

CONTROL Y GUIADO DE UN CUADRICÓPTERO BASADO EN MODELOS LINEALES

L. Gómez, S. Hernández y A. Zumarraga^c

^c Departamento de Aeronáutica – Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de La Plata
Calle 116 e/ 47 y 48 - La Plata (1900) - Buenos Aires - Argentina
e-mail: uku@ing.unlp.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo se presenta el desarrollo de un sistema de control de trayectoria para un cuadricóptero usando metodologías de diseño basadas en modelos lineales.

Nuestro objetivo es contar con los subsistemas básicos para la puesta en marcha de un prototipo de la aeronave, disponer luego de un diseño de referencia a la hora de evaluar aproximaciones más sofisticadas y servir como estrategia de contingencia para la implementación de un esquema de detección, identificación y recuperación ante fallas (FDIR).

Se plantea una arquitectura en cascada entre un bloque de control de posición y otro de actitud con separación en frecuencia, junto con los bloques de transformación correspondiente para la definición de referencias de actitud y comando de los actuadores.

Se realiza un análisis de la respuesta aerodinámica de los rotores en un rango amplio de condiciones de operación. Existiendo términos evidentemente no-lineales en cualquier formulación matemática para este problema, se postulan diversas hipótesis simplificadoras para obtener una aproximación lineal y así poder utilizar técnicas de síntesis para sistemas LTI.

Finalmente la pertinencia de estas hipótesis es validada mediante simulación numérica con modelos independientes no lineales, y se consideran algunos puntos débiles del modelado adoptado.

Palabras clave: Control Lineal, Requerimientos, Linealización, Limitaciones, Control en Cascada, Control de Actitud

INTRODUCCIÓN

Un cuadricóptero es un vehículo sub-actuado; posee seis grados de libertad y solo cuatro acciones de control independientes. El modelo matemático más simple para representar su dinámica surge de aplicar las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento a un cuerpo rígido tomando una terna de referencia solidaria al mismo. El modelo resultante es no lineal ya solo por la presencia de términos de acoplamiento de inercia. Sin embargo veremos que una linealización en torno de su condición de equilibrio permite usar un modelo dinámico lineal para la síntesis de los compensadores con resultados satisfactorios; y así definir una arquitectura de base contra la cual contrastar diseños más sofisticados. Por otra parte, desde el análisis lineal es posible definir de una forma clara y comprensible los requerimientos y compromisos en el diseño cuando se trata de llevar la propuesta a una realización práctica.

En este trabajo presentamos una síntesis de la definición de requerimientos, planteo del diseño y su validación en simulación. En función de acotar el alcance no se abunda en desarrollos matemáticos relativamente obvios, ni se analizan los aspectos específicos del hardware o de la instrumentación.

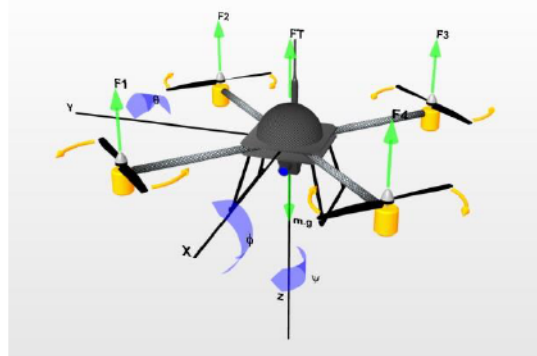
METODOLOGÍA

El cuadricóptero aquí considerado es un vehículo de pequeñas dimensiones (menor a un metro) actuado mediante cuatro motores eléctricos de tipo *brushless* contra-rotantes en pares. Podemos considerarlo como un cuerpo rígido con confianza, dado que la frecuencia del primer modo elástico está muy por encima del mayor ancho de banda que pretendemos alcanzar.

