



Universidad Nacional de La Plata

**Facultad de Ciencias Exactas
Departamento de Física**

Estudio de Singularidades de Fase con Aplicaciones a la Metrología

**Tesis para optar al grado de Doctor presentada por:
Daniel Esteban Sierra Sosa**

**Director: Dr. Néstor Bolognini
Director: Dra. Myrian Tebaldi**

**Lugar de realización:
Centro de Investigaciones Ópticas
CIOp**

Julio de 2014

*"Why, sometimes I've believed as many as
six impossible things before breakfast".*

Lewis Carroll

Índice

Índice	I
Agradecimientos	V
1 Introducción General	- 1 -
1.1 Motivación y objetivos	- 1 -
1.2 Esquema general	- 6 -
1.3 Bibliografía	- 8 -
2 Marco Teórico	- 13 -
2.1 Introducción.....	- 13 -
2.2 Transformaciones integrales lineales	- 14 -
2.2.1 Transformada de Fourier.....	- 15 -
2.2.2 Transformada Riesz.....	- 15 -
2.2.3 Transformada Laguerre-Gauss	- 17 -
2.3 Patrones de speckle	- 18 -
2.4 Singularidades de fase.....	- 19 -
2.5 Estructura del núcleo de las singularidades de fase.	- 22 -
2.6 Esfera de Poincaré.....	- 24 -
2.7 Bibliografía	- 27 -
3 Movimientos Rígidos en el Plano	- 29 -
3.1 Introducción.....	- 29 -
3.2 Técnicas convencionales de metrología de vórtices	- 31 -
3.2.1 Efecto de la decorrelación en las medidas	- 31 -
3.2.2 Arreglo experimental	- 33 -
3.2.3 Resultados y análisis de histogramas	- 34 -
3.3 Metrología de vórtices a partir de mapas de fase módulo 2π	- 40 -

3.3.1	Resultados y análisis	- 41 -
3.4	Comparación de resultados de fase y pseudo-fase.....	- 42 -
3.5	Conclusiones.....	- 44 -
3.6	Bibliografía	- 45 -
4	Franjas de Correlación de Redes de Vórtices	- 47 -
4.1	Introducción.....	- 47 -
4.2	Franjas de correlación de redes de vórtices	- 49 -
4.2.1	Arreglo experimental	- 50 -
4.2.2	Resultados experimentales.....	- 54 -
4.2.3	Efecto de la decorrelación.....	- 59 -
4.3	Franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas	- 62 -
4.3.1	Fundamentación teórica	- 62 -
4.3.2	Arreglo experimental	- 67 -
4.3.3	Resultados experimentales.....	- 68 -
4.3.4	Precisión y rangos de aplicación de medidas	- 73 -
4.4	Conclusiones.....	- 77 -
4.5	Bibliografía	- 79 -
5	Transformada Vórtice para Patrones Modulados.....	- 81 -
5.1	Introducción.....	- 81 -
5.2	Transformada vórtice para patrones modulados	- 83 -
5.2.1	Descripción del filtro.....	- 84 -
5.2.2	Arreglo experimental	- 86 -
5.2.3	Resultados experimentales.....	- 87 -
5.2.3.1	Múltiples aperturas	- 87 -
5.2.3.2	Speckle modulado.....	- 91 -
5.3	Conclusiones.....	- 94 -
5.4	Bibliografía	- 95 -

6 Conclusiones y Perspectivas	- 97 -
6.1 Conclusiones.....	- 97 -
6.2 Perspectivas	- 101 -
Anexos	- 105 -
A.1 Muestreo y el teorema de Shannon-Nyquist.....	- 105 -
A.2 Discretización de la transformada integral de Fresnel.....	- 106 -
A.3 Localización de vórtices por el método de residuos	- 108 -
A.4 Bibliografía	- 109 -

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido un esfuerzo conjunto de diferentes personas, estas han sido de fundamental importancia para la ejecución y finalización del mismo. Deseo agradecer a todas aquellas personas que han cruzado su camino con el mío durante esta etapa de mi formación profesional y personal.

Deseo expresar un especial agradecimiento a los doctores Néstor Bolognini y Myrian Tebaldi. Los aportes y enseñanzas de los mismos han sido incalculables, desde conversaciones irrelevantes de almuerzo hasta particulares de académicos, son fundamentales para el desarrollo de este documento.

Deseo agradecer especialmente a la doctora Myrian Tebaldi, quien en el día a día de trabajo no faltó un solo día, sin perder la oportunidad de reírse por todo, haciendo que el cotidiano fuera ese constante chiste irónico que decido llamar vida.

Al doctor Jorge Tocho, director del Centro de Investigaciones Ópticas CIOp, le agradezco la oportunidad de realizar mi trabajo de Tesis en la institución. Por su amable acogida en dicho Centro y por hacerme sentir parte del mismo desde el comienzo.

Al doctor Roberto Torroba deseo agradecerle por sus consejos no solo a nivel académico sino también personales, los cuales estoy seguro que serán de la más alta cuantía en los años venideros.

Al grupo de Investigadores, Profesionales, Técnicos y Administrativos, por su ardua labor, y sin quienes no sería posible el funcionamiento del Centro. Deseo agradecer especialmente al personal de secretaría, a quienes

logre conocer en cortas conversaciones y que logran de una forma u otra hacerte sonreír.

Algunas instituciones han favorecido este proyecto. Debo agradecer al CONICET de la República Argentina por otorgarme una Beca para Graduados Latinoamericanos. A la Universidad EAFIT y al Centro de Computación Científica Apolo por permitirme aprender con sus personas y usar sus recursos.

Deseo agradecer al doctor Luciano Ángel por siempre acompañar mi proceso académico, las incontables conversaciones y ratos compartidos no han hecho más que aumentar mi respeto y admiración. Su cercanía ha sido apoyo constante y de imposible retribución a lo largo de los ahora años compartidos.

Deseo agradecer a Ana González, quien me ha acompañado incondicionalmente y ha decidido creerse este cuento que inicio con un Cubo de Rubik.

Quiero también agradecer a Leidy Giraldo, Nicolas Guarín, Juan David Pineda, Tomás Montoya y Daniel Velásquez² por su amistad y compañía en la distancia.

Finalmente deseo agradecer muy especialmente a toda mi familia, por haber estado desde el comienzo y apoyarme incondicionalmente. Y también a Ana y Alberto, la familia argentina.

1.1 Motivación y objetivos

A partir de los años sesenta, con el advenimiento de los láseres comerciales de onda continua, se hizo popular el fenómeno conocido como speckle o granularidad óptica. Por regla general el speckle se presenta en la óptica debido al uso de fuentes coherentes de iluminación; una forma simple de observarlo es haciendo incidir un haz de luz coherente sobre una superficie dispersora rugosa reflectora o que es transmitido por un vidrio difusor. Si la rugosidad de la superficie es grande en comparación con la escala de la longitud de onda, entonces se observa un patrón muy fino caracterizado por variaciones de intensidad de alto contraste. Puesto que este patrón es el resultado de la interferencia de muchísimas ondas provenientes de cada uno de los centros dispersores, cuyas amplitudes y fases varían aleatoriamente, es impracticable conocer de antemano y con exactitud las amplitudes y las fases de cada una de las ondas que interfieren. En tal virtud, las leyes para el estudio de este fenómeno son de naturaleza estadística [1.1].

Si bien el fenómeno del speckle introduce ruido en muchas aplicaciones ópticas, existen otras donde debido a sus propiedades es un efecto deseable del que se saca provecho. A manera de ejemplo, dentro de un amplio espectro de aplicaciones de la física, la metrología speckle ha recibido especial atención por parte de científicos, ingenieros, técnicos e industriales. Es bien conocido su desarrollo continuo a partir de los años setenta, en áreas tales como la medición de rugosidad en superficies [1.2], la determinación de desplazamientos y campos de tensiones [1.3], el análisis de vibraciones y la medición de deformaciones en mecánica experimental [1.4], las medidas de trayectorias de movimiento [1.5], la inspección de estructuras [1.6], el control de calidad, entre otros.

Durante décadas estas técnicas fueron catalogadas (no sin ambigüedades) en dos grandes categorías: fotografía e interferometría speckle. Simplificando al máximo esta clasificación, la fotografía speckle se basa en el registro de dos o más distribuciones de intensidad que caracterizan los estados inicial y final, o una serie de estados intermedios del objeto bajo estudio, cuando una superficie experimenta, por ejemplo, un desplazamiento una deformación estática o una vibración, entre otros [1.7]. La interferometría speckle también parte del registro de varias distribuciones de intensidad, pero en este caso, esas distribuciones son el resultado de la interferencia de una onda de referencia con el campo que porta la información de interés [1.8]. De este modo se logra almacenar, y después recuperar, la información relacionada con la fase del campo. Conocer el comportamiento de la fase del speckle es lo que permite descubrir y cuantificar los cambios que han ocurrido durante el proceso.

Una rama contemporánea de la óptica y la fotónica es la llamada óptica singular (o de singularidades), que forma parte de un área de la física conocida como física singular, en la cual confluyen desarrollos de actualidad en óptica, electromagnetismo, mecánica cuántica, topología, entre otros. La óptica singular se basa en el estudio de tres tipos de singularidades, las de: 1) Familias de rayos, 2) Fase y 3) Polarización de las ondas [1.9]. En particular nuestro interés son las singularidades de fase, conocidas como vórtices o dislocaciones ópticas, asociadas con los lugares del frente de onda en donde la intensidad del campo luminoso se anula y por tanto la fase no está definida.

Ahora bien, regularmente se asigna un peso a la vorticidad del frente de onda en cada uno de estos puntos singulares, estableciendo como varía la fase alrededor de cada vórtice. A lo largo de un circuito que rodea el vórtice, en cada ciclo la fase aumenta o disminuye a razón de un múltiplo de 2π . Esta es la base para definir la vorticidad o carga topológica de cada vórtice, y asociarle además un momento angular distinto de cero.

Los trabajos más recientes muestran que existe un interés creciente por la apropiación de técnicas analógicas y digitales para la generación de singularidades de fase, el estudio de las propiedades físicas y estadísticas de

las mismas [1.10], y sus aplicaciones [1.11-1.14]. La generación de dichas singularidades se logra mediante métodos y técnicas muy diversas, por ejemplo empleando discos espirales de fase multinivel [1.15], hologramas generados por computador [1.16], espejos helicoidales adaptativos [1.17], mediante interferencia de ondas planas [1.18], interferómetros de Michelson y Mach Zehnder modificados y sistemas de fibra óptica [1.19], o cuñas ópticas [1.13-], shearogramas [1.11], entre otros.

Sin embargo, dichas singularidades de fase no sólo se encuentran en los mapas de fase módulo 2π del campo, también pueden ser encontradas en campos de valores complejos sintetizados a partir de las distribuciones en intensidad. Empleando transformaciones integrales lineales sobre registros de intensidad es posible asignar una función de valores complejos a partir de una función de valores reales. Si esta función de valores reales es un registro de intensidad de un campo óptico, el resultado es a su vez un campo complejo, que se comportara de manera análoga al campo óptico con amplitud y fase módulo 2π [1.20]. En particular los trabajos de Takeda et al. proponen obtener un campo complejo a partir de un registro de intensidad, obteniendo así numéricamente una pseudo-fase a través de una transformada (filtrado de Hilbert, transformada de Laguerre-Gauss o filtrado vórtice). Esta técnica tiene la ventaja de evitar la complejidad de las técnicas interferométricas, dado que la pseudo-fase puede obtenerse a partir de un registro fotográfico [1.21-1.24].

Mediante diversas técnicas computacionales e interferométricas es posible realizar la detección de dichas singularidades de fase o de pseudo-fase. Algoritmos ópticos tales como métodos de cruces de ceros, integrales de línea y contorneado de fase se implementan con dicho fin. El método de cruces por cero está basado en el hecho que la función de onda contiene la parte real e imaginaria del campo, ambas partes se hacen cero en los lugares donde se encuentra una singularidad de fase, en la detección de singularidades mediante integrales de línea, la presencia del vórtice en el campo es aproximado encontrando los cambios de fase acumulados en la vecindades de cada uno de los puntos oscuros del campo, finalmente el método de contorneado de fase se basa en que los contornos para un valor de fase arbitrario convergen en puntos

singulares; la intersección de contornos sólo ocurre con la presencia de vórtices en el campo.

Las técnicas interferométricas que son usadas frecuentemente, se basan en la interferencia de un haz con singularidades de fase y un haz esférico o plano., obteniéndose mapas con bifurcaciones de franjas o espirales en las mismas. Dentro de los métodos interferométricos Ghai et. al. proponen el empleo de un interferómetro lateral de cizalla (*lateral shearinterferometer*), donde el frente de onda en el que se detectaran las singularidades es dividido y desplazado transversalmente en coordenadas espaciales para producir patrones de interferencia con bifurcaciones de franjas en donde los dos haces se solapan [1.25].

Las propiedades topológicas de los campos con singularidades de fase han sido ampliamente estudiadas en los últimos años, un avance importante en esta área es la relación encontrada entre la carga topológica y el momento orbital angular de haces de luz generalmente para haces Laguerre-Gauss con estructuras espaciales helicoidales de frente de onda [1.26], contribuciones de este estilo dan pie a un amplio número de aplicaciones de la óptica singular.

En el campo de las aplicaciones, desde hace unos años se trabaja muy intensamente en interferometría y microscopía de vórtices ópticos, microgeometría de superficies [1.27], técnicas de manipulación de micropartículas [1.28, 1.29], ensayos ópticos, estudio del momento orbital angular de campos de luz y generación de segundos armónicos usando haces Laguerre-Gauss [1.30]. Además, los desarrollos en el campo de las singularidades ópticas han servido de soporte para la implementación de técnicas diversas en litografía, microscopía de fluorescencia de alta resolución, trenzado cuántico y cronografía estelar. Otro grupo de aplicaciones de especial actualidad y relevancia está orientado al desarrollo de pinzas ópticas [1.13], cuyo uso tecnológico está vinculado a la posibilidad de atrapar nano partículas en una región con vorticidad no nula.

En metrología de vórtices, algunas publicaciones recientes reportan la detección de desplazamientos con precisiones nanométrica y rotaciones en la escala de los miliradianes [1.21, 1.22]. Masajada et. al [1.31-1.34] han desarrollado un método basado en la determinación de la fase haciendo uso de una red de vórtices generada mediante la interferencia de tres ondas planas. La localización exacta de los vórtices es crucial en esta técnica, dado que estos son utilizados como puntos de referencia. El proceso implica una serie de registros de intensidad y el uso de un algoritmo de salto de fase.

Por otro lado, Takeda et. al [1.21-1.24] proponen una técnica metrológica, que comparte con la anterior la filosofía de utilizar las singularidades de fase, pero emplea un método completamente diferente para detectar las singularidades. Su idea se basa en que, así como la distribución de intensidad de un patrón de speckle imprime marcas en una superficie iluminada coherentemente, asimismo las redes de singularidades asociadas con los patrones de speckle imprimen marcas relacionadas con la superficie del objeto. El desplazamiento de cada singularidad puede relacionarse directamente con un desplazamiento local de la superficie que se está estudiando.

A partir de lo estudiado de las técnicas convencionales de vórtices ópticos encontramos limitaciones que pueden ser superadas mediante la implementación de nuevas técnicas ópticas y computacionales que no sólo permiten la ampliación del rango de medidas, sino también la simplificación de los procedimientos y la posibilidad de expandir sus alcances aun cuando los efectos de la decorrelación sobre los patrones registrados hacen impracticable realizar mediciones empleando las técnicas convencionales. En tal virtud, en la presente tesis nos proponemos estudiar las singularidades de fase en campos de valores complejos generados mediante el uso de transformaciones integrales lineales, con aplicación concreta a la metrología de vórtices ópticos.

Para lograr el objetivo propuesto, se estudiarán las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos y el rango de aplicación de la misma cuando hay decorrelación entre los diferentes patrones de speckle a ser

estudiados. Adicionalmente, se propondrán técnicas alternativas de análisis para aplicaciones metroológicas basadas en singularidades de fase como marcadores del campo, a fin de expandir el rango de aplicabilidad de las técnicas metroológicas basadas en las singularidades de fase para medir desplazamientos rígidos en el plano. Finalmente, se evaluará la validez de las transformadas integrales lineales usadas en la metrología de vórtices cuando se sintetizan patrones de speckle modulados, con el fin de encontrar la mejor estrategia para la síntesis y análisis de redes de vórtices cuando los registros de speckle empleados contienen componentes en frecuencias altas introducidas por la modulación en los mismos.

1.2 Esquema general

La temática presentada en este documento de tesis para optar al grado de Doctor, se desarrolla de manera tal que siga la línea de pensamiento en la que fueron estudiados los diferentes temas, sintetizando el estudio realizado de las singularidades de fase y sus propiedades, cuando son empleadas en técnicas de metrología de vórtices ópticos.

Se estudian las técnicas convencionales de la metrología de vórtices para la síntesis de campos de speckle o similares al speckle, incluyendo el efecto natural de la decorrelación de los mismos para definir los rangos de aplicabilidad de estas técnicas. Posteriormente, se propone una manera alternativa de análisis para medir desplazamientos rígidos en el plano, basada en el análisis de Fourier de las singularidades de fase como marcadores de los campos de speckle, logrando expandir el rango de aplicabilidad de las técnicas de metrología de vórtices ópticos para este tipo de desplazamientos. Finalmente, se propone una manera alternativa para la generación de campos complejos mediante el uso de una nueva transformada integral lineal, generando así una herramienta matemática nueva para la síntesis de registros de intensidad, lo que permite en concreto, una mejor síntesis de registros de patrones modulados con altas frecuencias. Dicha herramienta no limita su uso al ámbito de la metrología de vórtices ópticos, sino que puede ser de utilidad

en diferentes aplicaciones propias del procesamiento opto-digital de la información.

En el Capítulo 2 se presentan las herramientas físicas y matemáticas propias del estudio de las singularidades de fase (vórtices ópticos), estas herramientas son básicas para la síntesis y caracterización de las singularidades de fase dentro de los campos ópticos. En concreto se estudian las singularidades presentes en patrones de speckle, de los cuales a partir de un registro de intensidad se genera una señal analítica compleja empleando transformaciones integrales lineales. La señal obtenida es entonces procesada digitalmente para obtener las propiedades estructurales de los núcleos de las singularidades. A partir de las cuales se estudiarán posteriormente algunas aplicaciones metrológicas.

En el Capítulo 3 se presentan los resultados relacionados con el estudio del efecto de la decorrelación cuando se realizan mediciones de desplazamientos rígidos en el plano, usando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos. Este estudio se realiza tanto en registros para los cuales se cuenta con la información de fase módulo 2π del campo, cuanto aquellos en los que es necesaria la generación de mapas de pseudo-fase a partir de registros de intensidad. Para dicho fin, se emplean distribuciones de speckle generadas por la difracción de la luz a partir de un difusor plano, el cual se desplaza lateralmente entre dos registros sucesivos.

En el Capítulo 4 se presenta un método alternativo para la medición de desplazamientos rígidos en el plano, que está basado en el análisis de Fourier de las singularidades de fase entendidas como marcadores del campo. El método propuesto emplea las redes de vórtices para medir desplazamientos de manera análoga a las técnicas convencionales de la metrología de vórtices. El método propuesto se basa en un análisis más tolerante a los efectos de la decorrelación entre los diferentes patrones que son objeto de estudio. Estos efectos se hacen evidentes cuando los desplazamientos son de mayor magnitud. En tal virtud, es posible realizar mediciones con un rango mayor a las técnicas convencionales presentadas en el capítulo anterior, lo que permite

extender el dominio de la metrología empleando singularidades de fase o vórtices. Adicionalmente en este capítulo, se demuestra que es posible obtener franjas de interferencia de Young cuando se realiza una transformada de Fourier de la luz que pasa a través de una máscara generada con aperturas de un píxel de diámetro, que están situadas en los lugares donde se encontraron las parejas de vórtices rastreadas a partir de las propiedades estructurales de sus núcleos. El análisis de franjas se lleva a cabo de manera análoga a las técnicas de la fotografía speckle pero para desplazamientos donde las técnicas convencionales no son aplicables debido a la superposición de los patrones de speckle o a la decorrelación del mismo. Se presenta además un método para realizar el análisis de Fourier de una forma alternativa, a partir de la generación de franjas de correlación sintéticas.

En el Capítulo 5 se propone una transformada que conserva las componentes de alta frecuencia de las distribuciones con modulación sin generar singularidades de fase inestables cuando se obtienen mapas de pseudo-fase a partir de la representación de números complejos. Esta propuesta surge como una continuación natural del estudio de las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos, ya que la mayoría de las técnicas propias de la metrología de vórtices ópticos están basadas en la generación de señales complejas de distribuciones de speckle o similares al speckle usando diferentes transformaciones integrales lineales de distribuciones de intensidad. Durante el desarrollo de este capítulo, se evidencia que en patrones con modulación, la inclusión de componentes de alta frecuencia generados por la superposición de sistemas de franjas conduce a la generación de numerosas singularidades de fase inestables o la disminución de las propiedades de la modulación cuando se usa las diferentes transformadas integrales lineales. Se muestra que mediante la transformada propuesta se superan estas limitaciones.

1.3 Bibliografía

- [1.1]. Goodman, J. W. (2007). Speckle phenomena in optics: theory and applications (Vol. 1).

- [1.2]. Jeyapoovan, T., Murugan, M., & Bovas, B. C. (2012, October). Statistical analysis of surface roughness measurements using laser speckle images. In Information and Communication Technologies (WICT), 2012 World Congress on (pp. 378-382). IEEE.
- [1.3]. Ángel, L., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2007). Multiple-aperture speckle method applied to local displacement measurements. *Optics communications*, 274(1), 23-31.
- [1.4]. Rosen, J. (2011). *Holography, Research and Technologies*. Janeza Trdine, 9, 51000.
- [1.5]. Erf, R. (Ed.). (2012). *Speckle metrology*. Elsevier.
- [1.6]. Zakharov, P.V., Zimnyakov, D.A., Trifonov, V. (2002). Speckle correlation technique as applied to structure analysis of multiphase systems with spatially separated components *Proceedings of the SPIE*, 268-274 (Vol. 4607).
- [1.7]. Dainty, J. C. (1975). *Laser speckle and related phenomena*. In Berlin and New York, Springer-Verlag (Topics in Applied Physics. Volume 9), 1975. 298 p (Vol. 9).
- [1.8]. Tebaldi, M., Ángel, L., Bolognini, N., & Trivi, M. (2004). Speckle interferometric technique to assess soap films. *Optics communications*, 229(1), 29-37.
- [1.9]. Dennis, M. R., O'Holleran, K., & Padgett, M. J. (2009). Singular optics: optical vortices and polarization singularities. *Progress in Optics*, 53, 293-363.
- [1.10]. Yao, A. M., & Padgett, M. J. (2011). Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in Optics and Photonics*, 3(2), 161-204.
- [1.11]. Ghai, D. P., Senthikumar, P., & Sirohi, R. S. (2008). Shearograms of an optical phase singularity. *Optics Communications*, 281(6), 1315-1322.
- [1.12]. Gu, Y., & Gbur, G. (2009). Topological reactions of optical correlation vortices. *Optics Communications*, 282(5), 709-716.
- [1.13]. Wang, L. G., Wang, L. Q., & Zhu, S. Y. (2009). Formation of optical vortices using coherent laser beam arrays. *Optics Communications*, 282(6), 1088-1094.
- [1.14]. Freund, I., & Kessler, D. A. (2008). Singularities in speckled speckle: Statistics. *Optics Communications*, 281(24), 5954-5967.
- [1.15]. Xie, Q., & Zhao, D. (2008). Optical vortices generated by multi-level achromatic spiral phase plates for broadband beams. *Optics Communications*, 281(1), 7-11.

- [1.16]. Heckenberg, N. R., McDuff, R., Smith, C. P., & White, A. G. (1992). Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Opt. Lett*, 17(3), 221-223.
- [1.17]. Pal Ghai, D., Senthilkumaran, P., & Sirohi, R. S. (2008). Adaptive helical mirror for generation of optical phase singularity. *Applied optics*, 47(10), 1378-1383.
- [1.18]. Masajada, J., & Dubik, B. (2001). Optical vortex generation by three plane wave interference. *Optics Communications*, 198(1), 21-27.
- [1.19]. Kumar, R., Singh Mehta, D., Sachdeva, A., Garg, A., Senthilkumaran, P., & Shakher, C. (2008). Generation and detection of optical vortices using all fiber-optic system. *Optics Communications*, 281(13), 3414-3420.
- [1.20]. Freund, I., & Freilikher, V. (1997). Parameterization of anisotropic vortices. *JOSA A*, 14(8), 1902-1910.
- [1.21]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Wada, A., Miyamoto, Y., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics express*, 14(1), 120-127.
- [1.22]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern. *Optics Express*, 14(22), 10195-10206.
- [1.23]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement. *Optics communications*, 248(1), 59-68.
- [1.24]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Pseudophase information from the complex analytic signal of speckle fields and its applications. Part I: Microdisplacement observation based on phase-only correlation in the signal domain. *Applied optics*, 44(23), 4909-4915.
- [1.25]. Ghai, D. P., Vyas, S., Senthilkumaran, P., & Sirohi, R. S. (2008). Detection of phase singularity using a lateral shear interferometer. *Optics and Lasers in Engineering*, 46(6), 419-423.
- [1.26]. Tiwari, S. C. (2009). Topological defects, geometric phases, and the angular momentum of light. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 120(9), 414-417.

- [1.27]. Tavrov, A. V., Ublinsky, D. V., & Andreev, V. A. (1997). Geometrical phases measurement with Michelson's interferometer for microsurface characterization. *computer simulation*, 2(2), 3.
- [1.28]. Masajada, J., (2003). Singular optics, In: 13th Polish-Czech-Slovak Conference on Wave and Quantum Aspects of Contemporary Optics, J. Nowak, M. Zajac, M. Masajada, SPIE, 66-74 (Vol. 5259)
- [1.29]. Grzegorzcyk, T. M., Kemp, B. A., & Kong, J. A. (2006). Trapping and binding of an arbitrary number of cylindrical particles in an in-plane electromagnetic field. *JOSA A*, 23(9), 2324-2330.
- [1.30]. Dholakia, K., Simpson, N. B., Padgett, M. J., & Allen, L. (1996). Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light. *Physical Review A*, 54(5), R3742.
- [1.31]. Masajada, J., Popiołek-Masajada, A., & Wieliczka, D. M. (2002). The interferometric system using optical vortices as phase markers. *Optics communications*, 207(1), 85-93.
- [1.32]. Masajada, J., Popiołek-Masajada, A., Frączek, E., & Frączek, W. (2004). Vortex points localization problem in optical vortices interferometry. *Optics communications*, 234(1), 23-28.
- [1.33]. Masajada, J. (2004). Small-angle rotations measurement using optical vortex interferometer. *Optics communications*, 239(4), 373-381.
- [1.34]. Popiołek-Masajada, A., Borwińska, M., & Frączek, W. (2006). Testing a new method for small-angle rotation measurements with the optical vortex interferometer. *Measurement Science and Technology*, 17(4), 653.

2.1 Introducción

En los últimos años ha habido un interés creciente en el comportamiento de los campos ópticos en las vecindades de las regiones donde la amplitud es cero, y en consecuencia la fase del campo en este punto es singular [2.1]. Las regiones con amplitud cero son típicamente líneas en el espacio 3-dimensional de la propagación de la luz, y las intersecciones de estas líneas con los diferentes planos de observación dan como resultado puntos aislados en el campo, los cuales en teoría pueden ser ubicados con precisión arbitraria. El estudio de estas singularidades en los campos, conocidas como singularidades de fase o vórtices ópticos se ha sintetizado en un área de la investigación conocida como óptica singular [2.1, 2.2].

Debido al éxito de la óptica singular en clasificar las singularidades de fase en campos coherentes, numerosos autores han extendido el estudio de la óptica singular a diferentes aplicaciones [2.3]. Algunas aplicaciones están basadas en la posibilidad de realizar un seguimiento de las singularidades de fase cuando el campo óptico sufre una ligera modificación, a condición que no se afecte notablemente la correlación entre los diferentes estados del campo [2.4].

En este capítulo se presentan las herramientas físicas y matemáticas básicas para el estudio de las singularidades de fase o vórtices ópticos, a fin de lograr sintetizar y caracterizar las diferentes singularidades de fase dentro de los campos ópticos. En particular, nos centramos en las singularidades de fase que están presentes en patrones de speckle, de los cuales se registra la intensidad y a partir de esta se genera una señal analítica compleja empleando diferentes transformaciones integrales lineales [2.5]. La señal obtenida es entonces procesada digitalmente para obtener las propiedades estructurales de los núcleos de las singularidades, las cuales se estudiarán posteriormente en algunas aplicaciones metrológicas.

2.2 Transformaciones integrales lineales

Las transformaciones integrales lineales han sido empleadas en múltiples áreas del conocimiento tales como la mecánica cuántica, la teoría cuántica de campos y la teoría cuántica de dispersión, la visco-elasticidad, la teoría de circuitos, la teoría dieléctrica, la resonancia magnética, entre muchas otras [2.6]

En general, las transformaciones integrales convierten una función dada $f(z)$ de la variable z a otra función $g(w)$ de la misma u otra variable. Estas se pueden escribir de la forma:

$$g(w) = \int_{C_n} K_n(w, z) f(z) dz \quad (2.1)$$

donde K_n con $n=1,2$ son funciones genéricas de las variables w y z conocidas como el *kernel* de transformación tanto para la transformada cuanto su inversa respectivamente, w y/o z pueden ser de valores reales o complejos y C_1 denota el camino en el plano complejo. En particular, si $f(z)$ es conocida, y además K_1 y C_1 están especificados, entonces $g(w)$ puede ser obtenida si la función es integrable. Por otro lado, esta ecuación es también una integral lineal para $f(z)$ cuando $g(w)$, K_1 y C_1 son especificados. Para cada transformación integral existe una relación que convierte la función transformada en la función original, esta relación usualmente es también una transformación integral que puede ser escrita en términos de operaciones algebraicas. Para fines prácticos, existe una correspondencia biunívoca entre la función y su transformada, y entre la función transformada y la original [2.5].

Cuando los *kernel* K_1 y K_2 son iguales y los caminos de integración son los mismos para la transformación y su inversa, las relaciones entre $f(z)$ y $g(w)$ son recíprocas y son denominadas funciones conjugadas. Cuando estas cantidades son iguales salvo por un signo menos como en el caso de la transformada Hilbert, las relaciones son contra-recíprocas.

Normalmente los campos ópticos tienen asociada una fase ad-hoc módulo 2π . Aunque existen diversas técnicas de recuperación de fase a partir de registros de intensidad, en general son difíciles de obtener experimentalmente [2.7]. Debido a esta dificultad, se recurre a las transformaciones integrales lineales a fin de obtener un mapa con una estructura similar a la de la fase. Cuando al campo se le asocia una función compleja es posible generar este mapa de naturaleza similar al de la fase, a esta distribución se le conoce como pseudo-fase [2.8].

