
CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DEL VIAJANTE DE COMERCIO

1.1. INTRODUCCIÓN

Aplicaciones, tales como: redes de comunicaciones, en especial redes de computadoras, diseño de rutas y redes en general, diseño de placas de circuitos impresos o PCB (Printed Circuit Board, en inglés), planificación y programación de actividades en proyectos de desarrollo de sistemas de cualquier tipo se analizan y llevan a cabo en áreas científicas e ingenieriles. Donde, resulta necesario establecer proyectos con el objetivo de realizar dichas aplicaciones. La disposición de un proyecto está dada, en gran medida, por:

- *La definición del proyecto.* Esto involucra las actividades de organización y formalización del proyecto, además de la definición de la estructura interna del mismo.
- *La planificación del proyecto.* En esta etapa se llevan a cabo las siguientes actividades: desarrollo de la estructura básica de trabajo, definición de la programación, estimación de los recursos, validación y redefinición de los objetivos del proyecto en cuestión, planificación de la administración de riesgos, y por último se realiza la aprobación o no de la planificación total. Siendo, los objetivos generales de la programación: definir de forma transparente la dependencia entre las tareas y el flujo de trabajo, además de determinar la duración total del proyecto. Esto se traduce en un problema de optimización al asignar distintas actividades a recursos, lo cual implica problemas de *scheduling*, propiamente dichos, o sus variantes tales como el caso del *problema del viajante*.
- *El seguimiento del proyecto.* Dicha etapa implica: el análisis de datos obtenidos durante el control de avance y las variaciones, la ejecución de acciones correctivas, la comunicación del estado, y por último el cierre del proyecto.

Las aplicaciones nombradas anteriormente corresponden a la puesta en práctica de problemas de optimización combinatorial NP-Complejos. En especial, se identifican con el clásico problema del viajante de comercio; ya que tratan de

optimizar el costo incurrido al seguir una secuencia de nodos, *jobs*. Dicha secuencia forma un *circuito hamiltoniano*. A continuación se describe el problema del viajante de comercio, y luego se detallan las aplicaciones prácticas y su relación con este problema.

1.2. EL PROBLEMA DEL VIAJANTE DE COMERCIO

El problema del viajante de comercio o agente viajero, en inglés *Traveling Salesman Problem* (TSP), es uno de los problemas de optimización combinatorial NP-duros más ampliamente estudiado. Su declaración es engañosamente simple: un viajante busca el camino más corto para pasar por m ciudades. En otras palabras, una persona debe visitar un conjunto de m ciudades, comenzando en una ciudad determinada y finalizando en la misma ciudad; luego de haber visitado todas ellas sólo una vez. Esto significa que nunca regresa a una ciudad ya visitada, excepto la primera.

Este problema puede ser representado por un grafo, cuyos nodos representan cada ciudad y los arcos la distancia entre un par de ellas; formando, de esta manera, un ciclo hamiltoniano.

El objetivo es encontrar la secuencia de visitas óptima; la cual puede ser evaluada según distintos criterios, como por ejemplo: la minimización del costo o del tiempo, la maximización de la velocidad.

El TSP puede ser simétrico o asimétrico. En el primer caso, dado un conjunto de m nodos y distancias para cada par de nodos, la distancia desde el nodo i al nodo j es la misma que la distancia desde el nodo j al nodo i . Mientras que en el caso del TSP asimétrico, la distancia desde el nodo i al nodo j es distinta a la distancia desde el nodo j al nodo i [116].

Existen varias formulaciones matemáticas del problema. La presentada a continuación usa relativamente pocas variables, y define las variables cero-uno de la siguiente manera:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la ruta incluye la secuencia de ir desde } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

para todo i y j .

El objetivo es minimizar,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad \text{donde } c_{ii} = \infty \text{ para } i = 1, \dots, m$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \text{ y } j \quad (3)$$

Las restricciones (1), (2) y (3) aseguran que cada x_{ij} sea cero o uno. La restricción (1) garantiza un arribo a cada ciudad, mientras que la (2) requiere que un *tour* incluya una salida desde cada ciudad.