Como es habitual al analizar la mecánica de un rígido, adoptando una terna de referencia solidaria al vehículo centrada en su centro de gravedad y aplicando las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento lineal y angular obtenemos las ecuaciones cardinales de la mecánica:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{M} \quad , \quad \vec{H} = \mathbf{J}\vec{\omega} + \vec{h} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P} = \vec{F} \quad , \quad \vec{P} = m\vec{V} \quad (2)$$



, en donde \vec{H} es la cantidad de movimiento angular (o momento cinético) total, \vec{P} es la cantidad de movimiento lineal, \vec{V} y $\vec{\omega}$ son las velocidades lineal y angular, \vec{M} y \vec{F} son los momentos y fuerzas resultantes, m es la masa, \mathbf{J} es el tensor de inercia y \vec{h} es el momento cinético resultante de todas las masas rotantes. El segundo término del lazo izquierdo en (1) es el término de acoplamiento de inercia que surge por considerar una terna de referencia no inercial. Esto último es necesario para poder utilizar un tensor de inercia constante.

Además de la atracción gravitatoria, en la suma de fuerzas y momentos incluimos los efectos aerodinámicos generados por los rotores; sobre los cuales tenemos control de velocidad de rotación independiente, y consideramos también la resistencia parásita del fuselaje.

Independientemente del modelo adoptado, con cualquier planteo matemático para la aeronave basado en parámetros concentrados, los efectos aerodinámicos deben ser reemplazados por un desarrollo en serie de Taylor, y este debe ser restringido al término de primer orden si pretendemos que el modelo sea lineal.

Despreciando el momento angular neto \vec{h} de los motores, que por simetría en condiciones nominales es nulo; tenemos lo siguiente:

$$\mathbf{J} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{M}_a(\vec{V}, \vec{\omega}, \vec{W}, \mu)$$

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_a(\vec{V}, \vec{\omega}, \vec{W}, \mu) + R_e^b \vec{g}_e$$

, en donde \vec{F}_a y \vec{M}_a son las fuerzas y momentos aerodinámicos, \vec{W} es la velocidad del viento, μ es el vector de control y R_e^b es la matriz de rotación que permite proyectar el vector gravedad \vec{g}_e en la terna móvil. Todos los vectores en estas ecuaciones están referidos a la terna móvil, excepto por el vector gravedad que está aquí referido a una terna inercial.

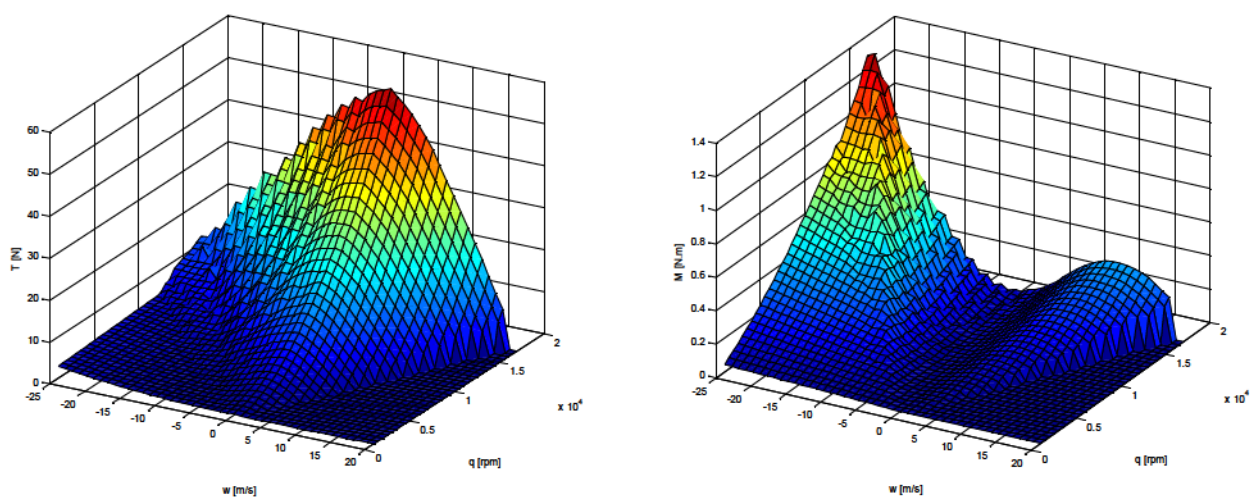
Debemos aclarar que un rotor embestido por un flujo relativo no-axial genera una componente de fuerza y un momento en ejes perpendiculares al eje de rotación. Por lo tanto el modelo para los momentos aerodinámicos debería depender de la velocidad de traslación y del viento lateral. La dirección de estos efectos se invierte si el sentido de giro del rotor cambia; y dado que los rotores giran en sentidos opuestos en pares, el efecto neto de un flujo de aire no alineado al eje z en la condición nominal es nulo. Asumiendo como despreciables estos efectos para pequeños apartamientos de dicha condición podemos independizar los momentos aerodinámicos del desplazamiento lineal.