2.2.1 Transformada de Fourier

Los problemas de la óptica de Fourier comúnmente emplean dos dimensiones espaciales. La transformada analítica de Fourier de una función g de dos variables x y y está dada por:

$$G(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (2.2)$$

donde $G(f_x, f_y)$ es el resultado de la transformación y f_x y f_y son variables independientes en el dominio de las frecuencias asociadas con las variable x y y en el dominio del espacio, respectivamente. Para que esta operación pueda ser realizada debe cumplir con tres condiciones fundamentales: g debe ser integrable sobre el rango finito de x y y ; g debe tener un número finito de discontinuidades, y g no debe contener un número infinito de discontinuidades. Goodman ilustra que en un número importante de casos, una o más de estas condiciones puede ser desestimada, y se puede emplear una aproximación de la transformada generalizada usando funciones matemáticas idealizadas para encontrar representaciones de la transformada útiles [2.9].

2.2.2 Transformada Riesz

El concepto de señal analítica fue introducido en la teoría de la comunicación por Gabor para señales 1-dimensionales [2.5]. Usualmente, una señal analítica está compuesta de dos partes, la parte real de la señal original a la que se le subtrae el valor medio, y la parte imaginaria que se corresponde con la transformada Hilbert de la parte real. A la hora de sintetizar patrones 2-

dimensionales se encuentra una anisotropía en la señal analítica cuando se emplea la transformada Hilbert, esto genera una dependencia espacial con la dirección [2.10].

Para obtener una señal isotrópica 2-dimensional de un patrón de speckle se reemplaza la transformada parcial de Hilbert por una transformada Riesz. Para dicho fin, suponga que $I(x, y)$ es la componente AC de la distribución de intensidad original del patrón, obtenida luego de substrarle el valor medio e $\mathfrak{J}(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier del mismo. Se puede relacionar a $I(x, y)$ con su respectiva señal analítica $\tilde{I}(x, y)$ a través de un filtro vórtice, que no es más que un disco espiral de fase pura como se ilustra en la Fig. 2.1. Así, la señal analítica 2-dimensional para un registro de intensidad dado queda definida como:

$$\tilde{I}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(f_x, f_y) \mathfrak{J}(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x, f_y y)} df_x df_y \quad (2.3)$$

donde $V(f_x, f_y)$ es una función espiral de fase con una estructura vórtice en el dominio de las frecuencias definida como:

$$V(f_x, f_y) = \frac{f_x + if_y}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} = e^{i\beta(f_x, f_y)} \quad (2.4)$$

donde la fase $\beta \equiv \tan^{-1}(f_y / f_x)$ es el ángulo polar en el dominio de las frecuencias espaciales. Esta función espiral de fase tiene como propiedad que cualquier sección a través del origen es una función signo con un salto de fase de π [2.11].

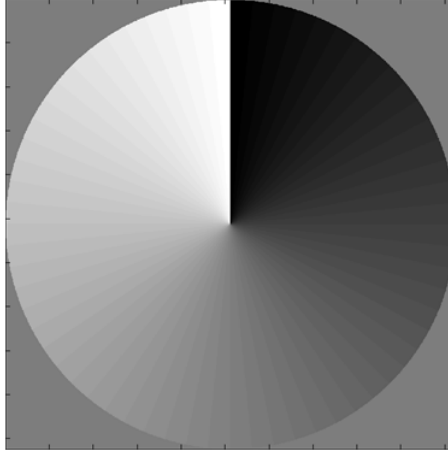


Fig. 2.1 Representación en fase módulo 2π de disco espiral de fase pura empleada en la transformada Riesz

2.2.3 Transformada Laguerre-Gauss

Partiendo del hecho que la transformada Riesz es una función de fase pura con una estructura vórtice en el dominio de las frecuencias como fue ilustrada anteriormente, y que en la misma no se emplea la información de amplitud de la transformada de Fourier, se extiende el uso de la misma por medio de la transformada Laguerre-Gauss, la cual incluye un filtro pasa banda en el *kernel* de la transformación. De manera análoga que con la transformada Riesz, suponga que $I(x, y)$ es la distribución de intensidad original del patrón de speckle y su transformada de Fourier es $\mathfrak{J}(f_x, f_y)$. Se puede relacionar a $I(x, y)$ con su respectiva señal analítica $\tilde{I}(x, y)$ a través de un filtro Laguerre-Gauss, en este caso la representación analítica para un registro de intensidad dado se presenta en la ecuación (2.5), y en donde $LG(f_x, f_y)$ es el filtro de Laguerre-Gauss que está definido como se presenta en la ecuación (2.6).

$$\tilde{I}(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} LG(f_x, f_y) \mathfrak{J}(f_x, f_y) e^{2\pi i(f_x x, f_y y)} df_x df_y \quad (2.5)$$

$$LG(f_x, f_y) = (f_x + if_y) e^{-\left(f_x^2 + f_y^2\right)\omega} = \rho e^{-\left(\rho^2 / \omega^2\right)} e^{i\beta} \quad (2.6)$$

donde $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ y $\beta \equiv \tan^{-1}(f_y / f_x)$ son las coordenadas polares en el dominio de las frecuencias espaciales. Asimismo, la densidad de

singularidades de fase puede ser controlada al escoger un ancho de banda apropiado en la función de Laguerre-Gauss, representada por ω [2.10].

Adicional a la ventaja de la isotropía espacial de la transformada Riesz a partir del uso de la función espiral de fase con una función signo a través de cualquier sección del origen, la transformada Laguerre-Gauss tiene la característica de excluir automáticamente cualquier componente DC del patrón a transformar. La ecuación (2.6) presenta en su amplitud una forma de toro ilustrada en la Fig 2.2, la cual sirve como filtro pasa banda. Dicho filtro excluye las componentes de alta frecuencia espacial que dan lugar a singularidades de fase inestables. Siendo estas singularidades que por su perfil de intensidad presentan un comportamiento lineal en su geometría, y por tanto no satisfacen por completo los requerimientos de estabilidad para su correcta discriminación.

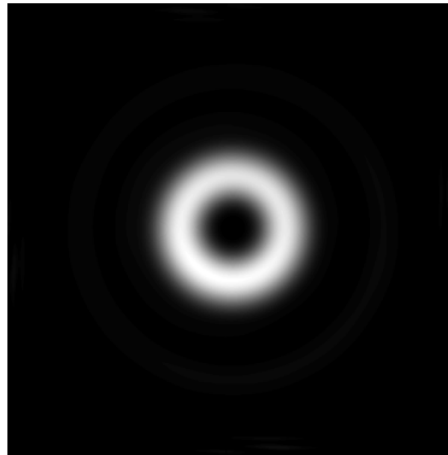


Fig.2.2 Representación la amplitud del filtro en la transformada Laguerre-Gauss, la forma de toro sirve como filtro pasa-banda en la misma.

2.3 Patrones de speckle

Cuando la luz láser es reflejada por una superficie rugosa, un patrón granular fino de alto contraste es observado. Adicionalmente, se observa que dicho patrón existe en el espacio y su intensidad es en promedio uniforme, este fenómeno se conoce con el nombre speckle. El speckle también se observa cuando la luz láser es difractada por una superficie difusora, debido a que en esta superficie existen diferentes caminos ópticos que recorre la luz al

atravesarla, y que varían significativamente en la misma escala de la longitud de onda.

El speckle aparece entonces en una señal cuando está se compone de la suma de múltiples componentes complejas independientes, dichas componentes pueden tener amplitudes aleatorias o fases aleatorias en el campo complejo [2.12]. Un patrón de speckle se genera a partir del arreglo experimental de la Fig. 2.3, donde una onda plana coherente proveniente de un láser, es transmitida a través de un vidrio con una de sus caras rugosa (difusor). La propagación de la luz desde el difusor hasta un punto de observación a una distancia z da como resultado la superposición coherente de las contribuciones independientes, asociadas a los diversos centros dispersores de la superficie difusora.

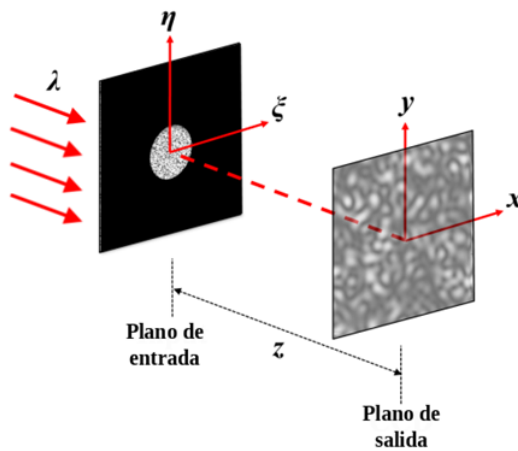


Fig. 2.3 Arreglo experimental para la obtención de patrones de speckle. En el plano de entrada se sitúa un arreglo de un difusor y una máscara circular y la luz difractada por este se propaga hasta un plano de observación situado a una distancia z .

Las amplitudes y fases correspondientes a las distribuciones originales presentan diferencias entre sí, y no exhiben regularidad alguna, las condiciones de interferencia de la multiplicidad de ondas varían al pasar de un lugar a otro del plano de observación, dando lugar a la formación del speckle.

2.4 Singularidades de fase

La función de densidad de probabilidad de la intensidad de un patrón de speckle completamente desarrollado tiene su máximo en el valor de intensidad

cero como se muestra en la figura Fig. 2.4. Sin embargo, la probabilidad que ocurra un valor específico de intensidad en un patrón de speckle es cero; pero la probabilidad de que dicho valor este en un intervalo de intensidades en el patrón es diferente de cero [2.12]. Esto implica que en un patrón de speckle un evento cuya probabilidad es cero puede ocurrir. En tal virtud, la ocurrencia de un valor de intensidad exactamente cero en algún punto del patrón de speckle es un evento que puede ocurrir, y de hecho ocurre. En los puntos de dicha ocurrencia tiene lugar una singularidad de fase o vórtice óptico.

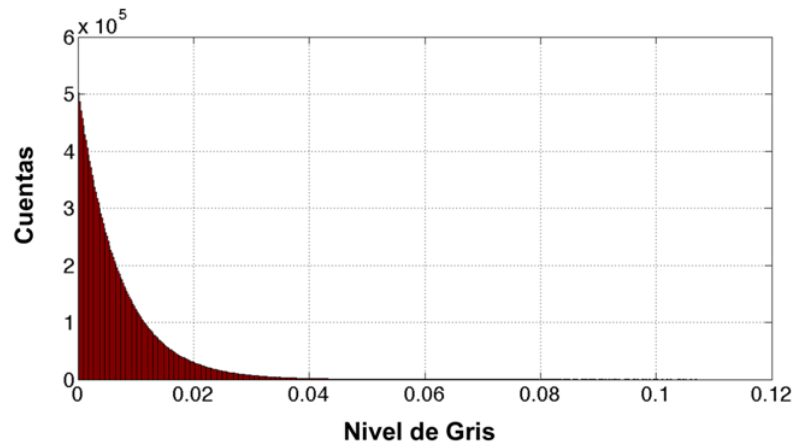


Fig. 2.4 Histograma de la distribución de valores de intensidad para un patrón de speckle completamente desarrollado.

En el lugar exacto de intensidad cero la fase no está definida, donde no hay luz, no puede haber una fase asociada. Sin embargo, en las vecindades de dicho cero de intensidad, la fase tiene propiedades interesantes.

Para que ocurra un cero de intensidad, tanto la parte real cuanto imaginaria del campo deben ser cero en el mismo punto del espacio. A fin de ilustrar los lugares donde dichos ceros ocurren la Fig. 2.5 muestra en la primera fila la intensidad y fase para un patrón de speckle simulado (Anexo A.1, A.2) y la pseudo-intensidad y pseudo-fase cuando se emplea la transformada Laguerre-Gauss, en la segunda fila se presentan las respectivas partes real e imaginaria de ambos campos, en la cuarta fila están los contornos del valor cero de cada una de las partes, en rojo los contornos asociados a la parte real y en azul a la imaginaria. Finalmente, en la última fila se presentan los cruces por cero de ambos y la ubicación de los vórtices en fase y en pseudo-fase.

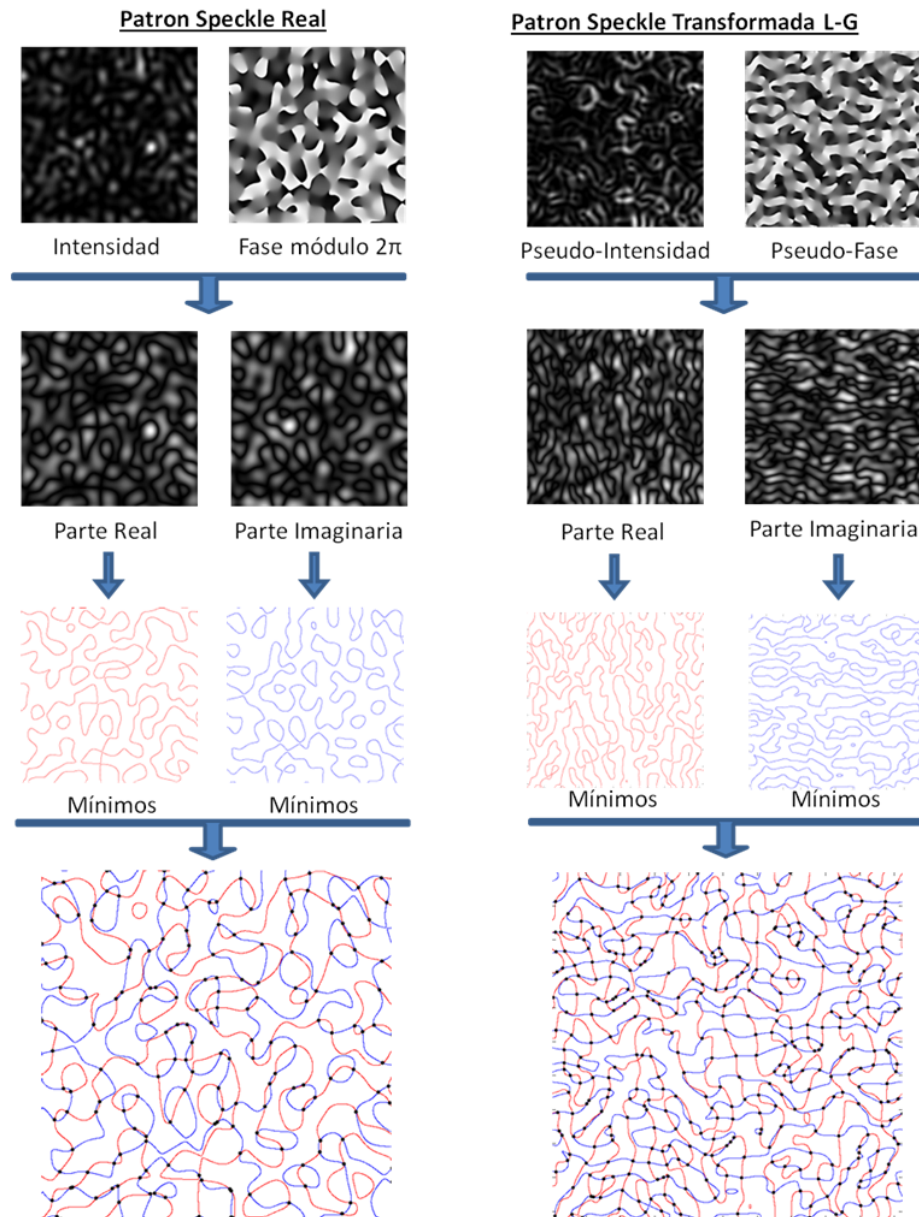


Fig. 2.5 Localización de vórtices ópticos a partir de los mínimos de la parte real e imaginaria.

Dependiendo de la dirección en la cual las partes real e imaginaria cruzan por cero se pueden establecer dos diferentes formas en las que la fase circula por cero, horaria y anti-horariamente. En la Fig. 2.6 se ilustra la circulación de la fase alrededor de dos singularidades de fase en ambos sentidos, dando la fase valores en escala de grises para píxeles vecinos a las singularidades simuladas. Es esta circulación alrededor de los puntos de singularidad la que ha conducido llamar a estas singularidades vórtices. Así mismo, cuando la fase

alrededor de la singularidad circula en sentido anti-horario se le conoce como vórtice positivo y en cuando circula en sentido horario se le conoce como vórtice negativo [2.8].

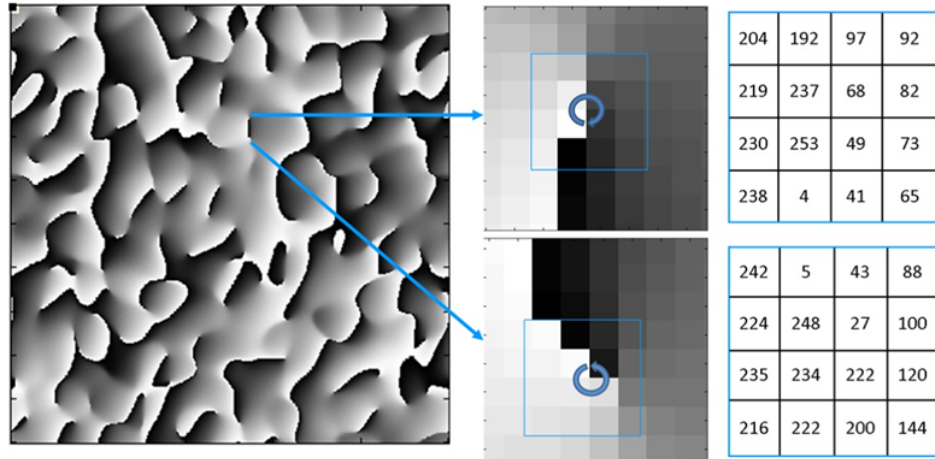


Fig. 2.6 Vista aumentada de una singularidad de fase con diferente carga topológica, en la columna derecha se observan los valores numéricos que tienen los píxeles vecinos a la discontinuidad de fase

2.5 Estructura del núcleo de las singularidades de fase.

De la misma manera que el speckle asociado con un objeto rugoso coherentemente iluminado puede ser usado como marcador, las singularidades de fase distribuidas aleatoriamente en los mapas de fase o pseudo-fase pueden usarse como marcas únicas en la superficie del objeto [2.10]. Las singularidades de fase están localizadas en el centro de un contorno elíptico de amplitud, el cual está en la intersección de los cruces por cero de las partes real e imaginaria de la señal compleja. En este punto la fase presenta un comportamiento característico, tiene una estructura elíptica de $2\pi m$ donde m es un número que representa la carga topológica de la singularidad de fase. En la Fig. 2.7 se presentan la intensidad y fase para vórtices con valores de $m=1, 2$ y 4 .

El núcleo de cada una de las singularidades está definido por: la excentricidad e ; el ángulo formado por el cruce por cero de la parte real e imaginaria del campo θ_{RI} ; la carga topológica q y la vorticidad definida como

$$\Omega \equiv \nabla \left\{ \Re \{ I(x,y) \} \times \nabla \left\{ \Im \{ I(x,y) \} \right\} \right\} .$$

Normalmente la parte real e

imaginaria del campo complejo de un patrón de speckle 2-dimensional en las vecindades de una singularidad de fase se puede definir como:

$$\Re[I(x, y)] = a_r x + b_r y + c_r \quad (2.7)$$

$$\Im[I(x, y)] = a_i x + b_i y + c_i \quad (2.8)$$

donde los coeficientes a_k, b_k, c_k ($k = r, i$) son obtenidos mediante el método de ajuste de mínimos cuadrados a partir de los valores complejos detectados en los alrededores de cada singularidad de fase. A partir de la interpolación de la parte real e imaginaria de la señal compleja que representa al patrón de speckle se puede obtener un perfil detallado de la fase o la pseudo-fase alrededor de la singularidad de fase.

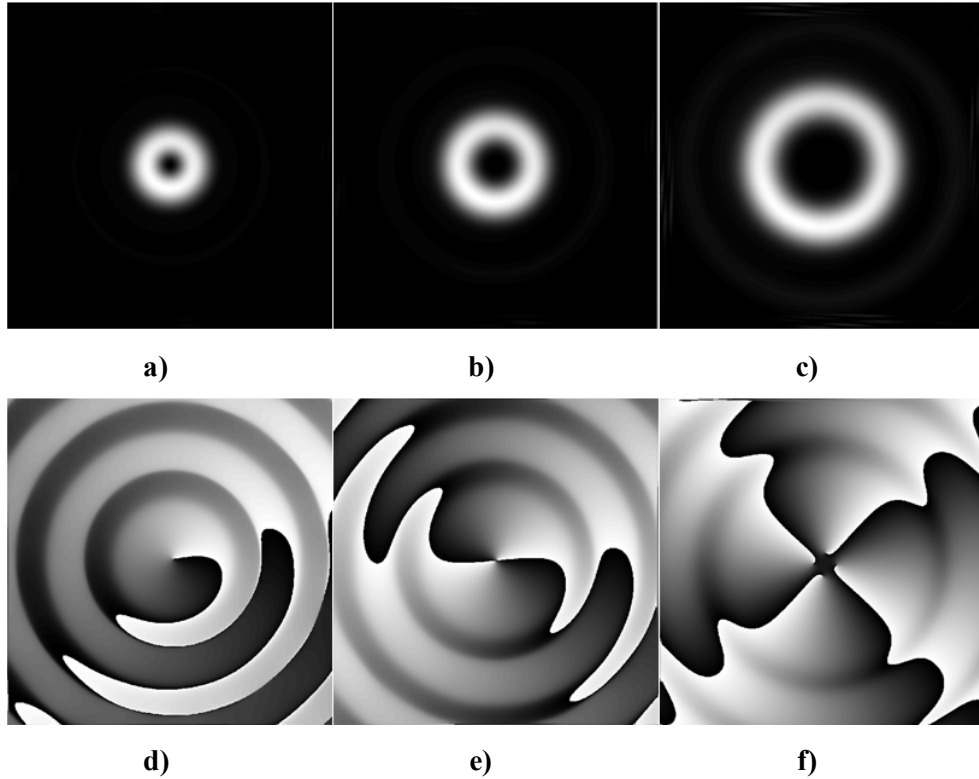


Fig. 2.7 Singularidades de fase para vórtices En a) y d) se presentan la intensidad y fase respectivamente para un vórtice de carga topológica 2π , en b) y e) para uno de carga 4π , y en c) y f) para uno de carga 8π .

Basado en sus definiciones, los parámetros geométricos y físicos que caracterizan cada una de las singularidades de fase pueden ser definidos en términos de los coeficientes de ajuste como:

$$e = \sqrt{1 - \frac{(a_r^2 + b_r^2 + a_i^2 + b_i^2) - \sqrt{(a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2)^2 + 4(a_r b_r + a_i b_i)^2}}{(a_r^2 + b_r^2 + a_i^2 + b_i^2) + \sqrt{(a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2)^2 + 4(a_r b_r + a_i b_i)^2}}} \quad (2.9)$$

$$\theta_{RI} = \begin{cases} \left| \tan^{-1} \left[(a_r b_i - a_i b_r) / (a_r a_i + b_r b_i) \right] \right| & |\theta_{RI}| < \pi / 2 \\ \pi - \left| \tan^{-1} \left[(a_r b_i - a_i b_r) / (a_r a_i + b_r b_i) \right] \right| & |\theta_{RI}| > \pi / 2 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\Omega = |a_r b_i - a_i b_r| \quad (2.11)$$

$$q = \text{sgn}(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z) = \text{sgn}(a_r b_i - a_i b_r) \quad (2.12)$$

Estas propiedades estructurales del núcleo sirven como identificadores propios de las singularidades de fase, lo que permite emplearlas como marcadores del campo. Dichos marcadores en teoría pueden ubicarse dentro del campo con una precisión arbitraria, pero en la práctica debido a las condiciones experimentales la localización presenta restricciones en cuanto a la precisión de ubicación [2.4]. Sin embargo, existe un amplio número de aplicaciones basadas la posibilidad de la localización y seguimiento de las singularidades de fase en un campo óptico a partir de las propiedades estructurales de cada núcleo.

2.6 Esfera de Poincaré

Una distribución de speckle aleatoria imprime marcas en la superficie de un objeto iluminado con luz coherente, las singularidades de fase se distribuyen de manera aleatoria en los mapas de fase o pseudo-fase del patrón de speckle y a su vez imprimen marcas en la superficie del objeto. Basados en la información de la estructura de los núcleos de las singularidades de fase Wang et. al han propuesto un método para identificarlas descrito en la sección anterior [2.10]. Sin embargo en trabajos posteriores han llegado a la conclusión que esta no es la manera más intuitiva matemáticamente [2.13].

Una forma alternativa de identificar las singularidades de fase está basada en el hecho que la estructura local de las singularidades de fase depende solo

del gradiente del campo de la señal de Laguerre-Gauss. Usualmente, el cambio de la fase o la pseudo-fase alrededor de las singularidades de fase no es uniforme, está en función del ángulo azimutal, y los contornos de amplitud describen elipses altamente anisotrópicas. En las inmediaciones de una singularidad de fase, la parte real e imaginaria del campo complejo, sintetizado empleando la transformada de Laguerre-Gauss, de un patrón de speckle pueden ser expresadas como se presenta en las ecuaciones (2.7) y (2.8), respectivamente. El campo vectorial complejo $\nabla\tilde{g}$ que está asociado con el gradiente de la señal Laguerre-Gauss puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}\nabla\tilde{g} &= (a_r + ia_i)\hat{x} + (b_r + ib_i)\hat{y} \\ &= (a_r\hat{x} + b_r\hat{y}) + i(a_i\hat{x} + b_i\hat{y})\end{aligned}\quad (2.13)$$

donde \hat{x} y \hat{y} son los vectores unitarios. Es posible emplear una serie de parámetros similares a los de Stokes para la representación del campo vectorial complejo $\nabla\tilde{g}$. Este campo comparte características geométricas similares a las asociadas al campo vectorial de polarización. De esta forma, las elipses anisotrópicas asociadas a las singularidades de fase, definidas en términos de los parámetros de $\nabla\tilde{g}$, pueden ser descritas como:

$$S_0 = a_r^2 + b_r^2 + a_i^2 + b_i^2 \quad (2.14)$$

$$S_1 = a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2 \quad (2.15)$$

$$S_2 = 2(a_r b_r + a_i b_i) \quad (2.16)$$

$$S_3 = 2(a_r b_i - a_i b_r) \quad (2.17)$$

Estas definiciones son matemáticamente análogas a los parámetros de Stokes para describir la polarización, sin embargo, no guardan ninguna relación física con los mismos. Un ejemplo de esto sería el signo de la función S_3 , que se corresponde con el signo de la carga topológica de la singularidad de fase. Las ecuaciones anteriores permiten deducir que de este conjunto de parámetros solo 3 de ellos son independientes, ya que satisfacen la identidad:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (2.18)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que el usado en el caso de la polarización, se pueden representar los parámetros de las elipses mediante las ecuaciones:

$$S_1 = S_0 \cos(2\chi)\cos(2\varphi) \quad (2.19)$$

$$S_2 = S_0 \cos(2\chi)\sin(2\varphi) \quad (2.20)$$

$$S_3 = S_0 \sin(2\chi) \quad (2.21)$$

donde φ es el ángulo de azimut entre el semi-eje mayor de la elipse y el eje x, y χ es el ángulo de elipticidad, definido por la tangente inversa de la relación entre la longitud de los semi-ejes de la elipse como se presenta en la Fig. 2.8 a). Una representación geométrica simple de todos los parámetros S_n con $n = 1, 2, 3$ es mediante la generación de una superficie esférica 3-dimensional de radio unitario definido como:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = S_0^{-1} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

La Fig. 2.8 b) muestra las coordenadas para la representación en la esfera de Poincaré de las estructuras elípticas anisotrópicas del núcleo de una singularidad de fase. En esta, las variables s_1, s_2, s_3 pueden ser consideradas como las coordenadas cartesianas del punto \vec{S} sobre la superficie de la esfera de radio unitario, y 2φ y 2χ son las coordenadas angulares de este punto.

De esta forma, a cada posible elipse de la estructura del núcleo de las singularidades de fase, le corresponde un punto en la superficie de la esfera, y viceversa. La estructura del núcleo única es la que permite usarlo como marcador de la singularidad de fase, además permite su correcta identificación y seguimiento a través de una transformación.

Para efectos de la metrología de vórtices ópticos, las singularidades de fase que son de interés son aquellas que se ubican sobre los polos de la esfera de Poincaré. En general, estas singularidades son más numerosas cuando se analiza un patrón de speckle en fase o pseudo-fase, adicionalmente la amplitud de la estructura del núcleo de estas tiende a ser circular, lo que permite su correcta identificación. Cuando se analizan los cruces por cero de los planos real e imaginario del campo en las inmediaciones de la singularidad estos se

cortan en un punto, lo que hace posible la localización de la singularidad. En contraposición, cuando se analizan de igual manera las singularidades que se ubican en el ecuador, los cruces por cero de los planos se cortan en una línea recta, lo que dificulta su localización. Adicionalmente, estas singularidades tienden a desaparecer cuando una transformación tiene lugar por lo que son conocidas como singularidades inestables.

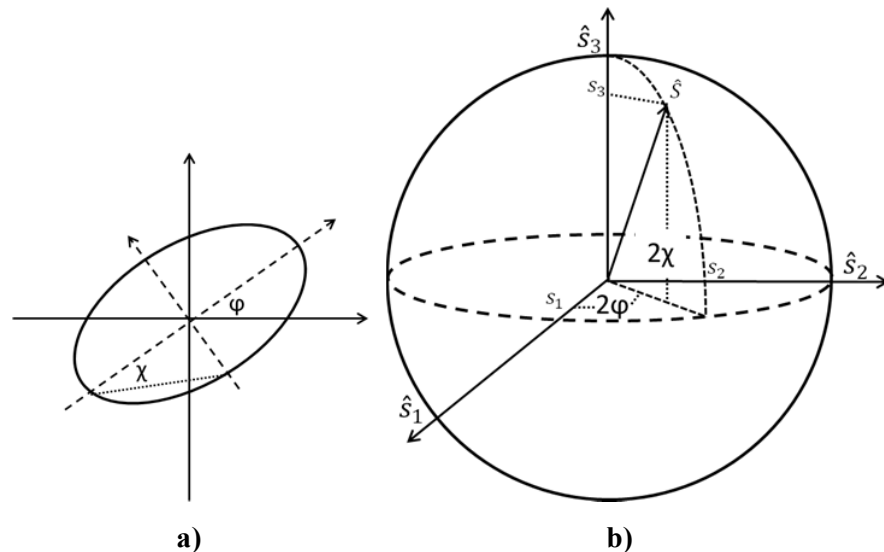


Fig. 2.8 Parámetros para la representación de la esfera de Poincaré para describir la estructura del núcleo de las singularidades de fase. En a) contorno de amplitud elíptico, y en b) esfera de Poincaré para los diferentes contornos de amplitud de las singularidades

2.7 Bibliografía

- [2.1]. Berry, M. V. (1998, August). Much ado about nothing: optical distortion lines (phase singularities, zeros, and vortices). In International Conference on Singular Optics (pp. 1-5). International Society for Optics and Photonics.
- [2.2]. Mokhun, I. I. (2007). Introduction to linear singular optics. Optical correlation techniques and applications, 1-132.
- [2.3]. Berkhout, G. C. G., & Beijersbergen, M. W. (2009). Using a multipoint interferometer to measure the orbital angular momentum of light in astrophysics. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 11(9), 094021.
- [2.4]. Angel-Toro, L., Sierra-Sosa, D., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2012). Speckle decorrelation influence on measurements quality in vortex metrology. Optics Communications, 285(21), 4312-4316.

