Facultad de Ciencias Exactas

**UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA**

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - ÁREA MATEMÁTICA
**SINGULARIDADES EN ECUACIONES
DIFERENCIALES IMPLÍCITAS: APLICACIONES A
CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

Diana Leonor Kleiman

Directora: Dra. María del Rosario Etchehoury

AÑO 2015

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	3
1.1. Comunicaciones a congresos ligadas a la tesis.	3
1.2. Contenido de la tesis.	3
2. ALGORITMOS DE RESTRICCIONES	9
2.1. Ecuación Diferencial Implícita Cuasilineal. Conjunto singular.	10
2.2. Algoritmo de restricciones regular.	12
2.3. Algoritmo de restricciones singular.	13
3. APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS DE RESTRICCIONES A CIRCUITOS ELÉCTRICOS	17
3.1. Circuitos eléctricos: elementos y dinámica.	18
3.2. Circuito LC lineal. Aplicación del algoritmo de restricciones regular.	21
3.3. Circuito RCL no lineal. Aplicación del algoritmo de restricciones singular.	27
4. EXISTENCIA DE PUNTOS DE IMPASSE Y PUNTOS DE CRUCE	33
4.1. Puntos de impasse y puntos de cruce.	33
4.2. Singularidades esenciales o no esenciales.	39
5. ANÁLISIS DE PUNTOS DE IMPASSE Y PUNTOS DE CRUCE EN CIRCUITOS NO LINEALES	43
5.1. Circuito RCL no lineal: puntos de impasse y puntos de cruce.	43
5.2. Circuito RC no lineal: puntos de impasse y puntos de cruce.	56
6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	71
A. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.1.1	73

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Comunicaciones a congresos ligadas a la tesis.

- a - **Etchehoury M., Gonzalez C. y Kleiman D.** *Ecuaciones diferenciales implícitas: aplicación a circuitos LC*. IV Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial -MACI-. Actas del IV Congreso MACI Vol.4 pp.81-84 (2013)
- b - **Kleiman D., Etchehoury M. y Puleston P.** *Análisis de Puntos de Impasse en un Circuito RLC no Lineal*. UMA, Unión Matemática Argentina, LXIII Reunión de Comunicaciones Científicas. (2014)
- c - **Kleiman D. y Etchehoury M.** *Singularidades en un circuito con resistor no lineal y capacitores*. Actas del V Congreso MACI (2015)

1.2. Contenido de la tesis.

Una ecuación diferencial ordinaria -EDO- de primer orden, definida sobre una variedad M de dimensión m , puede representarse como:

$$\phi(x, \dot{x}) = 0, \tag{1.1}$$

siendo $\phi: TM \rightarrow F$ una función, TM el fibrado tangente a M y consideraremos a F como un espacio vectorial de dimensión m ; la función $x: I \rightarrow M$, con I un intervalo real abierto, es tal que $x(t)$ es diferenciable para todo $t \in I$ y $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$.

Una *curva solución* de (1.1) es una función $x: I \rightarrow M$, con I un intervalo real abierto, diferenciable en I y tal que $(x(t), \dot{x}(t))$ satisface la ecuación (1.1) para todo $t \in I$.

En general, las EDOs se pueden llamar *ecuaciones diferenciales implícitas* -EDIs-. Si ϕ es suficientemente suave y un punto $x_0 \in M$ es tal que $\text{rg } D_v\phi(x_0, v) = m$, es posible encontrar una EDO *explícita* localmente equivalente de la forma

$$\dot{x} = \phi_1(x),$$

donde $\phi_1: U_{x_0} \rightarrow F$ siendo U_{x_0} un entorno de x_0 [1]. Llamaremos *puntos singulares* de una EDI a los $x \in M$ tales que $\text{rg } D_v\phi(x, v) < m$.

Las EDIs aparecen frecuentemente en diferentes ciencias. Un gran número de trabajos sobre EDIs han sido motivados por aplicaciones en *teoría de circuitos* [2], [3]. En este contexto como en otros, las EDIs se conocen como *ecuaciones diferenciales algebraicas* -EDAs-. La forma diferencial-algebraica de las ecuaciones de un circuito se debe de manera natural a la combinación de ecuaciones diferenciales con relaciones algebraicas, donde estas últimas modelan las leyes de Kirchhoff.

Asimismo, siendo que el enfoque numérico enriqueció el análisis en muchos campos, consideramos que su aplicación también es relevante en el estudio de las EDIs [4], [5].

El objetivo principal de esta tesis es aplicar resultados de la teoría de EDIs al análisis de distintos modelos de circuitos eléctricos [6], [7], [8]. Dentro de estos modelos existen redes eléctricas lineales y no lineales. Para el caso de los circuitos lineales, se ha desarrollado una amplia teoría vinculada a las EDIs lineales que puede utilizarse para su estudio [9], [10]. En cambio, cuando se trabaja con circuitos no lineales, particularmente, en el estudio de cierto tipo de singularidades que aparecen en ellos, la teoría de EDIs no resulta tan amplia como para poder abordar el análisis de las distintas clases de redes eléctricas. Es básicamente por esta razón que en nuestro trabajo nos enfocaremos, principalmente, en explorar la teoría de EDIs no lineales, para luego, aplicarla a algunas familias de circuitos eléctricos no lineales.

En la Sección 2.1 -Capítulo 2- definiremos la *ecuación diferencial implícita cuasilineal* -EDICL- y mostraremos que una EDI siempre puede escribirse

como una EDICL. Esto nos permitirá, sin pérdida de generalidad, aplicar resultados teóricos recientes sobre EDICLs[11].

En las Secciones 2.2 y 2.3 presentaremos dos *algoritmos de restricciones* ya conocidos en la literatura, que llamaremos *algoritmo regular* [12] y *algoritmo singular* [13]. Ambos algoritmos se aplican a una EDI con el objetivo de hallar una EDI equivalente a la dada, restringida a un dominio en el cual pueda garantizarse existencia de solución. En el caso del algoritmo regular se pedirán ciertas hipótesis de regularidad que no serán necesarias en el caso del algoritmo singular; en este último se utilizará una técnica llamada de *desingularización*, que permitirá aplicar el algoritmo, aun en los pasos donde las hipótesis de regularidad no se cumplan.

En la Sección 3.1 -Capítulo 3- definiremos algunas nociones básicas de circuitos eléctricos, de sus elementos y dinámica [2], las cuales utilizaremos a lo largo del trabajo.

En la Sección 3.2 estudiaremos la dinámica de un circuito eléctrico genérico LC lineal, compuesto por inductores (L) y capacitores (C), modelado a través de ecuaciones diferenciales implícitas. En este modelo intervienen el Lagrangiano del sistema, un subespacio lineal que representa las leyes de Kirchhoff para las corrientes y su subespacio anulador que representa las leyes de Kirchhoff para los voltajes.

Como primer aporte original de la tesis aplicaremos el algoritmo de restricciones regular para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas, equivalente a las ecuaciones diferenciales implícitas originales, referencia en 1.1.a. El nuevo sistema, restringido a un subespacio final de restricciones, cumple con la condición de que sus curvas solución están contenidas en dicho subespacio.

Ilustraremos los resultados obtenidos con un ejemplo concreto.

En la Sección 3.3 presentaremos un circuito genérico RCL no lineal, compuesto por resistor (R), capacitor (C) e inductor (L). Aplicaremos la técnica del algoritmo singular para obtener un sistema equivalente definido sobre una variedad de dimensión menor que la del dominio original y, donde puede garantizarse existencia de solución.

Ciertos problemas de valores iniciales vinculados con la existencia y la extensión de soluciones en algunos puntos singulares no pueden ser estudiados con los algoritmos mencionados antes. En el Capítulo 4 consideraremos resultados sobre existencia y extensión de soluciones de ciertas EDICLs en dos tipos de puntos singulares: puntos de impasse y puntos de cruce.

Un *punto de impasse* es un punto singular en el cual una solución colapsa en tiempo finito con velocidad infinita, a esta curva se la llama *solución de impasse*. Más específicamente, si la curva “llega” al punto se llama *punto de impasse de entrada* y, si “sale” del punto, *punto de impasse de salida*.

Un *punto de cruce* es un punto singular por el cual pasa al menos una curva solución, a la curva se la llama *solución de cruce* [14].

En la Figura 1.1 mostramos un esquema donde A es un punto de impasse de entrada, B es un punto de impasse de salida y C es un punto de cruce.

Figura 1.1: Puntos de impasse y punto de cruce.

Presentamos a continuación un ejemplo para ilustrar algunos de los conceptos anteriores.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} (x_1 + x_2)\dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases} . \quad (1.2)$$

La forma matricial correspondiente es

$$a(x)\dot{x} = f(x)$$

donde

$$a(x) = a(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (v_1, v_2)^t$, para la EDI equivalente

$$\phi(x, \dot{x}) = a(x)\dot{x} - f(x) = 0 \quad \text{con } x \in M = \mathbb{R}^2,$$

tenemos

$$\phi(x, v) = a(x)v - f(x) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)v_1 - x_1 \\ v_2 + 1 \end{pmatrix},$$

entonces resulta

$$D_v\phi(x, v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de los puntos singulares es

$$M_s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$$

ya que en esos puntos $\text{rg } D_v\phi(x, v) = 1 < \dim \mathbb{R}^2$.

Las soluciones en $\mathbb{R}^2 - M_s$ son de la forma

$$\begin{cases} x_1(t) = t \pm \sqrt{t^2 - C} \\ x_2(t) = -t \end{cases}.$$

Para $C < 0$ resultan soluciones que nunca se aproximan a M_s .

Para $C > 0$, $t > \sqrt{C}$ resultan soluciones que tienen un punto de impasse de salida en $(\sqrt{C}, -\sqrt{C})$.

Para $C > 0$, $t < -\sqrt{C}$ resultan soluciones que tienen un punto de impasse de entrada en $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$.

Para $C = 0$ se obtienen cuatro soluciones, que combinándolas de manera adecuada dan lugar a dos soluciones de cruce: $t \mapsto (0, -t)$ y $t \mapsto (2t, -t)$.

Mostramos en la Figura 1.2, algunas soluciones de impasse y dos soluciones de cruce del sistema.

Figura 1.2: Soluciones del sistema (1.2).

En el Capítulo 4 mostraremos aplicando los resultados teóricos que hay exactamente dos soluciones de cruce por el punto $(0, 0)$ y que todos los demás

puntos singulares son puntos de impasse.

En el Capítulo 5 encontraremos condiciones para la existencia de puntos de impasse y puntos de cruce. En la Sección 5.1 lo haremos para la red genérica RCL no lineal presentada en la Sección 3.3, referencia en 1.1.b y en la Sección 5.2 para un circuito RC compuesto por un resistor (R) genérico no lineal y dos capacitores (C), referencia en 1.1.c. En ambos casos ilustraremos con ejemplos concretos.

Según Chua [15], los puntos de impasse en un circuito indican que el modelo del circuito es defectuoso y debe ser remodelado utilizando capacitores o inductores parásitos; y, además, cuando se intenta resolver el sistema con métodos numéricos, las soluciones pueden oscilar cerca de los puntos de impasse. Luego, es muy importante conocer un método analítico para hallar los puntos de impasse. Se conocen resultados generales que dan respuesta a la existencia de puntos de impasse o de cruce para una EDICL dada [11], [15], [16] pero, los que hemos obtenido para las redes RCL y RC permiten encontrarlos de una forma extremadamente sencilla: calculando las derivadas de una cierta función que se obtiene a partir de los datos del circuito. Es importante remarcar, que en la literatura se encuentran resultados vinculados a la existencia de puntos de impasse para circuitos eléctricos no lineales [15] [16]. Sin embargo, en el estudio de la dinámica de los circuitos RCL y RC también hemos detectado la existencia de puntos de cruce, lo que implica que existen curvas solución que llegan al conjunto singular pero continúan sin inconveniente alguno.

Cabe resaltar que todos los resultados de este capítulo constituyen los otros aportes originales de la tesis.

Capítulo 2

ALGORITMOS DE RESTRICCIONES

En este capítulo definiremos las Ecuaciones Diferenciales Implícitas Cuasilineales -EDICLs- y demostraremos que no perderemos generalidad al trabajar con ellas. Definiremos también el conjunto singular de una Ecuación Diferencial Implícita -EDI- y encontraremos, a partir de esa definición, el conjunto singular de una EDICL.

En la teoría de EDIs cuestiones básicas tales como existencia, unicidad o extensión de soluciones para una condición inicial dada no han sido aún completamente resueltas, a pesar de que se han establecido varios resultados parciales para ciertas clases de EDIs [13].

Para una EDICL y una condición inicial en el conjunto singular, un camino a seguir es la utilización de dos *algoritmos de restricciones* ya conocidos, que llamaremos por simplicidad *regular* y *singular*, aunque esta no sea una nomenclatura estándar en la literatura. En el caso regular [12] se trabaja en el contexto $\mathcal{C}^\infty$ mientras que en el caso singular, desarrollado en [13], en el contexto analítico. Daremos una breve descripción de ambos algoritmos, los cuales permiten encontrar un dominio donde se garantiza existencia de solución, inclusive por puntos donde el dominio no es suave. En el capítulo siguiente aplicaremos estos algoritmos a circuitos eléctricos.

2.1. Ecuación Diferencial Implícita Cuasilineal. Conjunto singular.

Ecuación diferencial implícita cuasilineal. Sea M una variedad de dimensión m y F un espacio vectorial de dimensión m . Sea $a : TM \rightarrow F$ una aplicación suave tal que $a(x, \dot{x}) \equiv a(x)\dot{x}$ es lineal en $\dot{x}$. Sea $f : M \rightarrow F$ una aplicación suave dada.

Una *ecuación diferencial implícita cuasilineal* -EDICL- tiene la forma

$$a(x)\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

La EDI (1.2) correspondiente al Ejemplo 1.2.1 es una EDICL pues puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reducción de una EDI general a una EDICL. Es fácil ver que una EDI general del tipo (1.1) donde la aplicación $\phi : TM \rightarrow F$ puede ser no lineal en $\dot{x}$, no es mucho más general que una ecuación cuasilineal del tipo (2.1). En efecto, supongamos, por simplicidad, que M es un subconjunto abierto de un espacio vectorial E de dimensión finita. Una EDI del tipo (1.1) se puede reescribir en la forma (2.1) con dominio $M \times E$ e imagen $E \times F$ así:

$$\dot{x} = u, \quad 0 = \phi(x, u),$$

que tiene la forma (2.1) si consideramos

$$a(x, u) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{pmatrix} u \\ \phi(x, u) \end{pmatrix}.$$

Sistema lineal algebraico asociado a la EDICL. Dada una EDICL del tipo (2.1) se tiene inmediatamente un *sistema lineal algebraico*, para cada $x \in M$, que depende de manera suave sobre x ; la incógnita del sistema lineal es el vector $\dot{x}$, con base en x , para cada $x \in M$.

EDICL de rango localmente constante. Consideramos la ecuación (2.1), y supongamos que el sistema lineal algebraico asociado tiene solución $\dot{x}$ para cada $x \in M$. Entonces podemos pensar que (2.1) define una distribución afín, en general singular, sobre M . Si además, $\text{rg } a(x) = \text{rg } (a(x) \ f(x))$ es

localmente constante, es decir, es constante sobre cada componente conexa de M , entonces la ecuación (2.1) se dice que es de *rango localmente constante*. Esto es equivalente a decir que la correspondiente distribución afín tiene *rango constante* sobre cada componente conexa de M .

Curva solución de una EDICL. Estableceremos ahora el concepto de *curva solución* de una EDICL pero admitiendo que su dominio pueda ser un intervalo abierto, semiabierto o cerrado.

Definición 2.1.1. Una curva $x: I \rightarrow M$ con I un intervalo real, $I = (t_0, t_1)$, $I = (t_0, t_1]$, $I = [t_0, t_1)$ o $I = [t_0, t_1]$, es solución de (2.1) si $x(t)$ es una función continua en I , diferenciable en el interior de I y $(x(t), \dot{x}(t))$ satisface la ecuación, para todo t en el interior de I . Además, si $t_0 \in I$ entonces $(x(t_0), \dot{x}(t_0^+))$ satisface la ecuación y si $t_1 \in I$ entonces $(x(t_1), \dot{x}(t_1^-))$ satisface la ecuación; siendo $\dot{x}(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ y $\dot{x}(t_1^-) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}$.

Conjunto singular de una EDI. Dada una EDI definida sobre una variedad M de dimensión m

$$\phi(x, \dot{x}) = 0,$$

donde ϕ es una función suficientemente suave, $\phi: TM \rightarrow F$ con TM el fibrado tangente a M y F , un espacio vectorial de dimensión m ; decimos que un punto $x \in M$ es un punto singular de la EDI si $\text{rg } D_v \phi(x, v) < m$.

Al conjunto de los puntos singulares lo llamamos *conjunto singular* y lo notamos M_s , es decir:

$$M_s = \{x \in M : \text{rg } D_v \phi(x, v) < m\}.$$

Conjunto singular de una EDICL. Considerando la ecuación

$$\phi(x, \dot{x}) = a(x)\dot{x} - f(x) = 0 \text{ con } x \in M,$$

que es equivalente a la EDICL (2.1), tenemos que

$$\phi(x, v) = a(x)v - f(x) \text{ y } D_v \phi(x, v) = a(x).$$

Luego, el conjunto singular de la EDICL (2.1) es

$$M_s = \{x \in M : \text{rg } D_v \phi(x, v) < m\} = \{x \in M : \text{rg } a(x) < m\}.$$

2.2. Algoritmo de restricciones regular.

El algoritmo de restricciones regular permite calcular una variedad maximal de condiciones iniciales, donde se puede garantizar existencia de solución de una EDI dada, para cada condición inicial sobre tal variedad. Al mismo tiempo se obtiene una EDO explícita que restringida a esta variedad, resulta equivalente a la EDI original.

