



INIFTA-IFLYSIB
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Tesis Doctoral

**Estudio de la Dinámica Fuera de
Equilibrio en Modelos con
Interacciones de Largo Alcance**

Lic. Diego E. Rodriguez

Director: Dr. Ezequiel V. Albano
Co-Directora: Dra. Marisa A. Bab

Año 2013

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Transiciones de Fase y fenómenos críticos en equilibrio	5
1.1.1. Las leyes de escala en la proximidad del punto crítico	9
1.1.2. La Teoría del Grupo de Renormalización	12
1.2. Fenómenos críticos en sistemas de partículas con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia	15
1.3. Los Sistemas Fuera del Equilibrio	17
1.3.1. Los sistemas “apartados” del equilibrio	18
1.3.2. La dinámica en sistemas “sin equilibrio”	21
1.4. Objetivos	23
2. Método	28
2.1. Observables y Estimadores en la Mecánica Estadística	28
2.2. El método Monte Carlo	29
2.2.1. El método MC de muestreo “simple”	29
2.2.2. El Método MC de muestreo “de importancia”	30
2.3. Los Modelos Utilizados	31
2.3.1. El modelo de Ising-LA	31
2.3.2. El Modelo de Votante con probabilidad de enlaces de largo alcance	35
2.3.3. El Modelo de Votante con Vuelos de Lèvy	38
2.3.4. El Modelo ferromagnético de Ising con dinámica Glauber-Lèvy (Ising-GL)	39
3. Estudio de la dinámica crítica del modelo de Ising con interacciones de largo alcance	44
3.1. Antecedentes	44
3.2. Detalle de las simulaciones	47
3.3. Resultados y Discusión	47
3.3.1. La determinación del punto crítico T_c	47
3.3.2. Los exponentes críticos	53
3.4. Conclusiones	61
4. Estudio de la dinámica del Modelo de Votante con interacciones de largo alcance	63
4.1. Antecedentes	63

4.2.	Detalle de las simulaciones	65
4.3.	Resultados y Discusión	65
4.3.1.	Análisis y discusión de la dinámica de evolución	65
4.3.2.	Formación de dominios magnéticos “aglomerados”	69
4.3.3.	El estudio de los efectos de tamaño finito	72
4.3.4.	La distribución de distancias de interacción	76
4.4.	Conclusiones	78
5.	Estudio de la dinámica del Modelo de Votante con vuelos de Lèvy	81
5.1.	Antecedentes	81
5.2.	Detalle de las simulaciones	81
5.3.	Resultados y Discusión	82
5.3.1.	La dinámica de la densidad de interfaces	82
5.3.2.	Los efectos de tamaño finito	86
5.3.3.	Las configuraciones del sistema	90
5.4.	Conclusiones	92
6.	Estudio de la dinámica crítica del modelo de Ising ferromagnético con vuelos de Lèvy	94
6.1.	Antecedentes	94
6.2.	Detalles de las simulaciones	95
6.3.	Resultados y Discusión	95
6.3.1.	Determinación del intervalo de validez de las leyes de potencia correspondientes a la dinámica crítica de relajación	95
6.3.2.	Los efectos de tamaño finito	96
6.3.3.	Determinación de los exponentes críticos mediante la dinámica de relajación	98
6.3.4.	Determinación de los exponentes críticos mediante la dinámica de tiempos cortos	100
6.4.	Conclusiones	105
7.	Conclusiones Generales	107
7.0.1.	Sobre la dinámica de modelos con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia	107
7.0.2.	El uso de vuelos de Lèvy para simular la dinámica de modelos con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia.108	108

Resumen

Este trabajo de tesis aborda el estudio de la dinámica fuera de equilibrio en sistemas con interacciones de largo alcance que decaen de manera algebraica con la distancia. Para su desarrollo se eligieron dos modelos de espines para incorporar dicha interacción, el modelo de Ising y el modelo de Votante. El primero entendido como un modelo ferromagnético representante de una amplia clase universal de equilibrio y el segundo como un modelo que define una clase universal de sistemas sin equilibrio que presenta una dinámica de ordenamiento caracterizada por la formación de dominios sin tensión superficial.

En una primer etapa se estudiaron los efectos de incorporar dicha interacción sobre los algoritmos usuales de corto alcance. Respecto al modelo de Ising se utilizó una constante de acoplamiento de la forma $J(r) \sim 1/r^{(d+\sigma)}$ (Ising-LA), para estudiar la dinámica crítica en dimensión $d = 1$ a partir de simulaciones Monte Carlo. En este caso el interés es debido a predicciones teóricas de la teoría del grupo de renormalización (GR) y simulaciones Monte Carlo que muestran que en $d = 1$ y para valores del parámetro σ en la región $1/2 < \sigma < 1$ existe un orden de largo alcance, comportamiento que no se corresponde con los del modelo de Ising con interacciones de corto alcance en $d = 1$. Región donde los exponentes críticos resultan ser funciones continuas del parámetro (σ) que regula el decaimiento de la interacción. Los resultados permitieron verificar la validez del estudio de las dinámicas críticas de relajación (DCR) y de tiempos cortos (DCTC) como un método alternativo para obtener los exponentes críticos y que se encuentra libre de los efectos de enlentecimiento crítico.

En el modelo de Votante, se estudiaron los efectos sobre la dinámica fuera de equilibrio al incorporar interacciones probabilísticas que dependen de la distancia de la forma $P(r) \sim 1/r^{(d+\sigma)}$ (Votante-LA) y su dependencia con el valor de σ . Cabe remarcar que para el modelo de Votante no hay antecedentes sobre la incorporación de interacciones de largo alcance, por lo que su dinámica de ordenamiento proporciona un escenario distinto para observar el efecto de la interacción propuesta. Este estudio permitió identificar un comportamiento multidimensional que relaciona los distintos valores de σ con el comportamiento del modelo Votante Estandar MVE en distintas dimensiones.

En una segunda etapa se estudió una manera emular las interacciones de largo alcance propuestas en los modelos anteriores, a partir de modelos de dinámica mixta. Para esto se desarrollaron dos variantes de los modelos mencionados que incorporan sobre las dinámicas usuales de corto alcance (Glauber generalizada y Votante) un intercambio entre espines separados una distancia r pesados con una probabilidad $P(r) \sim 1/r^{(d+\sigma)}$, mecanismo que puede entenderse como un vuelo de Lévy. Modelos que denominamos Ising-GL y Votante-Levy, respectivamente. En el primer caso los resultados verifican la validez del estudio de las dinámicas críticas y demuestra la equivalencia del estado crítico de este modelo con el modelo Ising-LA. Mientras que para el Votante-Levy se reprodujo la dinámica de ordenamiento del Votante-LA para valores representativos de cada régimen observado en el Votante-LA. Por lo que fue posible verificar que este tipo de dinámica reproduce el comportamiento fuera de equilibrio de los respectivos modelos de largo alcance.

Lista de publicaciones en revistas internacionales

- *Effective multidimensional crossover behavior in a one-dimensional voter model with long-range probabilistic interactions*
D. E. Rodriguez, M. A. Bab y E. V. Albano Phys. Rev. E, **83**, 011110 (2011)
- *Study of the nonequilibrium critical quenching and the annealing dynamics for the long-range Ising model in one dimension*
D. E. Rodriguez, M. A. Bab y E. V. Albano J. Stat. Mech. **2011**, P09007 (2011)

Capítulo 1

Introducción

1.1. Transiciones de Fase y fenómenos críticos en equilibrio

Los dos marcos teóricos que conforman hoy en día la base de cualquier estudio de un fenómeno térmico en condiciones de equilibrio son, la Termodinámica que provee una descripción macroscópica y la Mecánica Estadística que pretende modelar estados y procesos termodinámicos como emergentes de fenómenos a escalas microscópicas [1, 2]. Dentro de ésta área, el estudio de transiciones de fase y fenómenos críticos tuvo relevancia por su aplicabilidad para el desarrollo de procesos industriales y por permitir demarcar los límites de validez de diferentes modelos teóricos. La manera de detectar estas transiciones es observando magnitudes que permitan distinguir las distintas fases en una transición. Se llaman “parámetros de control” a las variables de estado porque pueden ser calibradas para aproximarse a un determinado punto del diagrama de fases del sistema. Sin embargo hasta la década del 50 toda una familia de fenómenos termodinámicos de gran importancia como las transiciones de fase continuas no fueron completamente entendidos. El motivo de esto es que en éstas transiciones se manifiestan divergencias en varias magnitudes termodinámicas, que si bien podían ser obtenidas desde diferentes aproximaciones analíticas, como las teorías de Van der Waals, Weiss y Landau, su forma analítica no se correspondía con los resultados experimentales. Para determinar el punto crítico es necesario observar una magnitud que sea no nula en una fase y se anule al ocurrir la transición. Esta magnitud se denomina “parámetro de orden” (PO), nombre de origen histórico introducido por Landau en 1937 para las transiciones de tipo orden-desorden [3]. Si bien, el parámetro de orden utilizado depende del fenómeno a estudiar, como veremos más adelante, en general es una de las derivadas primeras de la energía libre de Gibbs. A modo de ejemplo, podemos mencionar el volumen molar ν utilizado para el sistema líquido-gas, y la magnetización para el sistema ferro-paramagnético. A su vez, las fluctuaciones del parámetro de orden también son parámetros relevantes que se vinculan a la compresibilidad y a la susceptibilidad, respectivamente.

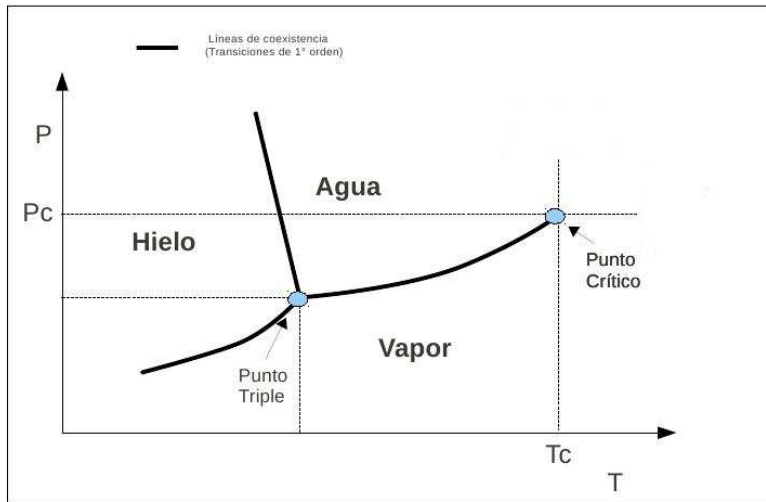
Respecto al tipo de transición se distinguen dos clases:

■ 1) **Transiciones discontinuas:**

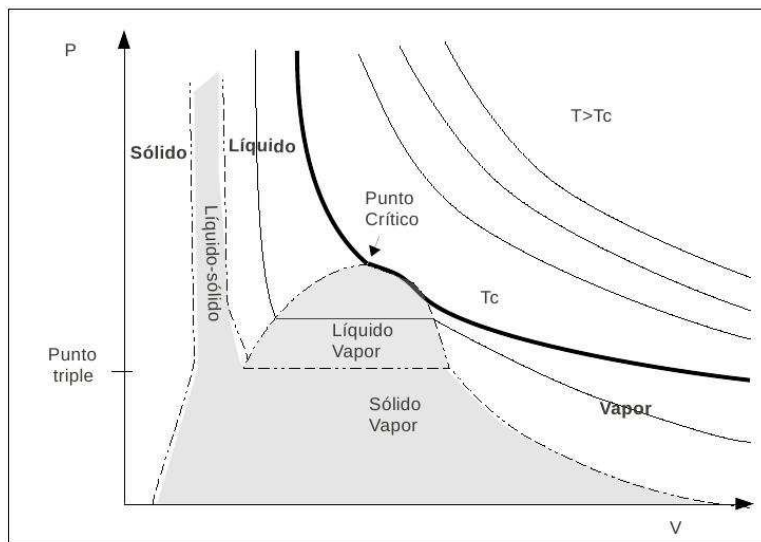
Son aquellas donde el parámetro de orden presenta una discontinuidad en el punto de transición siendo discontinuas las derivadas primeras y de orden superior de la energía libre de Gibbs. Como ejemplos, podemos mencionar el cambio de fase liquido-gas al variar la presión (ebullición) [4], como se ve en las figuras 1.1 (a) y 1.1 (b). Así como en la transición ferromagnética de inversión que ocurre cuando se aplica un campo externo opuesto al estado de magnetización, ver figuras 1.2 (a) y 1.2 (b). En ambos casos el cambio de fase se produce a temperatura constante por debajo del valor crítico (T_c). Otras características relevantes de esta transición son la presencia de calor latente e histéresis, así como metaestabilidad.

■ 2) **Transiciones continuas:**

Se denominan así a las transiciones donde el parámetro de orden cambia de manera continua pero son divergentes las derivadas de orden mayor de la energía libre de Gibbs. En la transición ferro-paramagnética [5] esto se observa al elevar la temperatura del sistema hasta superar la temperatura crítica o de Curie (T_c), como puede verse en los diagramas 1.2 (a) y 1.2 (b). En ése caso, los cambios de la magnetización son continuos respecto de la temperatura reducida definida como $\epsilon = (T - T_c)/T_c$ y en las proximidades del punto crítico se manifiestan con una dependencia como ley de potencia, ver tabla 1.1. Algo análogo se observa en el sistema liquido-gas (ver también las figuras 1.1 (a) y 1.1 (b)). Estas transiciones, como detallaremos más adelante, se relacionan a su vez con la propiedad de invariancia de escala que resultó ser de gran importancia a la hora de sentar las bases de una teoría para fenómenos críticos. Como fue mencionado, la manera de determinar estas transiciones es observando el parámetro de orden y el comportamiento singular en los calores específicos, la compresibilidad o la susceptibilidad magnética, según sea en caso. Estos comportamientos se manifiestan como leyes de potencia en las proximidades del punto crítico. Para el caso de la transición ferro-paramagnética se listan en la tabla 1.1.

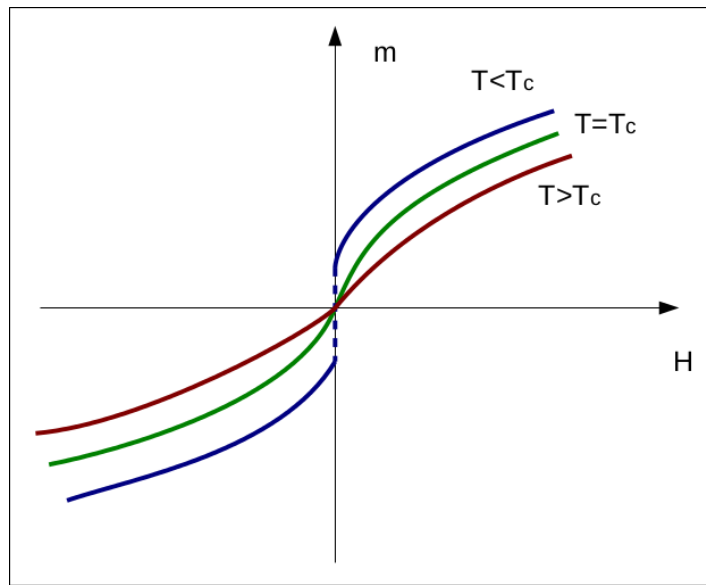


(a) Diagrama P-T

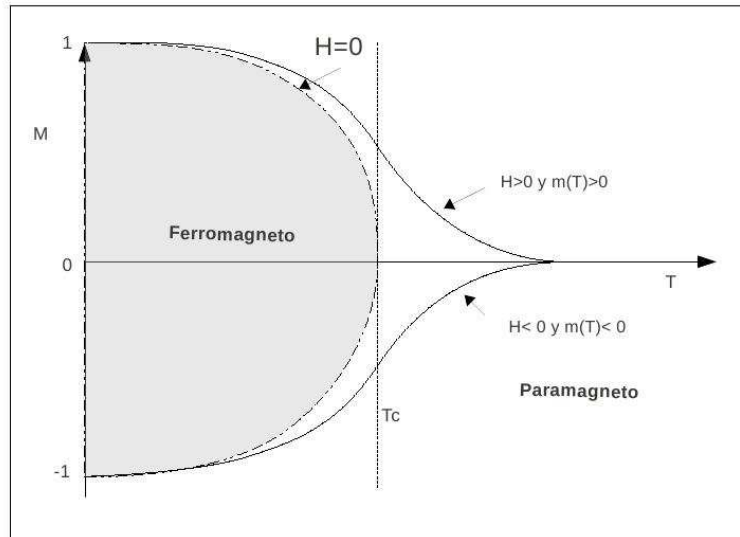


(b) Diagrama P-V

Figura 1.1: En estas figuras se observan dos esquemas representativos, tomados de la referencia [6], del diagrama de fase del agua, utilizada aquí como ejemplo canónico. En la figura (a) se ve el diagrama P-T donde se denotan con líneas continuas las curvas de coexistencia de fases que se corresponden a las transiciones de primer orden. A su vez el punto crítico con coordenadas (P_c, T_c) indica la transición continua líquido-gas. En la figura (b) puede observarse lo mismo pero desde un diagrama P-V donde en líneas continuas se muestran las distintas isoterms y con una línea más gruesa se representa la isoterma crítica ($T = T_c$). Además, en las regiones de color gris se ven las zonas de coexistencia asociadas a cada transición de primer orden



(a) Diagrama M-H



(b) Diagrama M-T

Figura 1.2: En estas figuras se observan esquemas representativos, tomados de la referencia [6], del diagrama de fase para un sistema ferromagnético. En la figura (a) se ve el diagrama M-H donde se indican con líneas continuas tres valores de temperatura $T > T_c$ (roja), $T < T_c$ (azul) y $T = T_c$ (verde). Además se denota con línea de segmentos la discontinuidad asociada una transición de primer orden que ocurre para la temperatura menor al valor crítico. En la figura (b) se observa el diagrama $M - T$, donde con una línea de segmentos se muestra la curva correspondiente a $H = 0$, mientras que con líneas continuas se ven los casos $M(T) > 0$, $H > 0$ y $M(T) < 0$, $H < 0$, respectivamente.

Observables	Leyes de escala
Calor específico	$c_h(\epsilon, 0) \propto \epsilon ^{-\alpha}$
Magnetización	$M(\epsilon, 0) \propto \pm(-\epsilon)^\beta$
Susceptibilidad Isotérmica	$\chi(\epsilon) \propto \epsilon ^{-\gamma}$
Isoterma crítica	$M(0, h) \propto h^{1/\delta}$
Longitud de Correlación	$\xi \propto (-\epsilon)^{-\nu}$

Cuadro 1.1: Observables correspondientes a un sistema ferromagnético con sus respectivas leyes de escala, para regiones próximas al punto crítico ($\epsilon = (T/T_c - 1) \sim 0$).

Como ya mencionamos, la motivación de esta área ha sido tanto teórica como tecnológica, en el primer caso dirigida al estudio de las simetrías elementales y de las características comunes que dominan en estos fenómenos. En el segundo caso, centrada en la búsqueda y caracterización de nuevas propiedades físicas y de intervalos de estabilidad de los procesos en las proximidades al punto crítico. Como consecuencia muchos modelos fueron propuestos para caracterizar los estados críticos termodinámicos dando inicio a lo que se conoce como el estudio formal de la fenomenología crítica. Entre las transiciones continuas de más trascendencia podemos agregar a las ya mencionadas, la transición de superconductor [7], de súper-fluido [8], de ferroeléctricos [9] y de metal-semiconductor [10] y de mojado [11], entre muchas otras. En cuanto a los modelos utilizados para estudiar fenómenos magnéticos, en el contexto de la fenomenología crítica en materia condensada podemos mencionar: el modelo de Heisenberg; el modelo de Ising usado para modelar magnetismo axial y del cual hablaremos con más detalle en los capítulos siguientes y el modelo XY para el estudio de magnetización en el plano, todos casos particulares del modelo espín N-vector. Cada uno construido con las características microscópicas y simetrías de cada sistema, resultando ser en cada caso el modelo más simple que reproduce un comportamiento crítico específico.

1.1.1. Las leyes de escala en la proximidad del punto crítico

Como se menciona al comienzo de la sección 1.1, la observación de leyes de potencia en las transiciones continuas resultó ser una de las característica distintivas de estos fenómenos que contribuyó a consolidar un marco teórico [12]. Entre los aspectos relevantes se observó que:

- Experimentalmente las leyes de potencia observadas en la proximidad del punto crítico se repetían en fenómenos de microscopía muy distintas.
- La teoría de campo medio de Landau también proporciono leyes de potencia en la región crítica pero los exponentes diferían de los valores esperados.
- Modelos teóricos muy simplificados como el modelo de Ising y el de Heisenberg permitían reproducir los exponentes críticos de dichos fenómenos.
- Dichos exponentes se podían relacionar entre si empíricamente por las siguientes identidades generales:

- Igualdad de Rushbrooke: $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
- Igualdad de Griffiths: $\alpha + \beta(1 + \delta) = 2$
- Igualdad de Fisher: $(2 - \eta)\nu = \gamma$
- Igualdad de Josephson (hiper-escala): $d\nu = 2 - \alpha$

Las tres primeras habían sido predichas desde los criterios de estabilidad termodinámicos como desigualdades. Basado en éstas evidencias, las primeras ideas formales para explicar estas relaciones entre los exponentes críticos obtenidos de observables termodinámicos (ver 1.1), fueron propuestas por B. Widom [13] al estudiar las propiedades críticas de un fluido. Sin embargo su idea resultó ser válida para una gran variedad de fenómenos críticos, proporcionando las primeras leyes universales de la fenomenología crítica. Para ilustrar su propuesta de una manera acorde con los fenómenos que detallaremos en esta Tesis, y haciendo uso del carácter universal de estas leyes vamos a utilizar una descripción en el contexto de sistemas magnéticos.

Las magnitudes termodinámicas observables se obtienen a partir de alguno de los potenciales termodinámicos como la energía libre de Gibbs F , la energía libre de Helmholtz A , la Entalpía E , etc. Luego, usando la energía libre de Gibbs por partícula $f(h, T)$ a partir de las derivadas parciales respecto de sus dos parámetros relevantes, la intensidad de campo magnético (h) y la temperatura, obtenemos:

- El calor específico: $c_h(T, h) = -T \frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial T^2} \Big|_h$
- La Magnetización: $M(T, h) = -\frac{\partial f(T, h)}{\partial h} \Big|_T$
- La susceptibilidad magnética: $\chi_T(T, h) = -\frac{\partial^2 f(T, h)}{\partial h^2} \Big|_T$

El razonamiento que empleó Widom fue suponer que la energía libre en función del campo h y de la temperatura reducida $\epsilon = (T - T_C)/T_C$ se pueda descomponer de la forma $f(h, \epsilon) = f_r(h, \epsilon) + f_s(h, \epsilon)$, siendo el primer término la parte regular de la energía y el segundo un término la parte singular. De manera que en el punto crítico $f_r(h, \epsilon)$ resulta un término irrelevante, y a su vez $f_s(h, \epsilon)$ es una función homogénea generalizada tal que sus derivadas proporcionan los exponentes críticos. De esta manera la propuesta fue que $f_s(h, \epsilon)$ se comporte como:

$$f_s(h, \epsilon) = \begin{cases} \epsilon^{2-\alpha} f_>(h/\epsilon^\Delta) & \text{si } \epsilon > 0 \\ (-\epsilon)^{2-\alpha} f_<(h/\epsilon^\Delta) & \text{si } \epsilon < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $f_>$ y $f_<$ son las funciones de escala para cada región de temperatura. Luego, derivando la función 1.1 podemos obtener las tres magnitudes mencionadas $m(h, \epsilon)$, $c(h, \epsilon)$ y $\chi(h, \epsilon)$. Y evaluando entorno al valor crítico y con $h = 0$ obtenemos tres leyes de escala:

$$c(\epsilon) \propto (2 - \alpha)(1 - \alpha)\epsilon^{-\alpha} \sim \epsilon^{-\alpha} \quad (1.2)$$

$$m(\epsilon) \propto \epsilon^{(2-\alpha-\Delta)} \sim \epsilon^\beta \quad (1.3)$$

$$\chi(\epsilon) \propto \epsilon^{(2-\alpha-2\Delta)} \sim \epsilon^{-\gamma} \quad (1.4)$$

de manera que el exponente Δ puede ser eliminado y es posible obtener la relación de Rushbrooke:

$$\gamma + 2\beta = 2 - \alpha, \quad (1.5)$$

Otro observable relevante es la función de correlación conectada entre espines:

$$C(r, r') = \frac{\partial \langle s_r \rangle}{\partial h(r')} = \langle (s_r - \langle s_r \rangle)(s_{r'} - \langle s_{r'} \rangle) \rangle \quad (1.6)$$

donde la derivada parcial en h representa la acción externa sobre un espín s_i , y como veremos más adelante se denominan campos conjugados. Ésta función describe las características espaciales de un fenómeno crítico y establece una conexión con la microscopía, ya que mide el grado de correlación entre dos partículas cualesquiera separadas una distancia $|r - r'|$. Esta magnitud presenta dos comportamientos diferentes según lo cerca que se encuentre de un punto crítico:

$$C(r, r') \sim \begin{cases} e^{-|r-r'|/\xi} & \text{lejos del punto crítico} \\ |r - r'|^{-(d-2)-\eta} & \epsilon \sim 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

De manera que lejos del punto crítico la función decae de manera exponencial y permite definir una distancia característica mediante el parámetro ξ . Lo que implica que en estas regiones del diagrama de fases la correlación entre espines a distancias mayores a ξ resulta despreciable. Mientras que en las proximidades al punto crítico, como la función se vuelve dependiente de la distancia como una ley de potencia (invariante de escala), implica que en el punto crítico no existen longitudes características y por lo tanto todas las escalas resultan relevantes en el proceso. De manera que mediante éstas funciones y usando la ley de escala que satisface la longitud de correlación en el punto crítico con la temperatura reducida

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu}, \quad (1.8)$$

es posible obtener el resto de las relaciones de escala. Si bien sobre éstas no vamos a profundizar para no extender esta sección, a modo de esquema podemos mencionar que para la obtención de la igualdad de Griffiths es preciso usar la energía libre $f(\epsilon, h)$ y recurrir además a la ley de escala $m(\epsilon = 0, h) \sim h^{1/\delta}$ que se indica en la Tabla 1.1. Para obtener las relaciones de Fisher y Josephson, es preciso vincular la función de correlación entre espines con la energía libre. Para más detalle puede verse la referencia [12].

En resumen podemos decir en primer lugar que en el punto crítico los observables físicos presentan dependencias como leyes de potencia, con exponentes que se relacionan entre sí mediante unas pocas relaciones universales. Para obtener este esquema se requiere que la función de energía libre tenga una parte singular que se comporte como ley de potencia al acercarse al punto crítico. A su vez el hecho de que la longitud de correlación se haga infinita implica que todas las escalas espaciales se vuelvan relevantes en el sistema, lo que se manifiesta como una invariancia de escala espacial, es decir, el

sistema se vuelve idéntico a si mismo para cualquier escala de observación [14]. Sumado a esto, las escalas de temperatura y longitud se encuentran vinculadas a partir de la ley de escala de la ecuación 1.8, lo que permite que se puedan interpretar variaciones de temperaturas próximas al punto crítico como un cambio de escala espacial en el sistema. Por último, y como fue mencionado al comienzo de esta sección, éstas relaciones fueron verificadas tanto experimental y numéricamente para diferentes sistemas críticos e incluso de manera analítica por la teoría de campo medio. Con la excepción de la relación de hiperescala donde los exponentes de campo medio solo la verifican para la dimensión crítica superior ($d = 4$, para el modelo de Ising).

1.1.2. La Teoría del Grupo de Renormalización

Si bien para el desarrollo de este trabajo de tesis no se realizaron cálculos bajo este formalismo, las principales referencias de exponentes críticos utilizadas, han sido obtenidas mediante cálculos de Grupo de Renormalización. Además, siendo que los conceptos utilizados por esta teoría resultan troncales para un mejor entendimiento de los fenómenos críticos, detallaré a continuación una breve introducción a la misma.

Su origen, como aplicación al campo de la criticalidad surgió a partir de la observación de invariancia de escala, la propuesta de Kadanoff en el año 1966 [15] (y formalizada luego por Wilson [16]), quien puso énfasis al hecho de que los cambios de los parámetros en la vecindad de un punto crítico causan el mismo efecto que un cambio de escala de los objetos que interactúan. Por lo tanto propuso modificar las escalas de observación de un sistema de manera que las magnitudes relevantes permanezcan invariantes. Para esto se utilizó un sistema magnético modelado por un Hamiltoniano efectivo $H(K, \{s\}, h, N)$ tipo Ising

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle}^N K_{i,j} s_i s_j + K_h \sum_i^N s_i \quad (1.9)$$

donde $\{s\}$ son los estados de espín y $K_{i,j} = J_{ij}/k_B T$ y $K_h = h/k_B T$ los acoplamientos efectivos que incluyen el producto de la constante de Boltzmann (k_B) por la temperatura T . De esta manera, para cambiar las escalas se transforma esta función de manera sucesiva en Hamiltonianos $\{H(\{K', s', h', N'\}), H(\{K'', s'', h'', N''\}) \dots\}$, con un número cada vez menor espines efectivos asociados a un bloque $\{N' = N/\lambda^d, N'' = N'/\lambda^d, \dots\}$. Entonces cada nuevo estado de espín se obtiene al promediar el estado de cada bloque de espines y además las interacciones entre bloques se obtienen de transformar las interacciones de espines $\{K', K'', \dots\}$ de manera que la función de partición resulte invariante por la transformación (ver esquema 1.3). Como consecuencia de esta condición, tanto la energía libre de Gibbs, como la longitud de correlación resultan ser funciones invariantes.

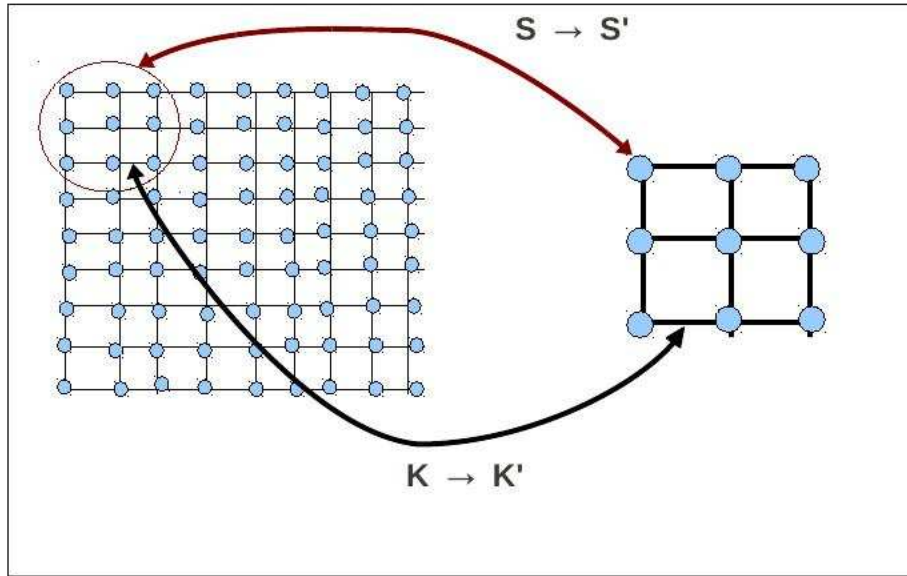


Figura 1.3: En este esquema se representa gráficamente una transformación de Renormalización en el espacio de coordenadas para el modelo de Ising bidimensional. En éste caso se mapean nueve espines $s = \pm 1$ de una red en un espín transformado $S = \pm 1$. De esta manera, los círculos denotan en cada caso los estados de espín (s, S) de la red mientras que con líneas continuas se muestran los respectivos acoplamientos (κ, K) , antes y después de dicha transformación de escala.

Otro aspecto importante de la transformación son los puntos fijos, es decir los puntos donde se cumple que $\bar{K}' = R(\bar{K})$, donde R es la transformación del grupo de renormalización y $\bar{K} = (K_{ij}, K_h)$ son los acoplamientos. Estos puntos pueden ser interpretados como los estados de equilibrio del sistema y se representan por un conjunto de acoplamientos invariantes \bar{K}^* de la transformación, lo cual resulta válido incluso en el punto crítico. Como la longitud de correlación debe cumplir $\xi(\bar{K}^*) = \xi(\bar{K}^*)/\lambda$ en un punto fijo, entonces $\xi(K^*)$ solo puede valer 0 o ∞ .

Podemos clasificar estos puntos fijos en:

- El punto de longitud de correlación infinita ($\xi \rightarrow \infty$) que representa al punto fijo crítico o multicrítico.
- El punto de correlación nula ($\xi = 0$), es llamado punto fijo trivial, y dependiendo de la codimensión de la hipersuperficie crítica en el espacio de las constantes de acoplamiento, puede relacionarse con una fase o con la coexistencia de fases (transiciones discontinuas). Cabe aclarar que estos puntos cobran relevancia al ser los estados iniciales desde donde se estudia la evolución dinámica crítica fuera de equilibrio, tal como en el presente trabajo de tesis.

Los campos escaleables

Basándose en estas premisas, fue posible obtener de una manera más justificada las mismas relaciones que propuso Widom. Para mostrar esto es preciso usar la idea de campos escaleables y que la parte singular de la energía libre es una función homogénea generalizada de dos campos escaleables (ϵ, h) que ante un cambio de escala λ se debe transformar como:

$$f(h', \epsilon') = f(h, \epsilon)\lambda^d, \quad (1.10)$$

donde d es la dimensión del sistema. Si suponemos que los campos cerca del punto crítico son muy pequeños podemos esperar que los campos transformados (h', ϵ') , sean una combinación lineal de los campos (h, ϵ) . Por último si como condición adicional se pide que los campos no puedan mezclarse en la transformación debido a que tienen diferentes simetrías, deja como la opción más general la transformación $h' = \lambda^{y_h}h$ y $\epsilon' = \lambda^{y_\epsilon}\epsilon$. Por lo tanto, a partir de esto podemos expresar la ecuación 1.10 como:

$$f(h, \epsilon) = \lambda^{-d}f(h\lambda^{y_h}, \epsilon\lambda^{y_\epsilon}), \quad (1.11)$$

donde ya puede verse una expresión similar a la ecuación 1.1. Seguido a esto, como el punto crítico es un estado de equilibrio y por lo tanto puede ser representado a partir de los campos invariantes de un punto fijo, el término de la izquierda no debe depender de λ . Lo que se obtiene para ésta relación al hacer $\lambda = 1/\epsilon^{1/y_T}$. Obteniéndose así la buscada relación de Widom:

$$f(h, \epsilon) = \epsilon^{d/y_T} f(h/\epsilon^{y_h/y_T}), \quad (1.12)$$

con $\frac{d}{y_T} = 2 - \alpha$ y $\Delta = y_h/y_T$.

De esta forma, es posible obtener las leyes de potencia y los valores de los exponentes críticos para cualquier fenómeno crítico, donde el esquema a seguir es: I) identificar campos de cambio de escala $\bar{K} = (h_0, h_1, \dots, h_n)$; II) realizar una transformación de escalas cerca del punto crítico, pensada como una variación de los campos escaleables respecto al vector crítico \bar{K}^* ; III) Usar relaciones de escala para los campos de la forma $h'_\alpha = \lambda^{y_\alpha}h_\alpha$ y IV) buscar los invariantes correspondientes a dicha transformación (para mas detalle pueden verse las referencias [12, 14]). Como ya mencionamos, una vez obtenidos los exponentes asociados a cada campo escaleable, y como los cambios de escala son siempre positivos ($\lambda > 1$) los campos se pueden clasificar en punto crítico como:

- "relevante " (si $y_\alpha > 0$): Su efecto es preponderante en el punto fijo, ya que el correspondiente flujo de renormalización aleja al sistema del dominio del punto fijo.
- "marginal " (si $y_\alpha = 0$): Contribuye de manera débil, y son asociados a correcciones logarítmicas al escaleo presentes en las dimensiones críticas superior e inferior.
- "irrelevante " (si $y_\alpha < 0$): Su efecto se desvanece en el punto crítico al realizar sucesivas transformaciones y están asociados a la universalidad, correspondiendo a un flujo de renormalización hacia el punto fijo.

Entre los campos relevantes para los fenómenos críticos podemos hallar por lo general solo tres: I) Un campo asociado a la ruptura de alguna simetría inherente del sistema (léase campo magnético h para el Modelo de Ising). II) Otro sería el apartamiento de la temperatura crítica, ϵ donde el signo de este campo establece si el sistema se ordena o no. III) Además del campo constante K_0 que se transforma como $K_0 \sim \lambda^d K_0$.

De ésta manera, la teoría de Grupo de Renormalización permitió abordar las divergencias de los observables cuando el sistema se aproximaba al punto crítico y explicar los fenómenos críticos, a partir de tan solo unos pocos aspectos del modelo como son la simetría del parámetro de orden, la dimensión y el alcance de las interacciones entre las partículas. Por lo tanto, la existencia de unos pocos campos relevantes resultó ser la justificación de la gran coincidencia entre resultados numéricos y experimentales donde el mismo comportamiento crítico se observaba en modelos de muy diferente microscopía. Sumado a esto, puso en relieve la utilidad en este área de modelos de extrema simpleza para reproducir un comportamiento crítico. Siendo un ejemplo arquetípico el modelo de Ising, ya que siendo un modelo de acoplamiento magnético elemental reproduce el comportamiento crítico y las transiciones ferromagnéticas continuas y discontinuas.

1.2. Fenómenos críticos en sistemas de partículas con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia

Como hemos mencionado en la sección anterior la fenomenología crítica no depende de los detalles microscópicos, como el valor de las constantes de acoplamiento o la estructura de red, sino de características generales como la dimensión espacial, la simetría del parámetro de orden y el alcance de las interacciones. En particular en lo que respecta a las interacciones, para obtener los diferentes modelos críticos en general se han considerado acciones de corto alcance. Esto se debe, por una parte a la complejidad analítica de incorporar interacciones de largo alcance y por otro debido a los requerimientos computacionales que limitan en la práctica el estudio a sistemas pequeños y hacen necesario algoritmos más eficientes.

Por otra parte, aumentar el alcance de las interacciones mientras éste permanezca finito, no provoca un cambio en el comportamiento crítico. Estudios en esta línea fueron realizados por G. A. Baker [17, 18], así como M. Kac y E. Helfand [19], quienes estudiaron al modelos de Ising en una y dos dimensiones, respectivamente, con interacciones que decaen de manera exponencial con la distancia. En estos trabajos se determinó que solo para el límite en que la exponencial adquiere alcance infinito se observa una transición de fase que se corresponde con campo medio. Para esto, la invariancia de escala jugó un papel primordial, ya que implica que un sistema crítico se comporta siempre de igual manera sin importar la escala de observación. O sea que por más largo que sea el alcance, siempre que la interacción tenga una longitud característica, como en el caso exponencial, existirá una escala a partir del cual el sistema se comporta como si bloques de espines interactúen a primeros vecinos. Más aún, si la longitud característica de interacción es del orden del tamaño del sistema es esperable

que el fenómeno adquiriera un comportamiento crítico de campo medio. Luego, a partir de estas evidencias se comenzó a especular de una posible región intermedia entre estas dos clases de comportamientos, corto alcance y campo medio. En esta línea, varios trabajos analíticos en una dimensión fueron realizados [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26], así como algunos trabajos numéricos que abordaron tanto modelos con interacciones que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia [27, 28], así como interacciones más generales de la forma $J \sim 1/r^{d+\sigma}$ [29, 30, 31, 32, 33, 34]. Siguiendo este enfoque los primeros resultados en cálculo del Grupo de Renormalización se realizaron para casos particulares (referencias [35, 36, 37, 38]). Sin embargo, el mayor aporte en esta área fue realizado en 1972 por Fisher, Ma y Nickel [39] y luego Sak [40] (obtenido de manera independiente por Suzuki y colaboradores [41]), quienes obtuvieron las predicciones de Renormalización para los exponentes críticos del modelo de Ising con interacciones de la forma $J \sim 1/r^{d+\sigma}$ (Ising-LA) con dimensión arbitraria $d < 4$. Finalmente un trabajo extensivo acerca de simulaciones Monte Carlo y cálculos del Grupo de Renormalización fue publicado por Binder y Luijten [42], donde se exploraron distintos valores de σ en dimensiones $d = 1, 2, 3$. De ésta manera, una interacción que decrece de manera uniforme al aumentar r de la forma $J(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$, permitió controlar la intensidad de la interacción a una distancia dada, al variar el parámetro σ . Obteniéndose los distintos regímenes que se detallan a continuación:

- Para curvas de distribución angostas con $\sigma > 2 - \eta$, donde η es el exponente de la función de correlación para el modelo con interacciones de corto alcance, solo contribuyen como una interacción local recuperándose los exponentes de la clase de universalidad del modelo de corto alcance.
- Para curvas de decaimiento más suaves ($\sigma \leq d/2$) el sistema presenta un comportamiento crítico de campo medio
- Para regiones intermedias ($d/2 < \sigma < 2 - \eta$) el comportamiento crítico es de una clase anómala ya que no pertenece a ninguna de las dos mencionadas y presenta exponentes críticos que dependen del valor de σ .

