ECUACIONES INTEGRALES COMO PROBLEMA DE MOMENTOS: ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA Y ALGUNAS ECUACIONES INTEGRALES NO LINEALES CON LÍMITE VARIABLE DE INTEGRACIÓN.

Pintarelli, María B.

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina,
mariabeatriz.pintarelli@ing.unlp.edu.ar

Resumen: En este trabajo veremos que, bajo ciertas condiciones, se pueden aplicar las técnicas de problema de momentos generalizados para resolver numéricamente una ecuación de Volterra de primera o segunda clase.
Se transformará la ecuación de Volterra en un problema de momentos generalizados unidimensional, y se aplicarán las técnicas de problema de momentos para hallar una aproximación numérica de la solución.
Específicamente se verá que resolver la ecuación de Volterra de 1º especie

$$f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds \quad \text{para} \quad a\le t\le b$$

o resolver la ecuación de Volterra de 2º especie

$$x(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds \quad \text{para} \quad a\le t\le b$$

es equivalente resolver un problema de momentos generalizado de la forma

$$\mu_n=\int_a^b g_n(s)x(s)ds \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Se aplica lo anterior para hallar la solución de una ecuación integrodiferencial de la forma

$$x'(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds \quad \text{para} \quad a\le t\le b \quad \text{con condición inicial} \quad x(a)=a'$$

Además se considera la ecuación integral no lineal:

$$f(x)=\int_a^x y(x-t)y(t)dt$$

Se transformará dicha ecuación integral en un problema de momentos generalizados bidimensional.
En todos los casos, se encontrará una solución aproximada y se acotará el error de la solución estimada utilizando las técnicas sobre problema de momentos generalizados.

Palabras claves: *problema de momentos generalizados, estabilidad de la solución, ecuaciones integrales de Volterra, ecuaciones integrales no lineales.*

1. Introducción

El problema de momentos generalizados [2] consiste en encontrar una función $f(x)$ sobre un dominio $\Omega\subset R^d$ satisfaciendo la secuencia de ecuaciones

$$\mu_n=\int_\Omega g_n(x)f(x)dx \quad n\in N \qquad (1)$$

donde (g_n) es una secuencia dada de funciones en $L^2(\Omega)$.
El problema de momentos es un problema *mal condicionado*. Hay varios métodos para construir soluciones regularizadas. Uno de ellos es el método de la *expansión truncada*.
El método de la expansión truncada consiste en aproximar (1) con el problema finito de momentos

$$\mu_i=\int_\Omega g_i(x)f(x)dx \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

En el subespacio generado por $g_1,g_2,\cdots,g_n$ la solución es estable. En el caso en que los datos $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ son inexactos se deben aplicar teoremas de convergencia y estimaciones del error para la solución regularizada.

2. Ecuación Integral de Volterra lineal de segunda especie.

El problema consiste en hallar $x(t)$ tal que

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b \qquad (3)$$

donde $f(t) \in L^2(a,b)$, $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ son funciones conocidas.

El siguiente resultado es conocido:

Teorema 1
Si $f(t) \in L^2(a,b)$ *y* $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ *entonces* (3) *posee una única solución en* $L^2(a,b)$. [1].

Para escribir (3) como un problema de momentos, escribimos

$$-f(t) = -x(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad (4)$$

Tomamos una base $\{\psi_n(t)\}_n$ de $L^2(a,b)$. Multiplicamos ambos miembros de (4) e integramos entre *a* y *b*:

$$\int_a^b -f(t)\psi_n(t)\,dt = \int_a^b -x(t)\psi_n(t)dt + \int_a^b \int_a^t K(t,s)x(s)\psi_n(t)\,ds\,dt$$

Anotamos $\int_a^b -f(t)\psi_n(t)\,dt = \mu_n$

Además

$$\int_a^b \int_a^t K(t,s)x(s)\psi_n(t)\,ds\,dt = \int_a^b x(s) \int_s^b K(t,s)\psi_n(t)\,dt\,ds = \int_a^b x(s)g_n^*(s)ds$$

