

APROXIMACIONES UNIDIMENSIONALES PARA ESTIMAR LA EFICIENCIA DE ALETA EN INTERCAMBIADORES TUBULARES CON ALETAS CONTINUAS

Felipe Suárez¹, Osvaldo M. Martínez^{2,3}, Néstor J. Mariani^{2,3}, Guillermo F. Barreto^{2,3}

¹Dpto. de Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

²Dpto. de Ing. Química, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata

³CINDECA, CCT La Plata, CONICET

nmariani@quimica.unlp.edu.ar - Calle 47 esq. 1 – CP 1900 - La Plata

Palabras Clave: aletas continuas, eficiencia de aleta, intercambiadores de calor, aproximación unidimensional, superficies extendidas, transferencia de calor

1. Introducción

Los intercambiadores de calor de placas aletadas son extensamente utilizados en el procesamiento de gas criogénico, en la industria aeroespacial y en sistemas de climatización; se destacan entre los equipos de transferencia de calor debido a su alta eficiencia y multifuncionalidad. Existe en la bibliografía abierta una considerable cantidad de información referida a diversos aspectos del diseño de intercambiadores de placas aletadas [Kuppan 2014; Shah, 1988]. En particular, la estimación de la eficiencia, que resulta un aspecto crucial porque hace a la esencia de este tipo de equipos, ha sido un tópico tratado en numerosos estudios cuando se trata de superficies dotadas de aletas individuales. Así pueden identificarse una cantidad importante de trabajos relativamente recientes [e.g., Sabbaghi et al., 2011; Acosta-Iborra y Campo, 2009]. No obstante, al momento de abordar el caso de equipos con aletas de tipo continuas, la bibliografía dista de ser abundante y si bien pueden encontrarse contribuciones referidas al tema, existe la posibilidad de plantear alternativas más precisas para predecir la velocidad de transferencia de calor.

En términos generales, para analizar la conducción térmica en aletas en equipos de transferencia de calor debe considerarse que la misma tiene lugar en más de una dimensión espacial. Los problemas 3D (tridimensionales) no se presentan dado que normalmente no resulta necesario tener en cuenta las variaciones de temperatura en una de las direcciones, ya que por las características constructivas de las aletas (*i.e.*, espesores muy pequeños) dichas variaciones son despreciables. No obstante, las geometrías 2D (bidimensionales) son frecuentes en el caso de aletas continuas, como las utilizadas en el caso de intercambiadores de calor tubulares que procesan gases [Zukauskas, 1981] y aletas individuales de forma poligonal simétrica [Kundu y Das, 2000] sustituyendo a las típicas aletas radiales. En estas circunstancias debe recurrirse a alguna herramienta numérica que permita resolver la ecuación diferencial representativa del balance de energía y obtener la velocidad de transferencia de calor (eficiencia de aleta) entre la aleta y el medio [Marin et al., 2005; Jang y Lin, 2002]. Con las plataformas de cálculo actuales esta operación no debería representar una dificultad si se plantea analizar una condición determinada o un conjunto limitado de condiciones. Sin embargo, cuando se busca la simulación de los mencionados intercambiadores puede ser necesario evaluar la velocidad de transferencia de calor desde las aletas una cantidad importante de veces (del orden del millar); más aún, en aplicaciones que requieren simulación recurrente, como las de optimización o diseño de una planta, los órdenes de magnitud pueden elevarse aún más, con lo cual los procedimientos de tipo numérico aplicados a más de una dirección espacial resultan una opción poco viable a los fines prácticos.

Una alternativa válida para abordar el problema es el empleo de modelos de tipo unidimensional, entre los cuales se destaca el denominado de la aleta radial equivalente [Kuan et al., 1984; Zabronski, 1955]. En este modelo se propone asimilar la aleta plana continua a una aleta de tipo radial, con el mismo perímetro del tubo y cuya área de transferencia resulte idéntica al área de transferencia de la aleta real. Este modelo permite predecir la eficiencia de aletas continuas solidarias a tubos de sección circular con una precisión del orden del 4% para arreglos en línea cuando $3.3 > P_1 = X_f/D$ (paso horizontal/diámetro) > 1.5 y $4.2 > P_1 = X_f/D$ (paso transversal/diámetro) > 1.5 (ver Fig. 1a) y para el caso de arreglos escalonados (ver Fig. 1b) en los mismos rangos con una precisión del 1%. No obstante, fuera de los rangos mencionados los errores pueden crecer significativamente. Por ejemplo, en el caso de un arreglo en línea para $P_1 = 1.39$ y $P_1 = 2.1$ los errores alcanzan el 8.5%, incrementándose hasta el aproximadamente un 16.8% si $P_1 = 2.8$.