Como se ve, el interés en estos modelos tiene dos aristas, por un lado permite conectar dos comportamientos críticos relevantes, es decir, corto alcance y campo medio. Por otro lado, en medio de éstos dos extremos, es posible observar características críticas propias como la presencia de transiciones de fase con leyes de escala donde los exponentes críticos son funciones continuas del parámetro σ . En particular centraremos nuestra atención en el caso unidimensional del modelo Ising-LA, del cual hablaremos en el capítulo 3. Ya que, a diferencia del modelo de corto alcance el orden global es posible, de manera que pueden verse transiciones de fases ferromagnéticas con temperaturas críticas no nulas dependientes del valor de σ [39] para el intervalo $d/2 < \sigma < 1$. Donde el caso $\sigma = 1$ se corresponde a una transición de Kosterlitz-Thouless.

Además, en el estudio de criticalidad de sistemas iónicos, se supone que efectos de apantallamiento puedan generar interacciones efectivas que decaen de manera algebraica con la distancias $1/r^{d+\sigma}$ (ver referencias [43] [44] [45]). En esta línea podemos mencionar el trabajo de Burkhardt [46] donde fluctuaciones críticas en un sistema de partículas

sin carga dentro de un fluido provocan como resultado emergente, fuerzas efectivas de largo alcance (Efecto Casimir). Por otro lado, es interesante la propuesta de Anderson y Yuval [35, 36] de que el problema de Kondo ¹ se corresponde con un modelo de Ising con interacciones mixtas unas a primeros vecinos y otras de largo alcance dependientes de la inversa de cuadrado de la distancia. Y como referencia experimental podemos mencionar el trabajo de Boxberg [47] donde se han podido observar los exponentes correspondientes a una interacción con $\sigma = 1,7$ en una transición ferromagnética. Por último, en contexto de modelos de interacción mixta otros resultados provenientes de la fenomenología crítica fuera de equilibrio, se han incorporado a esta área porque, en ciertos casos permiten modelar comportamientos emergentes análogos a los que se obtienen en modelos con interacciones de largo alcance. En este grupo se encuentran los modelos de Ising cinéticos, que combinan dos dinámicas, una asociada a procesos cohesivos, como las dinámicas de inversión de espín, y la otra a mecanismos difusivos como las dinámicas de intercambio entre espines. Obteniéndose en general que el orden de largo alcance depende de el balance entre ambas dinámicas.

Volviendo a las interacciones de tipo $J(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$, resultados teóricos fueron obtenidos por Hioe [48] a partir de un caminante aleatorio con vuelos de Lèvy, donde los pasos del caminante se pueden hacer a cualquier distancia pesados con una distribución de la forma $P(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$. Lo interesante de sus resultados fue que exponentes del caminante coincidieron con los exponentes críticos del modelo espín esférico ferromagnético ², con una interacción de la forma $J(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$ [50]. Resultados que también coinciden con los exponentes obtenidos por Fisher para la región clásica ($0 < \sigma < d/2$) del modelo Ising-LA. Basados en este vínculo, Bergensen y colaboradores [51] obtuvieron posteriormente los exponentes críticos del modelo de Ising-LA en $d = 1$ y para $\sigma = 0,75$, al simular un modelo de Ising cinético con una dinámica Glauber generalizada [52] y una dinámica de intercambio análoga a los vuelos de Lèvy. Modelo que resultó de especial importancia en esta tesis, por lo que profundizaremos sobre el mismo en los capítulos 2 y 6.

1.3. Los Sistemas Fuera del Equilibrio

Usualmente, cuando se habla de una transición de fase se lo hace desde la termodinámica de equilibrio, como se trató en la sección anterior, donde los observables y el parámetro de orden son magnitudes termodinámicas bien definidas. En cambio, un proceso fuera de equilibrio es algo más delicado, ya que aquí las magnitudes físicas en muchos casos no tienen una connotación termodinámica y en otros casos se vinculan al valor de equilibrio de manera asintótica, es decir para tiempos en que el sistema alcanza el estado de equilibrio. La principal distinción que se manifiesta en estos fenómenos es la presencia de variaciones temporales de los observables, que como veremos a continuación en algunos casos satisfacen una dependencia como ley de potencia. En

¹Efecto termo-resistivo inverso que se observa en materiales semiconductores dopados, donde al descender la temperatura por debajo de 10 Kelvin se incrementa la resistencia eléctrica del material

²propuesto en 1952 por T. H. Berlin y M. Kac como una aproximación a una transición ferromagnética tridimensional [49]

particular se centrará la atención en dos clases de sistemas fuera de equilibrio, por un lado en la dinámica de sistemas termodinámicos bien definidos en equilibrio pero que evolucionan desde un estado inicial fuera de equilibrio, a los que llamaremos sistemas *apartados de equilibrio*. Por el otro, en sistemas que evolucionan irreversiblemente hacia estados absorbentes y que no poseen aún una teoría termodinámica definida y a los que se denominan sistemas *sin-equilibrio* [66].

1.3.1. Los sistemas “apartados” del equilibrio

En ésta categoría se engloban los modelos que poseen estados de equilibrio y por ende una descripción Hamiltoniana que permite una descripción en términos de ensambles de Gibbs. Para éstos sistemas es posible estudiar su evolución temporal desde un estado inicial apartado del equilibrio hacia un estado de equilibrio. En este contexto hablaré de dinámica crítica cuando el estado al que el sistema evoluciona es un estado crítico.

Las leyes de escala en la dinámica crítica

El estudio de éste comportamiento ha sido introducido en 1977 por Hoenberg y Halperin [54] y estudiado por diversos motivos, ya sea por interés en el propio comportamiento dinámico, para determinar la velocidad de convergencia al estado de equilibrio de una determinado modelo, o como veremos a continuación, por ser una manera alternativa de obtener los exponentes críticos universales. Luego, en 1989 Janssen y colaboradores [55] demostró la existencia de leyes de escalas dinámicas para sistemas que evolucionan al estado crítico partiendo desde un estado con $T = \infty$, en el caso de modelos de tipo A (dinámica no conservada). Para este caso los exponentes de la evolución dinámica de los observables físicos también fueron relacionados con los exponentes definidos en equilibrio. Lo que no solo permitió cotejar desde una observación diferente los exponentes críticos obtenidos desde la dinámica de relajación, sino que agregó un nuevo exponente x_0 de carácter universal. De manera que a partir de este trabajo, su uso se fue incrementado considerablemente. Para más detalle sobre el estado del arte puede verse el artículo de revisión de Zheng [56] así como uno más reciente de Albano y colaboradores [57]. En resumen, la característica principal que presentan éstos fenómenos es la dependencia como ley potencia de los observables, de manera análoga a lo que ocurre con las leyes de escala para el estado crítico en equilibrio, pero con el tiempo como variable de escala. Donde existen relaciones entre los exponentes de ambas dinámicas críticas con los exponentes críticos universales del correspondiente modelo en el punto crítico.

En particular las relaciones usadas en la dinámica crítica de relajación fueron demostradas por Honeberg y Halperin para una gran variedad de modelos en régimen de tiempos largos [54] y verificadas numéricamente incluso en el régimen de tiempos cortos (DCR) [56]. Por su parte la dinámica de tiempos cortos (DCTC) obtenida desde un estado inicial desordenado fue probada teórica y numéricamente para modelos de corto alcance [55, 57] y predicha teóricamente para modelos con interacciones de largo alcance [58].

La dinámica crítica de relajación

Esta dinámica se observa cuando el sistema se aproxima al equilibrio en el punto crítico desde una configuración inicial correspondiente a $T = 0$ (punto fijo trivial del grupo de renormalización) y siempre que la longitud de correlación temporal $\xi(t)$ que satisface una ley de potencia de la forma $\xi(t) \sim t^{1/z}$ [56], donde z es el exponente dinámico, sea menor al tamaño L del sistema. Lo que se supone es la validez de la relación de escala propuesta en el régimen de tiempos largos

$$M(t, \epsilon, L) = b^{-\beta/\nu} m(b^{-z}t, b^{1/\nu}\epsilon, b^{-1}L). \quad (1.13)$$

De esta manera, tomando $b = t^{1/z}$ y en el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$) obtenemos la relación:

$$M(t) \sim t^{-\beta/\nu z} m(t^{1/z}\epsilon) \quad (1.14)$$

Donde m es una función de escala que en general afecta la dependencia como ley de potencia y solo se hace constante al situar el sistema en el punto crítico ($\epsilon = 0$). Por lo que es posible obtener la temperatura crítica al identificar los apartamientos modulados por la función de escala $m(t^{1/z}\epsilon)$. A partir de estos observables también se pueden obtener otras magnitudes, que permitan la determinación de los exponentes críticos. Como se verá en el capítulo 2 sección 2.3, donde se detallan los observables utilizados junto a sus relaciones de escala.

Dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos

Otra relación de escala independiente proviene de observar los primeros tiempos de evolución una vez pasado el tiempo microscópico (tiempos cortos). Para éste intervalo, en 1989 Janssen y colaboradores [55] predijeron la existencia de un exponente dinámico nuevo al que llamaron θ . Este exponente surge al estudiar la evolución dinámica del parámetro de orden al estado crítico partiendo de un sistema totalmente desordenado. Bajo estas condiciones la proximidad al estado crítico depende también del valor de la magnetización inicial de manera que esta condición inicial será interpretada como un nuevo campo de escala de la forma $m'_0 = \lambda^{x_0} m_0$. En particular, para un sistema ferromagnético, la ley de escala toma la forma.

$$M(t, m_0, \epsilon, L) = b^{-\beta/\nu} m(b^{-z}t, b^{1/\nu}\epsilon, b^{-1}L, b^{x_0}m_0). \quad (1.15)$$

De esta manera, tomando $b = t^{1/z}$ y el límite termodinámico, se obtiene que

$$M(t, m_0, \epsilon) = t^{-\beta/\nu z} m(t^{1/\nu z}\epsilon, t^{x_0/z}m_0) \quad (1.16)$$

La manera de extraer el exponente x_0 del argumento es usar las siguientes condiciones: 1) por un lado linealidad $m(x) \sim x$, valida cuando el argumento tiende a cero; 2) por el otro una dependencia del tipo $m(x) \sim \text{cte}$ esperada para $x \gg 1$.

De esta manera, la relación de escala de tiempos cortos queda de la forma:

$$M(t, m_0, \epsilon) \propto \begin{cases} t^{x_0/z - \beta/\nu z} m(t^{1/\nu z}\epsilon) & m_0 t^{x_0/z} \ll 1 \\ t^{-\beta/\nu z} m(t^{1/\nu z}\epsilon) & m_0 t^{x_0/z} \gg 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

donde en el punto crítico el exponente $\theta = x_0/z - \beta/\nu z$ gobierna en un primer intervalo la dinámica evolutiva, resultando en un crecimiento transitorio de la magnetización para en este intervalo temporal. Por otro lado para tiempos suficientemente largos se recupera la ley dinámica de relajación al estado crítico. Además, de igual manera que en la dinámica de relajación, apartamientos de $\epsilon = 0$ implican desviaciones de la ley de potencia determinadas por la función de escala.

Los efectos de tamaño finito

El comportamiento que hemos descrito en las secciones anteriores se verifica solo en el punto crítico ($\epsilon = 0$) y en el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$). Pero en cualquier otro caso tendremos dinámicas apartadas de una ley de potencia. En sistemas con tamaño finito, la longitud de correlación está limitada por el tamaño del sistema. De esta manera, para valores de $\xi \ll L$ la correlación finita entre espines lleva a la ausencia de efectos de tamaño. Para definir una longitud característica fuera de equilibrio es preciso retomar la ecuación general de escala usada para la magnetización (ecuación 1.13). Tomando $b = L$ como variable de transformación y $\epsilon = 0$, se obtiene:

$$M(t, L) \sim L^{-\beta/\nu} m(L^{-z}t) \quad (1.18)$$

De forma que se obtienen relaciones invariantes de escala, que permiten vincular al tamaño no solo con la temperatura, como ocurre en equilibrio, sino también con el tiempo. Por su parte se sabe que para tamaño finito (L) y tiempos suficientemente largos esta magnitud satisface una dependencia exponencial de la forma.

$$M(t, L) \sim e^{-t/\tau} \quad (1.19)$$

donde τ se denomina tiempo de equilibración y representa la escala del tiempo que tarda el sistema en desordenarse [56]. Por lo tanto, combinando las ecuaciones 1.18 y 1.19 es posible obtener una relación de escala $\tau \sim L^z$ de forma que como z es un exponente siempre positivo, un aumento de L implica un incremento del tiempo de equilibración, efecto que se conoce como enlentecimiento crítico. De esta manera, siendo que el parámetro que mide la escala espacial de un sistema en equilibrio es la longitud de correlación ξ , lejos del equilibrio, el campo de escala asociado al paso del tiempo permite definir una longitud de correlación dinámica $\xi(t)$, que satisface la relación $\xi(t) \sim t^{1/z}$. Y cuyo valor se incrementa con el tiempo hasta alcanzar para tiempos $t \sim \tau$ el valor esperado en equilibrio $\xi(t) \sim L$. En este sentido durante la evolución dinámica la condición $\xi \ll L$ determina el intervalo de validez de las leyes de potencia. Por otro lado, dicho tiempo se relaciona a su vez con el apartamiento del punto crítico como $\tau \sim \epsilon^{-\nu z}$.

De esta forma, solo para $\epsilon = 0$ y en una ventana temporal ($t_{max} - t_{mic}$) las leyes de escala dinámicas son válidas y se encuentran vinculadas con los exponentes críticos universales. Permitiendo así obtener los exponentes de equilibrio (β, ν, γ) y los exponentes dinámicos θ y z , estudiando un intervalo temporal en que la longitud de correlación es mucho menor que el tamaño del sistema, y que por ende no requiere esperar a equilibrar las magnitudes y se ve libre del ya mencionado *enlentecimiento*

crítico. Por su parte, como se mencionó, los cambios en la temperatura respecto del valor crítico permiten variar la función de escala ($m(L^{1/\nu}\tau)$), de manera que modifican también el comportamiento dinámico incluso para tiempos $t < \tau$:

- Para $\epsilon > 0$ la dinámica converge al estado paramagnético de equilibrio con $M = 0$ y se acelera de forma exponencial por efectos de tamaño finito.
- Para $\epsilon < 0$ la dinámica evoluciona inicialmente hacia el estado equilibrio, que se corresponde con una magnetización no nula ($M(T)$), para luego decrecer exponencialmente hacia el estado paramagnético por efectos de tamaño finito.

1.3.2. La dinámica en sistemas “sin equilibrio”

En la sección anterior describimos el caso más sencillo de sistemas fuera de equilibrio que constituyen una extensión dinámica de los sistemas en equilibrio. En esta sección se consideran fenómenos fuera de equilibrio que no se pueden modelar a partir de un Hamiltoniano y por ende tampoco es posible definir un estado de equilibrio. En estos sistemas se hace necesario aclarar el uso preciso de los términos *fase* y *transición de fase*. Reconocemos una fase a partir de determinadas y reproducibles relaciones entre las propiedades macroscópicas y los parámetros que gobiernan la dinámica; mientras que una transición de fase esta dada por una dependencia de estas propiedades con el parámetro de control. En este sentido, los sistemas en equilibrio son un caso particular donde estas relaciones pueden ser obtenidas desde la energía libre. Entre otros muchos ejemplos de sistemas sin equilibrio podemos destacar la propagación de epidemias [59, 60, 61], de poblaciones [62], procesos catalíticos [63, 64] o en procesos biológicos [65]. En los mismos la evolución dinámica ocurre desde estados estacionarios fluctuantes hacia estados absorbentes, desde el los cuales el sistema no puede escapar.

Una diferencia clave es que en sistemas sin equilibrio la distribución de probabilidades debe ser determinada desde la ecuación maestra:

$$\frac{dP(X, t)}{dt} = \sum_{X'} W(X' \rightarrow X)P(X', t) - \sum_{X'} W(X \rightarrow X')P(X, t) \quad (1.20)$$

donde $\{X, X'\}$ representan las dos configuraciones iniciales y finales del sistema, las funciones $W(X \rightarrow X')$, $W(X' \rightarrow X)$ son las probabilidades transición que aquí no satisfacen balance detallado, y las funciones $\{P(X), P(X')\}$ son las probabilidades de que a un tiempo t el sistema se encuentre en las respectivas configuraciones $\{X, X'\}$. En general, esta determinación es compleja y puede ser llevada a cabo solo en forma aproximada [66].

En transiciones de fase absorbentes es posible establecer una teoría de escala en forma fenomenológica, donde además de la invariancia de escala espacial existe una invariancia de escala temporal, permitiendo obtener grupos de exponentes que definen la clase de universalidad. Como aspectos relevantes podemos mencionar que las transiciones de fase aquí definidas son posibles incluso en bajas dimensiones en contraposición con lo que ocurre en modelos de equilibrio [66]. La clase de universalidad más robusta, es decir aquella en la que se engloban una gran variedad de modelos [61], es la clase de percolación dirigida PD, la cual esta delimitada por la conjetura de Janssen y

Grassberg [61]: Los modelos que pertenecen a la clase PD son aquellos que presentan i) una transición de fase continua absorbente caracterizada por un parámetro de orden de una componente; ii) reglas dinámicas de corto alcance y iii) sin simetrías, leyes de conservación o desorden. Aunque esta conjetura ha sido ampliamente confirmada numéricamente, el comportamiento crítico de PD no ha sido obtenido experimentalmente, con la excepción de recientes resultados de Takeuchi y colaboradores [67]. Probablemente debido a la dificultad de obtener sistemas sin desorden. Por otra parte cuando estos requisitos son violados se obtienen otras clases de universalidad, tales como la clase de paridad conservada cuando esta simetría esta presente, o la clase del Votante [68] para procesos con simetría Z_2 , impulsados por fluctuaciones en las interfaces.

Este último, en su formulación original, modelo de Votante Estándar, es un modelo simple con dos estados (\circ) o (\bullet), que pueden pensarse como espines $s = 1$ o $s = -1$. Su evolución dinámica permite reproducir procesos formación de opinión [66], de competencia entre dos especies [69], catalíticos [64] y crecimiento de dominios magnéticos sin tensión superficial [68].

La regla dinámica establece que dos sitios vecinos seleccionados al azar solo interactúen si tienen estados diferentes (\circ, \bullet) y en ese caso tiene una probabilidad de transición $p = 1/2$ de caer en cualquiera de los estados ($\bullet\bullet$) o ($\circ\circ$).

A partir de este esquema un espín rodeado de vecinos con el mismo estado, como ocurre en el interior de un dominio, se encuentra imposibilitado de cambiar, por lo que se dice que el proceso ocurre solo en las interfaces. Mas aún, cuando todos los sitios de la red adquieren el mismo estado, desaparecen todas las interfaces, se dice que el sistema llega a un estado absorbente. El modelo de votante estándar no posee parámetro de control por lo que formalmente no tiene una transición de fases. El estudio de su dinámica de ordenamiento suele ser incluido en el contexto de procesos de envejecimiento [70]. En este sentido, al situar el sistema en un estado inicial desordenado, este manifiesta una dinámica de evolución al estado ordenado (de magnetización total $M = \pm 1$), caracterizado por el crecimiento de agregados o dominios magnéticos sin tensión superficial. En particular para dimensión $d = 1$, el sistema se ordena irreversiblemente con una dinámica que presenta una dependencia como ley de potencia, de manera similar a lo que ocurre en el modelo de Ising cinético a temperatura $T = 0$. Mas aún, la dinámicas de crecimiento de los agregados en ambos modelos se comportan de igual manera, con un tamaño de dominio que crece como $\zeta(t) \sim \sqrt{t}$, cuando el modelo de Ising se utiliza la dinámica de Glauber a $T = 0$. En $d = 2$ se tiene la dimensión crítica, donde la dinámica de ordenamiento sigue una dependencia logarítmica y para dimensiones mayores en el límite termodinámico el sistema no alcanza el estado absorbente. En resumen a la hora de elegir un modelo sin equilibrio para estudiar los efectos de la incorporación de interacciones de largo alcance, se tuvieron en cuenta las siguientes características:

i) El modelo de Votante resulta ser un modelo sencillo que al no poseer parámetro de control presenta una dinámica determinada solo por la dimensión de la red y las correspondientes reglas de evolución. Proporcionando un buen escenario para estudiar los efectos de interacciones de largo alcance en sistemas con crecimiento de dominios sin tensión superficial.

ii) Es un modelo extensamente estudiado que posee resolución analítica en cualquier dimensión entera en redes regulares [4]. Mas aún, a partir del agregado de ruido en las

interfaces, como parámetro de control, se pudo identificar una transición de fase y conformar una nueva clase universal para sistemas sin equilibrio [68].

iii) Por último hasta la presente tesis, según nuestro conocimiento, no existen trabajos previos que incorporen para éste modelo en redes regulares interacciones de largo alcance. De manera que los dos estudios que abordaremos permitirán profundizar el conocimiento sobre sistemas sin equilibrio.

1.4. Objetivos

La presente tesis tiene como objetivo general contribuir al conocimiento acerca de la dinámica de sistemas de partículas interactuantes fuera de equilibrio con interacciones de largo alcance. En este contexto, los objetivos específicos son:

- Comprobar las predicciones teóricas acerca de la validez de la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos para estudiar el comportamiento crítico de modelos con interacciones de largo alcance. En particular para el modelo de Ising con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia (Ising-LA).
- Estudiar el efecto de la extensión del alcance de las interacciones sobre la evolución dinámica hacia estados absorbentes del modelo de Votante. En este caso generando las interacciones de manera probabilística a partir de una distribución de distancias que decae de manera algebraica.
- Construir un modelo de Votante de dinámica mixta, donde al modelo de Votante Estándar se suma un intercambio entre espines pesado con la distancia, de manera análoga a un vuelo de Lèvy. El objetivo fue el de emular la interacción efectiva de largo alcance utilizada en el modelo de Votante anterior.
- Comprobar la hipótesis propuesta en esta tesis de que una dinámica mixta que incluya intercambios de Lèvy y una dinámica Glauber de corto alcance, presenta una dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos que permite obtener los exponentes universales del modelo de Ising-LA. Esto último resulta de gran interés debido a que reduciría el costo computacional y por ende se superaría una de las principales limitaciones de las simulaciones de modelos LA.

Bibliografía

- [1] H. B. Callen, Thermodynamics and introduction to thermostatistics, second edition, Ed. Wiley and Soons, 1985 Singapore
- [2] J.W. Gibbs, "Elementary Principles in Statistical Mechanics ", OX BOW PRESS Woodbridge, Connecticut 06525 (1985)
- [3] L. P. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, MIT Press, London (1966)
- [4] R. Griffiths and B. Widom, Phys. Rev. A, **8**, 2173 (1973)
- [5] C. Domb and M. F. Sykes, Proc. R. Soc. Lond. A, **240** 214 (1957)
- [6] W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker "Thermodynamic and Statistical Mechanics ", Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, second edition (1997)
- [7] A. T. Fiory and A. F. Hebard W. I. Glaberson, Phys. Rev. B, **28**, 5075 (1983)
- [8] D. J. Bishop and J. D. Reppy, Phys. Rev. Lett., **40**, 1727 (1978)
- [9] R. Clarke J. C. Burfoot, Ferroelectrics, **8**, 1, (1974)
- [10] G. J. Hyland, Journal of Solid State Chemistry, **318** (1970)
- [11] M. R. Moldover, J. W. Cahn, Science, **207** 4435 1073 (1979)
- [12] L. P. Kadanoff, "Statistical Physics, Statics, Dynamics and Renormalization "World Scientific (2000)
- [13] B. Widom, J. Chem. Phys., **43** 3892 (1965)
- [14] J. J. Biney N. J. Dowrick and A. J. Fisher, M. E. J. Newman "The Theory of Critical Phenomena ", Clarendon Press - Oxford 1993
- [15] L.P Kadanoff, Physics, **2**, 263 (1966)
- [16] K.G. Wilson, Phys. Rev. B, **4**, 3174 (1971)
- [17] G. A. Baker, Jr., Phys. Rev., **122**, 1477 (1961).
- [18] G. A. Baker, Jr. Phys. Rev., **130**, 1406 (1963)
- [19] M.Kac, E. Helfand, J. Math. Phys., **4**, 1078 (1963).

- [20] D. Ruelle, *Comm. Math. Phys.*, **9**, 267 (1968).
- [21] F. J. Dyson, *Comm. Math. Phys.*, **12**, 91 (1969) y F. J. Dyson, *Comm. Math. Phys.*, **12**, 212 (1969).
- [22] D. J. Thouless, *Phys. Rev.*, **187**, 732 (1969).
- [23] J. Z. Imbrie, *Comm. Math. Phys.*, **85**, 491 (1982)
- [24] M. Aizenman, J. T. Chayes, L. Chayes and C. M. Newman, *J. Stat. Phys.*, **50**, 1 (1988).
- [25] M. Aizenman and R. Fernández, *Lett. Math. Phys.*, **16**, 39 (1988).
- [26] J. Z. Imbrie and C. M. Newman, *Comm. Math. Phys.*, **118**, 303 (1988).
- [27] J. Bhattacharjee, S. Chakravarty, J. L. Richardson and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. B*, **24**, 3862 (1981).
- [28] G. V. Matvienko, *Theor. Math. Phys.*, **63**, 635 (1985).
- [29] D. Rapaport and N. E. Frankel, *Phys. Lett. A*, **28**, 405 (1968).
- [30] J. F. Nagle and J. C. Bonner, *J. Phys. C*, **3**, 352 (1970).
- [31] B. G. S. Doman, *Phys. Stat. Sol. B*, **103**, 2 K169-K171 (1981).
- [32] Z. Glumac and K. Uzelac, *J. Phys. A*, **22**, 4439 (1989).
- [33] J. L. Monroe, R. Lucente and J. P. Hourlland, *J. Phys. A*, **23**, 2555 (1990).
- [34] R. Manieri, *Phys. Rev. A*, **45**, 3580 (1992).
- [35] P. W. Anderson and G. Yuval, *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 89 (1969).
- [36] G. Yuval and P. W. Anderson, *Phys. Rev. B*, **1**, 1522 (1970).
- [37] P. W. Anderson, G. Yuval and D. R. Hamann, *Phys. Rev. B*, **1**, 4464 (1970).
- [38] P. W. Anderson and G. Yuval, *J. Phys. C*, **4**, 607 (1971).
- [39] M. E. Fisher, S-k Ma, and B. G. Nickel, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 14 (1972)
- [40] J. Sak, *Phys. Rev. B*, **8**, 281 (1973).
- [41] M. Suzuki, Y. Yamazaki and G. Igarashi, *Phys. Lett. A*, **42**, 313 (1972).
- [42] K. Binder and E. Luijten, *Phys. Rep.*, **344** 179 (2001)
- [43] B. Hafskjold and G. Stell, *The Equilibrium Statistical Mechanics of Simple Ionic Liquids*, in *The Liquid State of Matter: Fluids, Simple and Complex*, edited by E. W. Montroll and J. L. Lebowitz (North-Holland, Amsterdam, 1982).

- [44] M. E. Fisher, J. Stat. Phys., **75**, 1 (1994).
- [45] R. Folk and G. Moser, Int. J. Thermophys., **16**, 1363 (1995).
- [46] T. W. Burkhardt and E. Eisenriegler, Phys. Rev. Lett., **74**, 3189 (1995).
- [47] O. Boxberg and K. Westerholt, J. Magn. Magn. Mat., **1563**, 140 (1995).
- [48] F.T. Hioe, "Weierstrassian and Lévy Random Walks and the Spherical Model of Ferromagnetism with Long Range Interactions ", AIP Conference Proceeding **109**, 85, edited by M. F. Shlesinger and B. West (1984)
- [49] T. H. Berlin and M. Kac, Phys. Rev., **86** 6 (1952)
- [50] G. S. Joyce Phys. Rev., 146 **1** (1966)
- [51] B. Bergersen and Z. Racz, Phys. Rev. Lett., **67**, 3047 (1991).
- [52] R. J. Glauber, J. Math. Phys., **4** 294 (1963).
- [53] G. Ódor, Rev. Mod. Phys., **76**, 663 (2004)
- [54] P. C. Hohenberg and B.I. Halperin, Rev. Mod. Phys., **49**, 435 (1977).
- [55] H. K. Janssen, B. Schaub, and B. Schmittmann, Z. Phys. B: Cond. Matter, **73**, 539 (1989).
- [56] B. Zheng, Int. J. Mod. Phys. B, **12**, 1419 (1998).
- [57] E. V. Albano, M. A. Bab, G. Baglietto , R. A. Borzi, T. S. Grigera, E S Loscar , D. E. Rodriguez, M. L. Rubio Puzzo, G. P. Saracco, Rep. Progr. Phys., **74**, 026501 (2010)
- [58] Y. Chen, S.H. Guo, Z. B. Li, S. Marculescu, L. Schuelke, Eur. Phys. J. B., **18**, 289 (2000).
- [59] D. Mollison, JRSS. B, **39**, 283 (1977)
- [60] T. M. Liggett (1985): *Interacting particle Systems* (Springer, Berlin, Heidelberg)
- [61] M. Henkel, H. Hinrichsen and S. Lübeck, Non-equilibrium phase transitions, **1**, Springer, Bristol UK. (2008)
- [62] E. V. Albano J. Phys. A, **27**, L881 (1994)
- [63] R. Ziff , E. Gulari and Y. Brashad, Phys Rev. Lett., **56** 2553 (1986)
- [64] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky , Phys. Rev. E, **53**, R3009 (1996).
- [65] H. Berry, Phys. Rev. E, 67 031907 (2003).

- [66] J. Marro and R. Dickman (1999). "Nonequilibrium Phase Transition in Lattice Models ". Cambridge: Cambridge University Press.
- [67] K. A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chaté and M. Sano, Phys. Rev. Lett., **99** 234503 (2007)
- [68] I. Dornic , H. Chaté , J. Chave and H. Hinrichsen Phys. Rev. Lett., **87**, 045701 (2001)
- [69] P. Clifford and A. Sudbury, Biometrika **60(3)**, 581, (1973).
- [70] M. Henkel and M. Pleimling, Non-equilibrium phase transitions, **2**, Springer, London (2010)

Capítulo 2

Método

2.1. Observables y Estimadores en la Mecánica Estadística

Uno de los problemas centrales de la Mecánica Estadística es calcular los observables termodinámicos de un sistema macroscópico, a partir de un modelo microscópico definido mediante una función Hamiltoniana conocida, como ejemplo el Hamiltoniano de Ising definido como:

$$H(s) = -J \sum_{(i,j)} s_i s_j - h \sum_{i=1} s_i \quad (2.1)$$

donde los s_i los espines de una red que toman valores discretos ± 1 e interactúan a primeros vecinos, mediante una constante de acoplamiento para el caso ferromagnético $J > 0$, y a su vez con un campo externo de magnitud h . A partir de esta función hamiltoniana y usando el *ensamble* canónico, es posible calcular magnitudes como la energía media (U) o la magnetización (M) de un ferromagneto a partir del promedio sobre todos los posibles "microestados" compatibles con un macroestado dado [1]. Si se conocen todas las configuraciones posibles de espines s para una dada temperatura, tanto la energía media como la magnetización ($M(T)$) se calculan como:

$$U(T, h) = \langle H(s) \rangle_T \quad (2.2)$$

$$M(T, h) = \langle \frac{1}{N} \sum_i s_i \rangle_T, \quad (2.3)$$

donde $\langle \rangle_T$ representa el promedio de microestados asociados una determinada temperatura y N la cantidad total de partículas de la red. Dentro de este esquema tanto el volumen como el número de partículas son constantes, la probabilidad $p(\{s_l\})$ de hallar al sistema en un microestado $\{s_l\}$ con energía $H(\{s_l\})$ esta dada por la distribución de Boltzmann.

$$p(\{s_l\}) = \frac{\exp[-H/k_B T]}{Z} \quad (2.4)$$

donde $Z = \sum_{\{s_l\}} \exp[-H/k_B T]$ es la función de partición canónica. En equilibrio térmico el valor de expectación de un observable macroscópico está dado por el valor medio:

$$O(T) = \sum_{\{s_l\}} O(\{s_l\}) p(\{s_l\}) = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_l\}} \exp[-H/k_B T] O(\{s_l\}) \quad (2.5)$$

En el caso de que el espectro de energía sea continuo la sumatoria se transforma en una integral. Resolver esta expresión ya sea de manera analítica o numérica resulta ser esencial en el presente formalismo. Un método eficiente para calcular estas expresiones es el método Monte Carlo (MC), el cual puede entenderse como un experimento numérico capaz de reproducir de manera estadística una fluctuación térmica aleatoria de un estado a otro, permitiendo obtener el valor de los observables canónicos. Simulaciones computacionales del método MC en modelos de diferente complejidad pudieron reproducir una gran variedad de fenómenos físicos, incluso en sistemas fuera de equilibrio y sistemas críticos [2, 10, 3, 16]. Como se detallará a continuación, este método incorpora un mecanismo de evolución temporal, que se vincula al promedio sobre configuraciones (ergodicidad) [2].

2.2. El método Monte Carlo

El método Monte Carlo (MC) fue creado para resolver los cálculos de dispersión en colisiones atómicas [3]. Estos cálculos requerían realizar integrales muy complejas e inabordables de manera analítica. En este sentido se propuso un integrador numérico, que no requería fraccionar el espacio de fase a manera de grilla ni interpolar la curva a integrar y se basaba en un promedio de configuraciones conocido como muestreo simple [3]. Su formalización como método de simulación para procesos térmicos fue realizada por Metrópolis y colaboradores en 1953 [4].

2.2.1. El método MC de muestreo “simple”

Para describir este método tomaremos la terminología de la Mecánica Estadística. La idea es aproximar el valor medio de un observable $O(T)$ por un estimador $O_Q(T)$ obtenido a partir de un número finito de configuraciones Q , de acuerdo a la expresión:

$$O_Q(T) = \frac{\sum_{l=1}^Q \exp(-H(\{s_l\})/k_B T) p(\{s_l\}) O(\{s_l\})}{\sum_{l=1}^Q p(\{s_l\}) \exp[-H(\{s_l\})/k_B T]}, \quad (2.6)$$

donde $p(\{s_l\})$ es la probabilidad de la configuración $\{s_l\}$. Para $Q \rightarrow \infty$ el estimador converge al valor medio. Sin embargo, si se tiene un número finito de configuraciones Q la precisión del estimador estará condicionada por la elección de la probabilidad $p(\{s_l\})$. El caso de muestreo simple se corresponde a $p(\{s_l\}) = 1/Q$, elección que si bien no siempre resulta eficiente, permite calcular observables físicos donde otros métodos son inviables [3]. En este sentido resultó de gran utilidad para estudiar caminantes aleatorios, procesos de adsorción secuencial aleatoria, percolación, etc. Sin embargo, en el contexto termodinámico solo resultó eficiente en sistemas donde todas las configuraciones tienen aproximadamente la misma probabilidad, como en el caso de estados

de temperatura alta donde resulte $\exp[-H/k_B T] \sim 1$ [2]. En cambio, para simular eventos a temperaturas bajas este método es ineficiente ya que de todo el espacio de configuraciones muy pocas contribuirán al valor medio.

2.2.2. El Método MC de muestreo “de importancia”

Este método fue desarrollado por Metrópolis y colaboradores [4], como una manera de solucionar las debilidades del método anterior y se basa en que los observables termodinámicos son magnitudes auto-promediables. Es decir, una magnitud medida a partir de diferentes configuraciones en equilibrio es esencialmente igual a su valor medio. Lo que llevó a buscar que el estimador de la ecuación 2.6 se aproxime efectivamente a su valor medio dado por la ecuación 2.5.

Para lograr esto, en vez de elegir las configuraciones $\{s_l\}$ de manera aleatoria se utiliza una cadena de Markov, donde la probabilidad de transición de cada nuevo microestado $\{s_{l+1}\}$ depende del microestado anterior [2]. A su vez, dicha probabilidad debe verificar que la distribución de estados generados, en el límite de eventos infinitos ($Q \rightarrow \infty$), sea convergente a la distribución de equilibrio de Boltzmann, $P_{eq}(\{s_l\}) = \frac{1}{Z} \exp(-\frac{H}{k_B T})$. Una condición suficiente para esto es suponer válido el principio de balance detallado:

$$P(\{s_l\})_{eq} W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\}) = P(\{s'_l\})_{eq} W(\{s'_l\} \rightarrow \{s_l\}), \quad (2.7)$$

donde se ve que el cociente de probabilidades de transición $\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\}$ sobre $\{s_l\} \leftarrow \{s'_l\}$ dependerá del cambio de energía $\delta H = H(\{s'_l\}) - H(\{s_l\})$:

$$\frac{W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\})}{W(\{s'_l\} \rightarrow \{s_l\})} = \exp(-\frac{\delta H}{k_B T}) \quad (2.8)$$

Luego, es necesario especificar la elección de la función $W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\})$ de manera que satisfaga las ecuaciones 2.7 y 2.8. Las funciones más usadas son las que conforman las llamadas dinámicas de Glauber (eq. 2.9) y Metrópolis (eq. 2.10), respectivamente:

$$W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\}) = \frac{1}{\tau_s} [1 - \tanh(\frac{\Delta H}{2k_B T})] \quad (2.9)$$

$$W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\}) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_s} \exp(-\frac{\Delta H}{k_B T}) & \text{si } \Delta H > 0 \\ \frac{1}{\tau_s} & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.10)$$

donde τ_s es un factor arbitrario, que puede interpretarse como la unidad de tiempo Monte Carlo y $W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\})$ es entendida como una probabilidad de transición por unidad de tiempo. Por lo tanto, en ambos casos se llega al mismo estado de equilibrio pero cada método lo hará mediante dinámicas diferentes, lo que deberá ser tenido en cuenta al elegir la función $W(\{s_l\} \rightarrow \{s'_l\})$ si se quiere estudiar particularmente la dinámica del sistema.

2.3. Los Modelos Utilizados

Como se mencionó en el capítulo anterior, para esta tesis se utilizan modelos de partículas interactuantes con interacciones que decaen algebraicamente con la distancia. La dinámica de cada uno de ellos se simula mediante el método Monte Carlo. Como modelos de base, se utilizaron dos modelos representativos transiciones orden-desorden, a los que se incorporan interacciones LA. Por un lado el modelo de Ising propuesto en 1920 por Lenz [5] como un modelo ferromagnético y resuelto en 1925 por E. Ising [6] y en 1944 por Onsager [7], para dimensiones $d = 1$ y $d = 2$, respectivamente. Por otro lado, el modelo de Votante fue propuesto por Clifford y Subdury en 1973 [8] como modelo de competencia entre especies. Posteriormente fue formalizado por Holley y Liggett como un modelo elemental capaz de simular una dinámica de formación de opinión [9].