Por lo tanto

$$\mu_n = \int_a^b -x(t)\psi_n(t)dt + \int_a^b x(s)g_n^*(s)ds = \int_a^b -x(t)\psi_n(t)\,dt + \int_a^b x(t)g_n^*(t)dt =$$

$$= \int_a^b x(t)[-\psi_n(t) + g_n^*(t)]\,dt = \int_a^b x(t)G_n^*(t)dt$$

En consecuencia

$$\mu_n = \int_a^b x(t)G_n^*(t)dt \qquad n \in N \qquad (5)$$

Si $\{G_n^*(t)\}_n$ son linealmente independientes se resuelve (3) al resolver (5) como un problema de momentos generalizados.

Veamos bajo qué condiciones $\{G_n^*(t)\}_n$ son linealmente independientes.
Tenemos $g_n^*(s) = \int_s^b K(t,s)\psi_n(t)\,dt$. Además $-\psi_n(s) + g_n^*(s) = G_n^*(s)$.

Podemos considerar el operador $L(\varphi) = \varphi + \int_s^b K(t,s)\varphi(t)\,dt$

Entonces $L(\varphi)$ es lineal. Si *L* es no singular, o sea $L(\varphi) = 0 \implies \varphi = 0$, entonces *L* preserva la independencia lineal.
En este caso $\{L(\psi_n)\}_n = \{G_n^*\}_n$ serían linealmente independientes.
Pero $L(\varphi) = 0$ se puede ver como una ecuación integral de Volterra de segunda especie con $f(s) = 0$

$$0 = \varphi(s) + \int_s^b K(t,s)\varphi(t)\,dt \implies \varphi(s) = \int_s^b (-K(t,s))\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(s) = \int_b^s K(t,s)\varphi(t)\,dt \qquad (6)$$

Si asumimos que $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ entonces como $\varphi(s) = 0$ es solución de (6) por el teorema anterior es la única solución de (6) en $L^2(a,b)$.

3. Ecuación Integral de Volterra lineal de primera especie

El problema consiste en hallar $x(t)$ tal que

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b \qquad (7)$$

donde $f(t) \in L^2(a,b)$, $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ son funciones conocidas.

El siguiente resultado es conocido:
Dada una ecuación integral de Volterra de primera especie, se la puede llevar a una ecuación integral de Volterra de segunda especie al derivar (7) con respecto a *t*

$$f'(t) = \int_a^t K_t(t,s)x(s)ds + K(t,t)x(t) \qquad (8)$$

Anotamos $K^*(t,s) = \frac{K_t(t,s)}{K(t,t)}$ y $f^*(t) = \frac{f'(t)}{K(t,t)}$ entonces

$$f^*(t) = \int_a^t K^*(t,s)x(s)ds + x(t) \qquad (9)$$

Ecuación de segunda especie de Volterra.

En el caso de ser $K(t,t) = 0$ sigue siendo (8) de primera especie y se puede seguir derivando hasta llegar a una ecuación de segunda especie si $K_t^{(n)}(t,t) \neq 0$.

Notar que para que la derivación bajo el signo de la integral sea válida debe cumplirse que $K(t,s)$ y $x(t)$ sean continuas en sus respectivos dominios. Además $K_t(t,s)$ debe ser continua.

Por lo tanto si $K(t,t) \neq 0$ en (a,b) y teniendo en cuenta que debe ser $f(a) = 0$ resolver (7) es equivalente a resolver (9). Si $K^*(t,s) \in L^2(R)$ y $f^*(t) \in L^2(a,b)$ entonces (9) (y por lo tanto (7)) tiene una única solución en $L^2(a,b)$

Si en lugar de (7) tenemos

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)g(x(s))ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b \qquad (10)$$

Entonces con un planteo análogo al anterior se llega

$$f^*(t) = \int_a^t K^*(t,s)g(x(s))ds + g(x(t)) \qquad (11)$$

En este caso (11) es análogo al problema de momentos generalizado

$$\mu_n = \int_a^b g(x(t))G_n^*(t)dt \quad n \in N \qquad (12)$$

Para resolver numéricamente (5) como un problema de momentos generalizados se puede aplicar el método de expansión truncada detallado en [3] y generalizado en [5]: encontrando una aproximación $p_N(t)$ de $x(t)$ para el correspondiente problema finito con $i = 0,1,2,\ldots,N$.