1.3. ALGUNAS APLICACIONES PRÁCTICAS DEL TSP

1.3.1. PROBLEMAS DE SCHEDULING

Los problemas de scheduling son, en reiteradas ocasiones, muy complicados de resolver por contar con un gran número de: actividades relacionadas y restringidas a cada una de las otras, recursos a actividades, y los recursos o actividades a eventos externos del sistema [80]. La función de evaluación matemática, para este problema, es altamente compleja y el espacio de búsqueda es muy amplio con un gran número de óptimos locales. La similitud entre el TSP y el problema de secuenciamiento radica en que los jobs pueden verse como ciudades y los tiempos de *set-up* (configuraciones) dependientes de la secuencia pueden apreciarse como la distancia entre dichas ciudades [97]. El objetivo es determinar una secuencia de jobs (un schedule), de forma tal que todos ellos se lleven a cabo en una cantidad mínima de tiempo. Es necesario destacar, que el costo de pasar del job A

al B, puede ser diferente al costo de recorrer el camino inverso, esto es desde el job B al A. Consecuentemente, es necesario resolver este problema por medio de la variante asimétrica del TSP.

El problema del secuenciamiento de jobs con set-up dependiente de la secuencia se presenta en distintas áreas, como por ejemplo: en la programación de un proyecto de desarrollo de sistemas. También es posible hallar un caso más específico en la televisión, cuando es necesario planificar un secuenciamiento óptimo de los comerciales durante un corte publicitario [49]. Otro campo es el que comprende el diseño de PCB, para más detalles ver el punto 1.2.5.

Otra aplicación se encuentra en el problema de secuenciamiento de aviones, en inglés *Aircraft Sequencing Problem* (ASP) [94]. Se asume que hay n aviones esperando el permiso correspondiente para aterrizar en un única pista. Las regulaciones de seguridad requieren de un cierto tiempo entre dos aterrizajes. Este tiempo depende de los aviones, clasificados por tipo. El objetivo es encontrar una secuencia de aterrizaje, de forma tal que se logre minimizar la cantidad total de tiempo.

1.3.2. REDES Y TELECOMUNICACIONES

En *routing*, uno de los problemas más conocidos es el del viajante o TSP, en el cual es necesario optimizar la ruta a recorrer fijando algún criterio para ello. En función de lo anterior se torna prioritario encontrar un adecuado balance entre la exactitud de los resultados y el tiempo consumido para obtenerlos, es decir entre eficiencia y eficacia.

El TSP encuentra su aplicación más directa en el área de las empresas de telecomunicaciones; ya que estas necesitan optimizar las rutas de las redes telefónicas para minimizar costos.

Otro caso de uso del problema del viajante de comercio altamente relacionado con el área de comunicaciones, es el diseño de una red de fibra óptica [24]. En la cual conexiones punto a punto son necesarias, siendo una de las topologías posibles para este tipo de red: la de anillo. En este caso el objetivo es minimizar la distancia recorrida por la unión de todos los nodos involucrados y así abaratar

los costos de tendido de la red. Donde la topología de anillo implica un conjunto de enlaces punto a punto [138]; por los cuales circula un patrón de bits especial, denominado *ficha* o *token*, cuando todas las estaciones están inactivas. En el momento en que algún nodo necesite transmitir toma la ficha y la retira del anillo antes de emitir. El mensaje enviado debe pasar por cada uno de los nodos sólo una vez y regresar al lugar de origen. Una vez que una estación terminó de transmitir, esta debe regenerar la ficha.

El TSP puede, también, adaptarse para encontrar el *path* o ruta más corta entre dos nodos en una red de computadoras, conociendo por anticipado los costos de enlaces y conectividad existentes.

1.3.3. RED DE RECOLECCIÓN DE RESIDUOS

Una de las herramientas usadas en un proyecto ejecutivo de manejo y disposición de residuos sólidos municipales es el algoritmo para resolver el problema del viajante de comercio [129]. Este proyecto debe cumplimentar un conjunto de etapas:

- Diagnóstico de la situación actual de la localidad con respecto al manejo y disposición de los residuos sólidos.
- Evaluación de parámetros.
- Diseño del Sistema de Manejo de los Residuos Sólidos Municipales.