Descripción del algoritmo. Consideremos una EDICL del tipo (2.1) y sea $x(t)$ una curva solución dada, entonces para cada t , el sistema lineal algebraico asociado tiene al menos una solución $v(t) = \dot{x}(t)$. Esto implica que para cada t , $x(t)$ debe pertenecer al subconjunto

$$M_1 = \{x \in M \mid a(x)v = f(x) \text{ tiene al menos una solución } v \in T_x M\}.$$

Supongamos que M_1 es una subvariedad de M . Como $x(t) \in M_1$, para todo t , debe cumplirse que $\dot{x}(t) \in T_{x(t)}M_1$, para todo t . Esto implica que, para cada t , $x(t)$ debe pertenecer al subconjunto

$$M_2 = \{x \in M_1 \mid a(x)v = f(x) \text{ tiene al menos una solución } v \in T_x M_1\}.$$

Se puede continuar de modo similar y definir M_{k+1} recursivamente así,

$$M_{k+1} = \{x \in M_k \mid a(x)v = f(x) \text{ tiene al menos una solución } v \in T_x M_k\},$$

bajo la hipótesis que M_k es una subvariedad para $k = 1, 2, \dots$. Como M es de dimensión finita la secuencia $M \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_k \supseteq \dots$ se estabiliza, es decir, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $M_q = M_{q+p}$, para $p \in \mathbb{N}$. El menor entero q tal que $M_q = \emptyset$ o, $M_q \neq \emptyset$ y $M_q = M_{q+1}$ se llama *índice geométrico de la ecuación* (2.1).

Si $M_q = \emptyset$, la ecuación no admite soluciones. Si en cambio $M_q \neq \emptyset$, suponiendo que la matriz $a(x)$ tiene rango localmente constante en M_q , podemos garantizar la existencia local de soluciones para (2.1). En efecto, supongamos que se toman coordenadas locales $(x_1, \dots, x_m)$ en M centradas en un punto dado en M_q , y que M_q está definida por las ecuaciones $x_{c+1} = 0, \dots, x_m = 0$, siendo c la dimensión de M_q . Se puede probar que si $r = \dim(\ker a(x)|_{T_x M_q})$, las soluciones del sistema pueden describirse así: luego de una permutación de índices si fuera necesario se eligen funciones arbitrarias $x_1(t), \dots, x_r(t)$, y luego se resuelve (2.1) unívocamente para $x_{r+1}(t), \dots, x_c(t)$.

La ecuación (2.1) restringida a M_q , es un ejemplo de una EDI de rango localmente constante.

2.3. Algoritmo de restricciones singular.

A continuación introduciremos el *algoritmo de restricciones singular*, que permite, dada una EDICL del tipo (2.1), hallar una EDICL equivalente de rango localmente constante, restringida a una subvariedad de dimensión menor donde se puede garantizar existencia de solución.

Presentamos en esta sección una breve descripción del algoritmo de restricciones singular desarrollado detalladamente en [13]. Trabajaremos con variedades y aplicaciones analíticas reales. Luego, si (2.1) es una EDICL dada con dominio M , consideraremos que M es una variedad analítica real y que las aplicaciones a y f son analíticas reales.

A continuación enunciaremos la definición de *desingularización* y el teorema que garantiza la existencia de desingularizaciones [17], [18], [19], [20].

Definición 2.3.1. Sea M una variedad analítica real y sea X un subconjunto analítico de M . Una *desingularización* de X es una aplicación analítica real propia $\pi : N \rightarrow M$ tal que $\pi(N) = X$, donde N es una variedad analítica real de la misma dimensión de X .

Teorema 2.3.2. Sea M una variedad analítica real y sea X un subconjunto analítico cerrado. Entonces existe una desingularización $\pi : N \rightarrow M$ de X .

Observación 2.3.3. La técnica de desingularización se aplica cuando en algún paso del algoritmo regular se obtiene un conjunto que tiene puntos donde no resulta suave, cabe aclarar que estos puntos no son necesariamente los pertenecientes al conjunto singular definido en la Sección 2.1. Cuando el conjunto obtenido es una variedad, también es posible usar esta técnica pero en este caso se obtiene simplemente una EDI equivalente definida sobre un dominio de dimensión menor que el original.

Descripción del algoritmo. Sea M una variedad de dimensión m y sea (2.1) una EDICL dada con dominio M e imagen F , que simbolizaremos $(a, f)|_M$. Se prueba que esta ecuación puede transformarse en una EDICL equivalente

$$\tilde{a}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x) \quad (2.2)$$

sobre una variedad analítica $\tilde{N}$, que es una EDICL de rango localmente constante. Las dos ecuaciones resultan equivalentes en el siguiente sentido: existe una proyección de $\tilde{N}$ en M tal que las soluciones de (2.2) se proyectan como soluciones de (2.1), y recíprocamente, todas las soluciones de (2.1) se obtienen

concatenando proyecciones de soluciones de (2.2). Para construir la variedad $\tilde{N}$ utilizaremos un algoritmo que involucra un proceso de desingularización. Dado que M es una variedad de dimensión m , las componentes conexas de M serán de dimensión menor o igual que m . Sea $M_{max} = \bigcup_j W_j$ la unión de todas las componentes conexas de M con dimensión m . Se puede ver en [13] que M es la unión disjunta $M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)}$, donde $M_{(1)}$ y $M_{(2)}$ son subvariedades abiertas de M de igual dimensión que M , mientras que $M_{(0)}$ es una unión finita de subconjuntos definidos por ecuaciones analíticas sobre cada W_j , unión $M - M_{max}$, siendo $\dim M_{(0)} < m$. Además el sistema lineal algebraico asociado a (2.1) no tiene solución para $x \in M_{(1)}$ y tiene solución para todo $x \in M_{(2)}$, más aún, el sistema (2.1) restringido a $M_{(2)}$, $(a, f)|_{M_{(2)}}$, es una EDICL de rango localmente constante. Por otro lado, $M_{(0)}$ es unión de conjuntos analíticos cerrados, que se podrán desingularizar si fuera necesario.

Observación 2.3.4. Si M es una variedad conexa se tiene que, o bien $M_{(1)} = \emptyset$ o bien $M_{(2)} = \emptyset$; además, en cualquiera de las dos situaciones $M_{(0)}$ resulta un subconjunto analítico cerrado de la variedad M de dimensión menor. Para justificar esto se define como en [13], para $i = 0, 1, \dots$,

$$S_i(M) = \{x \in M : \text{rg } a(x) \leq i\},$$

$$L_i(M) = \{x \in S_i(M) : \text{rg}(a(x) - f(x)) \leq i\}.$$

Sea k_r el valor máximo de $\text{rg } a(x)$, $x \in M$. Se tiene que $S_{k_r}(M) = M$. Luego hay que determinar si $L_{k_r}(M) = \emptyset$ o $L_{k_r}(M) \neq \emptyset$.

- Si $L_{k_r}(M) = \emptyset$ concluimos que $M_{(0)} = M_{(2)} = \emptyset$ y $M = M_{(1)}$.
- Si $L_{k_r}(M) \neq \emptyset$ y $\dim L_{k_r}(M) < m$ podemos concluir que $M_{(0)} = L_{k_r}(M)$ y $M_{(2)} = \emptyset$, entonces $M = M_{(0)} \cup M_{(1)}$.
- Si $L_{k_r}(M) \neq \emptyset$ y $\dim L_{k_r}(M) = m$ debemos calcular S_{k_r-1} , entonces tenemos $M_{(0)} = S_{k_r-1}$ y $M_{(1)} = \emptyset$, luego $M = M_{(0)} \cup M_{(2)}$.

Sabemos que dada una condición inicial $x_0 \in M$, si $x_0 \in M_{(2)}$ podemos garantizar existencia de solución y si $x_0 \in M_{(1)}$ no existe solución. Luego resta analizar que sucede si $x_0 \in M_{(0)}$. Aplicando el Teorema 2.3.2 para $X = M_{(0)}$ subconjunto analítico cerrado de la variedad M , obtendremos una desingularización de $M_{(0)}$, $\pi_0 : N^1 \rightarrow M$, donde $\pi_0(N^1) = M_{(0)}$, siendo N^1 una variedad analítica real de la misma dimensión que $M_{(0)}$.

El sistema (2.1) restringido a $M_{(0)}$ puede ser “*levantado*” de manera natural a un sistema cuasilineal sobre N^1 :

$$a_1(x)\dot{x} = f_1(x)$$

con

$$\begin{aligned} a_1(x)\dot{x} &= a(\pi_0(x))T_x\pi_0(x, \dot{x}), \\ f_1(x) &= f(\pi_0(x)), \end{aligned}$$

donde $x(t)$ es una curva analítica en N^1 , entonces

$$T_x\pi_0(x, \dot{x}) = D\pi_0(x) \dot{x} = \frac{d\pi_0(x(t))}{dt}$$

es un vector tangente a $M_{(0)}$ en $\pi_0(x(t))$.

Este proceso se repite para la EDICL (a_1, f_1) con dominio N^1 e imagen F . Obtenemos una descomposición $N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(1)}^1 \cup N_{(2)}^1$ donde no existe solución para el sistema lineal asociado si $x \in N_{(1)}^1$, existe solución para el mismo sistema lineal asociado si $x \in N_{(2)}^1$ y además, $(a_1, f_1)|_{N_{(2)}^1}$ es una EDICL de rango localmente constante. Como antes, desingularizamos $N_{(0)}^1$ y repetimos el proceso. Obtenemos así una secuencia de variedades y aplicaciones

$$N^q \xrightarrow{\pi_{q-1}} N^{q-1} \xrightarrow{\pi_{q-2}} \dots \xrightarrow{\pi_1} N^1 \xrightarrow{\pi_0} M$$

donde $\pi_i(N^{i+1}) = N_{(0)}^i$, para $i = 0, \dots, q-1$ con $N^0 = M$ y $N^q = N_{(1)}^q \cup N_{(2)}^q$.

La colección de EDICLs $(a_k, f_k)|_{N_{(2)}^k}$, $k = 0, \dots, q$ define una EDICL $(\tilde{a}, \tilde{f})$ de rango localmente constante en la unión disjunta $\tilde{N} = \bigcup_{k=0}^q N_{(2)}^k$. Tenemos entonces la proyección natural $\tilde{\pi} : \tilde{N} \rightarrow M$ y la EDICL “*levantada*” $(\tilde{a}, \tilde{f})$ que tiene dominio $\tilde{N}$ e imagen F .

En conclusión, obtuvimos un sistema $(\tilde{a}, \tilde{f})$, equivalente al original, con dominio $\tilde{N}$ donde se puede garantizar existencia de solución, con la dimensión de $\tilde{N}$ menor que la dimensión del dominio original.

Capítulo 3

APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS DE RESTRICCIONES A CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En este capítulo definiremos algunas nociones básicas de circuitos eléctricos, de sus elementos y dinámica [2]. Nos restringiremos sólo a los conceptos que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Estudiaremos la dinámica de un circuito eléctrico genérico LC lineal, compuesto por inductores (L) y capacitores (C), modelado a través de ecuaciones diferenciales implícitas. Aplicaremos el algoritmo de restricciones regular para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas equivalente, el cual, restringido a un subespacio final de restricciones, cumple con que sus curvas solución están contenidas en dicho subespacio, referencia en 1.1.a.

Ilustraremos los resultados obtenidos con un ejemplo concreto de un circuito LC de 4 puertos.

Presentaremos un circuito genérico RCL no lineal, compuesto por resistor (R), capacitor (C) e inductor (L). Aplicaremos la técnica del algoritmo singular para obtener un sistema equivalente en un dominio donde se garantiza existencia de solución.

3.1. Circuitos eléctricos: elementos y dinámica.

Un *circuito eléctrico* es un conjunto de *ramas* interconectadas y cada rama está alojada entre dos *nodos*.

Un *camino* que conecta dos nodos es una secuencia

$$(n_1, r_1, n_2, \dots, n_{k-1}, r_k, n_k)$$

donde cada rama r_i incide en los nodos n_{i-1} y n_i para $1 \leq i \leq k$.

Se dice que es un *camino cerrado* si $n_1 = n_k$. Un camino cerrado se llama *lazo* cuando es $k \geq 1$ y, $n_i \neq n_j$ y $r_i \neq r_j$ para $1 \leq i < j \leq k$.

Se dice que dos ramas de un circuito están *conectadas en paralelo* si definen un lazo.

Cada rama tiene asociadas dos variables: la *corriente* I y el *voltaje* V . Cuando en la rama hay un elemento *reactivo* como un *capacitor* (C) o un *inductor* (L), la rama tiene una variable adicional llamada *carga* Q para el capacitor y *flujo* φ para el inductor.

Cada rama está dada con una orientación que define la *dirección de referencia para la corriente*, si los nodos de incidencia son n_1 y n_2 y la dirección es de n_1 a n_2 , entonces una corriente de, por ejemplo, $+1mA$, significa que la corriente fluye de n_1 a n_2 ; en cambio una corriente de $-1mA$, significa que la corriente fluye de n_2 a n_1 .

Esta orientación también define la *dirección de referencia para el voltaje*, así que un voltaje de $+5$ (resp. -5) mV en la rama antes mencionada, indica que el potencial eléctrico en n_1 es $+5mV$ mayor (resp. menor) que en n_2 .

El sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica de un circuito combina las relaciones entre las corrientes y entre los voltajes, dadas por las leyes de Kirchhoff, con las relaciones electromagnéticas que caracterizan las componentes del circuito.

La ley de Kirchhoff para las corrientes -LKC-: la suma de las corrientes que pasan por cualquier nodo del circuito es 0. Si hay n nodos en el circuito se tienen $n - 1$ ecuaciones, ver en [2] Lema 5.2, pág. 199.

La ley de Kirchhoff para los voltajes -LKV-: la suma de los voltajes a lo largo de las ramas de cualquier lazo del circuito es 0.

Las leyes de Kirchhoff involucran ecuaciones algebraicas lineales mientras que las relaciones electromagnéticas incluyen ecuaciones diferenciales posiblemente no lineales. De esto surge el nombre de ecuaciones diferenciales

algebraicas -EDA- en la modelización de circuitos.

A continuación presentaremos las relaciones electromagnéticas en circuitos compuestos por capacitores (C), inductores (L) y resistores (R), o por alguno de ellos.

Si el circuito está compuesto por b_c capacitores, b_l inductores y b_r resistores, las diferentes variables que aparecerán en el modelo del circuito serán denotadas como sigue:

$(Q, V_c, I_c) \in \mathbb{R}^{b_c} \times \mathbb{R}^{b_c} \times \mathbb{R}^{b_c}$ para la carga, voltaje y corriente en el capacitor;
 $(\varphi, V_l, I_l) \in \mathbb{R}^{b_l} \times \mathbb{R}^{b_l} \times \mathbb{R}^{b_l}$ para el flujo, voltaje y corriente en el inductor;
 $(V_r, I_r) \in \mathbb{R}^{b_r} \times \mathbb{R}^{b_r}$ voltaje y corriente en el resistor.

Capacitores. Las relaciones electromagnéticas que gobiernan los capacitores están definidas por la ecuación diferencial

$$\dot{Q} = I_c \quad (3.1)$$

junto con

$$\psi_c(Q, V_c) = 0 \quad (3.2)$$

donde $\psi_c \in C^1(\mathbb{R}^{b_c} \times \mathbb{R}^{b_c}, \mathbb{R}^{b_c})$ representa las “*relaciones constitutivas*” del capacitor. La ecuación (3.2) define una forma general para capacitores de tiempo invariante.

Se asume que los capacitores son globalmente *controlados por el voltaje*, es decir que la ecuación (3.2) tiene la forma

$$Q = \gamma_c(V_c) \quad (3.3)$$

donde γ_c es una función C^1 .

Si $C(V_c) = \frac{\partial \gamma_c(V_c)}{\partial V_c}$, entonces derivando con respecto a t en (3.3) y usando (3.1) resulta:

$$C(V_c)\dot{V}_c = I_c. \quad (3.4)$$

En algunos casos la descripción de variable controlada bajo condiciones de suavidad existe sólo localmente [1].

Cuando los capacitores son lineales y controlados por el voltaje, la ecuación (3.3) resulta:

$$Q = CV_c$$

donde $C \in \mathbb{R}^{b_c} \times \mathbb{R}^{b_c}$ es una matriz constante.

Inductores. Análogamente, los inductores están caracterizados por la relación diferencial

$$\dot{\varphi} = V_l \quad (3.5)$$

entre los flujos magnéticos y los voltajes, junto con

$$\psi_l(\varphi, I_l) = 0 \quad (3.6)$$

donde $\psi_l \in C^1(\mathbb{R}^{b_l} \times \mathbb{R}^{b_l}, \mathbb{R}^{b_l})$.