Consideramos la base $\varphi_i(t)$ $i = 0,1,2,\ldots$ obtenida por aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre $G_i^*(t)$ $i = 0,1,2,\ldots,N$ y adicionando al conjunto resultante las funciones necesarias hasta alcanzar una base ortonormal.

Aproximamos la solución $x(t)$ con [5]:

$$p_N(t) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \varphi_i(t) \qquad \text{donde} \qquad \lambda_n = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\,\mu_j \quad n = 0,1,2,\ldots,N$$

y los coeficientes C_{ij} verifican

$$C_{ij} = \left(\sum_{k=j}^{i-1} (-1) \frac{\langle G_i^*(t) \mid \varphi_k(t) \rangle}{\|\varphi_k(t)\|^2} C_{kj} \right) \cdot \|\varphi_i(t)\|^{-1} \qquad 1 < i \le N \;\; ; \;\; 1 \le j < i$$

Los términos de la diagonal son $\qquad C_{ii} = \|\varphi_i(t)\|^{-1} \qquad i = 0,1,\ldots,N$

Teorema 2

Sea el conjunto de números reales $\{\mu_k\}_{k=0}^{N}$ *y supongamos que* $x(t)$ *en* $L^2(a,b)$ *verifica para algún N* ε *y* E *(dos números positivos) :*

$$\sum_{k=0}^{N} \left| \int_a^b g_k(t)x(t)dt - \mu_k \right|^2 \le \varepsilon^2 \qquad y \qquad \int_a^b |x'(t)|^2 dt \le E^2$$

entonces

$$\int_a^b |p_N(t) - x(t)|^2 dx \le \|C^T C\|^2 \varepsilon^2 + \frac{(b-a)^2}{4(N+1)^2} E^2$$

Si aplicamos el método de expansión truncada para resolver la ecuación (11) obtendríamos una aproximación $p_N(t)$ para $g(x(t))$.

Así si g tiene inversa continua, entonces $g^{-1}(p_N(t))$ será una estimación de $x(t)$.

Y si g^{-1} es Lipschitz en un dominio *D* que incluya a la imagen de $x(t)$, es decir si $\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| \le \lambda\|x - y\|$ para algún λ y $\forall x, y \in D$ entonces de acuerdo al teorema previo

$$\int_a^b |g^{-1}(p_N(t)) - x(t)|^2 dx \le \lambda \left(\|C^T C\|^2 \varepsilon^2 + \frac{(b-a)^2}{4(N+1)^2} E^2 \right)$$

Aplicación

Supongamos la ecuación integrodiferencial

$$x'(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b \qquad (13)$$

con condición inicial $x(a) = a'$
Integramos de *a* a *t*

$$\int_a^t x'(t)dt = \int_a^t f(t)dt + \int_a^t \int_a^t K(t,s)x(s)ds\,dt$$

Por lo tanto

$$x(t) - x(a) = F(t) - F(a) + \int_a^t \int_s^t K(t,s)x(s)dtds$$

donde $F(t)$ es la primitiva de $f(t)$
Si anotamos $K^p(t,s)$ a la primitiva de $K(t,s)$ con respecto a *t* , entonces

$$x(t) - x(a) = F(t) - F(a) + \int_a^t [K^p(t,s) - K^p(s,s)]x(s)ds$$

Si reemplazamos $F(t) - F(a) + x(a) = G(t)$ y $K^p(t,s) - K^p(s,s) = K^*(t,s)$ entonces

$$x(t) = G(t) + \int_a^t K^*(t,s)x(s)ds \qquad (14)$$

Es decir se llega a una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Por lo tanto resolver (13) es equivalente a resolver (14)