Con esto, nuestra aproximación para los efectos aerodinámicos queda reducida para cada rotor a una variación de empuje dependiente de su velocidad de giro y de la componente de velocidad de la corriente relativa normal al plano de giro

La deducción analítica de un modelo matemático para la aerodinámica de los rotores no es viable, salvo bajo fuertes restricciones en las condiciones de contorno y en la estructura de la estela vorticiosa. Esperamos contar en un futuro cercano con datos experimentales de túnel de viento; pero para este

trabajo desarrollamos una aproximación numérica cuasi-estacionaria combinando la *Teoría de Elemento de Pala* y la del *Teoría del Disco Actuador* bajo un esquema iterativo, dado que nuestras variables de entrada son velocidad de giro y componente de flujo normal. Si adoptamos curvas experimentales de sustentación y resistencia en función del ángulo de ataque para secciones de la pala, extrapolando a un modelo de placa con flujo desprendido para ángulos mayores al de pérdida. En cada iteración partimos de una estimación de velocidad inducida y calculamos la tracción total. Con esto realizamos una nueva estimación de velocidad inducida e iteramos hasta que dicha estimación converja.

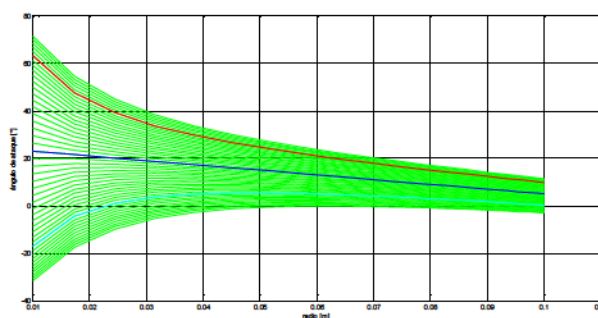
Los resultados obtenidos para tracción T (izquierda) y torque reactivo M (derecha) en función de velocidad de giro ω (indicada como q en el gráfico) y velocidad de flujo axial v (indicada como w en el gráfico) son los siguientes.



Podemos manejar la no linealidad de la respuesta aerodinámica del rotor definiendo a la tracción T como acción de control virtual, y utilizar superficies de ajuste o un mapeo basado en datos experimentales o numéricos para convertir esta acción de control en la acción real ω en tiempo de ejecución. Aun así la obtención de un modelo lineal requiere extraer el valor de la derivada entre tracción y velocidad axial para la condición nominal.

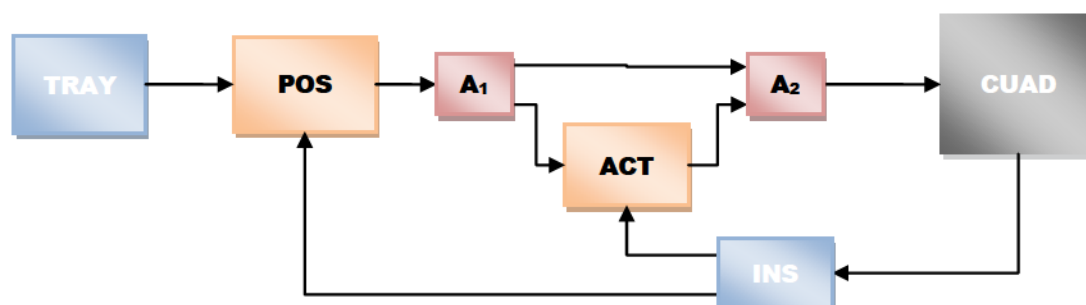
Uno de los aspectos que deben tenerse en cuenta sobre el rango de validez de la aproximación lineal es que con velocidades axiales importantes el rotor entrará en pérdida.

Podemos asumir que la sección de la pala del rotor entrará en pérdida a ángulos de ataque del orden de los 20° . En el siguiente diagrama vemos la variación de ángulo de ataque en función del radio para diferentes velocidades de flujo axial, en donde se han resaltado las variaciones para ± 15 m/s.