En el primer modelo, tomado como arquetipo de un sistema apartado del equilibrio, se estudió la evolución dinámica hacia el estado crítico. En el segundo modelo se estudió la evolución dinámica hacia el estado absorbente desde un estado desordenado y es un modelo representativo de un sistema sin equilibrio.

En el caso del modelo de Ising las fluctuaciones son controladas mediante la temperatura T , mientras que el modelo de Votante estándar (MV) no tiene parámetro de control. Sin embargo recientemente se conformó la clase universal de Votante al incorporar ruido sobre las interfaces, permitiendo que el ordenamiento pudiese ser controlado [10]. En cuanto a su comportamiento cabe aclarar que el modelo de Ising con dinámica Glauber [11] a $T = 0$ e interacciones de corto alcance presenta la misma dinámica de crecimiento de dominios que el modelo de Votante estándar (sin ruido).

A partir de estos dos modelos se armaron cuatro variantes con interacciones de largo alcance. Entre las cuales, las variantes del modelo de Ising (Ising-LA e Ising-GL) han sido tomadas de la bibliografía a partir de la referencias [12, 13, 14]. Mientras que la de los modelo de Votante (Votante-LA y Votante-Lèvy) son propuestas originales. En las primeras se estudia la dinámica crítica con el objeto de obtener algoritmos de mejor eficiencia para avanzar en el conocimiento acerca del comportamiento crítico del Ising-LA. Mientras que las últimas han sido de utilidad para caracterizar el efecto del alcance de las interacciones en la dinámica de sistemas sin equilibrio. Asimismo, permite estudiar formas de implementar interacciones de alcance en modelos sin equilibrio mediante vuelos de Lèvy. Dichos modelos fueron estudiados en redes unidimensionales.

2.3.1. El modelo de Ising-LA

Como mencionamos al comienzo de la sección a partir del modelo de Ising ferromagnético, se construyó el modelo de Ising con interacciones que decaen algebraicamente con la distancia (Ising-LA) y cuyo Hamiltoniano a campo externo nulo ($h = 0$) está dado por la siguiente función,

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{s_i s_j}{r_{ij}^{d+\sigma}}, \quad (2.11)$$

donde $J > 0$ es el la constante de acoplamiento ferromagnética, d es la dimensión de la red, s_i es la variable de espín en el sitio i , la cual puede tomar solo dos valores $s_i = \pm 1$. La sumatoria se extiende a todos los pares de espines separados una distancia $r_{i,j} = |r_i - r_j|$, y σ es un parámetro que controla el decaimiento del alcance [14]. A partir de éste Hamiltoniano se utilizó la dinámica de Metrópolis (eq. 2.10) [4], cuyo algoritmo puede resumirse en los siguiente pasos:

1. Se elige un sitio $\{1 \leq i \leq L\}$ de la red, al azar.
2. Se calcula la diferencia de energía que implica intercambiar el estado del espín i -ésimo (ΔH)
3. Se evalúa la probabilidad de transición de Metropolis (P_i^m) de ese sitio, a partir de la variación de energía como lo indica la ecuación 2.10.
4. Se sortea un número al azar $0 < a < 1$.
5. Solo si $a < P_i^m$ entonces se cambia s_i por $-s_i$.
6. Se itera esta secuencia tantas veces como espines tenga la red (L), para así conformar un paso de evolución Monte Carlo (PMC) o unidad de tiempo.

Cabe remarcar que calcular el cambio de energía para un sistema con interacciones de largo alcance para un tamaño L y dimensión d implica una suma de L^d términos, lo que se traduce en un costo de cálculo elevado incluso para $d = 1$. Por este motivo, se hace relevante estudiar la dinámica crítica a tiempos cortos ya que se encuentra libre del enlentecimiento crítico así como también implementar algoritmos más eficientes.

Observables

Los observables físicos utilizados, son magnitudes dinámicas que manifiestan un comportamiento como ley de potencia, algunas de las cuales fueron definidas en el capítulo 2. Sin embargo para una mayor comodidad detallaremos a continuación en forma completa las que fueron utilizadas en este caso [15, 16].

Para la dinámica crítica de relajación:

Partiendo del estado inicial de orden total, es decir con todos los espines en el mismo estado ($M(0) = 1$), las magnitudes utilizadas fueron:

- El valor medio de la magnetización

$$M(t, \epsilon) = \frac{1}{L} \left\langle \sum_{i=1}^L s_i(t, \epsilon) \right\rangle \quad (2.12)$$

donde L el número total de espines y los corchetes $\langle \rangle$ representan un promedio para distintas realizaciones de la dinámica. Magnitud que satisface para la dinámica en el punto crítico una dependencia de la forma,

$$M(t, 0) \propto t^{-\beta/\nu z}. \quad (2.13)$$

Mientras que para apartamientos del punto crítico es modulada por una función de escala.

- El cumulante de Binder de segundo orden ($U(t)$)

$$U(t, \epsilon) = \left(\frac{M^2(t, \epsilon)}{M(t, \epsilon)^2} - 1 \right), \quad (2.14)$$

donde $M^2(t, \epsilon) = \frac{1}{L^2} \langle (\sum_{i=1}^L s_i(t, \epsilon))^2 \rangle$ es el segundo momento de la magnetización. Esta función presenta en el punto crítico una dependencia temporal de la forma:

$$U(t, 0) \propto t^{d/z}, \quad (2.15)$$

donde d es la dimensión del modelo.

- La derivada del logaritmo de la magnetización respecto de la temperatura reducida y evaluada en el punto crítico ($\partial_\epsilon \log M|_{\epsilon=0}$), calculada numéricamente como:

$$\partial_\epsilon \log M|_{\epsilon=0} = \frac{1}{M(t, 0)} \times \left(\frac{\Delta M(t, \epsilon)}{\Delta \epsilon} \right). \quad (2.16)$$

con una dependencia en el punto crítico de la forma:

$$\partial_\epsilon \log M|_{\epsilon=0} \propto t^{1/\nu z}. \quad (2.17)$$

Para la dinámica crítica de tiempos cortos partiendo desde el estado con magnetización nula:

Se consideran como condición inicial estados iniciales desordenados con magnetización estrictamente nula ($M(0) \equiv 0$). Las medidas utilizadas fueron:

- La susceptibilidad, calculada a partir de las fluctuaciones de la magnetización

$$\chi(t, \epsilon) = \frac{1}{k_B T L} (M^2(t, \epsilon) - M(t, \epsilon)^2), \quad (2.18)$$

que el punto crítico satisface una dependencia como ley de potencia de la forma,

$$\chi(t, 0) \propto t^{\gamma/\nu z}. \quad (2.19)$$

- La autocorrelación del espín

$$A(t, \epsilon) = \frac{1}{L} \left\langle \sum_{i=1}^L s_i(t, \epsilon) s_i(0, \epsilon) \right\rangle. \quad (2.20)$$

con la dependencia dinámica crítica

$$A(t, 0) \propto t^{-(d/z-\theta)}. \quad (2.21)$$

- La correlación temporal para dos espines separados una distancia r :

$$C(t, r) = \frac{1}{L} \left\langle \sum_{i=1}^L s_i(t) s_{i+r}(t) \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^L s_i(t) \right\rangle \left\langle \sum_{i=1}^L s_{i+r}(t) \right\rangle, \quad (2.22)$$

que en el punto crítico satisface la ley de escala:

$$C(t, r) = r^{-(d-2+\eta)} c(r/\xi(t)). \quad (2.23)$$

donde $c(r/\xi(t))$ es la función que modula los apartamientos del comportamiento crítico.

Para la dinámica crítica de tiempos cortos desde estados desordenados con magnetización inicial $M(0) \rightarrow 0$:

Tomando como condición inicial estados desordenados, pero a diferencia del caso anterior, la magnetización pequeña pero no nula $M(0) \neq 0$. Los observables fueron:

- El valor medio de la magnetización ($M(t, \epsilon)$) con condición inicial $M(0) \sim 0$. Magnitud que presenta, en el punto crítico, un incremento inicial con una dependencia temporal de la forma:

$$M(t, 0) \propto t^{\theta^*}, \quad (2.24)$$

con un intervalo de validez desde el tiempo microscópico t_{mic} hasta un tiempo que cumple $t^{x_0/z} m_0 \ll 1$. El exponente θ^* toma el valor del exponente crítico θ en el límite $M_0 \rightarrow 0$.

- La autocorrelación de la magnetización partiendo de una configuración inicial desordenada, con un valor de magnetización inicial $M(0)$ aleatoria, calculada como:

$$Q(t) = \frac{1}{L^2} \left\langle \sum_{i=1}^L s_i(t) \sum_{i=1}^L s_i(0) \right\rangle, \quad (2.25)$$

con una dependencia temporal en el punto crítico,

$$Q(t) \propto t^\theta. \quad (2.26)$$

Esta magnitud permite obtener el exponente θ de una manera alternativa al caso anterior y sin necesidad de extrapolación alguna. Sin embargo este último caso es de un mayor costo computacional [17]

Determinación de T_c y de los exponentes críticos

Para determinar la temperatura crítica y el intervalo de validez del comportamiento como ley de potencia (t_{mic}, t_{max}) en sistemas con interacciones de largo alcance, resulta necesario considerar al menos dos fuentes de error, la función de escala cuando $\epsilon \neq 0$ y los efectos del tamaño finito del sistema.

Para separar los efectos causados por el apartamiento de la temperatura crítica se elige un tamaño L para el sistema y se simula la dinámica crítica de relajación (*DCR*) para varias temperaturas. Luego se realiza un gráfico log-log de $M(t)$ y uno de la derivada numérica $\frac{d\log(M)}{d\log(t)}$.

En el primer gráfico, la temperatura para la cual se obtiene una curva que se ajusta mejor a una ley de potencia determina la temperatura crítica ($\epsilon = 0$). Respecto al intervalo de validez, el tiempo microscópico no depende ni de la temperatura ni del tamaño del sistema, mientras que el tiempo máximo t_{max} , para el cual la longitud de correlación es del orden del tamaño del sistema, está determinado por el inicio de un rápido decrecimiento de $M(t)$ para todas las temperaturas en la proximidad del punto crítico. Una observación más directa de lo anteriormente descrito puede realizarse a partir de la derivada numérica, donde la curva crítica se corresponderá a una sucesión de puntos de valor medió aproximadamente constante en el intervalo (t_{mic}, t_{max}) . El error de T_c está determinado a partir de las curvas que presentan una pequeña pero notable desviación de la ley de potencia en dicho intervalo.

A partir de éste procedimiento, una vez determinada la T_c es posible obtener el exponente $\beta/\nu z$ a partir del ajuste de la curva crítica $M(t)$ y el resto de los exponentes dinámicos a partir de los restantes observables simulados en el punto crítico.

Cabe remarcar que un procedimiento similar puede ser realizado utilizando la dinámica crítica de tiempos cortos (*DCTC*). Sin embargo, las curvas de evolución temporal obtenidas desde ésta dinámica resultan menos sensibles al cambio de temperatura que el caso anterior, lo que dificulta una determinación precisa de la temperatura crítica.

2.3.2. El Modelo de Votante con probabilidad de enlaces de largo alcance

El modelo de Votante estándar es un modelo de dos estados $s = \pm 1$, como el modelo de Ising, pero no dispone de un Hamiltoniano sino de reglas de evolución, donde dos fases absorbentes entran en competencia. La regla dinámica propone que dos partículas vecinas solo interactúen si tienen estados de espín diferentes ($\uparrow\downarrow$) y en ese caso tienen una probabilidad de transición $P = 1/2$ de caer en cualquiera de los estados ($\uparrow\uparrow$) o ($\downarrow\downarrow$). Como veremos a continuación, el parámetro de orden dinámico es la densidad de interfaces ($\rho(t)$), donde una interface ($I_{ij} = 1$) se asocia a pares formados entre sitios vecinos (i, j) con espines ($\uparrow\downarrow$) o ($\downarrow\uparrow$) mientras que una dupla de tipo ($\uparrow\uparrow$) o ($\downarrow\downarrow$) representa la ausencia de interface ($I_{ij} = 0$)¹

A diferencia del modelo de Ising todos los cambios en el sistema ocurren a través de las interfaces entre dominios y sin una temperatura como parámetro de control. La inclusión de ruido global debilita el orden de largo alcance e inhibe la formación de dominios magnéticos. En cambio, a partir de la inclusión de ruido en las interfaces, pudo conformarse la clase del modelo de Votante [18], donde puede observarse una transición de fase orden-desorden hacia el estado absorbente. Por otra parte, en redes regulares la dinámica también es determinada por dimensión d , lo cuál ha sido resuelto exactamente

¹Los estados de interface $(1, 0)$ también se pueden entender como partículas, por lo que este modelo se puede mapear también a la clase de modelos de creación-anihilación fuera de equilibrio [10].

para cualquier dimensión entera [19]. Como se mencionó en la introducción se tienen tres tipos de comportamientos:

- Por debajo de la dimensión crítica $d < d_c = 2$, se observa que la dinámica irreversible hacia el estado absorbente ($\rho = 0$) sigue una ley de potencia, cuyo exponente se corresponde con el del modelo de Ising cinético unidimensional con dinámica Glauber a temperatura $T = 0$ ($\alpha = 1/2$).
- Para $d = d_c = 2$ el ordenamiento se vuelve mucho más lento y con dominios magnéticos más rugosos, característica que vincula a éste modelo con un proceso de crecimiento sin tensión superficial [18, 20].
- Por último, para $d > d_c$ no se alcanza un orden global. En el caso de tamaño finito se observa una dinámica de tipo exponencial que se relaciona con fluctuaciones estadísticas que llevan al sistema hacia uno de sus estados absorbentes.

Las interacciones de largo alcance

A partir de las reglas dinámicas del modelo estándar se propuso la inclusión de interacciones de largo alcance. En particular se utilizó una dependencia algebraica para la distribución de probabilidad de la distancia de interacción, análoga a la utilizada en el modelo de Ising-LA, ya que a partir de resultados conocidos [20, 21] se espera que permita pasar de forma continua entre un comportamiento de corto alcance y uno de tipo campo medio. De esta forma la distancia de interacción r se selecciona de manera aleatoria pero pesando con la distribución:

$$P(r) = \frac{A}{r^{(d+\sigma)}}, \quad (2.27)$$

donde A es la constante de normalización.

De esta manera el algoritmo de simulación queda de la siguiente forma:

- Se elige un sitio i al azar con estado s_i
- Se sorteja una distancia de interacción de manera que satisfaga la distribución de probabilidad $P(r) = \frac{A}{r^{(d+\sigma)}}$.
- Se elige un sitio j que se encuentre a distancia r del sitio i , de manera aleatoria entre los sitios $j = i + r$ o $j = i - r$
- Se asigna al sitio j el valor del estado del sitio i , es decir $s_j = s_i$
- Se repite el algoritmo L veces, donde L es el número total de sitios, para simular una unidad de tiempo o paso Monte Carlo (PMC).

La distancia de interacción (r), utilizada para este modelo y los siguientes, es obtenida como una variable aleatoria con una distribución de probabilidad no uniforme de la forma:

$$P(r) = \sigma r^{-(1+\sigma)}, \quad (2.28)$$

definida para $r > 1$. Para obtener dicha variable, primero es preciso generar una variable aleatoria continua de distribución uniforme z , definida en el intervalo $(0, 1)$. Luego, mediante la transformación:

$$r = z^{-(1/\sigma)}, \quad (2.29)$$

es posible obtener un vector de distancia r que respete la probabilidad mencionada. Para más detalle del algoritmo, puede verse la referencia [21], donde esta distancia de vuelo ha sido utilizada para simular un caminante aleatorio de largo alcance.

Magnitudes medidas

Para estudiar la dinámica del Votante-LA se sitúa al sistema en un estado inicial desordenado y se observa la evolución temporal para distintos valores del parámetro σ . Para esto medimos las siguientes magnitudes:

La densidad media de interfaces (ρ):

Esta magnitud es utilizada como parámetro de orden dinámico para estudiar el ordenamiento del sistema, y para $d = 1$ se calcula como:

$$\rho = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^{L-1} (1 - s_i s_{i+1})}{2(L-1)} \right\rangle, \quad (2.30)$$

donde $\langle \rangle$ indica que es un promedio sobre un número n_s de diferentes configuraciones. Cabe resaltar que un estado de magnetización nula se corresponderá con una densidad media de interfaces con valor $\rho = 1/2$, mientras que para el sistema en el estado ordenado, con magnetización $M(\{s\}) = \pm 1$, tendremos una densidad de interfaces con valor $\rho = 0$.

Los resultados conocidos para este parámetro en el modelo de Votante estándar sobre redes regulares muestran un comportamiento dinámico bien distinto, según sea la dimensión de la red estudiada [19]. En este sentido, para el límite termodinámico tendremos:

- Para redes de dimensión $d = 1$ un proceso de formación de grandes aglomerados que provoca un decaimiento del parámetro de orden siguiendo una ley de potencia de la forma,

$$\rho(t) \propto t^{-\alpha} \quad (2.31)$$

con $\alpha = d/2$.

- Para la dimensión crítica ($d_c = 2$) se obtiene ordenamiento más lento con una dependencia logarítmica de la forma:

$$\rho(t) \propto (\ln(t))^{-1} \quad (2.32)$$

- Para dimensiones mayores $d > 2$ el parámetro de orden evoluciona hacia un estado estacionario con una densidad media constante:

$$\rho(t) \approx \rho_0. \quad (2.33)$$

El tiempo de vida de las interfaces (τ):

A partir de la densidad de interfaces para sistemas finitos es posible considerar otra magnitud: el tiempo de vida de las interfaces (τ), que consiste en un tiempo característico que se relaciona con el tiempo medio que demora el sistema en alcanzar el estado absorbente $\rho(t) = 0$. El valor τ depende de los diferentes procesos que actúen en la evolución dinámica. Para el modelo estándar en el régimen estacionario ($d > d_c = 2$), τ está determinado por la presencia de fluctuaciones capaces de llevar a un sistema de tamaño finito al estado absorbente. Mientras que para la región $d \leq d_c$, donde domina la formación de grandes dominios, τ está determinado por fluctuaciones en las interfaces [22]. En cualquier de los dos casos, esta magnitud siempre está relacionada con el tamaño del sistema L . Mas aún, la manera en que escala τ con el tamaño es una medida que puede ser usada para clasificar diferentes tipos de comportamientos en redes regulares [22, 23]. Para diferentes dimensiones se tiene:

- Para $d = 1$ el tiempo de ordenamiento depende como $\tau(L) \sim L^2$.
- Para la dimensión crítica $d_c = 2$ el tiempo de ordenamiento depende con el tamaño según $\tau(L) \sim L \ln L$
- Para dimensiones $d > 2$ el tiempo de ordenamiento satisface $\tau(L) \sim L$

La distribución de tamaños de dominio ($D(\zeta)$):

Otro estudio realizado fue la determinación de la distribución de los tamaños de dominios para diferentes tiempos durante la evolución dinámica. En este caso, el cálculo se realizó para distintos valores de σ y se compararon con los resultados para el modelo estándar en redes de $d = 1$ y $d = 2$. El tamaño máximo de los dominios representa una medida de la longitud de correlación del sistema (ξ) [10]. En el modelo estándar en la dimensión crítica, se observa una distribución de tamaños de dominios libre de escala, de la forma:

$$D(\zeta) \sim \zeta^{-\mu} \tag{2.34}$$

donde ζ es el tamaño de dominio y μ es un exponente depende del modelo.

2.3.3. El Modelo de Votante con Vuelos de Lèvy

Este modelo surge como una variante del modelo anterior en la que se implementó un mecanismo de dinámica mixta. En la misma se combina la dinámica de Votante estándar (a primeros vecinos) con una dinámica de intercambio entre espines ubicados a una distancia r , seleccionada de manera aleatoria y pesada con la misma distribución utilizada en el modelo de Votante-LA, ecuación 2.27. En este sentido, si se interpreta un espín con estado ($s = +1$) como un sitio ocupado de una red (\bullet), y a un espín con estado ($s = -1$) como un sitio vacío (\circ), un intercambio entre éstos objetos puede entenderse como un salto del sitio ocupado al vacío. A su vez, si es realizado con una probabilidad que depende de la distancia r como $P(r) \propto 1/r^{d+\sigma}$ este mecanismo se conoce como vuelo de Lèvy [24, 25], por lo que denominamos a este modelo como Votante-Lèvy.

La dinámica del Votante-Lèvy

Para una mayor claridad se enumeran a continuación los pasos de la dinámica utilizada en nuestro algoritmo Monte Carlo para la red unidimensional:

1. Se sortea un sitio $0 \leq i \leq L$ de la red, con estado s_i .
2. Se asigna a uno de sus dos primeros vecinos con el mismo estado de s_i
3. Se sortea una distancia r en el intervalo ($1 < r < L/2$) pesada por la distribución propuesta en la ecuación 2.27 y se elige al azar entre uno de los dos sitios $j = i \pm r$.
4. Teniendo en cuenta condiciones de contorno periódicas se intercambia el espín del sitio i -ésimo con el del sitio j elegido en el paso anterior.
5. Se itera esta secuencia tantas veces como espines tenga la red (L), para así conformar un paso de evolución Monte Carlo (PMC).

Observables

Los observables medidos, así como las magnitudes de interés, son los descriptos para el modelo de Votante-LA, en la sección anterior.

2.3.4. El Modelo ferromagnético de Ising con dinámica Glauber-Lèvy (Ising-GL)

En éste modelo se utiliza una dinámica mixta conformada por interacciones a primeros vecinos y vuelos de Lèvy. De todas las opciones propuestas para la dinámica de inversión de estados de espín a primeros vecinos, se utilizó la dinámica generalizada definida por Glauber [11] para el modelo de Ising ferromagnético, y usada por Bergensen y colaboradores [12]. Está definida a partir de una la probabilidad de transición $P_g(i)$ para un sitio i de la red, de la forma:

$$P_g(i) = 1 - \mu s_i (s_{i+1} + s_{i-1}) + \mu^2 s_{i+1} s_{i-1}, \quad (2.35)$$

donde s_i es espín i -ésimo de una cadena de L espines, $s_{i \pm 1}$ son los dos primeros vecinos del espín s_i y μ es el parámetro térmico dado por $\mu = \tanh(J/k_B T)$. La particularidad que tiene esta dinámica generalizada es el término de producto cruzado, el cual establece una dependencia de los estados de espín con la correlación entre los estados de los espines vecinos. Como puede verse en la ecuación 2.35, si despreciamos el segundo término la expresión se reduce a la probabilidad de Glauber usual. Además su importancia radica en que para dimensión $d = 1$ los estados ordenados del modelo de Ising de dinámica mixta no podrían ser generados utilizando una dinámica independiente de la correlación entre espines vecinos. Esta regla general fue demostrada por I. Kanter y D.S. Fisher en 1989 [26], y observada previamente como resultado particular por De Masi y colaboradores [27].

A su vez, como en el caso del Votante-Lèvy, el proceso de intercambio fue efectuado mediante un sorteo entre pares de vecinos $\{s_i, s_j\}$ pesados por la distribución de probabilidades definida en la sección anterior, ecuación 2.27. En este sentido valores de σ grandes determinan una distribución angosta de distancias, implicando un predominio de intercambios cercanos, mientras que valores pequeños de σ implican una distribución más ancha y por ende mayor cantidad de espines lejanos intervienen en el proceso.

La dinámica de Glauber-Lèvy

Los pasos de la dinámica utilizada en nuestro algoritmo Monte Carlo son:

1. Se sortea un sitio de la red al azar elegido con probabilidad uniforme en el intervalo $(0 \leq i \leq L)$.
2. Se evalúa la probabilidad de Glauber ($P_g(i)$) de ese sitio mediante la ecuación 2.35.
3. Se sortea un número al azar $0 < x < 1$.
4. Si $x < P_g(i)$ entonces se cambia s_i por $-s_i$.
5. Se sortea una distancia r en el intervalo $(1 < r < L/2)$ pesada por una distribución que genere la probabilidad de vuelo propuesta en la ecuación 2.27. A continuación se sortea entre los sitios s_{i+r} y s_{i-r} .
6. Teniendo en cuenta condiciones de contorno periódicas se intercambia el espín i -ésimo con uno de sus dos vecinos, elegido al azar, ubicados a distancia r y con un espín $s_j = s_{i \pm r}$.
7. Se itera esta secuencia tantas veces como espines tenga la red (L), para así conformar un paso de evolución Monte Carlo (PMC).

Cabe remarcar que en esta propuesta la probabilidad de intercambios de Glauber, ecuación 2.35, depende explícitamente de la temperatura (T) del sistema a través del parámetro μ , mientras que no resulta así en el caso de la probabilidad de vuelo de Lèvy, ecuación 2.27, ya que una vez sorteada la distancia r el vuelo siempre ocurre independientemente de la energía. Sin embargo, como fue propuesto en la referencia [28] también es posible utilizar una dinámica más general si en el paso 6 del algoritmo se incluye una probabilidad de intercambio que tenga en cuenta además el cambio de energía. Lo que requeriría a su vez, incorporar una nueva temperatura para los intercambios (T_i) diferente del valor de temperatura T usado para la inversión del estado de espín. Por lo tanto, los estados estacionarios del sistema aquí dependerán del cociente T_i/T como regulador de la tasa de reacción/difusión (Γ) del modelo. En este sentido, la elección particular del esquema propuesto fija la tasa reacción/difusión (Γ) permite comparar nuestros resultados con los de otros autores [12, 13], donde fue posible relacionar el estado estacionario del Ising-GL con el estado de crítico de equilibrio del Ising-LA

Por otro lado, como se indica en el paso (5), al momento de realizar un vuelo en lugar de sortear dos sitios al azar y luego pesar su probabilidad con la función de distribución de distancias definida por la ecuación 2.27, se toma como criterio de optimización el propuesto por Hinrichsen en algoritmos de vuelo de Lèvy [21], se genera una distancia de vuelo que respete la distribución propuesta por la ecuación 2.27. De esta manera se fuerza a que siempre ocurra un evento de vuelo.

Observables

Empleando este algoritmo se simuló la dinámica del modelo de Ising-GL para un valor de $\sigma = 0,75$ y distintos tamaños de sistemas. Los observables utilizados fueron los ya descritos para el modelo de Ising-LA (ver sección 2.3.1).

Bibliografía

- [1] J. W. Gibbs, "Elementary Principles in Statistical Mechanics ", OX BOW PRESS Woodbridge, Connecticut 06525 (1981).
- [2] K. Binder and D. W. Hermann, "Monte Carlo Simulation in Statistical Physics ", Springer-Verlag (2segunda edición) (1992).
- [3] M. E. J. Newman and G. T. Barkena, "Monte Carlo Methods in Statistical Physics ", Clarendon Press, Oxford, U. K. (2001).
- [4] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, J. Chem. Phys., **21**, 1087 (1953).
- [5] W. Lenz, Phys. Zeitschrift, **21**, 613 (1920).
- [6] E. Ising, Thesis (in German), Hamburg (1924).
- [7] L. Onsager, Phys. Rev., **65**, 117 (1944).
- [8] P. Clifford and A. Sudbury, Biometrika **60(3)**, 581, (1973).
- [9] R. Holley and T. M. Liggett, "Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model ", Ann. Probab, **3**, 643 (1975).
- [10] M. Henkel, H. Hinrichsen and S. Lübeck "Non-Equilibrium Phase Transitions", **1**, Springer (2008).
- [11] R. J. Glauber, J. Math.Phys., **4** 294 (1963).
- [12] B. Bergensen and Z. Rácz, Phys. Rev. Lett., **67**, 22 (1991).
- [13] H-J Xu and B. Bergensen, Z. Rácz, Phys. Rev. E, **47**, 3 (1993).
- [14] K. Binder, E. Luijten Phys. Rep., **344**, 179 (2001).
- [15] B. Zheng, Int. J. Mod. Phys. B, **12**, 1419 (1998).
- [16] E. V. Albano, M. A. Bab, G. Baglietto, R. A. Borzi, T. S. Grigera, E. S. Loscar , D. E. Rodriguez, M. L. Rubio Puzzo, G. P. Saracco, Rep. Progr. Phys., **74**, 026501 (2010).
- [17] T. Tomè and M. J. de Oliveira, Phys. Rev. E, **58**, 4242 (1998).

- [18] I. Dornic , H. Chaté , J. Chave and H. Hinrichsen, Phys. Rev. Lett., **87**, 045701 (2001).
- [19] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky , Phys. Rev. E, **53**, R3009 (1996).
- [20] H. Hinrichsen, Adv. Phys., **49**, 815 (2000).
- [21] H. Hinrichsen J. Stat. Mech., **P07006** (2007).
- [22] Suchecki K., Eguíluz V. M. and San Miguel M., Phys. Rev. E., **72**, 036132 (2005).
- [23] P. L. Krapivsky , Phys. Rev. A. **45**, 1067 (1992).
- [24] M. F. Shlesinger, G. Zaslavsky, and J. Klafter, Nature (London) **363**, 31 (1993).
- [25] "Lèvy Flights and Related Topics in Physics", Lecture Notes in Physics, edited by M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch, Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [26] I. Kanter, D. S. Fisher, Phys.Rev. A, **40**, 5327 (1989).
- [27] A. DeMasi, P. A. Ferrari and J. L. Lebowitz, Phys. Rev. Lett., **55**, 1947 (1985); J. Stat. Phys., **44**, 589 (1986).
- [28] P. L. Garrido, J. Marro and J. M. Gonzalez-Miranda, Phys. Rev. A,**40**, 5802 (1989).

Capítulo 3

Estudio de la dinámica crítica del modelo de Ising con interacciones de largo alcance

3.1. Antecedentes

Este capítulo se centra en el estudio del modelo de Ising unidimensional con interacciones de largo alcance dependientes de manera algebraica con la distancia, de la forma $J(r) \sim 1/r^{d+\sigma}$ (Ising-LA). Como fue detallado en la sección 1.2, una serie de estudios sobre el comportamiento crítico de éste modelo fueron realizados a partir de cálculos del grupo de renormalización (GR) [1, 2, 3] y posteriormente verificados mediante simulaciones Monte Carlo en equilibrio [4]. En estos trabajos se demostró la existencia de tres regímenes parametrizados por σ . En el caso particular de $d = 1$ los regímenes están delimitados de la siguiente manera [5]:

- I) Un régimen de comportamiento de corto alcance en la región con $\sigma > 1$.
- II) Un régimen de comportamiento intermedio en la región con $1/2 < \sigma < 1$, donde los exponentes críticos son funciones continuas del parámetro σ .
- III) Un régimen de comportamiento clásico en la región ($\sigma \leq 1/2$), donde los exponentes se corresponden con los de campo medio, a excepción de η y de ν quienes toman los valores $\nu = 1/\sigma$ y $\eta = 2 - \sigma$. Siendo esta última relación también válida en el régimen intermedio.
- IV) Para $\sigma = 1$ se observa que la longitud de correlación no manifiesta una dependencia como ley de potencia y la magnetización presenta una discontinuidad. Comportamiento que se puede asociar a una transición de fase tipo Kosterlitz-Thouless [6, 7]

Para este caso, Binder y Luijten [5] obtuvieron mediante simulaciones Monte Carlo, los exponentes de escala del campo magnético y_h (exponente magnético) y de la temperatura reducida y_ϵ (exponente térmico), definidos en capítulo 1 sección 1.1.2 a partir de las relaciones de GR (ver ecuaciones 1.10, 1.11 y 1.12)

Exponentes que permiten determinar los exponentes críticos estáticos utilizados en las leyes de escala mostradas en la tabla 3.1. Las figuras 3.1 y 3.2 (tomadas de la referencia [5]) muestran el comportamiento de y_ϵ e y_h con σ , incluyendo los exponentes corregidos y_{ϵ^*} e y_{h^*} para la región de campo medio. En las mismas figuras se indica con líneas punteadas las predicciones de GR. Los datos mostrados en dichas figuras serán utilizados como referencia a lo largo de la tesis. Centrando la atención en el régimen intermedio, resultados recientes de Chen y colaboradores [8], basados en cálculos de GR aplicados al modelo de Ginsburg-Landau, predicen la validez de la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos para el modelo con interacciones de largo alcance estudiadas en esta tesis. A partir de estos resultados se obtuvieron expresiones analíticas que predicen los valores de los exponentes críticos η , ν , θ y z .

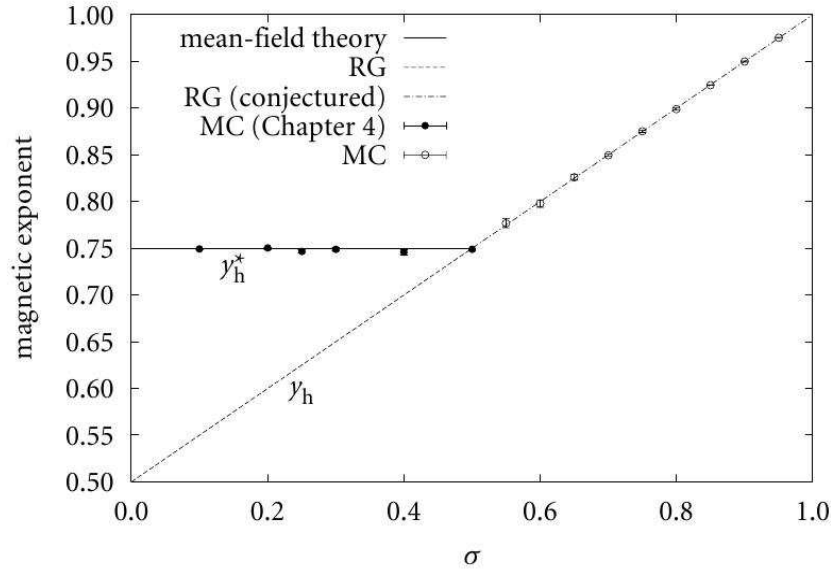


Figura 3.1: Exponente magnético y_h del modelo Ising-LA en función de σ , obtenido por Binder y Luijten [5] mediante simulaciones Monte Carlo en equilibrio. Los valores y_{h^*} corresponden a una corrección de los exponentes mencionados, la cual se hace relevante solo en la región de campo medio ($\sigma < d/2$). La figura muestra también las predicciones de GR [1, 5].

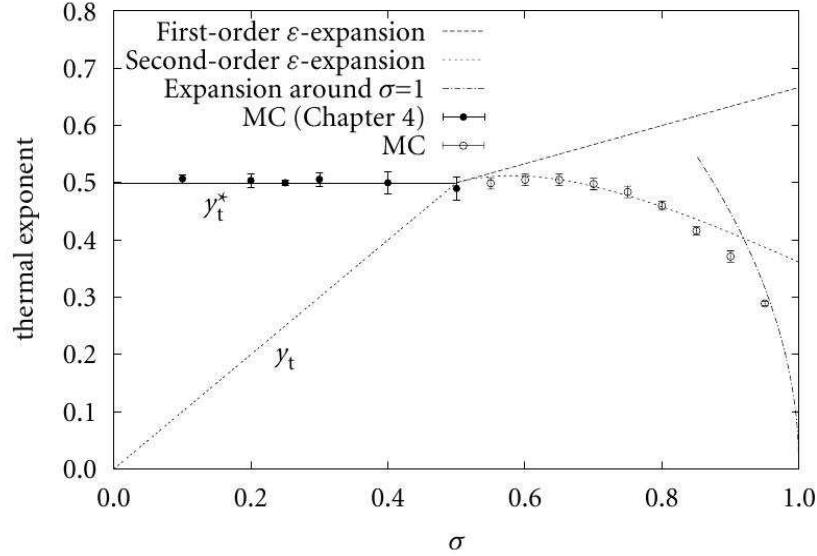


Figura 3.2: Exponente térmico y_ϵ del modelo Ising-LA, en función de σ , obtenidos por Binder y Luijten [5], mediante simulaciones Monte Carlo en equilibrio. Los valores de y_ϵ^* corresponden a una corrección de los exponentes mencionados, la cual se hace relevante solo en la región de campo medio, para valores ($\sigma < d/2$). Se indican también las predicciones obtenidas de GR [1, 5]

Exponentes críticos	Exponentes de GR en la región clásica
$\alpha = 2 - d/y_t$	$y_\epsilon = \sigma$
$\beta = (d - y_h)/y_t$	$y_\epsilon^* = 0, 5$
$\gamma = (2y_h - d)/y_t$	
$\delta = y_h/(d - y_h)$	$y_h = (1 + \sigma)/2$
$\eta = 2 - 2y_h + d$	$y_h^* = 0, 75$
$\nu = 1/y_t$	

Cuadro 3.1: La tabla muestra las relaciones entre los exponentes y_h e y_ϵ y los exponentes críticos. En la segunda columna se indican los exponentes y_h e y_ϵ y las correcciones y_ϵ^* e y_h^* propuestas por cálculos de GR [5] validos para la región clásica.

Este capítulo tiene por objetivo contribuir a la comprensión de la dinámica de sistemas apartados del equilibrio con interacciones de largo alcance. Específicamente se busca comprobar las predicciones teóricas de Chen y colaboradores [8], estableciendo la validez de la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos para estudiar el comportamiento crítico de modelos con interacciones de largo alcance mediante simulaciones Monte Carlo.

3.2. Detalle de las simulaciones

Los aspectos generales de la dinámica crítica del modelo Ising-LA fueron discutidos en el capítulo 1 sección 1.3.1 y el capítulo 2 sección 2.3.1. En la última sección se detallan los observables utilizados, el algoritmo y el procedimiento para obtener el punto crítico. Las simulaciones fueron realizadas para un valor de $\sigma = 0,75$, para este valor se espera que los exponentes críticos sean suficientemente diferentes de los correspondientes a campo medio ($\sigma \leq 0,5$) y a su vez se encuentra alejado de los efectos de la transición tipo Kosterlitz Thouless esperada en $\sigma = 1$. Las simulaciones fueron realizadas para sistemas de tamaños $L \leq 10^5$ usando condiciones de frontera periódicas, así la sumatoria involucrada en el Hamiltoniano dado por la ecuación 2.11 se evalúa hasta valores de distancia $r = L/2$. Para aplicar el escaneo de alcance finito, propuesto por Glumac y colaboradores [9], se realizaron simulaciones truncando las interacciones en el N -ésimo vecino, es decir la sumatoria en el Hamiltoniano se extiende para todos los valores de $r \leq N$ siendo el valor máximo $N_{max} = L/2$.

3.3. Resultados y Discusión

3.3.1. La determinación del punto crítico T_c

Determinación del intervalo de validez de las leyes de potencia en la dinámica de relajación

La figura 3.3 muestra la dinámica de relajación de la magnetización ($M(t)$) a diferentes temperaturas pertenecientes a la región crítica de un sistema de tamaño $L = 2 \times 10^4$. Como se describió en la sección 2.3.1 la temperatura crítica correspondería a la mejor ley de potencia dada por la ecuación 2.13 en un intervalo (t_{mic}, t_{max}) .

Para la determinación tanto de la temperatura como del intervalo se debe considerar el origen de las desviaciones de la ley de potencia: i) la función de escala dada en la ecuación 1.14 cuando $T < T_c$ o $T > T_c$; ii) los efectos debidos al tamaño finito del sistema L , dados por un rápido decaimiento exponencial (ecuación 1.19) a partir de t_{max} esperados para $\xi \sim L$ y iii) los efectos de tamaño finito debido al truncamiento del alcance de la interacción, que son propios de sistemas con interacciones de alcance infinito, como las estudiadas en esta tesis. Los últimos están presentes aun cuando $\xi \ll L$, dado que el tamaño finito del sistema necesariamente conlleva a un truncamiento de la interacción ($N_{max} = L/2$) y su caracterización es un tema abierto que resulta de fundamental importancia para la determinación del comportamiento crítico mediante la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos. Por su parte el t_{mic} solo depende de las características microscópicas del modelo y no se ve afectado por los efectos antes mencionados.

