rceil$  denota la parte entera superior.
- Para  $P_{A,\rho} \in (c^2, \frac{1+c}{2}]$ , se tiene que  $h_c^W(P_{A,\rho}) \in [\frac{1+c}{2}, 1) \subset (\frac{1}{2}, 1)$  por lo que  $R_{0,\min}[h_c^W(P_{A,\rho})] = \ln 2$  para todo  $P_{A,\rho}$  en este intervalo. Por otro lado, se tiene que  $R_{0,\min}[P_{A,\rho}]$  decrece en este intervalo y el mínimo da  $\ln 2$ . Entonces,

$$\min_{P_{A,\rho} \in (c^2, \frac{1+c}{2}]} (R_{0,\min}[P_{A,\rho}] + R_{0,\min}[h_c^W(P_{A,\rho})]) = 2 \ln 2.$$

Luego,

$$\mathcal{C}_{0,0;\ln}(c) = \min \left\{ \ln \left( \left\lceil \frac{1}{c^2} \right\rceil \right), 2 \ln 2 \right\}.$$

Por otro lado, cuando  $c \leq \frac{1}{2}$  tenemos que

$$\mathcal{C}^{MU}(c) = -2 \ln c \geq 2 \ln 2 = \mathcal{C}_{0,0;\ln}(c).$$

Más aún, en este caso  $\mathcal{C}_{0,0;\ln}(c) = 2 R_{0,\min}[\frac{1+c}{2}]$ , de modo que usando el decrecimiento de  $R_{\lambda,\min}$  vs  $\lambda$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\alpha,\beta;\ln}(c) &\leq R_{\alpha,\min} \left[ \frac{1+c}{2} \right] + R_{\beta,\min} \left[ \frac{1+c}{2} \right] \\ &\leq 2 R_{0,\min} \left[ \frac{1+c}{2} \right] = \mathcal{C}_{0,0;\ln}(c) \leq \mathcal{C}^{MU}(c), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

con lo cual concluimos con la prueba del Corolario.

## B.2 Caso qubit ( $N = 2$ )

En esta Sección vamos a dar las demostraciones de las Proposiciones 3.2 y 3.3, y de los Corolarios 3.4 y 3.5 concernientes a las relaciones de incertezas tipo entrópicas para el caso del qubit.

### B.2.1 Demostración de la Proposición 3.2

#### B.2.1.1 Simplificación del problema

Consideramos el sistema preparado en un estado puro  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  actuando sobre un espacio de Hilbert de dimensión  $N = 2$ . Usando la notación de (B.13)–(B.15), nuestro objetivo es resolver el problema de minimización:

$$\min_{\psi \in \mathbb{C}^2} F_\alpha [|\psi|^2] + F_\beta [|\tilde{\psi}|^2], \quad (\text{B.17})$$

para  $(\alpha, \beta)$ ,  $f$  y  $T$  dados.

El vector  $\psi$  es tal que  $\|\psi\|_2 = 1$  y podemos parametrizarlo de la forma:

$$\psi = \Phi(\varphi) \mathbf{s}, \quad (\text{B.18})$$

donde  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$  es un vector de norma uno y  $\Phi(\varphi)$  es una matriz diagonal de  $2 \times 2$  dada por

$$\Phi(\varphi) = \exp(i \text{Diag}(\varphi)), \quad (\text{B.19})$$

con  $\varphi \in \mathbb{R}^2$  un vector de fase.

Parametrizamos a la matriz  $T$  como el producto de tres matrices [Dit03, Jar05]:

$$T = \Phi(\mathbf{u}) V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v}), \quad \text{donde} \quad V(\gamma_T) = \begin{bmatrix} \cos \gamma_T & \sin \gamma_T \\ -\sin \gamma_T & \cos \gamma_T \end{bmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

con  $\gamma_T \in [0, \frac{\pi}{2})$  y  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  vectores de fase. Esta parametrización también es conocida como “descomposición Z-Y de un qubit” [NC10, Th. 4.1]. Observamos

que el solapamiento  $c = \max_{i,j} |T_{ij}| = \max_{i,j} |V_{ij}(\gamma_T)|$  no depende de las fases.

Combinando las Ecs. (B.18)–(B.20), obtenemos que

$$\tilde{\psi} = \Phi(\mathbf{u}) V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}. \quad (\text{B.21})$$

Por lo tanto, el objetivo original de encontrar la cota inferior óptima a la suma de entropías generalizadas para el caso del qubit, se transforma en

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2} = \min_{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{s}} \left( F_\alpha \left[ |\Phi(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |\Phi(\mathbf{u}) V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] \right) \quad (\text{B.22})$$

para  $\alpha, \beta, f$  y  $T$  dados.

El problema B.22 se simplifica debido a las invarianzas y simetrías:

- Invarianza de fase:

$$\begin{aligned} F_\alpha \left[ |\Phi(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |\Phi(\mathbf{u}) V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] = \\ F_\alpha \left[ |\mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |V(\gamma_T) \Phi(\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Dado que  $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}$  es un isomorfismo, la minimización en (B.22) se reduce a

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2} = \min_{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{s}} \left( F_\alpha \left[ |\mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |V(\gamma_T) \Phi(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] \right) \quad \text{con } \gamma_T \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (\text{B.23})$$

De esta manera llegamos a que la cota depende sólo del ángulo  $\gamma_T$  y no de los vectores de fases  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Veremos que éstos entran en juego a la hora de calcular los estados minimizantes.

- Invarianza de permutación:

$$\begin{aligned} F_\alpha \left[ |\mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |V(\gamma_T) \Phi(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] = \\ F_\alpha \left[ |\mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |V(\frac{\pi}{2} - \gamma_T) \Phi(\boldsymbol{\varphi} - [\pi \ 0]^t) \mathbf{s}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, reducimos un paso más el problema de minimización (B.23)

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2} = \min_{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{s}} \left( F_\alpha \left[ |\mathbf{s}|^2 \right] + F_\beta \left[ |V(\gamma) \Phi(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{s}|^2 \right] \right) \quad (\text{B.24})$$

donde

$$\gamma \equiv \min \left\{ \gamma_T, \frac{\pi}{2} - \gamma_T \right\} \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]. \quad (\text{B.25})$$

De esta manera llegamos a que la cota  $\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2} = \bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2}(c)$  depende sólo



del solapamiento  $c = \cos \gamma$ . En principio, este resultado no es extendible al caso más general de sistemas de  $N$  niveles con  $N > 2$ .