- [2.5]. Debnath, L., & Bhatta, D. (2010). Integral transforms and their applications. CRC press.
- [2.6]. Macdonald, J. R., & Brachman, M. K. (1956). Linear-system integral transform relations. *Reviews of modern physics*, 28(4), 393-422.
- [2.7]. Fienup, J. R. (2013). Phase retrieval algorithms: a personal tour [invited]. *Applied Optics*, 52(1), 45-56.
- [2.8]. Freund, I., & Freilikher, V. (1997). Parameterization of anisotropic vortices. *JOSA A*, 14(8), 1902-1910.
- [2.9]. Voelz, D. G. (2011). Computational fourier optics: a MATLAB tutorial. Spie Press.
- [2.10]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern. *Optics Express*, 14(22), 10195-10206.
- [2.11]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Wada, A., Miyamoto, Y., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics express*, 14(1), 120-127.
- [2.12]. Goodman, J. W. (2007). *Speckle phenomena in optics: theory and applications* (Vol. 1).
- [2.13] Wang, W., Dennis, M. R., Ishijima, R., Yokozeki, T., Matsuda, A., Hanson, S. G., & Takeda, M. (2007). Poincaré sphere representation for the anisotropy of phase singularities and its applications to optical vortex metrology for fluid mechanical analysis. *Optics express*, 15(17), 11008-11019.

3.1 Introducción

En la actualidad existen diversas técnicas de metrología óptica, un ejemplo de ellas es la fotografía speckle, la cual permite realizar análisis cuantitativos de los desplazamientos relativos de dos o varias distribuciones de intensidad de speckle [3.1]. Esto es posible a partir de la comparación de las imágenes correspondientes a los diferentes estados de una superficie difusora; por ejemplo, cuando se registran los estados inicial y final de los patrones de speckle, luego que un movimiento rígido [3.2] o una deformación tienen lugar [3.3].

En estas técnicas, las diferentes intensidades registradas se superponen, y usando los métodos propios de la óptica de Fourier es posible sintetizar los diferentes sistemas de franjas obtenidos, de cuyos períodos y orientaciones se determina la magnitud y dirección del desplazamiento relativo de la superficie difusora [3.4]. Cuando se analizan desplazamientos uniformes en el plano, la información relevante puede ser obtenida a partir de transformadas de Fourier de las imágenes que fueron superpuestas. Sin embargo, para el análisis de desplazamientos locales, un procedimiento de filtrado espacial debe ser implementado en el plano de la transformada de Fourier para producir franjas isotéticas (de igual desplazamiento) [3.5]. En ambos casos, el procedimiento de análisis puede ser llevado a cabo por medio de técnicas de procesamiento analógicas o digitales.

La metrología de vórtices representa otra alternativa para determinar los desplazamientos relativos entre dos patrones de speckle o similares. Sin embargo, estos desplazamientos deben ser implementados por medio de diferentes operaciones digitales [3.6-3.9]. De igual manera que en la fotografía speckle convencional, dos distribuciones aleatorias de intensidad, correspondientes a dos estados diferentes de la superficie difusora a analizar,

son registradas. Luego para cada una de estas distribuciones se obtiene una señal compleja analítica empleando una transformación integral lineal (Laguerre-Gauss, Riesz, Hilbert, entre otras). Esto permite obtener componentes reales e imaginarias de cada una de las señales, y generar mapas de pseudo-fase 2-dimensionales, en las cuales se pueden localizar y parametrizar singularidades de fase o vórtices, empleando diferentes técnicas computacionales.

En algunas aplicaciones es posible obtener la información de fase módulo 2π del campo [3.10], esto hace innecesaria la generación de mapas de pseudo-fase a partir de la intensidad de los patrones. A diferencia de los patrones en donde se hace necesario la generación de patrones de pseudo-fase, en los mapas de fase módulo 2π no se tiene control sobre la distribución de frecuencias, lo que implica que los efectos no están igualmente distribuidos sobre los valores de la función de fase.

Específicamente, la localización de las posiciones con precisión sub-píxel así como las respectivas cargas topológicas y estructuras del núcleo se obtienen mediante la síntesis de la información de los píxeles vecinos de cada singularidad. Posteriormente, los desplazamientos relativos se obtienen mediante el análisis de histogramas donde se ordenan las distancias medidas entre los diferentes pares de vórtices homólogos. Siendo estos últimos aquellos que comparten la misma carga topológica y tienen propiedades estructurales del núcleo similares. Las propiedades que se evalúan son la excentricidad, la vorticidad y los ángulos entre las líneas que cruzan por cero las partes real e imaginaria de la señal analítica.

En las aplicaciones en las que se emplean patrones con propiedades estadísticas similares a los de los speckle, los efectos de la decorrelación se limitan a aquellos asociados con las discontinuidades que se salen de la región de inspección debido al movimiento. Sin embargo, al emplear patrones de speckle las limitaciones impuestas por la decorrelación del mismo hacen difícil la síntesis de dichos patrones empleando las herramientas convencionales de la metrología de vórtices.

En este capítulo se presentan los resultados relacionados con el estudio del efecto de la decorrelación, cuando se analizan patrones de speckle empleando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices, tanto en registros para los cuales se cuenta con la información de fase módulo 2π del campo cuanto aquellos en los que es necesario la generación de mapas de pseudo-fase a partir de registros de intensidad. Para dicho fin, se emplean distribuciones de speckle generadas por la difracción de la luz a partir de un difusor plano, el cual se desplaza lateralmente entre dos registros sucesivos.

3.2 Técnicas convencionales de metrología de vórtices

La generación de la señal analítica correspondiente a cada distribución de speckle fue realizada por medio de la implementación de una transformada Riesz. Para la localización precisa de los vórtices en los mapas de pseudo-fase se adaptó el algoritmo de residuos propio de las técnicas de desenvolvimiento de fase. (Anexo A.3)

A fin de estimar con precisión sub-píxel la posición de los vórtices, se emplearon las técnicas convencionales de la metrología de vórtices, basada en la evaluación de los cruces por cero de las partes real e imaginaria de la función analítica obtenida para cada patrón. El seguimiento de vórtices homólogos se hace mediante la carga topológica y las propiedades estructurales de los núcleos de los vórtices.

3.2.1 Efecto de la decorrelación en las medidas

La decorrelación asociada a los desplazamientos en el plano puede ser descrita en términos de una combinación de tres diferentes factores. Primero, a medida que los desplazamientos se incrementan la región iluminada del difusor cambia ligeramente, y consecuentemente cambia el conjunto de radiadores iluminados y que están asociados con la interferencia en el plano de observación. Como consecuencia la forma de los speckle cambia ligeramente entre un registro y otro.

En aplicaciones como la fotografía speckle este efecto no tiene una influencia significativa sobre la calidad de las franjas y las medidas. Sin embargo, en el contexto de la metrología de vórtices, los cambios asociados con los speckle en general modifican significativamente las propiedades estructurales de los núcleos de las singularidades de fase. Estas distorsiones hacen difícil la asignación de las diferentes singularidades de fase con su respectiva contraparte, lo que afecta notablemente las medidas. A medida que las distribuciones de speckle se decorrelacionan, las singularidades de fase en los mapas de fase correspondientes migran a posiciones cercanas [3.11]. Si dichos patrones de speckle están ligeramente decorrelacionados es posible establecer con relativa facilidad parejas de vórtices homólogos, si la decorrelación crece se complica notablemente establecer los pares, para speckle objetivo y subjetivo [3.12-3.14].

Segundo, la decorrelación en las distribuciones de speckle conduce a la creación y aniquilación de vórtices de diferentes cargas topológicas en las redes de vórtices, lo que hace que no se correspondan con una contraparte homóloga al realizar el rastreo de parejas de vórtices entre registros.

Tercero, el flujo de las singularidades de fase a través de los contornos del registro causa una decorrelación adicional, por ejemplo, el desplazamiento de un difusor implica que algunos de los vórtices migren a regiones fuera del área de registro. Esto, hace imposible encontrar sus respectivas contrapartes en el otro mapa de pseudo-fase.

Aunque estos tres efectos influyen en la calidad de las medidas, los cambios en la forma de los speckle y consecuentemente las propiedades estructurales de los núcleos, son los que tienen el efecto más negativo en los resultados obtenidos al aplicar los algoritmos convencionales de análisis en la metrología de vórtices. De hecho, se encontró que a medida que la decorrelación entre los patrones de speckle aumenta, de igual forma la confiabilidad de las medidas realizadas por estas técnicas disminuye, debido a la dificultad de obtener histogramas de alta calidad en circunstancias más restrictivas.

3.2.2 Arreglo experimental

Los arreglos experimentales para producir patrones de speckle con y sin efecto de la decorrelación se presentan en la Fig. 3.1. Un haz colimado de un láser de He-Ne (632,8 nm) es empleado como fuente de iluminación. En la Fig. 3.1 a), el haz incide directamente en una máscara opaca con una apertura circular unida a un difusor ubicado inmediatamente detrás de la máscara. Así en un plano de observación a una distancia z del difusor se forma una distribución de speckle objetivo, y se sitúa una cámara CCD (sigla en inglés para: charge-coupled device) para su registro. Debido a que el arreglo de máscara y difusor se mueven en conjunto, el mismo set de radiadores genera los patrones de speckle antes y después del desplazamiento, por lo que no hay efectos de decorrelación notables entre ambos patrones. En la Fig. 3.1 b) la máscara con la apertura y el difusor no se encuentran unidos y se desplaza la máscara con respecto al difusor, por lo que cambia el set de radiadores y hay efecto de decorrelación entre los patrones de speckle obtenidos antes y después del desplazamiento.

En ambos arreglos, un actuador análogo/digital piezoeléctrico con un paso de 30nm es empleado para producir desplazamientos en el plano, y se usa una apertura circular de diámetro 5mm y una distancia entre el difusor y el plano de registro z de 50 cm. Esto produce un speckle con un tamaño promedio transversal de 77 μm . En cada uno de los arreglos se registran dos imágenes de intensidad de patrones de speckle correspondientes con los estados antes y después del desplazamiento. La magnitud del desplazamiento entre los registros es $\Delta x = 30 \mu\text{m}$, menor que la mitad del tamaño transversal del speckle, y que se corresponde con una distancia de 2 píxeles en la imagen.

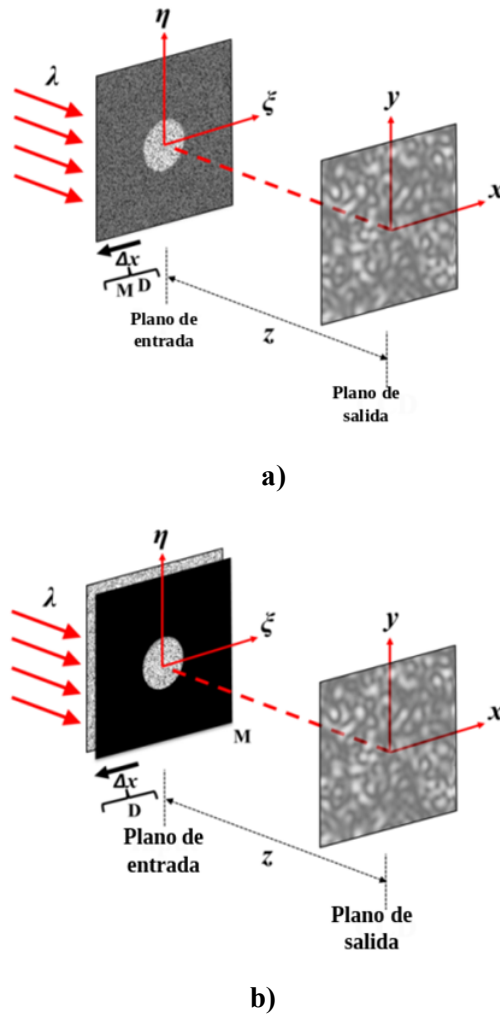


Fig. 3.1 Arreglos experimentales para el registro de imágenes de speckle antes y después de un desplazamiento en el plano, en a) patrones no decorrelacionados y en b) decorrelacionados, donde λ : longitud de onda, D : difusor, M : máscara con apertura circular, z : distancia de propagación y Δx : magnitud de desplazamiento en el plano.

3.2.3 Resultados y análisis de histogramas

Cada imagen es procesada usando la transformada Riesz, con el fin de obtener un mapa de pseudo-fase 2-dimensional donde se encuentran las singularidades de fase asociadas. La elección de dicha transformada se debe a su comportamiento isotrópico y la simplicidad de su implementación. Aunque la transformada Laguerre-Gauss tiene ventajas en comparación con la transformada Riesz [3.7, 3.8], tales como la distribución óptima de las singularidades de fase, la reducción del ruido de alta frecuencia que previene la generación de vórtices inestables, y controla la densidad de las

singularidades, se emplea la transformada Riesz a fin de reducir el número de parámetros a tener en cuenta en la realización de los experimentos. Esta elección no tiene una relevancia especial en este contexto, debido a que el método consiste en una manera de procesamiento de la información de redes de vórtices una vez que esta ha sido obtenida de los registros de intensidad.

Para localizar dichas singularidades, se empleó una versión modificada del algoritmo de obtención de residuos en las técnicas de recuperación de fase de Goldstein (Anexo A.3). Posteriormente, se conduce el procedimiento convencional de la metrología de vórtices, que está basado en el análisis de los cruces por cero de las componentes real e imaginaria de la señal analítica.

Empleando la carga topológica y las propiedades estructurales del núcleo presentadas en el Capítulo 2 (excentricidad, componentes reales e imaginarias, ángulo de cruce por cero, vorticidad), se pueden relacionar parejas de vórtices homólogos, esto es, identificar la posición en los ejes coordenados del vórtice antes del desplazamiento y el lugar donde se mueve luego del mismo. Para medir los desplazamientos coordenados relativos Δx y Δy entre las parejas de vórtices homólogos se realizan dos procesos de búsqueda sucesivos, así la información obtenida para los desplazamientos en la primera etapa, se usa como parámetro de restricción en la segunda, lo que permite un refinamiento de la selección. Específicamente, este procedimiento permite determinar las distancias promedio entre los vórtices homólogos a lo largo de los ejes x y y denotados como $\langle \Delta x \rangle$ y $\langle \Delta y \rangle$ respectivamente, ordenados y analizados mediante histogramas. De igual forma es posible obtener las varianzas respectivas σ_x^2 y σ_y^2 .

La Fig. 3.2 a) y b) presentan los resultados experimentales para un resultado característicos donde no hay decorrelación por efecto del cambio de la forma de los speckle, la decorrelación entre los resultados está sólo asociada con el flujo de singularidades de vórtices a través de la región de inspección. Para registrar este resultado se emplea el montaje experimental presentado en la Fig. 3.1 a), estos resultados son similares a los presentados por Takeda et.

al. [3.6-3.8], donde los autores emplean estructuras similares a los speckle, y en donde no hay efectos asociados a la decorrelación de los patrones para mediciones de desplazamientos en el plano. En concreto, las Fig. 3.2 a) y b) se presentan los histogramas generados a partir de las distancias entre parejas de vórtices homólogos, luego que se refinan las medidas a partir de una primera etapa de inspección teniendo en cuenta propiedades estructurales de los vórtices y las cargas topológicas de estos. Los cambios en las posiciones de los vórtices están relacionados con un desplazamiento rígido en el plano de $30 \mu\text{m}$ a lo largo del eje x (1 píxel corresponde a $15 \mu\text{m}$ en los registros).

Aunque no existe información a priori de la magnitud o dirección del desplazamiento, esta primera etapa hace posible obtener una estimación aproximada del desplazamiento, así mismo permite restringir el área de interrogación de desplazamientos para una segunda etapa de asignación de vórtices homólogos. Luego, para refinar la evaluación de los desplazamientos, una nueva búsqueda de parejas de vórtices homólogos se lleva a cabo, en este caso, adicional a la inspección de las propiedades estructurales de los núcleos de los vórtices se restringen también los desplazamientos en los ejes de coordenadas entre las posibles parejas de vórtices homólogos. Esta información es inferida a partir de las columnas con mayor población como las que se ilustran en la Fig. 3.2 a) y b). En particular, en estos resultados cada columna representa un intervalo de desplazamiento coordinado de $0,05$ píxeles, con una población en las columnas para los ejes x y y de 941 y 792 respectivamente. Los máximos de dichas columnas, están centrados en un valor de desplazamiento $\langle \Delta x \rangle = -2,0137$ píxeles y $\langle \Delta y \rangle = 0,0238$ píxeles. A partir de esta información se definen los límites para los desplazamientos en x de $|\Delta x + 2,01379| \leq 0,0250$ píxeles y en y de $|\Delta y - 0,2389| \leq 0,0250$. Estos cálculos se hacen en base a los 1500 y 1492 vórtices que se localizaron en los mapas de pseudo-fase asociados con los estados inicial y final del difusor respectivamente.

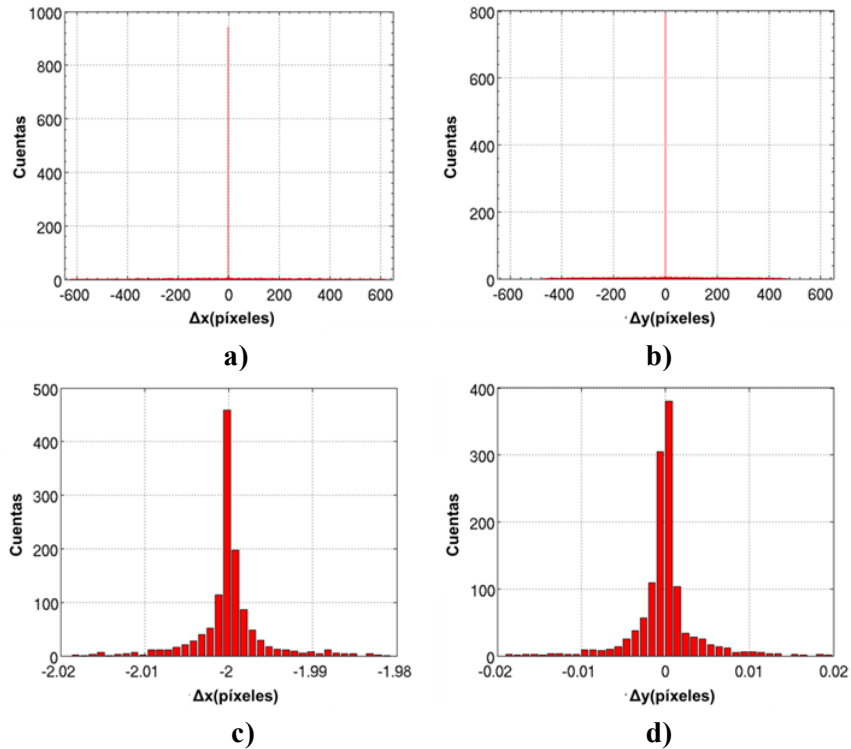


Fig. 3.2. Histogramas para los desplazamientos de las singularidades a lo largo de los ejes de coordenadas x y y , cuando no hay decorrelación de los patrones de speckle. En a) y b) se presentan los resultados para una primera etapa de interrogación para las diferencias de desplazamiento entre parejas de vórtices homólogos. En c) y d) se presentan los resultados relacionada con una segunda etapa de interrogación refinada a partir de una restricción de desplazamientos.

Los resultados para la segunda etapa de interrogación se presentan en la Fig. 3.2 c) y d) para los ejes x y y respectivamente. En estos se hace evidente el cambio de las escalas en comparación con la Fig. 3.2 a) y b). Luego de refinar los histogramas, 1250 parejas de vórtices homólogos fueron encontrados y los desplazamientos medidos fueron de $\langle \Delta x \rangle = -2,0000$ y $|\Delta y| = 0,0001$ píxeles, con varianzas respectivas de $\sigma_x^2 = 1,6747 \times 10^{-5}$ píxeles² y $\sigma_y^2 = 1,3014 \times 10^{-5}$ píxeles². Aunque cada columna en los respectivos histogramas representa un intervalo de 0,001 píxeles, los cálculos de los desplazamientos y sus respectivas varianzas se hicieron en base a la información precisa de la localización de los vórtices. Estos resultados confirman la capacidad del método propuesto para realizar medidas de desplazamientos laterales de vórtices cuando el efecto de la decorrelación no es relevante.

Por otra parte, en la Fig. 3.3 se presentan los resultados para los casos experimentales donde por efecto de la decorrelación se incrementa significativamente la incertidumbre de las medidas. En este caso, las imágenes son registradas empleando un arreglo experimental presentado en Fig. 3.1 b). Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente, para el caso sin decorrelación, en la Fig. 3.3 a) y b) se presentan los histogramas iniciales, que son generados partiendo de la base de una primera etapa de interrogación para un desplazamiento relativo a las parejas de vórtices homólogos. En este caso las medidas se llevan a cabo empleando la información de las propiedades y localizaciones de 1537 y 1486 vórtices asociados con los respectivos mapas de pseudo-fase para los patrones de speckle antes y después de que el desplazamiento tuvo lugar.

En la Fig. 3.3 a) y b) cada columna tiene un ancho de 1,2 píxeles y la columna más alta alcanza valores de 493 y 649 cuentas para Δx y Δy respectivamente. Adicionalmente, estas están centradas en $\langle \Delta x \rangle = -2,0986$ y $\langle \Delta y \rangle = 0,0041$ píxeles, respectivamente. Es válido remarcar que en estos histogramas el ruido producto de la decorrelación es relevante, sin embargo, siguen siendo útiles para la identificación de desplazamientos relativos. Cuando se imponen criterios más restrictivos sobre el seguimiento de los vórtices homólogos, se encuentra un límite natural debido a la reducción de los números de dichos pares, lo que dificulta la discriminación de la medida.

Para lograr una mejora en los histogramas, se procede de igual manera que en el caso sin decorrelación, la Fig. 3.3 c) y d) cada columna tiene un ancho de 0,05 píxeles, y se encuentran sólo 222 parejas de vórtices homólogos entre los respectivos mapas de pseudo-fase, los desplazamientos en este caso son de $\langle \Delta x \rangle = -1,9653$ y $\langle \Delta y \rangle = 0,0058$ píxeles con varianzas de $\sigma_x^2 = 0,033$ píxeles² y $\sigma_y^2 = 0,0387$ píxeles².

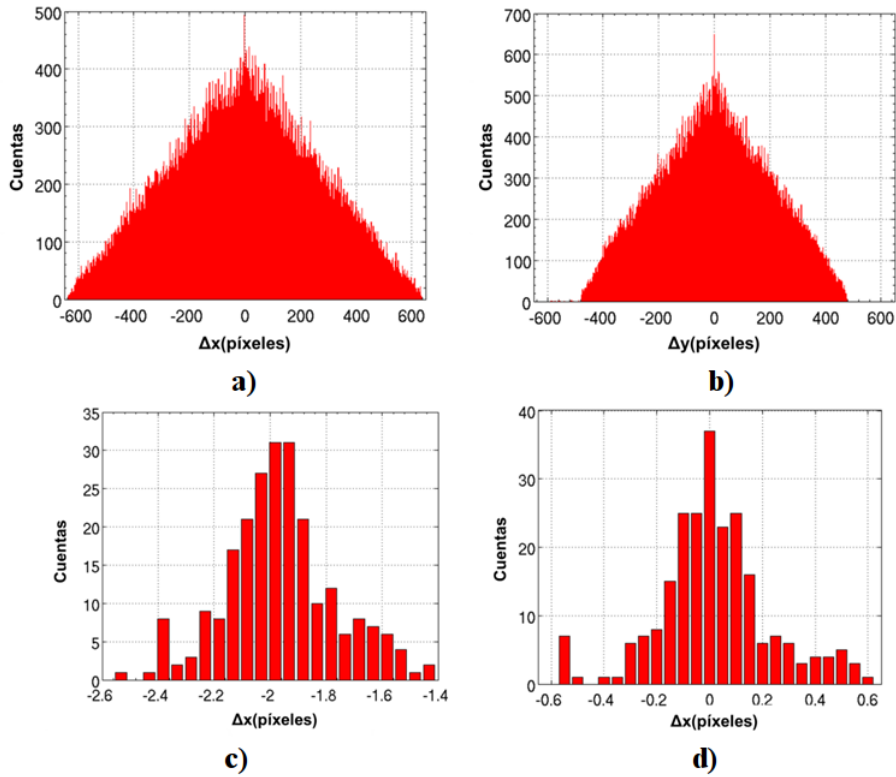


Fig. 3.3 Histogramas para los desplazamientos relativos de las singularidades a lo largo de los ejes x y y de coordenadas, cuando hay efecto de la decorrelación sobre los patrones de speckle. Los cambios en las posiciones de los vórtices están asociados con un desplazamiento en el plano de $30 \mu\text{m}$ a lo largo del eje x (1 pixel corresponde a 15 micras en las imágenes registradas). En a) y b) se presentan los resultados para los desplazamientos de vórtices homólogos, a partir de una primera etapa de interrogación basada en las propiedades estructurales de los núcleos de los mismos. En c) y d) se muestran los histogramas para los desplazamientos de los vórtices homólogos, luego de que una etapa de refinamiento de una medida tuvo lugar.

Tabla 3.1. Comparación entre los resultados experimentales obtenidos con y sin efecto de la decorrelación

	Patrones sin decorrelación	Patrones con decorrelación
Parejas vórtices homólogos (%)	84.1	14.9
$\langle \Delta x \rangle$ (píxeles)	- 2,0000	-1,9653
$\langle \Delta y \rangle$ (píxeles)	0,0001	0,0058
σ_x^2 (píxeles ²)	$1,6747 \cdot 10^{-5}$	0,0333
σ_y^2 (píxeles ²)	$1,3014 \cdot 10^{-5}$	0,0387

En la Tabla 3.1 se presentan los desplazamientos promedio y las respectivas varianzas para los casos con decorrelación y sin decorrelación. También los respectivos porcentajes de las parejas de vórtices homólogos en relación con el número total de casos esperados. Teniendo en cuenta que los valores de la distancia promedio que es de $\langle \Delta x \rangle = -2,0000$ píxeles y $\langle \Delta y \rangle = 0,0000$ píxeles respectivamente, se hace evidente que la mayor precisión se logra en aquellos casos donde los patrones de speckle no tienen un efecto de la decorrelación aparente. Por otro lado, en el caso de la decorrelación, una reducción de las parejas de vórtices homólogos encontradas y los lóbulos ruidosos en los histogramas dificultan la medida.

Algunos efectos relacionados son observados, en conexión con el análisis de vórtices en patrones de speckle dinámico [3.15], cuando se estudia el efecto de desplazamientos en el plano. Allí, se establece que existe una situación de compromiso entre el número de vórtices detectado para obtener una buena estadística, la proporción permitida de vórtices sin su respectivo homólogo, y una restricción sobre el desplazamiento. De hecho, los histogramas refinados presentan una cantidad menor de parejas de vórtices homólogos asociadas al máximo central y esto representa una distribución más dispersa cuando se comparan con los histogramas asociados a los casos donde no hay decorrelación en el patrón de speckle. Como resultado, hay una reducción ostensible de la certeza de las medidas, que normalmente alcanza varios órdenes de magnitud, tal como sucede en el caso presentado.

3.3 Metrología de vórtices a partir de mapas de fase módulo 2π

Como se mostró, la metrología de vórtices ópticos convencional permite realizar medidas de desplazamientos en el plano de distribuciones similares al speckle [3.6-3.8], a partir de la asignación digital de un mapa de pseudo-fase generado a partir de registros de intensidad. Sin embargo, existen varias aplicaciones en las cuales la fase ad-hoc módulo 2π está disponible, por lo que la generación de una pseudo-fase se hace innecesaria. Se presenta una implementación de las técnicas de metrología de vórtices ópticos en patrones

de speckle simulados (Anexos A.1, A.2) a partir del arreglo experimental presentado en la Fig. 3.1, en los cuales la información de amplitud y fase módulo 2π del campo está disponible. De igual forma que en las técnicas convencionales de la metrología de vórtices, las simulaciones se realizan para los casos donde hay efecto de la decorrelación y para aquellos donde este no está presente. Los efectos de la decorrelación en la certeza de las medidas se observan al comparar estos resultados.

3.3.1 Resultados y análisis

Un efecto significativo es la decorrelación cuando se usan patrones de speckle reales. La Fig. 3.4 muestra histogramas donde se evidencia el efecto de la decorrelación presente entre las distribuciones luego que tuvo lugar un desplazamiento.

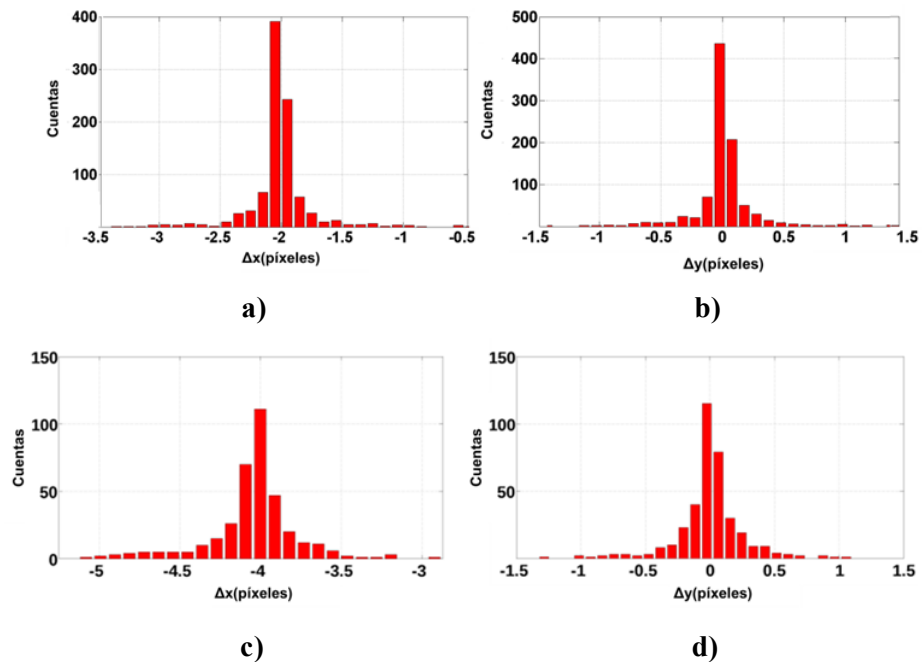


Fig. 3.4 Efecto de la decorrelación sobre los histogramas correspondientes a los desplazamientos de los pares homólogos en fase. En a) y b) cuentas de pares de vórtices vs. Δx y Δy respectivamente, para un desplazamiento de 2 píxeles. Y en c) y d) cuentas de pares de vórtices contra Δx y Δy respectivamente, para un desplazamiento de 4 píxeles.