En el grafico insertado en la figura 3.3 se muestra el comportamiento temporal de la derivada $d(\log(M(t)))/d(\log(t))$, obtenida en forma numérica, para tres de las temperaturas mostradas en la figura principal. A partir de este comportamiento es posible identificar el intervalo $t_{mic} = 10$ PMC y $t_{max} = 10^3$ PMC, donde el ultimo

valor se corresponde a un tiempo a partir del cual las curvas evidencian una desviación hacia $M(t) = 0$. Por su parte, siguiendo el procedimiento aplicado a sistemas con interacciones de corto alcance, la temperatura crítica es aquella para la cual se obtiene un valor constante $T_c = 26525(25)$. El análisis descrito es complementado buscando la curva que mejor ajusta a la ley de potencia dada por la ecuación 2.13. El intervalo de ajuste resulto consistente con el previamente determinado y se obtuvo el exponente $\beta/\nu z = 0,129(6)$. Las barras de error en la T_c se estimaron a partir de las curvas que presentan una notable pero pequeña desviación de la ley de potencia.

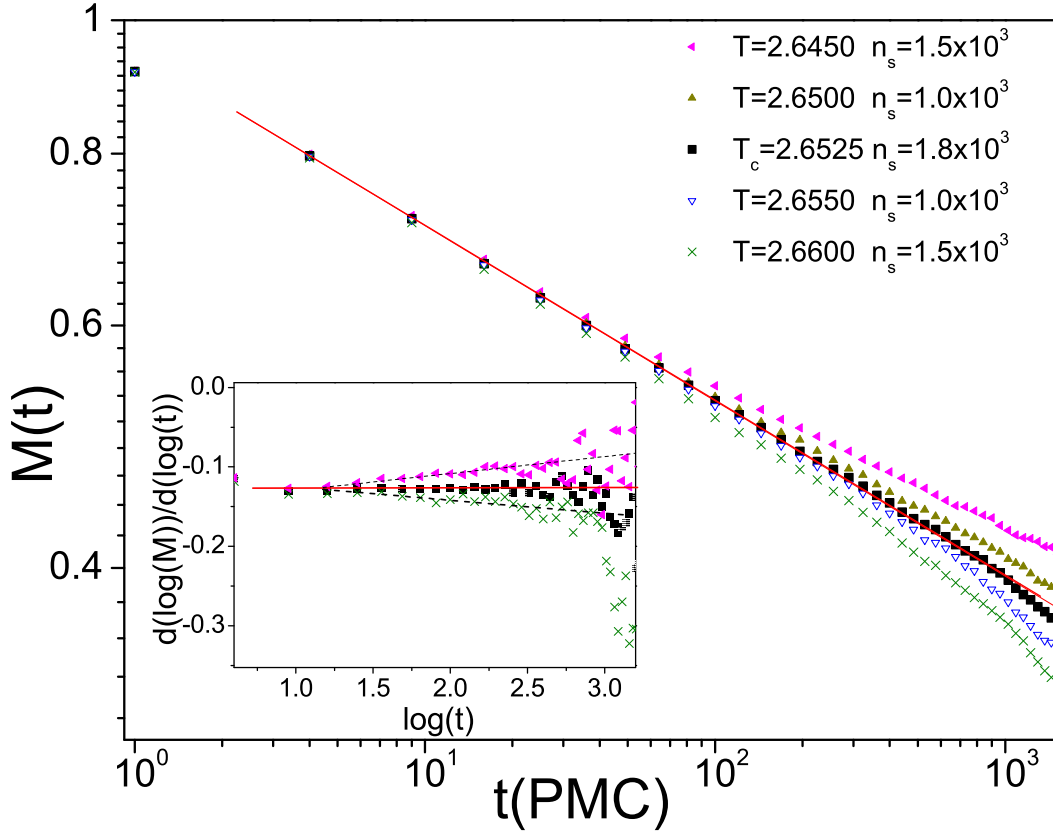


Figura 3.3: Evolución temporal de la magnetización $M(t)$ en las temperaturas indicadas a partir de una configuración inicial ordenada correspondiente a $T = 0$. Los datos pertenecen a redes de tamaño $L = 2 \times 10^4$. La línea continua indica el ajuste de la curva a $T = 2,6525$, con la ecuación 2.16. En la leyenda se indica también el número de configuraciones promediadas. El grafico interior muestra la derivada del $\partial \log(M)/\partial \log(t)$ y la línea continua el ajuste que determina el exponente $\beta/\nu z$.

Los efectos de tamaño finito

Para caracterizar los efectos de tamaño finito (ii,iii) mencionados en la sección anterior, el procedimiento descrito fue llevado a cabo para varios tamaños de sistema (L)

y diferentes alcances de las interacciones mediante un truncamiento hasta el N -ésimo vecino. El objetivo de un análisis de este tipo es distinguir entre los efectos debido al tamaño finito del sistema de los correspondientes al truncamiento de la interacción. La figura 3.4 muestra las leyes de potencia obtenidas para la dinámica de relajación pertenecientes a cuatro tamaños del sistema, tales que $L < 2 \times 10^4$ y sus correspondientes temperaturas, indicadas en la leyenda. Por su parte la figura 3.5 muestra las leyes de potencia obtenidas para el tamaño $L = 1 \times 10^4$ y diferentes alcances de interacción, tales que $N \leq N_{max}$. La comparación de ambas figuras lleva a la conclusión que la temperatura a la cual se observa la ley de potencia (indicadas en las leyendas) y el intervalo de validez de la misma solo depende del truncamiento, es decir del alcance N de interacción. Esto lleva a la conclusión de que la temperatura a la cual se observa la ley de potencia es una temperatura crítica efectiva $T_c(N)$.

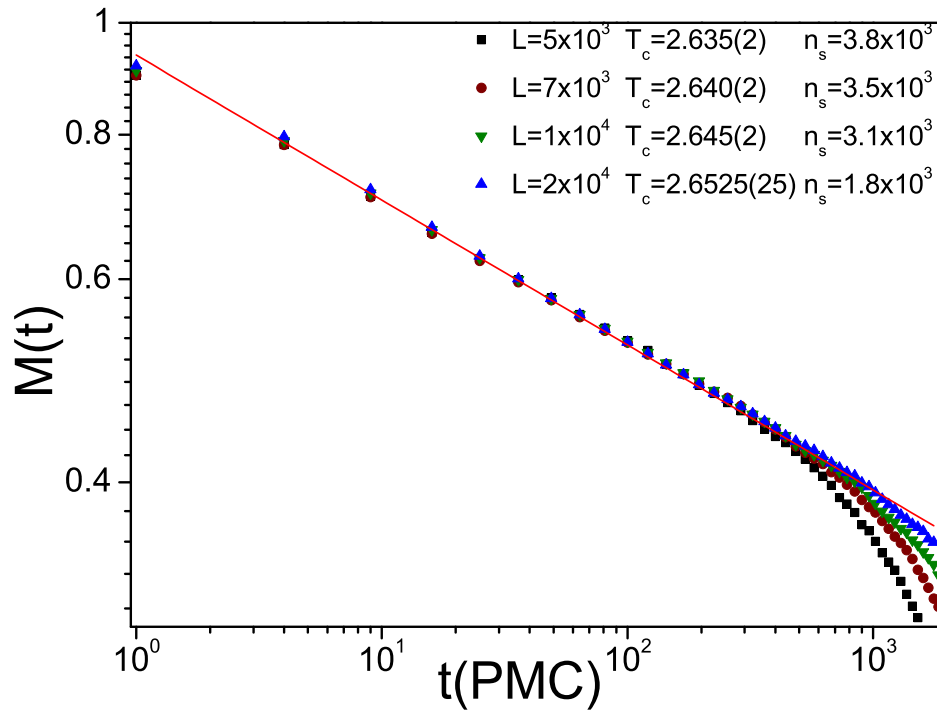


Figura 3.4: Relajación de la magnetización $M(t)$ a la temperatura “crítica efectiva”, indicada en la leyenda, desde el estado ordenado correspondiente a $T = 0$ y para diferentes tamaños de sistema (L). La línea continua indica el ajuste de la curva obtenida para $L = 1 \times 10^4$. En la leyenda se indica también el número de configuraciones promediadas.

Por otra parte, la superposición de las curvas en los correspondientes intervalos $(t_{mic}, t_{max}(N))$ indica que los exponentes de la dinámica crítica de relajación no son afectados por los efectos de tamaño finito. Estas afirmaciones son reforzadas por los resultados mostrados en las figuras 3.6 (a) y 3.6 (b). En dichas figuras se han obtenido las dinámicas de relajación críticas para dos valores fijos del truncamiento de la interacción $N = 2 \times 10^3$ y $N = 5 \times 10^3$ y para diferentes tamaños del sistema en los

intervalos $(5 \times 10^3, 4 \times 10^4)$ y $(1 \times 10^4, 1 \times 10^5)$, respectivamente. Como puede observarse las temperaturas críticas efectivas, el intervalo de validez de la ley de potencia y el exponente asociado fueron los mismos para todas las curvas correspondientes a un mismo N . Los resultados descritos permiten conjeturar que el apartamiento de la ley de potencia ocurriría cuando la longitud de correlación temporal toma valores del orden del alcance de la interacción, $\xi \sim N$.

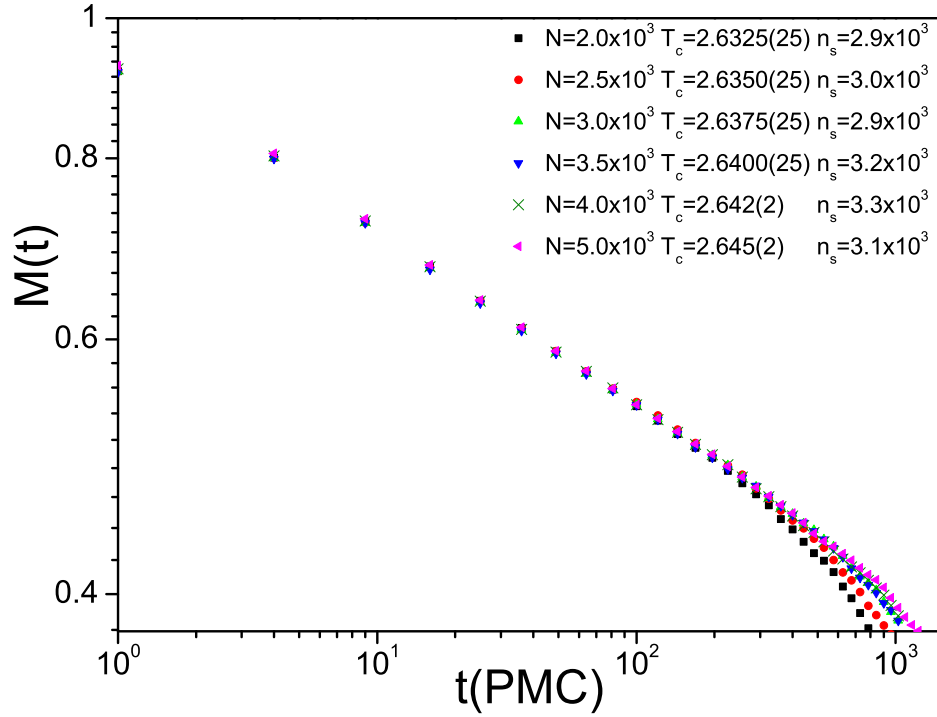


Figura 3.5: Relajación de la magnetización $M(t)$ a la temperatura “crítica efectiva”, indicada en la leyenda, desde el estado ordenado correspondiente a $T = 0$, para tamaño de sistema $L = 1 \times 10^4$ y diferentes alcances de la interacción N . La línea continua indica el ajuste de la curva obtenida para $N = 5 \times 10^3$. En la leyenda se indica también el número de configuraciones promediadas.

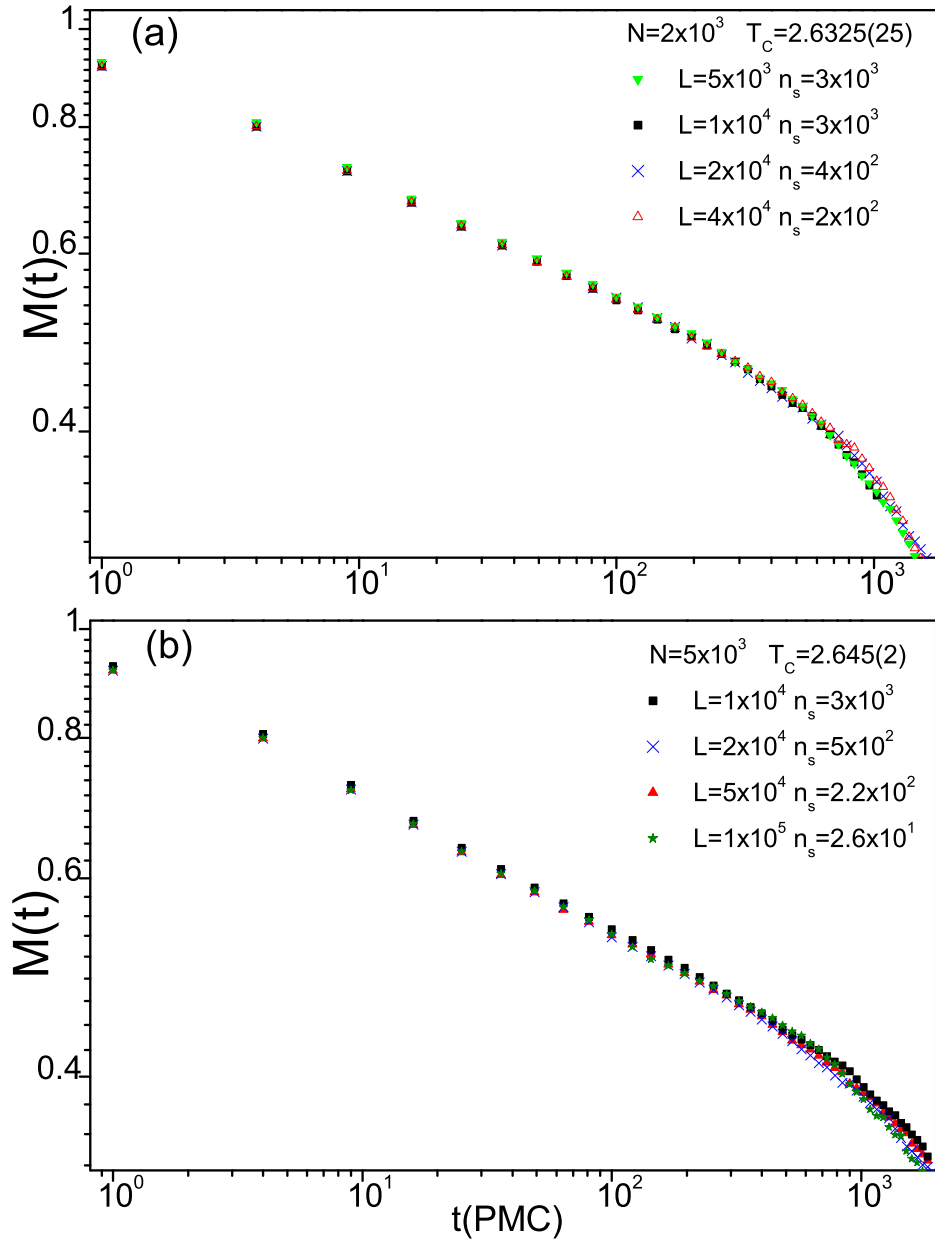


Figura 3.6: Relajaci3n de la magnetizaci3n $M(t)$ a la temperatura “cr3tica efectiva”, indicada en la leyenda, desde el estado ordenado correspondiente a $T = 0$ para un valor fijo del alcance de la interacci3n y diferentes tama1os de sistema: (a) $N = 2 \times 10^3$ y (b) $N = 5 \times 10^3$. Las l3neas continuas indican los ajustes, los cuales determinan un exponente $\beta/\nu z = 0,129(6)$. En la leyenda se indica tambi3n el n3mero de configuraciones promediadas.

La ley de escala para alcance finito

A partir de los resultados discutidos en la sección 3.3.1 un análisis de la dependencia de la temperatura crítica efectiva en función del “alcance” de la interacción, permitió obtener la temperatura crítica del sistema como una extrapolación al límite de alcance infinito.

Este tipo de análisis, denominado escaleo de alcance finito, fue propuesto por Glumac y colaboradores [9] como análoga al método de escaleo de tamaño finito y establece la siguiente relación de escala:

$$T_c(N) = T_c(\infty) + A/N^{x_T}, \quad (3.1)$$

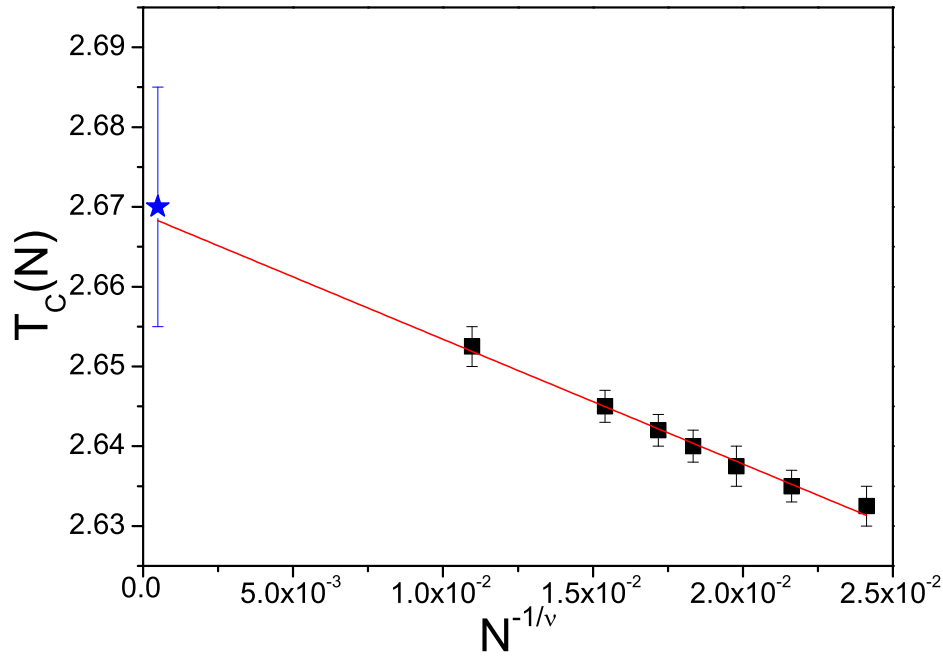


Figura 3.7: Temperatura crítica efectiva en función de $N^{-1/\nu}$ (cuadrados llenos). La línea continua corresponde al ajuste mediante la ecuación (3.7). Se incluye la temperatura crítica efectiva obtenida por Tomita [10] (estrella).

donde $T_c(\infty)$ es la temperatura crítica, la cual corresponde a un alcance de interacción infinito, x_T es el exponente de convergencia y A es una constante. Como propuesta para el exponente de convergencia se usó la relación estándar para el escaleo de tamaño finito, es decir fijando el exponente en $x_T = 1/\nu$ [11, 12]. La figura 3.7 muestra los valores de $T_c(N)$ obtenidos en función de $N^{-1/\nu}$, los cuales fueron ajustados con la ecuación (3.7) (línea continua), determinando la temperatura crítica $T_c(\infty) = 2,660(4)$. El valor obtenido por este método interpola con los valores reportados en la bibliografía $T_c(\infty) = 2,929$ [9], $T_c(\infty) = 2,9269$ [13]) para $\sigma = 0,70$ y $T_c(\infty) = 2,431$ [9], $T_c(\infty) = 2,4299$ para $\sigma = 0,80$ [13], los cuales fueron calculados analíticamente mediante el método de

matriz de transferencia junto con un escaleo de alcance finito. Además, en la figura 3.7 hemos incluido el valor reportado por Tomita [10] (a partir de una interpolación) para $N = 2^{22}$, que se encuentra dentro de las barras de error en completo acuerdo con nuestros resultados.

Por otra parte, el hecho de que un exponente $x_T = 1/\nu$ ajuste satisfactoriamente los valores obtenidos de T_c para los distintos alcances simulados, permite suponer que el truncamiento de la interacción condiciona la posibilidad de acercarse a la temperatura crítica, de manera similar a lo que ocurre en una simulación Monte Carlo en equilibrio. A su vez en el presente caso los exponentes de dinámica crítica no se encuentran afectados por el valor de la temperatura crítica efectiva. Lo que evidencia que para tiempos donde $\xi(t) \ll N$ las leyes de escala de la dinámica crítica resultan válidas para una temperatura crítica efectiva ($T_c(N)$).

3.3.2. Los exponentes críticos

La dinámica crítica de relajación:

Los resultados discutidos sugieren que el tamaño $L = 1 \times 10^4$ es lo suficientemente grande para caracterizar los exponentes críticos, ya que presenta un intervalo de validez de la ley de potencia para $M(t)$ de aproximadamente dos décadas (10 – 900) PMC. En base a esto se estudiaron los demás observables para tamaños de $L = 1 \times 10^4$ y $L = 1 \times 10^5$. En la figura 3.8 (a) se muestra la evolución temporal del cumulante de Binder de segundo orden correspondiente a la temperatura crítica efectiva, la cual ha sido ajustada mediante una ley de potencia dada por la ecuación 2.15 y cuyos exponentes se muestran en la Tabla 3.2 (3^{ra} columna). A partir de estos valores fue posible obtener una estimación del exponente $z = 0,84(2)$ (ver Tabla 3.2 5^{ta} columna), es decir, una magnitud significativamente mayor que el valor predicho mediante cálculos de GR ($z_{RG} = 0,775$) [8]. En principio se puede atribuir esta diferencia al hecho de que z depende de la dinámica específica utilizada, como sucede en el caso del modelo de Ising, de corto alcance [14]. Sin embargo, esta discrepancia también podría deberse a una subestimación de los cálculos de GR, como en el caso del modelo de Ising de corto alcance [15].

Por otro lado, usando además dos curvas de magnetización para temperaturas levemente apartadas del punto crítico efectivo, se calculó la derivada del logaritmo de la magnetización respecto a la temperatura reducida, evaluada en el punto crítico efectivo ($\partial \log_\epsilon M(t)|_{\epsilon=0}$). La figura 3.8(b) muestra que éste observable también presenta un comportamiento como ley de potencia ajustado con la ecuación 2.17. Los exponentes obtenidos son exhibidos en la Tabla 3.2 (4^{ta} columna). Utilizando el valor de z , obtenido desde el cumulante de Binder, junto con el exponente de la derivada logarítmica es posible obtener el exponente crítico $1/\nu = 0,48(2)$ (ver Tabla 3.2, 6^{ta} columna), el cual está de acuerdo tanto con las predicciones de GR ($1/\nu = 0,4765$ [8, 5]) como con los resultados de simulaciones Monte Carlo en equilibrio ($1/\nu = 0,469$ [5]). Finalmente desde los exponentes $\beta/\nu z$ y z es posible obtener una estimación del exponente $\beta/\nu = 0,109(6)$, Tabla 3.2 (7^{ma} columna), que interpola entre los valores $\beta/\nu(\sigma = 0,7) = 1,56(5)$ y

$\beta/\nu(\sigma = 0,8) = 0,086(3)$, reportados por Tomita [10].

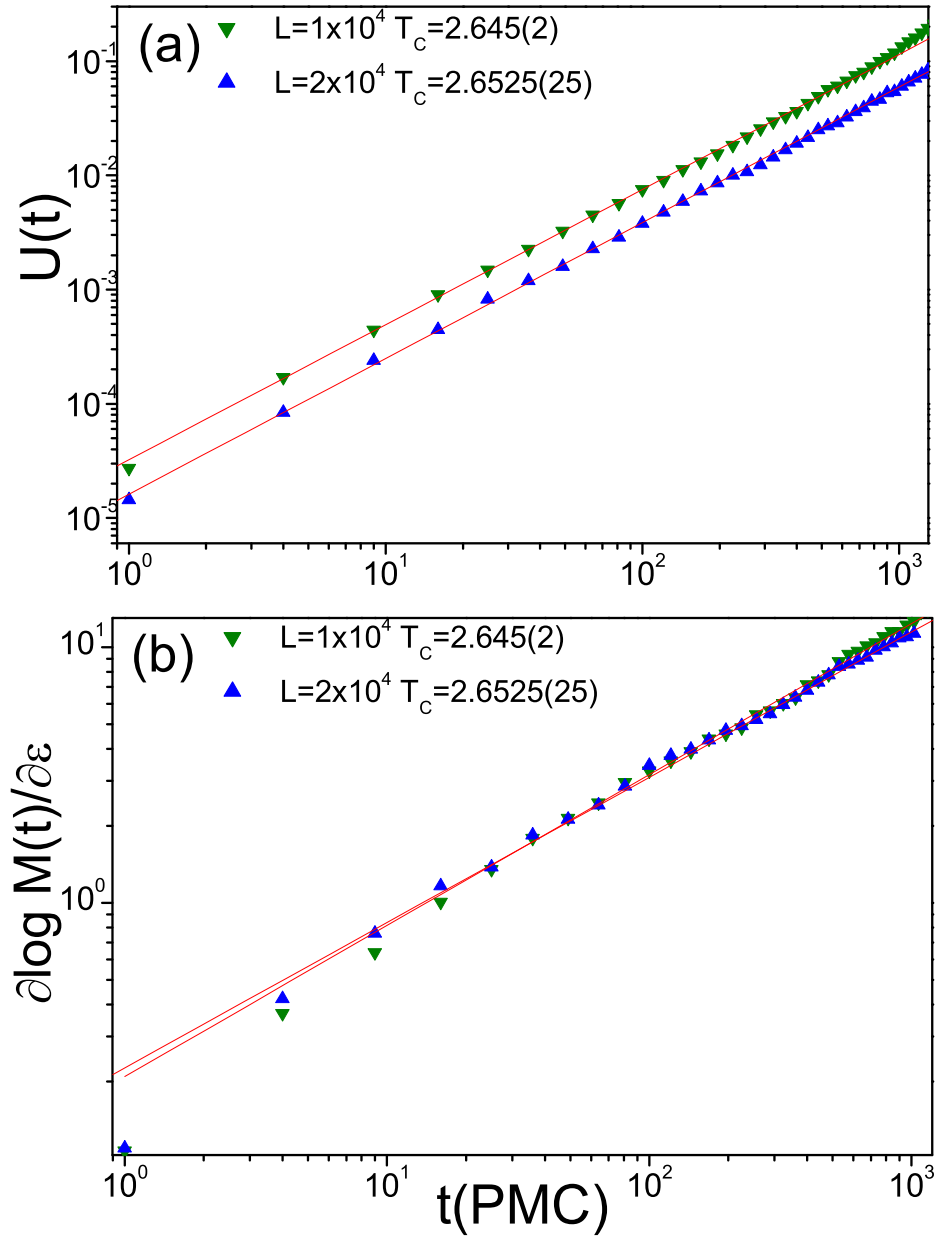


Figura 3.8: Evolución dinámica de los observables a la temperatura crítica efectiva, desde una configuración inicial ordenada correspondiente a $T = 0$: (a) el cumulante de Binder de segundo orden ($U(t)$) y (b) la derivada logarítmica de la magnetización respecto de la temperatura reducida ($\frac{\partial \log(M(t))}{\partial \epsilon}$). Las líneas continuas indican los ajustes realizados mediante las ecuaciones 2.15 y 2.17, respectivamente. El tamaño del sistema (L), y las correspondientes temperaturas críticas efectivas (T_c), son también indicadas.

L	$\beta/\nu z$	d/z	$1/\nu z$	z	$1/\nu$	β/ν
1×10^4	0,129(7)	1,20(2)	0,59(2)	0,83(1)	0,49(2)	0,107(5)
2×10^4	0,129(6)	1,19(3)	0,57(2)	0,84(2)	0,48(2)	0,109(6)
RG				0,775	0,4765	0,125

Cuadro 3.2: Lista de exponentes obtenidos, desde la dinámica crítica de relajación (DCR), para la magnetización ($\beta/\nu z$), el Cumulante de Binder (d/z), y la derivada logarítmica de la magnetización respecto de la temperatura reducida ($1/\nu z$). Los valores estimados para exponentes z , $1/\nu$, y β/ν , así como predicciones de GR son mostradas para una mejor comparación.

Las barras de error adjudicadas al valor de los exponentes críticos provienen de distintas fuentes, ya sea insuficiencia estadística, arbitrariedad del intervalo temporal utilizado para ajustar las leyes de potencia y finalmente por la indeterminación asociada a la temperatura crítica efectiva, T_c . Con el objeto de obtener una mejor estimación del error, una variante del método de bloques fue utilizada [16]. Con este propósito procedimos de la siguiente manera: la dependencia temporal de cada observable se ajustó para conjuntos de medidas independientes y la barra de error se obtuvo mediante la dispersión de estos datos. Para los intervalos temporales utilizados al ajustar las leyes de potencias, se encontró que la selección de diferentes tiempos microscópicos influía notoriamente en el error. Por lo tanto los exponentes reportados a un tiempo microscópico ($t_{mic} = 10$ PMC) y las barras de error incluyen los diferentes valores obtenidos al tomar t_{mic} en el intervalo (10 – 100) PMC.

La dinámica crítica de tiempos cortos

Esta sección se enfoca en las medidas obtenidas para la dinámica crítica de tiempos cortos (DCTC). Dicha dinámica se mostró menos sensible con la temperatura que el caso anterior (DCR), dificultando una estimación independiente de T_c . Consecuentemente, en las simulaciones se utilizaron los valores de la temperatura crítica efectiva obtenidos a partir de la DCR. A su vez, igual que en el caso anterior (DCR) un estudio de tamaño finito (ver figura 3.9(a)) permitió determinar el mejor intervalo temporal para efectuar el ajuste con las leyes de potencia. De esta manera para el tamaño $L = 1 \times 10^4$ el comportamiento como ley de potencia se observó hasta un tiempo de $t_{max} = 400$ (PMC). Además, la función de autocorrelación (figura 3.9(b)) exhibe un decaimiento como ley de potencia en el mismo intervalo. Los exponentes críticos $\gamma/\nu z$ y $\lambda = d/z - \theta$ obtenidos mediante un ajuste con las ecuaciones 2.19 y 2.21, respectivamente, son mostrados en la Tabla 3.3. Las barras de error de los exponentes críticos fueron estimadas de la misma manera que en caso de la DCR, y ellas incluyen valores que corresponden a un tiempo microscópico ubicado en el intervalo (4 – 36) PMC.

L	$\gamma/\nu z$	$d/z - \theta$	θ	z	γ/ν	β/ν
1×10^4	0,87(2)	0,99(1)	0,200(5)	0,840(8)	0,73(2)	0,13(1)
2×10^4	0,88(1)	0,99(1)	0,201(4)	0,839(8)	0,74(1)	0,130(9)
RG			0,2171	0,775	0,75	0,125

Cuadro 3.3: Exponentes críticos obtenidos desde DCTC para: la susceptibilidad ($\gamma/\nu z$); la autocorrelación ($d/z - \theta$) y el incremento inicial de la magnetización (θ). Los exponentes calculados z , γ/ν y β/ν y las predicciones de GR también se incluyen.

En contraste con estas medidas, el incremento inicial de la magnetización tiene que ser medido para valores de magnetización inicial $M(0) = M_0$, tales que $M_0 \rightarrow 0$. De esta manera, en las figuras 3.10 (a) y 3.10 (b), se muestran dichos incrementos de la magnetización para tamaños del sistema de $L = 1 \times 10^4$ y 2×10^4 , respectivamente. Nótese que los tiempos de simulación verifican que $M_0 t^{x_0/z} \ll 1$. Los gráficos internos muestran los exponentes de la ley de potencia obtenidos mediante el ajuste con la ecuación (2.24) junto con la extrapolación para valores $M_0 \rightarrow 0$. Este procedimiento conduce a los valores de θ reportados en la Tabla 3.3 (4^{ta} columna), los cuales son cercanos a las predicciones de GR [8]. Usando el exponente $\lambda = d/z - \theta$ y reemplazando los exponentes ya determinados, se obtiene el exponente dinámico z (ver Tabla 3.3, 5^{ta} columna). El valor obtenido de $z = 0,84(2)$ es consistente con el resultado determinado desde la DCR, pero ligeramente mayor que las predicciones de GR ($z_{RG} = 0,775$)[8]. Además el valor obtenido interpola entre los valores publicados por Uzelac y colaboradores determinados desde la DCTC para un tamaño de sistema de $L = 3 \times 10^3$, los cuales son $z = 0,81(1)$ y $0,96(4)$, para $\sigma = 0,70$ y $\sigma = 0,80$, respectivamente [17].

Por otro lado usando tanto los valores $\gamma/\nu z$ y z se puede estimar la relación γ/ν (ver Tabla 3.3, 6^{ta} columna). Además tomando como válida la relación de hiperescala ($d - 2\beta/\nu = \gamma/\nu$), se obtuvo una estimación de $\beta/\nu = 0,130(9)$. Cabe mencionar que los cálculos obtenidos de GR a partir de una expansión asintótica en $\epsilon = 2\sigma - d$ hasta segundo orden predicen un valor para $\eta = 2 - \sigma = 1,25$ [1]. Reemplazando este valor en las relaciones de escala $\gamma/\nu = 2 - \eta$ y $\beta/\nu = (d - 2 + \eta)/2$, se obtienen los exponentes $\gamma/\nu = \sigma = 0,75$ y $\beta/\nu = \frac{d-\sigma}{2} = 0,125$, estando estos valores en excelente acuerdo con nuestras estimaciones.

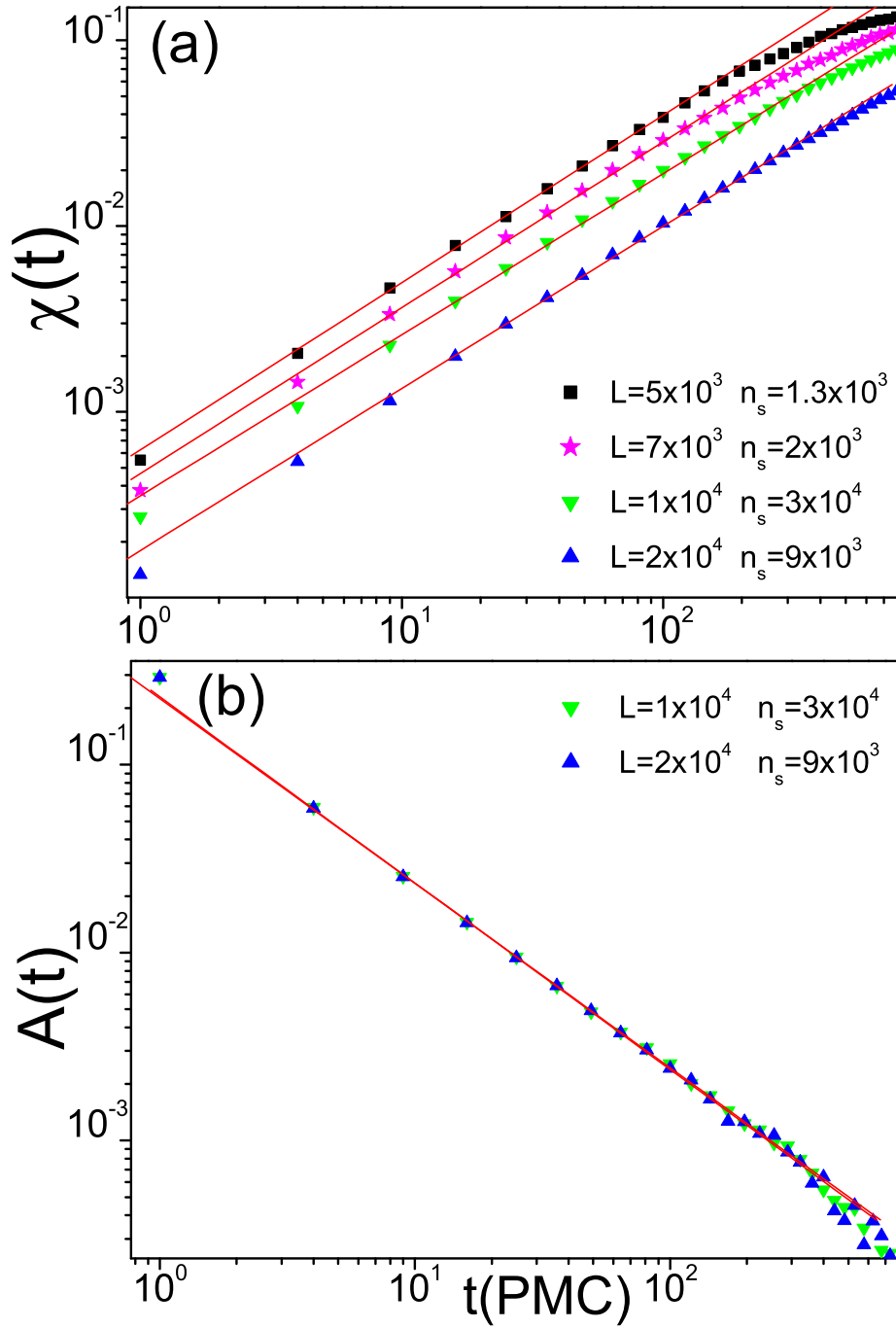


Figura 3.9: La evolución temporal obtenida a la temperatura crítica efectiva T_c , iniciando el sistema desde un estado desordenado (con $M(0) = 0$), de (a) la susceptibilidad $\chi(t)$ y (b) la autocorrelación $A(t)$. Las líneas continuas muestran los ajustes realizados con las ecuaciones (2.19) y (2.21), respectivamente. El número de configuraciones promediadas (n_s) y el tamaño del sistema (L) también se indica.

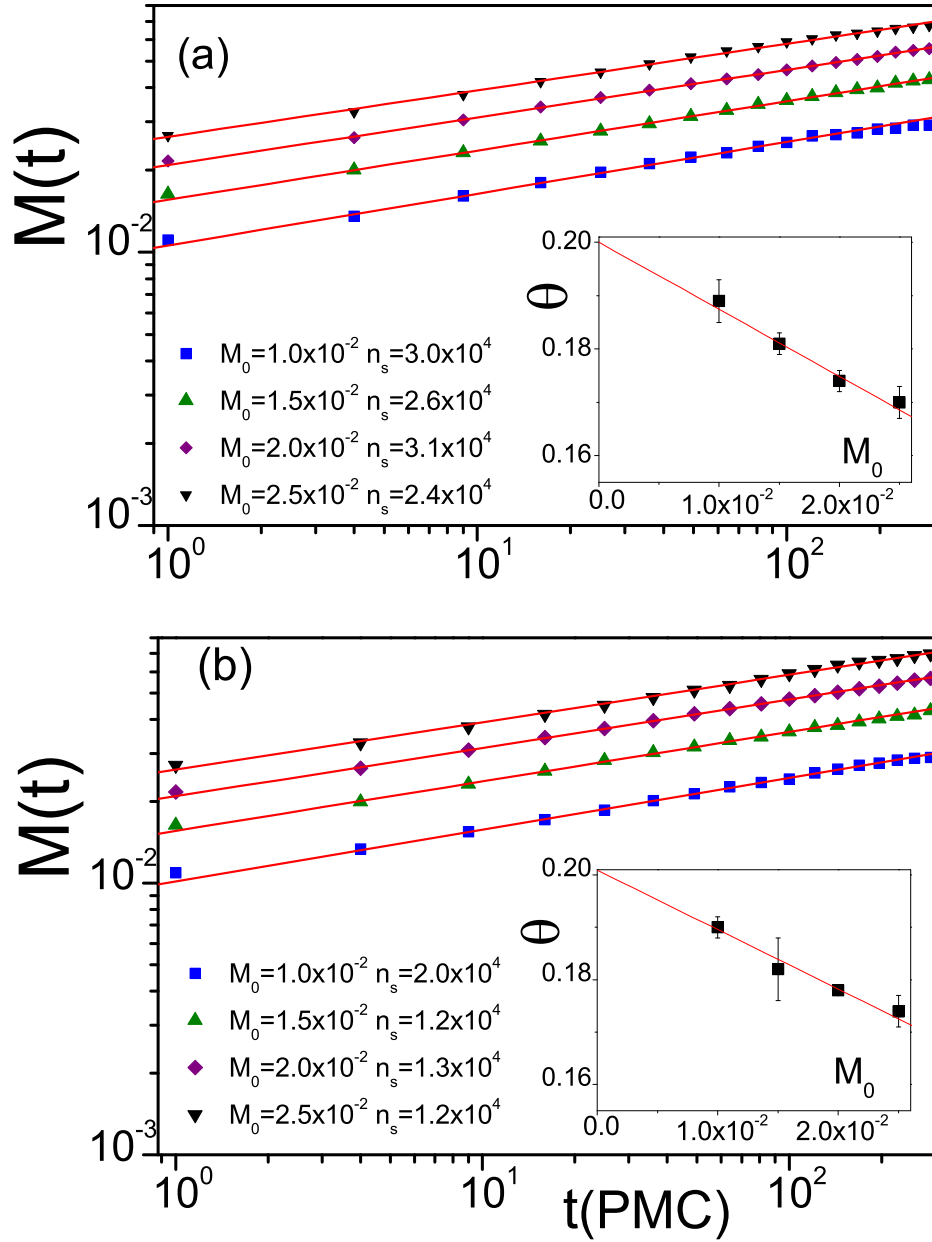


Figura 3.10: Gráfico log-log de $M(t)$ en función del tiempo donde se observa el incremento inicial obtenido a la temperatura crítica efectiva T_c , desde un estado inicial desordenado, con una magnetización inicial $M(0) = M_0$. Los datos corresponden a tamaños de sistema (a) $L = 1 \times 10^4$ y (b) $L = 2 \times 10^4$. Las líneas continuas muestran los ajustes mediante la ecuación (2.24). Los gráficos internos muestran la extrapolación de los valores obtenidos para $M_0 \rightarrow 0$. El número de muestras promediadas (n_s) también se encuentra indicado.

