GRANDES DESVIACIONES PARA V-ESTADISTICOS

Mesón, Alejandro M. y Vericat, Fernando

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI),
Departamento de Ciencias Básicas, UNLP, La Plata, Argentina
Email: meson@iflysib.unlp.edu.ar

El estudio de V-estadísticos, o promedios multiergódicos, es de particular interés para formular una intrerrelación entre Sistemas Dinámicos y Teoría de Números. Uno de los principales problemas en esta disciplina es el estudio de lo que se denomina espectro multifractal. Este consiste, a grandes rasgos, en la descomposición del espacio fase en conjuntos de nivel con una estructura fractal, y de lo que se trata es de estimar su dimensión. En esta comunicación presentaremos algunos resultados acerca de tal descripción, como así también el análisis de lo que se denomina parte irregular del espectro. Esto es tendiente al problema que menciona el título de la comunicación que es de grandes desviaciones para V-estadísticos. Este consiste esencialmente en estimar la probabilidad de que un promedio multiergódico se aparte de una cantidad dada. Los procesos de grandes desviaciones se describen por medio de funciones adecuadas. Se presentará una descripción del mencionado proceso de gran desviación.

Palabras clave: Promedios multiergódicos, V-estadísticos, grandes desviaciones.

INTRODUCCION

Por un sistema dinámico entendemos simplemente un espacio X con una función f que transforma cada punto de X en otro punto de X. Esto lo podemos visualizar de la siguiente manera sea x_i un punto de X entonces x_i se transformará en el punto $x_{i+1} = f(x_i)$. En Teoría Ergódica se consideran las transformaciones de cada punto x en los puntos $x_0 = x$, $x_1 = f(x)$, ..., $x_{n-1} = f^{n-1}(x)$. Cada uno de los puntos así obtenidos se llaman las *órbitas de x.*

Los denominados promedios ergódicos son promedios de funciones reales definidas sobre X a lo largo de las órbitas de puntos pertenecientes a tal espacio. Al sistema dinámico formado por el par (X, f) se le agregará una medida de probabilidad μ sobre X de modo que tendremos un espacio de probabilidad. Más específicamente los promedios ergódicos se definen de la siguiente manera: sea φ una función definida sobre X, el promedio ergódico de orden n en el punto x es

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^{\,i}(x)) \tag{1}$$

El teorema ergódico de Birkhoff establece la convergencia del promedio anterior cuando $n \to \infty$. Tal convergencia se da para todos los puntos del espacio excepto en un conjunto de elementos que tiene lo que denomina medida nula, esto es la probabilidad μ de cada uno de esos conjuntos es 0. En general la motivación para estudiar este tipo de promedios es disponer de una descripción cualitativa del comportamiento global de las órbitas, lo cual es de interés especialmente en relación a sistemas tan complejos que una descripción detallada de las mismas es poco menos que imposible.

En los denominados promedios multiergódicos se consideran distintas órbitas de cada punto. Estos promedios aparecieron como una versión dinámica del teorema de Szemeredi en teoría combinatoria de números. Esta analogía fue observada por Furstemberg, quien estudió promedios de la forma

$$\frac{1}{N-M}\sum_{n=0}^{N-1}\mu(A\cap f^{n}(A)\cap,,,\cap f^{kn}(A)) \qquad (2)$$

y probó que el límite para $N\to\infty$ de (2) es positivo para cualquier *k*. Por medio de este resultado se puede probar la existencia de progresiones aritméticas de cualquier longitud en ciertos subconjuntos de números enteros.

Los $V-$estadísticos son promedios multiergódicos de la siguiente forma: sea r un número natural y sea X^r el producto de $r-$copias del espacio X, sea Φ una funciòn definida sobre X^r y a valores reales, entonces los $V-$estadísticos de orden r y núcleo Φ son

$$V_{\Phi}(x,n)=\frac{1}{n^{r}}\sum_{1\leq i_1 .. i_r\leq n_r}\Phi(f^{i_1}(x),...,f^{ir}(x)) \ . \qquad (3)$$

Obviamente, para $r=1$ obtenemos el clásico promedio ergódico (1).