Por razones de simplicidad otra vez se supone los inductores *controlados por la corriente* globalmente por una función C^1 de la forma

$$\varphi = \gamma_l(I_l). \quad (3.7)$$

Si $L(I_l) = \frac{\partial \gamma_l(I_l)}{\partial I_l}$, entonces derivando con respecto a t en (3.7) y usando (3.5) resulta

$$L(I_l)\dot{I}_l = V_l. \quad (3.8)$$

En algunos casos, la descripción de inductor controlado por la corriente como en (3.7) sólo existe localmente [1].

En el caso lineal y controlado por la corriente la ecuación (3.7) resulta:

$$\varphi = LI_l \quad (3.9)$$

donde $L \in \mathbb{R}^{b_l} \times \mathbb{R}^{b_l}$ es una matriz constante.

Resistores. Se usará el término resistor en sentido amplio para indicar la caracterización de cualquier componente, mediante una relación algebraica (no diferencial) entre el voltaje y la corriente, en su rama.

Se asumen los resistores de tiempo invariante y los efectos de acoplamientos acomodados de tal manera que el conjunto de resistores está definido por una relación de la forma

$$\psi_r(V_r, I_r) = 0 \quad (3.10)$$

donde $\psi_r \in C^1(\mathbb{R}^{b_r} \times \mathbb{R}^{b_r}, \mathbb{R}^{b_r})$.

En muchos casos se suponen los resistores *controlados por el voltaje* mediante una función C^1 de la forma

$$I_r = \gamma_r(V_r). \quad (3.11)$$

En el caso lineal se tiene

$$I_r = GV_r$$

donde G es una matriz constante.

Si los resistores están *controlados por la corriente*, el voltaje y la corriente estarán relacionados mediante una función C^1 de la forma

$$V_r = \rho(I_r). \quad (3.12)$$

En el caso lineal se tiene

$$V_r = R I_r$$

donde R es una matriz constante.

Cuando el sistema es lineal y la matriz R es diagonal (sistema desacoplado), el modelo estará gobernado por la ley de Ohm:

$$V_{r_k} = R_k I_{r_k} \text{ con } 1 \leq k \leq b_r.$$

3.2. Circuito LC lineal. Aplicación del algoritmo de restricciones regular.

Circuitos LC modelados por EDAs. Consideraremos circuitos eléctricos LC, es decir, circuitos compuestos por inductores (L) y capacitores (C). El modelo que corresponde a este tipo de circuitos es el de un sistema de EDAs, donde las restricciones algebraicas resultan ser ecuaciones lineales. En primer lugar vamos a escribir las ecuaciones del circuito, para ello utilizaremos el modelo propuesto por [21], también utilizado en [22] pero con un enfoque diferente, donde se estudian circuitos LC en un contexto geométrico que utiliza estructuras de Dirac. Dado que estamos trabajando con una EDI lineal, pueden garantizarse la hipótesis de regularidad necesarias para aplicar el algoritmo de restricciones regular. Mostraremos que en este caso el número de pasos del algoritmo es 1 o 3, es decir que se trata de una EDI de *índice* 1 o 3. Por último ilustraremos el algoritmo hallado para circuitos LC con un ejemplo concreto.

Llamamos E al espacio vectorial de dimensión n que representa las *cargas*, TE al fibrado tangente a E que representa las *corrientes* (por ser E espacio vectorial TE resulta isomorfo a $E \times E$) y T^*E al fibrado cotangente a E que es el espacio de los *flujos* (resulta isomorfo a $E \times E^*$). Trabajaremos sobre el espacio $M = TE \oplus T^*E \cong E \times E \times E^*$, donde un punto de M será una terna de la forma (Q, I, Φ) , con $Q \in E$, $I \in T_Q E$ y $\Phi \in T_Q^* E$. Definimos el Lagrangiano asociado, $\mathcal{L} : TE \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{L}(Q, I) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} Q_i^2,$$

y las funciones $\varphi, \omega : E \longrightarrow E^*$ tales que

$$\varphi(I) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = (L_1 I_1, \dots, L_n I_n), \quad \omega(Q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -(Q_1/C_1, \dots, Q_n/C_n),$$

donde supondremos $L_i \geq 0$, $0 < C_i \leq \infty$, para $i = 1, \dots, n$.

Las siguientes EDAs constituyen el modelo de un circuito LC:

$$\dot{Q} = I \quad (3.13)$$

$$\Phi = \varphi(I) \quad (3.14)$$

$$\dot{Q} \in \Delta \quad (3.15)$$

$$\dot{\Phi} - \omega(Q) \in \Delta^\circ \quad (3.16)$$

donde (3.13) y (3.14) provienen de las relaciones electromagnéticas dadas en (3.1) y (3.9), $\Delta \subset TE$ es el subespacio lineal que respresenta las leyes de Kirchhoff para las corrientes (3.15), mientras que $\Delta^\circ \subset T^*E$ es el subespacio lineal, anulador de Δ , que representa las leyes de Kirchhoff para los voltajes (3.16).

Algoritmo de restricciones regular para circuitos LC. Nuestro objetivo es obtener un sistema de EDOs explícitas y un subespacio maximal M_q , de modo tal que las EDOs restringidas a M_q resulten equivalentes al sistema original (3.13)- (3.16) y, que dada una condición inicial en M_q la solución quede contenida en M_q .

Teorema 3.2.1. *Consideramos el sistema de EDAs (3.13)- (3.16) que modela un circuito LC sobre el espacio $M = TE \oplus T^*E$.*

Entonces, si $\omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) = \emptyset$ el sistema tiene índice 1. En caso contrario el sistema tiene índice 3.

Demostración. Si bien el algoritmo de restricciones regular está planteado en la Sección 2.2 para EDICLs, es inmediato escribirlo para una EDI general $\phi(x, \dot{x}) = 0$, con $x \in M$. Se definen

$$M_1 = \{x \in M : \text{existe } \dot{x} \in T_x M \text{ que satisface } \phi(x, \dot{x}) = 0\},$$

y recursivamente

$$M_{k+1} = \{x \in M_k : \text{existe } \dot{x} \in T_x M_k \text{ que satisface } \phi(x, \dot{x}) = 0\},$$

bajo la hipótesis que M_k es una subvariedad para $k = 1, 2, \dots$.

Aplicaremos el algoritmo de restricciones regular al sistema (3.13)- (3.16) con $M = TE \oplus T^*E \cong E \times E \times E^*$, donde un punto de M es una terna de la forma (Q, I, Φ) , con $Q \in E$, $I \in T_Q E$ y $\Phi \in T_Q^* E$.

Primer paso:

$$M_1 = \left\{ (Q, I, \Phi) \in M : \exists (\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M \text{ que satisface (3.13) - (3.16)} \right\};$$

de (3.13) y (3.15)

$$\dot{Q} = I \text{ y } \dot{Q} \in \Delta, \text{ entonces } I \in \Delta,$$

además de (3.14)

$$\Phi = \varphi(I),$$

luego

$$M_1 = \{(Q, I, \Phi) \in M : \Phi = \varphi(I), I \in \Delta\}.$$

Segundo paso:

$$M_2 = \left\{ (Q, I, \Phi) \in M_1 : \exists (\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M_1 \text{ que satisface (3.13) - (3.16)} \right\};$$

$$(Q, I, \Phi) \in M_1 \text{ si y sólo si } \Phi = \varphi(I) \text{ e } I \in \Delta,$$

además,

$$(\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M_1 \cong M_1 \text{ si y sólo si } \dot{\Phi} = \varphi(\dot{I}) \text{ e } \dot{I} \in \Delta.$$

Luego, la ecuación (3.16)

$$\dot{\Phi} - \omega(Q) \in \Delta^\circ,$$

puede reescribirse como

$$\varphi(\dot{I}) - \omega(Q) \in \Delta^\circ,$$

o equivalentemente

$$\omega(Q) \in \Delta^\circ + \varphi(\Delta).$$

Por lo tanto

$$M_2 = \{(Q, I, \Phi) \in M_1 : Q \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta))\}.$$

Observar que si $\omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) = \emptyset$ entonces $M_2 \equiv M_1$ y el sistema (3.13)-(3.16) tiene *índice* 1.

En adelante supondremos que $\omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) \neq \emptyset$, y luego continuamos con el algoritmo.

Tercer paso:

$$M_3 = \left\{ (Q, I, \Phi) \in M_2 : \exists (\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M_2 \text{ que satisface (3.13) - (3.16)} \right\},$$

$$(Q, I, \Phi) \in M_2 \text{ si y sólo si } \Phi = \varphi(I), I \in \Delta \text{ y } Q \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)),$$

además,

$$(\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M_2 \cong M_2 \text{ si y sólo si } \dot{\Phi} = \varphi(\dot{I}), \dot{I} \in \Delta \text{ y } \dot{Q} \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)).$$

De lo anterior se obtiene una nueva restricción algebraica

$$I \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)).$$

Luego,

$$M_3 = \left\{ (Q, I, \Phi) \in M_2 : I \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) \right\}.$$

Cuarto paso:

$$M_4 = \left\{ (Q, I, \Phi) \in M_3 : \exists (\dot{Q}, \dot{I}, \dot{\Phi}) \in T_{(Q, I, \Phi)} M_3 \text{ que satisface (3.13) - (3.16)} \right\}.$$

Mediante cálculos sencillos y análogos a los realizados en los pasos anteriores puede probarse que $M_4 \equiv M_3$ puesto que a partir de la definición de M_4 no se agregan nuevas restricciones algebraicas. Luego el algoritmo se detiene y el sistema (3.13)-(3.16) tiene *índice 3*. $\square$

Observación 3.2.2. Bajo la hipótesis que el sistema (3.13)-(3.16) tiene índice 3, simultáneamente a la construcción de las variedades de restricción $M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq M_3$, se obtiene el siguiente sistema de EDOs explícitas:

$$\begin{cases} \dot{Q} = I \\ \dot{\Phi} - \omega(Q) \in \Delta^\circ \\ \dot{I} \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) \end{cases} \quad (3.17)$$

que restringido al subespacio M_3 resulta equivalente a (3.13)- (3.16).

Ejemplo 3.2.3. Un ejemplo concreto. Aplicaremos el algoritmo de restricciones obtenido en la sección anterior al circuito LC de la Figura 3.1.

Figura 3.1: Circuito LC lineal.

En este caso el espacio de cargas es $E = \mathbb{R}^4$. Las ecuaciones están definidas sobre $M = TE \oplus T^*E$, entonces para $(Q, I, \Phi) \in M$,

$$Q = (Q_l, Q_{c_1}, Q_{c_2}, Q_{c_3}) \in \mathbb{R}^4$$

$$I = (I_l, I_{c_1}, I_{c_2}, I_{c_3}) \in T_Q \mathbb{R}^4$$

$$\Phi = (\Phi_l, \Phi_{c_1}, \Phi_{c_2}, \Phi_{c_3}) \in T_Q^* \mathbb{R}^4.$$

El Lagrangiano $\mathcal{L} : TE \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $\varphi, \omega : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ están dados por

$$\mathcal{L}(Q, I) = \frac{1}{2} L I_l^2 - \frac{1}{2} \frac{Q_{c_1}^2}{C_1} - \frac{1}{2} \frac{Q_{c_2}^2}{C_2} - \frac{1}{2} \frac{Q_{c_3}^2}{C_3},$$

$$\varphi(I_l, I_{c_1}, I_{c_2}, I_{c_3}) = (L I_l, 0, 0, 0),$$

$$\omega(Q_l, Q_{c_1}, Q_{c_2}, Q_{c_3}) = \left(0, -\frac{Q_{c_1}}{C_1}, -\frac{Q_{c_2}}{C_2}, -\frac{Q_{c_3}}{C_3} \right).$$

Las relaciones electromagnéticas (3.13) y (3.14) son

$$\begin{aligned} \dot{Q}_l &= I_l, \quad \dot{Q}_{c_1} = I_{c_1}, \quad \dot{Q}_{c_2} = I_{c_2}, \quad \dot{Q}_{c_3} = I_{c_3}, \\ \Phi_l &= L I_l, \quad \Phi_{c_1} = \Phi_{c_2} = \Phi_{c_3} = 0. \end{aligned}$$

A partir del sistema (3.15) que representan LKC tenemos

$$\begin{aligned} -I_l + I_{c_2} &= 0, \\ -I_{c_1} + I_{c_2} - I_{c_3} &= 0, \end{aligned}$$

y las ecuaciones (3.16) que representan LKV resultan

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_l + \frac{Q_{c_1}}{C_1} + \dot{\Phi}_{c_1} + \frac{Q_{c_2}}{C_2} + \dot{\Phi}_{c_2} &= 0, \\ \dot{\Phi}_l + \frac{Q_{c_2}}{C_2} + \dot{\Phi}_{c_2} + \frac{Q_{c_3}}{C_3} + \dot{\Phi}_{c_3} &= 0.\end{aligned}$$

La sucesión de subespacios que se obtiene a partir de aplicar el algoritmo de restricciones:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{(Q, I, \Phi) \in M_0 : \Phi = \varphi(I), I \in \Delta\} = \\ &= \{(Q, I, \Phi) \mid \Phi_l = LI_l, \Phi_{c_1} = \Phi_{c_2} = \Phi_{c_3} = 0, I_l = I_{c_2}, I_{c_1} = I_{c_2} - I_{c_3}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= \{(Q, I, \Phi) \in M_1 : Q \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta))\} = \\ &= \left\{ (Q, I, \Phi) \mid \Phi_l = LI_l, \Phi_{c_1} = \Phi_{c_2} = \Phi_{c_3} = 0, I_l = I_{c_2}, I_{c_1} = I_{c_2} - I_{c_3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{Q_{c_1}}{C_1} = \frac{Q_{c_3}}{C_3} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_3 &= \{(Q, I, \Phi) \in M_2 : I \in \omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta))\} = \\ &= \left\{ (Q, I, \Phi) \mid \Phi_l = LI_l, \Phi_{c_1} = \Phi_{c_2} = \Phi_{c_3} = 0, I_l = I_{c_2}, I_{c_1} = I_{c_2} - I_{c_3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{Q_{c_1}}{C_1} = \frac{Q_{c_3}}{C_3}, \frac{I_{c_1}}{C_1} = \frac{I_{c_3}}{C_3} \right\}.\end{aligned}$$

En lo anterior se cumple que $\omega^{-1}(\Delta^\circ + \varphi(\Delta)) \neq \emptyset$, luego el algoritmo se detiene exactamente en el paso 3.

Para hallar las EDOs equivalentes al sistema se parametriza M_3 , que es un subespacio de M de dimensión 4. Eligiendo 4 variables independientes,

por ejemplo I_{c_3} , Q_l , Q_{c_2} , Q_{c_3} , se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{I}_{c_3} = \left(-\frac{Q_{c_2}}{C_2} - \frac{Q_{c_3}}{C_3} \right) \frac{C_3}{L(C_1+C_3)} \\ \dot{Q}_l = \frac{(C_1+C_3)}{C_3} I_{c_3} \\ \dot{Q}_{c_2} = \frac{(C_1+C_3)}{C_3} I_{c_3} \\ \dot{Q}_{c_3} = I_{c_3} \end{cases} \quad (3.18)$$

El sistema de EDOs explícitas (3.18) restringidas al subespacio M_3 es equivalente al sistema de EDAs que modela al circuito LC de 4 puertos.

3.3. Circuito RCL no lineal. Aplicación del algoritmo de restricciones singular.

Consideraremos el circuito genérico no lineal RCL que consiste de un resistor (R), un capacitor (C) y un inductor (L), conectados en paralelo como mostramos en la Figura 3.2.

Figura 3.2: Circuito RCL no lineal.

Sean I_r , I_c y I_l las corrientes en las ramas de la resistencia, el capacitor y el inductor; V el voltaje común en cada rama; $C = C(V)$ la capacidad y $L = L(I_l)$ la inductancia, con $C : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ funciones analíticas reales.

En la rama de la resistencia I_r y V se relacionan mediante la ecuación

$\psi(I_r, V) = 0$ con $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función analítica real no lineal.

Por la ley de Kirchhoff para las corrientes

$$I_r + I_c + I_l = 0;$$

de las relaciones electromagnéticas presentadas en la Sección 4, (3.4) y (3.8) para los casos controlados por el voltaje y la corriente respectivamente, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_c &= C(V)\dot{V} \\ V &= L(I_l)\dot{I}_l. \end{aligned}$$

Llamaremos $x_1 = I_r$, $x_2 = I_c$, $x_3 = I_l$ y $x_4 = V$. Además supondremos que $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_1} \neq 0$ ó $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_4} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$ que verifica $\psi(x_1, x_4) = 0$.