Estrategia de Control

Por ser un sistema sub-actuado, el control de posición se logra mediante el ajuste de la intensidad y dirección del vector empuje resultante de los cuatro rotores. Para esto último se requiere contar con la capacidad de controlar la actitud, lo cual se realiza desbalanceando el empuje entre rotores opuestos. Planteamos entonces un control en cascada, en donde el control de actitud constituye un lazo interno del control de posición, y las relaciones entre estos y el vehículo se realiza mediante bloques de transformación \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 :



Las funciones de sensado las provee el sistema de referencia inercial, mientras que la definición de trayectoria podría resultar de comandos de un operador ejecutados en tiempo real, un plan de vuelo programado, de los resultados de un esquema de inteligencia artificial o de un esquema integrado con todos estos elementos.

Como es habitual en estos casos se requiere una separación en frecuencia entre los lazos de posición y actitud para permitirles operar de forma desacoplada. Desde el punto de vista del guiado, la planta es un punto material conducida por un vector fuerza que en principio puede ajustarse de forma libre; mientras que desde el punto de vista del control de actitud el vehículo es un cuerpo rígido con tres grados de libertad para su movimiento angular.

Los sistemas de supervisión y control se implementarán en un microcontrolador ATMEL AT32UC3C, mientras que para sensado se cuenta con un kit de sensores inerciales ATAVRSBIN del mismo fabricante, y se espera contar con un módulo GNSS SE868 de la firma Telit para el sensado de posición absoluta. Para lograr la precisión necesaria en el sensado de posición se deberá integrar un sistema adicional de corto alcance para las pasadas de precisión. Consideramos realizar esto mediante un sistema de video y/o un esquema de GNSS diferencial utilizando un segundo módulo; aspectos estos que aún no hemos desarrollado.

Requerimientos

Hemos planteado como escenario una aplicación a cielo abierto, como por ejemplo el relevamiento de líneas de alta tensión u otras aplicaciones de inspección en altura. Esto implica en principio cierta precisión en el seguimiento de las referencias de posición y capacidad de rechazo de perturbaciones atmosféricas. Ambos aspectos recaen en las funciones de control de posición.

Establecemos como requerimiento una tolerancia de 0.25m en el seguimiento de referencias de posición, pensando en mantener en foco un sistema de video convencional sobre un objetivo a unos 2m de distancia. El análisis del impacto de este requerimiento en el sistema de medición de posición exceden los alcances de este trabajo.

En cuanto a perturbaciones debemos destacar que las maniobras se desarrollan en la denominada baja capa límite atmosférica, en la cual la turbulencia no es isotrópica sino que resulta muy condicionada por los obstáculos. Sin embargo esto no altera en general la zona de decaimiento de la PSD de la turbulencia, que es gobernada en general por procesos de mezcla vorticiosa. Una PSD típica es la siguiente:

$$\frac{f S_u}{\sigma_u^2} = \frac{4X_u(z)}{[1 + 70.78 X_u(z)^2]^{5/6}}$$

, en donde S_u es la función de densidad espectral (componente longitudinal), f es la frecuencia en Hz, y σ_u^2 es la varianza de las fluctuaciones de velocidad (longitudinal). La frecuencia adimensional $X_u(z)$ es $f L(z)/U(z)$, en donde L es la escala integral y z es la altura sobre el terreno a la cual se realiza la medición. Valores típicos a una altitud de $z = 10m$ con una intensidad de viento de $4.5m/s$ son $\sigma_u^2 = 3.32 m^2/s^2$, $L_u = 36m$. El ancho de banda es de aproximadamente:

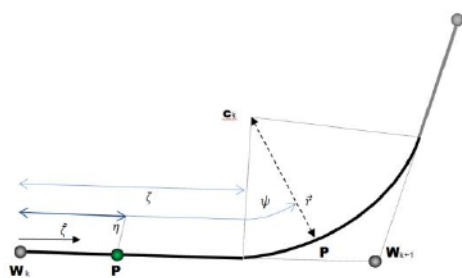
$$f = X_u \frac{U}{L} = (70.78)^{-1} \frac{4.5 m \cdot s^{-1}}{36 m} \times 2\pi \frac{Hz}{s^{-1}} = 0.011 Hz$$

Deducimos de esto que un ancho de banda de 1Hz para la función de sensibilidad complementaria debería proveer buen rechazo a perturbaciones atmosféricas.