Una estructura fractal puede aparecer por ejemplo de la siguiente manera, supongamos que tomamos un segmento, lo subdividimos en tres partes y le quitamos la central, a cada de las partes que quedan las volvemos a subdividir y nos quedamos con las dos de los extremos y así, nos quedaría un conjunto cuya dimensión no es cero ni tampoco 1, es un conjunto de dimensión fractal (fraccionaria). Un caso de fractalidad puede ocurrir si se quiere medir la longitud de una costa, se van tomando aproximaciones por segmentos lo que daría un conjunto de naturaleza fractal cuya dimensión está entre uno y dos. El Análisis Multifractal consiste como, su nombre lo indica, en considerar varias estructuras fractales por medio de una descomposición del espacio X en conjuntos de nivel de naturaleza fractal. El problema es describir tales conjuntos por medio de diversas funciones (entropía topológica, dimensión de Hausdorff, etc) que miden la dimensión de estos conjuntos, que, según dijimos, no tiene por que ser entera. Aquí de nuevo se trata de lograr una descripción cualitativa de sistemas dinámicos cuya complejidad hace imposible un estudio más detallado. Tal es el caso de la predicción del clima visto como la manifestación de un sistema dinámico muy complejo

En el caso concreto de $V-$estadísticos la descomposición multifractal está dada por

$$E_{\Phi}(\alpha)=\{x:\lim_{n\to\alpha}V_{\Phi}(x,n)=\alpha\}. \qquad (4)$$

La parte irregular, o conjunto histórico, de este espectro es el conjunto de puntos x en los cuales el límite no existe. Lo de histórico es una denominación de Ruelle y se debe a que tales puntos pueden ser interpretados como los “cambios de época” del sistema. Por ejemplo es sistemas que estudian comportamientos climáticos estos serían en los cuales se producen cambios significativos en el clima. En el caso de $r=1$ se probó que la parte irregular del espectro tiene dimensión igual a la de todo el espacio (Thompson), o sea este conjunto es despreciable desde el punto de vista de Teoría Ergódica (recordemos que tiene probabilidad cero), pero sin embargo es significativo desde el punto de vista de teoría de la dimensión. El objetivo de esta comunicación es probar que este fenómeno ocurre también para cualquier r, o sea para el caso de V-estadísticos.

Otro problema relacionado con promedios multiergódicos que nos interesa abordar en esta comunicación es el tema de Grandes Desviaciones. El asunto principal en este campo es estimar el promedio de secuencias del tipo $\{\nu_n(A)\}$ donde $\{\nu_n\}$ es una secuencia de probabilidades en un espacio Θ y A es un subconjunto de X. Para describir un proceso de gran desviación debe encontrase una función $I:\Theta\to[0,\infty)$ tal que

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{1}{n}\log\nu_n(F)\leq\sup\{I(x):x\in F\}$$
$$\lim_{n\to\alpha}\frac{1}{n}\log\nu_n(U)\geq\inf\{I(x):x\in U\}, \qquad (5)$$

donde F es un subconjunto cerrado de X y U es un subconjunto abierto de Θ. La función I se llama función de razón. Esto es lo que se llama un proceso de gran desviación de nivel 2.

Vamos a analizar un proceso de gran desviación para el caso de $\Theta = M(X^r)$=espacio de todas las medidas de probabilidad sobre X^r y donde $\nu_n = \nu(\{x:\xi_{n,r}(x)\in A\})$, con

$$\xi_{n,r}(x)=\frac{1}{n^r}\sum_{1\leq i_1..i_r\leq n_r}\delta_{f^{i_1}(x),\ldots,f^{ir}(x))} \,. \qquad (6)$$

En esta expresión δ representa la medida puntual de Dirac en cada x. Por medio del llamado principio de contracción se podrá estimar la razón de convergencia de los $V-$estadísticos, o sea la convergencia del promedio de la medida del conjunto $\{x:V_\Phi(x,n)\in J\}$, donde J es un intervalo real abierto o cerrado. De esta forma tendremos un proceso de gran desviación para $V-$estadísticos. El *principio de contracción* establece lo siguiente: sea $\{\nu_n\}$ una secuencia de medidas en Θ que satisface un proceso de gran desviación de nivel 2 con función promedio I, sea $\tau:\Theta\to\mathbf{R}$ entonces la secuencia $\{\tau_*(\nu_n)\}$ satisface un proceso de gran desviación en **R**, con función promedio $g(y)=\inf\{I(x):x\in\Theta:\tau(x)=y\}$. Aquí $\tau_*(\nu_n)(A)=\nu_n(\tau(A))$. Sea $\Psi:M(X^r)\to$ **R** y sea $\hat{\Psi}:M(X^r)\to$ **R** definida por $\hat{\Psi}(\rho)=\int\Psi d\rho$, aplicamos entonces el principio de contracción para $\hat{\Psi}=\tau$ y luego la secuencia $\{\hat{\Psi}(\nu_n)\}$ va a satisfacer un principio de gran desviación en **R.** Este es proceso de gran desviación de nivel 1. Si $J\subset$ **R** entonces $\hat{\Psi}(\nu_n)(E)=\nu_n(\hat{\Psi}^{-1}(J))=\nu(\{x:V_\Phi(x,n)\}\in J)$ y de esta forma pueden ser estimadas grandes desviaciones para V-estadísticos, esto es obtener cotas para los promedios