La EDICL en forma matricial que modela el circuito resulta:

$$a(x)\dot{x} = f(x) \tag{3.19}$$

donde

$$\begin{aligned} a(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \\ f(x) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $L(x_3) > 0$ y $C(x_4) > 0$, resulta $\text{rg } a(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}^4$ y entonces la matriz $a(x)$ es singular para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

Aplicaremos el algoritmo de desingularización teniendo en cuenta que en el modelo considerado $M = \mathbb{R}^4$. Para encontrar la descomposición dada en [13]

$$M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)},$$

consideramos para $i = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} S_i(M) &= \{x \in M : \text{rg } a(x) \leq i\}, \\ L_i(M) &= \{x \in S_i(M) : \text{rg}(a(x) \quad f(x)) \leq i\}. \end{aligned}$$

El valor máximo de $\text{rg } a(x)$ para $x \in M$ es $k_r = 2$, por lo cual

$$S_{k_r}(M) = S_2(M) = M = \mathbb{R}^4.$$

Debemos calcular entonces

$$L_{k_r}(M) = L_2(M) = \{x \in S_2(M) = \mathbb{R}^4 : \text{rg}(a(x) \ f(x)) \leq 2\},$$

por ser

$$(a(x) \ f(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi(x_1, x_4) \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) & x_2 \end{pmatrix}$$

resulta

$$L_2(M) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge \psi(x_1, x_4) = 0\}.$$

Como $L_2(M) \neq \emptyset$ y $\dim L_2(M) < 4$, por la Observación 2.3.4 podemos concluir que

$$M_{(0)} = L_2(M) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge \psi(x_1, x_4) = 0\},$$

$$M_{(2)} = \emptyset,$$

$$M_{(1)} = \mathbb{R}^4 - M_{(0)} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 \neq 0 \vee \psi(x_1, x_4) \neq 0\}.$$

Para hallar la dimensión de N^1 , consideramos para $x \in M_{(0)}$

$$f^*(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4) \end{pmatrix} \text{ y } Df^*(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_4} \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_1} \neq 0$ ó $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_4} \neq 0$ para todo $x \in M_{(0)}$, tenemos que $\text{rg } Df^*(x) = 2$, entonces

$$\dim N^1 = \dim M_{(0)} = \dim M - \text{rg } Df^*(x) = 4 - 2 = 2.$$

RESISTOR CONTROLADO POR EL VOLTAJE. Supongamos que $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_1} \neq 0$ para los $x = (x_1, x_4) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $\psi(x_1, x_4) = 0$. Sea $x_1 = \gamma(x_4)$ la función analítica no constante, definida sobre el intervalo real abierto I , tal que $\psi(\gamma(x_4), x_4) = 0$.

Considerando $N^1 = \mathbb{R} \times I$ variedad conexa de dimensión 2 y recordando que $M = \mathbb{R}^4$, definimos la aplicación

$$\pi_0 : N^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ dada por } \pi_0(x_2, x_4) = (\gamma(x_4), x_2, -\gamma(x_4) - x_2, x_4),$$

que cumple

$$\begin{aligned} \pi_0(N^1) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = \gamma(x_4), x_3 = -\gamma(x_4) - x_2\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \psi(x_1, x_4) = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = M_{(0)}. \end{aligned}$$

Para construir el sistema “*levantado*”

$$a_1(x_1, x_2)\dot{x} = f_1(x_1, x_2)$$

calculamos:

$$a(\pi_0(x_2, x_4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-\gamma(x_4) - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_1(x_2, x_4)\dot{x} &= a(\pi_0(x_2, x_4))T_x\pi_0(x, \dot{x}) = a(\pi_0(x_2, x_4))D\pi_0(x) \dot{x} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-\gamma(x_4) - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\gamma(x_4)}{dx_4} \\ 1 & 0 \\ -1 & -\frac{d\gamma(x_4)}{dx_4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L(-\gamma(x_4) - x_2) & -L(-\gamma(x_4) - x_2)\frac{d\gamma(x_4)}{dx_4} \\ 0 & C(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$f_1(x_2, x_4) = f(\pi_0(x_2, x_4)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

El sistema “*levantado*” $(a_1, f_1)|_{N^1}$ es entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L(-\gamma(x_4) - x_2) & -L(-\gamma(x_4) - x_2) \frac{d\gamma(x_4)}{dx_4} \\ 0 & C(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos el siguiente sistema cuadrado equivalente, que llamamos otra vez (a_1, f_1) , con la matriz de los coeficientes de orden $2 = \dim N^1$:

$$a_1(x)\dot{x} = f_1(x) \quad (3.20)$$

con

$$a_1(x_2, x_4) = \begin{pmatrix} -L(-\gamma(x_4) - x_2) & -L(-\gamma(x_4) - x_2) \frac{d\gamma(x_4)}{dx_4} \\ 0 & C(x_4) \end{pmatrix},$$

$$f_1(x_2, x_4) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a buscar la descomposición

$$N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(1)}^1 \cup N_{(2)}^1,$$

considerando para $i = 0, 1, \dots$,

$$S_i(N^1) = \{x \in N^1 : \text{rg } a_1(x) \leq i\},$$

$$L_i(N^1) = \{x \in S_i(N^1) : \text{rg } (a_1(x) \ f_1(x)) \leq i\}.$$

El valor máximo de $\text{rg } a_1(x)$ para $x \in N^1$ es $k_r = 2$, por lo cual

$$S_{k_r}(N^1) = S_2(N^1) = N^1.$$

Calculamos entonces

$$L_{k_r}(N^1) = L_2(N^1) = \{x \in S_2(N^1) = N^1 : \text{rg } (a_1(x) \ f_1(x)) \leq 2\} = N^1,$$

como $L_2(N^1) \neq \emptyset$ y $\dim L_2(N^1) = \dim N^1 = 2$, debemos encontrar $S_{k_{r-1}}(N^1)$,

$$S_{k_{r-1}}(N^1) = S_1(N^1) = \{x \in N^1 : \operatorname{rg} a_1(x) \leq 1\} = \emptyset.$$

Por la Observación 2.3.4 podemos concluir que

$$N_{(0)}^1 = S_{k_{r-1}}(N^1) = S_1(N^1) = \emptyset,$$

$$N_{(1)}^1 = \emptyset,$$

luego

$$N_{(2)}^1 = N^1.$$

Entonces el algoritmo termina en el primer paso y se garantiza existencia de solución para el sistema

$$(\tilde{a}, \tilde{f}) = (a_1, f_1) \quad \text{con dominio } \tilde{N} = N_{(2)}^1 = N^1.$$

Observación 3.3.1. En el caso anterior es posible también aplicar el algoritmo de restricciones regular ya que se cuenta con las hipótesis necesarias. Luego de hacerlo, se tiene que el conjunto M_1 obtenido al realizar el primer paso del algoritmo regular coincide con $M_{(0)}$, mientras que $M_2 = M_1$, por lo que el algoritmo se detiene. Observar que el segundo paso del algoritmo regular puede aplicarse pues $M_1 = M_{(0)}$ es suave.

Estudiaremos en el Capítulo 5 el caso del resistor controlado por la corriente.

Capítulo 4

EXISTENCIA DE PUNTOS DE IMPASSE Y PUNTOS DE CRUCE

En este capítulo definiremos los puntos singulares de impasse y los puntos singulares de cruce de una EDICL y repasaremos resultados generales sobre la existencia de soluciones por esos puntos. Justamente, con el objetivo de usar esos resultados, de ahora en adelante consideraremos EDICLs de la forma (2.1)

$$a(x)\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

pero con algunas restricciones.

Hipótesis: M es una variedad analítica real conexa con $\dim M = m$, $a(x) : M \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal para cada $x \in M$, $a(x)$ y $f(x)$ son aplicaciones analíticas y $\det a(x)$ no es idénticamente nulo sobre M .

4.1. Puntos de impasse y puntos de cruce.

En principio daremos una clasificación de curvas solución con distintas propiedades de regularidad que usaremos luego.

Decimos que $x(t)$ es una *curva solución* C^k ($1 \leq k \leq \infty$) de (4.1) en I si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las derivadas de x de orden menor o igual a k existen y son continuas en el interior de I .

2. Si $I = (t_0, t_1]$ o $I = [t_0, t_1]$ entonces las derivadas de orden menor o igual a k tienen límite cuando $t \rightarrow t_1^-$; notar que en este caso $\dot{x}(t_1^-)$, $\ddot{x}(t_1^-)$, $x^{(3)}(t_1^-)$, etc. coinciden con estos límites.
3. Si $I = [t_0, t_1)$ o $I = [t_0, t_1]$ entonces las derivadas de orden menor o igual a k tienen límite cuando $t \rightarrow t_0^+$; notar que en este caso $\dot{x}(t_0^+)$, $\ddot{x}(t_0^+)$, $x^{(3)}(t_0^+)$, etc. coinciden con estos límites.

Decimos $x(t)$ que una *curva solución analítica* $-C^\omega$ - de (4.1) en I si es C^∞ en I y además $x(t)$ es una función analítica en el interior de I .

Observación 4.1.1. A partir de las hipótesis dadas al comienzo de este capítulo y teniendo en cuenta la Observación 2.3.4, se obtiene que $k_r = m$ y $L_m(M) = M$. Luego, para el sistema (4.1) resulta $M_{(1)} = \emptyset$, y entonces M será la unión disjunta

$$M = M_{(0)} \cup M_{(2)},$$

con

$$M_{(0)} = S_{m-1}(M) = \{x \in M : \text{rg } a(x) < m\}.$$

Por otra parte, dedujimos en la Sección 2.1 que el conjunto singular para la EDICL es

$$M_s = \{x \in M : \text{rg } a(x) < m\},$$

por lo tanto

$$M_{(0)} = M_s.$$

Dado que $a(x)$ es una matriz cuadrada de orden m resulta

$$M_{(0)} = M_s = \{x \in M : \det a(x) = 0\}.$$

Al conjunto

$$M_{(2)} = M - M_{(0)}$$

lo llamamos *conjunto de puntos regulares o conjunto regular*.

$M_{(2)}$ es una subvariedad abierta de M , y luego de igual dimensión, donde hay existencia y unicidad de solución, mientras que $M_{(0)}$ es un subconjunto analítico cerrado de M de dimensión menor.

Las soluciones de (4.1) con condiciones iniciales en $M_{(0)}$ y totalmente contenidas en $M_{(0)}$ pueden ser estudiadas a partir de un levantamiento del sistema restringido a $M_{(0)}$, como fue planteado en el Capítulo 2.

Existen algunos resultados que nos permiten estudiar las soluciones de una EDICL con condición inicial $x(t_0) = x_0 \in M_{(0)}$, pero $x(t) \in M_{(2)}$, para $t \neq t_0$. Consideraremos especialmente soluciones por una clase de puntos singulares que definiremos formalmente a continuación.

Definición 4.1.2. *Dado un punto $x_0 \in M_{(0)}$ decimos que una curva solución de (4.1), $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$ y $x(t) \in M_{(2)}$, tiene un punto de impasse de entrada (resp. punto de impasse de salida) en x_0 si $x(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow t_1^-$ (resp. $t \rightarrow t_0^+$) y además no existe $\dot{x}(t_1^-)$ (respectivamente $\dot{x}(t_0^+)$).*

Si existe una curva solución $x(t)$ que tiene un punto de impasse (de entrada o de salida) en x_0 , decimos que $x(t)$ es una solución de impasse de (4.1) por x_0 .

Observación 4.1.3. Si a una solución de impasse $x(t)$, con $t \in I$, la extendemos por continuidad hasta el borde de I , la curva resultante *no* es una solución debido a que no existe la derivada lateral en ese punto.

Definición 4.1.4. *Dado un punto $x_0 \in M_{(0)}$ decimos que una curva solución de (4.1), $x(t)$, tiene un punto de cruce en x_0 si está definida como solución en $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$, $x(t_0) = x_0 \in M_{(0)}$ y $x(t) \in M_{(2)}$ para $t \neq t_0$.*

Si existe una curva solución $x(t)$ que tiene un punto de cruce en x_0 , decimos que $x(t)$ es una solución de cruce de (4.1) por x_0 .

Observación 4.1.5. Si suponemos que los datos son analíticos, las soluciones $x(t)$ contenidas en $M_{(2)}$ serán soluciones analíticas. Dada una solución de cruce $x(t)$, las restricciones a los intervalos $(t_0 - \epsilon, t_0)$ y $(t_0, t_0 + \epsilon)$ serán soluciones analíticas, luego el grado de regularidad de una solución de cruce dependerá del grado de regularidad de dicha solución en el punto x_0 .

Reparametrización. Para analizar la existencia de puntos de impasse y puntos de cruce de (4.1), o equivalentemente estudiar la existencia de soluciones de cruce y soluciones de impasse, introducimos una nueva ecuación asociada a la EDICL (4.1), que se obtiene premultiplicando (4.1) por la matriz $(\text{adj } a(x))^t$,

$$h(x)\dot{x} = g(x) \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x) &= \det a(x), \\ g(x) &= (\text{adj } a(x))^t f(x). \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis consideradas al comienzo de este capítulo valen los siguientes resultados [11].

Lema 4.1.6. *Sea $x: I \rightarrow M$ una curva al menos C^1 tal que $x(t_0) = x_0 \in M_{(0)}$ y $x(t) \in M_{(2)}$ para $t \neq t_0$, entonces $x(t)$ es solución de (4.1) si y sólo si $x(t)$ es solución de (4.2).*

Lema 4.1.7. *Si $x_0 \in M_{(0)}$ es un punto de cruce de (4.1) entonces $g(x_0) = 0$.*

Lema 4.1.8. *1. Las soluciones de (4.1) y (4.2) contenidas en $M_{(2)}$ son reparametrizaciones de las soluciones de la ecuación reparametrizada*

$$y' = g(y), \quad (4.3)$$

siendo $y'(s) = \frac{dy(s)}{ds}$. La reparametrización está dada por la expresión $t(s) = \int_{s_0}^s h(y(u))du$.

2. Sea $y(s)$ una solución de (4.3) con $y(s_0) = x_0 \in M_{(0)}$ e $y(s) \in M_{(2)}$ para $s \neq s_0$, y consideramos las dos curvas $y_1(s) = y(s)$, para $s < s_0$ e $y_2(s) = y(s)$, para $s > s_0$. Mediante la reparametrización de cada una de estas curvas se obtienen dos nuevas curvas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ambas soluciones de (4.1); además, $x_1(t)$ tiende a $x_0 = y(s_0)$ o bien cuando $t \rightarrow 0^+$ o bien cuando $t \rightarrow 0^-$; lo mismo ocurre con $x_2(t)$.

Lema 4.1.9. *Sea $x(t)$ una solución de cruce C^k , $k = 1, \dots, \infty, \omega$ de (4.1) con $x(t_0) = x_0 \in M_{(0)}$ y $\dot{x}(t_0) \neq 0$, entonces existe una subvariedad W de dimensión 1, con el mismo grado de regularidad que x , que contiene a x_0 y que es invariante por el flujo de la ecuación (4.3).*

En el siguiente teorema [2] se establecen condiciones suficientes para la existencia de puntos de cruce.

Teorema 4.1.10. *Consideremos las ecuaciones (4.1) y (4.3), y supongamos que $a(x)$ y $f(x)$ son aplicaciones C^1 . Sea $x_0 \in M_{(0)}$, si se cumple que*

- 1. $g(x_0) = 0$,*
- 2. $\nabla h(x_0) \neq 0$,*
- 3. existe una subvariedad W de dimensión 1, invariante por el flujo de (4.3), transversal a $M_{(0)}$ y tal que el sistema (4.3) restringido a W tiene un punto de equilibrio exponencialmente atractivo (o repulsivo) en x_0 ,*

entonces x_0 es un punto de cruce de (4.1).

Para la aplicación práctica de este teorema, la hipótesis 3 sobre la existencia de una subvariedad de dimensión 1 que cumpla con determinadas condiciones resulta algo difícil de verificar. Sin embargo, algunos resultados intermedios, nos permitirán asegurar esta hipótesis bajo ciertas condiciones. Uno de ellos es el Teorema de la Variedad Estable [23] que enunciaremos a continuación.

Teorema 4.1.11. *Consideramos la ecuación (4.3), y asumimos que g es C^k , $k = 1, \dots, \infty, \omega$. Sea $x_0 \in M_{(0)}$ y supongamos que:*

1. $g(x_0) = 0$
2. *existen $\alpha > 0$ y dos subespacios E y F invariantes por $Dg(x_0)$, con $\mathbb{R}^m = E \oplus F$, tales que $Dg(x_0)|_E$ tiene todos sus autovalores con parte real menor que $-\alpha$ y $Dg(x_0)|_F$ tiene todos sus autovalores con parte real mayor que $-\alpha$*

entonces existe una subvariedad W , con el mismo grado de regularidad que g , invariante por el flujo de (4.3), tangente a E en x_0 y tal que todas las soluciones con valores iniciales en W suficientemente cercanos a x_0 satisfacen

$$\|x(t) - x_0\| \leq \delta e^{-\alpha t}.$$

El siguiente corolario garantiza la hipótesis 3 del Teorema 4.1.10.

Corolario 4.1.12. *Si $g(x_0) = 0$, $Dg(x_0)$ tiene un autovalor real simple $\lambda < 0$ y todos los otros autovalores de $Dg(x_0)$ tienen parte real mayor que λ , entonces existe una variedad W de dimensión 1, tangente en x_0 al autovector correspondiente al autovalor λ , invariante por el flujo de (4.3) y tal que el sistema (4.3) restringido a W tiene un equilibrio exponencialmente atractivo en x_0 .*

Finalmente, en el siguiente corolario, que se prueba a partir de los tres resultados anteriores, se determinan condiciones suficientes para la existencia de puntos de cruce.

Corolario 4.1.13. *Dado $x_0 \in M_{(0)}$, si se cumple que*

1. $g(x_0) = 0$,
2. $\nabla h(x_0) \neq 0$,

3. $Dg(x_0)$ tiene un autovalor real simple $\lambda < 0$,
4. todos los demás autovalores de $Dg(x_0)$ tienen parte real mayor que λ ,
5. el autovector correspondiente al autovalor λ no es tangente a $M_{(0)}$,

entonces x_0 es un punto de cruce de (4.1).

Observación 4.1.14. Un resultado similar puede obtenerse para el autovalor real máximo. Para verlo alcanza con invertir el tiempo en el sistema, cambiando entonces g por $-g$, con lo que se invierten todos los signos de los autovalores.