- Simetrías y periodicidades de  $\mathbf{s}$ , con la parametrización  $\mathbf{s}(\theta) = [\cos \theta \quad \sin \theta]^t$ .

◊  $\pi$ -periodicidad:

$$F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta)|^2 ] = \\ F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta + \pi)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta + \pi)|^2 ],$$

por lo tanto  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

◊  $\frac{\pi}{2}$ -simetría:

$$F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta)|^2 ] = \\ F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta + \frac{\pi}{2})|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(J\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta + \frac{\pi}{2})|^2 ]$$

siendo  $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , por lo tanto  $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ .

◊ ángulo opuesto:  $\mathbf{s}(-\theta) = \Phi([0 \quad \pi]^t)\mathbf{s}(\theta)$  de modo que

$$F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta)|^2 ] = \\ F_\alpha [|\mathbf{s}(-\theta)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi} + [0 \quad \pi]^t)\mathbf{s}(-\theta)|^2 ],$$

finalmente llegamos a que  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

Luego, usando estas invarianzas y simetrías obtenemos que el problema de minimización se simplifica y se reduce a

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2}(c) = \min_{\boldsymbol{\varphi}, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]} \left( F_\alpha [|\mathbf{s}(\theta)|^2] + F_\beta [ |V(\gamma)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(\theta)|^2 ] \right), \quad (\text{B.26})$$

donde

$$\gamma = \min \left\{ \gamma_T, \frac{\pi}{2} - \gamma_T \right\}. \quad (\text{B.27})$$

**B.2.1.2** Caso trivial  $c = 1$

En este caso  $\gamma = 0$  y  $V(0) = I$ . Eligiendo  $\mathbf{s} = [1 \quad 0]^t$ , obtenemos que  $F_\alpha [|\mathbf{s}|^2] = 0$  y  $F_\beta [ |V(0)\Phi(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}|^2 ] = F_\beta [|\mathbf{s}|^2] = 0$ . Luego, como era de

esperar, tenemos la solución trivial:

$$\bar{C}_{\alpha,\beta;f;2}(1) = 0. \quad (\text{B.28})$$

**B.2.1.3** Caso no trivial  $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$

Para este caso vamos a proceder en dos etapas:

1. fijamos  $\mathbf{s}$  (i.e.  $\theta$ ) y minimizamos la suma de entropías generalizadas sobre la fase  $\varphi$ ;
2. para la fase óptima que depende (en principio) de  $\theta$ , determinamos el valor de  $\theta$  que minimiza la suma.

*Minimización sobre la fase  $\varphi$ :*

Notamos que la fase  $\varphi$  sólo entra en juego en el término  $F_\beta \left[ |V(\gamma)\Phi(\varphi)\mathbf{s}(\theta)|^2 \right]$ , el cual es invariante ante una multiplicación del argumento por un escalar  $\exp(i\varphi')$ , es decir, ante el mismo corrimiento de fase de ambas componentes del vector  $\varphi$ . Por este motivo podemos elegir, sin pérdida de generalidad,  $\varphi = [-\varphi_2 \quad \varphi_2]^t$ . Luego, tenemos que

$$z \equiv |V(\gamma)\Phi(\varphi)\mathbf{s}(\theta)|^2 = \cos^2 \varphi_2 \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma - \theta) \\ \sin^2(\gamma - \theta) \end{bmatrix} + \sin^2 \varphi_2 \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma + \theta) \\ \sin^2(\gamma + \theta) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

La entropía generalizada es invariante ante los mapas  $\varphi_2 \mapsto -\varphi_2$  y  $\varphi_2 \mapsto \pi - \varphi_2$ , de modo que es suficiente considerar  $\varphi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Usando los mismos argumentos que en (B.3)–(B.4), la minimización sobre  $\varphi$  se reduce a

$$\max_{\varphi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \frac{\| |V(\gamma)\Phi(\varphi)\mathbf{s}(\theta)|^2 \|_\beta^\beta}{\beta - 1}. \quad (\text{B.30})$$

Ahora, notamos que (B.29) es una combinación convexa de los vectores  $x = [\cos^2(\gamma - \theta) \quad \sin^2(\gamma - \theta)]^t$  e  $y = [\cos^2(\gamma + \theta) \quad \sin^2(\gamma + \theta)]^t$ . El mapa  $z \mapsto \frac{\|z\|_\beta^\beta}{\beta - 1}$  es una función convexa de  $z^4$ , entonces el máximo de (B.30) se alcanza en los

---

<sup>4</sup>Para  $\beta > 1$ ,  $z \mapsto \|z\|_\beta^\beta$  es convexo [HLP52, Bul03] y  $(\beta - 1) > 0$ , por lo que el mapa  $z \mapsto \frac{\|z\|_\beta^\beta}{\beta - 1}$  es convexo. Para  $\beta > 1$ ,  $z \mapsto \|z\|_\beta^\beta$  es cóncavo [HLP52, Bul03] y  $(\beta - 1) < 0$ , por lo que el mapa  $z \mapsto \frac{\|z\|_\beta^\beta}{\beta - 1}$  es convexo.

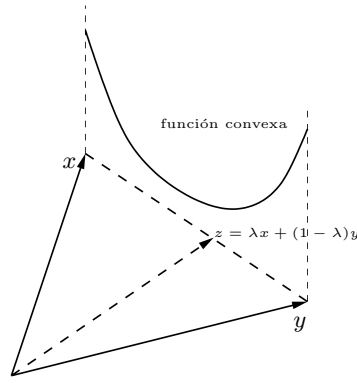
bordes del conjunto convexo:  $\{z = \mu x + (1 - \mu)y : \mu = \cos^2 \varphi_2, \varphi_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$  (ver Fig. B.4). Luego, tenemos que

$$\max_{\varphi_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{\| |V(\gamma) \Phi(\varphi) \mathbf{s}(\theta)|^2 \|_{\beta}^{\beta}}{\beta - 1} = \max \left\{ \frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma - \theta)}{\beta - 1}, \frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma + \theta)}{\beta - 1} \right\} \quad (\text{B.31})$$

donde

$$\mathcal{D}_{\lambda}(\theta) \equiv (\cos^2 \theta)^{\lambda} + (\sin^2 \theta)^{\lambda}. \quad (\text{B.32})$$

El máximo se corresponde con  $\varphi_2 = 0$  o  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .



**Figura B.4:** El vector  $z = |V(\gamma) \Phi(\varphi) \mathbf{s}(\theta)|^2$  pertenece al segmento (conjunto convexo) que une los vectores  $x = [\cos^2(\gamma - \theta) \quad \sin^2(\gamma - \theta)]^t$  e  $y = [\cos^2(\gamma + \theta) \quad \sin^2(\gamma + \theta)]^t$ . Esquematizamos el compartamiento típico de una función convexa  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (línea negra) sobre un conjunto convexo, ilustrando el hecho de que los máximos se alcanzan en los bordes del convexo.

Ahora, comparamos  $\frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma - \theta)}{\beta - 1}$  y  $\frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma + \theta)}{\beta - 1}$ , considerando el signo de la diferencia

$$\Delta(\theta, \gamma) = \frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma - \theta) - \mathcal{D}_{\beta}(\gamma + \theta)}{\beta - 1} \quad (\text{B.33})$$

donde  $(\theta, \gamma) \in [0, \frac{\pi}{4}]^2$ . En lo que sigue justificamos que  $\Delta(\theta, \gamma) \geq 0$ , es decir,  $\frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma - \theta)}{\beta - 1} \geq \frac{\mathcal{D}_{\beta}(\gamma + \theta)}{\beta - 1}$ .

Haciendo uso de las simetrías  $\Delta(\theta, \gamma) = \Delta(\gamma, \theta) = \Delta(\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} - \gamma) = \Delta(\frac{\pi}{4} - \gamma, \frac{\pi}{4} - \theta)$ , restringimos el estudio de  $\text{sign}(\Delta)$  al triángulo

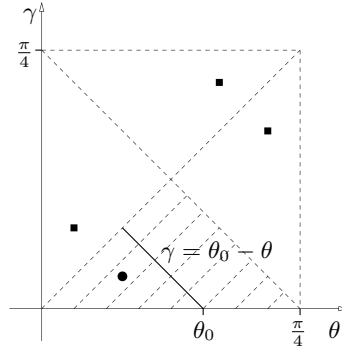
$$\left\{ (\theta, \gamma) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]^2 : 0 \leq \theta \leq \min\left(\gamma, \frac{\pi}{4} - \gamma\right) \right\}, \quad (\text{B.34})$$

como ilustramos en la Fig. B.5. Dado que  $\Delta(\theta, 0) = 0$ , estudiamos la variación  $\Delta$  en el segmento  $\gamma = \theta_0 - \theta$  dentro del triángulo, para cada  $\theta_0$  entre 0 y  $\frac{\pi}{4}$

(Fig. B.5). La derivada respecto de  $\theta$  da

$$\frac{\partial \Delta(\theta, \theta_0 - \theta)}{\partial \theta} = \frac{2\beta \sin(4\theta - 2\theta_0) \left\{ [\sin^2(2\theta - \theta_0)]^{\beta-1} - [\cos^2(2\theta - \theta_0)]^{\beta-1} \right\}}{\beta - 1}. \quad (\text{B.35})$$

Dado que  $\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \theta_0$ , tenemos que  $0 \leq 2\theta - \theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$ ; por lo que  $\sin(4\theta - 2\theta_0) \geq 0$  y que  $\sin^2(2\theta - \theta_0) \leq \cos^2(2\theta - \theta_0)$ , lo que lleva a que (B.35) es positiva. Luego,  $\Delta(\theta, \theta_0 - \theta)$  crece con  $\theta$  y es no negativa, en el triángulo (B.34).



**Figura B.5:** Ilustración de las simetrías de la función  $\Delta(\theta, \gamma) = \Delta(\gamma, \theta) = \Delta(\frac{\pi}{4} - \theta, \frac{\pi}{4} - \gamma) = \Delta(\frac{\pi}{4} - \gamma, \frac{\pi}{4} - \theta)$ . Por ejemplo, el punto representado por el círculo tiene “asociado por simetría” otros tres (representados por los cuadrados), para los cuales el valor de  $\Delta$  es el mismo. Luego, es suficiente estudiar (el signo de) la diferencia  $\Delta$  en el triángulo (región rayada), definida en (B.34). La línea negra representa el segmento  $\gamma = \theta_0 - \theta$  dentro del triángulo.

Finalmente, la minimización sobre la fase  $\varphi$  da

$$\min_{\varphi_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]} F_\beta \left[ |V(\gamma)\Phi(\varphi)\mathbf{s}(\theta)|^2 \right] = \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma - \theta))}{1 - \beta}, \quad (\text{B.36})$$

que se alcanza en  $\varphi_{2,\text{opt}} = 0$ . Podemos decir que existe una “única” fase  $\varphi$  que minimiza la suma de entropías, dado que la entropía es invariante ante la multiplicación de los vectores de onda por un escalar  $\exp(i\varphi')$ . Más aún, “esta fase” no depende de  $\mathbf{s}$ .

*Minimización sobre el ángulo  $\theta$ :*

Hasta el momento, hemos reducido el problema de minimización (B.26) a

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha,\beta;f;2}(c) = \min_{\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1 - \alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma - \theta))}{1 - \beta} \right). \quad (\text{B.37})$$

Obtenemos que la derivada respecto de  $\theta$  de la suma en (B.37) es igual a

$$\frac{f'(\mathcal{D}_\alpha(\theta)) \mathcal{D}'_\alpha(\theta)}{(1-\alpha)} - \frac{f'(\mathcal{D}_\beta(\gamma-\theta)) \mathcal{D}'_\beta(\gamma-\theta)}{(1-\beta)}, \quad (\text{B.38})$$

donde

$$\mathcal{D}'_\lambda(\theta) \equiv \frac{\partial \mathcal{D}_\lambda}{\partial \theta} = \lambda \sin(2\theta) \left[ (\sin^2 \theta)^{\lambda-1} - (\cos^2 \theta)^{\lambda-1} \right]. \quad (\text{B.39})$$