4. Ecuación Integral no lineal con límite de integración variable

Supongamos que se quiere hallar $y(t)$ tal que

$$\int_a^x y(t)y(x-t)dt = f(x) \qquad a \le x \le b \qquad (15)$$

con $f(x) \in L^2(a,b)$ conocida.
Tomamos una base $\{\psi_n(x)\}_n$ de $L^2(a,b)$. Multiplicamos ambos miembros de (15) e integramos entre *a* y *b*:

$$\mu_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx = \int_a^b \int_a^x y(t)y(x-t)\psi_n(x)dtdx$$

Notar que

$$\int_a^b \int_a^x y(t)y(x-t)\psi_n(x)dtdx = \int_a^b \int_a^{b-t} y(t)y(s)\,\psi_n(t+s)dsdt$$

En consecuencia

$$\int_a^b \int_a^{b-t} y(t)y(s)\,\psi_n(t+s)dsdt = \mu_n \quad n \epsilon N \qquad (16)$$

Se puede considerar (16) como un problema de momentos generalizados bidimensional sobre una región $\Omega = \{(t,s);\ a \le s \le b-t\ ;\ a \le t \le b\}$
con $g_n(t,s) = \psi_n(t+s)$ y la función incógnita es $f(t,s) = y(t)y(s)$
Se elige $\{\psi_n(t)\}_n$ de manera tal que $\{\psi_n(t+s)\}_n$ sean linealmente independientes.

Al resolver el correspondiente problema finito

$$\int_a^b \int_a^{b-t} y(t)y(s)\,\psi_i(t+s)dsdt = \mu_i \quad i = 0,1,\dots,N$$

aplicando el método de expansión truncada se llega a una aproximación $p_N(t,s)$ de $y(t)y(s)$.

Por lo tanto $p_N(t,t)$ será una aproximación de $y^2(t)$. En consecuencia $\sqrt{p_N(t,t)}$ será una estimación de $y(t)$

El teorema 2 se puede adaptar al caso de un problema de momentos bidimensional [4] considerando una región rectangular *R* tal que $\Omega \subset R$

Ejemplos Numéricos

1. *Consideramos la ecuación de Volterra de segunda especie*

$$x(t) = 1 - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} + \int_0^t \left(\frac{1+t}{1+s}\right) x(s)ds \qquad 0 < t < 1$$

La solución es $x(t) = 1 - t^2$. Se tomó $N = 6$ y $\psi_n(t) = t^n \; n = 0,1,2,\dots,N$

La solución aproximada es

$$p_6(t) = \frac{1}{1+s}(0.9999147621585023 + 1.0049081485367966t - 1.0672475817558449t^2 - 0.6253280251875469t^3 - 1.0184797250168018t^4 + 1.4149009386296558t^5 - 0.9279894745774144t^6 + 0.1761118523809584 7t^7 + 0.0433268536824236 6t^8)$$

El Teorema 2 provee una estimación de la "exactitud" de la solución aproximada. Calculamos para el ejemplo dado $\|p_6(t) - x(t)\| = 0.0000182523$

2. *Consideramos la ecuación de Volterra de primera especie*

$$t^2 = \int_0^t e^{t+s} x(s)ds \qquad 0 < t < 1$$

La solución es $x(t) = e^{-2t}(2t - t^2)$. Se tomó $N = 6$ y $\psi_n(t) = t^n \; n = 0,1,2,\dots,N$