El siguiente teorema [25] es una versión un poco más fuerte del teorema de Hartman–Grobman [23], y se debe al mismo Hartman. En este resultado se supone que todos los autovalores de $Dg(x_0)$ tienen el mismo signo.

Teorema 4.1.15. *Consideremos el sistema (4.3), supongamos que g es de clase C^2 , que $g(x_0) = 0$ y que todos los autovalores de $Dg(x_0)$ tienen el mismo signo, entonces existe un difeomorfismo C^1 de un entorno de x_0 en un entorno de 0 que lleva las soluciones del sistema (4.3) en soluciones del sistema linealizado.*

Más precisamente, existe un difeomorfismo C^1 , $R : U \rightarrow V$, con U, V abiertos, $x_0 \in U$, $R(x_0) = 0$, tal que si $x(t)$ es una curva solución de (4.3) contenida en U , entonces $R(x(t)) = \exp(t Dg(x_0))R(x(0))$.

Combinando los resultados anteriores puede probarse el siguiente corolario.

Corolario 4.1.16. *Consideremos el sistema (4.3) y supongamos que g es al menos C^2 . Sea x_0 tal que $g(x_0) = 0$ y sea v un autovector de $Dg(x_0)$ tal que el autovalor correspondiente es no nulo, entonces existe una subvariedad W de dimensión 1, tangente a v en x_0 , que es invariante por el flujo de (4.3).*

La siguiente Proposición establece que cualquier curva invariante resulta tangente a algún autovector.

Proposición 4.1.17. *Sea x_0 tal que $g(x_0) = 0$, sea W una subvariedad de dimensión 1 que pasa por x_0 invariante por el flujo de (4.3), entonces W es tangente a un autovector de $Dg(x_0)$.*

4.2. Singularidades esenciales o no esenciales.

Puntos de impasse y de cruce. En adelante utilizaremos una clasificación de singularidades dada en [24] para luego enunciar algunos resultados sobre existencia de puntos de impasse y puntos de cruce teniendo en cuenta esta clasificación. Considerando el campo $F(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, nos preguntamos cuándo existe una extensión continua de este campo, teniendo en cuenta que $F(x)$ no está definido si $h(x) = 0$, es decir si $x \in M_{(0)}$. Como primera observación se tiene que, si $x_0 \in M_{(0)}$ y $g(x_0) \neq 0$, entonces no es posible extender el campo $F(x)$ en forma continua por x_0 , puesto que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|F(x)\| = \infty.$$

A partir de lo anterior se establecen las siguientes definiciones.

Definición 4.2.1. *Singularidades esenciales*

$$M_{(0)}^e = \{x \in M_{(0)} : g(x) \neq 0\}$$

Definición 4.2.2. *Singularidades no esenciales*

$$M_{(0)}^{ne} = M_{(0)} - M_{(0)}^e$$

Teniendo en cuenta la clasificación anterior, daremos ahora algunos resultados que garantizan la existencia de soluciones de cruce o soluciones de impasse por $x_0 \in M_{(0)}$ para la ecuación (4.1), recordando que $h(x) = \det a(x)$ y $g(x) = (\text{adj } a(x))^t f(x)$.

Caso 1: Singularidades esenciales. Si $x_0 \in M_{(0)}^e$ se tiene que $g(x_0) \neq 0$, entonces por el contrarrecíproco del Lema 4.1.7 no existen soluciones de cruce de (4.1).

Luego, buscamos resultados sobre la existencia de soluciones de impasse de (4.1) por x_0 . A este efecto se definen para $x \in M$, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ así:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= h(x) \\ \varphi_1(x) &= X[\varphi_0](x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_j} g_j(x) = \nabla \varphi_0(x) \cdot g(x) \\ &\vdots \\ \varphi_k(x) &= X[\varphi_{k-1}](x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots \in \mathcal{C}^\omega(M)$ generan una cadena de ideales

$$\mathcal{J}_k = \langle \varphi_0, \dots, \varphi_k \rangle,$$

con $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{J}_k \subseteq \dots$

El anillo de las funciones analíticas con dominio M , $\mathcal{C}^\omega(M)$, es Noetheriano, luego $\mathcal{J}_{\tilde{k}} = \mathcal{J}_{\tilde{k}+p}$ para un cierto $\tilde{k}$ y $\forall p \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces el siguiente conjunto correspondiente a los ceros del ideal final $\mathcal{J}_{\tilde{k}}$:

$$\tilde{Z} = Z(\mathcal{J}_{\tilde{k}}) = \{x \in M : \varphi_0(x) = 0, \dots, \varphi_{\tilde{k}}(x) = 0\}.$$

El siguiente resultado [11] establece una condición necesaria y suficiente para que un punto $x_0 \in M_{(0)}^e$ sea un punto de impasse de (4.1).

Teorema 4.2.3. *Sea la ecuación (4.1) y sea $x_0 \in M_{(0)}^e$. Supongamos válidas todas las hipótesis enunciadas al comienzo del capítulo. Consideramos los ideales $\mathcal{J}_k$ y los conjuntos de ceros $Z(\mathcal{J}_k)$, $k = 0, 1, \dots, \tilde{k}$ definidos antes. Entonces, x_0 es un punto de impasse de (4.1) si y sólo si $x_0 \notin \tilde{Z} = Z(\mathcal{J}_{\tilde{k}})$.*

Caso 2: Singularidades no esenciales. Enunciamos a continuación un resultado que garantiza la existencia de puntos de cruce [11]. Para demostrar este resultado se utilizan el Teorema 4.1.15, su Corolario 4.1.16 y la Proposición 4.1.17.

Teorema 4.2.4. *Sea $x_0 \in M_{(0)}^{ne}$ tal que todos los autovalores de la matriz Jacobiana $Dg(x_0)$ tienen el mismo signo. Consideremos un autovalor λ de $Dg(x_0)$ y un autovector correspondiente v_λ . Si $\lambda \neq 0$ y v_λ no es tangente a $M_{(0)}$ entonces x_0 es un punto cruce de (4.1).*

Revisitamos el Ejemplo 1.2.1 para encontrar analíticamente los puntos de impasse y de cruce del sistema (1.2). Para poder aplicar los resultados precedentes calculamos para este ejemplo

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_1, x_2) = \det a_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ g(x) &= g(x_1, x_2) = (\text{adj } a(x_1, x_2))^t f(x_1, x_2) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $M = \mathbb{R}^2$, $a(x)$ y $f(x)$ son aplicaciones analíticas y $\det a(x)$ no es idénticamente nulo sobre M , por la Observación 4.1.1, en la descomposición $M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)}$ resulta que $M_{(1)} = \emptyset$ y luego M es la unión disjunta $M = M_{(0)} \cup M_{(2)}$.

El conjunto de los puntos singulares es

$$M_{(0)} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \det a(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\},$$

$M_{(0)}$ es la unión disjunta

$$M_{(0)} = M_{(0)}^e \cup M_{(0)}^{ne},$$

donde los conjuntos de singularidades esenciales y no esenciales son, respectivamente, los siguientes

$$\begin{aligned} M_{(0)}^e &= \{(x_1, x_2) \in M_{(0)} : g(x_1, x_2) \neq 0\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -x_1, x_1 \neq 0\}, \end{aligned}$$

$$M_{(0)}^{ne} = \{(x_1, x_2) \in M_{(0)} : g(x_1, x_2) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Consideraremos primero las singularidades esenciales. Por Lema 4.1.7 sabemos que estas singularidades no pueden ser puntos de cruce. Luego, estudiaremos si existen puntos de impasse dentro de las singularidades esenciales.

Para aplicar el Teorema 4.2.3 buscamos el ideal final $\mathcal{J}_{\tilde{k}}$ y el conjunto de ceros $\tilde{Z} = Z(\mathcal{J}_{\tilde{k}}) = \{x \in M : \varphi_0(x) = 0, \dots, \varphi_{\tilde{k}}(x) = 0\}$:

$$\varphi_0(x) = h(x) = h(x_1, x_2) = \det a_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$\varphi_1(x) = \nabla \varphi_0(x) \cdot g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = -x_2,$$

$$\varphi_2(x) = \nabla \varphi_1(x) \cdot g(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2,$$

y dado que $\varphi_2(x) = \varphi_0(x)$ es inmediato que $\tilde{k} = 1$ y el ideal final resulta

$$\mathcal{J}_{\tilde{k}} = \mathcal{J}_1 = \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle.$$

El conjunto de los ceros de $\mathcal{J}_1$ es

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = Z(\mathcal{J}_1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) = 0\} = \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0, -x_2 = 0\} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Si $x_0 \in M_{(0)}^e$ entonces $x_0 \neq (0, 0)$ lo cual indica que $x_0 \notin \tilde{Z}$, aplicando el Teorema 4.2.3 concluimos que x_0 es un punto de impasse de (1.2).

Se tiene entonces que todas las singularidades esenciales son puntos de impasse de (1.2).

Ahora analizaremos la única singularidad no esencial que es el punto $(0, 0)$ y para ello vamos a calcular la matriz $Dg(0, 0)$:

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

que por ser una matriz constante coincide con $Dg(0, 0)$.

Los autovalores de $Dg(0, 0)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, y los autovectores correspondientes son, respectivamente, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

El punto $(0, 0)$ verifica las hipótesis del Corolario 4.1.13, en efecto:

1. $g(0, 0) = 0$
2. $\nabla h(0, 0) = (1 \ 1) \neq (0 \ 0)$
3. $Dg(0, 0)$ tiene un autovalor real simple $\lambda_1 = -1 < 0$
4. todos los demás autovalores de $Dg(0, 0)$ tienen parte real mayor que λ_1 pues el otro autovalor es $\lambda_2 = 1$
5. el autovector correspondiente al autovalor $\lambda_1 = -1$ es $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que no es tangente a $M_{(0)}$;

luego $(0, 0)$ es un punto de cruce del sistema (1.2).

A partir de la Proposición 4.1.17 y teniendo en cuenta que en este caso $Dg(0, 0)$ es diagonalizable, se tendrán exactamente dos soluciones de cruce por $(0, 0)$, tangentes en $(0, 0)$ a cada uno de los autovectores v_1 y v_2 [26].

Capítulo 5

ANÁLISIS DE PUNTOS DE IMPASSE Y PUNTOS DE CRUCE EN CIRCUITOS NO LINEALES

Usaremos los resultados generales presentados en el capítulo anterior para encontrar condiciones sobre la existencia de puntos de impasse y puntos de cruce en dos familias de circuitos no lineales. Para ambas familias ilustraremos los resultados obtenidos con ejemplos concretos.

5.1. Circuito RCL no lineal: puntos de impasse y puntos de cruce.

Revisitaremos el circuito *RCL* de la Sección 3.2 modelado por la ecuación (3.19) con dominio $M = \mathbb{R}^4$, que llamamos $(a, f)|M$. Recordemos que encontramos la descomposición de M , $M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)}$, con

$$M_{(0)} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge \psi(x_1, x_4) = 0\},$$

$$M_{(2)} = \emptyset,$$

$$M_{(1)} = \mathbb{R}^4 - M_{(0)} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 \neq 0 \vee \psi(x_1, x_4) \neq 0\}.$$

También vimos que en el caso del resistor controlado por el voltaje, para el sistema levantado $(a_1, f_1)|N^1$, en la descomposición $N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(1)}^1 \cup N_{(2)}^1$, resultó $N^1 = N_{(2)}^1$. Por lo tanto el sistema levantado no tiene puntos singulares, entonces el sistema (3.19) tiene solución en $M_{(0)}$ para cualquier condición inicial en $M_{(0)}$. En particular, no tiene puntos ni de impasse ni de cruce.

Ahora analizaremos el sistema que modela el circuito en el caso del resistor controlado por la corriente.

RESISTOR CONTROLADO POR LA CORRIENTE. Suponemos que $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_4} \neq 0$ para los $x = (x_1, x_4) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $\psi(x_1, x_4) = 0$. Sea $x_4 = \theta(x_1)$ la función analítica no constante, definida sobre el intervalo real abierto I , tal que $\psi(x_1, \theta(x_1)) = 0$.

Aplicaremos el algoritmo de restricciones singular.

Primer paso: Considerando $N^1 = I \times \mathbb{R}$ variedad conexa de dimensión 2, definimos la proyección

$$\pi_0 : N^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ dada por } \pi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2, \theta(x_1))$$

que cumple

$$\begin{aligned} \pi_0(N^1) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = -x_1 - x_2, x_4 = \theta(x_1)\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \psi(x_1, x_4) = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = M_{(0)}. \end{aligned}$$

Para construir el sistema “*levantado*”

$$a_1(x_1, x_2)\dot{x} = f_1(x_1, x_2)$$

calculamos:

$$a(\pi_0(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-x_1 - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(\theta(x_1)) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_1(x_1, x_2)\dot{x} &= a(\pi_0(x_1, x_2))T_x\pi_0(x, \dot{x}) = a(\pi_0(x_1, x_2))D\pi_0(x) \dot{x} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(-x_1 - x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(\theta(x_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\theta(x_1))\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \\
f_1(x_1, x_2) &= f(\pi_0(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces el sistema “*levantado*” es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\theta(x_1))\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos el siguiente sistema cuadrado equivalente, que llamamos otra vez (a_1, f_1) , con la matriz de los coeficientes de orden $2 = \dim N^1$:

$$a_1(x)\dot{x} = f_1(x) \quad (5.1)$$

con

$$\begin{aligned}
a_1(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\theta(x_1))\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} & 0 \end{pmatrix}, \\
f_1(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} \theta(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Observación 5.1.1. Si $(x_1, x_2) \in N^1$ es tal que $\theta(x_1) = 0$ y $x_2 = 0$ entonces el punto (x_1, x_2) es un punto de equilibrio del sistema (5.1), es decir que la solución que parte de ese punto permanece en él en todo tiempo futuro. Asimismo, el punto $\pi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2, \theta(x_1))$ es de equilibrio del sistema (3.19).

Vamos a buscar la descomposición

$$N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(1)}^1 \cup N_{(2)}^1.$$

Tenemos que N^1 es conexo, $a_1(x)$ y $f_1(x)$ son aplicaciones analíticas y $\det a_1(x)$ no es idénticamente nulo sobre N^1 pues $\theta(x_1)$ no es constante; luego, por la Observación 4.1.1, resulta que N^1 es la unión disjunta $N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(2)}^1$. Además $N_{(0)}^1$ es el conjunto de los puntos singulares,

$$\begin{aligned} N_{(0)}^1 &= \{(x_1, x_2) \in N^1 : \det a_1(x_1, x_2) = 0\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in N^1 : C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} L(-x_1 - x_2) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

como L y C son positivas en su dominio obtenemos

$$N_{(0)}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \in N^1 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0 \right\}.$$

Si $N_{(0)}^1 = \emptyset$ resulta $N^1 = N_{(2)}^1$. El algoritmo termina en el primer paso y se garantiza existencia de solución para el sistema

$$(\tilde{a}, \tilde{f}) = (a_1, f_1) \quad \text{con dominio} \quad \tilde{N} = N_{(2)}^1 = N^1.$$

Podemos afirmar que el sistema levantado no tiene puntos singulares, entonces el sistema (3.19) tiene solución en $M_{(0)}$ para cualquier condición inicial en $M_{(0)}$. En particular, no tiene puntos ni de impasse ni de cruce.

Si $N_{(0)}^1 \neq \emptyset$ avanzamos en el segundo paso del algoritmo de restricciones singular.

Segundo paso: Consideramos ahora $N_{(0)}^1 \neq \emptyset$. Como $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1}$ también es analítica, esta función tiene una cantidad numerable de ceros que no son puntos de acumulación, los llamamos x_{1i} para i variando en un subconjunto de los números naturales. Entonces $N_{(0)}^1$ resulta el conjunto formado por las rectas verticales que pasan por los puntos $x_{1i} \in I$. Es decir que $N_{(0)}^1$ no es conexo sino que es unión disjunta de sus componentes conexas de dimensión 1, a las cuales llamamos $N_{(0)}^{1,i}$,

$$N_{(0)}^{1,i} = \left\{ (x_{1i}, x_2) \in N^1 : \frac{d\theta(x_{1i})}{dx_1} = 0 \right\}.$$

Entonces el segundo paso del algoritmo se hace para cada componente conexa. Llamamos $N^{2,i}$ al “*levantado*” de $N_{(0)}^{1,i}$, luego $\dim N^{2,i} = \dim N_{(0)}^{1,i} = 1$. Para $N^{2,i} = \mathbb{R}$ definimos la proyección

$$\pi_1^i : N^{2,i} \rightarrow N^1 \text{ dada por } \pi_1^i(x_2) = (x_{1i}, x_2)$$

que cumple

$$\pi_1^i(N^{2,i}) = N_{(0)}^{1,i}.$$

Para construir el sistema “*levantado*”

$$a_2^i(x_2)\dot{x}_2 = f_2^i(x_2)$$

calculamos:

$$\begin{aligned} a_1(\pi_1^i(x_2)) &= \begin{pmatrix} -L(-x_{1i} - x_2) & -L(-x_{1i} - x_2) \\ C(\theta(x_{1i})) \frac{d\theta(x_{1i})}{dx_1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -L(-x_{1i} - x_2) & -L(-x_{1i} - x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^i(x_2)\dot{x}_2 &= a_1(\pi_1^i(x_2))T_x\pi_1^i(x_2, \dot{x}_2) = a_1(\pi_1^i(x_2))D\pi_1^i(x_2) \dot{x}_2 = \\ &= \begin{pmatrix} -L(-x_{1i} - x_2) & -L(-x_{1i} - x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -L(-x_{1i} - x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x}_2, \end{aligned}$$

$$f_2^i(x_2) = f(\pi_1^i(x_2)) = \begin{pmatrix} \theta(x_{1i}) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema “*levantado*” para $x_2 \in \mathbb{R}$ es

$$\begin{pmatrix} -L(-x_{1i} - x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} \theta(x_{1i}) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo deducir que el sistema sólo tiene solución cuando $\theta(x_{1i}) = 0$ y se trata de la solución $x_2 = 0$. En estos casos obtendremos puntos de equilibrio del sistema original.