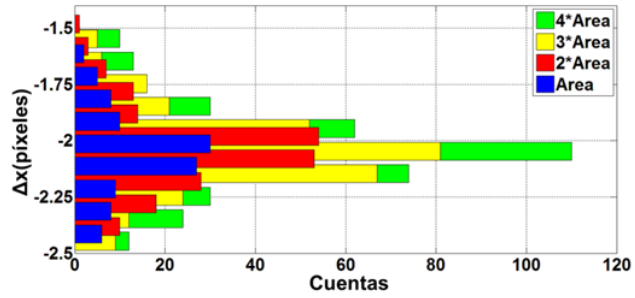
La Fig. 3.4 a) y c) presentan los histogramas correspondientes a las distancias entre las parejas de vórtices homólogos, después que el criterio de selección en la distancia se aplica para un desplazamiento de 2 píxeles correspondiente a $18\mu\text{m}$; la Fig. 3.4 b) y d) presenta el procedimiento equivalente pero para un desplazamiento de 4 píxeles correspondiente a $36\mu\text{m}$.

Nótese que en c) y d) hay una varianza mayor debido al efecto de la decorrelación con respecto a a) y b).

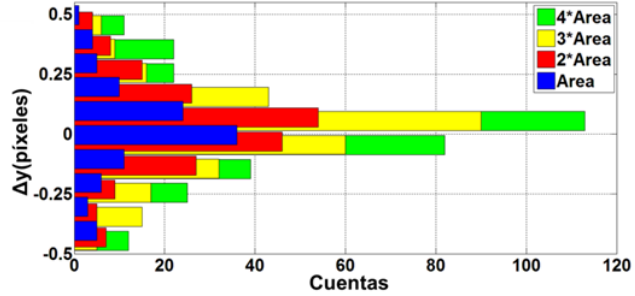
3.4 Comparación de resultados de fase y pseudo-fase

Para establecer un criterio comparativo que muestre la validez de ambas técnicas, a la hora de procesar un desplazamiento rígido en el plano usando la metrología de vórtices, se procede a generar una serie de resultados a partir del arreglo experimental de la Fig. 3.1 a). Se simularon resultados empleando diferentes tamaños de aperturas para un desplazamiento de 2 píxeles y empleando una distancia de propagación de 1 m. La Fig. 3.5, presenta los resultados de las diferentes simulaciones. En cada caso se realizan las dos etapas de interrogación en los patrones obtenidos antes y después que el desplazamiento tuvo lugar, y con esto se establecen las parejas de vórtices homólogos, midiendo los desplazamientos respectivos entre ellos.

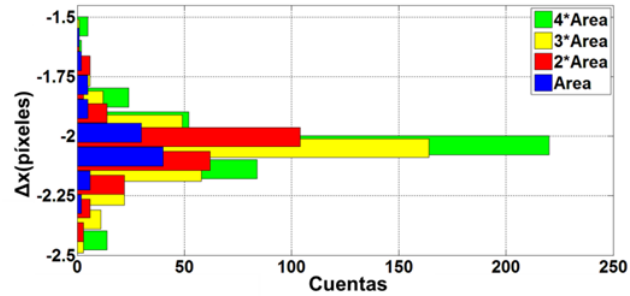
Para efectos de la simulación, se emplearon máscaras con aperturas circulares de diámetros D , $\sqrt{2}D$, $\sqrt{3}D$, y $2D$ y donde D es un diámetro de 0.5 mm, con lo que se obtiene una relación lineal en las áreas de las aperturas, este efecto está relacionado con la densidad de vórtices en los respectivos mapas como se verá más adelante. Los desplazamientos en el plano fueron logrados mediante la simulación y superposición de una cuña óptica a la máscara, logrando así el efecto equivalente a un desplazamiento del conjunto máscara-difusor sin decorrelación. Se puede observar que los resultados asociados a la fase presentan histogramas con lóbulos más ruidosos y un menor número de parejas de vórtices homólogos en las respectivas columnas centrales Δx y Δy . Esto se debe a que con los registros de fase módulo 2π del campo no se tiene control sobre la distribución en frecuencias, como si sucede con la pseudo-fase, y la densidad de vórtices en cada uno de ellos difiere notablemente.



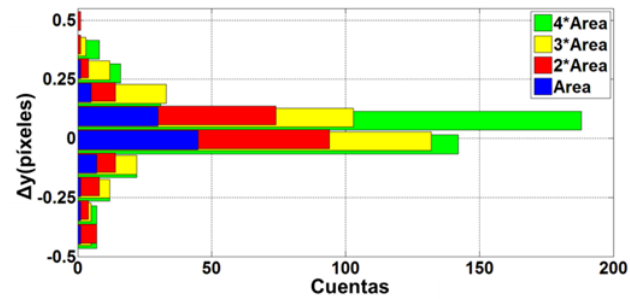
a)



b)



c)



d)

Fig. 3.5 Histogramas para la distribución de desplazamientos de speckle formadas por la difracción de la luz cuando se usan mascarar con aperturas circulares de diámetros D , $\sqrt{2}D$, $\sqrt{3}D$, y $2D$ donde D es un diámetro de 0.5 mm y la luz se propaga una distancia de 1m. En a) y b) histogramas para los desplazamientos Δx y Δy respectivamente, para las simulaciones en fase. En c) y d) histogramas para los desplazamientos Δx y Δy respectivamente, para las simulaciones en pseudofase.

3.5 Conclusiones

Se investigó la influencia de la decorrelación en distribuciones de speckle en el contexto de la metrología de vórtices, aplicada al estudio de desplazamientos uniformes en el plano. Dos arreglos experimentales fueron implementados para registrar las imágenes de speckle con y sin efecto de la decorrelación, antes y después que un desplazamiento tuviera lugar. Luego de tener los registros, se emplearon las herramientas convencionales de la metrología de vórtices ópticos para procesar las imágenes. Sin embargo, una comparación de los resultados experimentales permitió observar diferentes efectos sobre las medidas que están asociados a la decorrelación de los patrones de speckle.

Los cambios en la forma de los patrones de speckle están asociados con la migración de los vórtices a posiciones cercanas al mismo, y producen cambios en la estructura del núcleo. Se muestra que estos efectos tiene una influencia negativa en los resultados analizados con las herramientas convencionales de la metrología de vórtices, específicamente cuando se usan para la medida de desplazamientos uniformes en el plano de una superficie difusora. La calidad de los resultados presentados para los casos donde no hay efecto de la decorrelación, son similares a los presentados previamente en la literatura para patrones similares al speckle, en los cuales no hay cambios estructurales en la estructura del núcleo.

Se presentan las evidencias experimentales que prueban que bajo las restricciones impuestas por la decorrelación de los speckle, la confiabilidad del método disminuye. Esto se produce por la dificultad inherente a obtener histogramas de buena calidad, hecho que está relacionado con la disminución del número de vórtices homólogos que pueden ser seguidos durante el proceso, y el ruido presente en los histogramas.

Después de un segundo proceso de interrogación para realizar el emparejamiento de los vórtices homólogos, y usando la información aproximada para el desplazamiento, la cantidad de vórtices homólogos en los

histogramas refinados es menor, y las distribuciones son más dispersas cuando se comparan con aquellas obtenidas para los desplazamientos asociados a patrones de speckle sin decorrelación, como resultado se obtiene una medida con una certeza menor.

3.6 Bibliografía

- [3.1]. Tebaldi, M. C., Angel, L., Trivi, M., & Bolognini, N. A. (1999, July). Double-aperture speckle method using a BSO crystal for in-plane displacement. In 3rd Iberoamerican Optics Meeting and 6th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications (pp. 193-197). International Society for Optics and Photonics.
- [3.2]. Ángel, L., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2007). Multiple-aperture speckle method applied to local displacement measurements. *Optics communications*, 274(1), 23-31.
- [3.3]. Erf, R. (Ed.). (2012). *Speckle metrology*. Elsevier.
- [3.4]. L. Ángel, (2000). Tesis Doctoral: Estudio de distribuciones de speckles modulados y aplicaciones, UNLP
- [3.5]. Ángel, L., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2007). Multiple rotation assessment through isothetic fringes in speckle photography. *Applied optics*, 46(14), 2676-2682.
- [3.6]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement. *Optics communications*, 248(1), 59-68.
- [3.7]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Wada, A., Miyamoto, Y., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics express*, 14(1), 120-127.
- [3.8]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern. *Optics Express*, 14(22), 10195-10206.
- [3.9]. Wang, W. Hanson, S.G., Takeda, M. (2011) in: G.H. Kaufmann (Ed.), *Advances in Speckle Metrology and Related Techniques*, Wiley-VCH, 207

- [3.10]. Fienup, J. R. (2013). Phase retrieval algorithms: a personal tour [invited]. *Applied Optics*, 52(1), 45-56.
- [3.11]. Huntley, J. M., & Buckland, J. R. (1995). Characterization of sources of 2π phase discontinuity in speckle interferograms. *JOSA A*, 12(9), 1990-1996.
- [3.12]. Goodman, J. W. (2007). *Speckle phenomena in optics: theory and applications* (Vol. 1).
- [3.13]. Falldorf, C., Osten, W., Elandalousi, F., Kolenovich, E., Juptner, W. (2001) *Proceedings of SPIE* 4398, 238.
- [3.14]. Kolenovic, E., Osten, W., Juptner, W. (1999) *Proceedings of SPIE* 3744, 174.
- [3.15]. Sendra, G. H., Rabal, H. J., Arizaga, R., & Trivi, M. (2009). Vortex analysis in dynamic speckle images. *JOSA A*, 26(12), 2634-2639.

4.1 Introducción

La fotografía speckle ha sido ampliamente estudiada a lo largo de los años debido a las vastas aplicaciones y la precisión de las medidas alcanzadas por ella [4.1-4-5]. En esta técnica los desplazamientos o deformaciones locales o globales experimentadas por una superficie rugosa coherentemente iluminada, se hacen evidentes cuando se estudian los cambios estructurales en los patrones de speckle. Para llevar a cabo el análisis en la fotografía speckle, dos o múltiples distribuciones de intensidades de speckle son registradas de los estados inicial y final de un difusor, haciendo un seguimiento de los cambios en los patrones de speckle. Cuando sucede un desplazamiento, en el régimen de Fourier se obtienen franjas de Young que permiten hacer medidas a partir del análisis de los perfiles de intensidad de los halos de difracción obtenidos. Estas medidas pueden ser obtenidas desde regiones donde no se superponen los diferentes patrones de speckle, hasta regiones donde la decorrelación de los patrones de speckle compromete la visibilidad de las franjas.

Las técnicas de fotografía speckle están basadas principalmente en el estudio de la función de correlación cruzada de las distribuciones de intensidad de los patrones de speckle, dejando de lado la información de fase del mismo, debido a las dificultades que representa su obtención [4.6]. Sin embargo, a pesar de estas dificultades, recientemente ha habido un interés creciente en las técnicas basadas en la información de amplitud y fase. La transformada Hilbert o Riesz, entre otras, permiten aprovechar de manera eficiente la información disponible en las distribuciones de intensidad de los patrones de speckle, a partir de la introducción de mapas de pseudo-fase para el campo, lo que posibilita diferentes formas de procesamiento [4.7].

En la fotografía speckle, los speckle sirven de marcadores que permiten hacer un seguimiento de los desplazamientos locales en una superficie

coherentemente iluminada [4.1-4.5, 4.8]. En cada patrón de speckle es posible encontrar además singularidades de fase. Dichas singularidades son útiles para la identificación de un conjunto de puntos geométricos bien definidos del campo en un plano. Dichos puntos, se corresponden con los lugares donde la amplitud es nula y la fase singular. De manera análoga con las técnicas de fotografía speckle, estos lugares sirven como marcadores en el campo, aunque con las características previamente estudiadas en los capítulos anteriores.

Como se enunció previamente, la metrología de vórtices, está basada en el análisis de estos marcadores del campo, y haciendo un seguimiento del mismo luego que una transformación tuvo lugar. Estos marcadores (singularidades de fase) no sólo se restringen a patrones de speckle sino, también pueden ser encontrados en estructuras similares al speckle, cumpliendo la misma función [4.9-4.12]. En este caso, los marcadores son lugares geométricos, cada uno de ellos caracterizados por su carga topológica y varios parámetros que definen la estructura de su núcleo como fue descrito en el Capítulo 2.

Una vez que los vórtices en los patrones de speckle están caracterizados, pueden ser seguidos después de que una deformación o desplazamiento tuvo lugar. Esto hace posible el desarrollo de diferentes métodos de alta precisión en metrología, conocidos como metrología de vórtices ópticos. En particular, el uso de las singularidades de fase en la metrología de vórtices empleando interferometría de vórtices puede ser encontrado en el trabajo de revisión de Sentilkumaran et al. [4.13, 4.14]. Sin embargo, como se demostró en el capítulo anterior, debido a la decorrelación entre los patrones de speckle de la etapa inicial y final del proceso, el seguimiento de las singularidades de fase sólo puede ser llevado a cabo en rangos muy cortos, donde las propiedades estructurales del núcleo no presentan cambios relevantes.

En este capítulo se presenta un método que también emplea las redes de vórtices para medir desplazamientos de manera análoga a las técnicas convencionales de la metrología de vórtices. La diferencia entre estas técnicas y el método propuesto está basada en la realización de un análisis más tolerante a los efectos de la decorrelación entre los diferentes patrones que son

objeto de estudio. Estos efectos se hacen evidentes cuando los desplazamientos son de mayor magnitud. En tal virtud, es posible realizar mediciones con un rango mayor a las técnicas convencionales presentadas en el capítulo anterior, lo que permite extender el dominio de la metrología empleando singularidades de fase o vórtices.

Adicionalmente, se demuestra que es posible obtener franjas de interferencia de Young cuando se realiza una transformada de Fourier de la luz que pasa a través de una máscara generada con aperturas de un píxel de diámetro, que están situadas en los lugares donde se encontraron las parejas de vórtices rastreadas a partir de las propiedades estructurales de sus núcleos. El análisis de franjas se lleva a cabo de manera análoga a las técnicas de la fotografía speckle pero para desplazamientos donde las técnicas convencionales no son aplicables debido a la superposición de los patrones de speckle o a la decorrelación del mismo.

En esta técnica de correlación de franjas de redes de vórtices se emplean aperturas de un píxel de diámetro, y la información de la ubicación sub-píxel de los vórtices no se tiene en cuenta, una consecuencia de este hecho es la pérdida de resolución en las medidas. Aunque la correlación de franjas permite estudiar desplazamientos en el plano, se hace evidente que el ruido de speckle deteriora la calidad de las franjas y su visibilidad no alcanza valores óptimos, aun cuando se aplican filtros para suavizar las superficies. Esto reduce la precisión de las medidas e incrementa la varianza de las mismas. Para superar estas restricciones, se presenta además un método para realizar el análisis de Fourier de una forma alternativa, por medio de la generación de franjas de correlación sintéticas a partir de la máscara de aperturas.

4.2 Franjas de correlación de redes de vórtices

Suponga que se conduce un experimento tradicional de fotografía speckle, en donde dos distribuciones de intensidad de patrones de speckle correspondientes al estado inicial y final de un difusor son registradas. Adicionalmente, la superficie se desliza de manera rígida en el plano; de este

modo el difusor y la imagen registrada en la cámara tienen desplazamientos de la misma escala. A partir de estos registros, se pueden generar mapas 2-dimensionales de fase correspondientes a ambos estados del difusor, antes y después de que un desplazamiento tiene lugar.

Dado que los vórtices ópticos están situados en puntos donde la intensidad del campo es nula, se puede esperar que los speckle y sus respectivas regiones de intensidad nula tengan desplazamientos laterales similares. En consecuencia, se espera que la mayoría de los vórtices en los mapas de fase o pseudo-fase tengan desplazamientos similares a los que se presentan en los patrones de speckle, salvo por ligeras diferencias en sus propiedades debido a la decorrelación del speckle [4.15, 4.16]. En particular a partir de los dos registros antes y después de un desplazamiento se obtienen e identifican las redes de vórtices en mapas de pseudo-fase, y dada la regularidad y redundancia de las distancias y las orientaciones relativas entre los diferentes pares de vórtices homólogos, se obtienen franjas de Young a partir de la transformada de Fourier del conjunto de pares.

4.2.1 Arreglo experimental

En la Fig. 4.1 se esquematizan los montajes experimentales para registrar las imágenes de intensidad de los patrones de speckle antes y después que un desplazamiento rígido del difusor tiene lugar, en la Fig. 4.1 a) para registros de patrones sin efecto apreciable de la decorrelación y en la Fig. 4.1 b) para los que hay decorrelación en los patrones debido al movimiento relativo del difusor. Un haz colimado a partir de un láser de Helio-Neón ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) es empleado como fuente de iluminación.

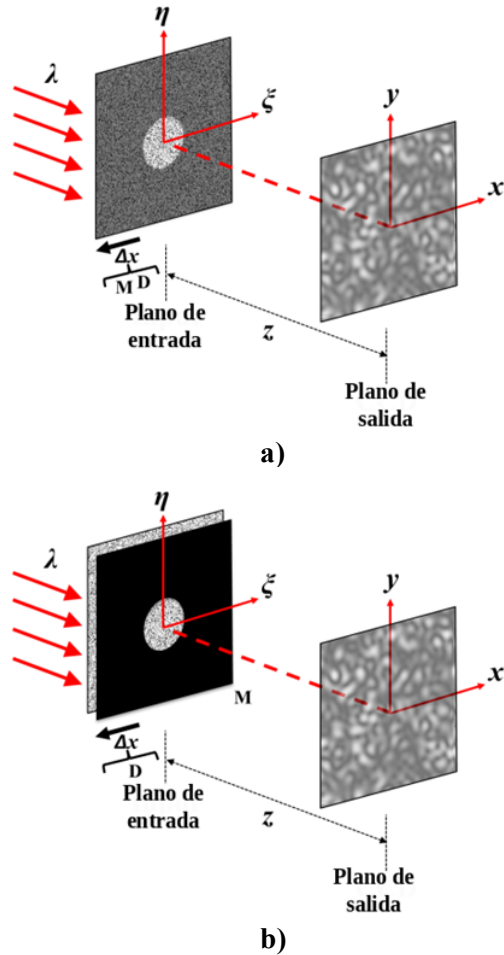


Fig. 4.1 Arreglos experimentales para el registro de patrones de speckle antes y después de un desplazamiento en el plano, para: a) sin decorrelación y b) con decorrelación, donde λ : longitud de onda, D : difusor, M : máscara, Δx : desplazamiento en el plano.

En la Fig. 4.1 a) el haz incide en una máscara con una apertura circular, la cual se mueve conjuntamente con el difusor adherido inmediatamente detrás de la misma. Luego se registran patrones de speckle obtenidos por la propagación libre de la luz empleando una cámara CCD, situada a una distancia z del plano donde se encuentra el arreglo de difusor y máscara, en este caso en particular como el difusor y la máscara se mueven conjuntamente, los radiadores asociados al difusor permanecen inmutables en el desplazamiento, por esta razón no hay un efecto aparente de la decorrelación. Por otro lado, en la Fig. 4.1 b) el difusor se mueve mientras la máscara con la apertura permanece inmóvil, por esta razón los patrones de speckle se decorrelacionan debido al cambio de radiadores del difusor en la apertura.

En ambos arreglos experimentales se emplea un desplazador con pasos de $1\ \mu\text{m}$ para producir los desplazamientos en el plano. El tamaño transversal promedio del speckle es de $77\ \mu\text{m}$, obtenido al usar aperturas circulares de $4,97\ \text{mm}$ y usando una distancia entre el difusor y el plano de observación de $z = 50\ \text{cm}$. En cada experimento se registran 2 distribuciones de intensidad de speckle, correspondientes a los estados antes y después del desplazamiento del difusor, la dirección de dichos desplazamientos se corresponden con la coordenada horizontal de laboratorio en el eje x .

Se llevaron a cabo una serie de experimentos a fin de establecer la relación entre las magnitudes de desplazamientos introducidas en el difusor (en micrómetros) y aquellas obtenidas por el medio de registro (en píxeles) cuando se procesan las imágenes registradas empleando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices [4.9-4.11]. En cada caso, los dos registros de intensidad de patrones de speckle obtenidos antes y después del desplazamiento tienen un tamaño de 720×576 píxeles. Para generar los mapas de pseudo-fase 2-dimensionales nuevamente se empleó la transformada Riesz, por las razones previamente enunciadas. Posteriormente, las singularidades de fase son localizadas empleando la modificación del algoritmo de obtención de residuos (Anexo A.3). Una vez identificados los vórtices en las imágenes se realiza un seguimiento basado en la evaluación de la carga topológica y las propiedades estructurales de cada núcleo.

A partir de este punto, el procedimiento convencional basado en los cruces por cero de las partes real e imaginaria del campo complejo fue implementado para realizar el análisis de los vórtices presentes en la señal analítica [4.9-4.12]. Cuando se emplea este método es posible determinar la localización de los vórtices con precisión sub-píxel, lo que permite una mejor resolución en las medidas.

En acuerdo con lo analizado en el capítulo anterior, el efecto de la decorrelación en las medidas puede observarse en la Fig. 4.2, donde se presentan los respectivos histogramas correspondientes con los

desplazamientos relativos medidos en Δx y Δy . En este experimento en particular, se desplaza el difusor $90 \mu\text{m}$ a lo largo del eje x . En la Fig. 4.2 a) la barra con más cuentas está centrada en $\Delta x_c = 9,961$ píxeles, lo que da una idea aproximada de la magnitud del desplazamiento. Adicionalmente, se obtiene un desplazamiento medio a lo largo del eje x de $\langle \Delta x \rangle = 9,994$ píxeles, siendo su varianza de $\sigma_x^2 = 0,042$ píxeles². De manera análoga en la Fig. 4.2 b) los valores para el desplazamiento a lo largo del eje y son $\Delta y_c = -0,037$ píxeles, $\langle \Delta y \rangle = 0,007$ píxeles, y $\sigma_y^2 = 0,042$ píxeles². Se puede notar que en el eje y donde no hay un desplazamiento del difusor la magnitud del desplazamiento tiende a cero. Sin embargo, $\langle \Delta x \rangle$ tiende a 10 píxeles, dando una relación de $9 \mu\text{m}$ por cada píxel desplazado. Estos resultados no presentan la precisión reportada por Wang et al. [4.10], debido al efecto de la decorrelación.

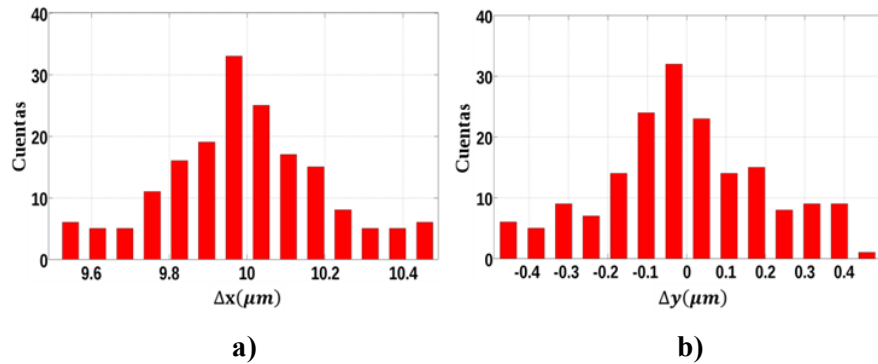


Fig. 4.2 Histogramas para los desplazamientos de coordenadas relativos entre vórtices homólogos, para a) Δx y b) Δy

La Fig. 4.3 confirma la relación entre los desplazamiento del difusor en μm con los desplazamientos obtenidos en las imágenes en píxeles, donde los datos en cada caso son como los explicados anteriormente. La ecuación lineal que satisface el criterio de ajuste de mínimos cuadrados es $\Delta x(\mu\text{m}) = 9,015 \cdot \Delta x(\text{píxeles})$, que proporciona una relación de equivalencia para el valor en micrómetros de cualquier resultado obtenido en píxeles a partir de la imagen, en los cuales se desconoce el desplazamiento del difusor. No se presentan datos para los valores en Δy debido a que en este eje no se produjeron desplazamientos.

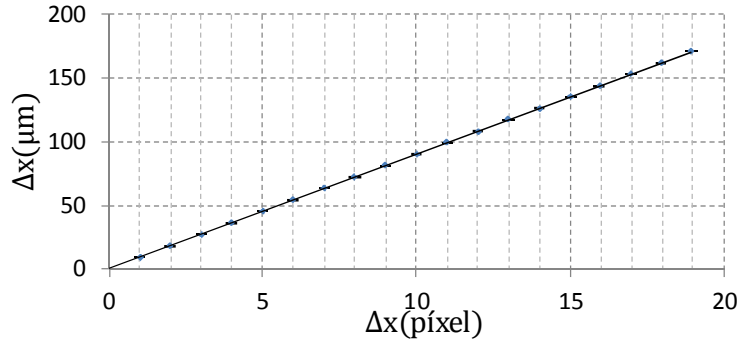


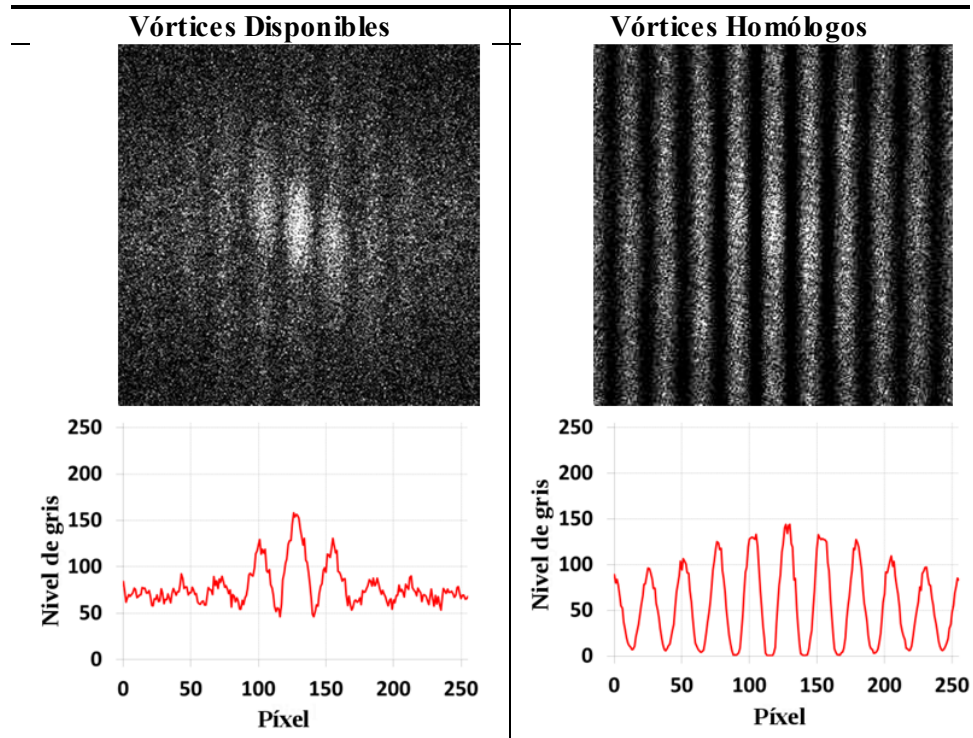
Fig. 4.3 Relación entre el desplazamiento del difusor (μm) y su respectiva medida de las imágenes (píxel).

4.2.2 Resultados experimentales

En las imágenes registradas de los patrones de speckle, los vórtices se representan como píxeles individuales posicionados en las posiciones que mejor se aproximan a su localización sub-píxel en los mapas de pseudo-fase 2-dimensionales. Una transformada rápida de Fourier es empleada para obtener franjas de Young en un plano de salida, que será de 256×256 píxeles. Dado su carácter análogo con las franjas de correlación que son observadas cuando se hace la transformada de Fourier de la superposición directa de las distribuciones de intensidad de los patrones de speckle, estas franjas serán llamadas "franjas de correlación de redes de vórtices". En la Tabla 4.1 se presentan dichas franjas de correlación de vórtices verticales para un desplazamiento a lo largo del eje x de $90 \mu\text{m}$.

Cuando se emplean los parámetros experimentales presentados en el sección 4.2.1 y el arreglo experimental de la Fig. 4.1 a) del presente capítulo, los patrones de speckle registrados no presentan efectos de decorrelación apreciables. Nótese que, la visibilidad de las franjas generadas a partir de todos los vórtices disponibles (columna izquierda) es menor que aquella obtenida cuando se usa únicamente los vórtices identificados como homólogos (columna derecha).

Tabla 4.1. Franjas de correlación de redes de vórtices obtenidas con la transformación de Fourier de la luz que pasa la máscara con aperturas de 1 píxel de diámetro y sus respectivos perfiles de intensidad por el centro de la imagen.



Este hecho está asociado con el incremento significativo de la redundancia en frecuencias espaciales, y con las orientaciones relativas de los sistemas de franjas resultantes del proceso de rastreo de vórtices homólogos. Sin embargo, aun cuando se usan sólo parejas de vórtices homólogos para la obtención de los vórtices la visibilidad de las franjas se reduce cuando la distancia del centro de la imagen se incrementa, lo que es consecuencia de las pequeñas diferencias entre las distancias y orientaciones relativas entre parejas de vórtices homólogos dadas por efectos de la aleatoriedad [4.16]. Debido al incremento en la visibilidad de las franjas al hacer la selección de vórtices homólogos en adelante todos los experimentos que se presentan serán realizados haciendo la asignación de estos antes de generar las máscaras que difractarán la luz para generar franjas.