Además, iniciando desde configuraciones aleatorias desordenadas correspondientes a $T = \infty$, la función de autocorrelación de la magnetización ($Q(t)$) dada por la ecuación (2.25), permitió obtener una estimación independiente del exponente dinámico $\theta =$

0,19(2), como se ve en la figura (3.11). Cabe aclarar que debido al hecho de que las fluctuaciones son mas pronunciadas en este caso, el cálculo de esta magnitud requiere mayor estadística y por ende la evolución temporal fue realizada hasta 200 PMC para $L = 1 \times 10^4$. Las barras de error incluyen valores obtenidos para tiempos microscópicos en el intervalo (4, 36) PMC. El valor del exponente θ es cercano al obtenido usando la extrapolación $M_0 \rightarrow 0$ ($\theta = 0,201(4)$). Mas aun, usando esta estimación independiente de θ y aplicando el procedimiento descrito anteriormente, se obtuvieron los valores para $z = 0,855(9)$, $\gamma/\nu = 0,74(2)$, y $\beta/\nu = 0,13(1)$ en acuerdo con los resultados previos.

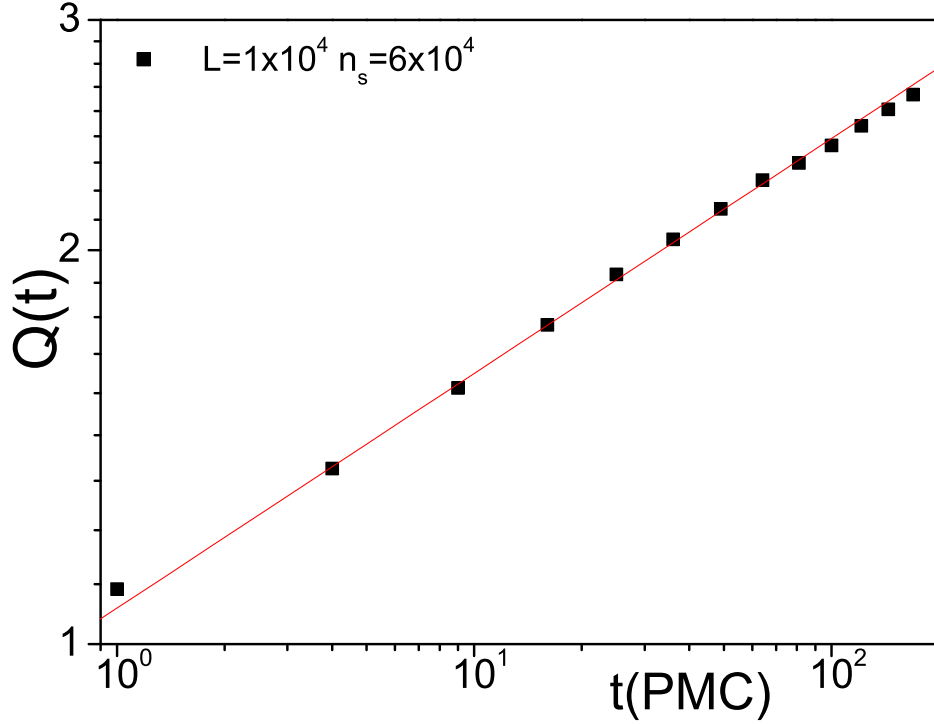


Figura 3.11: Gráfico log-log de la evolución temporal de la función de autocorrelación de la magnetización a la temperatura crítica efectiva $T_c = 2,645$. La línea continua muestra el ajuste realizado mediante la ecuación (2.26). El número de muestras promediadas (n_s) y el tamaño del sistema (L) también se encuentran indicados.

Por otro lado, con el objeto de obtener una estimación independiente de z , el comportamiento de escala de la función de correlación espín-espín ($C(t, r)$) fue estudiada para diferentes valores de r en un intervalo de 10 a 90 sitios (ver figura interior 3.12). Los paneles principales de las figuras 3.12 (a) y 3.12 (b) muestran el mejor colapso de $C(r, t)$ obtenido al utilizar el escaleo crítico convencional (ver ecuación (2.23)) y asumiendo valida la relación de hiperscala $d = 2\beta/\nu + \gamma/\nu$ y la relación $\eta = 2 - \gamma/\nu$ (Tabla 1.1).

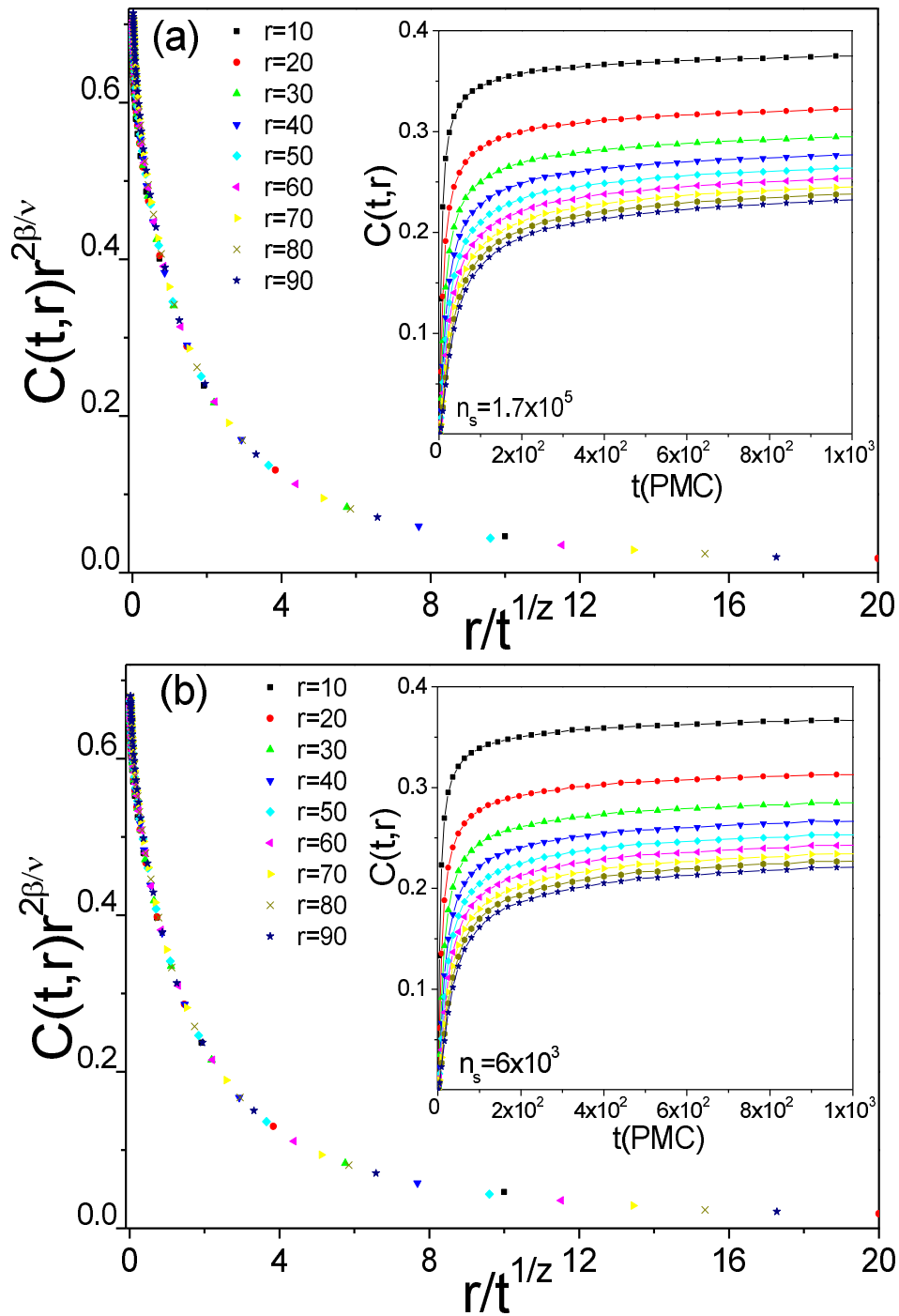


Figura 3.12: Función de escala de la correlación espín-espín $r^{2\beta/\nu}C(r, t)$ como función de la variable de escala $r/t^{1/z}$, obtenidas para (a) $L = 1 \times 10^4$ y (b) $L = 2 \times 10^4$. El gráfico interior muestra la evolución temporal de $C(t, r)$ para los valores de r indicados en la temperatura crítica efectiva T_c desde un estado inicial desordenado con $M(0) = 0$. Los colapsos de las curvas presentadas en el panel central fueron obtenidas usando $z = 0,84$ y $\beta/\nu = 0,125$. El número de muestras promediadas (n_s) se encuentra indicado en la leyenda.

Desde estos resultados se obtuvieron los exponentes $z = 0,84(2)$ y $\beta/\nu = 0,125(3)$. Las barras de error fueron determinadas considerando los valores donde visibles desviaciones desde el colapso de las curvas se manifestaban. Los exponentes determinados están en excelente acuerdo con las estimaciones anteriores, verificándose la autoconsistencia de los diferentes métodos dinámicos.

3.4. Conclusiones

Los resultados obtenidos sobre el modelo Ising-LA permitieron verificar la existencia de leyes de potencia en la evolución dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos, tanto desde un estado inicial correspondiente a temperatura infinita como desde el estado fundamental. En ambos casos se detectaron efectos de tamaño finito vinculados con el truncamiento del alcance de la interacción que ocurre necesariamente al realizar simulaciones. Dichos efectos fueron estudiados exhaustivamente demostrándose que solo afectan la temperatura a la cual se observa la ley de potencia (temperatura crítica efectiva) y el intervalo de validez de la misma, sin alterar los exponentes críticos. Mediante un análisis de alcance finito se determinó la temperatura crítica del modelo para $\sigma = 0,75$ en excelente acuerdo con cálculos numéricos basados en Matriz de Transferencia. Los exponentes críticos (γ/ν , $\beta\nu$ y $1/\nu$) obtenidos se encontraron en excelente acuerdo con los valores predichos por la teoría de GR, así como también por simulaciones Monte Carlo en equilibrio. El exponente θ del incremento inicial de la magnetización también estuvo en acuerdo con el valor predicho desde GR. Sin embargo, en el caso del exponente z se encontró una pequeña discrepancia, la cual se supone que podría deberse a un número de iteraciones insuficientes en los cálculos de GR o su la dependencia específica con la dinámica utilizada.

En resumen, se comprobó que la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos permite caracterizar el comportamiento crítico de sistemas con interacciones de largo alcance, evaluando tanto los exponentes estáticos como dinámicos y superando una de las principales limitaciones para estudiar estos sistemas al reducir el alto costo computacional.

Bibliografía

- [1] M. E. Fisher, S-k Ma, and B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett., **29**, 14 (1972)
- [2] M. Suzuki, Y. Yamazaki and G. Igarashi, Phys. Lett. A, **42**, 313 (1972).
- [3] J. Sak, Phys. Rev. B., **8**, 281 (1973).
- [4] E. Luijten and H. W. J. Blöte, Phys. Rev. Lett., **89**, 025703 (2002).
- [5] K. Binder, E. Luijten, Phys. Rep., **344**, 179 (2001).
- [6] J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett., **37**, 1577 (1976).
- [7] E. Luijten and H. Meibigfeld, Phys. Rev. Lett., **86**, 5305 (2001).
- [8] Y. Chen, S.H. Guo, Z. B. Li, S. Marculescu, L. Schuelke, Eur. Phys. J. B., **18**, 289 (2000).
- [9] A. Glumac and K. Uzelac, J. Phys. A., (Mat. & Gen.), **22**, 4439 (1989).
- [10] Y. Tomita, J. Phys. Soc. Japan, **78**, 1, 014002 (2009).
- [11] K. Binder, Ferroelectric, **73**, 43 (1987).
- [12] E. V. Albano, K. Binder, D. W. Heermann and W. Paul, Z. Phys. B., **77**, 445 (1989).
- [13] M. Barati and A. Ramazani, Phys. Rev. B., **62**, 12130 (2000).
- [14] K. Okano, L. Schülke, K. Yamagishi, and B. Zheng, Nucl. Phys. B., **485**, 727 (1997).
- [15] B. I. Halperin, P. C. Hohemberg and Sh-k Ma, Phys. Rev. Lett., **29**, 1548 (1972).
- [16] M. E. J. Newman and G. T. Barkema, "Monte Carlo Methods in Statistical Physics", Clarendon Press, Oxford (2001).
- [17] K. Uzelac, Z. Glumac, and O.S. Barišć. Eur. Phys. J. B., **63**, 101 (2008).

Capítulo 4

Estudio de la dinámica del Modelo de Votante con interacciones de largo alcance

4.1. Antecedentes

Como mencionamos, en los capítulos 1 y 2, el modelo de Votante estándar (MVE) ha mostrado una gran versatilidad para reproducir distintos fenómenos. El mismo, fue utilizado en sus orígenes como un modelo de competencia de especies por Clifford y Sudbury [1] y por Mollison como un modelo de propagación de epidemias [2]. Su definición formal fue realizada en 1975 por Holley y Ligett [3] quienes lo utilizaron en un contexto social para simular procesos de formación de opinión. En dicho contexto se lo denominó como modelo de Votante, ya que describió un esquema elemental en el que los individuos tienen solo dos opiniones SI o NO (“acuerdo”/“desacuerdo”). Posteriormente, fue utilizado para simular reacciones catalíticas [4] y el crecimiento de dominios magnéticos sin tensión superficial [5], asociando a cada estado un espín $s = \pm 1$, siendo este último el contexto tomado en la presente tesis. Cabe resaltar que el MVE es uno de los pocos modelos de espines que ha sido resuelto exactamente en redes regulares para cualquier dimensión entera [3, ?], lo que es una ventaja a la hora de comparar resultados. Además, es un modelo con simetría Z_2 que no presenta parámetro de control por lo que su evolución dinámica puede estudiarse como un proceso de envejecimiento y en redes regulares esta determinada por la dimensión de la red y las reglas de evolución. Para $d \leq 2$ evoluciona irreversiblemente, desde un estado inicial desordenado hacia estados de mayor orden impulsado por las fluctuaciones en las interfaces y caracterizado por el crecimiento de aglomerados o dominios magnéticos sin tensión superficial.

Para su análisis, se utiliza como parámetro de orden a la densidad de interfaces $\rho(t)$ 2.30, la cual para dimensión $d = 1$ presenta una dinámica irreversible hacia cualquiera de sus dos estados absorbentes, con una dependencia como ley de potencia (ecuación 2.31). En dimensión $d = 2$ (dimensión crítica) la dinámica de ordenamiento manifiesta una dependencia logarítmica (ecuación 2.32) mientras que para dimensiones superio-

res ($d > 2$) y en el límite $L \rightarrow \infty$ el sistema permanece en un estado estacionario. En este sentido se puede decir, que la formación de estados ordenados se *debilita* al incrementarse la dimensión del modelo. Además, ya que el mas mínimo ruido global destruye cualquier formación ordenada (dominio magnético) no es posible incorporar una temperatura como parámetro de control [6]. Basándose en estas evidencias, Dornic y colaboradores [5] conformaron una variante del modelo (Votante Universal) que incluye, como parámetro de control, un ruido que actúa sobre las interfaces, lo que permitió observar una transición de fase orden-desorden y conformar de esta manera una nueva clase universal [5].

Otro contexto donde el modelo MVE ha sido ampliamente estudiado es en redes complejas [7, 8, 9]. En estos sistemas el comportamiento dinámico estaría determinado por características topológicas, como la conectividad media de cada nodo, la distribución de grados de los nodos, la dimensión efectiva de la red así como las fluctuaciones en los enlaces (desorden). En este sentido, dichos estudios implican que en redes complejas de alta conectividad, como grafos aleatorios, grafos completos, redes Barabasi-Albert [9] y redes de pequeño mundo [7, 8], se manifiesta una dependencia exponencial para la dinámica de la densidad de interfaces $\rho(t)$, con un tiempo característico que depende del número de nodos o tamaño del sistema L como $\tau \sim L^\omega$, con $\omega \lesssim 1$. En estos casos, no es posible alcanzar el estado absorbente para el límite $L \rightarrow \infty$. Todos estos resultados se corresponden con el comportamiento dinámico del MVE en dimensiones $d > d_c$. Mientras que para redes libres de escala con dimensión efectiva $d = 1$ [10], se ha obtenido una evolución dinámica con una dependencia como ley de potencia con exponente $\alpha = 1/2$ y un tiempo de ordenamiento que crece con el número de nodos como $\tau \sim L^2$, resultados equivalente a los observados en el modelo de Votante unidimensional (MVE-1D) [8].

Por lo tanto, en estos trabajos se observan dos mecanismos capaces de modificar la dinámica fuera de equilibrio del MVE. En redes regulares las fluctuaciones en las interfaces resultan ser lo que determina si el sistema se ordena o no y pueden ser modificadas incorporando ruido interfacial como parámetro de control. En cambio en redes complejas resulta ser la topología de la red, determinada principalmente por la estructura de enlaces, lo que gobierna la dinámica de ordenamiento del sistema.

A partir de estas evidencias se propuso en esta tesis que la introducción de interacciones de largo alcance en el MVE afectaría el crecimiento de los dominios magnéticos y por ende su dinámica de ordenamiento. En particular usando interacciones probabilísticas que decaen de manera algebraica con la distancia según la distribución de Lèvy (ecuación 2.27), esperamos, por un lado que para valores grandes de σ los efectos se concentren en las interfaces y reproduzcan el comportamiento del modelo unidimensional, y por otro para valores pequeños de σ el comportamiento se aproxime al de mayores dimensiones.

4.2. Detalle de las simulaciones

Para verificar nuestra hipótesis se estudió una variante del MVE donde se modificó el alcance de las interacciones de manera probabilística, mediante una distribución de Lévy. Modelo al que denominamos modelo de votante con interacciones de largo alcance (Votante-LA) y que ya fue descrito en el capítulo 2 sección 2.3.2. Cabe remarcar que elegimos como modelo base al Votante sobre una red regular de dimensión $d = 1$ para que su dinámica de ordenamiento dependa exclusivamente de los efectos de incorporar la interacción propuesta.

Las simulaciones se realizaron en redes de tamaños en el intervalo $5 \times 10^2 \leq L \leq 5 \times 10^5$, utilizando condiciones de contorno periódicas. Los valores del parámetro σ se seleccionaron en el intervalo $(0, 1 \leq \sigma \leq 10)$. Para determinar el valor medio de las interfaces correspondientes al estado estacionario, los promedios solo incluyeron aquellas muestras que no alcanzaron el estado absorbente por efectos de tamaño finito. Por otra parte, para facilitar la comparación de los resultados se simuló también el modelos MVE en dimensiones $d = 1$ y $d = 2$.

4.3. Resultados y Discusión

El análisis de los resultados está dividido en cuatro secciones:

- En la sección 4.3.1, se estudian los diferentes tipos de comportamientos dinámicos del parámetro de orden ($\rho(t)$) observados para distintos valores de σ , en el intervalo $0, 1 \leq \sigma \leq 10$.
- En la sección 4.3.2 se presenta un estudio realizado sobre la distribución de tamaños de dominios magnéticos para distintos valores de σ .
- La tercer sección (4.3.3) involucra un análisis de los efectos de tamaño finito para los distintos regímenes mencionados.
- Por último en la sección 4.3.4 se realiza un cálculo analítico de los distintos momentos de la distribución de distancias de interacción, su dependencia con el parámetro σ y sus relaciones con las distintas dinámicas observadas.

4.3.1. Análisis y discusión de la dinámica de evolución

Como puede verse en la figuras 4.1 (a) y 4.1 (b), la dependencia temporal del parámetro de orden ($\rho(t)$) sigue comportamientos dinámicos diferentes para los distintos valores de parámetro σ en el intervalo $0, 1 \leq \sigma \leq 10$.

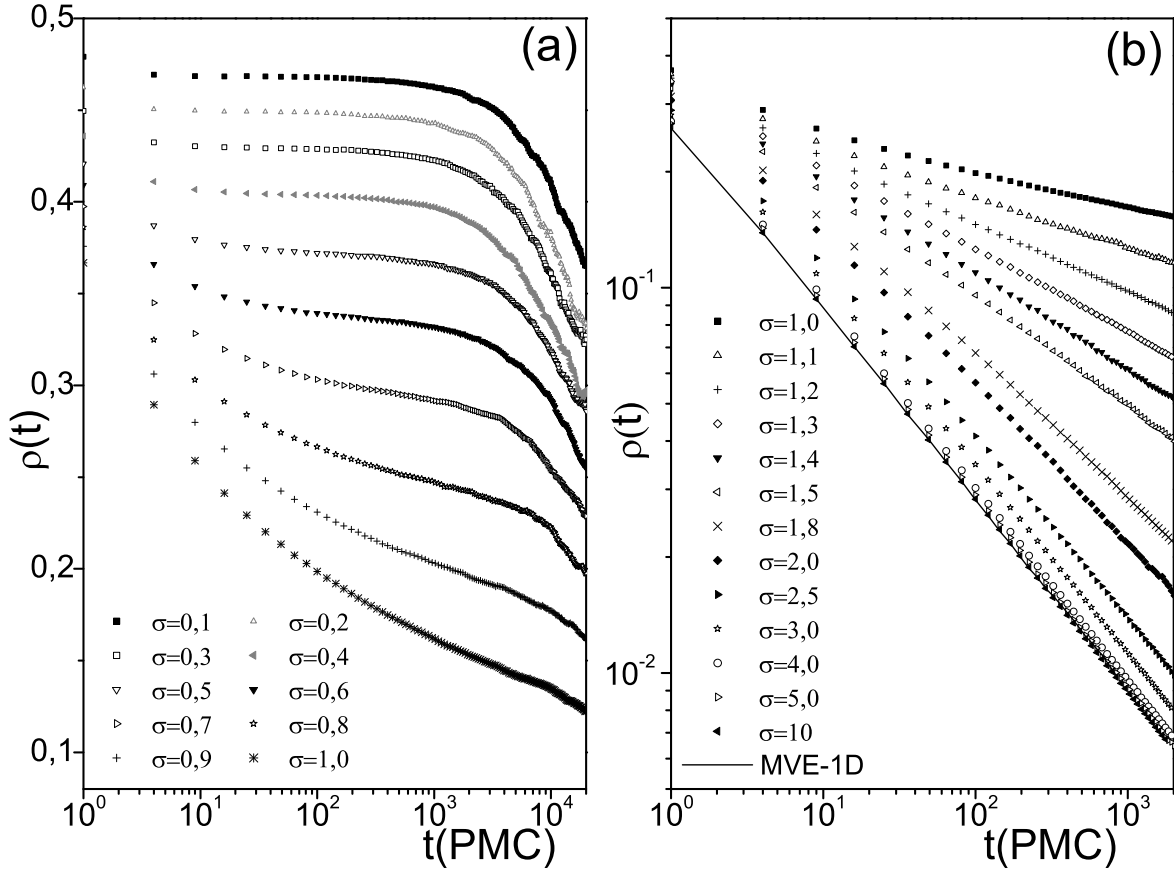


Figura 4.1: a) Gráfico Lineal-logarítmico de la evolución temporal de la densidad de interfaces (ρ) medido para valores del parámetro de control σ en el intervalo $0,1 \leq \sigma \leq 1$ y b) Gráfico Log-log de la evolución temporal de ρ medidos para diferentes valores del parámetro σ en el intervalo $1 \leq \sigma \leq 10$. La línea llena corresponde a los resultados para la evolución dinámica del MVE-1D. Los datos fueron obtenidos para sistemas de tamaño $L = 1 \times 10^5$ y promediados hasta $n_s = 500$ configuraciones.

Estos comportamientos fueron agrupados en tres regiones:

- Para la región $0,1 \leq \sigma \leq 0,7$, como se muestra en la figura 4.1(a), el sistema presenta una dependencia exponencial de la forma $\rho(t) = \rho_0 e^{-(t/\tau)}$ en la que se observa para las primeras dos décadas una evolución temporal con un muy lento decaimiento (con $\rho(t) \approx \text{cte}$), como es esperado para tiempos menores al tiempo característico (τ). Luego, para tiempos mayores el valor de $\rho(t)$ disminuye más rápido causando el ordenamiento del sistema. Como se discute más adelante, en la sección 4.3.3, esta dependencia es consecuencia de los efectos de tamaño finito y para el límite $L \rightarrow \infty$ se espera una divergencia del tiempo (τ), con una densidad de interfaces $\rho(t)$ de valor medio constante. De esta manera, para estimar dicho valor usamos el prefactor asociado al ajuste exponencial (ρ_0), medido para diferentes tamaños L , lo que permitió extrapolar un valor asintótico para cada valor de σ (ver figura 4.3(a)).

- Para la región $1 < \sigma < 10$ el parámetro $\rho(t)$ muestra una dinámica de ordenamiento que depende como una ley de potencia de la forma $\rho(t) \propto t^{-\alpha}$, en la que α es el exponente dinámico asociado (ver figuras 4.1 (b) y 4.2). Por otra parte en la figura 4.3(b), se muestra que el valor de α se incrementa con σ , alcanzando para $\sigma = 5$, el exponente esperado para el MVE-1D ($\alpha = 1/2$). Esto puede verse en detalle en la figura 4.1(b) donde la curva obtenida para una simulación del modelo MVE-1D (línea continua), fue incluida para una mejor comparación. .

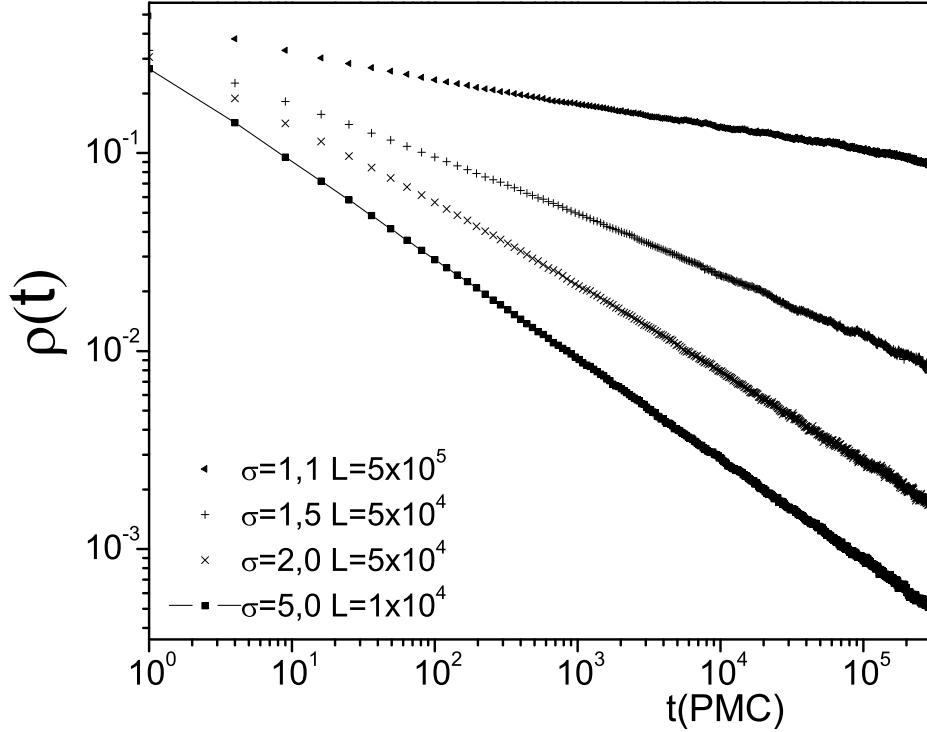


Figura 4.2: Gráfico Log-log de la evolución dinámica de $\rho(t)$ obtenida para diferentes valores del parámetro σ en el régimen donde se observan formaciones de dominios magnéticos.

La figura 4.2 muestra la verificación del comportamiento como ley de potencia para valores de σ representativos de este intervalo. Para esto se extendieron las simulaciones hasta 3×10^5 PMC y se seleccionaron tamaños del sistema que aseguren que los resultados estén libres de efectos de tamaño finito

- Por último, para el intervalo $0,7 < \sigma \leq 1$ se observa una zona de comportamiento mixto entre los dos regímenes anteriores. Por un lado, no fue posible ajustar una curva exponencial, y por otro, los ajustes del decaimiento como ley de potencia arrojaron valores para el exponente α próximos a cero (ver figura 4.3(b)). Debido a esto se propuso, para la región próxima a $\sigma = 1,0$ una dependencia temporal logarítmica dada por:

$$\rho(t) = \frac{A}{\ln(t)}, \quad (4.1)$$

como puede verse en la figura 4.4, donde se graficó la función $1/\rho(t)$ en función de $\ln(t)$ para $\sigma = 0,9$, $\sigma = 1,0$ y $\sigma = 1,1$. En particular para la curva con $\sigma = 1,0$ se observó un comportamiento lineal con pendiente $1/A = 0,52(1)$, mientras que las curvas con $\sigma = 0,9$ y $\sigma = 1,1$ manifestaron marcados apartamientos de este comportamiento. La dependencia logarítmica observada para $\sigma = 1,0$ resulta ser análoga a la del MVE en dimensión $d = 2$ (MVE-2D), donde la constante A está vinculada con la constante de difusión D de un caminante aleatorio coalescente, a partir de la relación $A = 2\pi D$ [5]. De esta manera, a partir de los ajustes realizados obtuvimos una constante de difusión $D = 0,306(6)$, algo más grande que el valor correspondiente al MVE-2D, $D = 1/4$ (ver figura 4.4). La diferencia de esta constante efectiva es algo usual, ya que otros modelos pertenecientes a la clase universal del modelo MVE-2D también lo manifiestan [5]. El hecho de que su valor sea mayor podría deberse precisamente a un incremento de la difusión por la presencia de interacciones del largo alcance en el modelo Votante-LA.

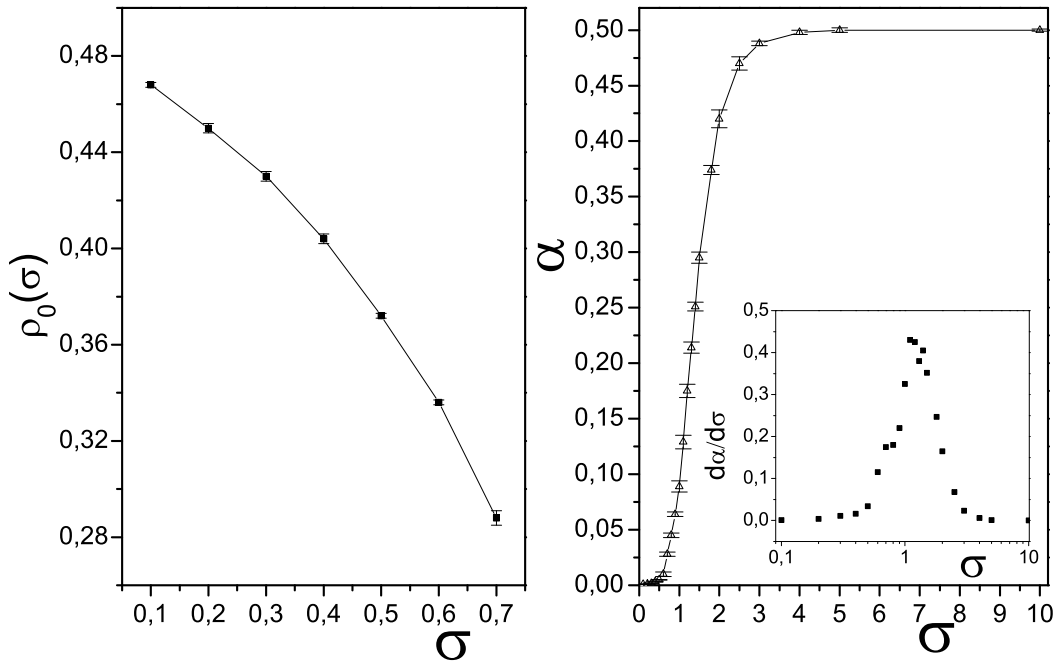


Figura 4.3: Gráfico de los distintos valores de a) la densidad de interfaces estacionaria ρ_0 y b) el exponente (α) asociados a la ley de potencia de la ecuación 2.31 del capítulo 2, en función del parámetro σ . La figura interna en (b) muestra un gráfico lineal-log de la derivada numérica de $\alpha(\sigma)$ con respecto a σ , la cual presenta un máximo local cercano a $\sigma = 1,0(1)$.

Como síntesis, podemos decir que al variar el valor de σ se reproducen los comportamientos esperados para la evolución dinámica de $\rho(t)$ del MVE para redes regulares en diferentes dimensiones. En particular podemos detallar que la dinámica en la región $\sigma < 1$ se corresponde a la esperada en dimensiones $d > 2$; para $\sigma \geq 5$ se reproduce la

dependencia correspondiente a la dimensión $d = 1$ y finalmente la dependencia logarítmica obtenida para el caso $\sigma = 1,0$ resulta comparable a la dinámica en la dimensión crítica $d_c = 2$. Sumado a esto, fue posible identificar una región intermedia donde la dinámica de $\rho(t)$ manifiesta una dependencia como ley de potencia, con un exponente α que toma valores en el intervalo $(0, 1/2)$ en función del valor de σ . Esto puede verse en la figura 4.3(b), donde se muestra el exponente α en función de σ , curva que marca dos regiones bien definidas y sugiere un punto de inflexión para $\sigma = 1$. Mas aún, la derivada numérica de la curva $\alpha(\sigma)$ (ver la figura interna 4.3(b)) muestra un máximo para valores de σ cercanos $\sigma = 1$. Este valor máximo permite distinguir los diferentes regímenes dinámicos del modelo Votante-LA, mostrando que para σ mayores al valor $\sigma = 1,0$ exhibe una dinámica de autoordenamiento, mientras que para σ menores se obtienen estados estacionarios.

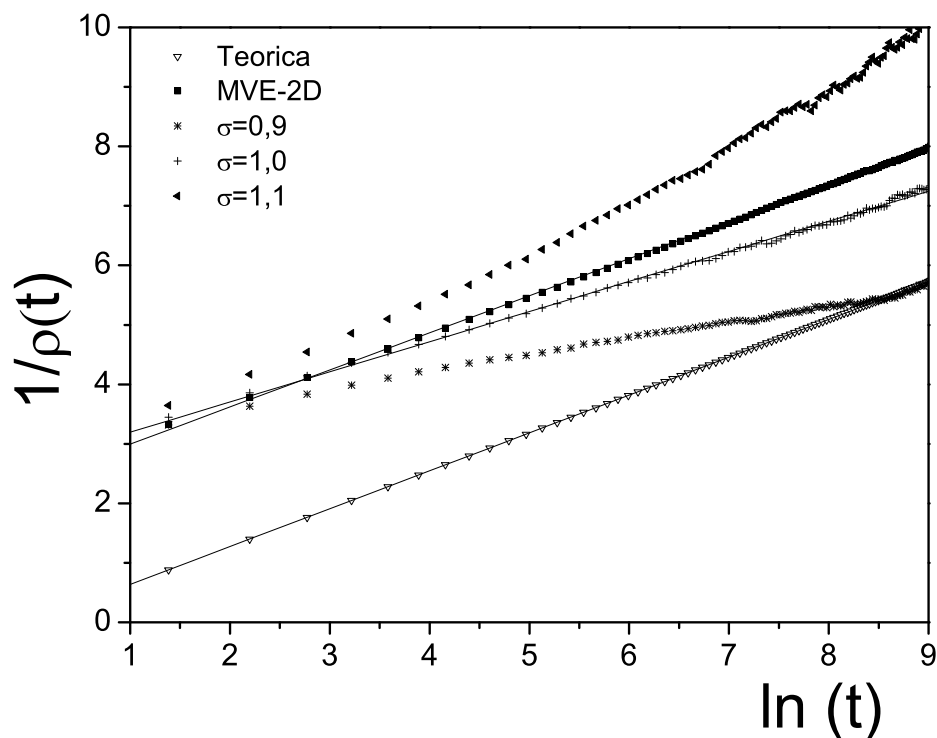


Figura 4.4: Gráfico $\frac{1}{\rho}$ en función de $\ln(t)$ para $\sigma = 1, 1,1$ y $0,9$. A su vez también se incluyeron, para una mejor comparación, tanto la curva simulada en este trabajo para el MVE-2D como la predicción teóricas para dicho modelo, tomada de la referencia [4]. Las líneas continuas corresponden a un ajuste con la ecuación 4.1. Más detalles en el texto.

4.3.2. Formación de dominios magnéticos “aglomerados”

Con el propósito de estudiar el proceso de formación de dominios magnéticos, en cada región mencionada, se observó para valores distintos valores de σ la distribución de tamaños de dominios $D(\zeta)$ para distintos instantes de tiempos, como se ve en la

figura 4.5. A su vez, para una mejor comparación, también se calculó dicha distribución para los modelos MVE-1D y MVE-2D. De éste análisis, tres comportamientos diferentes fueron hallados, que resultan consistentes con los obtenidos a partir del estudio anterior. Con este objetivo se seleccionaron algunos valores representativos de σ para cada región, los cuales detallamos a continuación:

- Para la región de ordenamiento exponencial ($\sigma < 1$) se eligió el valor $\sigma = 0,2$, para el cual se halló una distribución de tamaños $D(\zeta)$ angosta y estacionaria para tiempos $t \leq 3 \times 10^3$ PMC, como se ve en la figura 4.5(b). En dicha figura puede verse, que el valor máximo de la función $D(\zeta)$ se encuentra cercano a uno, lo que indica que está compuesta principalmente por dominios de tamaño pequeños (por ejemplo monómeros, dímeros, etc.). Hecho que fue confirmado de manera gráfica en la figura 4.6(a), donde se exhibe una sucesión temporal de un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^4$, que permitió identificar diferentes estructuras espacio-temporales del sistema.