$$\lim_{n\to\alpha}\frac{1}{n^r}\log\nu(\{x:V_\Phi(x,n)\}\in J), \qquad (7)$$

Esto es, la probabilidad de que el promedio multiergódico considerado se aparte en un “tiempo grande” de una cantidad dada.

RESULTADOS

Denotamos por $H(Z)$ la entropía topológica del conjunto Z, este es un concepto introducido por R. Bowen y que como mencionamos es una dimensión. La condición impuesta sobre el sistema será la denominada *especificación*. Intuitivamente esta condición significa que las órbitas pueden aproximarse por puntos especificados previamente.

Teorema 1: Sea (X, f) un sistema dinámico y sea $\Phi : X^r \to \mathbf{R}$ una función continua, sea $E_\Phi{}^\infty$ la parte irregular del espectro multifractal para V-estadísticos con núcleo Φ, entonces

$$H\left(E_\Phi{}^\infty\right) = H(X).$$

Observación: Este resultado fue probado más recientemente por los autores bajo condiciones más débiles que la especificación.

Bosquejo de la demostración:

Se usa como argumento clave el siguiente principio variacional demostrado por Fan, Schemeling y Wu

$$H(E_\Phi(\alpha)) = \sup\left\{h(\mu) : \int \Phi d\mu^r = \alpha\right\}, \tag{8}$$

donde $h(\mu)$ es la entropía de la medida μ y $\mu^r = \mu \times \mu \times ... \times \mu$ $r-$veces. Sea

$$M_\Phi(\alpha) = \left\{\mu : \int \Phi d\mu^r = \alpha\right\} \tag{9}$$

y sea $E_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$ la llamada medida empírica en x. Denotamos por $G_\Phi(\alpha)$ al conjunto de los puntos $x \in X$ tal que hay una secuencia (n_k) de modo que $E_n(x)$ converja a una medida $\mu \in M_\Phi(\alpha)$. La demostración se basa en los siguientes resultados

- Para $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se verifica $G_\Phi(\alpha_1) \cap G_\Phi(\alpha_2) \subset E_\Phi{}^\infty$.

-Para $\alpha_1 \neq \alpha_2$ con $M_\Phi(\alpha_1) \neq \varnothing, M_\Phi(\alpha_2) \neq \varnothing$ es válido

$$H(G_\Phi(\alpha_1) \cap G_\Phi(\alpha_2)) = \min\{H(G_\Phi(\alpha_1)), H(G_\Phi(\alpha_2))\}.$$

Para demostrar el teorema entonces consideremos la función $\Psi(\mu) = \int \Psi d\mu^r$ y sea h la entropía topológica de todo el espacio X la cual por el principio variacional clásico es igual $\sup\{h(\mu)\}$ tomado sobre todas medidas invariantes en X. O sea que tendremos $h = \sup\{h(\mu) : \mu \in M_\Phi(\alpha)\} = \sup\{H(E_\Phi(\alpha))\}$ con el supremo tomado sobre todos los reales α en imagen de Ψ.

Se debe probar que $H\left(E_\Phi{}^\infty\right) \geq h$ esto se hace usando el principio variacional de Fan, Schemeling y Wu y los resultados previamente enunciados.

Observación: Para probar el teorema 1 bajo condiciones más débiles que la especificación fue necesario extender el principio variacional bajo estas condiciones. Esto fue hecho por los autores en (,).