Dado que  $\theta \in [0, \pi/4]$ , tenemos que  $\sin(2\theta) \geq 0$  y  $\sin^2 \theta \leq \cos^2 \theta$ ; luego, el primer término de (B.38) es positivo. Más aún, dado que  $\gamma - \theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ , el segundo término de (B.38) tiene el mismo signo que el factor  $\sin[2(\gamma - \theta)]$ . Por lo tanto, para  $\theta \in (\gamma, \pi/4]$  la suma de las entropías es creciente. Necesariamente el mínimo de la suma corresponde a  $\theta \in [0, \gamma]$ , reduciendo el problema a

$$\bar{c}_{\alpha,\beta;f;2}(c) = \min_{\theta \in [0, \gamma]} \left( \frac{f(\mathcal{D}_\alpha(\theta))}{1-\alpha} + \frac{f(\mathcal{D}_\beta(\gamma-\theta))}{1-\beta} \right). \quad (\text{B.40})$$

Para concluir la demostración de la Proposición 3.2, observamos que la extensión del resultado a estados mixtos  $\rho$  es directa. En efecto, la cota obtenida en el Corolario 3.1 evaluada en  $N = 2$  vale para estados mixtos y coincide con la cota calculada aquí.

En general, la cota B.40 tiene que ser calculada de forma numérica. No obstante, para ciertos valores de los índices entrópicos obtenemos un expresión analítica o semi-analítica.

### **B.2.2** Demostración del Corolario 3.4

La derivada segunda respecto de  $\theta$  de la función a minimizar da

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\ln \mathcal{D}_\alpha(\theta)}{1-\alpha} + \frac{\ln \mathcal{D}_\beta(\gamma-\theta)}{1-\beta} \right) = \frac{\mathcal{K}_\alpha(\theta)}{[\mathcal{D}_\alpha(\theta)]^2} + \frac{\mathcal{K}_\beta(\gamma-\theta)}{[\mathcal{D}_\beta(\gamma-\theta)]^2}, \quad (\text{B.41})$$

donde  $\mathcal{K}_\lambda \equiv \frac{(\mathcal{D}'_\lambda \mathcal{D}_\lambda - \mathcal{D}_\lambda'^2)}{(1-\lambda)}$  da

$$\mathcal{K}_\lambda(\theta) = \frac{2\lambda}{1-\lambda} \left[ (2\lambda-1) \left( \frac{\sin^2(2\theta)}{4} \right)^{\lambda-1} - (\cos^2 \theta)^{2\lambda-1} - (\sin^2 \theta)^{2\lambda-1} \right]. \quad (\text{B.42})$$

Esta cantidad es estrictamente negativa para  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , de modo que la función  $\frac{\ln \mathcal{D}_\alpha(\theta)}{1-\alpha} + \frac{\ln \mathcal{D}_\beta(\gamma-\theta)}{1-\beta}$  es cóncava respecto a  $\theta \in [0, \gamma]$ . Luego, el mínimo se

alcanza en los extremos del intervalo, es decir, para  $\theta = 0$  o  $\theta = \gamma$ , o ambos si  $\alpha = \beta$ . Para estos valores de  $\theta$  la función toma el valor  $\frac{\ln \mathcal{D}_\beta(\gamma)}{1-\beta}$  o  $\frac{\ln \mathcal{D}_\alpha(\gamma)}{1-\alpha}$ . Luego, usando que la entropía de Rényi  $R_\lambda$  es decreciente con  $\lambda$  y recordando que  $c = \cos \gamma$ , concluimos la prueba del Corolario 3.4.

**B.2.3** Demostración del Corolario 3.5

La función a ser minimizada en (B.40) es

$$\mathcal{F}_\alpha(\theta) \equiv \frac{\ln \mathcal{D}_\alpha(\theta) + \ln \mathcal{D}_\alpha(\gamma - \theta)}{1 - \alpha}. \quad (\text{B.43})$$

Usando la simetría  $\mathcal{F}_\alpha(\theta) = \mathcal{F}_\alpha(\gamma - \theta)$ , el problema de minimización se reduce a

$$\bar{\mathcal{C}}_{\alpha, \alpha; \ln; 2}(c) = \min_{\theta \in [0, \frac{\gamma}{2}]} \mathcal{F}_\alpha(\theta). \quad (\text{B.44})$$

El caso  $\beta = \alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  ha sido tratado en la Subsección anterior, por ello ahora nos restringimos a  $\alpha = \beta > \frac{1}{2}$ . La derivada de  $\mathcal{F}_\alpha$  respecto de  $\theta$  da

$$\mathcal{F}'_\alpha(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{F}_\alpha(\theta) = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{\mathcal{D}'_\alpha(\theta)}{\mathcal{D}_\alpha(\theta)} - \frac{\mathcal{D}'_\alpha(\gamma - \theta)}{\mathcal{D}_\alpha(\gamma - \theta)} \right). \quad (\text{B.45})$$

Esta expresión se anula en  $\theta = \frac{\gamma}{2}$ . Además, existen otros ángulos que anulan la derivada que depende del valor de  $c$ .

**B.2.3.1** Caso  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

En este caso,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Como observamos, en  $\theta = \frac{\pi}{8}$  se anula la derivada. El otro ángulo en el que se anula la derivada corresponde a  $\theta = 0$ , ya que  $\mathcal{D}'_\alpha(0) = \mathcal{D}'_\alpha(\frac{\pi}{4}) = 0$ . Como hemos notado en [BPHP13], existen diferentes comportamientos dependiendo si  $\alpha$  es menor, igual o mayor que  $\alpha^\dagger \approx 1.430$ , que es la única solución de  $\frac{2 \ln \left[ \left( \frac{2+\sqrt{2}}{4} \right)^\alpha + \left( \frac{2-\sqrt{2}}{4} \right)^\alpha \right]}{1-\alpha} = \ln 2$ . Resumimos los resultados:

- para  $\alpha < \alpha^\dagger$ ,  $\theta = 0$  es la única solución del problema de minimización, siendo el valor de la cota  $\ln 2$ ;
- en  $\alpha = \alpha^\dagger$ , tenemos dos soluciones,  $\theta = 0$  y  $\theta = \frac{\pi}{8}$ , que dan la cota  $\ln 2$ ;

- para  $\alpha > \alpha^\dagger$ ,  $\theta = \frac{\pi}{8}$  es la única solución, siendo la cota  $\frac{2 \ln \left[ \left( \frac{2+\sqrt{2}}{4} \right)^\alpha + \left( \frac{2-\sqrt{2}}{4} \right)^\alpha \right]}{1-\alpha}$ .