La energía de la turbulencia se da en movimientos vorticosos de dimensiones comparables a su escala integral. Adoptando la hipótesis de Taylor para la turbulencia, los remolinos de menor tamaño producen fluctuaciones en frecuencias más altas, y según esta distribución espectral poseen baja energía. La distribución espacial es relevante para evaluar cortantes de viento que pudieran perturbar la actitud del vehículo. Para este caso las dimensiones del cuadricóptero son mucho menores a la escala de la turbulencia, por lo cual las perturbaciones por turbulencia serían poco relevantes para el control de actitud. Por lo tanto del control de actitud solo demandaremos el mayor ancho de banda alcanzable dentro de las limitaciones impuestas por las limitaciones en la actuación.

Dado que los motores pueden entregar un empuje máximo del orden de 7N y se encuentran separados por una distancia de unos 0.4m entre ejes de rotación, con un momento de inercia del orden de los 0.004 kg.m² podríamos imponer un aceleración angular de hasta 700 s⁻². Para una amplitud típica del orden de 0.1 rad la frecuencia alcanzable para establecer un movimiento armónico de rotación sería de unos 13Hz. En base a esto podemos asumir como factible un ancho de banda de 10Hz para el control de actitud, que nos daría una adecuada separación en frecuencia del lazo de control exterior. Para su implementación en tiempo discreto se utilizará una frecuencia de muestreo de 100Hz.

Definición de Rutas programadas



Definimos las rutas a seguir mediante una secuencia de puntos de control (*waypoints*). Para cada punto se define un radio de empalme. Con estos parámetros el *interpolador* calcula el arco necesario para empalmar los segmentos rectilíneos de la poligonal definida por los puntos de control.

En tiempo de ejecución se usa como parámetro la distancia recorrida sobre la ruta para definir la posición de referencia en cada instante de tiempo. La velocidad de avance se define por tramos o se interpola linealmente entre valores asignados a cada punto de control.

Desde el punto de vista del consumo de energía, un arco de circunferencia es la trayectoria óptima para lograr un determinado cambio de rumbo con tiempos y velocidades predeterminadas. Sin embargo presenta una discontinuidad en la aceleración lateral al realizar la transición con un tramo recto. Por el momento no se ha definido un algoritmo para suavizar la transición, con lo cual se acotarían los transitorios en la evolución de las referencias de actitud y en los errores de posición en cada empalme.

Control de Trayectoria y Actitud

Desde el punto de vista del control de trayectoria, el vehículo es un punto material sobre el cual actuamos con una fuerza \vec{F}_μ no restringida. Referido a una terna inercial:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_\mu + \mathbf{C}_v \vec{V} + \vec{g}_e$$

En la realidad \vec{F}_μ está restringida por límites de actuación máxima superior e inferior en su magnitud, y su orientación debe evolucionar en frecuencias inferiores al ancho de banda del control de actitud. Estos aspectos no son incluidos en un modelo lineal, por lo cual deben ser considerados en la definición de referencias y especificaciones de diseño.

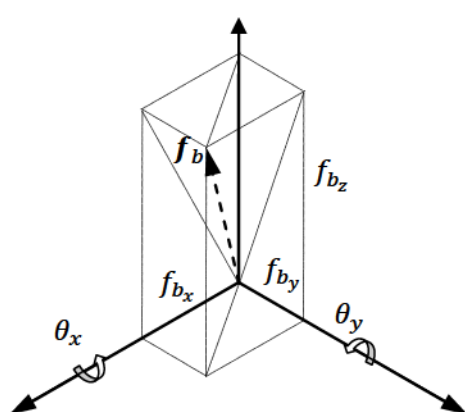
El control puede enfocarse de forma desacoplada. Los controladores de posición horizontal deben incluir acción integral para rechazar perturbaciones constantes debidas al viento medio. El vertical debe cancelar el peso y compensar perturbaciones verticales lentas.