En dicha figura, en el eje vertical, los cuadrados blancos y negros representan los estados $s_i = -1$ y $s_i = +1$, respectivamente, mientras que el eje horizontal se representa la evolución temporal. Para este caso, se muestra una distribución uniforme de dominios pequeños para el intervalo $t < 1 \times 10^3$ (PMC), como es esperado para tiempos menores al tiempo τ (ver tabla 4.1). Luego, para $t > 1 \times 10^3$ (PMC) se observa un progresivo incremento en la densidad de sitios negros que se corresponde un decaimiento rápido al estado absorbente con $M = 1$.

- En el otro extremo, para $\sigma = 5$ se puede observar en $D(\zeta)$ un primer máximo agudo para tamaños pequeños y otro máximo dependiente del tiempo que se corre a tamaños mayores a medida que el tiempo transcurre (ver figura 4.5(d)). Éste resultado es consistente con un proceso de formación de grandes aglomerados, como sugiere la figura 4.6(d) donde se muestra, para un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^4$, un rápido crecimiento. En la misma figura se observa que el máximo dependiente del tiempo se superpone con el obtenido para MVE-1D y para el Votante-LA con $\sigma = 10$. Sin embargo estas dos últimas distribuciones no presentan el máximo correspondiente a tamaños $\zeta \sim 1$. Esto podría deberse a una reducción del alcance efectivo de la interacción que solo involucraría interacciones a primeros vecinos, lo que lleva a la eliminación de dominios pequeños aislados.
- En una zona intermedia, para $\sigma = 1,0$, la figura 4.5(c) muestra que la distribución de tamaños de dominio sigue un decaimiento como ley de potencia independiente del tiempo, dado por la ecuación 2.34, con un exponente que coincide dentro del error con el resultado correspondiente al modelo MVE-2D ($\mu = 2,02(3)$), valor que fue adicionalmente medido para realizar la comparación. El comportamiento como ley de potencia mencionado es compatible con una distribución crítica donde dominios de todos los tamaños se encuentran presentes, como se ve en la figura 4.6(b), para la secuencia de estados del sistema con $L = 1 \times 10^4$. Cabe resaltar que dicha figura muestra un proceso de formación de dominios más lento, que resulta compatible con una evolución dinámica logarítmica de la densidad de interface.

Un comportamiento tipo ley de potencia fue obtenido también para $\sigma = 1,5$ (ver figura 4.5 (a)), pero con un exponente $\mu = 1,62(1)$ menor al anterior y en acuerdo con lo esperado para una dinámica más rápida. En éste sentido la región $1 < \sigma < 5$ puede ser entendida como una región de comportamiento intermedio entre los esperados para dimensión $d = 2$ y $d = 1$ del MVE. A su vez, un valor de un exponente μ menor, indica la existencia de dominios de mayor tamaño, como puede ser inferido de las figuras 4.6(c) donde se ve la secuencia temporal de los estados del sistema con $L = 1 \times 10^4$, correspondiente a $\sigma = 1,5$. Por su parte, la existencia de una alta densidad de dominios pequeños próximos a dominios de mayor tamaño puede interpretarse como una interface difusa con dominios no compactos, como se ve para $\sigma = 1,0$ y $\sigma = 1,5$, en las figuras 4.6(b) y 4.6(c), respectivamente. Esta estructura resulta análoga a lo observada por Dornic y colaboradores para el Votante Universal en $d = 2$ [5].

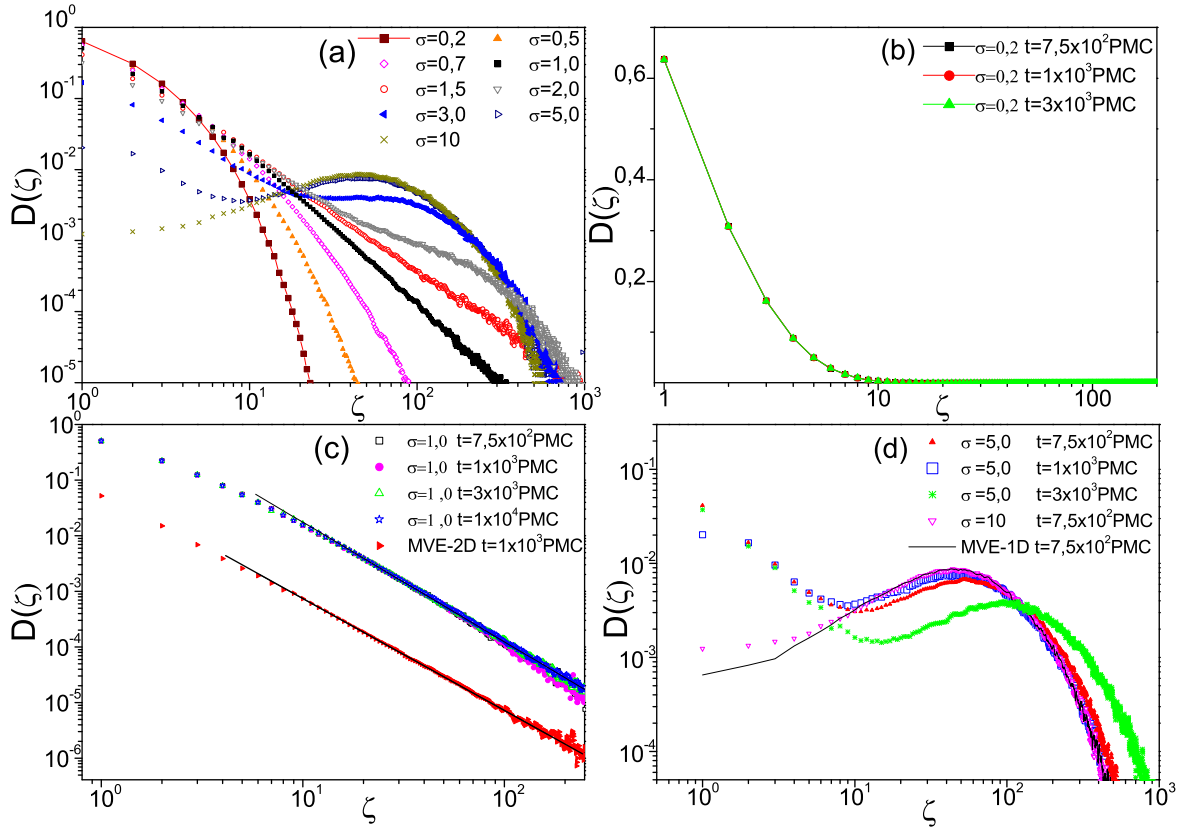


Figura 4.5: Distribución de tamaños de aglomerados $D(\zeta)$ correspondientes a muestras de tamaño $L = 1 \times 10^6$ para: (a) diferentes valores del parámetro σ al tiempo $t = 750$ PMC; (b) $\sigma = 0,2$ en distintos tiempos; (c) $\sigma = 1$ en distintos tiempos, donde la distribución para MVE-2D también fue incluida y se indican con línea continua los ajustes realizados con una ley de potencia y d) $\sigma = 5$ y $\sigma = 10$, en distintos tiempos junto con la distribución para MVE-1D para $t = 750$ PMC.

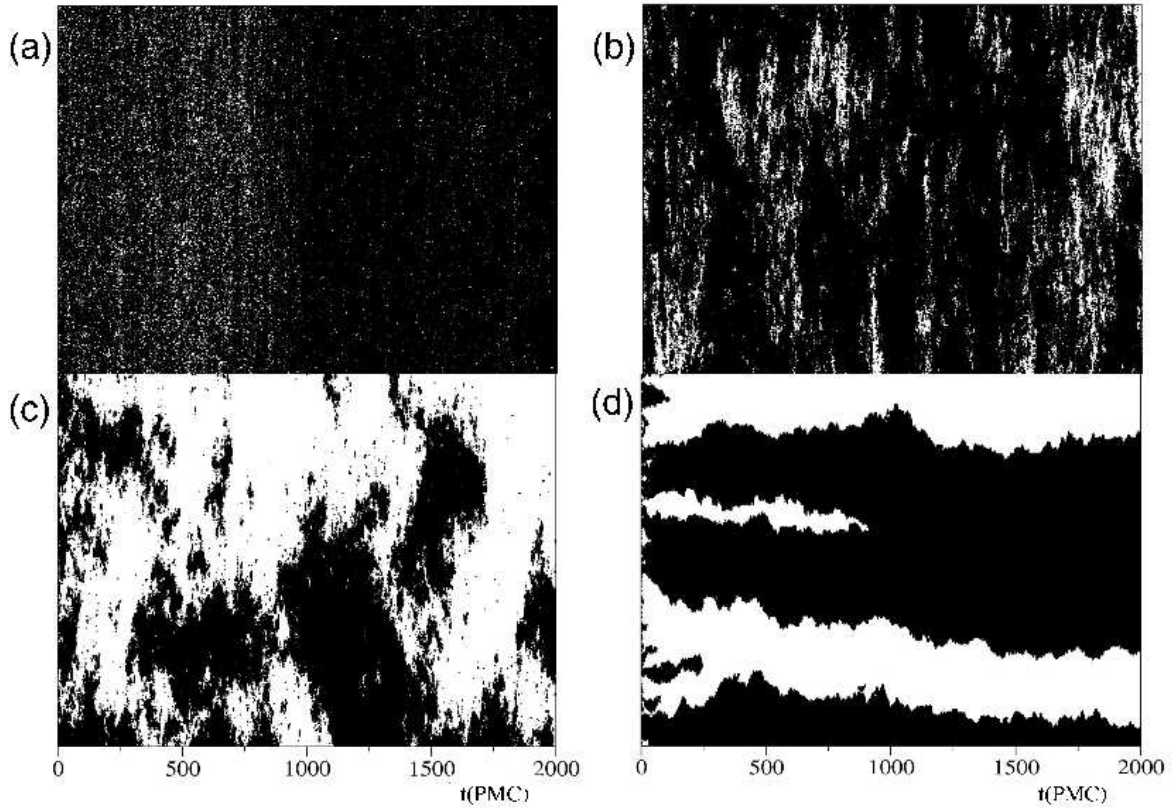


Figura 4.6: Colección de configuraciones del sistema de tamaño $L = 1 \times 10^4$. En el eje vertical puede verse una porción de la red simulada, donde los puntos negros representan sitios en el estado $s_i = 1$, mientras que sitios en el estado $s_i = -1$ se dejan como espacios en blanco. El eje horizontal muestra la evolución temporal de las configuraciones unidimensionales. En cada figura se observa: (a) para $\sigma = 0,2$ un régimen lento en tiempos $250 \leq t \leq 750$ PMC, el cual es seguido por un rápido decaimiento al estado absorbente con todos los sitios en el estado $s_i = 1$; (b) para $\sigma = 1$ un proceso de formación de aglomerados característico de un estado crítico donde se observan tamaños de dominios en todas las escalas; (c) para $\sigma = 1,5$ un proceso de ordenamiento con formación de grandes dominios *difusos* y (d) para $\sigma = 5$ un proceso de ordenamiento con formación de dominios compactos.

4.3.3. El estudio de los efectos de tamaño finito

En esta sección se estudian los efectos de tamaño finito sobre la dinámica de $\rho(t)$, para valores de σ representativos de los diferentes regímenes (ver figura 4.7). Como se mencionó en la sección 4.3.1 para $\sigma \leq 0,7$, $\rho(t)$ sigue una dependencia exponencial de la forma:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}, \quad (4.2)$$

donde el tiempo τ es el tiempo característico de dicho decaimiento y se vincula con el tiempo de vida de las interfaces. Esta dependencia se corresponde con la dinámica del MVE-3D donde el tiempo τ escala con el tamaño L como $\tau \sim L$. Por lo tanto, en esta región a partir del ajuste de la evolución temporal de $\rho(t)$ con la ecuación (4.2) es posible hallar la dependencia del tiempo de vida τ con el tamaño del sistema, así como el valor esperado para $\rho(t)$ en el estado estacionario extrapolando los valores de ρ_0 al límite $L \rightarrow \infty$. A su vez, el prefactor ρ_0 provee una estimación del tamaño medio de los dominios como:

$$\langle \zeta \rangle \sim \rho_0^{-1}. \quad (4.3)$$

Como representante de esta región utilizamos las curvas obtenidas para $\sigma = 0,2$. Los ajustes correspondientes con la ecuación 4.2, se muestran con líneas continuas en la figura 4.7(a) y los valores obtenidos para τ y ρ_0 se muestran en la Tabla 4.1. De estos resultados se obtuvo una dependencia del tiempo de vida con el tamaño de la forma:

$$\tau \propto L^\omega, \quad (4.4)$$

con un valor para el exponente $\omega = 0,99(1)$ (ver figura 4.8 (a)). A su vez, como puede verse en la figura 4.8 (b), se obtuvo la misma dependencia para $\sigma = 0,9$ y $\sigma = 0,8$ (no mostrado) ambos con exponente $\omega = 0,99(1)$, incluyéndose dichos valores en el régimen de no ordenamiento en el límite $L \rightarrow \infty$. Resultados que son consistentes con el comportamiento del MVE en redes regulares de dimensión $d > 2$ [8], así como para redes complejas de alta conectividad y dimensión efectiva infinita, como redes libre de escala [8], redes de pequeño mundo [7], y grafos aleatorios [11].

L	ρ_0	$\tau(\text{MCS})$	n_s
5×10^3	0,444(1)	$3,45(8) \times 10^3$	3×10^3
1×10^4	0,448(1)	$6,85(2) \times 10^3$	$2,5 \times 10^3$
2×10^4	0,449(1)	$1,29(2) \times 10^4$	2×10^3
5×10^4	0,449(1)	$3,13(3) \times 10^4$	5×10^2
1×10^5	0,450(1)	$6,29(4) \times 10^4$	5×10^2

Cuadro 4.1: Valor medio de la densidad de interfaces (ρ_0) del estado estacionario y tiempo de vida de las interfaces (τ), obtenidos mediante el ajuste de los datos con la ecuación (4.2). Resultados correspondientes a $\sigma = 0,2$ para sistemas de distinto tamaño (L). Además el número de muestras simuladas (n_s) es indicada para cada tamaño L .

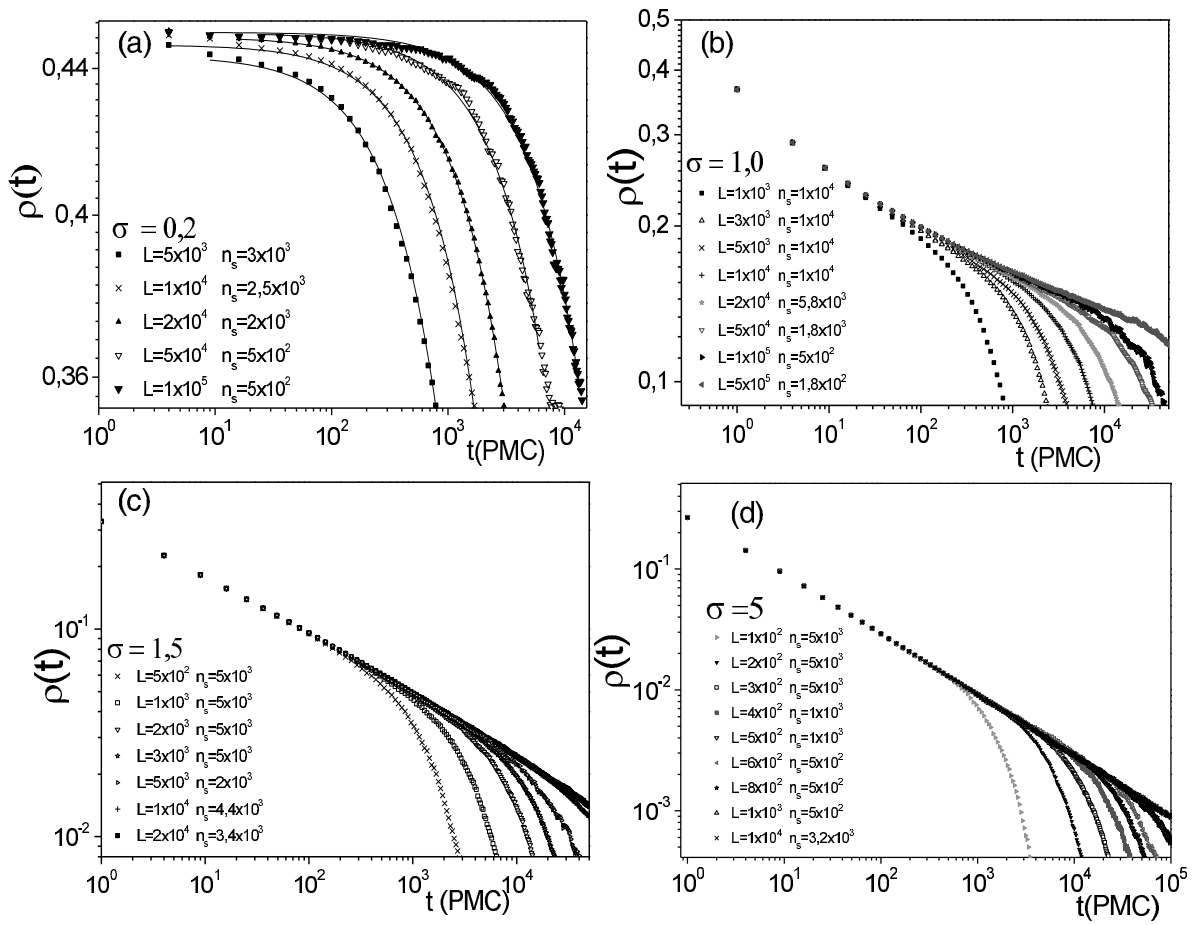


Figura 4.7: Gráfico Log-log de la evolución temporal de la densidad de interfaces $\rho(t)$ para diferentes tamaños del sistema (L) y diferentes valores de σ : (a) $\sigma = 0,2$, (b) $\sigma = 1,0$, y (c) $\sigma = 1,5$ y (d) $\sigma = 5$. El tamaño del sistema y el número de muestras promediadas (n_s) también se indica. La línea continua corresponde al ajuste de los resultados mediante la ecuación 4.2.

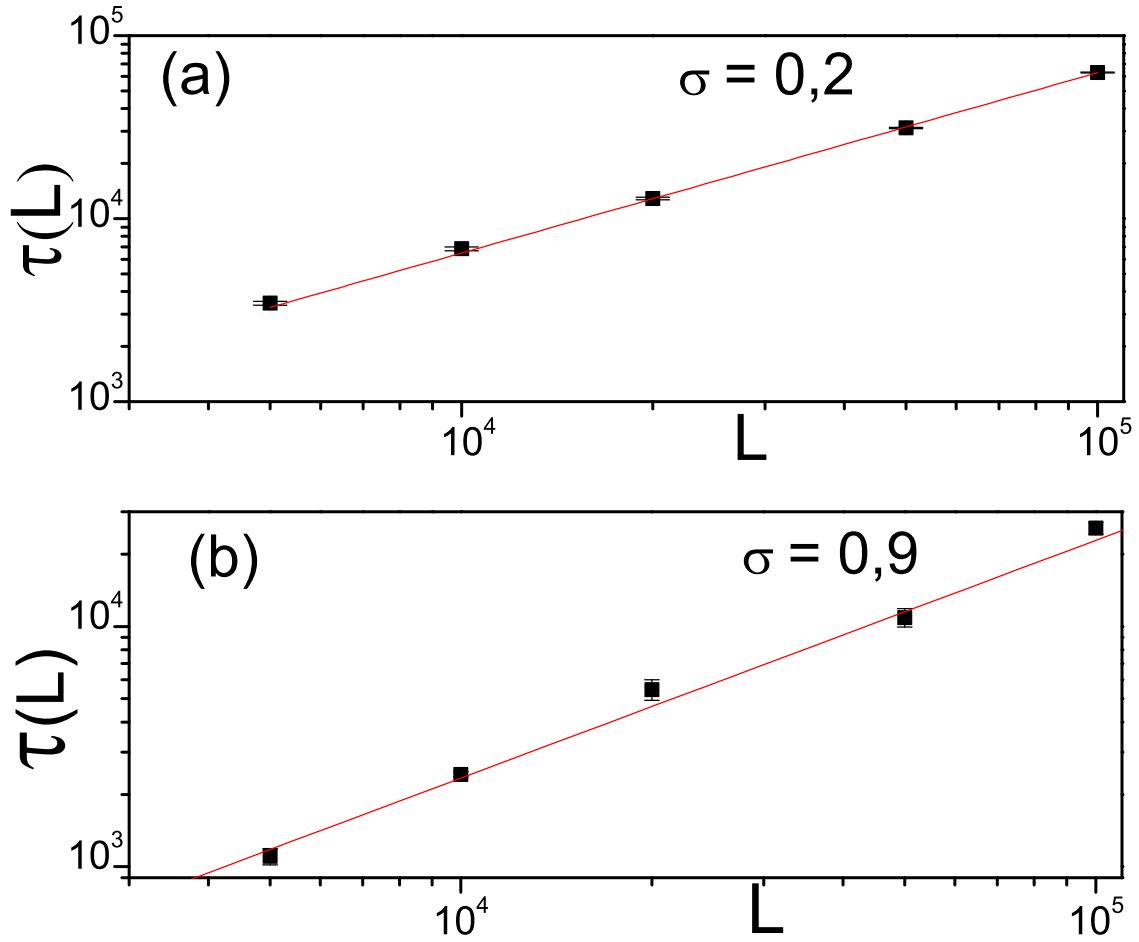


Figura 4.8: Gráfico Log-log de el tiempo de vida de las interfaces τ en función del tamaño del sistema (L), obtenido para dos valores del parámetro σ ubicados en la región de campo medio, (a) $\sigma = 0,2$ y (b) $\sigma = 0,9$. Los cuales se eligieron por representar los extremos opuestos de dicha región. La línea continua indica los ajuste con la ecuación 4.4 con valores $\omega = 0,99(1)$ y $\omega = 0,99(1)$, respectivamente.

En base a los resultados discutidos y con el objetivo de dar una visión unificada del proceso de decaimiento, se propuso la siguiente relación de escala:

$$\rho(t, L) \propto \frac{L}{\tau} f(t/\tau), \quad (4.5)$$

donde $f(t/\tau)$ es la función escala propia de cada régimen.

La figura 4.9 (a) muestra el colapso obtenido utilizando la dependencia $\tau = L$ para $\sigma = 0,2$. A partir de este resultado puede obtenerse la función de escala para el régimen $\sigma < 1$, que esta dada por $f(t/\tau) \approx e^{-(t/\tau)}$. De esta manera, la ley de escala propuesta en la ecuación 4.5 permitió determinar la dependencia del tiempo de vida de las interfaces (τ) con el tamaño del sistema L , en todos los regímenes. Esto puede verse en las figuras 4.9 (b) 4.9 (c) y 4.9 (d) donde fueron colapsados los datos simulados para $\sigma = 1,0$

(figura 4.7(b)), $\sigma = 1,5$ (figura 4.7(c)) y $\sigma = 5,0$ (figura 4.7(d)), respectivamente. En estas figuras se puede ver que para $\sigma = 1,0$, el mejor colapso se obtuvo para una dependencia de la forma $\tau \propto L \ln(L)$, resultado que se corresponde con el esperado para el (MVE-2D) [8]. En la región de $\sigma > 1$ se obtuvieron los mejores colapsos, para $\sigma = 1,5$ con una dependencia de la forma $\tau \propto L^{1,4}$ y para $\sigma = 5$ con la relación $\tau \propto L^2$, lo que parece indicar que en esta región el exponente ω crece con σ hasta alcanzar un valor máximo consistente con el MVE-1D y con redes complejas libres de escala con dimensión efectiva $d = 1$ [8].

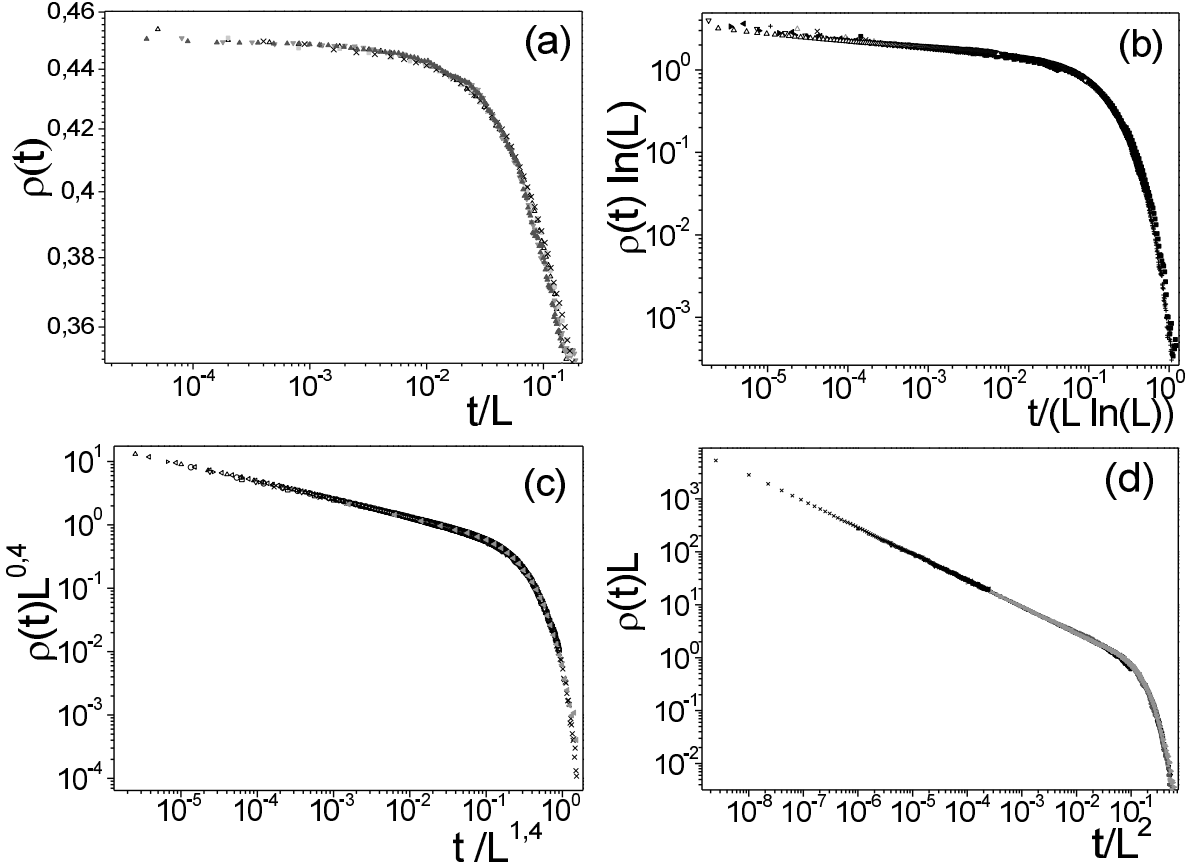


Figura 4.9: Función de escala correspondiente a la evolución temporal de la densidad de interfaces $\rho(t)$, obtenida para distintos valores de σ : (a) $\sigma = 0,2$, (b) $\sigma = 1$, (c) $\sigma = 1,5$ y (d) $\sigma = 5$.

4.3.4. La distribución de distancias de interacción

De lo discutido en las secciones anteriores fue posible caracterizar el comportamiento del modelo Votante-LA en función de σ , pudiéndose relacionar con un comportamiento multidimensional relacionado al MVE en cualquier dimensión entera. Así mismo, se observó una región intermedia entre $\sigma = 1$ (MVE-2D) y $\sigma = 5$ (MVE-1D) donde existe un comportamiento como ley de potencia de $\rho(t)$, con exponentes que dependen del valor de σ . Resultado que es consistente con los reportados en redes fractales de

dimensión $1 < d_f < 2$ [12], donde se observa una dependencia del exponente con la dimensión de la red.

Por lo tanto, conociendo la manera en que las interacciones son generadas, es posible suponer que la principal diferencia entre los distintos regímenes puede deberse a la distancia media de interacción así como a sus fluctuaciones. Por esto, y con la idea validar esta afirmación se calcularon para algunos valores de σ , el primer y el segundo momento de la distribución de distancias de interacción de largo alcance, definidos como:

$$\langle r \rangle = \int_1^L r \frac{A_\sigma}{r^{d+\sigma}} dr \quad \text{y} \quad \langle r^2 \rangle = \int_1^L r^2 \frac{A_\sigma}{r^{d+\sigma}} dr, \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

donde la constante de normalización vale:

$$A = \frac{1}{\int_1^L 1/r^{1+\sigma} dr}. \quad (4.8)$$

A su vez, a partir de estos momentos se calcularon las fluctuaciones de la distancia media como:

$$\langle \Delta r \rangle = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}. \quad (4.9)$$

Magnitud con la que se pudo establecer una posible causa para los distintos comportamientos observados para diferentes valores de σ , sus dimensiones efectivas, así como las maneras en que estas magnitudes escalan en el límite $L \rightarrow \infty$. Los resultados mencionados a continuación se muestran, para una mayor claridad en la Tabla 4.2.

- Para $\sigma < 1$: $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ muestran una fuerte dependencia con el tamaño y ambos momentos resultan divergentes en el límite $L \rightarrow \infty$. Estos resultados están en correspondencia con los regímenes de tipo campo medio o de alta conectividad característicos de mayores dimensiones.
- Para $\sigma = 1$: se observa una dependencia logarítmica con el tamaño L , para el primer momento ($\langle r \rangle$), mientras que $\langle r^2 \rangle$ presenta una dependencia lineal. Este comportamiento logarítmico de $\langle r \rangle$ puede ser entendido como un punto límite entre un comportamiento de campo medio, donde el número de vecino se incrementa linealmente con el tamaño y las dimensiones subcríticas del MVE, donde el número de vecinos es independiente del tamaño del sistema. Por otra parte, cabe mencionar que a pesar de que ambos momentos son divergentes en el límite termodinámico, la dependencia del valor medio para un tamaño dado es más débil que la que se manifiesta en las fluctuación (por ejemplo, para $L = 1 \times 10^6$, la distancia media vale $\langle r \rangle \sim 13$, y la fluctuación $\langle \Delta r \rangle \sim 1000$). Estos resultados llevan a asociar a $\sigma = 1$ con la dimensión crítica del MVE ($d_c = 2$).
- Por otro lado, la región $1 < \sigma \leq 2$ puede ser entendida como otra zona intermedia, donde $\langle r \rangle$ es una magnitud convergente dependiente de σ pero sus fluctuaciones

son grandes de una manera similar al caso $\sigma \leq 1$. Esta característica podría vincularse con las fluctuaciones en el tamaño de los dominios observadas en las figura 4.6(b) y 4.6(c). Para $\sigma > 2$, los dos momentos se vuelven convergentes, lo que da lugar a un régimen de ordenamiento donde ambos momentos dependen de σ y coinciden para $\sigma \rightarrow \infty$ con los valores esperados para el modelo MVE-1D.

Régimen (σ)	Dependencia de los momentos con el tamaño (L)	Comportamiento asintótico	$L \rightarrow \infty$
$\sigma = 0$	$\langle r \rangle = \frac{(L-1)}{\ln(L)}$ $\langle r^2 \rangle = \frac{(L^2-1)}{2\ln(L)}$	$\langle r \rangle \sim \frac{L}{\ln(L)}$ $\langle r^2 \rangle \sim \frac{L^2}{2\ln(L)}$	∞ ∞
$0 < \sigma < 1$	$\langle r \rangle = \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) \frac{(L^{1-\sigma}-1)}{(1-L^{-\sigma})}$ $\langle r^2 \rangle = \left(\frac{\sigma}{2-\sigma}\right) \frac{(L^{2-\sigma}-1)}{(1-L^{-\sigma})}$	$\langle r \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) L^{1-\sigma}$ $\langle r^2 \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{2-\sigma}\right) L^{2-\sigma}$	∞ ∞
$\sigma = 1$	$\langle r \rangle = \frac{\ln(L)}{(1-L^{-1})}$ $\langle r^2 \rangle = \frac{(L-1)}{(1-L^{-1})}$	$\langle r \rangle \sim \ln(L)$ $\langle r^2 \rangle \sim L$	∞ ∞
$1 < \sigma \leq 2$	$\langle r \rangle = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \frac{(1-L^{1-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$ $\langle r^2 \rangle = \left(\frac{\sigma}{\sigma-2}\right) \frac{(1-L^{2-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$	$\langle r \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) (1 - L^{1-\sigma})$ $\langle r^2 \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{\sigma-2}\right) (1 - L^{2-\sigma})$	$\frac{\sigma}{\sigma-1}$ ∞
$\sigma = 2$	$\langle r \rangle = 2 \times \frac{(1-L^{-1})}{(1-L^{-2})}$ $\langle r^2 \rangle = \frac{2\ln(L)}{(1-L^{-2})}$	$\langle r \rangle \sim 2 \times (1 - L^{-1})$ $\langle r^2 \rangle \sim 2 \times \ln(L)$	2 ∞
$\sigma > 2$	$\langle r \rangle = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) \frac{(1-L^{1-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$ $\langle r^2 \rangle = \left(\frac{\sigma}{\sigma-2}\right) \frac{(1-L^{2-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$	$\langle r \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) (1 - L^{1-\sigma})$ $\langle r^2 \rangle \sim \left(\frac{\sigma}{\sigma-2}\right) (1 - L^{2-\sigma})$	$\frac{\sigma}{\sigma-1}$ $\frac{\sigma}{\sigma-2}$
$\sigma \rightarrow \infty$	$\langle r \rangle \sim 1 \times \frac{(1-L^{1-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$ $\langle r^2 \rangle \sim 1 \times \frac{(1-L^{2-\sigma})}{(1-L^{-\sigma})}$	$\langle r \rangle \sim 1 - L^{1-\sigma}$ $\langle r^2 \rangle \sim 1 - L^{2-\sigma}$	1 1

Cuadro 4.2: Resultados analíticos para el primer ($\langle r \rangle$) y segundo momento ($\langle r^2 \rangle$) de la distribución de distancias de interacción, obtenida a partir de la ecuación (4.7) para diferentes valores del parámetro σ .

4.4. Conclusiones

Los cuatro análisis realizados permiten establecer una analogía entre el modelo propuesto Votante-LA para dimensión $d = 1$ y el modelo MVE en redes regulares de cualquier dimensión. En este sentido, se evidenció un comportamiento multidimensional efectivo al modificar el parámetro que controla el alcance de la interacción:

- Los resultados obtenidos para $\sigma < 1$ pueden ser relacionados con el comportamiento dinámico del MVE en dimensiones mayores que la crítica $d > 2$, donde los sistemas alcanzan en el límite de tamaño infinito un estado estacionario con un valor medio de la densidad de interfaces constante. En éste régimen tanto el valor medio de la distancia de interacción $\langle r \rangle$ como su segundo momento $\langle r^2 \rangle$ son

magnitudes divergentes lo resulta ser acorde con una interacción global en que todos los sitios de la red interactúan con la misma intensidad. En el caso de tamaños finitos L , como los utilizados en las simulaciones, las fluctuaciones siempre llevan al sistema hacia uno de sus dos estados absorbentes. Para $0,7 < \sigma < 1,0$ se muestra una dinámica lenta, sin una distribución de tamaños de dominios libre de escala, con efectos de tamaño finito del tipo observado para valores $\sigma < 0,7$ y con ambos momentos $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ divergentes. Llevando a asociar esta región a un comportamiento de transición entre $\sigma < 0,7$ y $\sigma = 1,0$.

- Para $\sigma = 1$ los resultados se corresponden con los del modelo MVE-2D, con un comportamiento dinámico de tipo logarítmico y una distribución de tamaños de dominios magnéticos libre de escala. En cuanto a la distribución de distancias de interacción ambos momentos divergen, con la salvedad de que la dependencia del valor medio con el tamaño es menor.
- Para $1 < \sigma \leq 2$ se observa una dinámica de ordenamiento como ley de potencia con exponentes que son funciones continuas de σ . Por su parte la distribución de tamaños de dominios sigue una ley de potencia, lo cual es una de las características esperadas de la invariancia de escala. En particular para $\sigma = 2$, la distribución de tamaños se aparta levemente de una ley potencia. A su vez la distancia media de interacción converge para el límite $L \rightarrow \infty$ a un valor constante $\langle r \rangle \leq 2$, mientras que las fluctuaciones de esta magnitud ($\langle \Delta r \rangle$) son divergentes.
- Para $\sigma > 2$ también se obtiene un decaimiento (σ -dependiente) como ley de potencia de la densidad de interfaces y una distribución de tamaños de dominios tendientes a la de MVE-1D. En este caso ambos momentos de la distribución de distancias convergen en el límite $L \rightarrow \infty$ a valores cercanos a 1. Para $\sigma \geq 5$, los resultados son consistentes al comportamiento del (MVE-1D).

Bibliografía

- [1] P. Clifford and A. Sudbury, *Biometrika*, **60(3)**, 581 (1973).
- [2] D. Mollison *JRSS B* **39**, 283 (1977)
- [3] R. Holley and T.M. Ligget, *Ann. Probab.*, **3**, 643 (1975).
- [4] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E*, **53**, R3009 (1996).
- [5] I. Dornic , H. Chaté , J. Chave and H. Hinrichsen, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 045701 (2001)
- [6] M. Henkel, H. Hinrichsen and S. Lübeck “Non-Equilibrium Phase Transitions”, **1**, Springer (2008)
- [7] C. Castellano , D. Vilone and A. Vespignani, *Europhys. Lett.*, **63**, 153 (2003).
- [8] K. Suchecki , V. M. Eguíluz and M. San Miguel, *Phys. Rev. E*. **72**, 036132 (2005).
- [9] C. Castellano, V. Loreto, A. Barrat, F. Cecconi and D. Parisi, *Phys. Rev. E*. **71**, 066107 (2005).
- [10] K. Klemm and V. M. Eguíluz, *Phys. Rev. E*, **65**, 036123 (2002)
- [11] V. Sood and V. Redner, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 178701 (2005)
- [12] M. A. Bab and E. V. Albano, *Eur. Phys. J. B*, **63**, 521 (2008)

Capítulo 5

Estudio de la dinámica del Modelo de Votante con vuelos de Lèvy

5.1. Antecedentes

Este capítulo aborda otra versión del modelo de votante con una dinámica mixta, que incluye la correspondiente al modelo votante estandar (primeros vecinos) (MVE), junto con una dinámica difusiva producida mediante intercambios de espines como vuelos de Lèvy (Votante-Lèvy). Para más detalles, puede verse en la sección 2.3.3, donde se describe el modelo propuesto y su correspondiente algoritmo.

Como antecedentes, se puede mencionar que una dinámica de intercambios similar ha sido utilizada para el caminante aleatorio definido por Hioe en 1984 [1], contexto donde cada intercambio se entiende como un salto o vuelo de Lèvy. Recientemente, se han obtenido resultados que indican la presencia de diferentes regímenes dinámicos dependientes de σ al incorporar vuelos de Lèvy en las dinámicas usuales (corto alcance) de modelos sin equilibrio. En particular la referencia [2], describe su uso en modelos pertenecientes a las clases de Paridad Conservada (PC) y Percolación Dirigida (PD).

Por otro lado, como ya se mencionó en el capítulo 1, la dinámica mixta propuesta también fue utilizada en el modelo de Ising cinético [3] con el cual fue posible obtener los exponentes críticos del modelo Ising-LA, ya descrito en el capítulo 3. Por lo tanto, el interés en esta tesis fue verificar si el mecanismo de dinámica mixta utilizado para simular interacciones de largo alcance, resulta valido para reproducir el comportamiento dinámico del modelo Votante-LA. Los resultados obtenidos servirán como una etapa previa al estudio de la dinámica crítica del modelo de Ising-Lèvy, la cual se aborda en el siguiente capítulo.