La solución aproximada es

$p_6(t) = -83.957398319423 18 + 83.9574309721234 8e^t - 81.9593367998647 9t -$
$46.951636232634 98st^2 - 8.153902772160214 4t^3 - 7.6769287979128 27t^4 +$
$1.1473834615675322t^5 - 0.532831817189945 7t^6$

y $\|p_6(t) - x(t)\| = 7.74288 \times 10^{-6}$

3. *Consideramos la ecuación integrodiferencial*

$$x'(t) = 2t - \frac{t^5}{4} - t^3 + \int_0^t st\, x(s)ds \qquad 0 < t < 1$$

La solución es $x(t) = t^2 + 2$. Se tomó $N = 6$ y $\psi_n(t) = t^n \; n = 0,1,2,\dots,N$

La solución aproximada es

$p_6(t) = 2.000011350675333 - 0.0006000805526966135t + 1.0074722441931296t^2 -$
$0.036727180247674074t^3 + 0.08179727671799264t^4 - 0.07332085167364494t^5 -$
$0.008280528273741879t^6 + 0.05157218926604704t^7 - 0.02138479219837439t^8 +$
$0.0003789028271436808t^9 - 0.0009346712381873 03t^{10}$

y $\|p_6(t) - x(t)\| = 3.57206 \times 10^{-6}$

4. *Consideramos la ecuación integral*

$$\frac{1}{2}sen(x) = \int_0^x y(t)y(x-t)dt \qquad 0 < x < 1$$

La solución es $y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, J_0(x)$ donde $J_0(x) = BesselJ(0,x)$ Se tomó $N = 4$ y $\psi_n(t) = t^n \;\; n = 0,1,2,\dots,N$

La solución aproximada es

$$p_4(x) = \Big[0.4596976941318603 - 0.09533610866670236\left(-\frac{2}{3} + 2x\right) - 0.07464930125266528\left(-\frac{1}{2} + 4x^2 - \frac{6}{5}\left(-\frac{2}{3} + 2x\right)\right) + 0.008845907552301498\left(-\frac{2}{5} + 8x^3 - \frac{6}{5}\left(-\frac{2}{3} + 2x\right) - \frac{12}{7}\left(-\frac{1}{2} + 4x^2 - \frac{6}{5}\left(-\frac{2}{3} + 2x\right)\right)\right)\Big]^{\frac{1}{2}}$$

y $\|p_4(x) - y(x)\| = 0.000959458$

Conclusiones

Dada una ecuación de Volterra de segunda especie de la forma

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b$$

donde $f(t) \in L^2(a,b)$, $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ son funciones conocidas, se la puede escribir como un problema de momentos generalizados unidimensional, y se pueden aplicar las técnicas de problema de momentos para hallar una aproximación numérica de la solución.

Le ecuación integral de Volterra de primera especie

$$f(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds \qquad \text{con} \quad a \le t \le b$$

donde $f(t) \in L^2(a,b)$, $K(t,s) \in L^2(R)$ $R = (a,b) \times (a,b)$ son funciones conocidas se puede escribir como una ecuación integral de Volterra de segunda especie si $K(t,t) \neq 0$ en (a,b) .

La ecuación integral no lineal $\int_a^x y(t)y(x-t)dt = f(x)$ $a \le x \le b$ con $f(x) \in L^2(a,b)$ conocida, se puede escribir como un problema de momentos generalizados bidimensional.

En todos los casos se pueden aplicar las técnicas de problema de momentos para hallar una aproximación numérica de la solución.

Referencias

[1] M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov, G. I. Makarenko, *Ecuaciones Integrales*, Editorial Mir, 1982.

[2] J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, *The problem of Moments*, Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943

[3] G. Talenti, *Recovering a function from a finite number of moments,* Inverse Problems 3 (1987), pp.501- 517.

[4] M. B. Pintarelli and F. Vericat, *Bi-dimensional inverse moment problems*, Far East Journal of Mathematical Sciences 54 (2011), pp. 1-23.

[5] M. B. Pintarelli and F. Vericat, *Stability theorem and inversion algorithm for a generalized moment problem*, Far East Journal of Mathematical Sciences 30 (2008), pp. 253-274.