Para el control de actitud también podemos desacoplar los tres grados de libertad correspondientes.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_\xi \\ \ddot{\theta}_\xi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c_m/I_\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\xi \\ \dot{\theta}_\xi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I_\xi \end{bmatrix} \{m_\mu\}$$

En esta expresión c_m es el amortiguamiento aerodinámico, que podemos asumir nulo para rotaciones alrededor del eje z; mientras que m_μ es el momento de control virtual.

Las referencias para el control de actitud de rolido/cabeceo θ_x y θ_y surgen de las rotaciones necesarias en los ejes x e y de la terna móvil para alinear el eje z con la dirección recíproca del vector \vec{F}_μ . Estos cálculos son realizados por el bloque **A₁** antes mencionado en base a las componentes del vector \vec{F}_μ proyectadas en la terna móvil:



$$\vec{F}_b = R_e^b \vec{F}_\mu = f_{b_x} \hat{i} + f_{b_y} \hat{j} + f_{b_z} \hat{k}$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \frac{f_{b_y}}{f_{b_z}}, \quad \theta_y = -\tan^{-1} \frac{f_{b_x}}{f_{b_z}}$$

Estas relaciones son indeterminadas cuando $|\vec{F}_\mu| \sim 0$. En estos casos adoptamos $\theta_x = \theta_y = 0$.

Para el control de actitud no necesitamos acción integral, porque los errores en estado estacionario que pudieran experimentarse quedan resueltos por el control de trayectoria.

De los dos lazos de control de actitud definimos un

vector de momento virtual:

$$\vec{M}_\mu = \begin{Bmatrix} L \\ M \\ N \end{Bmatrix}$$

A partir de $Z = |\vec{F}_\mu|$ y \vec{M}_μ podemos definir las fuerzas requeridas en cada rotor:

$$v = \begin{Bmatrix} Z \\ L \\ M \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -l_x & -l_x & l_x & l_x \\ l_y & -l_y & -l_y & l_y \\ c_N & -c_N & c_N & -c_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = T_f^v \cdot f \quad \rightarrow \quad T_v^f = (T_f^v)^{-1}$$

, en donde l_x y l_y son las distancias de los ejes de los rotores al centro de gravedad; y f es el vector de fuerzas de los cuatro rotores. Restaría aplicar un operador de transformación para convertir estas fuerzas en velocidades de giro de los rotores, según se comentó al describir la relación entre variaciones de empuje y velocidad de giro. N tiene en cuenta el torque aerodinámico experimentado en el eje de los motores; no incluye el transitorio debido a las variaciones de momento cinético de los motores, lo cual debería ser considerado en un refinamiento del modelo para la dinámica de guiñada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para el control de actitud, por la simpleza del modelo planteamos una asignación de polos para cada eje sobre el modelo (frecuencia natural 2Hz y amortiguamiento 0.8 para el eje z; 8Hz y 0.86 para los ejes x e y). Debe tenerse en cuenta que la capacidad de control en el eje de guiñada es radicalmente diferente a la de control de horizonte, pero este no necesita estar acoplado como lazo interno del control de posición por lo cual pueden relajarse los requerimientos en cuanto a ancho de banda.

Para el control de trayectoria se definen funciones de sensibilidad complementaria con ancho de banda del orden de 1Hz. Debido a que necesitamos acción integral en los compensadores para rechazar la componente de perturbación constante asociada a la velocidad media del viento, la dinámica de lazo cerrado resulta de cuarto orden con grado relativo 2. Esto trae algunas dificultades, dado que se incrementa la norma ∞ de la función de sensibilidad, lo cual implica sobrepasos en los transitorios y eventualmente saturación de las acciones de control ante perturbaciones intensas.