Análisis de puntos de impasse y puntos de cruce en $N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(2)}^1$. Si $N_{(0)}^1 \neq \emptyset$, como además $N_{(0)}^1 \neq N^1$, para estudiar la existencia de puntos de impasse y puntos de cruce consideraremos el sistema $(a_1, f_1) | N^1$ con $N^1 = N_{(0)}^1 \cup N_{(2)}^1$, es decir haremos el análisis del sistema en el dominio que encontramos luego de aplicar el primer paso del algoritmo singular.

Por razones de simplicidad en la notación, de ahora en adelante llamaremos $N = N^1$. Además tendremos en cuenta sólo los puntos $(x_1, x_2) \in N$ tales que $\theta(x_1)$ y x_2 no son simultáneamente nulos, ya que en caso contrario, sabemos por la Observación 5.1.1 que son puntos de equilibrio.

Para aplicar los resultados del Capítulo 4 calculamos:

$$\begin{aligned} h(x) = h(x_1, x_2) &= \det a_1(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} L(-x_1 - x_2), \\ g(x) = g(x_1, x_2) &= (\text{adj } a_1(x_1, x_2))^t f_1(x_1, x_2) = \\ &= \begin{pmatrix} x_2 L(-x_1 - x_2) \\ - \left[C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \theta(x_1) + x_2 L(-x_1 - x_2) \right] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Consideramos la unión disjunta

$$N_{(0)} = N_{(0)}^e \cup N_{(0)}^{ne}$$

donde el conjunto de las singularidades esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^e &= \{(x_1, x_2) \in N_{(0)} : g(x_1, x_2) \neq 0\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in N : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

y el conjunto de las singularidades no esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^{ne} &= \{(x_1, x_2) \in N_{(0)} : g(x_1, x_2) = 0\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in N : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Analizaremos primero la existencia de puntos de cruce y puntos de impasse dentro del conjunto de las singularidades esenciales. A partir del Lema

4.1.7 podemos concluir inmediatamente que una singularidad esencial no puede ser punto de cruce. Presentaremos a continuación una condición necesaria y suficiente para que una singularidad esencial sea un punto de impasse del sistema (5.1) y un lema previo que hace más sencilla su demostración. Finalmente concluiremos que toda singularidad esencial de (5.1) es un punto de impasse.

Lema 5.1.2. *Sean las funciones $\varphi_n(x)$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como en el Teorema 4.2.3, entonces la forma general de $\varphi_n(x)$ con $n \geq 1$ para el sistema (5.1) es:*

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{n,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{n,2}(x_1, x_2) + \dots + \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \kappa_{n,n}(x_1, x_2) + \frac{d^{n+1}\theta(x_1)}{dx_1^{n+1}} \kappa_{n,n+1}(x_1, x_2)$$

donde $\kappa_{n,1}(x_1, x_2)$, $\kappa_{n,2}(x_1, x_2)$, $\dots$, $\kappa_{n,n}(x_1, x_2)$ son las funciones que obtenemos después de operar y sacar factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$, $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2}$, $\dots$, $\frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n}$, respectivamente y

$$\kappa_{n,n+1}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1))L^{n+1}(-x_1 - x_2) x_2^n \neq 0.$$

La demostración del Lema 5.1.2 se puede ver en el Apéndice A.

Teorema 5.1.3. *Consideramos el sistema (5.1) y un punto $x = (x_1, x_2) \in N_{(0)}^e = \left\{ (x_1, x_2) \in N : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 \neq 0 \right\}$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $\frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \neq 0$ si y sólo si x es un punto de impasse de (5.1).*

Demostración. Sean las funciones $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y el conjunto $\tilde{Z}$ como en el Teorema 4.2.3. Para ver la forma, calcularemos la función $\varphi_n(x)$ correspondiente al sistema (5.1) para $n = 0, 1, 2$:

$$\varphi_0(x) = h(x) = h(x_1, x_2) = \det a_1(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} L(-x_1 - x_2) \text{ y llamamos}$$

$$\kappa_{0,1}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1))L(-x_1 - x_2) \neq 0.$$

$$\varphi_1(x) = \nabla \varphi_0(x) \cdot g(x) = \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{1,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{1,2}(x_1, x_2)$$

donde $\kappa_{1,1}(x_1, x_2)$ es la función que obtenemos después de operar y sacar factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$ y

$$\kappa_{1,2}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1))L^2(-x_1 - x_2) x_2 \neq 0.$$

$$\varphi_2(x) = \nabla \varphi_1(x) \cdot g(x) =$$

$$= \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{2,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{2,2}(x_1, x_2) + \frac{d^3\theta(x_1)}{dx_1^3} \kappa_{2,3}(x_1, x_2)$$

donde $\kappa_{2,1}(x_1, x_2)$, $\kappa_{2,2}(x_1, x_2)$ son las funciones que obtenemos después de operar y sacar factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$ y $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2}$, respectivamente y $\kappa_{2,3}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1))L^3(-x_1 - x_2)x_2^2 \neq 0$.

Por el Lema 5.1.2 la fórmula general es:

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{n,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{n,2}(x_1, x_2) + \dots + \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \kappa_{n,n}(x_1, x_2) + \frac{d^{n+1}\theta(x_1)}{dx_1^{n+1}} \kappa_{n,n+1}(x_1, x_2)$$

donde $\kappa_{n,1}(x_1, x_2)$, $\kappa_{n,2}(x_1, x_2)$, $\dots$, $\kappa_{n,n}(x_1, x_2)$ son las funciones que obtenemos después de operar y sacar factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$, $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2}$, $\dots$, $\frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n}$, respectivamente y

$$\kappa_{n,n+1}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1))L^{n+1}(-x_1 - x_2)x_2^n \neq 0.$$

A partir de la fórmula general de $\varphi_n(x)$ deducimos:

1. Si $\frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} = 0$ para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, como además $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0$ pues $x = (x_1, x_2) \in N_{(0)}^e$, se tiene que $\varphi_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $x \in \tilde{Z}$, y por el Teorema 4.2.3 resulta que x no es un punto de impasse de (5.1).
2. Por el Teorema 4.2.3, si x no es punto de impasse entonces $x \in \tilde{Z}$, de donde $\varphi_n(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0$, $\kappa_{1,2}(x_1, x_2) \neq 0$ y $\varphi_1(x) = 0$, obtenemos a partir de la fórmula de $\varphi_1(x)$ que

$$\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} = 0.$$

Como $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0$, $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} = 0$, $\kappa_{2,3}(x_1, x_2) \neq 0$ y $\varphi_2(x) = 0$, obtenemos a partir de la fórmula de $\varphi_2(x)$ que

$$\frac{d^3\theta(x_1)}{dx_1^3} = 0.$$

Así siguiendo tenemos que para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n \theta(x_1)}{dx_1^n} = 0.$$

De los incisos 1 y 2 queda demostrada la siguiente condición necesaria y suficiente:

$\frac{d^n \theta(x_1)}{dx_1^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, si y sólo si x no es un punto de impasse de (5.1).

Entonces queda también demostrada la equivalencia que es la tesis del teorema:

Existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tal que $\frac{d^n \theta(x_1)}{dx_1^n} \neq 0$ si y sólo si x es un punto de impasse de (5.1). $\square$

Corolario 5.1.4. *Todas las singularidades esenciales del sistema (5.1) son puntos de impasse.*

Demostración. Sea $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in N_{(0)}^e$ entonces $\frac{d\theta(x_{01})}{dx_1} = 0$. Supongamos por el absurdo que x_0 no es un punto de impasse de (5.1), por el Teorema 5.1.3 se cumple que $\frac{d^n \theta(x_{01})}{dx_1^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Como $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1}$ también es una función analítica y $\frac{d^n \theta(x_{01})}{dx_1^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0$ para todo $x_1 \in I$. Luego $\theta(x_1)$ es una función constante en I , lo que contradice el planteo del modelo del circuito.

Por lo tanto todas las singularidades esenciales de (5.1) son puntos de impasse. $\square$

Ahora analizaremos las singularidades no esenciales. Daremos a continuación condiciones suficientes para la existencia de puntos de cruce en el sistema (5.1).

Teorema 5.1.5. *Consideremos el sistema (5.1) y un punto $x = (x_1, x_2) \in N_{(0)}^{ne}$. Si $\frac{d^2 \theta(x_1)}{dx_1^2} \neq 0$ y los autovalores de $Dg(x)$ son reales, entonces x es un punto de cruce de (5.1).*

Demostración. Para $x = (x_1, x_2) \in N_{(0)}^{ne}$ se tiene que

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} 0 & -L(-x_1) \\ C(\theta(x_1)) \frac{d^2 \theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1) & -L(-x_1) \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de $Dg(x)$ son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[L(-x_1) + \sqrt{L^2(-x_1) + 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[L(-x_1) - \sqrt{L^2(-x_1) + 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)} \right].$$

El autovector correspondiente a λ_2 es

$$v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{L^2(-x_1) + 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)}}{2L(-x_1)} \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis sabemos que $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \neq 0$ y que los autovalores son reales. Además, como $\theta(x_1) \neq 0$ por la Observación 5.1.1, a partir de la expresión de los autovalores de $Dg(x)$ podemos concluir que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Analizaremos los casos de autovalores distintos (con igual o distinto signo) y autovalores iguales, y mostraremos en cada caso que x es punto de cruce.

1. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$,

Mediante cálculos sencillos se pueden verificar las hipótesis del Corolario 4.1.13:

- a) $g(x_1, x_2) = (0, 0)$, que vale pues (x_1, x_2) es singularidad no esencial;
- b) $\nabla h(x_1, x_2) = (L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \quad 0) \neq (0 \quad 0)$;
- c) $Dg(x_1, x_2)$ tiene un autovalor real simple $\lambda_2 < 0$;
- d) el otro autovalor de $Dg(x_1, x_2)$ tiene parte real mayor que λ_2 (en este caso se trata del autovalor real $\lambda_1 > 0$);
- e) $\nabla h(x_1, x_2) \cdot v_{\lambda_2} = L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \neq 0$, es decir, el autovector correspondiente al autovalor λ_2 no es tangente a $N_{(0)}$;

luego (x_1, x_2) es un punto de cruce del sistema (5.1).

2. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

En este caso podríamos aplicar nuevamente el Corolario 4.1.13 teniendo en cuenta la Observación 4.1.14, pero dado que los autovalores tienen el mismo signo aplicaremos el Teorema 4.2.4:

$\lambda_2 \neq 0$ y el autovector v_{λ_2} correspondiente al autovalor λ_2 no es tangente a $N_{(0)}$ pues $\nabla h(x_1, x_2) \cdot v_{\lambda_2} \neq 0$, entonces podemos concluir que (x_1, x_2) es punto de cruce de (5.1).

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Se tiene que $\lambda = \frac{L(-x_1)}{2} \neq 0$, su autovector $v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$, no es tangente a $N_{(0)}$ en x pues $\nabla h(x) \cdot v_\lambda \neq 0$, entonces por el Teorema 4.2.4 tenemos que (x_1, x_2) es punto de cruce de (5.1).

□

Observación 5.1.6. Las soluciones de cruce por x en cada caso están determinadas por los autovalores de $Dg(x)$. En efecto, dicha matriz representa la linealización del campo $g(x) = (\text{adj } a_1(x))^t f_1(x)$ alrededor del punto x . Sabemos por el Lema 4.1.7 que la EDO explícita que representa al campo g tiene a x como punto de equilibrio. Luego las trayectorias de esa EDO alrededor del equilibrio x se pueden determinar a partir del Teorema de Hartman-Grobman [23] teniendo en cuenta las órbitas del sistema linealizado. En base a lo anterior, y a partir del análisis completo de sistemas lineales planares dado por Khalil [26], podemos establecer algunas conclusiones con respecto a las soluciones de cruce de (5.1). Más precisamente, si λ_1 y λ_2 son los autovalores de $Dg(x)$ entonces:

- Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, existen exactamente dos soluciones de cruce por x , tangentes en x a las rectas cuyas direcciones son los autovectores v_{λ_1} y v_{λ_2} de λ_1 y λ_2 , respectivamente.
- Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, existe exactamente una solución de cruce por x tangente a la recta con dirección v_{λ_1} , y existen infinitas soluciones de cruce por x todas tangentes a la recta con dirección v_{λ_2} .
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, existen infinitas soluciones de cruce tangentes en x a la recta cuya dirección está dada por el autovector v_λ .

Ejemplo 5.1.7. Un ejemplo concreto. Consideramos la red no lineal LRC de la Figura 3.2 con capacidad e inductancia constantes $C(V) = \frac{1}{4}$ y $L(I_l) = 4$. Además, en la rama de la resistencia la corriente I_r y el voltaje V se relacionan mediante la ecuación $\psi(I_r, V) = 0$, siendo $\psi(I_r, V) = V - I_r^3 + I_r$. Llamando como antes, $x_1 = I_r$, $x_2 = I_c$, $x_3 = I_l$ y $x_4 = V$, de la ecuación $\psi(x_1, x_4) = 0$ obtenemos para todo $(x_1, x_4) \in \mathbb{R}^2$

$$x_4 = \theta(x_1) = x_1^3 - x_1.$$

Las derivadas de primer y segundo orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(x_1)}{\partial x_1} &= 3x_1^2 - 1, \\ \frac{\partial^2 \theta(x_1)}{\partial x_1^2} &= 6x_1. \end{aligned}$$

En este caso el conjunto de puntos singulares es

$$\begin{aligned} N_{(0)} &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0 \right\} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 - 1 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 \right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 \right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Además $N_{(0)} = N_{(0)}^e \cup N_{(0)}^{ne}$, unión disjunta del conjunto de las singularidades esenciales

$$\begin{aligned} N_{(0)}^e &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 \neq 0 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 \right) : x_2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 \right) : x_2 \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

con el conjunto de las singularidades no esenciales

$$\begin{aligned} N_{(0)}^{ne} &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Por el Corolario 5.1.4, tenemos que todas las singularidades esenciales son puntos de impasse.

En la Figura 5.1 mostramos la gráfica de $N_{(0)}^e$ y algunas soluciones de impasse. El sistema que modela el circuito para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{4}(3x_1^2 - 1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

para hacer la gráfica usamos la rutina ode15s del Matlab [5] que resuelve el sistema explícito:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{4x_2}{3x_1^2 - 1} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{4}(x_1^3 - x_1) - \frac{4x_2}{3x_1^2 - 1}, \end{aligned}$$

el cual es equivalente al original para los $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - N_{(0)}$.

Figura 5.1: Soluciones de impasse del Ejemplo 5.1.7.

Analizaremos ahora las singularidades no esenciales. Los autovalores de $Dg(x)$ son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[L(-x_1) \pm \sqrt{L^2(-x_1) + 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)} \right].$$

Para los puntos $PC_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$ y $PC_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right)$ los autovalores correspondientes resultan en ambos casos $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{8}{3}} \in \mathbb{R}$. Además $\frac{d^2\theta(PC_1)}{dx_1^2} \neq 0$

y $\frac{d^2\theta(PC_2)}{dx_1^2} \neq 0$, luego por el Teorema 5.1.5 podemos concluir que ambas singularidades no esenciales son puntos de cruce de (5.1).

Dado que los autovalores de $Dg(PC_1)$ son distintos pero ambos positivos, se tendrá exactamente una solución de cruce tangente en PC_1 a la recta de dirección v_{λ_1} , e infinitas soluciones de cruce tangentes en PC_1 a la recta de dirección v_{λ_2} . Las mismas conclusiones se obtienen para el punto de cruce PC_2 .

5.2. Circuito RC no lineal: puntos de impasse y puntos de cruce.

Consideremos un sistema que representa el modelo de un circuito compuesto por un resistor no lineal de dos puertos y capacitores:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -I \\ \dot{V}_2 = -I \\ \psi(V_1, V_2, I) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica genérica.

Llamaremos $x_1 = V_1$, $x_2 = V_2$, $x_3 = -I$ y supondremos además que para algún i , con $i = 1, 2, 3$, resulta $\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \neq 0$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifica $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$.