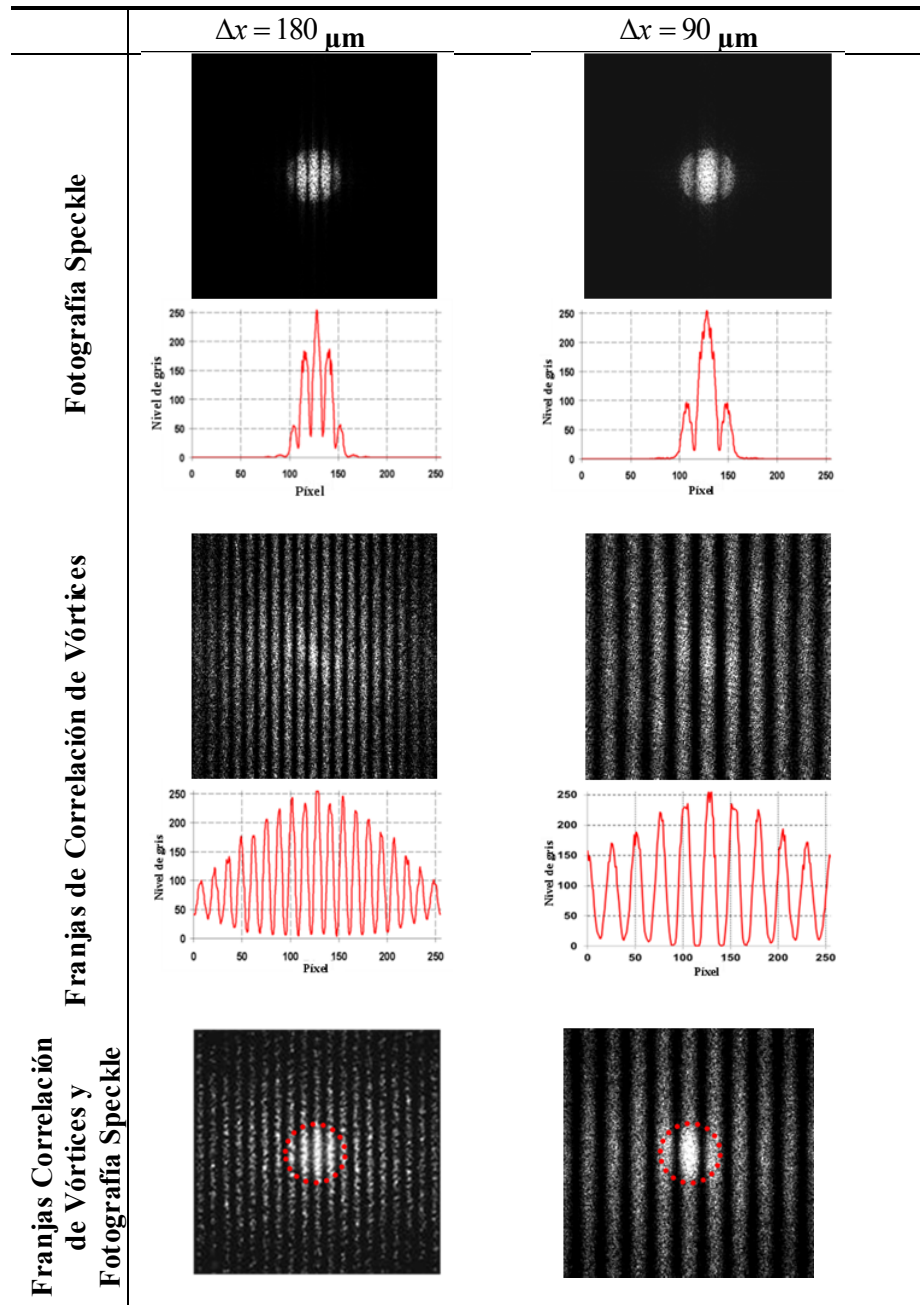
En la Tabla 4.2 se presentan algunos ejemplos representativos para resultados obtenidos a partir de distribuciones de intensidad de patrones de speckle sin decorrelación, esto permite comparar las franjas de correlación de

la fotografía speckle con las franjas de correlación de las redes de vórtices en la metrología de vórtices empleando las técnicas de la óptica de Fourier. Las respectivas imágenes de los patrones de speckle son procesadas de dos maneras diferentes.

En uno de los casos, se obtiene la transformada de Fourier de las imágenes multiplexadas, empleando las técnicas convencionales de la fotografía speckle, obteniendo de esta forma las franjas de correlación que se muestran en la primera fila. En el otro caso, a partir de cada imagen de speckle se obtiene una señal analítica usando la transformada Riesz, y los vórtices son localizados y parametrizados en términos de los valores que toman los píxeles vecinos en los mapas de pseudo-fase 2-dimensionales encontrando así la vorticidad, la excentricidad y los ángulos de los cruces por cero. Sobre esta base se hace el seguimiento y agrupación por parejas de vórtices homólogos con los que se construirá la máscara que contendrá todos los píxeles representados en aperturas de 1 píxel de diámetro. Finalmente, se hace la transformada de Fourier de la máscara a fin de obtener las franjas de correlación de redes de vórtices que se muestran en la segunda fila de la Tabla 4.2. Los respectivos perfiles de intensidad de la correlación de las franjas se presentan para ambos casos. En la tercera fila de la Tabla 4.2 se presenta la superposición de los sistemas de franjas obtenidos en ambos casos, donde se puede notar la diferencia entre los respectivos halos de difracción.

Hay tres aspectos relevantes en estos resultados a resaltar. El primer aspecto, cuando se comparan las imágenes y sus respectivos perfiles de línea, se hace evidente que la orientación y períodos de ambas franjas de correlación son exactamente los mismos cuando se analizan desplazamientos iguales. Esto implica que en el análisis de las franjas de correlación de redes de vórtices se puede proceder de la misma forma que cuando se miden desplazamientos en el plano empleando las técnicas de la fotografía speckle convencional.

Tabla 4.2. Franjas de Young obtenidas a partir de la síntesis de patrones de speckle y redes de vórtices para dos desplazamientos horizontales, para $\Delta x = 180 \mu\text{m}$ (columna izquierda) y $\Delta x = 90 \mu\text{m}$ (columna derecha).



El segundo aspecto, es el incremento en los halos de difracción respectivos debido a que el tamaño promedio del speckle es mayor que las aperturas de 1 píxel de diámetro empleadas en esta propuesta. Esto implica que las franjas obtenidas a partir de las máscaras para las redes de vórtices ocupan una región más amplia en el plano de observación, y un mayor número de franjas puede

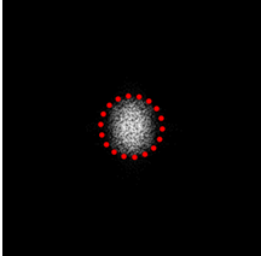
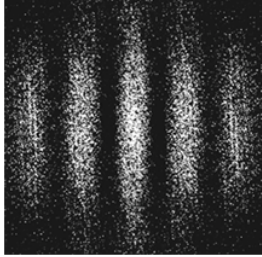
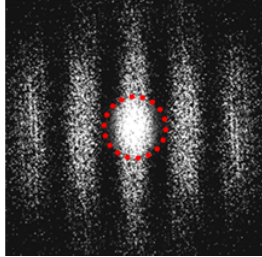
ser observado dado un desplazamiento, lo que es equivalente a poder medir un mayor número de períodos. Como consecuencia del ensanchamiento del halo de difracción debido a la reducción de los marcadores en la imagen, este método permite medir desplazamientos de magnitud menor a aquellos que pueden ser medidos en la fotografía speckle.

El tercer aspecto a resaltar está estrechamente ligado con el segundo, como consecuencia adicional de la reducción de cada uno de los píxeles individuales en comparación con los speckle, cuando se genera la máscara en el plano de entrada de la transformada de Fourier, las parejas de vórtices pueden estar localizados a una distancia menor que los speckle, dado que los marcadores (vórtices o speckle) no deben superponerse unos con otros. De hecho, en la fotografía speckle, los desplazamientos de los patrones de speckle deben ser mayores que el tamaño transversal promedio de los granos de speckle, pero cuando estos se reemplazan por marcadores de un solo píxel esta restricción se reduce a un mínimo de dos o tres píxeles dependiendo de su orientación relativa.

Para confirmar lo anteriormente expuesto, en la Tabla 4.3 se presentan los resultados para un experimento donde se realizó un desplazamiento de $48 \mu\text{m}$. En este rango la fotografía speckle no es útil debido a que el período es mayor que el halo de difracción. Adicionalmente, debido al tamaño medio transversal de los granos de speckle que es de $77 \mu\text{m}$, para este desplazamiento la mayoría de los granos de speckle se superponen cuando se superponen las imágenes.

De hecho, en la imagen de la columna izquierda de la Tabla 4.3, que corresponde al halo de difracción de la imagen superpuesta, se observa una compresión del halo en la dirección horizontal, dado que una superposición parcial de los speckle a lo largo del eje x alarga los granos de speckle en esta dirección. Como referencia, la dimensión del espectro del patrón de speckle después de la superposición de las imágenes para ambos sistemas de franjas está marcada por el círculo punteado. Sin embargo varias franjas pueden ser obtenidas en los halos asociados con los píxeles individuales, como se muestra en la columna central de la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Franjas de Young obtenidas a partir de la síntesis de patrones de speckle (imagen izquierda) y por correlación de redes de vórtices (imagen central) para un desplazamiento horizontal de 48 μm .

	Fotografía Speckle	Franjas de Correlación de Vórtices	Fotografía Speckle y Franjas de Correlación
$\Delta x = 48 \mu\text{m}$			

4.2.3 Efecto de la decorrelación

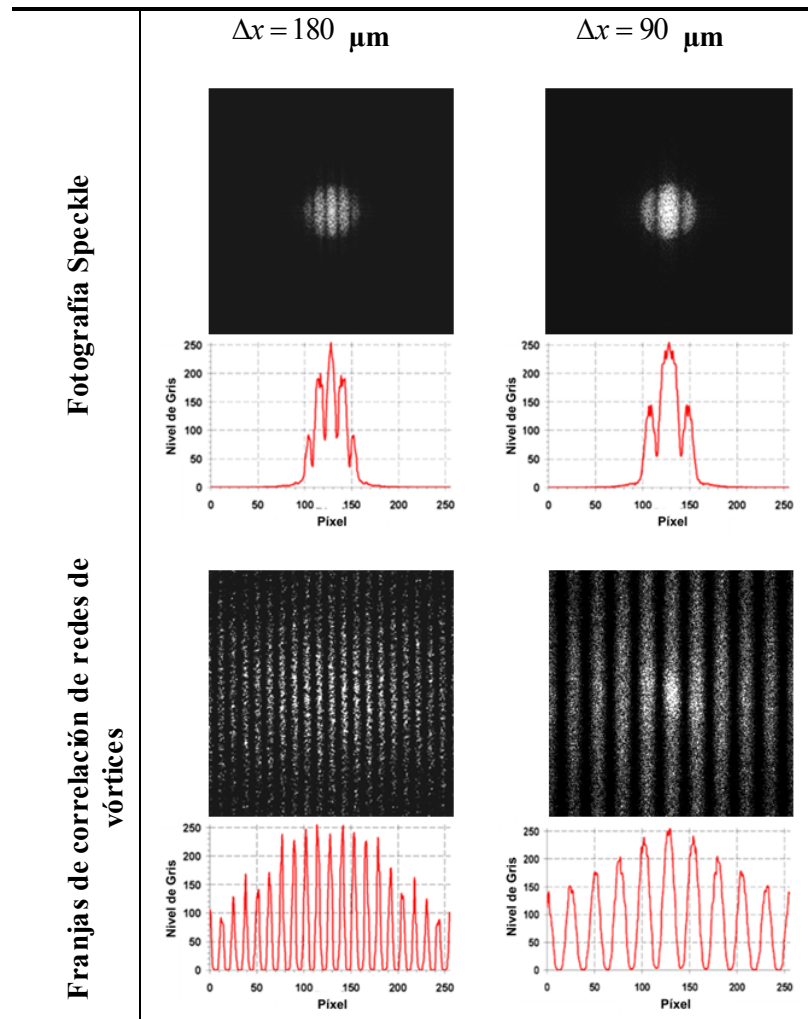
Cuando se usa el arreglo experimental de la Fig. 4.1 b), a medida que se incrementa el desplazamiento, la región iluminada del difusor cambia ligeramente, lo que conduce a cambios en la distribución de los patrones de speckle. Debido a esto, los patrones de speckle se decorrelacionan. Aunque esta decorrelación puede no tener una influencia significativa para pequeños desplazamientos, se hace notoria a medida que los desplazamientos se incrementan.

En la Tabla 4.4 se presentan dos resultados característicos obtenidos cuando se emplean las franjas de correlación de redes de vórtices para analizar desplazamientos en patrones de speckle donde hay efecto de la decorrelación. Los desplazamientos usados en esta tabla son los mismos que los usados en la Tabla 4.2 a fin de realizar una comparación entre ellos. En la primera fila se presentan las franjas de correlación de Young para la fotografía speckle.

Los resultados presentados en la Tabla 4.5 son obtenidos, cuando se comparan los respectivos perfiles de intensidad de la tabla anterior con los presentados en la primera fila de la Tabla 4.2, aquí se puede observar que tal y como era esperado, la visibilidad de las franjas se reduce ligeramente debido al efecto de la decorrelación. Sin embargo, en las franjas de correlación de

redes de vórtices se observa un comportamiento diferente. En este caso, para los patrones de speckle sin efecto de la decorrelación, la visibilidad de las franjas decrece ligeramente del centro al borde de la imagen a lo largo del eje en el que se desplazó el difusor. Como se mencionó antes, esto se debe a las distancias y orientaciones relativas de las parejas de vórtices homólogos.

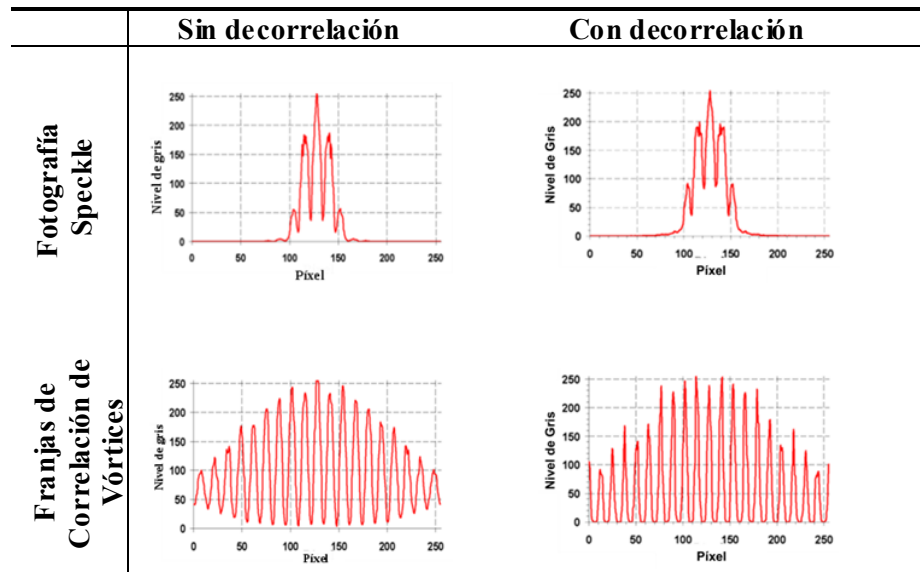
Tabla 4.4. Franjas de Young obtenidas a partir de la síntesis de patrones de speckle decorrelacionados para $\Delta x = 180 \mu\text{m}$ (columna izquierda) y $\Delta x = 90 \mu\text{m}$ (columna derecha).



Sin embargo, en el caso en el que hay decorrelación de los patrones de speckle, las franjas se vuelven más delgadas mientras que el mínimo de intensidad cae a cero entre máximos consecutivos en todo el halo. Este comportamiento se debe a que los vórtices homólogos en patrones de speckle con decorrelación no sólo han cambiado aleatoriamente su localización, sino

también sus propiedades estructurales lo que dificulta notablemente su seguimiento. Como consecuencia, una menor cantidad de vórtices homólogos pueden ser rastreados entre registros usando el mismo procedimiento de identificar la similitud entre las propiedades estructurales de los núcleos. En tal virtud, una menor cantidad de parejas de homólogos están disponibles y por tanto menos frecuencias espaciales están representadas en el plano de las frecuencias.

Tabla 4.5. Perfiles de las franjas obtenidas a partir de la síntesis de patrones de speckle no decorrelacionados (columna izquierda) y decorrelacionados (columna derecha) para $\Delta x = 180 \mu\text{m}$.



Aunque esta aproximación está basada en la fotografía speckle, tiene como ventaja el hecho de usar marcadores pequeños (un píxel por cada vórtice), lo que sirve para obtener halos de difracción más extensos y franjas con frecuencias más altas en comparación con las obtenidas a partir de las técnicas convencionales de la fotografía speckle. De este modo, mediante esta técnica es posible medir desplazamientos en un rango menor a la resolución de la fotografía speckle. Sin embargo, en los casos donde hay desplazamientos muy pequeños, donde los patrones de speckle no presentan mucha decorrelación la metrología de vórtices convencional presentada en el capítulo anterior, y basada en el análisis de histogramas es preferible, debido a su simplicidad, y no está asociada con los diferentes rangos de resolución de ambos métodos.

4.3 Franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas

Cuando se emplean máscaras con aperturas de un píxel de diámetro en la técnica de correlación de franjas de redes de vórtices, no se tiene en cuenta la ubicación sub-píxel de las singularidades de fase. Esto conduce a una pérdida de resolución en las medidas. Adicionalmente, se hace evidente que el ruido de speckle deteriora la calidad de las franjas y su visibilidad no alcanza valores óptimos, aun cuando se aplican filtros para suavizar las superficies. Con el fin de superar estas restricciones, se propone realizar el análisis de las máscaras a partir de la generación de franjas de correlación sintéticas, generadas en base a la localización sub-píxel de las diferentes singularidades de fase.

Con base en los dos patrones de speckle registrados antes y después del desplazamiento y siguiendo el mismo procedimiento empleado en el seccion2 del presente capítulo, se procede de manera análoga, hasta el punto donde se generan las máscaras. A partir de este punto la obtención de las franjas de correlación de redes de vórtices se realiza mediante la generación de sistemas de franjas sintéticas, esto se logra una vez conocidas las posiciones sub-píxel de cada una de las parejas de vórtices homólogos, y generando franjas de Young asociadas a cada uno de estos pares de puntos geométricos en el espacio, mediante el uso de cálculos numéricos, cuya implementación se describe a continuación.

4.3.1 Fundamentación teórica

En el régimen de Fraunhofer, con excepción de los factores de fase que no son de interés cuando se evalúa la intensidad de salida, el campo escalar difractado se puede asociar con una transformada de Fourier re-escalada aplicada al campo complejo existente a la entrada de la pupila utilizando la aproximación paraxial

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\xi, \eta) \left[e^{-\frac{ik}{z}(x\xi + y\eta)} \right] d\xi d\eta \quad (4.1)$$

donde $U_1(\xi, \eta)$ y $U_2(x, y)$ representan las señales complejas de entrada y salida respectivamente, λ es la longitud de onda, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, y z representa la distancia de propagación del plano de entrada al plano de salida, satisfaciendo la condición de campo lejano $z \gg (\pi/\lambda)(\xi^2 + \eta^2)_{\max}$

En la Fig. 4.4 se presenta el esquema de los planos de entrada y de difracción con los respectivos sistemas de coordenadas. Considere un campo difractado asociado con un número de N radiadores individuales (o aperturas) localizadas en el plano de entrada, los vórtices se sitúan en el plano de difracción, y son registrados antes y después de que un desplazamiento rígido en el plano tiene lugar.

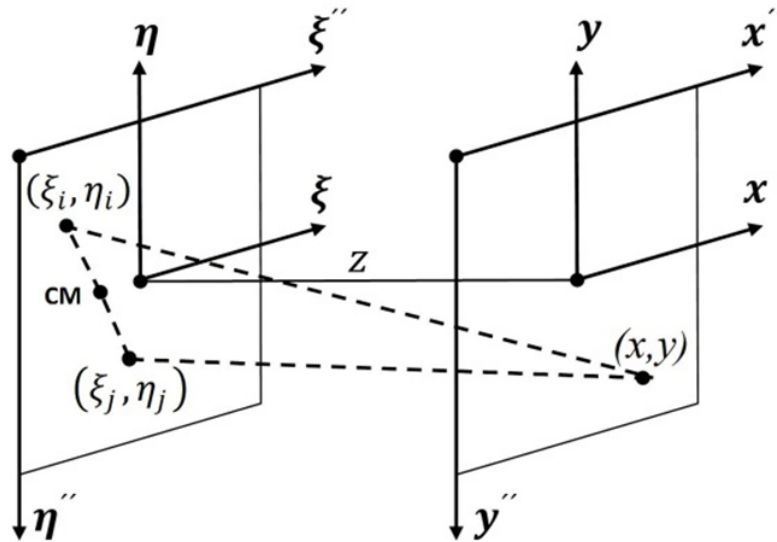


Fig. 4.4 Esquema que representa los planos de entrada y difracción, incluyendo los diferentes ejes y sistemas de coordenadas empleados en el texto.

Haciendo esto, la amplitud compleja en el plano de observación puede ser obtenida por la superposición coherente de las ondas que provienen de los radiadores individuales como sigue:

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i(x, y) \quad (4.2)$$

donde N es el número de aperturas y $A_i(x, y)$ representa el campo complejo que se propaga de la i -ésima apertura en el punto (ξ_i, η_i) hasta un punto

genérico (x, y) en el plano de observación. Las intensidades correspondientes $|A(x, y)|^2$ en este plano están dadas por

$$I(x, y) = NI_0 + 2I_0 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N \cos \left[\phi_j(x, y; \xi_j, \eta_j) - \phi_i(x, y; \xi_i, \eta_i) \right] \quad (4.3)$$

donde I_0 es la intensidad asociada con las aperturas individuales, y $\phi_i(x, y; \xi_i, \eta_i)$ para $i = 1, 2, \dots, N$, representa la fase de las ondas que van del punto (ξ_i, η_i) en el plano de entrada, al punto (x, y) en el plano de observación. Siguiendo la nomenclatura de la Fig. 4.4 y asumiendo que las ondas en el plano de observación son sincrónicas bajo la aproximación paraxial entonces

$$\phi_i(x, y; \xi_i, \eta_i) \approx \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ z + \frac{1}{2z} \left[(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 \right] \right\} \quad (4.4)$$

donde ϕ_0 es una constante representando la fase común de las ondas emergentes del plano (ξ, η) . Combinando las ecuaciones (4.3) y (4.4)

$$I(x, y) = NI_0 + 2I_0 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^N \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z} \left[(\xi_j^2 + \eta_j^2) - (\xi_i^2 + \eta_i^2) \right] - \frac{2\pi}{\lambda z} \left[(\xi_j - \xi_i)x + (\eta_j - \eta_i)y \right] \right\} \quad (4.5)$$

Esta ecuación implica que la intensidad del campo difractado (como la intensidad asociada con la transformada de Fourier) correspondiente a las aperturas en el plano de entrada pueden ser sintetizadas como la superposición incoherente de los términos DC (resultante de la adición de las contribuciones individuales de las aperturas) y una serie de sistemas de franjas asociadas con la interferencia de todos los diferentes pares de aperturas en el mismo plano.

Debe notarse que hay una contribución de todos los pares de aperturas, sin importar si este par de aperturas corresponden con los pares de vórtices homólogos o no. Por tal motivo, debido a las redundancias en las distancias y orientaciones relativas de las parejas de vórtices homólogos, un sistema de franjas de correlación puede ser observado en el plano de difracción, cuyas

frecuencias espaciales están relacionadas con los desplazamientos entre imágenes de speckle.

Sin embargo, la única información relevante en este análisis es la correspondiente a los desplazamientos relativos entre los pares de vórtices homólogos. Así, de acuerdo con este propósito, todos los términos de interferencia en la ecuación (4.5) relacionados con los pares de vórtices no homólogos deben removerse. En resumen, sólo nos interesan aquellos términos del coseno que revelan la redundancia en el desplazamiento relativo. Esta operación no puede ser lograda usando un procesador óptico convencional, como en el caso de la implementación de una transformada de Fourier. En tal virtud, se debe implementar un procedimiento empleando cálculos numéricos. Dejando de lado todas las contribuciones de los cosenos correspondientes a los pares de vórtices que no son homólogos de la ecuación (4.5), se obtiene la distribución de intensidad de interés

$$I'(x,y) = I_0 \left[N' + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{N'} \cos \left\{ \frac{\pi}{\lambda z} \left[(\xi_j'^2 + \eta_j'^2) - (\xi_i'^2 + \eta_i'^2) \right] - \frac{2\pi}{\lambda z} \left[(\xi_j' - \xi_i')x + (\eta_j' - \eta_i')y \right] \right\} \right] \quad (4.6)$$

donde N' representa el número total de parejas de vórtices homólogos que contribuyen a la formación de franjas, cada una de ellas constituida por los vórtices asociados con los diferentes estados del difusor, antes y después del desplazamiento. Así, la sumatoria se extiende sobre todas aquellas parejas de vórtices cuya posición esta denotada por las coordenadas primadas (ξ_i', η_i') y (ξ_j', η_j') respectivamente. En adelante se llamarán "centros" de dichas parejas a los puntos ubicados en el medio de la línea que conecta los dos vórtices, este punto está ubicado en $(1/2)(\xi_j' + \xi_i', \eta_j' + \eta_i')$.

Nótese que el efecto del primer término del argumento del coseno en la ecuación (4.6) cambia en una manera selectiva la fase de las franjas

individuales que contribuyen a la intensidad, o equivalentemente se mueve de posición para cada sistema de franjas del origen del sistema de referencia al punto localizado justo al frente del par de vórtices homólogos correspondiente. Sin embargo, para analizar los desplazamientos relativos entre los diferentes pares de vórtices homólogos, la posición de las parejas individuales no es relevante. En tal virtud, se desplazan los centros de todas las parejas de vórtices homólogos al origen del sistema de referencia coordinado, y de esta forma todos los sistemas de franjas coinciden en el centro del plano de observación. Así, centramos la atención en la medida del desplazamiento relativo de dos redes de vórtices correlacionadas, no en las posiciones específicas de los diferentes pares de vórtices homólogos. Consecuentemente, la posición de los vórtices homólogos en (ξ'_i, η'_i) y (ξ'_j, η'_j) son redefinidos respectivamente como $(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i) = (1/2)(\xi_i - \xi_j, \eta_i - \eta_j)$ y $(\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j) = (1/2)(\xi_j - \xi_i, \eta_j - \eta_i)$. De esta forma la distribución de intensidad de interés queda definida como

$$I''(x, y) = I_0 \left[N' + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{N'} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda Z} [(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_i)x + (\tilde{\eta}_j - \tilde{\eta}_i)y] \right\} \right] \\ \propto \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2N'} \right) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{N'} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda Z} [(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_i)x + (\tilde{\eta}_j - \tilde{\eta}_i)y] \right\} \quad (4.7)$$

Para esta ecuación $0 \leq I''(x, y) \leq 1$. Finalmente, se consideran las imágenes representadas por matrices de $m \times n$ elementos, y cuando se calcula la salida de intensidad por medio de algoritmos computacionales, se empieza por la esquina superior izquierda que corresponde al elemento (1,1) de la matriz, procediendo posteriormente de izquierda a derecha y de arriba a abajo a lo largo de la matriz hasta el elemento (m,n). Teniendo en cuenta que para efectos de la computación numérica se ha cambiado el sistema de coordenadas para que corresponda con el elemento (1,1) de la matriz, se realiza una translación del mismo. Esto genera un nuevo set de coordenadas (ξ''_i, η''_i) para

el plano de entrada y (x'', y'') para el plano de salida, definidos por la transformación respectiva correspondiente $(\xi''_i, \eta''_i) = ((n/2) + \xi_i, (m/2) - \eta_i)$ y $(x'', y'') = ((n/2) + x, (m/2) - y)$. Lo que conduce a una expresión final para la intensidad de la forma

$$I''(x'', y'') = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2N'} \right) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{N'} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda z} \left[(\xi''_j - \xi''_i) \left(x'' - \frac{n}{2} \right) + (\eta''_j - \eta''_i) \left(y'' - \frac{m}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.8)$$

Nótese que el factor $\kappa = \lambda z$ en el argumento del coseno puede ser ajustado a cualquier valor conveniente con el fin de re-escalar el período de los sistemas de franjas que contribuyen a la distribución de intensidad. Adicionalmente, esto permite ajustar el número promedio de píxeles por franja. El período de un sistema de franjas elemental asociado con una pareja de vórtices homólogos localizados en (ξ''_i, η''_i) y (ξ''_j, η''_j) está dado por

$$\Lambda_{ij} = \lambda z \left[(\xi''_j - \xi''_i)^2 + (\eta''_j - \eta''_i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Cuando se usa la ecuación (4.8) para representar la superposición incoherente de los sistemas de franjas de interés, se puede usar información precisa de la localización de los vórtices conociendo su desplazamiento relativo con precisión sub-píxel.

4.3.2 Arreglo experimental

Los arreglos experimentales para registrar las imágenes de intensidad son los mismos que se presentan en la Fig. 4.1 de la sección 4.2.1. De manera análoga, dos imágenes de speckle son registradas antes y después de un desplazamiento. Un láser de He-Ne (632,8 nm) colimado incide sobre una máscara opaca con una apertura circular, que está situada detrás de un difusor. En este caso, se emplea una cámara CMOS (sigla en inglés para: complementary metal-oxide-semiconductor) para el registro de los patrones de speckle resultantes. Para estos resultados experimentales se usó una distancia

$z = 820\text{mm}$ y un diámetro de apertura de 5 mm , lo que implica que el tamaño promedio del speckle en el plano de observación es de $126,6\ \mu\text{m}$. Como se enunció anteriormente, en el arreglo de la Fig. 4.1 a) la máscara y el difusor se mueven de manera conjunta; por tanto el mismo set de radiadores generan los patrones de speckle antes y después del desplazamiento, por lo que no se introduce el efecto de la decorrelación entre registros; y en la Fig. 4.1 b) el difusor se mueve mientras que la máscara permanece inmóvil, por lo que el área iluminada del difusor cambia lo que produce cambios en los patrones de speckle entre registros, introduciendo efectos de decorrelación. Aunque el efecto de la decorrelación puede no tener una influencia significativa cuando los desplazamientos son pequeños, sus efectos se vuelven evidentes a medida que la distancia de desplazamiento del difusor se incrementa.

4.3.3 Resultados experimentales

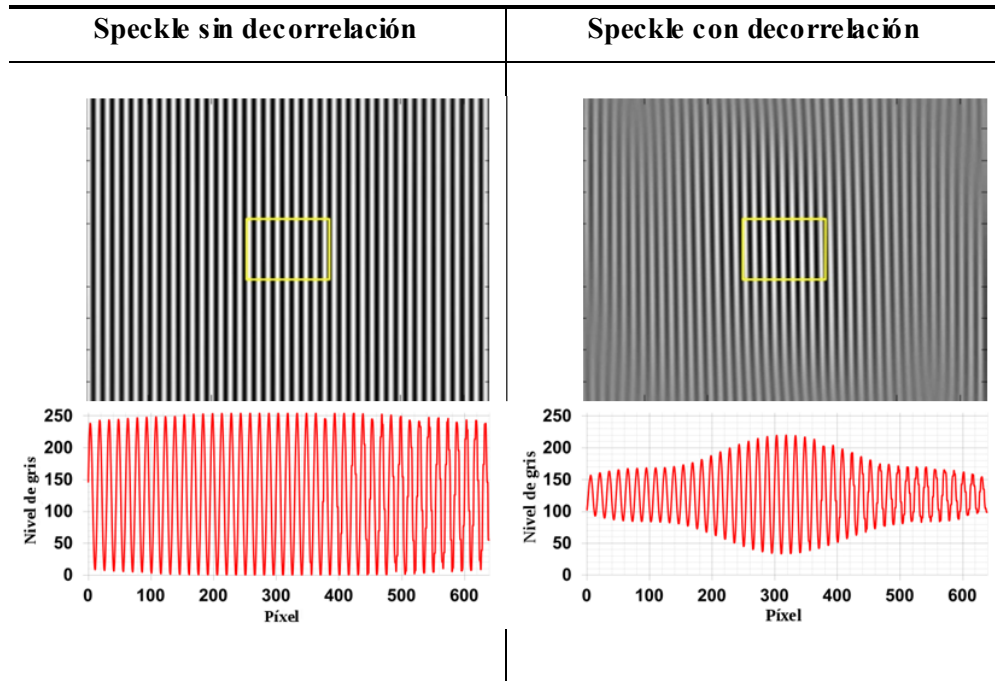
Dos imágenes digitales de speckle correspondientes con el estado inicial y final del difusor son registradas. El formato original de cada una de estas imágenes es de 2352×1728 píxeles. Por las mismas razones expuestas en el Capítulo 3, cada imagen de speckle es procesada empleando la transformada Riesz para generar una señal compleja del campo a partir del registro de intensidad, lo que permite asignarle un mapa de pseudo-fase que contiene vórtices asociados con cada registro.