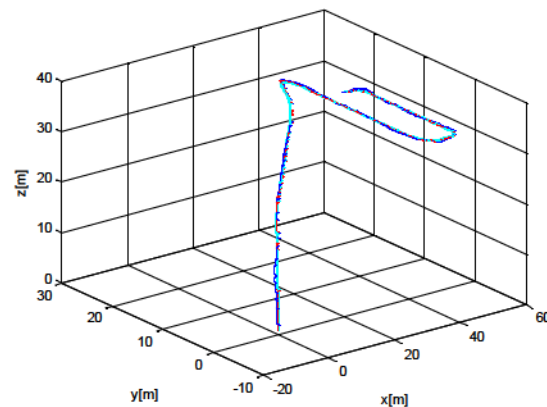
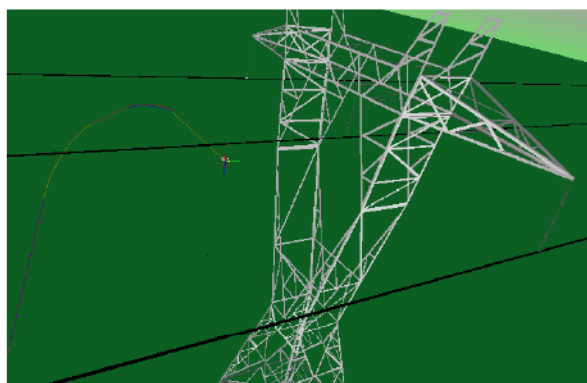
Como validación del concepto de diseño y de las hipótesis de cálculo realizamos una simulación con Matlab-Simulink® totalmente independiente del modelo matemático utilizado para la síntesis. Se utiliza el algoritmo estándar de Simulink (ode45) con un límite superior para el tiempo de integración de 0.01s.

En esta simulación realizamos la integración numérica directa de las ecuaciones cardinales de la mecánica, con simulación independiente de los efectos en cada rotor. Para este último utilizamos de forma directa los resultados de los modelos numéricos para la aerodinámica, las limitaciones del controlador y los efectos inerciales debidos a las variaciones del momento angular del motor.

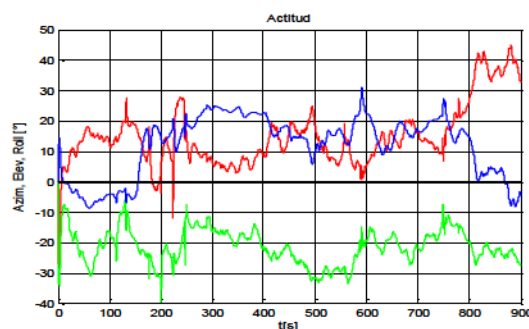
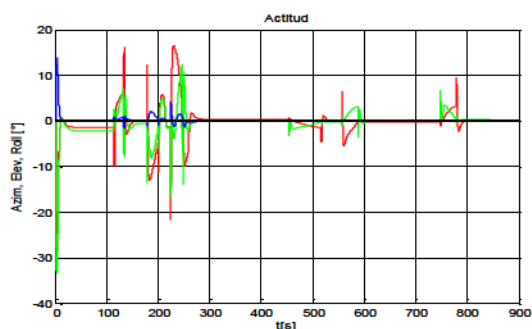
Incluimos también efectos atmosféricos tanto en valores de viento medio como variaciones estocásticas por turbulencia.

El sistema de sensado (INS y GNSS) aún no está adecuadamente modelado. Como primera aproximación se incluyó ruido blanco gaussiano en la banda [0,100] Hz en las mediciones; con niveles rms de 0.25° para los ángulos y $5^\circ/s$ para velocidades angulares. Se asume que se cuenta además con un sensado de posición absoluta integrado con los sensores inerciales, para alcanzar una precisión de al menos 0.1m.