El sistema en forma matricial es

$$a(x)\dot{x} = f(x) \quad (5.3)$$

donde

$$a(x) = a(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

Usaremos el algoritmo de desingularización considerando $M = \mathbb{R}^3$. A continuación encontraremos la descomposición

$$M = M_{(0)} \cup M_{(1)} \cup M_{(2)}$$

dada en [13] considerando para $i = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} S_i(M) &= \{x \in M : \text{rg } a(x) \leq i\}, \\ L_i(M) &= \{x \in S_i(M) : \text{rg}(a(x) \ f(x)) \leq i\}. \end{aligned}$$

El valor máximo de $\text{rg } a(x)$ para $x \in M$ es $k_r = 2$, por lo cual

$$S_{k_r}(M) = S_2(M) = M = \mathbb{R}^3.$$

Debemos calcular entonces

$$L_{k_r}(M) = L_2(M) = \{x \in S_2(M) = \mathbb{R}^3 : \text{rg}(a(x) \ f(x)) \leq 2\},$$

por ser

$$(a(x) \ f(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

resulta

$$L_2(M) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Tenemos $L_2(M) \neq \emptyset$ y además, $\dim L_2(M) < 3$ pues $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \neq 0$ para algún i , con $i = 1, 2, 3$, para los $x \in \mathbb{R}^3$ que verifican $\psi(x) = 0$. Entonces por la Observación 2.3.4 podemos concluir que

$$M_{(0)} = L_2(M) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \psi(x) = 0\},$$

$$M_{(2)} = \emptyset,$$

$$M_{(1)} = \mathbb{R}^3 - M_{(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \psi(x) \neq 0\}.$$

Para hallar la dimensión de N^1 , variedad que se obtiene al “levantar” $M_{(0)}$, consideramos para $x = (x_1, x_2, x_3) \in M_{(0)}$:

$$f^*(x) = \psi(x_1, x_2, x_3) \text{ y } Df^*(x) = \left(\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right).$$

Dado que $\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \neq 0$ para algún i , con $i = 1, 2, 3$, con $x = (x_1, x_2, x_3) \in M_{(0)}$ resulta $\text{rg } Df^*(x) = 1$ entonces

$$\dim N^1 = \dim M_{(0)} = \dim M - \text{rg } Df^*(x) = 3 - 1 = 2.$$

RESISTOR CONTROLADO POR EL VOLTAJE. Supongamos que $\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \neq 0$ para los $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Sea $x_3 = \gamma(x_1, x_2)$ la función analítica no constante definida sobre $N \subset \mathbb{R}^2$, N abierto y conexo, tal que $\psi(x_1, x_2, \gamma(x_1, x_2)) = 0$.

Considerando $N^1 = N$ variedad conexa de dimensión 2, definimos la proyección

$$\pi_0 : N \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } \pi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \gamma(x_1, x_2)),$$

que cumple

$$\begin{aligned} \pi_0(N) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \gamma(x_1, x_2)\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x_1, x_2, x_3) = 0\} = M_{(0)}. \end{aligned}$$

Para construir el sistema “*levantado*”

$$a_1(x_1, x_2)\dot{x} = f_1(x_1, x_2)$$

calculamos:

$$a(\pi_0(x_1, x_2)) = a(x_1, x_2), \text{ por ser } a(x_1, x_2) \text{ una matriz constante,}$$

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= a(\pi_0(x_1, x_2))T_x\pi_0(x, \dot{x}) = a(x_1, x_2)D\pi_0(x)\dot{x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \gamma(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial \gamma(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f(\pi_0(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2, \gamma(x_1, x_2)) = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_2) \\ \gamma(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, \gamma(x_1, x_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_2) \\ \gamma(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema “*levantado*” $(a_1, f_1)|_N$ resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_2) \\ \gamma(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos el siguiente sistema cuadrado equivalente, que llamamos otra vez (a_1, f_1) , con la matriz de los coeficientes de orden $2 = \dim N$:

$$a_1(x)\dot{x} = f_1(x) \quad (5.4)$$

con

$$a_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \gamma(x_1, x_2) \\ \gamma(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

En la descomposición

$$N = N_{(0)} \cup N_{(1)} \cup N_{(2)},$$

resultan:

$$N_{(0)} = \{(x_1, x_2) \in N : \det a_1(x_1, x_1) = 0\} = \emptyset,$$

$$N_{(1)} = \emptyset,$$

luego

$$N_{(2)}^1 = N.$$

Tenemos entonces que el algoritmo termina en el primer paso y se garantiza existencia de solución para el sistema

$$(\tilde{a}, \tilde{f}) = (a_1, f_1) \quad \text{con dominio} \quad \tilde{N} = N_{(2)}^1 = N.$$

Podemos afirmar además que el sistema levantado no tiene puntos singulares, entonces, el sistema (5.3) tiene solución en $M_{(0)}$ para cualquier condición inicial en $M_{(0)}$. En particular, no tiene puntos ni de impasse ni de cruce.

RESISTOR CONTROLADO POR UN VOLTAJE Y LA CORRIENTE.

Supongamos que $\frac{\partial \psi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \neq 0$ para los $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Sea $x_1 = \theta(x_2, x_3)$ la función analítica definida sobre $N \subset \mathbb{R}^2$, N abierto y conexo, tal que $\psi(\theta(x_2, x_3), x_2, x_3) = 0$ y $\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3}$ no es idénticamente nula. Considerando $N^1 = N$ variedad conexa de dimensión 2, definimos la proyección

$$\pi_0 : N \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } \pi_0(x_2, x_3) = (\theta(x_2, x_3), x_2, x_3)$$

que cumple

$$\begin{aligned}\pi_0(N) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = \theta(x_2, x_3)\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x_1, x_2, x_3) = 0\} = M_{(0)}.\end{aligned}$$

Para construir el sistema “*levantado*”

$$a_1(x_1, x_2)\dot{x} = f_1(x_1, x_2)$$

calculamos:

$$a(\pi_0(x_1, x_2)) = a(x_1, x_2), \text{ por ser } a(x_1, x_2) \text{ una matriz constante,}$$

$$\begin{aligned}a_1(x_2, x_3)\dot{x} &= a(\pi_0(x_1, x_2))T_x\pi_0(x, \dot{x}) = a(x_1, x_2)D\pi_0(x)\dot{x} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x},\end{aligned}$$

$$f_1(x_2, x_3) = f(\pi_0(x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ \psi(\theta(x_2, x_3), x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema “*levantado*” $(a_1, f_1)|_{N^1}$ resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos el siguiente sistema cuadrado equivalente, que llamamos otra vez (a_1, f_1) , con la matriz de los coeficientes de orden $2 = \dim N$:

$$a_1(x)\dot{x} = f_1(x) \tag{5.5}$$

con

$$a_1(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ahora buscaremos la descomposición $N = N_{(0)} \cup N_{(1)} \cup N_{(2)}$. Como N es conexo, $a_1(x)$ y $f_1(x)$ son aplicaciones analíticas y $\det a_1(x)$ no idénticamente nulo sobre N , por la Observación 4.1.1, resulta que $N_{(1)} = \emptyset$ y luego N es la unión disjunta $N = N_{(0)} \cup N_{(2)}$.

El conjunto de los puntos singulares es

$$N_{(0)} = \{(x_2, x_3) \in N : \det a_1(x_2, x_3) = 0\} =$$

$$= \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \right\}.$$

Si $N_{(0)} = \emptyset$ entonces $N = N_{(2)}$, el algoritmo termina en el primer paso y se garantiza existencia de solución para el sistema

$$(\tilde{a}, \tilde{f}) = (a_1, f_1) \quad \text{con dominio} \quad \tilde{N} = N_{(2)}^1 = N.$$

Podemos afirmar además que el sistema levantado no tiene puntos singulares, entonces, el sistema (5.3) tiene solución en $M_{(0)}$ para cualquier condición inicial en $M_{(0)}$. En particular, no tiene puntos ni de impasse ni de cruce.

Si $N_{(0)} \neq \emptyset$, como además $N_{(0)} \neq N$, analizaremos sobre N soluciones por puntos singulares de impasse y de cruce. Para usar los resultados existentes calculamos:

$$h(x) = h(x_2, x_3) = \det a_1(x_2, x_3) = -\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3},$$

$$g(x) = g(x_2, x_3) = (\text{adj } a_1(x_2, x_3))^t f_1(x_2, x_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_3 \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ -x_3 \left(1 - \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \right) \end{pmatrix}.$$

Consideramos la unión disjunta

$$N_{(0)} = N_{(0)}^e \cup N_{(0)}^{ne}$$

donde el conjunto de las singularidades esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^e &= \{(x_2, x_3) \in N_{(0)} : g(x_1, x_2) \neq 0\} = \\ &= \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0, x_3 \neq 0, \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \neq 1 \right\} \end{aligned}$$

y el conjunto de las singularidades no esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^{ne} &= \{(x_2, x_3) \in N_{(0)} : g(x_2, x_3) = 0\} = \\ &= \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \wedge \left(x_3 = 0 \vee \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Analizaremos primero las singularidades esenciales, las cuales, por el Lema 4.1.7, no pueden ser puntos de cruce. Presentaremos a continuación un resultado que da una condición necesaria y suficiente para que las singularidades esenciales sean puntos de impasse y un lema previo cuya demostración es análoga a la del Lema 5.1.2.

Lema 5.2.1. *Consideremos el sistema (5.5) y un punto*

$$x = (x_2, x_3) \in N_{(0)}^e = \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0, x_3 \neq 0, \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \neq 1 \right\}.$$

Sean las funciones $\varphi_n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como en el Teorema 4.2.3 entonces la forma general de $\varphi_n(x)$ con $n \geq 1$ es:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \kappa_{n,1}(x_2, x_3) \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \kappa_{n,2}(x_2, x_3) \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} + \dots + \\ &+ \kappa_{n,n}(x_2, x_3) \frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} + \kappa_{n,n+1}(x_2, x_3) \frac{\partial^{n+1} \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^{n+1}}, \end{aligned}$$

donde $\kappa_{n,1}(x_2, x_3), \kappa_{n,2}(x_2, x_3), \dots, \kappa_{n,n}(x_2, x_3)$, son las funciones que se obtienen después de operar y sacar factor común $\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3}, \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2}, \dots, \frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n}$ respectivamente, y $\kappa_{n,n+1}(x_2, x_3) = (x_3)^n (-1)^{n+1} \left[1 - \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \right]^n \neq 0$.

Teorema 5.2.2. *Consideremos el sistema (5.5) y un punto*

$$x = (x_2, x_3) \in N_{(0)}^e = \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0, x_3 \neq 0, \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \neq 1 \right\}.$$

Entonces existe $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. tal que $\frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} \neq 0$ si y sólo si x es un punto de impasse de (5.5).

Demostración. Sean las funciones $\varphi_n(x)$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y el conjunto $\tilde{Z}$ como en el Teorema 4.2.3. Vamos a encontrar la forma general de $\varphi_n(x)$ correspondiente al sistema (5.5):

$$\varphi_0(x) = h(x) = h(x_2, x_3) = \det a_1(x_2, x_3) = -\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \nabla\varphi_0(x) \cdot g(x) = \\ &= \frac{\partial\varphi_0(x_2, x_3)}{\partial x_2}(-x_3)\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_0(x_2, x_3)}{\partial x_3}(-x_3)\left[1 - \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2}\right] = \\ &= \frac{\partial\varphi_0(x_2, x_3)}{\partial x_2}(-x_3)\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} x_3 \left[1 - \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2}\right]\end{aligned}$$

y podemos escribir

$$\varphi_1(x) = \kappa_{1,1}(x_2, x_3)\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \kappa_{1,2}(x_2, x_3)\frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2},$$

donde $\kappa_{1,2}(x_2, x_3) = (x_3)^1(-1)^2\left[1 - \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2}\right]^1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \nabla\varphi_1(x) \cdot g(x) = \\ &= \kappa_{2,1}(x_2, x_3)\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \kappa_{2,2}(x_2, x_3)\frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} + \kappa_{2,3}(x_2, x_3)\frac{\partial^3\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^3},\end{aligned}$$

donde $\kappa_{2,1}(x_2, x_3)$ y $\kappa_{2,2}(x_2, x_3)$ son las funciones que obtenemos después de operar y sacar factor común $\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3}$ y $\frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2}$ respectivamente, y $\kappa_{2,3}(x_2, x_3) = (x_3)^2(-1)^3\left[1 - \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2}\right]^2 \neq 0$.

Del lema 5.2.1 tenemos la forma general de $\varphi_n(x)$ para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \kappa_{n,1}(x_2, x_3)\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \kappa_{n,2}(x_2, x_3)\frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} + \dots + \\ &+ \kappa_{n,n}(x_2, x_3)\frac{\partial^n\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} + \kappa_{n,n+1}(x_2, x_3)\frac{\partial^{n+1}\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^{n+1}},\end{aligned}$$

donde $\kappa_{n,1}(x_2, x_3), \kappa_{n,2}(x_2, x_3), \dots, \kappa_{n,n}(x_2, x_3)$, son las funciones que se obtienen después de operar y sacar factor común $\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3}, \frac{\partial^2\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2}, \dots, \frac{\partial^n\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n}$ respectivamente, y $\kappa_{n,n+1}(x_2, x_3) = (x_3)^n(-1)^{n+1}\left[1 - \frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_2}\right]^n \neq 0$.

A partir de la fórmula general de $\varphi_n(x)$ deducimos:

1. Si $\frac{\partial^n\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} = 0$, para todo $n \geq 2$, como además $\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$ pues $x = (x_2, x_3) \in N_{(0)}^e$, se tiene que $\varphi_n(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $x \in \tilde{Z}$, y por el Teorema 4.2.3 resulta que x no es un punto de impasse de (5.5).
2. Por el Teorema 4.2.3, si x no es punto de impasse de (5.5) entonces $x \in \tilde{Z}$, de donde $\varphi_n(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que $x \in N_{(0)}^e$, $\frac{\partial\theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$, además $\kappa_{1,2}(x_1, x_2) \neq 0$ y $\varphi_1(x) = 0$,

entonces obtenemos a partir de la fórmula de $\varphi_1(x)$ que

$$\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = 0.$$

Como $\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = 0$, $\kappa_{2,3}(x_1, x_2) \neq 0$ y $\varphi_2(x) = 0$, obtenemos a partir de la fórmula de $\varphi_2(x)$ que

$$\frac{\partial^3 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^3} = 0.$$

Así siguiendo obtenemos que para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} = 0.$$

De los incisos 1 y 2 queda demostrada la condición necesaria y suficiente: $\frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} = 0$ para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si x no es un punto de impasse de (5.5).

Entonces queda también demostrada la equivalencia que es la tesis del teorema:

Existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tal que $\frac{\partial^n \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^n} \neq 0$ si y sólo si x es un punto de impasse de (5.5). $\square$

Daremos a continuación condiciones suficientes para que las singularidades no esenciales sean puntos de cruce. Los puntos $(x_2, x_3) \in N$ tales que $x_3 = 0$ son puntos de equilibrio del sistema (5.5), entonces vamos a estudiar las singularidades no esenciales (x_2, x_3) con $x_3 \neq 0$.

Teorema 5.2.3. *Consideremos el sistema (5.5) y un punto $x = (x_2, x_3) \in N_{(0)}^{ne}$, tal que $x_3 \neq 0$.*

Si $\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \neq 0$ y $\Delta(x_2, x_3) = \left[\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \right]^2 + \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} > 0$ entonces x es un punto de cruce.

Demostración. Consideremos la matriz

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} -x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} & -\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \\ -x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} & -\left[1 - \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \right] + x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Por las condiciones de analiticidad, las derivadas cruzadas de $\theta(x_2, x_3)$ son iguales.

Por hipótesis $x = (x_2, x_3) \in N_{(0)}^{ne}$ y $x_3 \neq 0$, como

$$N_{(0)}^{ne} = \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \wedge \left(x_3 = 0 \vee \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 1 \right) \right\}$$

entonces $x = (x_2, x_3) \in \{(x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 1, x_3 \neq 0\}$, de donde resulta

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} -x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} & -x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \\ -x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} & x_3 \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son

$$\lambda_{1,2} = \pm x_3 \sqrt{\Delta(x_2, x_3)},$$

como por las hipótesis $x_3 \neq 0$ y $\Delta(x_2, x_3) > 0$, resultan no nulos, reales y de distinto signo.

El autovector correspondiente a $\lambda_2 = -x_3 \sqrt{\Delta(x_2, x_3)}$ es

$$v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 & \left[\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \right]^{-1} \left[-\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} + \sqrt{\Delta(x_2, x_3)} \right] \end{pmatrix}^t.$$

Para $x_3 > 0$ se verifican las hipótesis del Corolario 4.1.13:

1. $g(x_2, x_3) = (0, 0)$, que vale pues (x_1, x_2) es singularidad no esencial;
2. $\nabla h(x_2, x_3) = \left(-\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \quad -\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \right) \neq (0 \ 0)$ pues $\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \neq 0$ por hipótesis;
3. $Dg(x_2, x_3)$ tiene un autovalor real simple $\lambda_2 < 0$;
4. el otro autovalor de $Dg(x_2, x_3)$ tiene parte real mayor que λ_2 (en este caso se trata del autovalor real $\lambda_1 > 0$);
5. $\nabla \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \cdot v_{\lambda_1} = \sqrt{\Delta(x_2, x_3)} \neq 0$ es decir, el autovector correspondiente al autovalor λ_2 no es tangente a $M_{(0)}$;

luego (x_2, x_3) es un punto de cruce del sistema (5.5).

Para $x_3 < 0$ se verifican también las hipótesis del Corolario 4.1.13 para λ_2 considerando la Observación 4.1.14. $\square$

Tenemos también información acerca de las curvas de cruce: dado que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, existen exactamente dos soluciones de cruce por x , tangentes en x a las rectas cuyas direcciones son los autovectores v_{λ_1} y v_{λ_2} de λ_1 y λ_2 respectivamente [26].

Ejemplo 5.2.4. Un ejemplo concreto. El resistor no lineal de dos puertos considerado por Chua en [15], que mostramos en la Figura 5.2, está descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= 0, \\ -I_2^3 - V_2 I_2 + V_1 &= 0. \end{aligned}$$

Figura 5.2: Resistor no lineal de dos puertos y capacitores.