Los vórtices en cada uno de los mapas de pseudo-fase se localizan con precisión sub-píxel y se realiza la asignación de parejas de vórtices homólogos. Cada pareja por definición debe estar compuesta de vórtices con la misma carga topológica y estructura del núcleo similar. Luego los desplazamientos de coordenadas Δx y Δy correspondientes a los diferentes pares de vórtices homólogos son determinados. En adelante, en vez de continuar con el procedimiento convencional de la metrología de vórtices, se sigue con el procedimiento descrito en el sección 2. Específicamente, para cada pareja de vórtices homólogos, se define un sistema de franjas de interferencia, equivalente a uno generado por un par de radiadores síncronos, cuya separación y orientación relativa permanece inmutable, pero que se sitúa

simétricamente con respecto al centro del plano de observación. Finalmente todos estos sistemas de franjas son superpuestos como patrones de intensidad.

En la Tabla 4.6, dos patrones de franjas y sus correspondientes perfiles de intensidad son presentados. Ambos patrones de franjas son obtenidos para desplazamientos iguales de $\Delta x = 16 \mu\text{m}$ a lo largo del eje horizontal ($\Delta y = 0$) y usando el mismo factor de escala $\lambda z = 30$ píxeles². Para obtener los resultados de la columna izquierda se empleó el montaje experimental de la Fig. 4.1 a); de esta forma no hay efecto de la decorrelación por el cambio de los patrones de speckle, sólo el producido por el flujo de vórtices que entran y salen de los mapas de pseudo-fase cuando se mueve el difusor. En la columna de la derecha se presentan los resultados empleando el montaje experimental de la Fig. 1 b), esto implica que para este caso hay efecto de decorrelación por el cambio de los patrones de speckle. La visibilidad de las franjas se aproxima a la unidad en el centro de los sistemas de franjas, donde todas las posiciones de las franjas coinciden. Sin embargo, la visibilidad de las franjas decrece del centro a los costados. Esto se debe a que los períodos y las orientaciones relativas de los sistemas de franjas superpuestos no coinciden exactamente, dado que las distancias y las orientaciones relativas de los pares de vórtices homólogos en los mapas de pseudo-fase, aunque son muy similares, no son los mismos. En tal virtud, a medida que la decorrelación aumenta la región que contiene franjas de alta calidad disminuye.

Tabla 4.6. Efecto de la decorrelación en la visibilidad de franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas. En a) a partir de registros sin decorrelación y en b) con decorrelación. En ambos casos se emplea un desplazamiento horizontal de $\Delta x = 16 \mu\text{m}$ y el factor de escala $\lambda z = 30 \text{ píxeles}^2$



Para efectos de las medidas, las magnitudes relevantes en los resultados son aquellas asociadas con el período de las franjas y la orientación de las mismas. Específicamente, el período medio $\langle \Lambda \rangle$ y el ángulo medio $\langle \theta \rangle$ entre las franjas y el eje y vertical así como las respectivas varianzas σ_{Λ}^2 y σ_{θ}^2 de estas magnitudes.

En la Tabla 4.7 se presentan valores medidos para los resultados de la Tabla 4.6. En el caso donde el efecto de la decorrelación es aparente, el número de parejas de vórtices homólogos decrece a un valor del 3,7% con respecto al caso donde hay efecto de la decorrelación, esto implica una reducción en la certeza de las medidas de desplazamientos. Pero, en ambos casos el desplazamiento promedio $\langle \Delta x \rangle$ entre los pares de vórtices homólogos se aproxima a 2 píxeles, lo que se corresponde con el valor esperado para un desplazamiento de $16 \mu\text{m}$ en los experimentos.

Tabla 4.7 Síntesis de datos para patrones correlacionados y decorrelacionados

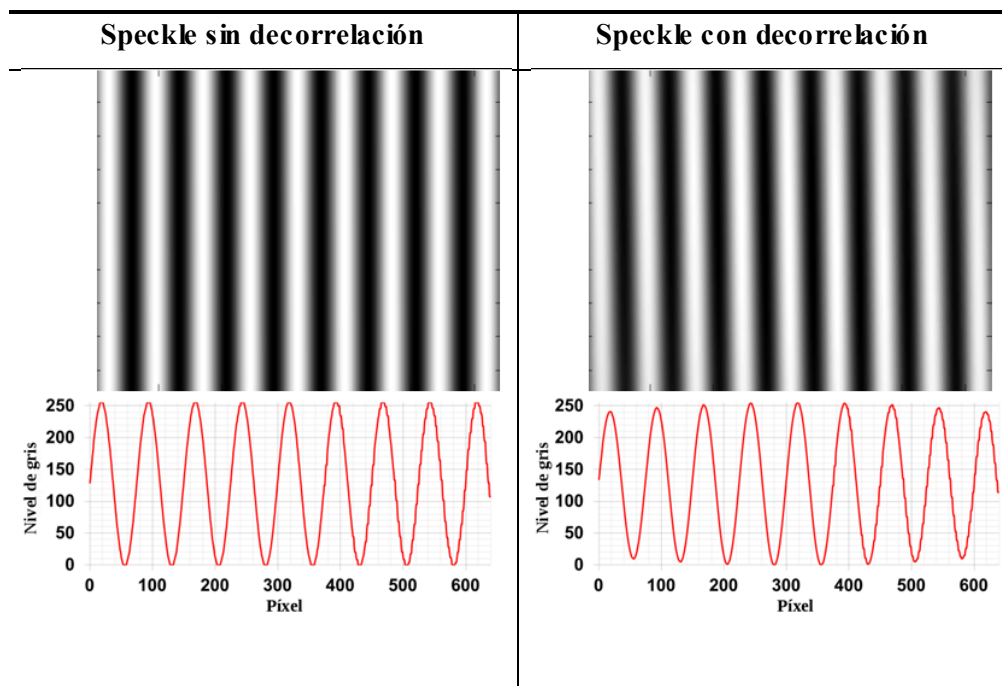
	Speckle no decorrelacionado	Speckle decorrelacionado
Número de pares de homólogos	2369	88
$\langle \Delta x \rangle$ (píxeles)	1,9986	1,9830
σ_x^2 (píxeles ²)	0,0035	0,0569
$\langle \Delta y \rangle$ (píxeles)	0,0002	0,0033
σ_y^2 (píxeles ²)	0,0019	0,0571
$\langle \Lambda \rangle$ (píxeles)	15,0039	15,0234
σ_Λ^2 (píxeles ²)	0,0214	0,0767
$\langle \theta \rangle$ (píxeles)	0,4187	0,4133
σ_θ^2 (píxeles ²)	$1,4763 \times 10^{-5}$	$6,2207 \times 10^{-5}$

Sin embargo, se logra una precisión mayor en las medidas si el efecto de la decorrelación no es de interés. Para determinar el período medio de las franjas $\langle \Lambda \rangle$ y su varianza σ_Λ^2 , los valores de los períodos de los sistemas de franjas individuales para diferentes pares de vórtices homólogos se calculan separadamente. Los valores correspondientes para $\langle \theta \rangle$ y σ_θ^2 se evalúan con un procedimiento similar. Como es esperado, aunque en ambos casos $\langle \Lambda \rangle$ se aproxima al valor esperado $\Lambda = (\lambda z / \Delta x) = 15$ píxeles, la respectiva varianza del caso sin efecto de la decorrelación es significativamente menor con respecto a aquella relacionada al caso donde hay efectos de la decorrelación. Similarmente, $\langle \theta \rangle$ puede ser aproximado a cero en ambos casos pero la varianza para el caso sin efecto de la decorrelación es bastante menor que en el caso con este afectando la certeza de las medidas.

Una característica importante del método propuesto es que seleccionando adecuadamente el factor de escala λz , la visibilidad de las franjas se puede mejorar hasta conseguir valores óptimos en la región donde se presentan las franjas. Esto posibilita una mejor discriminación de los valores de los períodos y orientaciones relativas de las franjas. Adicionalmente, por medio de la

adecuada selección del parámetro de escala, es posible agrandar las imágenes evitando el efecto del píxelado en las mismas. Estos efectos se presentan en la Tabla 4.8, obtenidos mediante el procesamiento de las mismas imágenes de speckle de la Tabla 4.6, pero usando un parámetro de escala diferente. Las franjas presentadas en las columnas izquierda y derecha de la Tabla 4.8 corresponden a versiones magnificadas de las regiones marcadas en las respectivas columnas de la Tabla 4.6. Se hace evidente que, en ambos casos sin importar la decorrelación de los speckle, es posible obtener franjas de alta visibilidad para medir con precisión los períodos respectivos y orientaciones, a fin de medir las componentes de los desplazamientos en coordenadas en el plano.

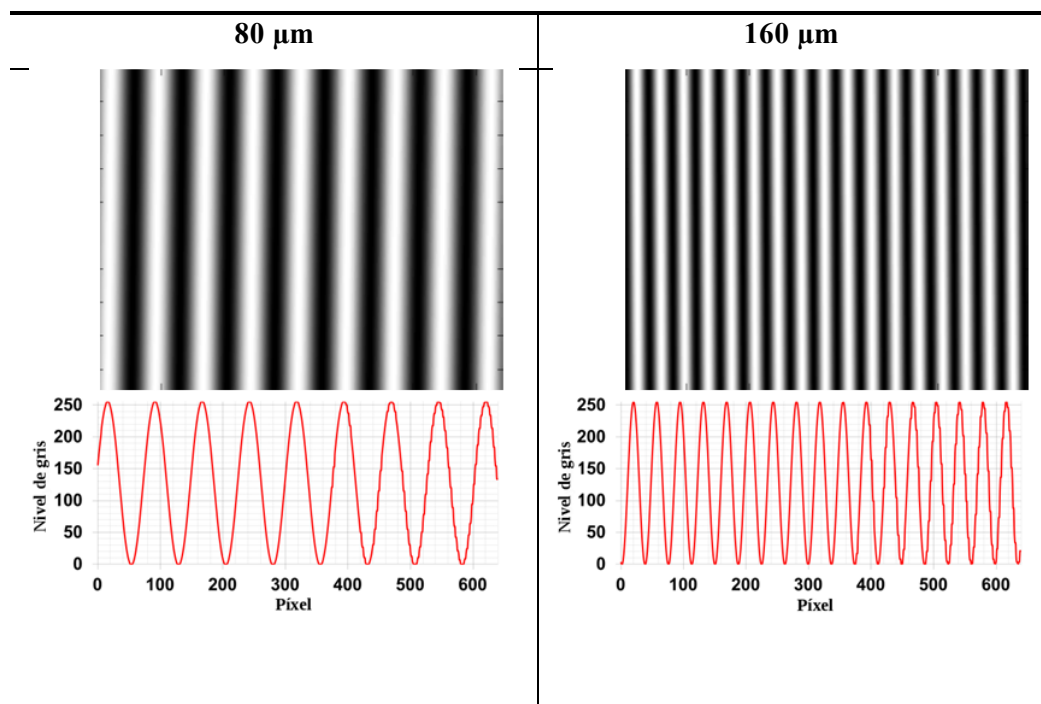
Tabla 4.8. Versiones agrandadas de las franjas de correlación de vórtices sintéticas y sus perfiles de intensidad correspondientes. Las franjas son generadas de manera análoga a la Tabla 6 $\lambda z = 150$ píxeles²



En la Tabla 4.9 se muestra que como es esperado, cuando se usa el mismo factor de escala, la frecuencia espacial de las franjas se incrementa proporcionalmente con el desplazamiento entre las imágenes. De hecho, la frecuencia espacial promedio de las franjas en la columna de la derecha, para un desplazamiento de 160 μm , es el doble de la frecuencia espacial observada en la columna de la izquierda correspondiente a un desplazamiento de 80 μm .

Por otro lado, el efecto del cambio de la magnitud del desplazamiento puede ser compensado escogiendo un factor de escala diferente, lo que se infiere de la comparación de las franjas de la columna derecha de la Tabla 4.8 y la columna izquierda de la Tabla 4.9, donde en ambos casos la razón entre el factor de escala y el desplazamiento es $(\lambda z/\Delta x) = (150/16)$ (píxeles²/μm).

Tabla 4.9 Franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas y sus respectivos perfiles de intensidad para dos desplazamientos con efecto de decorrelación. La magnitud de los desplazamientos es de 80 μm en la columna izquierda y de 160 μm en la derecha. En ambos casos el factor de escala es $\lambda z = 750$ píxeles²



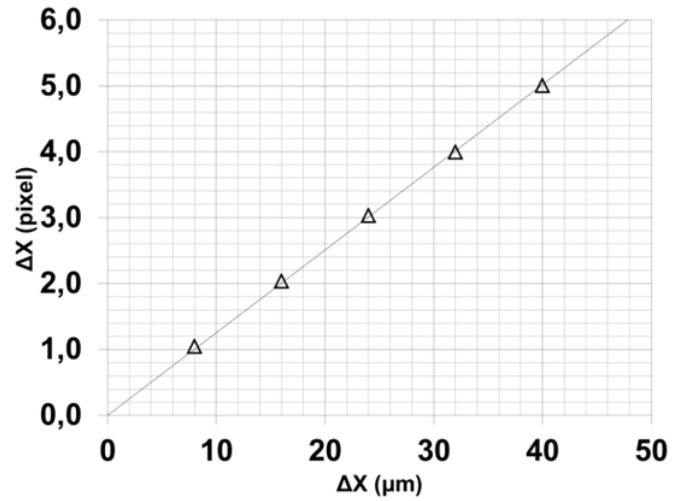
4.3.4 Precisión y rangos de aplicación de medidas

Para hacer posible la comparación del rango de aplicación de esta técnica y evidenciar la mejora introducida, se presentan una serie de medidas analizadas usando el método propuesto, aquellos presentados en el sección 2, y los obtenidos por Wang et al en [4.10, 4.11]. Se utiliza el montaje experimental de la Fig. 4.1 b) para registrar las diferentes imágenes de speckle y se realizan desplazamientos con un paso de 8 μm a lo largo del eje x . En estos experimentos hay efecto de la decorrelación.

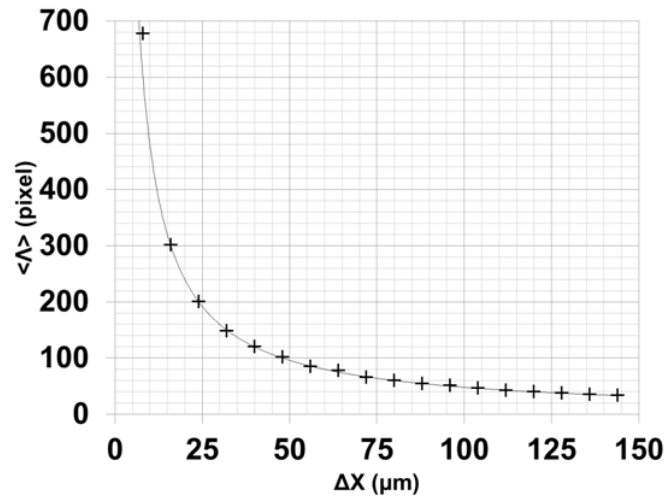
En la Fig. 4.5 a) se presentan resultados relacionados con desplazamientos del difusor medidos (en píxeles) usando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices [4.10, 4.11]. La línea que cruza por cero que satisface el criterio de mínimos cuadrados en esta figura es $\Delta x (\text{píxeles}) = [0,1256 (\text{píxeles}/\mu\text{m})] \Delta x (\mu\text{m})$, correspondiente al ancho de 8 μm del píxel de la cámara. Dado que la decorrelación del speckle afecta significativamente la calidad de los resultados a medida que la magnitud del desplazamiento aumenta [4.15], en la práctica encontramos que este método es aplicable para desplazamientos de hasta 48 μm . Para ampliar el rango, se procederá con los diferentes métodos implementados.

En la Fig. 4.5 b) se presentan una serie de períodos medios medidos usando el método de las franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas acá propuesto. En este caso, se usa un factor de escala $\lambda z = 600 \text{ píxeles}^2$ para optimizar la visibilidad de las franjas para desplazamientos laterales de 8 a 144 μm . La curva representa el comportamiento teórico dada la hipérbola $\langle \Lambda \rangle (\text{píxeles}) = (4800 \mu\text{m} \times \text{píxeles}) (\Delta x (\mu\text{m}))^{-1}$. Es evidente que los datos experimentales se corresponden con el comportamiento esperado en este rango de desplazamiento. Desplazamientos mayores estarán en el régimen de la fotografía speckle, dado que el tamaño transversal promedio del speckle tiene una dimensión de 127 μm .

En la Fig. 4.6 a) se presentan los desplazamientos evaluados a partir de los datos de la Fig. 4.5 b) usando cruces como marcadores. Adicionalmente, se presentan los desplazamientos medidos en la Fig. 4.5 a) usando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos usando como marcadores triángulos, lo que permite establecer una comparación entre los resultados obtenidos con ambos métodos. La línea representa el mismo comportamiento teórico de la Fig. 4.5 a). Aunque los resultados experimentales relacionados a ambos métodos cumplen con este comportamiento teórico, debe notarse que los resultados relacionados con las franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas permiten medir en un rango más amplio, llegando hasta el régimen de la fotografía speckle.



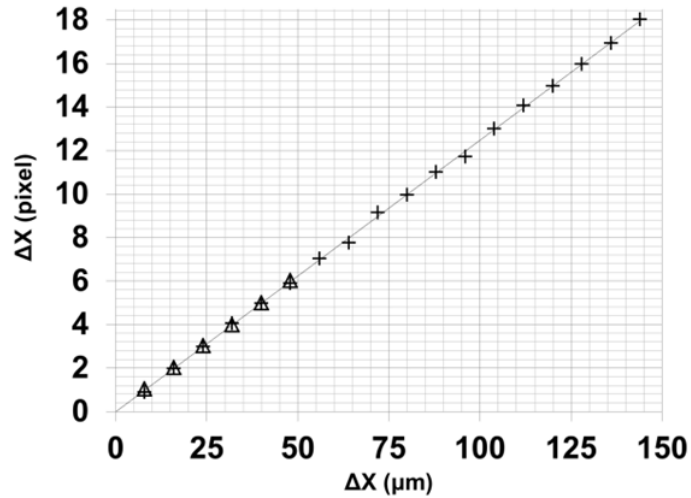
a)



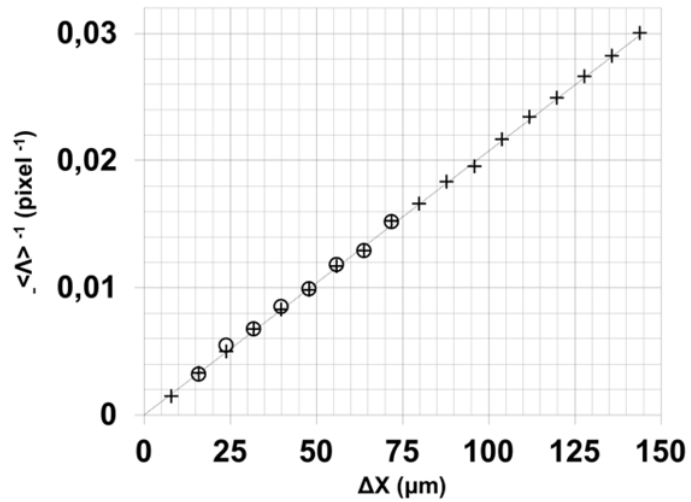
b)

Fig. 4.5 En a) desplazamientos medidos empleando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices. En b) medidas de los periodos promedio de las franjas de correlación sintéticas, con $\lambda Z = 600$ píxeles²

Para comparar estos resultados con los del sección 2, en la Fig. 4.6 b) se presenta un gráfico del inverso del período contra el desplazamiento. Las cruces representan los datos experimentales correspondientes a la Fig. 4.5 b), y los círculos a aquellos resultados obtenidos en base a la técnica de franjas de correlación de redes de vórtices sintetizadas empleando las técnicas de Fourier. En este caso, la línea para el comportamiento teórico está representada por $\langle \Lambda \rangle^{-1} (\text{píxeles}^{-1}) = (0,00021 \mu\text{m}^{-1} \times \text{píxeles}^{-1}) (\Delta x (\mu\text{m}))$.



a)



b)

Fig. 4.6 En a) desplazamientos medidos empleando las franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas (cruces) y el método de metrología de vórtices convencional introducido por W. Wang et al en [9-10] (triángulos). En b) resultados obtenidos empleando las franjas de correlación de vórtices (círculos) y las franjas de correlación de vórtices sintéticas (cruces)

Aunque en ambos casos existe un buen acuerdo entre los datos experimentales y los valores teóricos, la técnica de franjas de correlación de redes de vórtices tiene un rango de aplicación reducido. De hecho, esta técnica es inviable cuando se miden desplazamientos inferiores a los 2 píxeles debido a la superposición de las aperturas individuales con tamaño transversal de 1 píxel. Adicionalmente, para desplazamientos de mayor magnitud la presencia de sistemas de franjas relacionadas con las parejas de vórtices no homólogos y

la influencia del ruido de speckle en la transformada de Fourier disminuye la visibilidad de las franjas de correlación de vórtices. En particular, se obtuvieron sistemas de franjas para medidas en un rango intermedio de hasta 72 μm .

4.4 Conclusiones

Aunque la metrología de vórtices convencional permite realizar mediciones inclusive en el rango sub-píxel, los efectos de la decorrelación cuando se sintetizan mapas de pseudo-fase a partir de patrones de speckle reales dificultan la medida. Sin embargo, en el rango sub-speckle donde la medida con la fotografía speckle es imprecisa o inclusive impracticable, la metrología de vórtices permite realizar medidas confiables de desplazamientos en el plano.

Se propuso una nueva técnica para realizar medidas en un rango donde tanto las técnicas de metrología de vórtices cuanto las de fotografía speckle son proclives a presentar errores dadas sus limitaciones. Para lograr esto, en primer lugar se usan patrones de speckle reales como marcadores de superficie para analizar las redes de vórtices y los efectos de la decorrelación; en segundo lugar, se implementó un método alternativo para estudiar los desplazamientos en metrología speckle, que está basado en la aplicación de las técnicas de Fourier en la metrología de vórtices para formar franjas de correlación.

Se mostró que es posible obtener franjas de Young cuando se realiza una transformada de Fourier de la luz difractada por una máscara generada a partir de aperturas con tamaño transversal de 1 píxel, situadas en los lugares donde se encuentran los vórtices, sintetizadas a partir de los registros antes y después de un desplazamiento lateral de un difusor. Se mostró que se puede realizar el análisis de franjas tal y como se realiza en las técnicas convencionales de la fotografía speckle, lo que conduce a una concordancia plena en el rango en el que ambas técnicas son confiables.

El incremento en el rango de medida es logrado cuando se implementa una técnica híbrida entre la metrología de vórtices y la fotografía speckle. Reduciendo el tamaño de los marcadores en las técnicas convencionales de fotografía speckle es posible obtener halos de difracción mayores y aumentar la proximidad de los marcadores encontrados entre ambos registros. En consecuencia, es posible realizar mediciones de desplazamientos menores que los alcanzados en la técnica de fotografía speckle y mayores que aquellos de la metrología de vórtices convencional.

Adicionalmente, con las franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas es posible hacer uso de la localización sub-píxel de los vórtices en los mapas de pseudo-fase generados a partir de las imágenes registradas, antes y después de un desplazamiento. Los sistemas de franjas sintéticos de Young son obtenidos mediante la superposición incoherente de múltiples sistemas de franjas individuales, cada uno de los cuales está asociado con la interferencia de la luz proveniente de diferentes pares de radiadores puntuales, cuya posición está determinada por la localización de los pares de vórtices homólogos. Este método permite realizar una medida precisa en un rango extendido de desplazamientos, en comparación con las técnicas convencionales de la metrología de vórtices cuando hay efectos de decorrelación entre los patrones registrados.

En comparación con el método de franjas de correlación de redes de vórtices, para medir desplazamientos en el plano de patrones de speckle registrados, se incrementa la precisión de la medida, dado que se emplea la información de la posición sub-píxel de los vórtices, el ruido de speckle no afecta la calidad de las franjas, y se evitan las contribuciones de los sistemas relacionados a parejas de vórtices no homólogos en la transformada de Fourier. Adicionalmente, al evitar la restricción de la superposición de las aperturas con tamaño transversal de 1 píxel, es posible realizar medidas de magnitudes de desplazamientos aún más pequeñas.

Como es sabido, los efectos asociados con la decorrelación del speckle suponen una restricción en el rango de validez cuando se emplean las técnicas

para el análisis de desplazamientos en el plano en el contexto de la metrología de vórtices. Sin embargo, el método propuesto no está restringido al estudio de desplazamientos relativos donde no hay efectos aparentes de la decorrelación. Al usar este método, aunque la visibilidad de las franjas se reduce cuando se va del centro del registro a los extremos de los sistemas de franjas, a medida que la decorrelación aumenta, es posible incrementar la visibilidad de las mismas re-escalando el período de las franjas cuando se ajusta el factor de escala $\kappa = \lambda z$ en el argumento del coseno.

4.5 Bibliografía

- [4.1]. Khetan, R. P., & Chiang, F. P. (1976). Strain analysis by one-beam laser speckle interferometry. 1: Single aperture method. *Applied optics*, 15(9), 2205-2215.
- [4.2]. Chiang, F. D., & Khetan, R. P. (1979). Strain analysis by one-beam laser speckle interferometry. 2: Multiaperture method. *Applied optics*, 18(13), 2175-2186.
- [4.3]. Angel, L., Tebaldi, M., Bolognini, N., & Trivi, M. (2000). Speckle photography with different pupils in a multiple-exposure scheme. *JOSA A*, 17(1), 107-119.
- [4.4]. Ángel, L., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2007). Multiple-aperture speckle method applied to local displacement measurements. *Optics communications*, 274(1), 23-31.
- [4.5]. Ángel, L., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2007). Multiple rotation assessment through isothetic fringes in speckle photography. *Applied optics*, 46(14), 2676-2682.
- [4.6]. Dainty, J. C. (1975). Laser speckle and related phenomena. In Berlin and New York, Springer-Verlag (Topics in Applied Physics. Volume 9), 1975. 298 p (Vol. 9).
- [4.7]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Pseudophase information from the complex analytic signal of speckle fields and its applications. Part I: Microdisplacement observation based on phase-only correlation in the signal domain. *Applied optics*, 44(23), 4909-4915.
- [4.8]. Gåsvik, K. J. (2003). *Optical metrology*. John Wiley & Sons.
- [4.9]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement. *Optics communications*, 248(1), 59-68.

- [4.10]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Wada, A., Miyamoto, Y., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics express*, 14(1), 120-127.
- [4.11]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern. *Optics Express*, 14(22), 10195-10206.
- [4.12]. Wang, W. Hanson, S.G., Takeda, M. (2011) in: G.H. Kaufmann (Ed.), *Advances in Speckle Metrology and Related Techniques*, Wiley-VCH, 207
- [4.13]. Senthilkumaran, P., Masajada, J., & Sato, S. (2011). Interferometry with vortices. *International Journal of Optics*, 2012.
- [4.14]. Vyas, S., & Senthilkumaran, P. (2007). Interferometric optical vortex array generator. *Applied optics*, 46(15), 2893-2898.
- [4.15]. Angel-Toro, L., Sierra-Sosa, D., Tebaldi, M., & Bolognini, N. (2012). Speckle decorrelation influence on measurements quality in vortex metrology. *Optics Communications*, 285(21), 4312-4316.
- [4.16]. Huntley, J. M., & Buckland, J. R. (1995). Characterization of sources of 2π phase discontinuity in speckle interferograms. *JOSA A*, 12(9), 1990-1996.

5.1 Introducción

En muchos campos de la óptica patrones modulados se han usado con diversos propósitos; esto se debe entre otros, a que la información de fase del campo puede ser recuperada a partir de registros de intensidad [5.1]. Algunas contribuciones en esta área usan el análisis de Fourier de la amplitud modulada, como son los casos de la comparación de patrones por medio de métodos interferométricos o el posicionado y alineación de montajes, como es el caso de patrones de moiré en aplicaciones de nano-litografía [5.2, 5.3]. Otras aplicaciones usan la modulación para recuperar la información de fase módulo 2π del campo para una amplia gama de propósitos. A partir de la amplitud modulada es posible recuperar la fase ad-hoc del campo, y con esta se obtiene información adicional a la asociada con la distribución de intensidad registrada, tales son los casos de aplicaciones para analizar imágenes de franjas, sintetizar múltiples fases en holografía digital, y en interferometría speckle digital [5.4-5.6], entre otros.

El campo de la óptica singular también aprovecha las propiedades de la modulación para recuperar la información que de otra manera no es posible obtener; en particular, en algunas propuestas las singularidades de fase de un interferómetro de N-aperturas son caracterizadas y usadas para medir el momento angular de la luz en fenómenos astrofísicos [5.7]. Arreglos de múltiples aperturas de N-aperturas se usa también en la generación de vórtices ópticos de orden superior cuando las aperturas se disponen en un arreglo que sigue una línea espiral alrededor del origen [5.8]. Adicionalmente, hemos mostrado que la modulación interna de los speckles aumenta la densidad de vórtices en los patrones registrados, a condición que no cambie el tamaño del speckle. En la metrología de vórtices este hecho mejora las medidas como se presenta en [5.9]. Sin embargo, estas aplicaciones están basadas en la

información de fase módulo 2π de los campos, y esta no siempre es posible recuperarla a partir de las distribuciones de intensidad disponibles [5.10].

Como se mostró en los capítulos anteriores, existen transformadas para obtener una señal compleja a partir de distribuciones de intensidad; las señales obtenidas permiten asignar un mapa de pseudo-fase 2-dimensional a partir de la distribución de intensidad registrada, esto hace posible procesar la información de manera análoga a como se procesa cuando se conoce la fase módulo 2π del campo. Adicionalmente también se mostró, que algunas técnicas propias de la metrología de vórtices ópticos están basadas en la generación de señales complejas de distribuciones de speckle o similares al speckle usando diferentes transformaciones integrales lineales como es el caso de las transformadas Hilbert, Riesz o Laguerre-Gauss [5.11], entre otras.