5.2. Detalle de las simulaciones

Las simulaciones fueron realizadas en redes unidimensionales, utilizando condiciones de frontera periódicas, con valores del parámetro que controla el alcance de las interacciones representativos de los diferentes regímenes observados en el Votante-LA ($\sigma = 0, 2, 0, 5, 1, 0, 2, 0$, y $5, 0$). Los tamaños fueron seleccionados en el intervalo

($L = 1 \times 10^4, L = 1 \times 10^5$) para estudios del comportamiento de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) con el objetivo de determinar la existencia de diferentes regímenes en la dinámica. Para analizar los efectos de tamaño finito se simularon tamaños menores y se realizaron los colapsos utilizando la relación de escala propuesta en la ecuación 4.5. Por último, para caracterizar los diferentes regímenes en función del parámetro σ se estudian los estados del sistema en función del tiempo, identificando las diferentes estructuras espacio-temporales de cada régimen y comparando las mismas con los resultados provenientes de la dinámica de las interfaces.

5.3. Resultados y Discusión

5.3.1. La dinámica de la densidad de interfaces

La figura 5.1 muestra la dinámica de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) para un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^5$ y distintos valores del parámetro σ .

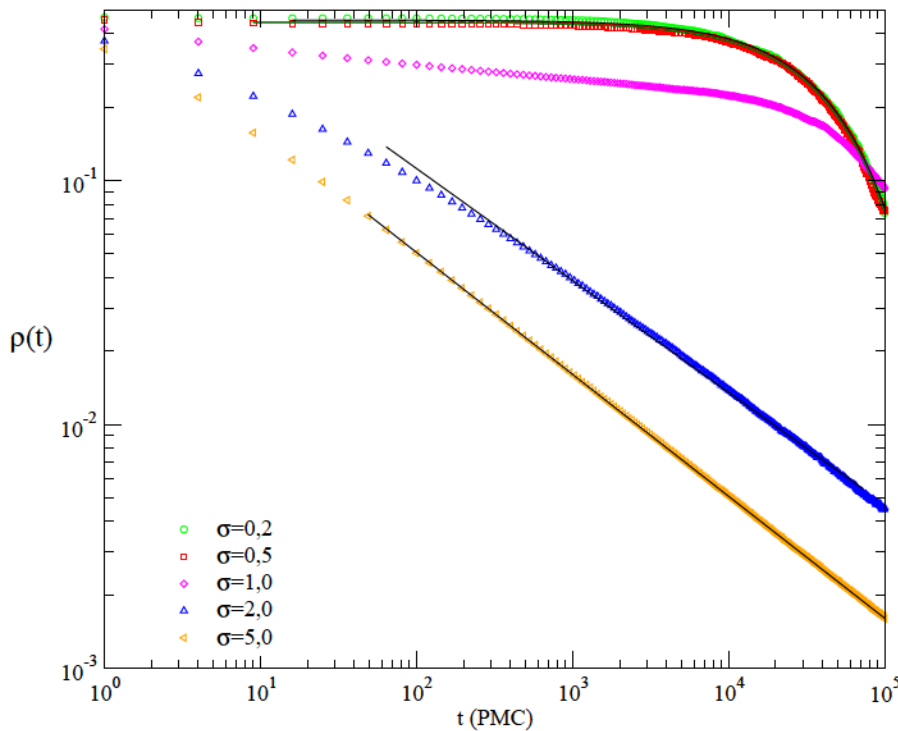


Figura 5.1: Evolución temporal de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) medida para valores del parámetro de control σ en el intervalo $(0,2 - 5,0)$. Las líneas continuas corresponden a los ajustes con la ecuación 4.2 para $\sigma = 0, 2$ y $0, 5$ y con una ley de potencia para $\sigma = 2$ y 5 . Los datos fueron obtenidos para sistemas de tamaño $L = 1 \times 10^5$ y promediados $ns = 600$ configuraciones

A continuación se describen los distintos regímenes observados:

- Las curvas correspondientes a $\sigma = 0,2$ y $0,5$ presentan el decaimiento exponencial característico del régimen estacionario en el límite $L \rightarrow \infty$, las cuales fueron ajustadas con la ecuación 2.33 (ver figuras 5.3). A partir de este ajuste fue posible determinar el valor medio de la densidad de interfaces en el estado estacionario ρ_0 y el tiempo de vida de las interfaces τ presentados en la Tabla 5.1. Los valores obtenidos para τ son próximos a los correspondientes al modelo Votante-LA, que también se incluyen en la Tabla 5.1 para facilitar la lectura. Por su parte la densidad de interfaces en el estado estacionario ρ_0 muestra un comportamiento convergente con el tamaño del sistema L y una menor sensibilidad con el parámetro σ relativo al modelo Votante-LA. Los resultados descriptos permiten confirmar la existencia de un régimen estacionario donde el sistema no se ordena en el límite termodinámico para $\sigma < 1$ análogo al MVE con $d > 2$ [4]

$\sigma = 0,2$			
Modelos	ρ_0	τ	n_s
Voter-Lèvy $L = 1 \times 10^4$	0,446(1)	$5,45(1) \times 10^3$	1000
Voter-Lèvy $L = 5 \times 10^4$	0,453(1)	$2,70(1) \times 10^4$	1000
Voter-Lèvy $L = 1 \times 10^5$	0,455(1)	$5,60(1) \times 10^4$	600
Voter-LA $L = 1 \times 10^5$	0,450(2)	$6,29(4) \times 10^4$	500

$\sigma = 0,5$			
Modelos	ρ_0	τ	n_s
Voter-Lèvy $L = 1 \times 10^4$	0,438(1)	$5,60(1) \times 10^3$	1000
Voter-Lèvy $L = 5 \times 10^4$	0,444(1)	$2,60(1) \times 10^4$	1000
Voter-Lèvy $L = 1 \times 10^5$	0,443(1)	$5,50(1) \times 10^4$	600
Voter-LA $L = 1 \times 10^5$	0,372(1)	$6,38(5) \times 10^4$	500

Cuadro 5.1: Valor medio de la densidad de interfaces (ρ_0) del estado estacionario y tiempo de vida de las interfaces (τ), obtenidos mediante el ajuste de los datos con la ecuación 4.2 (ver gráficos 5.3 (a) y 5.3 (b)). Los resultados corresponden a los modelos Votante-Lèvy y Votante-LA para $\sigma = 0,2$ y $0,5$. En la última columna, se indica el número de configuraciones promediadas.

- Para $\sigma = 1$ la figura 5.1 indica una dinámica lenta que se asocia a un proceso de orden que evoluciona logarítmicamente. Esto último se evidencia con mayor

claridad en la figura 5.2, donde se ha graficado la inversa de la densidad de interfaces en función del $\ln(t)$ para diferentes tamaños. En la misma figura se muestra en línea continua el ajuste de los datos correspondientes al sistema de tamaño $L = 1 \times 10^5$ con la ecuación 4.1 y los resultados se presentan en la tabla 5.2. A partir de la constante A se obtuvo el valor de la constante de difusión efectiva del modelo Votante-Lèvy $D = A/2\pi = 0,72(2)$, sensiblemente mayor a los valores obtenidos para el Votante-LA y MVE-2D (incluidos también en la tabla 5.2). Este valor podría asociarse a la incorporación del mecanismo difusivo dado por los vuelos de Lèvy en la dinámica. El comportamiento logarítmico descrito sugiere que Votante-Lèvy con $\sigma = 1$ presenta comportamiento dinámico intermedio que puede vincularse con el MVE-2D [5].

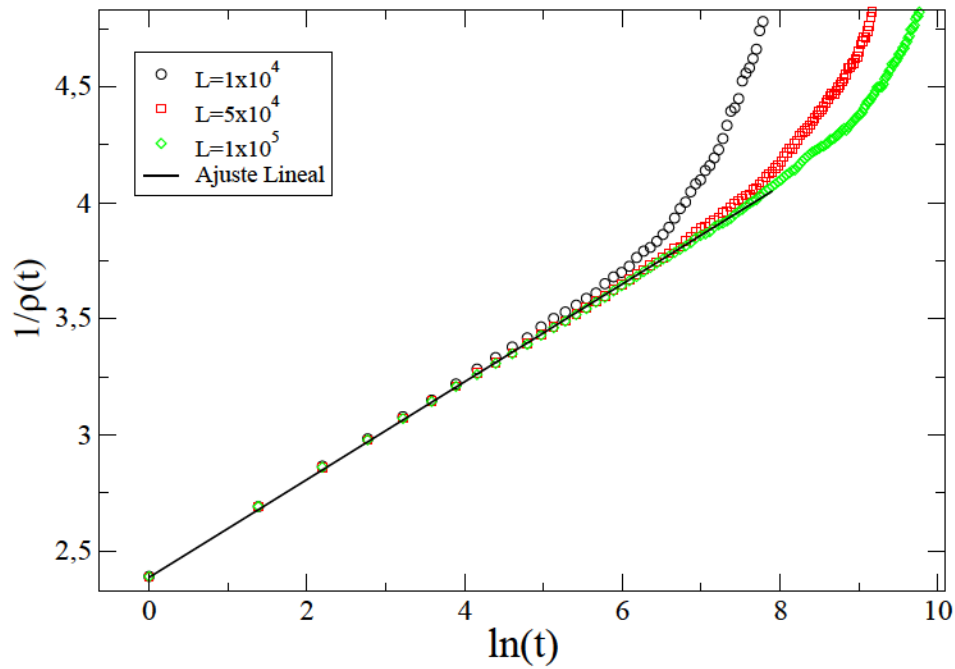


Figura 5.2: Gráfico de $1/\rho(t)$ en función de $\ln(t)$ con $\sigma = 1,0$ para distintos tamaños. La línea continua indica el ajuste realizado sobre la curva correspondiente al tamaño $L = 1 \times 10^5$ mediante la ecuación 4.1. Los resultados obtenidos de dicho ajuste se muestran en la tabla 5.2.

Modelos	$1/A$	D	n_s
Votante-Lèvy 1×10^4	0,22(1)	0,72(3)	1000
Votante-Lèvy 5×10^4	0,21(1)	0,75(4)	1000
Votante-Lèvy 1×10^5	0,21(1)	0,75(4)	600
Votante-LA 1×10^5	0,52(1)	0,306(6)	500
MVE-2D	$\pi/2$	0,25	—

Cuadro 5.2: Constante A y constante de difusión efectiva D , obtenidas a partir del ajuste con la ecuación 4.1 sobre las curvas de la figura 5.2. Los resultados corresponden a los modelos Votante-Lèvy y Votante-LA para $\sigma = 1$. Se indican también el número de configuraciones promediadas y el tamaño del sistema. La última fila corresponde a los resultados exactos del modelo MVE-2D tomados de las referencias [5, 6].

- Para $\sigma = 2$ y 5 la densidad de interfaces decae rápidamente al estado absorbente siguiendo una ley de potencia, como se ve en las figuras 5.1, 5.5 (a) y 5.5 (b). El ajuste de este comportamiento con la ecuación 2.31 permite observar una dependencia del exponente α con el valor de σ que está en buen acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo 4 para el modelo Votante-LA (ver tabla 5.3). Más aun dicho exponente alcanza para $\sigma = 5,0$ el valor $\alpha = 0,5$ correspondiente a los modelos MVE-1D [5] y Votante-LA para $\sigma \geq 5$.

Modelo	σ	α	n_s
Votante-Lèvy 1×10^5	2	0,450(15)	600
Votante-Lèvy 1×10^5	5	0,500(5)	600
Votante-LA 1×10^5	2	0,424(9)	500
Votante-LA 1×10^5	5	0,500(2)	500
MVE-1D	—	0,5	—

Cuadro 5.3: Exponente α de la densidad de interfaces obtenido a partir del ajuste con la ecuación 2.31 para los valores de $\sigma = 2,0$ y $\sigma = 5,0$ y un tamaño del sistema de $L = 1 \times 10^5$ (ver figura 5.1). Además para una rápida comparación se muestra los valores obtenidos en el modelo Votante-LA. En la última columna se incluyeron los números de configuraciones promediadas y en última fila se muestra el valor exacto del modelo MVE-1D obtenidos de la referencia [5].

5.3.2. Los efectos de tamaño finito

A partir del comportamiento dinámico de la densidad de interfaces descrito en la sección anterior se relacionó cada valor de σ con uno de los regímenes obtenidos en el modelo Votante-LA. Con el objetivo de verificar dicha asociación se realizaron estudios de los efectos de tamaño finito utilizando la relación de escala propuesta en el capítulo 4 (ecuación 4.5) En el grafico interno de las figuras 5.3 (a) y 5.3 (b) puede observarse que la función de escala es obtenida para $\tau \propto L$, lo cual confirma que los valores de $\sigma < 1$ pueden vincularse con el régimen estacionario.

En el caso de $\sigma = 1$ el grafico insertado en la figura 5.4 muestra el colapso para valores del tiempo de vida de la interfaces dados por $\tau \propto L \ln(L)$, asociando dicho comportamiento al MVE-2D y en consecuencia al modelo Votante-LA con $\sigma = 1$.

Finalmente, las figuras 5.5(a) y 5.5(b) muestran a la densidad de interfaces en función del tiempo para valores de $\sigma = 2$ y $\sigma = 5$, respectivamente. El solapamiento de las curvas correspondientes a los tamaños $L = 1 \times 10^4$, $L = 5 \times 10^4$ y $L = 1 \times 10^5$ indica que los efectos de tamaño finito se observan a tiempos mayores a 1×10^5 (PMC), haciendo necesario la simulación de tamaños de sistema menores ($L = 3 \times 10^2$, $L = 5 \times 10^2$, $L = 1 \times 10^3$ y $L = 5 \times 10^3$). El grafico interior muestra la función de escala obtenida con la relación $\tau \propto L^{1.77}$ para $\sigma = 2$ y $\tau \propto L^2$ para $\sigma = 5$. Este comportamiento permite vincular $\sigma = 2$ al régimen intermedio del modelo Votante-LA y $\sigma = 5$ al régimen de corto alcance del modelo Votante-LA.

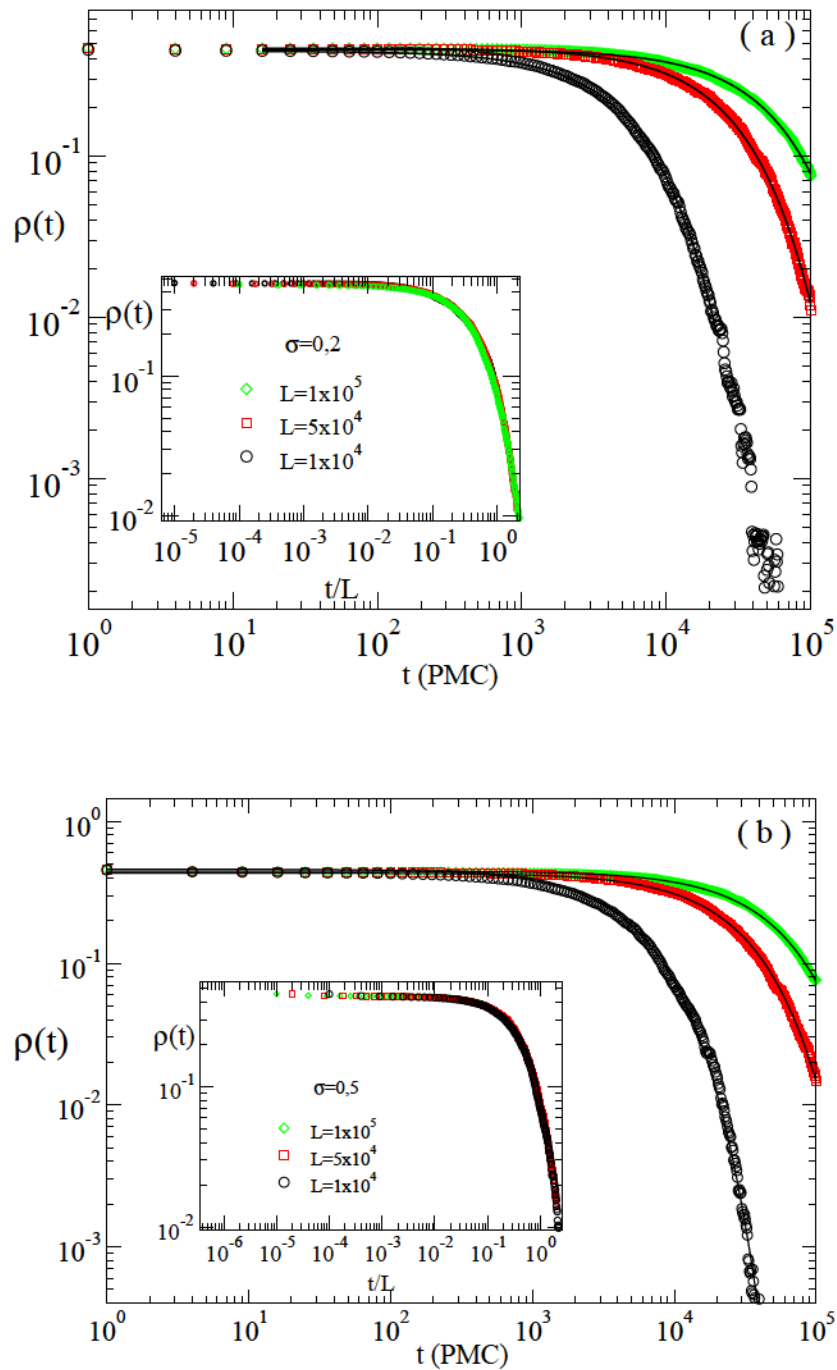


Figura 5.3: Evolución temporal de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) medida para valores del parámetro de control: a) $\sigma = 0,2$ y b) $\sigma = 0,5$. Los diferentes tamaños utilizados son indicados en las leyendas. Las líneas continuas corresponden a los ajustes con la ecuación 4.2, a partir de los cuales fueron obtenidos los valores de τ y ρ_0 que se muestran en la tabla 5.1. Por otra parte en los gráficos interiores se pueden observar los colapsos realizados mediante la ecuación de escala 4.5. El número de configuraciones promediadas fue $n_s = 600$ para $L = 1 \times 10^5$ y $n_s = 1000$ para $L = 5 \times 10^4$ y $L = 1 \times 10^4$

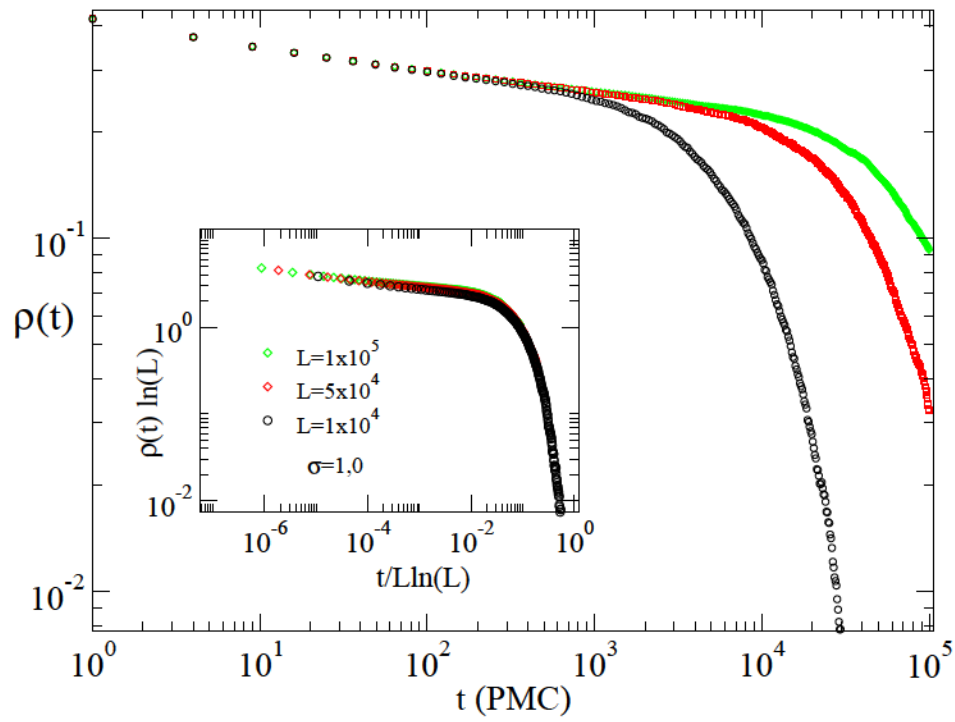


Figura 5.4: Evolución temporal de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) medida para $\sigma = 1$. Los diferentes tamaños utilizados son indicados en las leyendas. El número de configuraciones promediadas fue $n_s = 600$ para $L = 1 \times 10^5$ y $n_s = 1000$ para $L = 5 \times 10^4$ y $L = 1 \times 10^5$. En el gráfico insertado se muestra la función de escala dada por la ecuación 4.5.

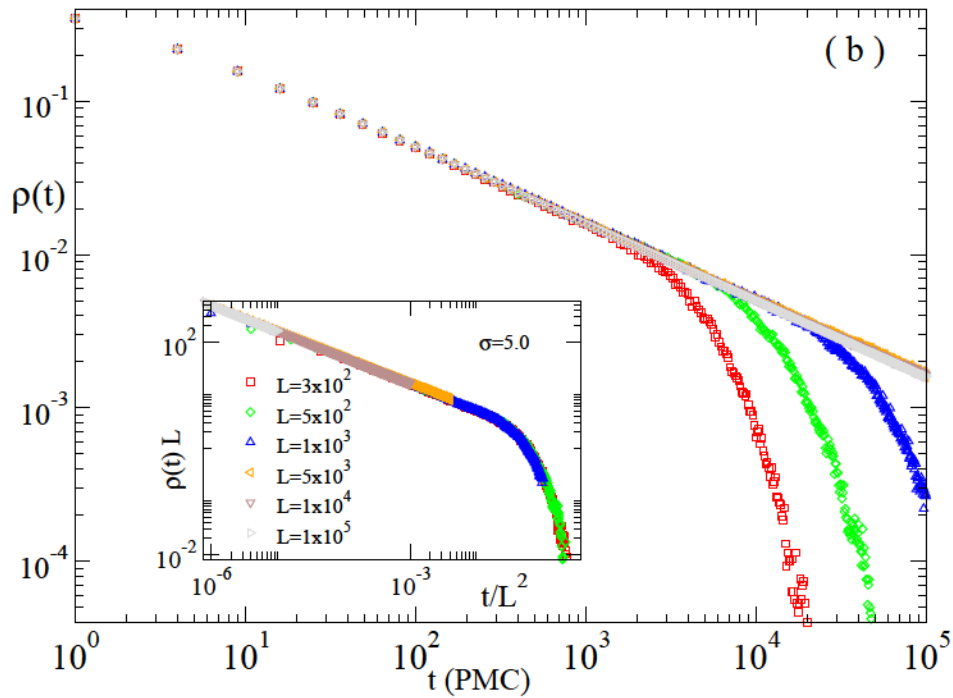
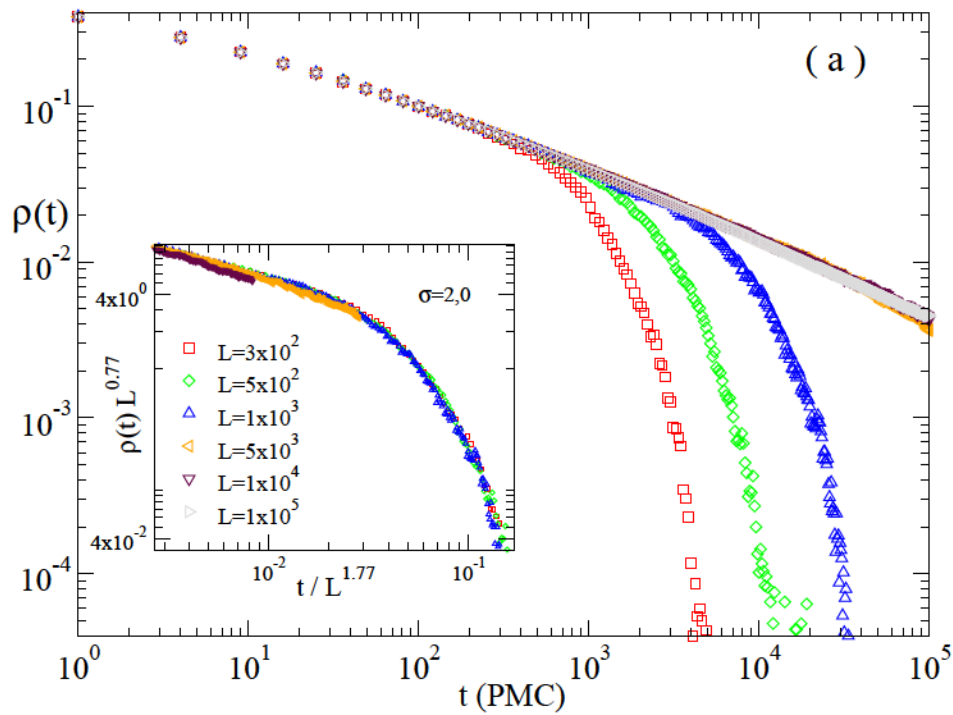


Figura 5.5: Evolución temporal de la densidad de interfaces ($\rho(t)$) medida para valores del parámetro de control: a) $\sigma = 2$ y b) $\sigma = 5$. Los diferentes tamaños utilizados son indicados en las leyendas. En el gráfico insertado se muestra la función de escala dada por la ecuación 4.5. El número de configuraciones promediadas fue $n_s = 600$ para $L = 1 \times 10^5$; $n_s = 1000$ para $L = 5 \times 10^4$, $L = 1 \times 10^5$ y $n_s = 2000$ para $L = 5 \times 10^3$, $L = 1 \times 10^3$, $L = 5 \times 10^2$ y $L = 3 \times 10^2$.

5.3.3. Las configuraciones del sistema

Una observación complementaria que permite clarificar los diferentes procesos involucrados en los comportamientos dinámicos descritos es la evolución temporal de los estados del sistema. La figura 5.6 muestra las diferentes estructuras espacio-temporales observadas para los distintos valores de σ . En el eje y se indican las configuraciones del sistema mientras que el eje x representa el tiempo para el cual la configuración es observada. Los puntos negros y blancos representan espines $s_i = 1$ y $s_i = -1$, respectivamente. Para $\sigma = 0,2$ (figura 5.6 (a)) se observa un estado desordenado que en el intervalo temporal observado no presenta un ordenamiento apreciable, lo cual es compatible con el comportamiento del modelo Votante-LA en el régimen de campo medio. Para $\sigma = 1$ (figura 5.6 (b)) se observa una dinámica lenta con dominios en todas las escalas e interfaces "difusas", lo cual resulta compatible con las observaciones para el modelo Votante-LA con $\sigma = 1,0$ y para el MVE en la dimensión crítica $d = 2$. Cabe remarcar que en ambos casos tanto la distancia media de interacción como sus fluctuaciones son divergentes. El caso de $\sigma = 2$ presenta un comportamiento intermedio similar al obtenido en el caso de $\sigma = 1,5$ para el modelo de Votante-LA. En la figura 5.6(c) se observa el crecimiento de grandes dominios acompañado con interfaces "difusas" y dominios de tamaño próximo a la unidad en su interior, lo cual podría vincularse con una distancia media de interacción de corto alcance y una divergencia en sus fluctuaciones (ver sección 4.3.4). Finalmente para $\sigma = 5$ se observa un proceso de ordenamiento rápido evidenciado por el crecimiento los dominios compactos con interfaces definidas. El mismo puede ser relacionado con un régimen de corto alcance con fluctuaciones en las distancias de interacción también de corto alcance (ver tabla 4.2).

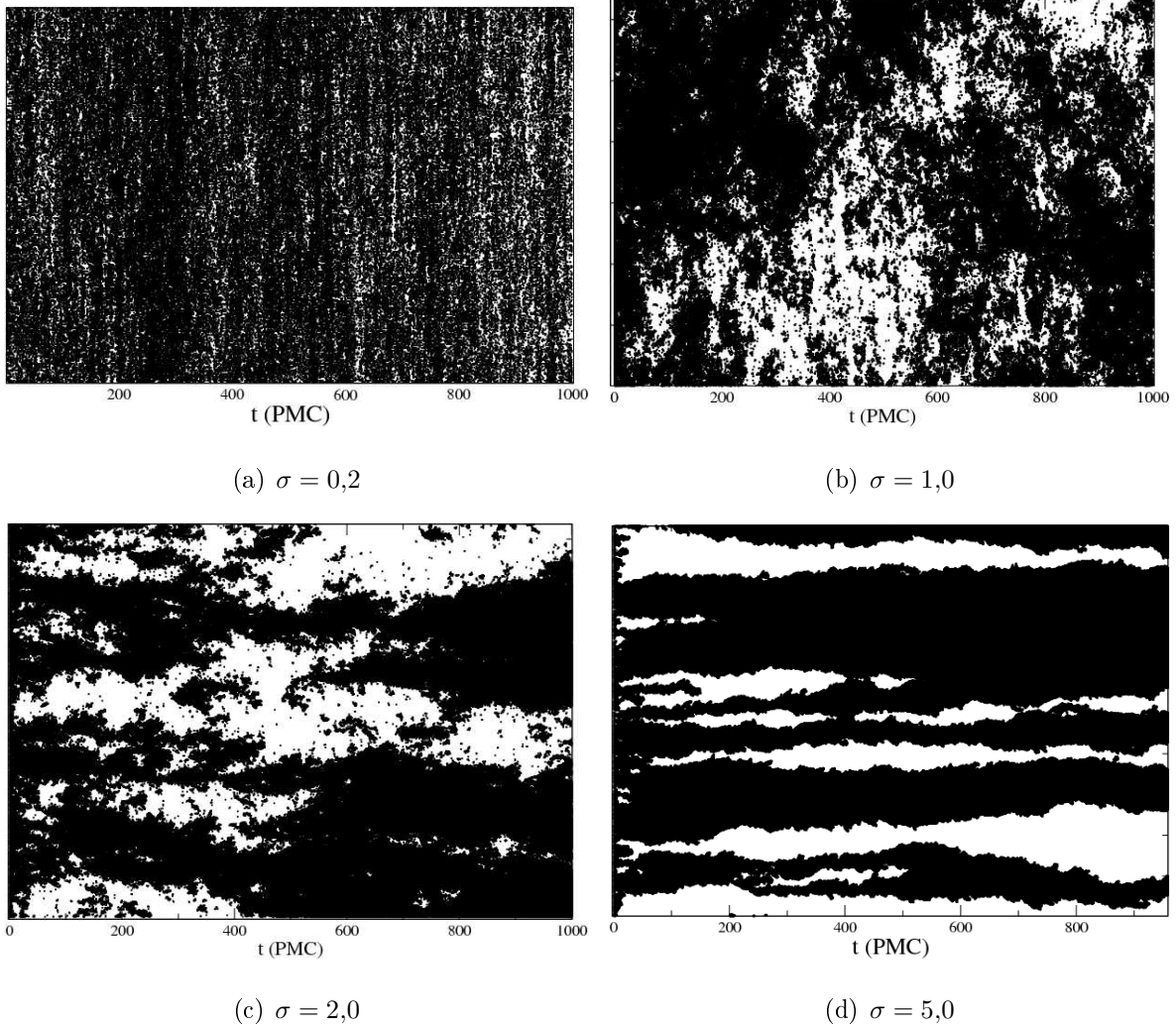


Figura 5.6: Colección de configuraciones del sistema de tamaño $L = 1 \times 10^4$. En el eje vertical puede verse una porción de la red simulada, donde los puntos negros representan sitios en el estado $s_i = 1$, mientras que sitios en el estado $s_i = -1$ se dejan como espacios en blanco. El eje horizontal muestra la evolución temporal de las configuraciones unidimensionales. En cada figura se observa: (a) $\sigma = 0,2$ un régimen lento sin un crecimiento apreciable de dominios en el intervalo de observación; (b) para $\sigma = 1$ un proceso de formación de aglomerados característico de un estado crítico donde se observan tamaños en todas las escalas; (c) $\sigma = 2$ un proceso de ordenamiento con formación de grandes dominios difusos y (d) $\sigma = 5$ un proceso de ordenamiento con formación de dominios compactos.

5.4. Conclusiones

Los resultados descritos en el presente capítulo permiten asegurar que la dinámica mixta que incluye la dinámica de corto alcance del MVE y vuelos de Lévy permite reproducir las características relevantes del modelo Votante-LA. En este sentido se obtuvieron los diferentes regímenes en función del parámetro σ observados en el modelo Votante-LA: a) $\sigma < 1$ el comportamiento tipo campo medio, con una dinámica exponencial para sistemas de tamaño finito, vinculado al MVE en $d > 2$; b) $\sigma = 1$ un ordenamiento logarítmico característico de la dimensión crítica $d_c = 2$ del MVE; c) $\sigma = 2$ un comportamiento intermedio con leyes de potencia cuyo exponente depende de σ y d) $\sigma = 5$ el régimen de corto alcance con una dinámica de orden compatible con el MVE-1D.

Bibliografía

- [1] F.T. Hioe, "Weierstrassian and Lévy Random Walks and the Spherical Model of Ferromagnetism with Long Range Interactions ", AIP Conference Proceeding **109**, 85, edited by M. F. Shlesinger and B. West (1984).
- [2] H. Hinrichsen J. Stat. Mech., **P07006** (2007).
- [3] B. Bergersen and Z. Racz, Phys. Rev. Lett., **67**, 3047 (1991).
- [4] L. Frachebourg and P. L. Krapivsky, Phys. Rev. E, **53**, R3009 (1996).
- [5] I. Dornic , H. Chaté , J. Chave and H. Hinrichsen, Phys. Rev. Lett., **87**, 045701 (2001).
- [6] M. Henkel, H. Hinrichsen and S. Lübeck, "Non-Equilibrium Phase Transitions", **1**, Springer (2008).

Capítulo 6

Estudio de la dinámica crítica del modelo de Ising ferromagnético con vuelos de Lèvy

6.1. Antecedentes

Este capítulo se centra en el estudio del modelo de Ising cinético con intercambios de Lèvy (Ising-GL), el cual fue descrito en la sección 2.3.4. Como antecedente se puede mencionar el modelo propuesto por Droz y colaboradores [1], donde a la dinámica de Glauber generalizada [2] se incorpora un intercambio entre espines ubicados a una distancia seleccionada aleatoriamente utilizando una distribución uniforme entre $1 < r < L/2$, siendo L el tamaño del sistema.

Este modelo, el cual puede ser considerado como variante del modelo de Ising cinético con dinámica mixta [3], presentó un comportamiento crítico consistente con el modelo de Ising dentro de la aproximación de campo medio. A partir de estas evidencias, Bergensen y colaboradores [4] [5] propusieron reemplazar la distribución de distancias aleatoria por una distribución pesada utilizada para simular vuelos de Lèvy (ecuación 2.27). Mediante está dinámica mixta se obtuvieron los mismos exponentes críticos que en el modelo de Ising con interacciones de largo alcance que decaen algebraicamente con la distancia (Ising-LA), estudiado en el capítulo 3. Por otro parte, en los capítulos 4 y 5 se demostró la equivalencia entre el comportamiento dinámico de los modelos de votante con interacciones de largo alcance (Votante-LA) y con dinámica mixta (Votante-Lèvy). Este resultado indica que la introducción de vuelos de Lèvy a la dinámica de corto alcance del modelo de votante estándar permite obtener el comportamiento del modelo con interacciones de largo alcance que decaen en forma algebraica con la distancia. De lo expuesto resulta relevante estudiar la evolución dinámica en el régimen de tiempos cortos del modelo Ising-GL con el objetivo de determinar si la equivalencia observada entre los estados de equilibrio de los modelos Ising-LA e Ising-GL es también obtenida a partir del estudio de la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos. Adicionalmente, de comprobarse dicha equivalencia se vincularían de manera robusta a ambos modelos a una misma clase de universalidad.

6.2. Detalles de las simulaciones

La metodología utilizada en éste estudio, así como el algoritmo implementado, fueron descritos en detalle en el capítulo 2 sección 2.3.4. Las simulaciones Monte Carlo fueron realizadas en redes unidimensionales de tamaños $L = 1 \times 10^5$, $L = 5 \times 10^5$ y $L = 1 \times 10^6$, utilizando condiciones de frontera periódicas. El valor del parámetro que controla el alcance de las interacciones fue fijado en $\sigma = 0,75$, este valor corresponde al régimen intermedio donde los exponentes críticos son funciones dependientes del parámetro σ [6] y fue usado en esta tesis para estudiar el modelo Ising-LA (capitulo 3).

6.3. Resultados y Discusión

Los resultados discutidos en el capítulo 3 indicaron que la dinámica crítica de sistemas con interacciones de largo alcance es afectada por el truncamiento de las interacciones, consecuencia del tamaño finito del sistema, llevando a que las leyes de potencia sean observadas en una temperatura crítica efectiva sin alterar el valor de los exponentes críticos. En consecuencia el primer paso fue obtener las leyes de potencia esperadas en el punto crítico y caracterizar los efectos de tamaño finito de modo sea posible determinar si los mismos afectan a los exponentes críticos del modelo Ising-GL. Finalmente y a partir de estos resultados se determinarán los exponentes críticos.

6.3.1. Determinación del intervalo de validez de las leyes de potencia correspondientes a la dinámica crítica de relajación

Para obtener la temperatura a la cual se observa el comportamiento como ley de potencia en la dinámica crítica de relajación (DCR), se utilizó la misma metodología que el modelo Ising-LA, descrita en el capítulo 3. La figura 6.1 muestra la relajación de la magnetización ($M(t)$) para diferentes temperaturas en la región crítica y para un tamaño de sistema $L = 1 \times 10^6$. En el grafico interior se observan las $d \ln(M(t))/d \ln(t)$ obtenidas en forma numérica para tres de las temperaturas mostradas en el panel principal. A partir del gráfico interior se determinó a la curva correspondiente a $T_c = 1,557(1)$ como aquella que sigue un comportamiento tipo la ley de potencia, es decir muestra una derivada constante de valor $0,20(2)$. Por su parte, desde el mismo grafico se estimó el intervalo de validez de ley de potencia entre 300 PMC (t_{mic}) y 5×10^3 (t_{max}). El último valor relacionado al tiempo para el cual los efectos de tamaño finito desvían todas curvas hacia el estado paramagnético. El análisis anterior fue complementado buscando la curva que mejor ajusta a la ley de potencia dada por la ecuación 2.13. El intervalo de ajuste y el exponente $\beta/\nu z = 0,19(1)$ resultaron consistentes con los previamente determinados. Las barras de error en la temperatura crítica efectiva se determinaron a partir de las curvas que presentan una notable pero pequeña desviación de la ley de potencia. Resulta interesante mencionar que el valor obtenido de T_c no está muy alejado con el valor reportado por Bergensen y colaboradores $T_c = 1,46$ [4]. La discrepancia

podría justificarse por los tamaños utilizados por dichos autores, que fueron casi tres órdenes de magnitud menores a los simulados en la presente tesis.