Aplicando LKC, LKV y la relación entre los elementos del circuito, y eliminando tantas variables como sea posible, si llamamos $x_1 = V_1$, $x_2 = V_2$ y $x_3 = -I_1$, obtenemos el modelo representado por la EDICL

$$a(x)\dot{x} = f(x)$$

con

$$\begin{aligned} a(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(x) &= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siendo $\psi(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 + x_2 x_3 + x_1$.

Como $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$, encontramos $x_1 = \theta(x_2, x_3) = -x_3^3 - x_2 x_3$ para todo $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$.

Para $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$ las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -x_3, \quad \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = -3x_3^2 - x_2,$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -6x_3, \quad \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} = -1$$

y

$$\Delta(x_2, x_3) = \left[\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3} \right]^2 + \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = 1$$

A partir del sistema “*levantado*” obtenemos el siguiente sistema cuadrado,

$$a_1(x) \dot{x} = f_1(x) \quad (5.6)$$

con

$$a_1(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 & -3x_3^2 - x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de los puntos singulares en el ejemplo es

$$\begin{aligned} N_{(0)} &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : -3x_3^2 - x_2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Consideramos la unión disjunta

$$N_{(0)} = N_{(0)}^e \cup N_{(0)}^{ne}$$

donde el conjunto de las singularidades esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^e &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0, \ x_3 \neq 0, \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} \neq 1 \right\} = \\ &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : -3x_3^2 - x_2 = 0, \ x_3 \neq 0, x_3 \neq -1 \right\} \end{aligned}$$

y el conjunto de las singularidades no esenciales es

$$\begin{aligned} N_{(0)}^{ne} &= \left\{ (x_2, x_3) \in N : \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \wedge \left(x_3 = 0 \vee \frac{\partial \theta(x_2, x_3)}{\partial x_2} = 1 \right) \right\} = \\ &= \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : -3x_3^2 - x_2 = 0 \wedge (x_3 = 0 \vee x_3 = -1) \right\} = \\ &= \{(0, 0); (-3, -1)\}. \end{aligned}$$

Si $x = (x_2, x_3)$ es una singularidad esencial del sistema entonces $x_3 \neq 0$ y resulta $\frac{\partial^2 \theta(x_2, x_3)}{\partial x_3^2} = -6x_3 \neq 0$; aplicando el Teorema 5.2.2, se verifica la hipótesis para $n = 2$, de donde se obtiene que x es un punto de impasse. Por lo tanto, en este ejemplo concreto, todos los puntos que son singularidades esenciales son puntos de impasse.

En la Figura 5.3 mostramos la gráfica de $N_{(0)}^e$ y algunas soluciones de impasse. Para hacer la gráfica usamos la rutina `ode15s` del Matlab [5] que resuelve el sistema explícito

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{3x_3^2 + x_2x_3}{3x_3^2 + x_2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{-x_3 - x_3^2}{3x_3^2 + x_2},\end{aligned}$$

el cual es equivalente a (5.6) para los $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 - N_{(0)}$.

Figura 5.3: Soluciones de impasse del Ejemplo 5.2.4.

Estudiaremos ahora las singularidades no esenciales. El punto $(0, 0)$ es punto de equilibrio del sistema (5.6) ya que $f_1(x_2, x_3) = (x_3 \ x_3)^t$ entonces $f_1(0, 0) = (0 \ 0)^t$.

El punto $(-3, -1)$ verifica las hipótesis del Teorema 5.2.3: es una singularidad no esencial tal que

$$\frac{\partial^2 \theta(-3, -1)}{\partial x_3^2} = -6(-1) = 6 \neq 0 \quad \text{y} \quad \Delta(-3, -1) = 1 > 0,$$

luego resulta un punto de cruce de (5.6). Para obtener información sobre las soluciones de cruce, consideramos los autovalores de la matriz $Dg(-3, -1)$,

$\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, cuyos autovectores correspondientes son los vectores $v_{\lambda_1} = (3 \ 1)^t$ y $v_{\lambda_2} = (1 \ 0)^t$. Como los autovalores son reales y de signos distintos se tendrán exactamente dos soluciones de cruce por $(-3, -1)$, tangentes en ese punto a las rectas cuyas direcciones son los autovectores v_{λ_1} y v_{λ_2} .

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo estudiamos distintos resultados sobre ecuaciones diferenciales implícitas orientados a su aplicación a los circuitos eléctricos. Para usar esos resultados definimos la ecuación diferencial implícita cuasilineal y demostramos que no se pierde generalidad al trabajar con ella. Nos centramos en las EDIs que tienen puntos singulares y visitamos dos algoritmos de restricciones conocidos, que llamamos regular y singular. Estos algoritmos permiten encontrar un subconjunto del dominio de la ecuación donde se puede garantizar existencia de solución.

Aplicamos el algoritmo regular a un circuito genérico lineal LC y encontramos condiciones suficientes para que el número de pasos del algoritmo sea 1 o 3. Además, obtuvimos un sistema explícito equivalente, que restringido a un subespacio final de restricciones, cumple con que sus curvas solución están contenidas en dicho subespacio. Presentamos un circuito genérico no lineal RCL y le aplicamos el algoritmo singular para hallar un sistema equivalente en un dominio donde se garantiza existencia de solución. La dimensión de dicho dominio resulta menor que la dimensión del dominio original.

Definimos los puntos singulares de impasse y puntos singulares de cruce y consideramos resultados ya conocidos referidos a su existencia. Usando esas herramientas encontramos resultados originales para la existencia de puntos singulares de impasse y puntos singulares de cruce en la familia de circuitos no lineales RCL mencionada antes y en una familia de circuitos no lineales

RC .

Dado que se encontró cierta analogía en las condiciones para la existencia de puntos de impasse y puntos de cruce entre los circuitos RCL y RC genéricos, resulta natural, en trabajos futuros avanzar en la búsqueda de resultados más generales o abarcativos.

Con respecto a la existencia de puntos de impasse, también es importante profundizar en la búsqueda de condiciones que determinen, en los modelos de redes no lineales, si son puntos de impasse de entrada o de salida.

Progresar asimismo en lo que se refiere a las soluciones de cruce. Por un lado en la teoría general, para resolver casos aún no estudiados. Por ejemplo, el de las soluciones de cruce tales que su derivada se anule en el punto de cruce, es decir, soluciones que tienden en tiempo finito a un equilibrio singular. Por otra parte, estudiar métodos numéricos que permitan obtener buenas aproximaciones y gráficas de las soluciones de cruce.

Desde el enfoque numérico, resulta de interés avanzar en el estudio de diferentes métodos para analizar la existencia de soluciones de EDIs, en particular, estudiar qué sucede desde el punto de vista numérico cuando se presentan singularidades.

Como un objetivo interdisciplinario, implementaremos los circuitos no lineales que analizamos a los efectos de validar los resultados obtenidos mediante ensayos experimentales.

Sería relevante entender el mecanismo de fenómenos de impasse o de cruce, también de otros fenómenos singulares, no sólo en la teoría de circuitos sino en otras disciplinas.

Apéndice A

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 5.1.1

Demostración. Por el método de inducción completa.

Probamos para $n = 1$:

$\varphi_0(x) = h(x) = h(x_1, x_2) = \det a_1(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} L(-x_1 - x_2)$ y llamamos

$$\kappa_{0,1}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) L(-x_1 - x_2) \neq 0.$$

El vector gradiente de $\varphi_0(x)$ es $\nabla \varphi_0(x) = \left(\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_2} \right)$ donde

$$\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial C(\theta(x_1))}{\partial x_1} \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 L(-x_1 - x_2) +$$

$$+ C(\theta(x_1)) \frac{d^2 \theta(x_1)}{dx_1^2} L(-x_1 - x_2) +$$

$$+ C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \frac{\partial L(-x_1 - x_2)}{\partial x_1}$$

y

$$\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_2} = C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \frac{\partial L(-x_1 - x_2)}{\partial x_2}.$$

Dado que $g(x) = g(x_1, x_2) = (\text{adja}(x_1, x_2))^t f_2(x_1, x_2) =$

$$\left(\begin{array}{c} x_2 L(-x_1 - x_2) \\ - \left[C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \theta(x_1) + x_2 L(-x_1 - x_2)(-x_1 - x_2) \right] \end{array} \right),$$

resulta

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \nabla \varphi_0(x) \cdot g(x) = \\ &= \frac{\partial C(\theta(x_1))}{\partial x_1} \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 L^2(-x_1 - x_2) x_2 + \\ &+ C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} L^2(-x_1 - x_2) x_2 + \\ &+ C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \frac{dL(t)}{dt} \Big|_{t=-x_1-x_2} (-1) x_2 L(-x_1 - x_2) + \\ &+ [C(\theta(x_1))]^2 \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \theta(x_1) \frac{dL(t)}{dt} \Big|_{t=-x_1-x_2} (-1) + \\ &+ C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \frac{dL(t)}{dt} \Big|_{t=-x_1-x_2} x_2 L(-x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Después de cancelar el tercer y el quinto término podemos escribir

$$\varphi_1(x) = \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{1,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{1,2}(x_1, x_2),$$

donde $\kappa_{1,1}(x_1, x_2)$ es la función que obtenemos cuando sacamos factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$ y $\kappa_{1,2}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) L^2(-x_1 - x_2) x_2 \neq 0$.

Suponemos cierta la tesis para $n - 1$ entonces debemos probar que es cierta para n :

Como suponemos cierta la tesis para $n - 1$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}(x) &= \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{n-1,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{n-1,2}(x_1, x_2) + \dots + \\ &+ \frac{d^{n-1}\theta(x_1)}{dx_1^{n-1}} \kappa_{n-1,n-1}(x_1, x_2) + \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \kappa_{n-1,n}(x_1, x_2) \\ \text{con } \kappa_{n-1,n}(x_1, x_2) &= C(\theta(x_1)) L^n(-x_1 - x_2) x_2^{n-1} \neq 0. \end{aligned}$$

El vector gradiente de $\varphi_{n-1}(x)$ es $\nabla \varphi_{n-1}(x) = \left(\frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_2} \right)$ donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_1} &= 2 \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} + \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \frac{\partial \kappa_{n-1,1}(x)}{\partial x_1} + \\ &+ \frac{d^3\theta(x_1)}{dx_1^3} \kappa_{n-1,2}(x) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial \kappa_{n-1,2}(x)}{\partial x_1} + \dots + \\ &+ \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \kappa_{n-1,n-1}(x) + \frac{d^{n-1}\theta(x_1)}{dx_1^{n-1}} \frac{\partial \kappa_{n-1,n-1}(x)}{\partial x_1} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{d^{n+1}\theta(x_1)}{dx_1^{n+1}} C(\theta(x_1)) L^n(-x_1 - x_2) x_2^{n-1} + \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \frac{\partial \kappa_{n-1,n}(x)}{\partial x_1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_2} &= \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \frac{\partial \kappa_{n-1,1}(x)}{\partial x_2} + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \frac{\partial \kappa_{n-1,2}(x)}{\partial x_2} + \dots + \\ &+ \frac{d^{n-1}\theta(x_1)}{dx_1^{n-1}} \frac{\partial \kappa_{n-1,n-1}(x)}{\partial x_2} + \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \frac{\partial \kappa_{n-1,n}(x)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Calculamos $\varphi_n(x) = \nabla \varphi_{n-1}(x) \cdot g(x) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 L(-x_1 - x_2) \\ - \left[C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \theta(x_1) + x_2 L(-x_1 - x_2)(-x_1 - x_2) \right] \end{pmatrix};$$

en el producto $\frac{\partial \varphi_{n-1}(x)}{\partial x_1} x_2 L(-x_1 - x_2)$ uno de los términos es

$$\frac{d^{n+1}\theta(x_1)}{dx_1^{n+1}} C(\theta(x_1)) L^{n+1}(-x_1 - x_2) x_2^n,$$

y en cada uno de los otros términos del producto escalar $\nabla \varphi_{n-1}(x) \cdot g(x)$ hay un factor $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$ o $\frac{d^i\theta(x_1)}{dx_1^i}$ para algún $i = 2 \dots n$.

Por lo tanto se cumple la tesis para n porque podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2 \kappa_{n,1}(x_1, x_2) + \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \kappa_{n,2}(x_1, x_2) + \dots + \\ &+ \frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n} \kappa_{n,n}(x_1, x_2) + \frac{d^{n+1}\theta(x_1)}{dx_1^{n+1}} \kappa_{n,n+1}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

donde $\kappa_{n,1}(x_1, x_2)$, $\kappa_{n,2}(x_1, x_2)$, $\dots$, $\kappa_{n,n}(x_1, x_2)$ son las funciones que obtenemos después de operar y sacar factor común $\left[\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \right]^2$, $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2}$, $\dots$, $\frac{d^n\theta(x_1)}{dx_1^n}$, respectivamente y

$$\kappa_{n,n+1}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) L^{n+1}(-x_1 - x_2) x_2^n \neq 0.$$

□

Bibliografía

- [1] **Abraham, J., Marsden, J. and Ratiu, T.** *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Addison-Wesley (1983)
- [2] **Riaza R.** *Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications*. World Scientific. (2008)
- [3] **Maschke B.M., van der Schaft A.J. and Breedveld P.C.** *An Intrinsic Hamiltonian Formulation of the Dynamics of LC-Circuits*. IEEE Trans. Cir. and Syst., vol. 42, No. 2, pp. 73–82 (1995)
- [4] **Gear C.W.** *The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations*. IEEE Trans. Circ. Theory, pp. 89-95 (1971)
- [5] **Shampine L. F., Reichelt M. W. and Kierzenka J. A.** *Solving Index-1 DAEs in Matlab and Simulink*. SIAM Rev., 41 (3), 538-552. (1999)
- [6] **Pritchard F. L.** *On implicit systems of differential equations*. J. Diff. Equations, vol. 194, pp. 328–363 (2003)
- [7] **Rheinboldt W.** *Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds*. Mathematics of Computation, vol. 43, n. 186, pp. 73–482 (1984)
- [8] **Reich, S.** *On an existence and uniqueness theory for nonlinear differential-algebraic equations*. Circuits Systems Signal Process 281, pp. 343-359 (1991).
- [9] **Rabier P. and Rheinboldt W.** *Classical and generalized solutions of time-dependent linear differential-algebraic equations*. Lin. Alg. Appl., vol. 245, pp. 259–293 (1996)

- [10] **Riaza R. and Marz R.** *Linear index-1DAEs: regular and singular problems.* Act. Appl. Math. vol. 84, pp. 29–53 (2004)
- [11] **Zorba, G.** *Existencia de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Implícitas.* Tesis Doctoral, Depto de Matemática, Fac. de Cs. Exactas, UNLP. (2013)
- [12] **Rabier P. and Rheinboldt W.** *A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations.* J. Diff. Equations, vol. 109, pp. 110–146 (1994)
- [13] **Cendra H. and Etchehoury M.** *Desingularization of implicit analytic differential equations.* J. Phys. A:Mat. Gen., vol. 39, pp. 10975–11001 (2006)
- [14] **Marszalek, W., Amdeberhan, T. and Riaza, R.** *Singularity Crossing Phenomena in DAEs: A Two-Phase Fluid Flow Application Case Study.* Comp. and Math. with Appl. J. Math. Anal. and Appl. 49 pp. 303-319 (2005)
- [15] **Chua L.O. and Deng A.C.** *Impasse Points. Part I: Numerical Aspects.* Int. J. Circ. Theory and Appl. vol. 17 pp. 213-235 (1989)
- [16] **Rabier P.J. and Rheinboldt W.C.** *On impasse points of quasilinear differential-algebraic equations.* J. of Math Anal. and Appl. 181 pp. 429-454 (1994)
- [17] **Bierstone E. and Milman P.** *Semianalytic and subanalytic sets.* Publ. Math. l'I.H.E.S. 67 pp. 5-42 (1988)
- [18] **Hironaka H.** *Subanalytic sets.* Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra (Tokyo: Kinokuniya) pp. 453-493 (1973)
- [19] **Lojasiewicz S.** *Sur les ensembles semi-analytiques.* Actes du Congress International des Mathématiciens (Nice) vol. 2 pp. 237-241 (1970)
- [20] **Sussmann H.J.** *Real analytic desingularization and subanalytic sets: an elementary approach.* Trans. Am. Math. Soc. 317 pp. 417-461 (1990)
- [21] **Yoshimura H. and Marsden J.** *Dirac Structures in Lagrangian Mechanics. Part I: Implicit Lagrangian Systems.* J. Geom. Phys., vol. 57 pp. 133–156 (2006)

-
- [22] **Cendra H., Etchehoury M. and Ferraro S.** *An extension of the Dirac and Gotay-Nester theories of constraints for Dirac dynamical systems.* J. Geom. Mechanics., 6 pp. 167-236 (2014)
 - [23] **Perko L.** *Differential Equations and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics 7. Springer. (1991)
 - [24] **Riaza R. and Zufiria P.** *Weak Singularities and the Continuous Newton Method.* J. Math. Anal. and Appl. 236 pp. 438-462 (1999)
 - [25] **Hartman P.** *On local homeomorphisms of Euclidean spaces.* Bol. Soc. Mat. Mexicana vol. 5, pp. 220-241 (1960)
 - [26] **Khalil H.** *Nonlinear Systems.* Prentice Hall Inc. (1996)