En el Capítulo 2 se discute la forma de las transformaciones integrales lineales y a partir del filtro que se use se derivaran sus propiedades. A manera de ejemplo, y por su definición, la transformada Hilbert es anisotrópica en patrones 2-dimensionales, dado que en el *kernel* de la transformación hay una función escalón; esto implica que la resolución espacial de las medidas dependerá de la dirección en la que se evalué. Las transformadas Riesz y Laguerre-Gauss son la contraparte isotrópica de la transformada Hilbert; estas alternativas emplean un disco espiral de fase como filtro, y por esta razón cualquier sección que cruza por el origen del filtro puede ser usada como una función signo con un salto de fase π .

La ventaja que presenta la transformada Laguerre-Gauss sobre la transformada Riesz se basa en el hecho que la transformada Laguerre-Gauss incluye un filtro pasa banda que elimina cualquier componente DC del patrón y atenúa las componentes de alta frecuencia que conducen a la obtención de singularidades inestables [5.12-5.15]. Sin embargo en este capítulo se mostrara que ninguna de estas transformadas es apropiada para la síntesis de patrones de speckle modulado.

En patrones con modulación, la inclusión de componentes de alta frecuencia generados por la superposición de sistemas de franjas conduce a la generación de numerosas singularidades de fase inestables cuando se usa la transformada Riesz para obtener una señal compleja a partir de la distribución de intensidad. Por otro lado, la riqueza en frecuencias de la modulación se ve disminuida cuando se usa la transformada de Laguerre-Gauss, debido al filtro pasa-banda que se incluye en su formulación. Por esta razón proponemos una nueva transformada que conserva las componentes de alta frecuencia de las distribuciones con modulación, sin generar singularidades de fase inestables cuando se obtienen mapas de pseudo-fase a partir de la representación de números complejos.

5.2 Transformada vórtice para patrones modulados

La asignación de una función de valores complejos a partir de una de valores reales empleando una función integral lineal está basada en la selección de un *kernel* de transformación como se mostró en el Capítulo 2. Cada uno de estos filtros de transformación debe cumplir con un propósito particular. En tal virtud debido al interés particular de procesar patrones de speckle modulados con aplicaciones en la metrología de vórtices es necesario configurar un *kernel* de transformación que sea apropiado a dicho fin.

Debido a las componentes en frecuencias asociadas a la modulación se hace necesaria la generación de una transformación integral que contenga un filtro que permita conservar dicha información. Se propone entonces una transformada que permite generar funciones de valores complejos a partir de patrones de intensidad modulados, incluyendo las componentes de alta frecuencia de la modulación, sin la generación de singularidades de fase inestables.

A partir de estas funciones de valores complejos es posible obtener mapas de intensidad y pseudo-fase para analizar registros de intensidad sin la necesidad de recurrir a técnicas de recuperación de fase. La intensidad y mapas de pseudo-fase obtenidos usando esta transformada conservan la

estructura de modulación que se observa en la intensidad y la fase módulo 2π ; incluyendo singularidades de fase estables que son útiles en el área de la metrología de vórtices ópticos.

5.2.1 Descripción del filtro

A partir de una distribución de intensidad de un campo modulado $g(x, y)$ es posible asociar una señal compleja $\tilde{g}(x, y)$ usando la transformada lineal de la forma

$$\tilde{g}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f_x, f_y) G(f_x, f_y) \exp[2\pi i(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (5.1)$$

donde, f_x y f_y son coordenadas de frecuencias, la función $G(f_x, f_y)$ está definida como la transformada de Fourier de la distribución de intensidad original $g(x, y)$ y $H(f_x, f_y)$ es la transformada de Fourier de la superposición lineal de diferentes filtros de Laguerre-Gauss dispuestos en la función $h(x, y)$ definida como

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^n \left(i\pi^2 \omega^4 \right)^{r_j} \exp\left(-\pi^2 r_j^2 \omega^2\right) \exp(i\alpha_j) \quad (5.2)$$

donde $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, $\alpha_j = \arctan((y - y_j)/(x - x_j))$ y ω es un parámetro para definir el ancho de un filtro pasa-banda. Para cada uno de los halos de difracción principales en la función $G(f_x, f_y)$ se asigna un filtro de Laguerre-Gauss, que contribuye a la sumatoria sobre los n elementos de la ecuación (5.2), la posición individual de cada uno de estos filtros está dada por su respectiva posición en el halo de difracción. En adelante esta transformada la llamaremos Transformada vórtice para patrones modulados.

Para ejemplificar la generación del filtro en coordenadas espaciales, la Fig. 5.1 presenta la intensidad y fase correspondiente de la función $h(x, y)$ cuando se sintetiza un patrón generado por la interferencia de la luz difractada por una máscara con cuatro aperturas. Se puede observar que el filtro está compuesto a su vez por cuatro filtros con amplitudes complejas toroidales y cuyas fases son

discos espirales de fase. Cada uno de estos filtros está localizado en los lugares donde se situaron las aperturas empleadas para generar el campo modulado.

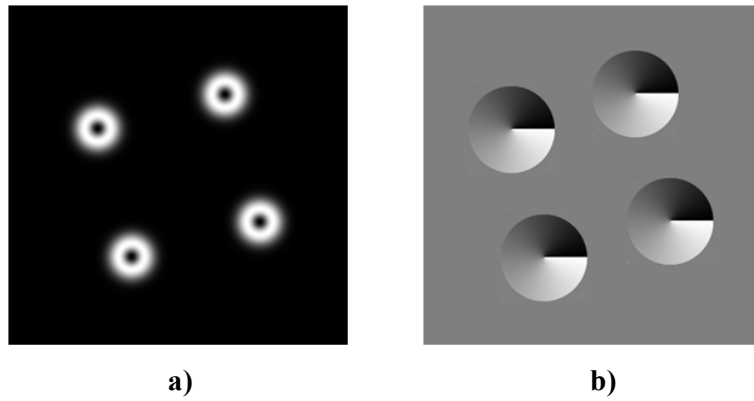


Fig. 5.1 Distribuciones de amplitud toroidales y discos espirales de fase del filtro propuesto para cuatro aperturas. En a) amplitud y en b) fase módulo 2π

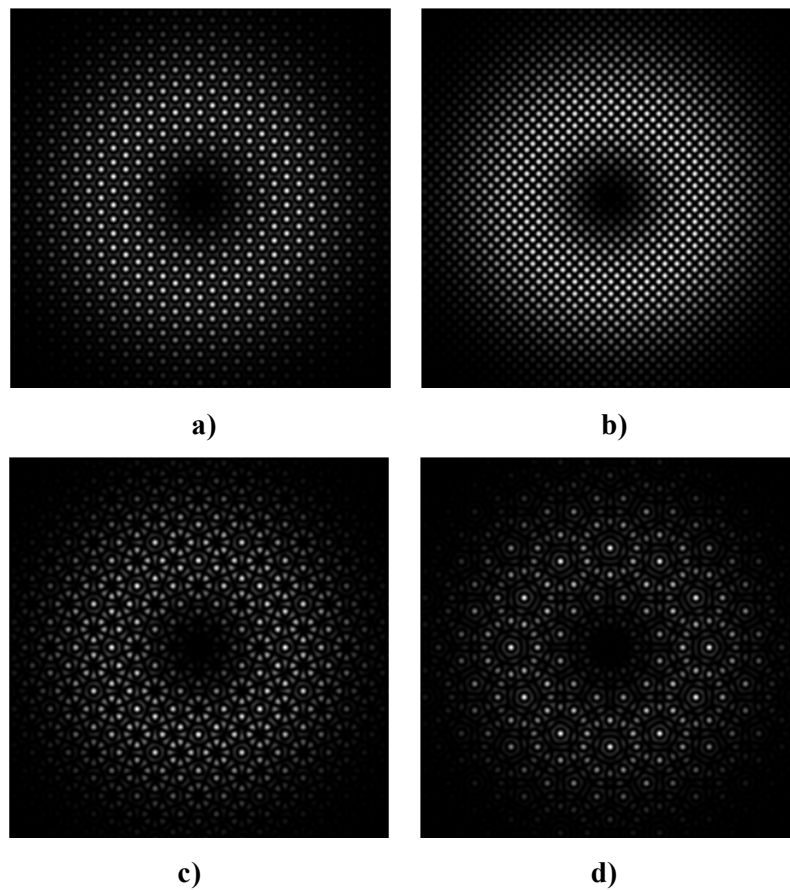


Fig. 5.2. Modulo cuadrado del filtro $H(f_x, f_y)$ para: a)3, b)4, c)8 y d)12 aperturas.

El módulo del filtro $H(f_x, f_y)$ de la ecuación (5.1), en coordenadas en frecuencias se presenta en la Fig. 5.2. En esta figura es posible observar que dicho filtro incluye la información asociada a la modulación del campo superpuesta a una distribución toroidal que define el corte en frecuencias de manera análoga a como se realiza en la transformada Laguerre-Gauss lo que permite filtrar las componentes de alta frecuencia que generan singularidades de fase inestables.

5.2.2 Arreglo experimental

Con el fin de presentar los campos complejos obtenidos a partir del uso de la transformada vórtice para patrones modulados; se simularon sistemas de franjas de Young generados por máscaras de múltiples aperturas, y patrones de speckle modulados obtenidos de manera análoga, pero agregando un difusor en el plano de entrada del sistema. Se simularon y emplearon arreglos experimentales similares a los presentados en los capítulos anteriores.

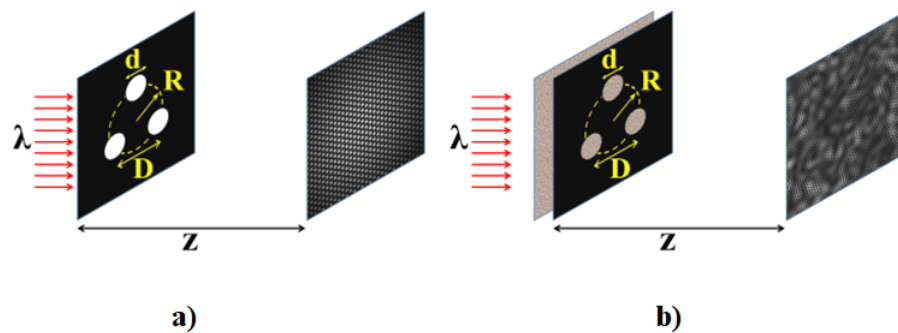


Fig. 5.3. Arreglos experimentales para generar patrones de intensidad modulados. En a) un frente de onda plano incide sobre una máscara con múltiples aperturas, y es difractada una distancia z hasta el plano de observación. En b) un difusor se anexa a la máscara con múltiples aperturas para obtener patrones de speckle modulado.

En este caso en particular, en las Fig. 5.3 a) y b) un frente de onda plano con una longitud de onda λ es difractado por una máscara con n aperturas de diámetro d , que están dispuestas de manera simétrica sobre una circunferencia de radio R . Los patrones de intensidad registrados están situados a una distancia z de la máscara, esta distancia debe satisfacer la condición de campo lejano de la difracción de Fraunhofer. Un difusor se anexa a la máscara con las aperturas como se ilustra en la Fig. 5.3 b) con el fin de obtener patrones de

speckle que contienen una estructura de modulación interna del speckle similar a la que se obtiene en los patrones de múltiples aperturas.

5.2.3 Resultados experimentales

5.2.3.1 Múltiples aperturas

Las tablas 5.1A y 5.1B presentan resultados simulados para la luz difractada por máscaras que contienen 4, 6, 8 y 12 aperturas, el diámetro de cada apertura es de 13 píxeles, y que están localizadas sobre una circunferencia de radio de 400 píxeles. El ancho y alto del píxel es de 10 μm . Estas simulaciones son para distribuciones de 4096×4096 píxeles², la luz se propaga una distancia de 2,75 m usando una longitud de onda de 632,8 nm. En la primera fila se presenta la intensidad de los patrones de interferencia, y en la segunda la respectiva fase módulo 2π del campo. Las siguientes dos filas presentan los resultados obtenidos cuando se emplea la transformada vórtice para patrones modulados, para sintetizar los patrones presentados en la primera columna de cada tabla.

En estos resultados se hace evidente que los campos complejos obtenidos tanto para la intensidad cuanto para los patrones de pseudo-fase cuando se emplea la transformación propuesta conservan la estructura de modulación del campo, pero incluyen singularidades de fase en los mínimos locales debido al uso del tipo de filtro propuesto.

Con el fin de establecer la validez del uso de la transformada vórtice para patrones modulados, se realiza una comparación entre la transformada propuesta y la transformada Laguerre-Gauss. En la Tabla 5.2 se presentan los resultados relacionados con el uso de un patrón de intensidad modulado, obtenido por la difracción de la luz por una máscara de 12 aperturas, cuyo diámetro es de 13 píxeles, y que se encuentran situadas sobre una circunferencia de radio 185 píxeles, y el tamaño del píxel es de 10 μm . Esta simulación está realizada sobre distribuciones de 2048×2048 píxeles², de la

luz propagada una distancia de 1,45m y usando una longitud de onda de 632,8nm.

Tabla 5.1A. Resultados de la aplicación de la transformada vórtice para patrones simulados aplicada a un frente de onda plano, y difractado por una máscara con múltiples aperturas.

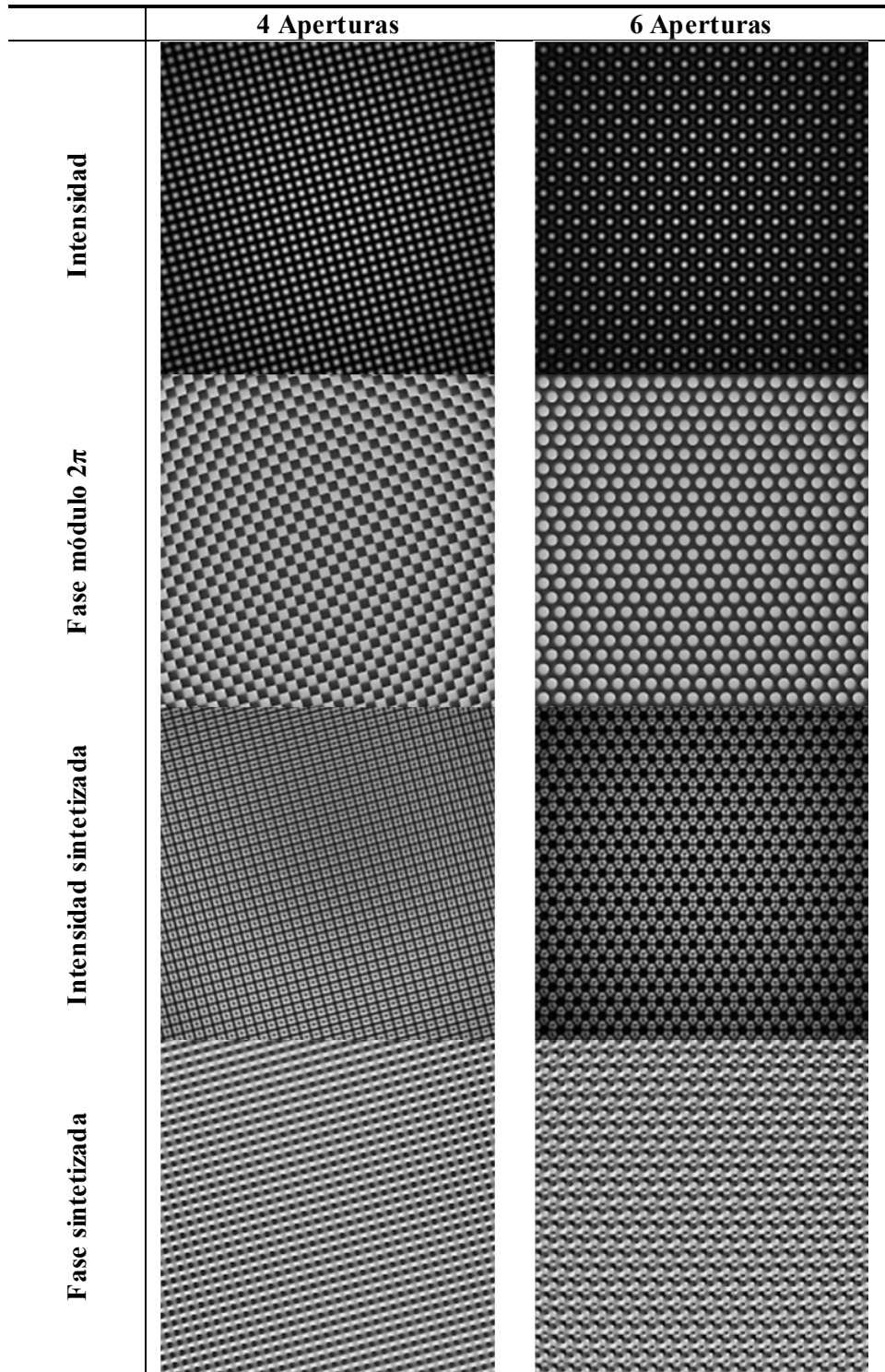


Tabla 5.1B. Resultados de la aplicación de la transformada vórtice para patrones simulados aplicada a un frente de onda plano, y difractado por una máscara con múltiples aperturas.



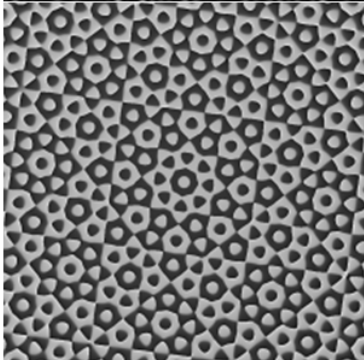
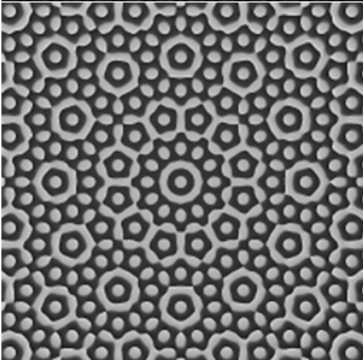
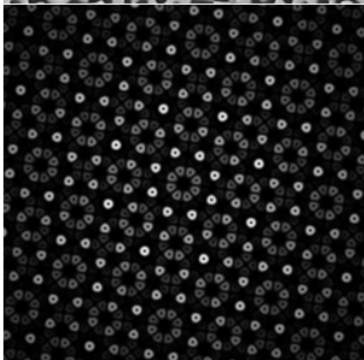
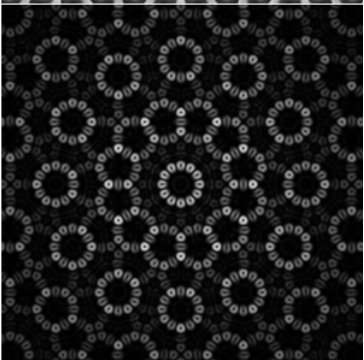
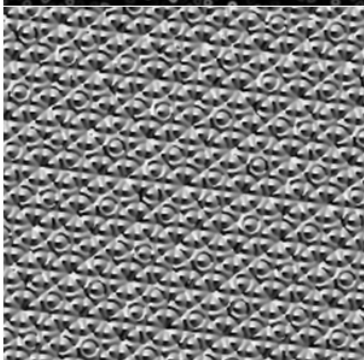
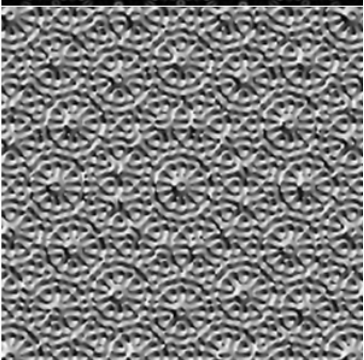
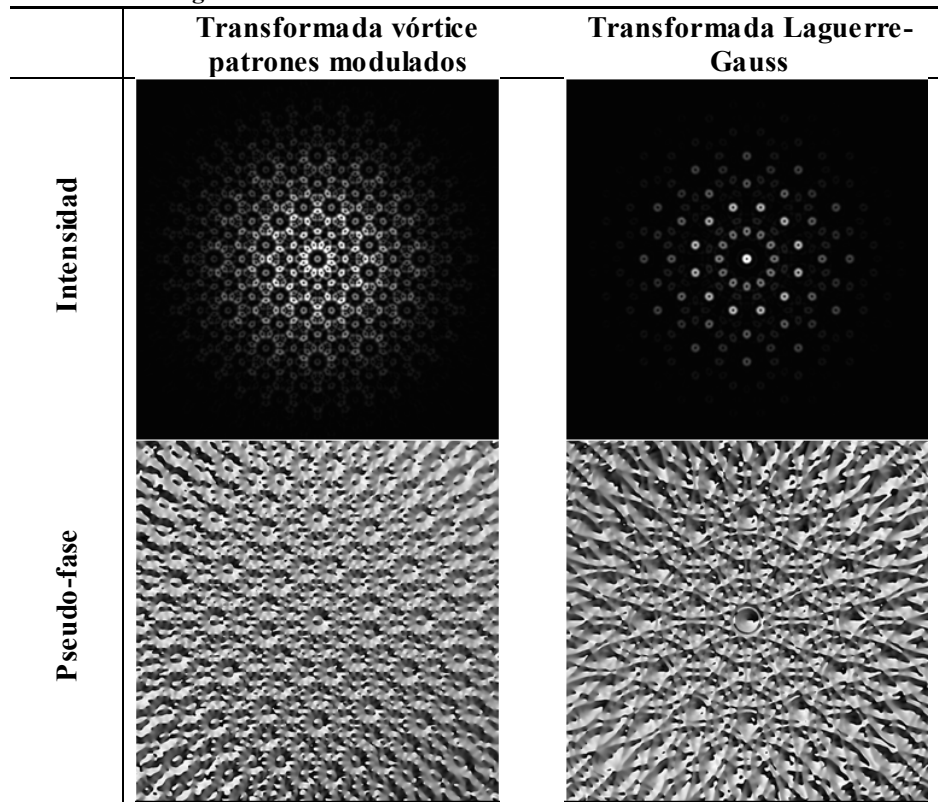
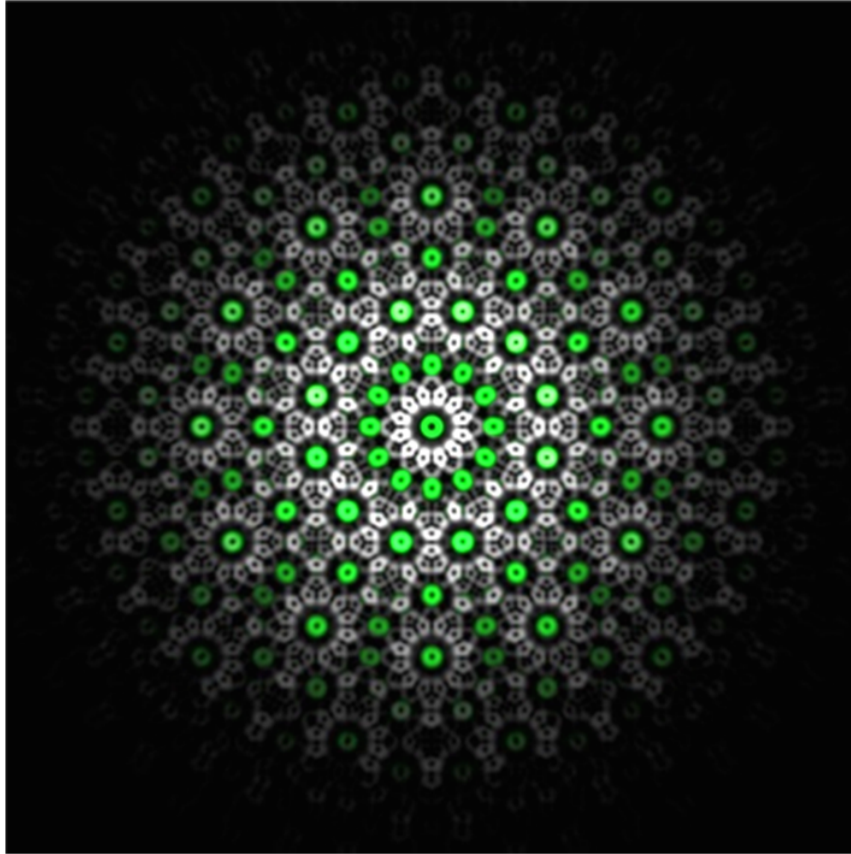
	8 Aperturas	12 Aperturas
Intensidad		
Fase módulo 2π		
Intensidad sintetizada		
Fase sintetizada		

Tabla 5.2. Resultados simulados para la síntesis de la luz difractada por una máscara con 12 aperturas usando la transformada vórtice para patrones modulados y la transformada Laguerre-Gauss



En la columna izquierda se presenta la intensidad y pseudo-fase de los mapas obtenidos empleando la transformada vórtice de patrones modulados, los resultados del empleo de la transformada de Laguerre-Gauss se presentan en la columna derecha. En estos resultados se hace evidente la información que se pierde de la modulación por el empleo de la transformada de Laguerre-Gauss, por otro lado cuando se emplea la transformada vórtice para patrones modulados se preserva esta información, debido al uso de las componentes de alta frecuencia del campo introducidas por la modulación. La superposición de las intensidades obtenidas por las dos transformaciones integrales lineales se presenta en la Fig. 5.4 donde se puede observar claramente que la transformada vórtice para patrones modulados no sólo incluye la información obtenida por la transformada de Laguerre-Gauss, sino que también presenta información que esta transformada no puede resolver debido a la naturaleza de su filtro.

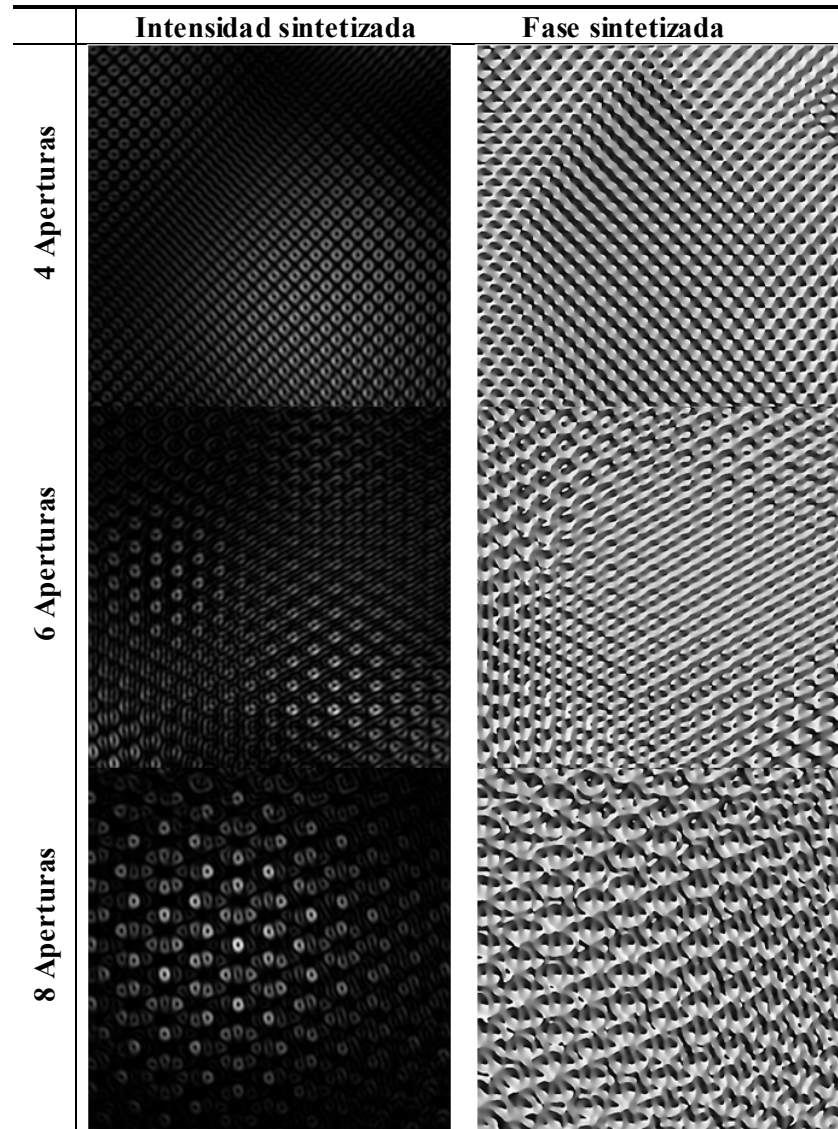


. *Fig. 5.4. Superposición de los mapas de intensidad obtenidos por la transformada vórtice para patrones modulados y la transformada Laguerre-Gauss. Las regiones de coincidencia se presentan coloreadas en verde.*

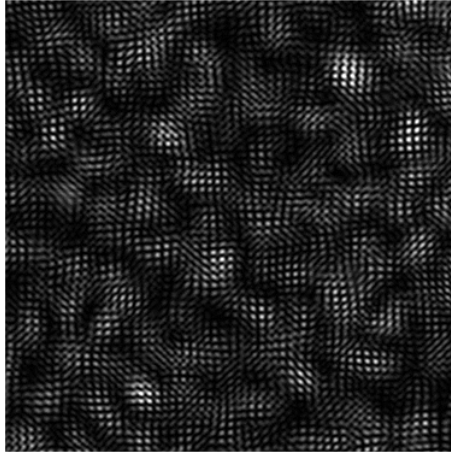
5.2.3.2 Speckle modulado

La Tabla 5.3 presenta los resultados simulados para patrones de speckle modulado obtenidos por la luz difractada por máscaras que contienen 4, 6 y 8 aperturas a las que se les superpone un difusor; el diámetro de cada apertura es de 13 píxeles, y están localizadas sobre una circunferencia de radio de 200 píxeles. El ancho y alto del píxel es de 10 μm . Estas simulaciones son para distribuciones de 2048×2048 píxeles², la luz se propaga una distancia de 1,5 m usando una longitud de onda de 532 nm. En la primera columna se presenta la intensidad sintetizada de los patrones de speckle modulado, y en la segunda la respectiva pseudo-fase del campo complejo generado por el uso de la transformada.

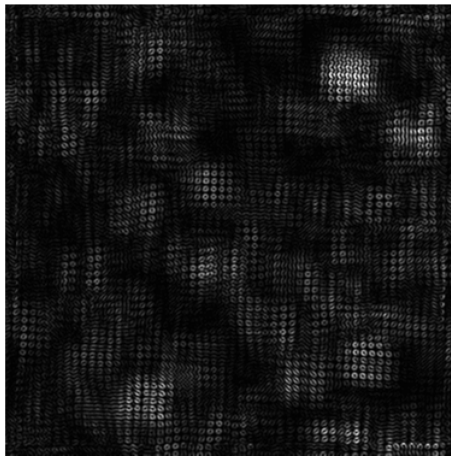
Tabla 5.3 Resultados simulados para la síntesis de patrones de speckle modulado generados por la luz difractada por máscaras con 4, 6 y 8 aperturas superpuestas a un difusor.