Es en la última etapa donde resulta necesario, entre otras cosas, diseñar el transporte y recolección de los residuos teniendo en cuenta los siguientes factores: economía del sistema, resistencia al cambio por parte de los usuarios del sistema y/o de los prestadores del servicio, topografía de la localidad, trazo y vialidad establecidas en la localidad. Resultando posibles los siguientes métodos de recolección: de llevar y traer, de parada fija y de contenedores. En los dos últimos el modelo a aplicar para optimizar el proceso de recolección, es el algoritmo para resolver el TSP.

1.3.4. FILM-COPY DELIVERER PROBLEM (FDP)

El *film-copy deliverer problem* es un nuevo caso de optimización combinatorial examinado por Cheng y Gen [20]. El FDP se formula a continuación. La copia de un film se requiere para proyectarse en n cines. El número de veces que cada cine presenta el film se predetermina y denota por un entero no negativo $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Cada par de cines se conecta a través de un arco de longitud w_{ij} ; y si los cines i y j no están directamente comunicados, entonces $w_{ij} = +\infty$.

El problema radica en encontrar un tour para el repartidor (deliverer), comenzando y finalizando el recorrido en el cine de partida, así la longitud total del tour se minimiza bajo la restricción que el repartidor debe entregar la copia al cine i -ésimo exactamente pero no consecutivamente d_i veces ($i = 1, 2, \dots, n$). Cuando todos los d_i son restringidos a 1, el FDP se convierte en un TSP, pero también puede ser generalizado a una amplia variedad de problemas de ruteo y de scheduling. Zhang y Zheng en [151] investigan la transformación del FDP al TSP y resuelven el problema transformado con las heurísticas conocidas para el TSP.

El FDP puede ser fácilmente representado con un grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices representando a cada cine y $E = \{e_{ij} / e_{ij} = (v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$ es un conjunto finito de arcos representando la conexión entre dos cines. Cada arco tiene asociado un valor real no negativo, denotado por $W = \{w_{ij} / w_{ij} = w(v_i, v_j), w_{ij} > 0, v_i, v_j \in V\}$ representando las distancias. Cada vértice está asociado a un entero positivo que indica el número de veces que se presenta en cada cine y se denota por $D = \{d_i / d_i > 0, d_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, n\}$.

1.3.5. PLACA DE CIRCUITOS IMPRESOS (PCB)

El TSP también puede aplicarse en el diseño de un PCB. Esto es, asumiendo que un brazo de robot introduce n partes en puntos específicos de un PCB. Cada una de las partes pertenece a un cierto tipo K de partes. En un receptáculo se almacenan todas las de un determinado tipo. Los K recipientes se ubican a lo largo de uno de los laterales del PCB. Además, se supone que el brazo del robot

sólo puede hacer movimientos secuenciales en dirección horizontal o vertical, entonces el tiempo de viaje del brazo del robot de una ubicación a otra es proporcional a la distancia lineal entre los dos puntos. El problema del tour del robot (en inglés Robot Tour Problem, RTP) es encontrar una secuencia óptima de inserciones de las partes en el PCB, dadas las posiciones de los n puntos de inserción y las ubicaciones de los K receptáculos [18, 78].

Para ubicaciones fijas de los K recipientes, es posible transformar el RTP en un TSP para los n puntos de inserción. Obviamente, la distancia desde un punto de inserción a otro es igual a la distancia desde el primer punto de inserción al recipiente que contiene la parte a ser incorporada en el segundo punto más la distancia desde este recipiente al segundo punto de inserción. Es posible observar que la segunda parte de esta distancia es fija, esto significa que, es independiente de la secuencia de la distancia recorrida para llegar a ese receptáculo. Sin embargo la primer parte es dependiente de la secuencia. Esto es, todos los recipientes se encuentran ubicados en el mismo lado del PCB y las distancias son medidas en forma rectilínea, entonces la distancia dependiente de la secuencia es la que va desde la proyección del punto de inserción en ese lateral del PCB hasta el próximo recipiente.