**B.2.3.2** Caso  $c \in (1/\sqrt{2}, 1)$

En este caso  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{4})$ . Se puede ver que  $\theta = 0$  no es solución de  $\mathcal{F}'_\alpha(\theta) = 0$ : aunque  $\mathcal{D}'_\alpha(0) = 0$  tenemos que  $\frac{\mathcal{D}'_\alpha(\gamma)}{1-\alpha} > 0$ . Luego, los posibles ángulos que anulan la derivada pertenecen a  $\theta \in (0, \frac{\gamma}{2}]$ . Obtenemos numericamente que, dado  $c$  existe un  $\alpha^*(c)$  tal que

- si  $\frac{1}{2} < \alpha < \alpha^*(c)$ , el ángulo óptimo  $\theta_{\text{opt}}(\alpha)$  se obtiene numericamente en el intervalo  $(0, \frac{\gamma}{2})$ . Encontramos que  $\theta_{\text{opt}}(\alpha)$  crece continuamente de 0 a  $\frac{\gamma}{2}$  (ver Fig. 3.10). El valor de la cota también se calcula numericamente;
- si  $\alpha \geq \alpha^*(c)$ ,  $\theta = \frac{\gamma}{2}$  es el único mínimo, siendo la cota  $\frac{2 \ln \left[ \left( \frac{1+c}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1-c}{2} \right)^\alpha \right]}{1-\alpha}$ .

De esta manera, concluimos la demostración de la cota dada en el Corolario 3.5.

**B.2.4** Demostración de la Proposición 3.3

Denotamos con  $\{\theta_{\text{opt}}^{(i)}\}_{i \in \mathcal{I}}$  el conjunto de ángulos que minimizan la suma de entropías generalizadas (o sea las soluciones de (B.40)), donde  $\mathcal{I}$  es la lista de todas las posibles soluciones. Remarcamos que los ángulos minimizantes dependen de la elección de la entropía generalizada (o sea de  $f$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ ). Además, recordamos que pertenecen al intervalo  $[0, \gamma]$ , donde  $\gamma$  es el mínimo entre  $\gamma_T$  y  $\frac{\pi}{2} - \gamma_T$  como mostramos en (B.26), siendo  $\gamma_T \in [0, \frac{\pi}{2}]$  uno de los parámetros que caracterizan a la matriz unitaria  $T$ , Ec. (B.20). Luego, tenemos dos situaciones:

- $\gamma_T = \gamma \in [0, \frac{\pi}{4}]$ : recordemos que hemos redefinido la fase  $\varphi \rightarrow \mathbf{v} + \varphi$ , en consecuencia, los vectores de onda minimizantes  $\psi$  son del a forma  $\Phi(-\mathbf{v})\mathbf{s}(\theta_{\text{opt}}^{(i)})$ . Por otro lado, teniendo en cuenta las simetrías  $\theta \rightarrow -\theta$ ,  $\theta + \frac{\pi}{2}$  y  $\theta + \pi$  obtenemos, para este caso, la expresión final:

$$\psi_{\text{opt}}^{(i,n)} = \Phi(-\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \cos \left( \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( \theta_{\text{opt}}^{(i)} + n \frac{\pi}{2} \right) \end{bmatrix} \quad \text{con } i \in \mathcal{I} \quad \text{y } n = 0, 1,$$

a menos de un factor de fase global. En la Fig. B.6.(a) representamos todos los posibles ángulos óptimos (círculos) para un situación dada.

- $\gamma_T = \frac{\pi}{2} - \gamma \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ : ahora, el vector de fase óptimo cambia de  $-\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v} - [0 \ \pi]^t$ . Usando las misma simetría que en el caso anterior, obtenemos que:

$$\psi_{\text{opt}}^{(i,n)} = \Phi(-\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \cos\left(-\theta_{\text{opt}}^{(i)} + n\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\theta_{\text{opt}}^{(i)} + n\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad \text{con } i \in \mathcal{I} \text{ y } n = 0, 1,$$

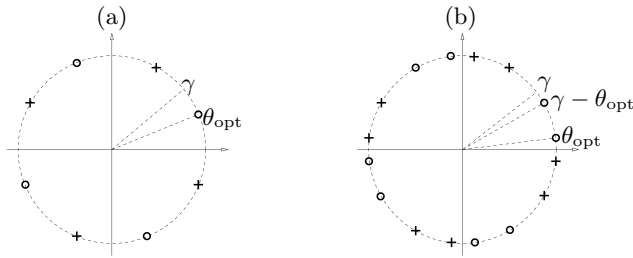
a menos de un factor de fase global. En la Fig. B.6.(a) representamos todos los posibles ángulos óptimos (cruces) para un situación dada.

Unificamos la dos expresiones usando que el signo de  $\frac{\pi}{4} - \gamma_T$  es el mismo que el signo de  $\theta_{\text{opt}}^{(i)}$  en ambas expresiones. Esto concluye la demostración de la Proposición 3.2.

*Caso  $\alpha = \beta$* : para este caso tenemos un único  $\theta_{\text{opt}} \in [0, \frac{\gamma}{2}]$  (con  $\gamma = \arccos c$ ). Más aún, hemos visto que la suma de entropías es invariante ante la transformación  $\theta \rightarrow \gamma - \theta$ . Esto da los posibles ángulos representados en la Fig. B.6.(b), respectivamente para  $\gamma_T \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (círculos) y  $\gamma_T \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (cruces). En conclusión,

$$\theta_{\text{opt}}^{(i)} = \frac{\gamma}{2} + i \left( \frac{\gamma}{2} - \theta_{\text{opt}} \right) \quad \text{con } i \in \mathcal{I} = \{-1, 1\},$$

dando los ángulos minimizantes del Corolario 3.5.



**Figura B.6:** (a) Representación de todos los ángulos óptimos para un  $\theta_{\text{opt}}$  dado, cuando  $\gamma_T \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (círculos) o  $\gamma_T \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (cruces). (b) Lo mismo que en (a), para el caso especial  $\beta = \alpha$ .



# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [Bal70] Leslie E Ballentine. The statistical interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 42(4):358, 1970.
- [BB06] Iwo Białynicki-Birula. Formulation of the uncertainty relations in terms of the Rényi entropies. *Physical Review A*, 74(5):052101, 2006.
- [BBM75] Iwo Białynicki-Birula and Jerzy Mycielski. Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 44(2):129–132, 1975.
- [BBR11] Iwo Białynicki-Birula and Łukasz Rudnicki. Entropic uncertainty relations in quantum physics. In KD Sen, editor, *Statistical Complexity*. Springer, Dordrecht, 2011.
- [BCC<sup>+</sup>10] Mario Berta, Matthias Christandl, Roger Colbeck, Joseph M Renes, and Renato Renner. The uncertainty principle in the presence of quantum memory. *Nature Physics*, 6(9):659–662, 2010.
- [Bec75] William Beckner. Inequalities in Fourier analysis. *Annals of Mathematics*, 102(1):159–182, 1975.
- [BHL07] Paul Busch, Teiko Heinonen, and Pekka Lahti. Heisenberg’s uncertainty principle. *Physics Reports*, 452(6):155–176, 2007.
- [BLMR13] Normand J Beaudry, Marco Lucamarini, Stefano Mancini, and Renato Renner. Security of two-way quantum key distribution. *Physical Review A*, 88(6):062302, 2013.
- [Boh28] Niels Bohr. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, 121:580–590, 1928.
- [Boh37] Niels Bohr. Causality and complementarity. *Philosophy of Science*, 4(3):289–298, 1937.
- [BOLP14] Gustavo M Bosyk, Tristán M Osán, Pedro W Lamberti, and Mariela Portesi. Geometric formulation of the uncertainty principle. *Physical Review A*, 89:034101, 2014.
- [BPHP13] Gustavo M Bosyk, Mariela Portesi, Federico Holik, and Angel Plastino. On the connection between complementarity and uncertainty principles in the Mach–Zehnder interferometric setting. *Physica Scripta*, 87(6):065002, 2013.

- [BPP12] Gustavo M Bosyk, Mariela Portesi, and Angel Plastino. Collision entropy and optimal uncertainty. *Physical Review A*, 85(1):12108, 2012.
- [BPPZ11] Gustavo M Bosyk, Mariela Portesi, Angel Plastino, and Steeve Zozor. Comment on “Improved bounds on entropic uncertainty relations”. *Physical Review A*, 84(5):056101, 2011.
- [BS06] Paul Busch and Christopher Shilladay. Complementarity and uncertainty in Mach–Zehnder interferometry and beyond. *Physics reports*, 435(1):1–31, 2006.
- [BST<sup>+</sup>99] Gunnar Björk, Jonas Söderholm, Alexei Trifonov, Tedros Tsegaye, and Anders Karlsson. Complementarity and the uncertainty relations. *Physical Review A*, 60(3):1874, 1999.
- [Bul03] Peter S Bullen. *Handbook of means and their inequalities*. Springer, 2003.
- [Bur69] Donald Bures. An extension of Kakutani’s theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite  $*$ -algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 135:199–212, 1969.
- [BW07] Manuel A Ballester and Stephanie Wehner. Entropic uncertainty relations and locking: tight bounds for mutually unbiased bases. *Physical Review A*, 75(2):022319, 2007.
- [BŻ06] Ingemar Bengtsson and Karol Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BZP<sup>+</sup>14] Gustavo M Bosyk, Steeve Zozor, Mariela Portesi, Tristán M Osán, and Pedro W Lambert. Uncertainty relations à la Landau–Pollak for positive operator valued measures. *arXiv preprint arXiv:1406.3537*, 2014.
- [CKW14] Patrick J Coles, Jędrzej Kaniewski, and Stephanie Wehner. Equivalence of wave-particle duality to entropic uncertainty. *arXiv preprint arXiv:1403.4687*, 2014.
- [CT12] Thomas M Cover and Joy A Thomas. *Elements of information theory*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2012.
- [Dar70] Zoltán Daróczy. Generalized information functions. *Information and control*, 16(1):36–51, 1970.
- [Deu83] David Deutsch. Uncertainty in quantum measurements. *Physical Review Letters*, 50:631–633, 1983.

- [Dit03] Petre Dita. Factorization of unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(11):2781, 2003.
- [DR00] Stephan Dürr and Gerhard Rempe. Can wave–particle duality be based on the uncertainty relation? *American Journal of Physics*, 68(11):1021–1024, 2000.
- [dV08] Julio I de Vicente. *Medidas de información, incertidumbre y entrelazamiento en Mecánica Cuántica*. Tesis doctoral, Universidad Carlos III de Madrid (no publicada), 2008.
- [dVSR05] Julio I de Vicente and Jorge Sánchez-Ruiz. Separability conditions from the Landau–Pollak uncertainty relation. *Physical Review A*, 71(5):52325, 2005.
- [dVSR08] Julio I de Vicente and Jorge Sánchez-Ruiz. Improved bounds on entropic uncertainty relations. *Physical Review A*, 77(4):042110, 2008.
- [Egg66] Harold G Eggleston. *Convexity*, volume 47. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.
- [Eng96] Berthold-Georg Englert. Fringe visibility and which-way information: An inequality. *Physical review letters*, 77(11):2154–2157, 1996.
- [ESW95] Berthold-Georg Englert, Marian O Scully, and Herbert Walther. Complementarity and uncertainty. *Nature*, 375:367–368, 1995.
- [Eve73] Hugh Everett. Reimpresa en “*The many-worlds interpretation of quantum mechanics*”. Eds. DeWitt, Bryce S and Graham, Neill, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [FGG13] Shmuel Friedland, Vlad Gheorghiu, and Gilad Gour. Universal uncertainty relations. *Physical Review Letters*, 111(23):230401, 2013.
- [FLS63] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Volume III: Quantum Mechanics*. Addison Wesley, Massachusetts, 1963.
- [FM94] Meir Feder and Neri Merhav. Relations between entropy and error probability. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 40(1):259–266, 1994.
- [Gab46] Dennis Gabor. Theory of communication. Part 1: The analysis of information. *Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering, Journal of the Institution of*, 93(26):429–441, 1946.