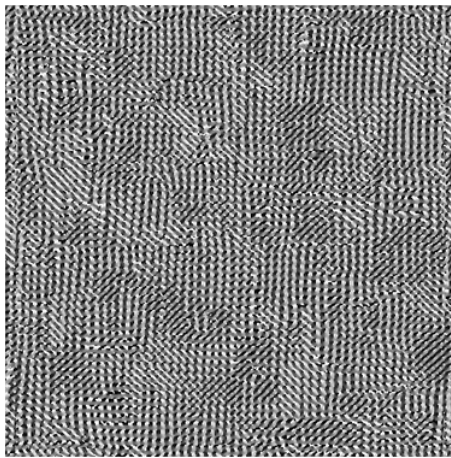
Los resultados experimentales de la intensidad y pseudo-fase obtenidos cuando se usa la transformada vórtice para patrones modulados de un patrón de speckle modulado se presentan en la Fig. 5.5. Un difusor se superpone con una máscara de 4 aperturas como se presenta en la Fig. 5.3 b); el diámetro de cada apertura es de 2,25 mm, situadas sobre una circunferencia de radio 1 cm; se emplea una cámara CMOS con un tamaño de píxel de 3,5 μ m, el área del sensor es de 1280 \times 960 píxeles², luego se corta la imagen a una imagen cuadrada de 960 \times 960 píxeles² para simplicidad en el cálculo. La distancia de propagación es de 0,49 m y se usa una longitud de onda de 532 nm.



a)



b)



c)

Fig. 5.5 Resultados experimentales para patrones de speckle modulados sintetizados usando la transformada vórtice para patrones modulados. En a) registro de intensidad de speckle, en b) intensidad del campo complejo sintetizado, y en c) mapa de pseudo-fase

Los patrones de speckle presentan una estructura de modulación interna donde aparecen singularidades de fase relacionadas con la transformada vórtice. Nótese que con la transformada propuesta es posible localizar singularidades de fase en las estructuras de modulación interna, aun cuando la modulación es un fenómeno local.

5.3 Conclusiones

La asignación de funciones de valores complejos a partir de funciones de valores reales por medio de las transformaciones integrales lineales están determinadas por el *kernel* de transformación que se use, y cada una de estas transformaciones tiene un propósito particular. En el caso de las técnicas convencionales de metrología de vórtices ópticos, las transformaciones más comúnmente usadas son las transformadas de Riesz y Laguerre-Gauss. Estas transformadas son empleadas para sintetizar patrones de speckle o con estructuras similares al speckle.

Si por alguna razón dichas estructuras contienen componentes de alta frecuencia como en el caso del speckle modulado, las transformaciones convencionales no son adecuadas para la síntesis de las mismas debido a que la transformada Riesz conduce a la obtención de singularidades de fase inestables y la transformada Laguerre-Gauss hace un corte de frecuencias debido a la inclusión de una estructura toroidal en su amplitud compleja, lo que implica una pérdida de información de alta frecuencia que es propia al campo. En tal virtud, en este capítulo se propone una transformación integral que contiene las componentes en frecuencias altas y además no conduce a la generación de singularidades de fase inestables en el campo complejo obtenido.

Esta nueva transformada sirve entonces para la síntesis y análisis de patrones modulados en el contexto de la metrología de vórtices ópticos, debido a que permite la generación de campos complejos para el estudio de las singularidades de fase, que incluyen componentes en frecuencias altas sin pérdida de resolución. La comparación entre la transformada de Laguerre-

Gauss y la transformada propuesta permite mostrar la competencia de la transformada para resolver patrones de intensidad modulados con componentes de alta frecuencia, haciendo evidente que la transformada vórtice para patrones modulados incluye los resultados para el campo complejo obtenido mediante la transformada de Laguerre-Gauss y adicionalmente resuelve regiones con contenido en frecuencias altas, lo que presenta una mayor concordancia con los campos complejos de intensidad y fase módulo 2π . Con el fin de establecer estas comparaciones, se presentan los mapas de intensidad y pseudo-fase obtenidos cuando se usa la transformada vórtice para patrones modulados sobre el campo generado por la luz difractada por una máscara con múltiples aperturas a la que puede anexarse o no un difusor.

5.4 Bibliografía

- [5.1]. Angel, L., Tebaldi, M., Bolognini, N., & Trivi, M. (2000). Speckle photography with different pupils in a multiple-exposure scheme. *JOSA A*, 17(1), 107-119.
- [5.2]. Weinberger, H., & Almi, U. (1971). Interference method for pattern comparison. *Applied optics*, 10(11), 2482-2487.
- [5.3]. Zhou, S., Fu, Y., Tang, X., Hu, S., Chen, W., & Yang, Y. (2008). Fourier-based analysis of moiré fringe patterns of superposed gratings in alignment of nanolithography. *Optics express*, 16(11), 7869-7880.
- [5.4]. Fienup, J. R. (2013). Phase retrieval algorithms: a personal tour [invited]. *Applied Optics*, 52(1), 45-56.
- [5.5]. Gai, S., & Da, F. (2010). Fringe image analysis based on the amplitude modulation method. *Optics express*, 18(10), 10704-10719.
- [5.6]. Rajshekhar, G., Gorthi, S. S., & Rastogi, P. (2012). Estimation of multiple phases from a single fringe pattern in digital holographic interferometry. *Optics express*, 20(2), 1281-1291.
- [5.7]. Berkhout, G. C. G., & Beijersbergen, M. W. (2009). Using a multipoint interferometer to measure the orbital angular momentum of light in astrophysics. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 11(9), 094021.
- [5.8]. Li, Z., Zhang, M., Liang, G., Li, X., Chen, X., & Cheng, C. (2013). Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination. *Optics express*, 21(13), 15755-15764.

- [5.9]. Gomez-Tejada, D., Sierra-Sosa, D., Castañeda, R., & Angel-Toro, L. (2013, November). Effect of the internal modulation of speckles in displacement measurements in optical vortex metrology. In 8th Ibero American Optics Meeting/11th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Applications (pp. 87858C-87858C). International Society for Optics and Photonics.
- [5.10]. Stark, H. (Ed.). (1987). Image recovery: theory and application. Elsevier.
- [5.11]. Guo, C. S., Han, Y. J., Xu, J. B., & Ding, J. (2006). Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters. *Optics letters*, 31(10), 1394-1396.
- [5.12]. Wang, W., Ishii, N., Hanson, S. G., Miyamoto, Y., & Takeda, M. (2005). Phase singularities in analytic signal of white-light speckle pattern with application to micro-displacement measurement. *Optics communications*, 248(1), 59-68..
- [5.13]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Wada, A., Miyamoto, Y., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology for nanometric speckle displacement measurement. *Optics express*, 14(1), 120-127.
- [5.14]. Wang, W., Yokozeki, T., Ishijima, R., Takeda, M., & Hanson, S. G. (2006). Optical vortex metrology based on the core structures of phase singularities in Laguerre-Gauss transform of a speckle pattern. *Optics Express*, 14(22), 10195-10206.
- [5.15]. Wang, W. Hanson, S.G., Takeda, M. (2011) in: G.H. Kaufmann (Ed.), *Advances in Speckle Metrology and Related Techniques*, Wiley-VCH, 207

6.1 Conclusiones

En el presente documento se presentó un compendio del estudio de las singularidades de fase en campos de speckle de valores complejos, estos campos fueron obtenidos mediante el uso de transformaciones integrales lineales, y orientados al caso concreto de la metrología de vórtices ópticos. Con este fin, se estudiaron las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos y sus rangos de aplicabilidad cuando hay decorrelación entre los diferentes patrones de speckle que fueron objeto de estudio.

Adicionalmente se propusieron técnicas basadas en el análisis de Fourier de máscaras con arreglos de aperturas basadas en las singularidades de fase presentes en dichos campos y que sirven de marcadores en los mismos, esto permite extender el rango de aplicabilidad de la metrología de vórtices convencional.

Finalmente, se evaluó la validez de las transformadas Riesz y Laguerre-Gauss, que son de común uso en la metrología de vórtices, cuando estas se aplican en la síntesis de patrones de speckle modulados, llegando a la conclusión que estas transformaciones no son las más apropiadas para dicho fin; por tal motivo se propuso una nueva transformación integral lineal que llamamos transformada vórtice para patrones modulados y que debido a sus propiedades conserva la riqueza en frecuencias propia de los patrones con modulación, lo que la convierte en una herramienta adecuada para la síntesis de dichos campos.

En concreto, se investigó la influencia de la decorrelación en diferentes distribuciones de speckle luego que un movimiento rígido en el plano tiene lugar, y los desplazamientos asociados son cuantificados empleando las técnicas convencionales de la metrología de vórtices ópticos. Con el fin de

establecer un criterio de comparación se implementaron dos arreglos experimentales para el registro de imágenes de patrones de speckle con y sin efecto de la decorrelación. Los cambios en la forma de los granos de speckle están asociados con la migración de los vórtices a posiciones cercanas al mismo, lo que produce cambios en la estructura del núcleo. Se mostró que estos efectos tienen una influencia negativa en los resultados analizados con las herramientas convencionales de la metrología de vórtices, específicamente cuando se usan para realizar medidas de desplazamientos uniformes en el plano de una superficie difusora.

En esta dirección, se presentaron evidencias experimentales que permiten concluir que bajo las restricciones impuestas por la decorrelación del speckle, la confiabilidad de los métodos tradicionales de la metrología de vórtices ópticos disminuye. Efecto producido por la dificultad inherente de obtener histogramas de fácil lectura, hecho que está relacionado con la disminución del número de vórtices homólogos que pueden ser seguidos durante el proceso, y el ruido relacionado con la imposibilidad de imponer un carácter restrictivo en la selección de vórtices homólogos. Se observó que después de un segundo proceso de interrogación para realizar el emparejamiento de los vórtices homólogos usando la información aproximada para el desplazamiento, la cantidad de vórtices homólogos en los histogramas refinados es menor, y las distribuciones son más dispersas cuando se comparan con aquellas obtenidas para los desplazamientos asociados a patrones de speckle sin decorrelación, como resultado se obtiene una medida con una certeza menor.

Con el propósito de superar estas restricciones, se propuso una nueva técnica para realizar medidas en un rango donde tanto las técnicas de metrología de vórtices como las de fotografía speckle son proclives a presentar errores dadas sus limitaciones. La técnica se basa en dos pilares fundamentales: Primero, se usan patrones de speckle reales como marcadores de superficie para analizar las redes de vórtices y los efectos de la decorrelación; Segundo, se forman franjas de correlación de vórtices ópticos a partir de la generación de máscaras de redes de vórtices sintetizadas mediante

técnicas propias de la óptica de Fourier. En particular, se mostró que es posible obtener franjas de Young cuando se realiza una transformada de Fourier de la luz difractada por una máscara generada a partir de aperturas de un píxel de diámetro, situadas en los lugares donde se encuentran los vórtices, y sintetizadas a partir de los registros antes y después de un desplazamiento lateral de un difusor. Se mostró que se puede realizar el análisis de franjas tal y como se realiza en las técnicas convencionales de la fotografía speckle, lo que conduce a una concordancia plena en el rango en el que ambas técnicas son confiables.

El incremento en el rango de medida es logrado cuando se implementa una técnica híbrida entre la metrología de vórtices y la fotografía speckle. Reduciendo el tamaño de los marcadores en las técnicas convencionales de fotografía speckle es posible obtener halos de difracción mayores y aumentar la proximidad de los marcadores encontrados entre ambos registros. En consecuencia, es posible realizar mediciones de desplazamientos menores que los alcanzados en la técnica de fotografía speckle y mayores que aquellos de la metrología de vórtices convencional.

Como una continuación natural de esta técnica, se mostró que en las franjas de correlación de redes de vórtices sintéticas es posible hacer uso de la localización sub-píxel de los vórtices en los mapas de pseudo-fase generados a partir de las imágenes registradas, antes y después de un desplazamiento. Los sistemas de franjas sintéticos de Young son obtenidos mediante la superposición incoherente de múltiples sistemas de franjas individuales, cada uno de los cuales está asociado con la interferencia de la luz proveniente de diferentes pares de radiadores puntuales, cuya posición está determinada por la localización de los pares de vórtices homólogos. Este método permite realizar una medida precisa en un rango extendido de desplazamientos, en comparación con las técnicas convencionales de la metrología de vórtices cuando hay efectos de decorrelación entre los patrones registrados.

De esta forma se incrementó la precisión de la medida, dado que se emplea la información de la posición sub-píxel de los vórtices, el ruido de speckle no

afecta la calidad de las franjas, y se evitan las contribuciones de los sistemas relacionados a parejas de vórtices no homólogos en la transformada de Fourier. Adicionalmente, al evitar la restricción de la superposición de las aperturas de un píxel de diámetro, es posible realizar medidas de magnitudes de desplazamientos aún más pequeñas.

El método presentado no está restringido al estudio de desplazamientos relativos donde no hay efectos aparentes de la decorrelación. Al usar este método, aunque la visibilidad de las franjas se reduce cuando se va del centro del registro a los extremos de los sistemas de franjas, a medida que la decorrelación aumenta, es posible incrementar la visibilidad de las mismas re-escalando el periodo de las franjas cuando se ajusta el factor de escala en el argumento del coseno de la función de composición.

Siguiendo esta línea de pensamiento, cualquier mejora en la aplicación de las singularidades de fase, en el contexto de la metrología de vórtices ópticos, puede estar basada en formas alternativas de síntesis de los resultados obtenidos a partir de las herramientas básicas de la técnica, en la generación de formas alternativas de procesamiento de los registros (en este caso registros de intensidad), entre otros.

En estas técnicas, el procesamiento de los registros se hace mediante la asignación de funciones de valores complejos a partir de funciones de valores reales, por medio de las transformaciones integrales lineales. Estas transformaciones están determinadas por su *kernel* de transformación, y cada una de estas transformaciones tiene un propósito particular. En el caso de las técnicas convencionales de metrología de vórtices ópticos, las transformaciones más comúnmente usadas son las transformadas de Riesz y Laguerre-Gauss. Estas transformadas son empleadas para sintetizar patrones de speckle o con estructuras similares al speckle. Si por alguna razón dichas estructuras contienen componentes de alta frecuencia como es el caso del speckle modulado, las transformaciones convencionales no son adecuadas para la síntesis de las mismas, debido a que la transformada Riesz conduce a la obtención de singularidades de fase inestables y la transformada Laguerre-

Gauss hace un corte de frecuencias debido a la inclusión de una estructura toroidal en su amplitud compleja, esto implica una pérdida de información de alta frecuencia que es propia del campo. En tal virtud, se propuso una transformación integral que contiene las componentes de alta frecuencia y además no conduce a la generación de singularidades de fase inestables en el campo complejo obtenido.

Esta nueva transformada sirve entonces para la síntesis y análisis de patrones modulados en el contexto de la metrología de vórtices ópticos, debido a que permite la generación de campos complejos para el estudio de las singularidades de fase, que incluyen componentes de alta frecuencia sin pérdida de resolución. La comparación entre la transformada de Laguerre-Gauss y la transformada propuesta permite mostrar la competencia de la transformada para resolver patrones de intensidad modulados con componentes de alta frecuencia, haciendo evidente que la transformada vórtice para patrones modulados incluye los resultados para el campo complejo obtenido mediante la transformada de Laguerre-Gauss y adicionalmente resuelve regiones con contenido de frecuencias alto, lo que presenta una mayor concordancia con los campos complejos de intensidad y fase módulo 2π .

6.2 Perspectivas

Durante el desarrollo del trabajo que motivó la presente tesis para optar al título de Doctor en la Facultad de Ciencias Exactas, se estudiaron las singularidades de fase con aplicaciones a las técnicas de la metrología de vórtices ópticos. Una vez establecidos los rangos de aplicación en dichas técnicas, cuando se procesan patrones de speckle que se decorrelacionan entre los diferentes registros, se propusieron dos alternativas de mejora. En primer lugar una alternativa de mejora orientada hacia el análisis de los campos complejos obtenidos mediante las técnicas de procesamiento de la información convencionales (transformada Riesz y Laguerre-Gauss), basada en el análisis de Fourier de máscaras generadas con las redes de vórtices asociadas a cada patrón de speckle. Este análisis puede realizarse desde la transformación

directa de dichas máscaras, o desde el análisis de la superposición incoherente de los sistemas de franjas obtenidos por cada uno de los pares de aperturas formados por los vórtices homólogos.

En segundo lugar se propone una mejora basada en el procesamiento de la información de intensidad de los patrones. Se propuso una nueva transformación integral lineal para la síntesis de patrones de speckle modulado, ya que se observó que las transformaciones de común uso no son adecuadas para la síntesis de patrones de intensidad con componentes de frecuencia altas; se observó que la transformada Riesz introduce componentes espurias en el campo complejo al no realizar ninguna suerte de filtrado en amplitud, y la transformada de Laguerre-Gauss aunque posee un filtro pasa banda en amplitud en su *kernel* de transformación, filtra las altas frecuencias de los patrones modulados. En respuesta a estas limitaciones, la transformada vórtice para patrones modulados propuesta, conserva la diversidad en frecuencias de los registros de intensidad, sin incurrir en la inclusión de singularidades de fase inestables, producto de una mala síntesis de dichos patrones.

En esta última dirección este trabajo tiene objetivos de más largo aliento. La generación de una forma alternativa y novedosa de procesamiento digital de la información, a partir de un registro particular y con una intención establecida, abre una importante puerta a diferentes trabajos futuros. Un ejemplo de esto es la generación de filtros para la recuperación de la información en imágenes con alto nivel de ruido, en estas a partir de la correcta selección de un *kernel* de transformación es posible filtrar diferentes niveles de ruido, extrayendo así la información relevante y con tiempos de cómputo eficientes. Otra posible área de trabajo futuro es el reconocimiento de patrones a partir de la generación de redes de vórtices: A una imagen única hay asociada una única red de vórtices como marcadores de la misma, la ventaja del empleo de estas técnicas es que cada uno de esos marcadores es a su vez único y está asociado con unas propiedades estructurales que le imprimen esa unicidad, obteniendo así redundancia en la información, lo que puede proveer mayor nivel de confiabilidad. Por otro lado, el estudio de las

singularidades de vórtices en dicho trabajo se realizó para campos escalares. Sin embargo, estas singularidades pueden ser de carácter vectorial, lo que presenta una alternativa interesante para diferentes aplicaciones metrológicas, tal puede ser el caso del estudio de frentes de onda, caracterización de sensores, entre otras.

6.3 Trabajos Publicados

El presente documento de tesis dio lugar a las siguientes publicaciones:

- "Novel vortex-transform for high frequency modulated patterns". Daniel Sierra-Sosa, Luciano Angel Toro, Nestor Bolognini, Myrian Tebaldi. Optics Express ISSN: 1094-4087 ed: v.21 fasc.20 p.23706 - 23711 ,2013
- "Effect of the internal modulation of speckles in displacement measurements in optical vortex metrology". Daniel Sierra-Sosa, Luciano Angel Toro, Daniel Alexis Gomez Tejada, Roman Castaneda. Proceedings Of Spie, The International Society For Optical Engineering ISSN: 0277-786X ed: Proceedings Of Spie The International Society For Optical Engineering v.8785 fasc.N/A p.87858C-1 - 87858 ,2013
- "In-plane Displacement measurement in Vortex Metrology by Synthetic Network Correlation Fringes", Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 30, No. 3, 2013
- "Vortex Metrology Using Fourier Analysis Techniques: Vortex Networks Correlation Fringes", Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, Applied Optics, Vol 51, No. 30, 2012

- "Optical Vortex Metrology from Phase Modulo 2π Maps", Daniel Sierra-Sosa, Luciano Angel-Toro, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, FiO/LS Technical Digest OSA, 2012

- "Speckle Decorrelation Influence on Measurements Quality in Vortex Metrology", Luciano Angel-Toro, Daniel Sierra-Sosa, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, Optics Communications, 285, p. 4312-4316, 2012

A.1 Muestreo y el teorema de Shannon-Nyquist

Considere una función 2-dimensional analítica $g(x, y)$ y suponga que se muestrea de manera uniforme en las direcciones x y y , lo que está indicado por

$$g(x, y) \rightarrow g(m\Delta x, n\Delta y) \quad (\text{A.1})$$

donde el intervalo de muestreo es Δx en la dirección x y Δy en la dirección y , y m y n son los valores enteros para los índices de las muestras. Las respectivas tasas de muestreo son $1/\Delta x$ y $1/\Delta y$. En la práctica el espacio muestreado es finito y, se asume que está compuesto por $M \times N$ muestras en las direcciones x y y respectivamente, m y n están definidos comúnmente con los siguientes valores:

$$m = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (\text{A.2})$$

Este es el arreglo estándar de índices donde se asume que M y N son pares. Para un área física finita que se ubica sobre un espacio de muestreo de dimensiones $L_X \times L_Y$ donde L_X es la longitud a lo largo del lado x del espacio de muestreo y L_Y es la longitud a lo largo del lado y . La representación física de las distancias está relacionada con los parámetros de muestreo por las relaciones

$$L_X = M\Delta x, \quad L_Y = N\Delta y \quad (\text{A.3})$$

Una condición de los criterios para el muestreo es que todos los valores significativos de una función $g(x, y)$ se encuentren dentro del área de muestreo $L_X \times L_Y$. Para garantizar que la función este dentro del área de muestreo debe satisfacerse que si D_X es el rango de valores de la función en la dirección x y D_Y es el rango de la función en la dirección y , entonces

$$D_X < L_X, \quad D_Y < L_Y \quad (\text{A.4})$$

Otra condición que debe cumplirse es que los intervalos de muestreo sean lo suficientemente pequeños para conservar todas las propiedades de las

funciones que sean objeto de estudio. Para funciones que han sido filtradas en frecuencias por un filtro pasa-banda, donde el contenido espectral de la señal está limitado a un rango finito de frecuencias, una función continua puede ser recuperada completamente a partir de las muestras si el intervalo de muestreo es más pequeño que un valor específico [A.1-A.4]. El teorema de Shannon-Nyquist, extendido a dos dimensiones, propone que este requerimiento es:

$$\Delta x < \frac{1}{2B_X}, \Delta y < \frac{1}{2B_Y} \quad (\text{A.5})$$

donde B_X es el ancho de banda del espectro de la función continua a lo largo de la dirección x , y B_Y a lo largo de la dirección y . Si no se cumple la condición de la ecuación (A.5) se obtienen resultados con *aliasing*, en el cual las altas frecuencias sub-muestreadas se interpretan de manera errónea como bajas frecuencias. Para conocer la máxima frecuencia espacial que puede ser representada adecuadamente dados los intervalos Δx y Δy se emplea la frecuencia de Nyquist de la ecuación (A.6), que es un medio de la tasa de muestreo [A.1].

$$f_{NX} = \frac{1}{2\Delta x}, f_{NY} = \frac{1}{2\Delta y} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Discretización de la transformada integral de Fresnel

Para efectos de cómputo de la transformación integral de Fresnel de forma discreta, se consideran los planos de entrada y salida como un arreglo matricial discreto de píxeles de dimensiones $m \times n$, sobre los cuales opera la transformada.

En la Fig. A.1 se muestra la representación de la discretización de los planos, empleando una matriz rectangular de dimensiones N_x y N_y correspondiente al plano de entrada de coordenadas espaciales (ξ, η) , en las cuales, para cada píxel se asignan las dimensiones Δx_h y Δy_h en las direcciones ξ y η , respectivamente; expresando las coordenadas del plano de entrada como $k\Delta x_h$ y $l\Delta y_h$ y las del plano de salida $m\Delta x_i$ y $n\Delta y_i$ donde k, l, m

y n son números enteros, la Transformada de Fresnel discreta está definida como:

$$E(m,n,z) = \frac{iE_0 e^{-ikz}}{\lambda z} e^{\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} (m^2 \Delta x_i^2 + n^2 \Delta y_i^2) \right]}$$

$$\sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} h(k,l) e^{\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} (k^2 \Delta x_h^2 + l^2 \Delta y_h^2) \right]} e^{\left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (k \Delta x_h m \Delta x_i + l \Delta y_h n \Delta y_i) \right]}$$
(A.7)

donde $m=0,1,2,\dots, N_x-1$, $n=0,1,2,\dots, N_y-1$, Δx_i y Δy_i son las dimensiones para los pixeles del plano de salida, E es el campo complejo del plano de salida, y E_0 y $h(k,l)$ la amplitud y el campo complejo del plano de entrada respectivamente.

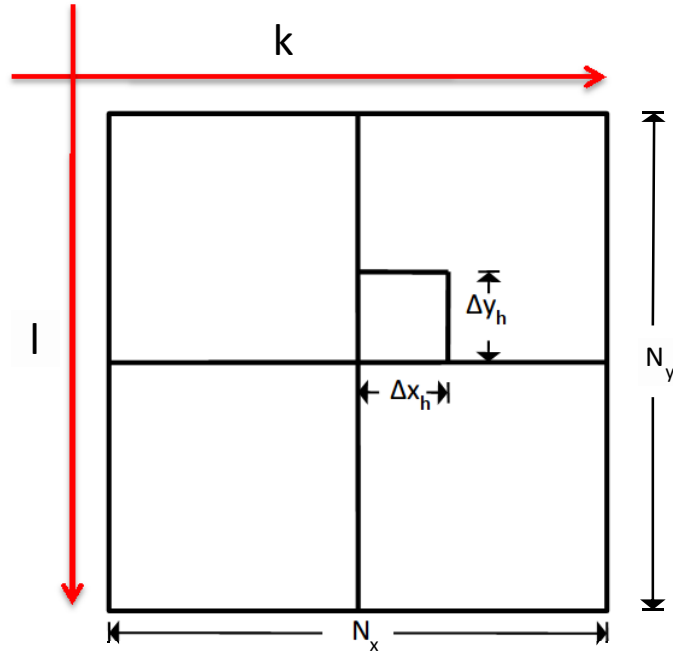


Fig. A.1 Representación de la matriz para la discretización del plano de entrada de la transformada

Reordenando los términos en la ecuación (A.7) se obtiene:

$$E(m,n,z) = \frac{iE_0 e^{-ikz}}{\lambda z} e^{\left[\frac{-i\pi}{\lambda z} \left(\frac{m^2 \Delta x_h^2}{N_x^2} + \frac{n^2 \Delta y_h^2}{N_y^2} \right) \right]}$$

$$\sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{l=0}^{N_y-1} H(k,l) e^{\left[2\pi i \left(\frac{km}{N_x} + \frac{ln}{N_y} \right) \right]}$$
(A.8)

donde

$$H(k,l) = h(k,l) e^{\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} \left(k^2 \Delta x_h^2 + l^2 \Delta y_h^2 \right) \right]} \quad (\text{A.9})$$

lo que permite expresar la Transformada Discreta de Fresnel en la forma

$$E(m,n,z) = \frac{iE_0 e^{-ikz}}{\lambda z} e^{\left[-\frac{i\pi}{\lambda z} \left(\frac{m^2 \Delta x_h^2}{N_x^2} + \frac{n^2 \Delta y_h^2}{N_y^2} \right) \right]} \text{FFT}[H(k,l)] \quad (\text{A.10})$$

Aquí $\text{FFT}[H(k,l)]$ representa la *Transformada Rápida de Fourier Discreta* evaluada en $f_x = k\Delta x_h/\lambda z$ y $f_y = l\Delta y_h/\lambda z$ de la función de transmitancia de amplitud por el término que la acompaña como se observa en la ecuación (A.9) [A.3, A.4]

A.3 Localización de vórtices por el método de residuos

Para la correcta localización con precisión píxel de las diferentes singularidades de fase presentes en un campo complejo, se emplea una modificación de los algoritmos de residuos de Goldestein para el desenvolvimiento de fase [A.5]. El procedimiento se realiza a partir de los mapas matriciales de fase módulo 2π o pseudo-fase. En cada caso se estima el valor del gradiente entre todas las posibles parejas de píxeles en torno a un punto, la Fig. A.2 presenta el entorno de dicho punto arbitrario para una representación matricial. Definido de esta forma los gradientes para cada caso son:

$$\Delta_1 = \psi(m, n+1) - \psi(m, n) \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta_2 = \psi(m+1, n+1) - \psi(m, n+1) \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta_3 = \psi(m+1, n) - \psi(m+1, n+1) \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta_4 = \psi(m, n) - \psi(m+1, n) \quad (\text{A.14})$$

Teniendo en cuenta que en un campo continuo, el resultado de una integral de línea alrededor de un punto y siguiendo una trayectoria cerrada, debe ser igual a cero; las singularidades de fase son localizadas al computar la suma de cada uno de los residuos para todas las posibles trayectorias cerradas. Este proceso es llevado a cabo realizando cuatro traslaciones sucesivas de un píxel

de la matriz (superior-izquierda, superior-derecha, inferior-izquierda e inferior-derecha), de manera tal que para cada píxel de la matriz es posible obtener los cuatro gradientes de las ecuaciones (A.11-A.14). Luego, la suma de dichos gradientes para cada punto da como resultado el residuo de la función, si este es diferente de cero en torno a ese conjunto de píxeles hay una discontinuidad [A.6]. De esta forma es posible identificar todas las singularidades de fase de un campo complejo representado matricialmente [A.7]

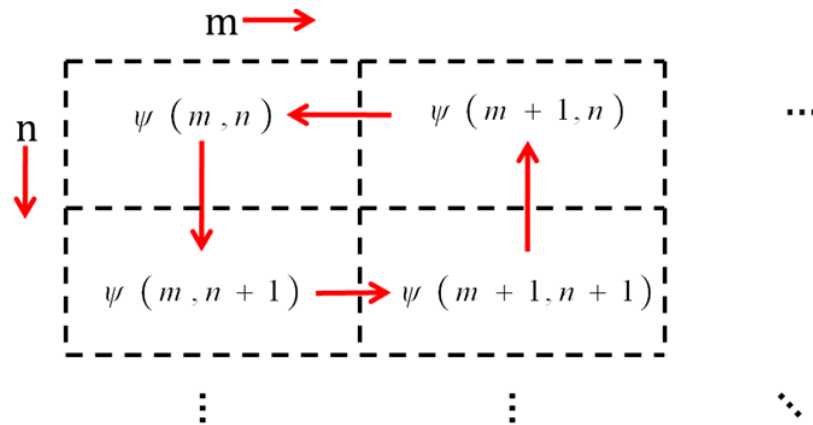


Fig. A.2 Representación de la matriz en torno a una singularidad de fase.

A.4 Bibliografía

- [A.1]. Poon, T. C., & Kim, T. (2006). Engineering optics with MATLAB. World Scientific.
- [A.2]. Bracewell, R. N., & Bracewell, R. N. (1986). The Fourier transform and its applications (Vol. 3 1999). New York: McGraw-Hill.
- [A.3]. Schmidt, J. D. (2010, July). Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB. Washington: SPIE.
- [A.4]. Voelz, D. G. (2011). Computational fourier optics: a MATLAB tutorial. Spie Press.
- [A.5]. Osten, W. (2006). Fringe 2005: The 5th International Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [A.6]. Marsden, J. E., & Hoffman, M. J. (1999). Basic complex analysis. Macmillan.

[A.7]. Ghiglia, D. C., & Pritt, M. D. (1998). Two-dimensional phase unwrapping: theory, algorithms, and software (pp. 2-6). New York:: Wiley.