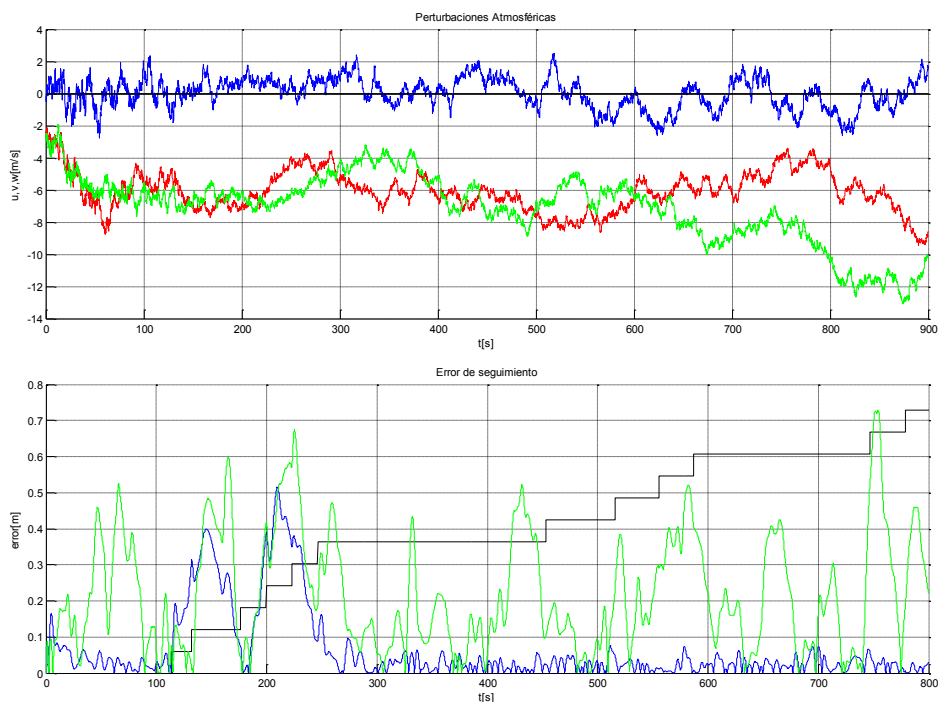
En la simulación se reproduce la ejecución de un plan de vuelo en el cual se plantea una ruta de aproximación y una pasada de inspección alrededor de la torre de alta tensión; primero en condiciones meteorológicas de calma y luego ante un viento en superficie de 10 m/s (cerca de 20knt, condición F5 en la escala de Beaufort).



En las siguientes figuras vemos actitud (azimut, elevación y rotación en rojo, verde y azul) en los escenarios sin viento (izquierda) y con viento (derecha).



En las figuras que siguen se ven las perturbaciones atmosféricas (arriba) y la magnitud del vector error (abajo) en condición de calma (verde) y con viento (azul). En negro se indica el tramo de ruta correspondiente.



La pasada de inspección se inicia aproximadamente a los 300 segundos. La velocidad de desplazamiento en este tramo es 1 m/s.

Existen al menos dos condiciones para las cuales el modelo lineal es inválido: vehículo con momento cinético medio no-nulo (por ejemplo cuando hay un spin sostenido en el eje z) y condiciones de pérdida aerodinámica de los rotores. Podemos reproducir estas condiciones en la simulación.

Si no se cuenta con control de guiñada, es fácil alcanzar estados con velocidades de rotación aun moderadas para las cuales el control de horizonte se inestabiliza. Se trata del mismo fenómeno de acoplamiento de inercia que condujo a varios accidentes en aeronaves experimentales de la serie X de la NASA, y puede estudiarse a partir de los términos cuadráticos despreciados en la linealización.

Respecto de la condición de pérdida aerodinámica, esta puede inducirse por ejemplo con una inversión rápida en la velocidad de la referencia cuando la velocidad de avance es elevada.

CONCLUSIONES

La dinámica de un cuadricóptero responde claramente a un modelo no-lineal, tanto por efectos inerciales como aerodinámicos. Aun así, mediante una adecuada definición de especificaciones de diseño, bloques de asignación de control y restricciones en la definición de referencias, es posible utilizar los métodos del control clásico con modelos extremadamente simplificados. Los resultados muestran que para condiciones de viento moderado resulta difícil mantener la trayectoria dentro de las tolerancias propuestas originalmente, requiriéndose un ajuste más fino de los compensadores.

Debe evitarse llevar el vehículo a una condición de pérdida aerodinámica limitando la velocidad de las referencias de posición. En el caso de preverse situaciones con velocidad media de rotación no nula debería implementarse un control de tipo LPV, o pasar directamente a esquemas de control no-lineal para manejar los acoplamientos de inercia en el control de actitud.

REFERENCIAS

1. G.C. Goodwin, S.F. Graebe, M.E. Salgado: "Control System Design". Prentice Hall; 2001
2. D. Mc Lean: "Automatic Flight Control Systems". Prentice-Hall; 1990
3. M.V. Cook: "Flight Dynamics Principles - A Linear Systems Approach". Elsevier; 2007.
4. T.I. Fossen: "Marine Control Systems". Marine Cybernetics S.A. 2002
5. F.M. Hoblit: "Gust Loads on Aircraft: Concepts & Applications". AIAA. 2001