- [GG90] Anthony JM Garrett and Stephen F Gull. Numerical study of the information uncertainty principle. *Physics Letters A*, 151(9):453–458, 1990.
- [Gio04] Vittorio Giovannetti. Separability conditions from entropic uncertainty relations. *Physical Review A*, 70(1):012102, 2004.
- [GL04] Otfried Gühne and Maciej Lewenstein. On entropic uncertainty relations and entanglement. *Physical Review A*, 70:022316, 2004.
- [GLN05] Alexei Gilchrist, Nathan K Langford, and Michael A Nielsen. Distance measures to compare real and ideal quantum processes. *Physical Review A*, 71(6):062310, 2005.
- [GMR03] GianCarlo Ghirardi, Luca Marinatto, and Raffaele Romano. An optimal entropic uncertainty relation in a two-dimensional Hilbert space. *Physics Letters A*, 317(1):32–36, 2003.
- [GMTA06] Otfried Gühne, Mátyás Mechler, Géza Tóth, and Peter Adam. Entanglement criteria based on local uncertainty relations are strictly stronger than the computable cross norm criterion. *Physical Review A*, 74(1):010301, 2006.
- [GR07] Izrail S Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*, volume 7. Academic Press New York, New York, 2007.
- [Güh04] Otfried Gühne. Characterizing entanglement via uncertainty relations. *Physical Review Letters*, 92(11):117903, 2004.
- [HC67] Jan Havrda and František Charvát. Quantification method of classification processes. concept of structural  $\alpha$ -entropy. *Kybernetika*, 3(1):30–35, 1967.
- [Hei27] Werner Heisenberg. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43(3-4):172–198, 1927.
- [Hir57] Isidore I Hirschman. A note on entropy. *American Journal of Mathematics*, 79:152, 1957.
- [HLP52] Godfrey H Hardy, John E Littlewood, and George Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [Hof03] Holger F Hofmann. Bound entangled states violate a nonsymmetric local uncertainty relation. *Physical Review A*, 68(3):034307, 2003.

- [HT03] Holger F Hofmann and Shigeki Takeuchi. Violation of local uncertainty relations as a signature of entanglement. *Physical Review A*, 68:032103, 2003.
- [Hua10] Yichen Huang. Entanglement criteria via concave-function uncertainty relations. *Physical Review A*, 82(1):012335, 2010.
- [Iva92] Igor D Ivanovic. An inequality for the sum of entropies of unbiased quantum measurements. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(7):L363, 1992.
- [Jar05] Cecilia Jarlskog. A recursive parametrization of unitary matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 46(10), 2005.
- [Joz94] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 41(12):2315–2323, 1994.
- [JSV95] Gregg Jaeger, Abner Shimony, and Lev Vaidman. Two interferometric complementarities. *Physical Review A*, 51(1):54, 1995.
- [KB07] Christian Kothe and Gunnar Björk. Entanglement quantification through local observable correlations. *Physical Review A*, 75(1):012336, 2007.
- [Ken27] Earle H Kennard. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik*, 44(4-5):326–352, 1927.
- [KH04] Irfan Ali Khan and John C Howell. Exploring the optimal sensitivity of sum-variance nonseparability criteria for spin- $\frac{1}{2}$  systems. *Physical Review A*, 70(6):062320, 2004.
- [KP02] Maddaly Krishna and Kalyanapuram R Parthasarathy. An entropic uncertainty principle for quantum measurements. *Sankhya. Series A*, 64(3):842–851, 2002.
- [Kra87] Karl Kraus. Complementary observables and uncertainty relations. *Physical Review D*, 35(10):3070, 1987.
- [Lar90] Ulf Larsen. Superspace geometry: the exact uncertainty relationship between complementary aspects. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(7):1041, 1990.
- [LFC09] Carlos Lara, Juan J Flores, and Felix Calderon. On the hyperbox–hyperplane intersection problem. *INFOCOMP–Journal of Computer Science*, 8(4):21–27, 2009.
- [LHG<sup>+</sup>12] Hong-Yu Liu, Jie-Hui Huang, Jiang-Rui Gao, M Suhail Zubairy, and Shi-Yao Zhu. Relation between wave-particle duality and quantum uncertainty. *Physical Review A*, 85(2):022106, 2012.

- [LP61] Henry J Landau and Henry O Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—II. *Bell System Technical Journal*, 40(1):65–84, 1961.
- [Lui01] Alfredo Luis. Complementarity and certainty relations for two-dimensional systems. *Physical Review A*, 64(1):12103, 2001.
- [Lui07] Alfredo Luis. Quantum properties of exponential states. *Physical Review A*, 75(5):52115, 2007.
- [Lui11] Alfredo Luis. Effect of fluctuation measures on the uncertainty relations between two observables: Different measures lead to opposite conclusions. *Physical Review A*, 84(3):34101, 2011.
- [Man91] Leonard Mandel. Coherence and indistinguishability. *Optics letters*, 16(23):1882–1883, 1991.
- [Mar72] George Marsaglia. Choosing a point from the surface of a sphere. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(2):645–646, 1972.
- [Mas07] Serge Massar. Uncertainty relations for positive-operator-valued measures. *Physical Review A*, 76(4):042114, 2007.
- [Mas08] Serge Massar. Erratum: Uncertainty relations for positive-operator-valued measures. *Phys. Rev. A*, 78:059901, 2008.
- [Mez07] Francesco Mezzadri. How to generate random matrices from the classical compact groups. *Notices of the AMS*, 54(5):592–604, 2007.
- [MI07] Takayuki Miyadera and Hideki Imai. Generalized Landau–Pollak uncertainty relation. *Physical Review A*, 76(6):062108, 2007.
- [Mis12] Jarosław Adam Miszczak. Generating and using truly random quantum states in Mathematica. *Computer Physics Communications*, 183(1):118–124, 2012.
- [MLMP05] Ana Majtey, Pedro W Lamberti, María T Martin, and Angel Plastino. Wootters distance revisited: a new distinguishability criterium. *The European Physical Journal D*, 32(3):413–419, 2005.
- [MMPS97] María Luisa Menéndez, Domingo Morales, Leandro Pardo, and Miquel Salicrú.  $(h, \phi)$ -entropy differential metric. *Applications of Mathematics*, 42(2):81–98, 1997.
- [MO79] Albert W Marshall and Ingram Olkin. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press, New York, 1979.
- [MU88] Hans Maassen and Jos BM Uffink. Generalized entropic uncertainty relations. *Physical Review Letters*, 60(12):1103–1106, 1988.