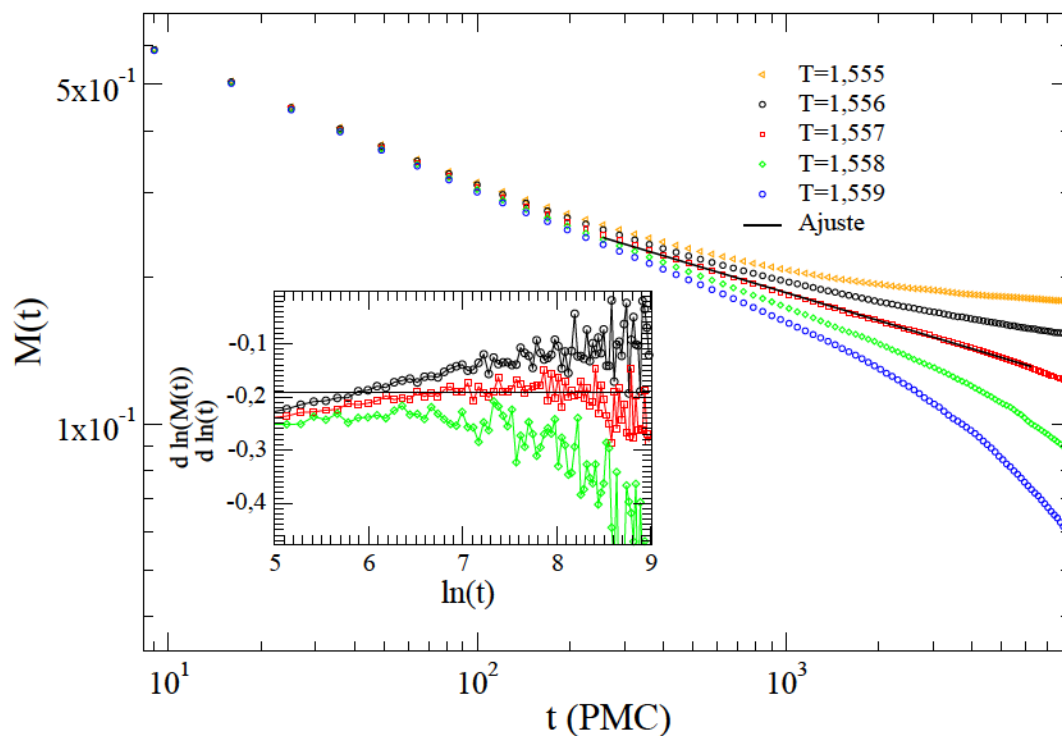


Figura 6.1: Gráfico en escala log-log de la evolución temporal de la magnetización ($M(t)$) partiendo de una configuración inicial ordenada ($M(0) = 1$). Las curvas corresponden a simulaciones realizadas a diferentes temperaturas (indicadas en la leyenda) utilizando un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ espines. La línea continua representa el ajuste mediante la ley de potencia dada por la ecuación 2.13, en el intervalo 300–5000 (PMC). El gráfico interior muestra la $d \ln(M(t))/d \ln(t)$ para tres valores de temperatura en la región crítica. Todas las curvas corresponden a un número de muestras promediadas de 2000.

6.3.2. Los efectos de tamaño finito

Como se mencionó en el capítulo 3, los efectos de tamaño finito en modelos con interacciones de largo alcance se pueden manifestar de diferentes maneras. Por un lado y al igual que sucede en modelos con interacciones de corto alcance, a partir del momento en que la longitud de correlación temporal se hace del orden del tamaño del sistema la dinámica se aparta del comportamiento esperado en el límite termodinámico, causando un rápido decrecimiento de la magnetización hacia el estado paramagnético (ver gráfico

interior de la figura 6.1). Por otro lado, la presencia de interacciones que decaen en forma algebraica con la distancia puede producir un corrimiento de la temperatura a la cual se las leyes de potencia son observadas. En el capítulo 3 se probó que dicho corrimiento es función del alcance real de la interacción (N) el cual es determinado por el truncamiento debido al tamaño finito del sistema. En consecuencia en el caso del modelo Ising-LA se habló de una temperatura crítica efectiva $T_c(N)$. A partir de esto, y con el objetivo de caracterizar los efectos de tamaño finito en el modelo Ising-GL se estudiará la dinámica de relajación para dos tamaños del sistema $L = 5 \times 10^5$ y $L = 1 \times 10^6$, menores que el utilizado previamente $L = 1 \times 10^6$.

Aplicando el procedimiento ya descrito se determinaron las temperaturas críticas efectivas a las que se observan las leyes de potencia, las cuales fueron coincidentes dentro del error con el valor obtenido para el tamaño $L = 1 \times 10^6$ (ver figura 6.1). Por su parte el intervalo de validez de las leyes de potencia se redujo notablemente llegando a ser menor a una década para el caso del tamaño $L = 1 \times 10^5$. Esto último dificultó la determinación de los exponentes críticos para el tamaño menor. Cabe mencionar que la menor sensibilidad de la temperatura crítica con el tamaño podría estar relacionada con dos hechos, por un lado los tamaños estudiados son dos órdenes de magnitud mayores a los estudiados en el caso del modelo Ising-LA con lo cual es posible que la dependencia $T_c(N)$ quede enmascarada por el error. Por otra parte, la evolución temporal del sistema se ve menos afectada debido a que la dinámica de inversión del espín es de corto alcance no siendo truncada por el tamaño finito del sistema y la dinámica de intercambio no depende ni del estado global de la red ni de la temperatura utilizada.

En el caso de los exponentes de las leyes de potencia el solapamiento de las tres curvas de relajación indica que no son afectados. Sumado a esto, el intervalo de validez de la ley de potencia del tamaño $L = 1 \times 10^6$ mayor a una década demuestra que este tamaño es suficientemente grande para obtener los exponentes críticos del modelo Ising-GL. En lo siguiente consideraremos que la temperatura determinada desde la DCR de la magnetización es la temperatura crítica del modelo Ising-GL.

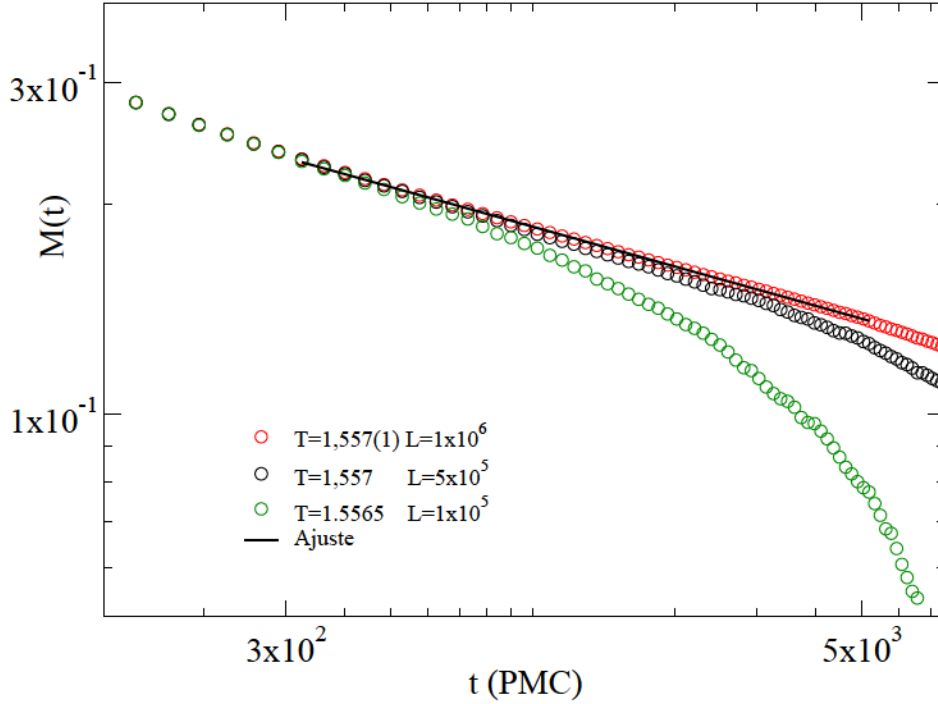


Figura 6.2: Relajación de la magnetización ($M(T)$) a la temperatura crítica, partiendo de una configuración inicial ordenada ($M(0) = 1$). Resultados obtenidos para los diferentes tamaños indicados en la leyenda y un número de configuraciones promediadas de $n_s = 2000$.

6.3.3. Determinación de los exponentes críticos mediante la dinámica de relajación

Una vez determinada la temperatura crítica de cada tamaño y el exponente $\beta/\nu z$ (ver tabla 6.1, columna 1) se midieron para los tamaños mayores el cumulante de Binder de segundo orden ($U(t)$) y la derivada logarítmica de la magnetización respecto a la temperatura reducida calculada en el punto crítico ($d_\epsilon \log(M(t))|_{\epsilon=0}$). El último observable fue obtenido numéricamente utilizando dos temperaturas correspondientes a $T = 1,557 \pm 0,002$. En las figuras 6.3 y 6.4 se muestran $U(t)$ y $d_\epsilon \log(M(t))|_{\epsilon=0}$ para el tamaño 1×10^6 , respectivamente. En las mismas figuras se muestran también con líneas continuas los ajustes con las ecuaciones 2.15 y 2.17 que llevan a obtener los exponentes d/z y $1/\nu z$ mostrados en la tabla 6.1 (columna 1). A partir de estos exponentes se determinaron los exponentes críticos del modelo de Ising-GL indicados en la columna 2 de la misma tabla.

Exponentes de la DCR	Exponentes críticos	Tamaño
$\beta/\nu z = 0,19(1)$	$\beta/\nu = 0,141(8)$	$L = 1 \times 10^6$
$\beta/\nu z = 0,20(2)$	$\beta/\nu = 0,14(2)$	$L = 1 \times 10^5$
$d/z = 1,35(1)$	$z = 0,741(5)$	$L = 1 \times 10^6$
$d/z = 1,40(5)$	$z = 0,71(3)$	$L = 1 \times 10^5$
$1/\nu z = 0,67(1)$	$1/\nu = 0,496(8)$	$L = 1 \times 10^6$
$1/\nu z = 0,73(6)$	$1/\nu = 0,52(4)$	$L = 1 \times 10^5$

Cuadro 6.1: Exponentes de la DCR (primera columna) y exponentes críticos (segunda columna) del modelo de Ising-GL obtenidos a partir de los primeros. Los valores corresponden a los tamaños del sistema $L = 5 \times 10^5$ y $L = 1 \times 10^6$, en ambos casos el número de configuraciones promediadas fue de $n_s = 2000$.

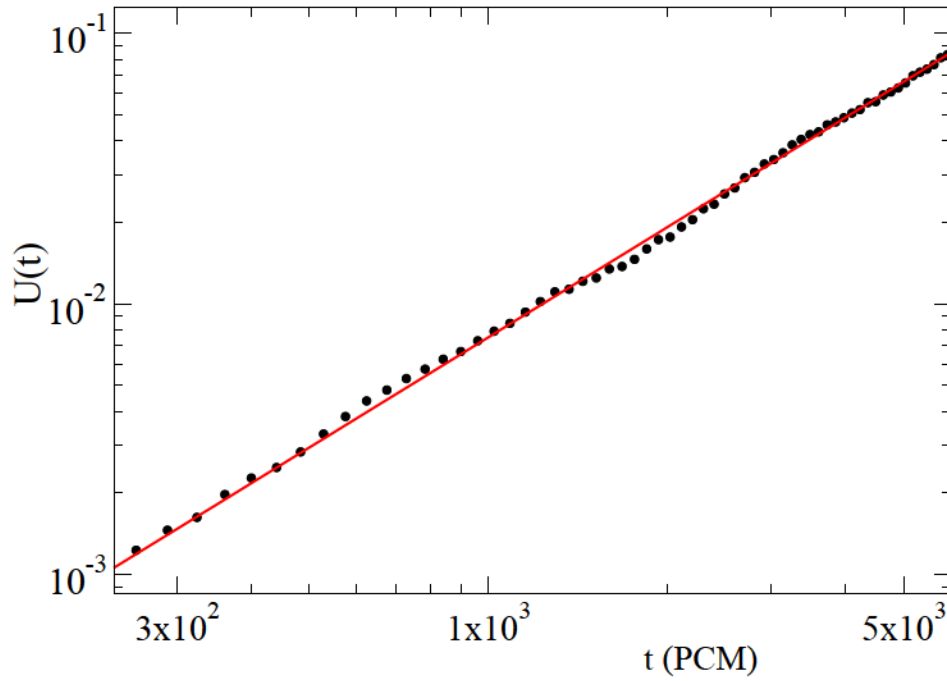


Figura 6.3: Gráfico en escala log-log de la DCR del cumulante de Binder de segundo orden ($U(t)$) a la temperatura crítica ($T_c = 1,557(1)$) para un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ espines. La línea continua indica el ajuste con una ley de potencia de exponente $d/z = 1,35(1)$. Los resultados corresponden a un promedio de 2000 muestras.

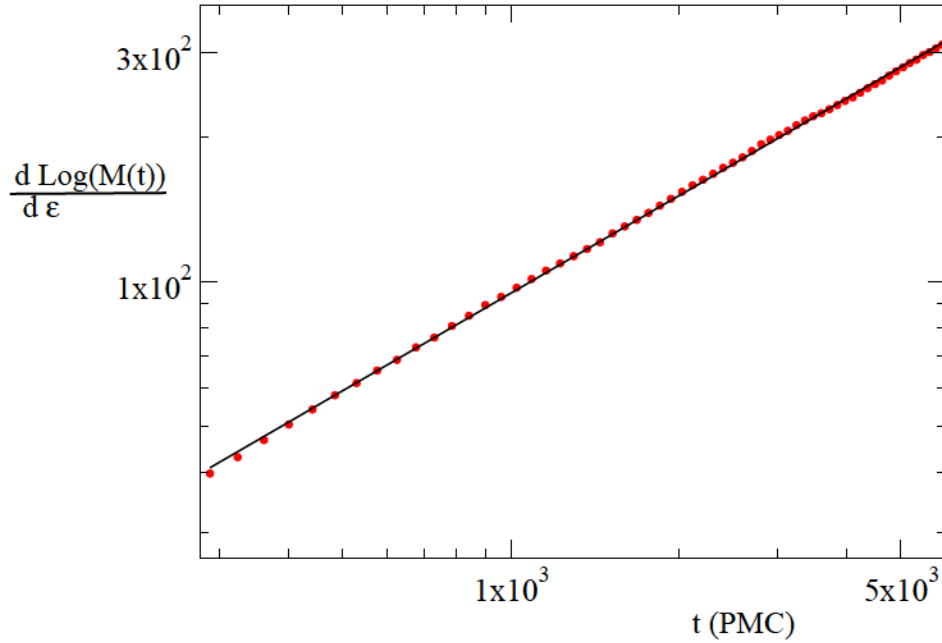


Figura 6.4: Gráfico en escala log-log de la DCR de la derivada logarítmica de la magnetización respecto a la temperatura reducida y evaluada en la temperatura crítica ($T_c = 1,557(1)$) para un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ espines. La línea continua indica el ajuste con una ley de potencia de exponente $1/\nu z = 0,67(1)$. Los resultados corresponden a un promedio de 2000 configuraciones.

6.3.4. Determinación de los exponentes críticos mediante la dinámica de tiempos cortos

De manera complementaria a la DCR, se estudió la dinámica crítica en el régimen de tiempos cortos (DCTC) desde estados iniciales desordenados con magnetización estrictamente nula ($M(0) = 0$), a la temperatura crítica determinada desde la DCR. Los observables medidos fueron la susceptibilidad $\chi(t)$ (ver figura 6.5) y la autocorrelación del espín $A(t)$ (ver figura 6.6) para un tamaño de sistema de 1×10^6 . En las mismas figuras se muestran los ajustes utilizando las leyes de potencia esperadas en la DCTC, ecuaciones 2.19 y 2.21 para $\chi(t)$ y $A(t)$, respectivamente. A partir de estos ajustes se obtuvieron los exponentes $\gamma/\nu z = d/z - 2\beta/\nu z$ y $d/z - \theta$ presentados en la tabla 6.2 (primera columna), donde la primera identidad presupone la validez de la relación de hipercala ($\gamma/\nu = d - 2\beta/\nu$).

Exponentes de la dinámica crítica de tiempos cortos	Exponentes críticos
$d/z - 2\beta/\nu z = 1,02(1)$	$\beta/\nu = 0,11(2)$
$\lambda = \frac{d}{z} - \theta = 1,12(1)$	$\gamma/\nu = 0,77(2)$
$\theta = 0,19(2)$	$z = 0,76(2)$

Cuadro 6.2: La primer columna muestra los exponentes del modelo de Ising-GL correspondientes a la dinámica crítica de tiempos cortos para un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ espines. La segunda columna muestra los exponentes críticos evaluados a partir de

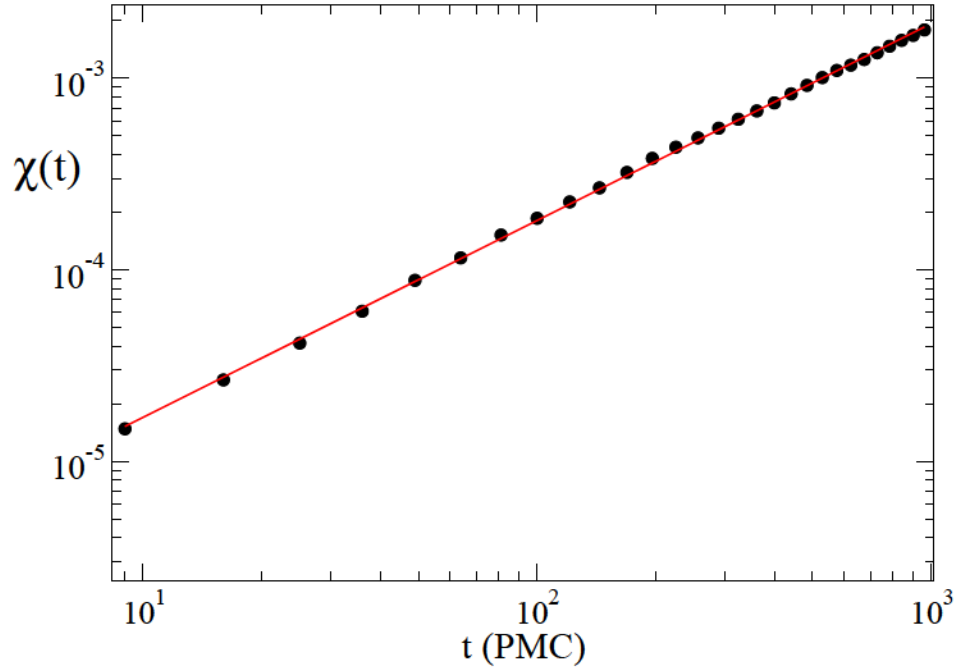


Figura 6.5: Gráfico en escala log-log de la evolución temporal de la susceptibilidad $\chi(t)$ a la temperatura crítica ($T_c = 1,557$) partiendo de un estado desordenado con magnetización nula ($M(0) = 0$). Los datos corresponden a un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ y un promedio de $n_s = 2000$ configuraciones. La línea continua indica el ajuste con la ecuación 2.19 en el intervalo temporal (30 – 700) PMC.

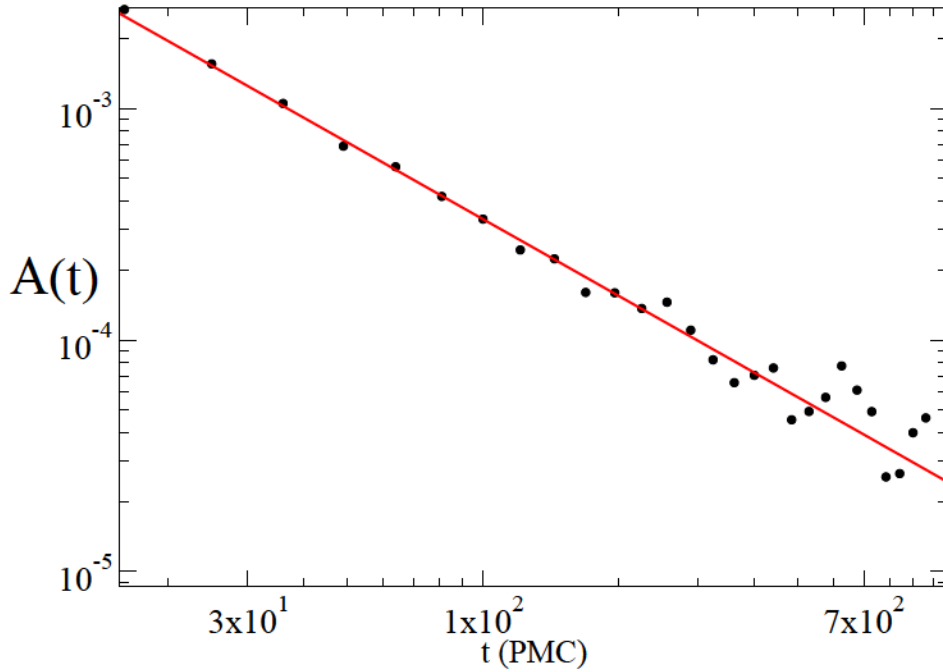


Figura 6.6: Gráfico en escala log-log de la evolución temporal de la autocorrelación del espín ($A(t)$) a la temperatura crítica ($T_c = 1,557$) partiendo de un estado desordenado con magnetización nula ($M(0)=0$). Los datos corresponden a un sistema de tamaño $L = 1 \times 10^6$ y un promedio de $n_s = 2000$ configuraciones. La línea continua indica el ajuste con la ecuación 2.21 en el intervalo temporal (30 – 700) PMC.

Otro observable evaluado en el régimen de tiempos cortos fue la magnetización, a partir de la cual determinamos el exponente θ . Este exponente está asociado al incremento inicial de la magnetización cuando se parte de un estado completamente desordenado ($M(0) = 0$). Como se mencionó en el capítulo 2 para obtenerlo se requiere partir de configuraciones iniciales desordenadas con magnetizaciones próximas a cero y realizar una extrapolación. De esta manera, se obtuvieron leyes de potencia cuyo exponente θ depende de la magnetización inicial M_0 , como puede verse en la figura 6.7, donde también se indican en línea continua los ajustes realizados para distintos valores de M_0 . A su vez en la figura 6.8 se puede ver la extrapolación a $M_0 = 0$ realizada a partir de estos resultados, con la que se obtuvo un exponente $\theta = 0,19(2)$.

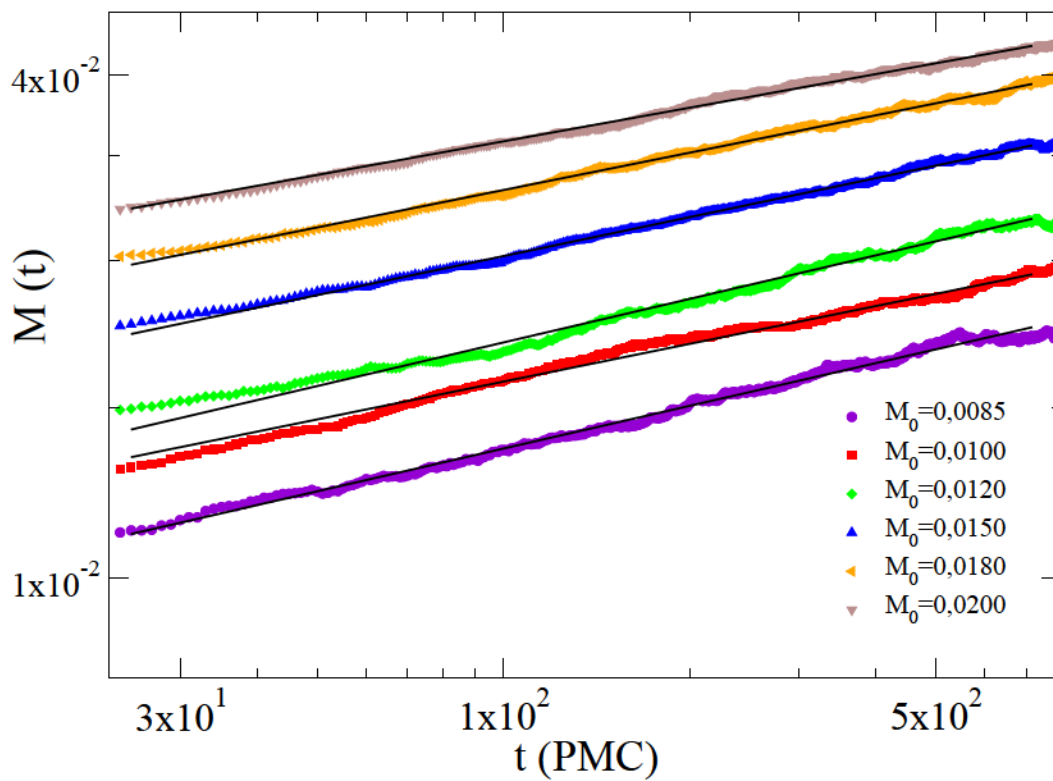


Figura 6.7: Gráficos en escala log-log del incremento inicial de la magnetización evaluado en la temperatura crítica $T_c = 1,557$, correspondientes a distintos valores de magnetización inicial M_0 (indicados en la leyenda). Los datos corresponden a un tamaño de sistema $L = 1 \times 10^6$ y un promedio de $n_s = 2000$ configuraciones. Las líneas continuas indican los ajustes realizados utilizando la ecuación 2.24.

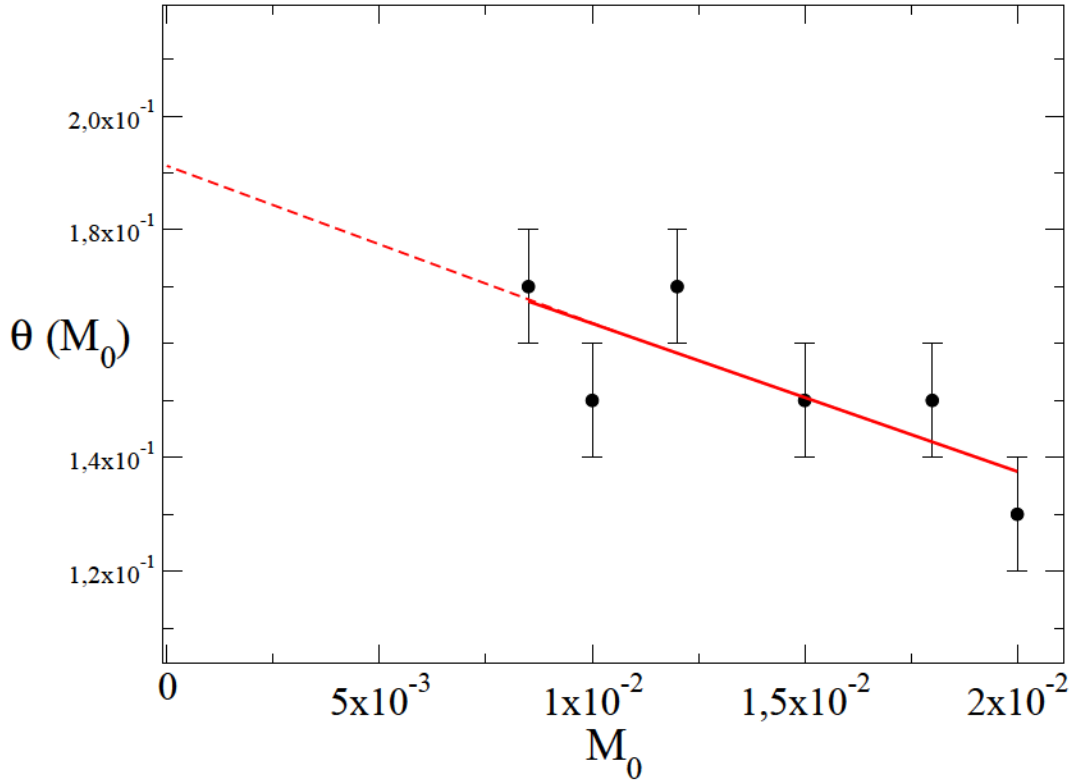


Figura 6.8: Exponentes $\theta(M_0)$ del incremento inicial de la magnetización, evaluado a la temperatura crítica $T_c = 1,557$, para diferentes magnetizaciones iniciales M_0 . La línea continua indica el ajuste lineal que determina el valor del exponente $\theta = 0,19(2)$.

A partir de los exponentes determinados desde la DCTC fue posible calcular de manera independiente el exponente dinámico $z = 0,76(2)$ y la relación $\beta/\nu = 0,11(2)$. Además, usando la relación de hiperscala $d - 2\beta/\nu = \gamma/\nu$ se determinó la relación $\gamma/\nu = 0,77(2)$. Para una mejor exposición los resultados se incluyen en la Tabla 6.2 segunda columna.

Con el objetivo de una comparación más directa en la tabla 6.3 se resumen los exponentes críticos obtenidos en esta tesis para los modelos Ising-LA e Ising-GL junto con los valores reportados por otros autores mediante simulaciones Monte Carlo de equilibrio [4, 7] y cálculos de grupo de renormalización (GR) [7, 8]. Los exponentes críticos obtenidos para el modelo Ising-GL (β/ν , γ/ν y $1/\nu$ están en un buen acuerdo con los correspondientes al modelo Ising-LA, tanto los obtenidos en esta tesis (capítulo 3) como los predichos desde cálculos de GR [7] y los determinados desde simulaciones Monte Carlo de equilibrio (MCE) [7, 8].

Con respecto a los resultados reportados por Bergensen y colaboradores [4] para el Ising-GL se observa una pequeña discrepancia. Sin embargo y como fue mencionado, estos autores obtuvieron los mismos exponentes para el modelo de Ising-LA, en consecuencia consideramos que los valores reportados por dichos autores están subestimados probablemente debido a los tamaños utilizados, tres órdenes de magnitud menores a los usados en esta tesis. En cuanto a los exponentes críticos dinámicos el valor del ex-

ponente θ obtenido para el modelo Ising-GL concuerda con los del modelo Ising-LA dentro de las barras de error y se encuentra próximo a las predicciones de GR. Por su parte el exponente z difiere notablemente del obtenido en esta tesis para el modelo Ising-LA, pero concuerda con el valor de GR. Esto último no es un resultado extraño ya este exponente depende de la dinámica utilizada.

Exp	Ising-GL	Ising-GL	Ising-GL	Ising-LA	Ising-LA	GR
	DCR	DCTC	MCE	DCR	DCTC	
β/ν	0,141(8)	0,11(2)	————	0,109(6)	0,130(9)	0,125 [7]
$1/\nu$	0,496(8)	————	0,54(3)[4]	0,48(2)	————	0,4765 [8]
γ/ν	————	0,77(2)	0,65(3)[4]	————	0,74(1)	0,75 [7]
z	0,741(5)	0,76(2)	————	0,84(2)	0,839(8)	0,775 [8]
θ	————	0,19(2)	————	————	0,201(4)	0,2171[8]

Cuadro 6.3: Exponentes críticos del modelo Ising-GL (2^{da} y 3^{ra} columna) e Ising-LA (5^{ta} y 6^{ta} columna), obtenidos en la presente tesis mediante estudios de la dinámica crítica. La tabla también incluye los resultados de simulaciones Monte Carlo en Equilibrio (MCE) para el modelo Ising-GL (4^{ta} columna) tomados de la referencia [4] y las predicciones de Grupo de Renormalización (GR) para el modelo de Ising-LA (7^{ma} columna) [7, 8]

6.4. Conclusiones

A partir de la obtención de leyes de potencia en ambas dinámicas críticas (DCR y DCTC) a la misma temperatura, se verifico la presencia de una transición de fase continua en el modelo Ising-GL. Los correspondientes exponentes críticos β/ν , $1/\nu$ y γ/ν fueron consistentes entre si (ver Tabla 6.3) y están en buen acuerdo con los valores obtenidos para el Ising-LA, tanto en esta tesis (capítulo 3), como con las predicciones de Grupo de Renormalización (TGR) y simulaciones Monte Carlo en estados de equilibrio (MCE) [7, 8]. Para calcular el exponente β/ν se utilizó la relación de hiperescala ($d - 2\beta/\nu = \gamma/\nu$), por lo que su acuerdo verifica también dicha relación para este modelo. En cuanto a los exponentes críticos dinámicos el valor de θ obtenido para el modelo Ising-GL concuerda con los resultados del modelo Ising-LA dentro de las barras de error, como se puede ver en la Tabla 6.3. Mientras que para el exponente z se observó por un lado un buen acuerdo con el resultado de GR para el modelo Ising-LA, pero discrepancias con los resultados provenientes de los estudios dinámicos (capítulo 3). Esto último no es un resultado extraño ya este exponente depende de la dinámica utilizada.

De lo expuesto hemos establecido que los modelos Ising-LA e Ising-GL pertenecen a la misma clase de universalidad para el valor del parámetro de control del alcance de las interacciones estudiado $\sigma = 0,75$.

Bibliografía

- [1] M. Droz, Z. Rácz, and P. Tartaglia, Phys. Rev. A, **41** 6621 (1990)
- [2] R. J. Glauber, J. Math. Phys., **4** 294 (1963) .
- [3] P. L. Garrido, J. Marro and J. M. Gonzalez-Miranda, Phys. Rev. A, **40**, 5802 (1989).
- [4] B. Bergensen and Z. Rácz, Phys. Rev. Lett., **67** 22 (1991)
- [5] H-J Xu and B. Bergensen, Z. Rácz, Phys. Rev. E, **47** 3 (1993)
- [6] M. E. Fisher, S-k. Ma, and B. G. Nickel, Phys. Rev. Lett., **29**, 917 (1972); resultado reproducidos independientemente también por M. Suzuki, Y. Yamazaki, and G. Igarashi, Phys. Lett., **42A**, 313 (1972)
- [7] K. Binder and E. Luijten, Phys. Rep., **344** 179 (2001)
- [8] Y. Chen, S. H. Guo, Z. B. Li, S. Marculescu and L. Schuelke, Eur. Phys. J. B, **18** 289 (2000)

Capítulo 7

Conclusiones Generales

7.0.1. Sobre la dinámica de modelos con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia

En los dos primeros capítulos de esta tesis se estudió la dinámica de modelos los de Ising y Votante con interacciones de largo alcance que decaen de manera algebraica con la distancia. En el primer modelo (Ising-LA), para la constante de acoplamiento $J(r) \sim 1/r^d + \sigma$, tomamos el valor de $\sigma = 0,75$ como representante de la región no clásica. Para este valor se obtuvieron los exponentes críticos β, ν, γ así como el exponente dinámico θ , todos en buen acuerdo con los obtenidos por otros autores mediante simulaciones Monte Carlo de equilibrio y cálculos de Grupo de Renormalización (GR). De esta manera se comprobó la validez del estudio de las dinámicas críticas de relajación (DCR) y de tiempos cortos (DCTC), como un métodos alternativo para obtener los exponentes críticos del modelo. Método que tiene como ventaja, frente a una simulación Monte Carlo de equilibrio, el encontrarse libre del efecto de enlentecimiento crítico.

A su vez, observamos que las leyes de potencia que determinan los exponentes de la dinámica crítica se obtuvieron para valores de temperatura crítica "efectiva" dependientes del el alcance de las interacciones (N), determinado por el truncamiento de las mismas debido al tamaño finito de los sistemas simulados. Observación que no había sido reportada hasta la presente tesis por estudios anteriores de la dinámica crítica de este modelo. Respecto a éste resultado, se supuso que la dependencia de la temperatura crítica efectiva con el alcance se debe a que el truncamiento de la interacción afecta necesariamente la probabilidad de transición de la dinámica implementada. Esto se debería a que en estos casos la probabilidad de transición siempre difiere entre sistemas con distintos alcance N al estar truncado el calculo de energía. De manera que en modelos con interacciones de largo alcance, variar el valor de la temperatura de simulación permite compensar los efectos causados por el truncamiento en el alcance de la interacción en la dinámica. Basados en esta suposición los distintos valores de temperatura crítica efectiva fueron ajustados satisfactoriamente con la relación de escala $T(N) = T(\infty) + A/N^{x_T}$, con un exponente $x_T = 1/\nu$. El valor para x_T se propuso en analogía con el escaleo de tamaño finito, al considerar el caso particular en que alcance N toma su valor máximo $N_{max} = L/2$ donde el truncamiento se produce como un efecto de tamaño finito y se espera que dicha relación se corresponda con la que satisface

la temperatura crítica efectiva en una simulación en equilibrio. En este sentido, queda planteado como un objetivo futuro el que dicha relación sea verificada para otros valores de σ tanto en la región no clásica como en la región de campo medio ($\sigma \leq 0,5$) donde se espera un exponente $x_T = 1/\nu = \sigma$.

Para el modelo de Votante se implementaron interacciones de largo alcance probabilísticas utilizando una distribución de distancias dada por $P(r) \sim 1/r^{d+\sigma}$ (Votante-LA). En este caso se realizó un estudio sobre la dependencia de la dinámica fuera de equilibrio en función de σ . A partir de los resultados obtenidos fue posible determinar para una red unidimensional mediante estudios independientes, los distintos comportamientos en la dinámica fuera de equilibrio del modelo Votante Estándar (MVE): i) para $\sigma \geq 5$ una dinámica de ordenamiento equivalente a la del MVE en $d = 1$; ii) para $\sigma = 1$ una dinámica de ordenamiento consistente con la dimensión crítica del MVE ($d_c = 2$) y iii) para $0 < \sigma < 1$ estados estacionarios que se ordenan por efecto de tamaño finito consistentes con el MVE para $d > 2$. En particular los resultados obtenidos en la región intermedia ($1 \leq \sigma \leq 5$) resultan de especial interés. El caso $\sigma = 1$ debido a que reprodujo los aspectos mas relevantes observados en la dimensión crítica del MVE, como son una dinámica de ordenamiento con dependencia logarítmica y una distribución de tamaños de dominios invariante de escala. Por otra parte la región $1 < \sigma \leq 2$ se observa además de la invariancia de escala en la distribución de tamaños de dominios una dinámica de ordenamiento como ley de potencia con exponentes dependientes de σ , comportamiento que ha sido observado en dimensiones fractales $1 < d_f < 2$.

7.0.2. El uso de vuelos de Lèvy para simular la dinámica de modelos con interacciones que decaen de manera algebraica con la distancia.

En una segunda etapa se estudiaron los modelos Votante-Lèvy e Ising-GL, ambos modelos de dinámica mixta, una de corto alcance (Votante o Glauber, respectivamente) y otra dinámica de largo alcance entendida como un vuelo de Lèvy. De los resultados obtenidos podemos concluir que este mecanismo para generar interacciones globales efectivas resulto ser válido en los dos modelos estudiados.

Para el caso del modelo Votante-Lèvy, la correspondencia observada con el comportamiento dinámico del Votante-LA, se demostró para valores de σ representativos de cada régimen. Pudiéndose identificar para los valores: $\sigma = 0,2$; $\sigma = 1,0$; $\sigma = 2,0$ y $\sigma = 5,0$, las mismas dinámicas de ordenamiento observadas en el Votante-LA. A su vez, para estos casos, tanto la dependencia del tiempo de vida τ con el tamaño, como las estructuras espacio-temporales del sistema resultaron ser consistentes con lo observado en el Votante-LA. Cabe mencionar que los resultados obtenidos para los valores $\sigma = 1$ y $\sigma = 2$ cobran relevancia ya que representan los valores umbrales que delimitan la región de comportamiento intermedio donde existe una fuerte dependencia de la dinámica con σ , de manera que la correspondencia mencionada para estos valores nos permite suponer que la validez ocurre para todo el intervalo.

Por otra parte para el caso del modelo de Ising fue posible obtener a partir del

estudio de las dinámicas DCR y DCTC para el caso $\sigma = 0,75$ los exponentes críticos del modelo Ising-LA. Lo que permite afirmar que este algoritmo de dinámica mixta emula el comportamiento crítico fuera de equilibrio del modelo Ising-LA. Por otra parte la temperatura crítica resultó ser poco sensible al tamaño del sistema, aspecto que resulta ser una ventaja a la hora de identificar el punto crítico. Esta característica suponemos que se debe a que la dinámica implementada no implica truncar una suma global como el caso anterior. Sin embargo para confirmar esta suposición resulta necesario en el futuro estudiar con mayor detalle los efectos en la dinámica del truncamiento de los vuelos para un tamaño fijo. La equivalencia demostrada abre la posibilidad de implementar la dinámica mixta para estudiar el comportamiento crítico en mayores dimensiones o en modelos de mayor complejidad, como por ejemplo el modelo de Potts, de Heisenberg, XY, etc.

Finalmente como conclusión general podemos afirmar que la presencia de interacciones de largo alcance propuestas en esta tesis, en los dos modelos Votante-LA e Ising-LA, permitió obtener en una región intermedia entre campo medio y corto alcance, un comportamiento dinámico caracterizado por leyes de potencia con exponentes dependientes del valor de σ . Por otro lado se verificó que mediante la incorporación de vuelos de Lévy sobre los dos tipos de dinámicas de corto alcance (Ising-Glauber y Votante Estándar), fue posible reproducir satisfactoriamente el comportamiento fuera de equilibrio asociado a los respectivos modelos con interacciones de largo alcance.