Con respecto a grandes desviaciones enunciamos los principales resultados, previo a dar la definición del siguiente concepto: una función $\Phi_\nu ; X^r \to \mathbf{R}$ asignada a una medida ν es una *función de energía* si para cada $r \geq 1$ se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log\left(\inf_{x\in X}\nu\left(B_{n,\varepsilon}(x)\right)+x:V_{\Phi_\nu}(x,n)\right)\geq 0$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log\left(\sup_{x\in X}\nu\left(B_{n,\varepsilon}(x)\right)+x:V_{\Phi_\nu}(x,n)\right)\leq 0$$

Teorema 2: Sea (X,f) un sistema dinámico, sea $U\subset M(X^r)$ abierto y sea ν una medida de probabilidad en X, para cada función de energía asociada a ν se tiene

$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log\left(\nu\left(\xi_{n,r}(x)\in U\right)\right)\geq \inf\left\{H(\mu)-\int\Phi_\nu d\mu^r,\mu^r\in U\right\}$, Si $F\subset M(X^r)$ es cerrado entonces

$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log\left(\nu\left(\xi_{n,r}(x)\in F\right)\right)\leq \sup\left\{H(\mu)-\int\Phi_\nu d\mu^r,\mu^r\in F\right\}$. La secuencia $\left(\xi_{n,r}(x)\right)$ es la definida en la Eq. (6).

Sea $\Psi;\ X^r\to\mathbf{R}$ y sea $G_\Psi;\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definida por $G_\Psi\ (t)=\inf\left\{H(\mu-\int\Phi_\nu d\mu^r,\int\Psi d\mu^r=t\right\}$.

Teorema 3: Sea $\Psi;\ X^r\to\mathbf{R}$ una función continua y sea $V_\Psi(x,n)$ el V-estadístico con núcleo Ψ, si J es un intervalo real abierto vale

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log(\nu(\{x:V_\Psi(x,n)\in J\}))\geq\inf_{t\in J}\{G_\Psi(t)\}$, Si K es un intervalo real cerrado entonces se tiene

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^r}\log(\nu(\{x:V_\Psi(x,n)\in J\}))\leq\sup_{t\in K}\{G_\Psi(t)\}$.

El teorema 3 sigue del teorema 2 aplicando el principio de contracción a $\tau=\hat{\Psi}$ con $\hat{\Psi}\ (\rho)=\int\Psi d\rho$

BIBLIOGRAFIA

1. J. Aaronson, R.Burton, H. Dehling, D. Gilat, T. Hill y B. Weiss, Strong laws for L and U-statistics, Trans. Amer. Math. Soc., 348, (1996) 2845-2866.
2. V. Bergelson, Weakly mixing PET, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 7, (1987) 337-349.
3. J. Bourgain, Double recurrence and almost sure convergence, J. Reine Angew Math 404, (1990) 140-161
4. R. Bowen, Topological entropy for non-compact sets, Trans. Amer. Math. Soc., 184, (1973) 125-136.
5. A. Fan, J. Schmeling y M. Wu, The multifractal spectrta of V-statistics, preprint, arXiv:1206.3214v1 (2012)
6. A. Fan, I. M. Liao y J.H. Ma, Generic points in systems of specification and Banach valued Birkhoff averages, Disc. Cont. Dynam. Sys. 21, (2008) 1103-1128.

7. A.M. Mesón y F. Vericat, On the topological entropy of the irregular part of V-statistics multifractal spectra, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 11 (2013) 1-12.
8. A.M. Mesón y F. Vericat, On the irregular part of V-statistics multifractal spectra for systems with non-uniform specification Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories (en prensa).
9. H. Furstemberg, Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szmerédi on arithmetic progressions, J. d´ Analyse Math 31, (1977) 204-256.
10. F. Takens y E. Verbitski, On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets, Fundamenta Mathematicae, 105, 203-237 (2000).
11. C. E. Pfister y W.G. Sullivan, On the topological entropy of saturated sets, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 27, (2007) 1-29.
12. D. Thompson, The irregular set for maps with the specification property has full topological pressure, Dynam Sys: An International Journal', 25(1) (1977) 25-51.
13. P. Walters, An introduction to Ergodic Theory, (Springer-Verlag, Berlin,1982)
14. .X. Zhou y E. Chen, Topological pressure of historic set for Z^{d}-actions, J. Math. Analysis and its applications. 389, (2012) 394-402.