- [NBW12] Nelly Huei Ying Ng, Mario Berta, and Stephanie Wehner. Min-entropy uncertainty relation for finite-size cryptography. *Physical Review A*, 86(4):042315, 2012.
- [NC10] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [OW10] Jonathan Oppenheim and Stephanie Wehner. The uncertainty principle determines the nonlocality of quantum mechanics. *Science*, 330(6007):1072–1074, 2010.
- [PP96] Mariela Portesi and Angel Plastino. Generalized entropy as a measure of quantum uncertainty. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 225(3):412–430, 1996.
- [PRŻ13] Zbigniew Puchała, Łukasz Rudnicki, and Karol Życzkowski. Majorization entropic uncertainty relations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(27):272002, 2013.
- [R61] Alfréd Rényi. On Measures of Entropy and Information. In J Neyman, editor, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*. University of California Press, Berkeley, California, 1961.
- [Ras08] Alexey E Rastegin. Comment on “Uncertainty relations for Positive Operator Valued Measure”. *arXiv preprint arXiv:0810.0083*, 2008.
- [Ras10] Alexey E Rastegin. Rényi formulation of the entropic uncertainty principle for POVMs. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(15):155302, 2010.
- [Ras11] Alexey E Rastegin. Entropic uncertainty relations for extremal unravelings of super-operators. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(9):095303, 2011.
- [Ras12] Alexey E Rastegin. Notes on entropic uncertainty relations beyond the scope of Riesz’s theorem. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(4):1300–1315, 2012.
- [Ras13] Alexey E Rastegin. Uncertainty relations for MUBs and SIC-POVMs in terms of generalized entropies. *The European Physical Journal D*, 67(12):1–14, 2013.
- [Rob29] Howard P Robertson. The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1):163, 1929.

- [RS80] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Vol.: 1.: Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1980.
- [SB06] Simon Samuelsson and Gunnar Björk. Local uncertainty relations serving as measures of entanglement in a bipartite two-level system. *Physical Review A*, 73(1):012319, 2006.
- [SBH14] James Schneeloch, Curtis J Broadbent, and John C Howell. Improving Einstein–Podolsky–Rosen steering inequalities with state information. *Physics Letters A*, 378(10):766–769, 2014.
- [Sch30] Erwin Schrödinger. Zum Heisenbergschen Unschärfepprinzip. *Proceedings of The Prussian Academy of Sciences*, 14:296–303, 1930.
- [SEW91] Marlan O Scully, Berthold-Georg Englert, and Herbert Walther. Quantum optical tests of complementarity. *Nature*, 351:111–116, 1991.
- [Sha48] Claude E Shannon. A mathematical theory of communication, Part I. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.
- [SMMP93] Miquel Salicru, Maria L Menendez, Domingo Morales, and Leandro Pardo. Asymptotic distribution of  $(h, \varphi)$ -entropies. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 22(7):2015–2031, 1993.
- [SR95] Jorge Sánchez-Ruiz. Improved bounds in the entropic uncertainty and certainty relations for complementary observables. *Physics Letters A*, 201(2):125–131, 1995.
- [SR98] Jorge Sánchez-Ruiz. Optimal entropic uncertainty relation in two-dimensional Hilbert space. *Physics Letters A*, 244(4):189–195, 1998.
- [STCW94] Pippa Storey, Sze Tan, Matthew Collett, and Daniel Walls. Path detection and the uncertainty principle. *Nature*, 367:626–628, 1994.
- [Tsa88] Constantino Tsallis. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2):479–487, 1988.
- [Uff90] Jozef BM Uffink. *Measures of Uncertainty and the Uncertainty Principle*. Ph.D. Thesis, University of Utrecht (unpublished), 1990.
- [Uhl76] Armin Uhlmann. The “transition probability” in the state space of a  $*$ -algebra. *Reports on Mathematical Physics*, 9(2):273–279, 1976.
- [Whe90] John A Wheeler. *Information, physics, quantum: The search for links*. Ed. by WH Zurek in: Complexity, Entropy, and the Physics of Information, Addison Wesley, Redwood City, 1990.



- [Woo81] William K Wootters. Statistical distance and Hilbert space. *Physical Review D*, 23(2):357, 1981.
- [WW10] Stephanie Wehner and Andreas Winter. Entropic uncertainty relations- a survey. *New Journal of Physics*, 12(2):025009, 2010.
- [WYM09] Shengjun Wu, Sixia Yu, and Klaus Mølmer. Entropic uncertainty relation for mutually unbiased bases. *Physical Review A*, 79(022104), 2009.
- [WZ79] William K Wootters and Wojciech H Zurek. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of Bohr's principle. *Physical Review D*, 19(2):473, 1979.
- [ZBP13] Steeve Zozor, Gustavo M Bosyk, and Mariela Portesi. On a generalized entropic uncertainty relation in the case of the qubit. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(46):465301, 2013.
- [ZBP14] Steeve Zozor, Gustavo M Bosyk, and Mariela Portesi. General entropic uncertainty relations for  $N$ -level systems. *arXiv preprint arXiv:1311.5602v2*, 2014.
- [ZK94] Karol Życzkowski and Marek Kuú. Random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(12):4235, 1994.
- [ZNZG10] Cheng-Jie Zhang, Hyunchul Nha, Yong-Sheng Zhang, and Guang-Can Guo. Entanglement detection via tighter local uncertainty relations. *Physical Review A*, 81(1):012324, 2010.
- [Zoz12] Steeve Zozor. *Bruit, Non-linéaire et Information : quelques résultats*. Habilitation à Diriger des Recherches, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, June 2012.
- [ZP10] Claudia Zander and Angel R Plastino. Uncertainty relations and entanglement in fermion systems. *Physical Review A*, 81(6):062128, 2010.
- [ZPV08] Steeve Zozor, Mariela Portesi, and Christophe Vignat. Some extensions of the uncertainty principle. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(19):4800–4808, 2008.
- [ZV07] Steeve Zozor and Christophe Vignat. On classes of non-Gaussian asymptotic minimizers in entropic uncertainty principles. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 375(2):499–517, 2007.