Tanto si se requiere una precisión superior al 4% en los rangos antes especificados para P_1 y P_t , como en el caso de valores fuera de los mismos, resulta necesario disponer de un modelo alternativo. Con esta finalidad en este trabajo se propone un modelo, también unidimensional, denominado de dos aletas radiales equivalentes. El mismo representa una extensión del de una aleta radial equivalente y permite mejorar la capacidad predictiva. El parámetro principal del modelo de dos aletas se obtiene estableciendo que el mismo replique exactamente el comportamiento térmico (eficiencia de aleta) de una aleta continua real (2D) cuando la velocidad de transferencia de calor por conducción a través de la aleta es relativamente alta frente a la velocidad de transferencia de calor por convección entre la aleta y el fluido (situación deseada en este tipo de sistemas). En este trabajo se plantea el mencionado modelo y se demuestra que el criterio de ajuste propuesto para el parámetro principal del mismo permite estimar la eficiencia de una aleta continua con un nivel de precisión superior al 3.5% en todo el rango condiciones analizadas (*i.e.*, valores de la relación entre velocidad de transferencia por conducción frente a convección entre 0 e infinito) para arreglos en línea y escalonado ($3.3 > P_1 > 1.39$ y $7 > P_t > 1.39$).

2. Comportamiento térmico de una aleta continua de un intercambiador de calor

La Fig. 1 muestra esquemáticamente las configuraciones de arreglos de tubos en línea (a) y escalonado (b) para un intercambiador tubular con aletas continuas de tipo plano. Con X_t y X_l en la Fig. 1 se indican los pasos transversal y longitudinal respectivamente, mientras que D es el diámetro exterior de los tubos solidarios a la aleta. Se asume que todas las aletas y los tubos que componen el haz se comportan, desde el punto de vista térmico, de manera idéntica; de forma tal que resulta suficiente analizar sólo las regiones sombreadas en la Fig. 1.

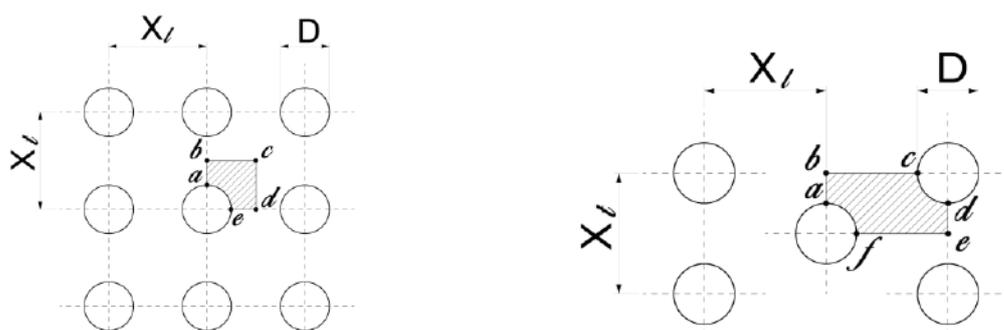


Figura 1. Representación esquemática de una aleta continua de un intercambiador de calor tubular
(a) arreglo de tubos en línea
(b) arreglo de tubos escalonado

La ecuación diferencial que representa el balance de energía para una aleta plana continua, como las mostradas en la Figura 1, de conductividad térmica uniforme (k) que intercambia calor con un medio a una temperatura T_∞ cuyo coeficiente convectivo (h) se considera uniforme es:

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = h \frac{2}{\delta} (T - T_\infty) \quad (1)$$

En la Ec. (1) se ha asumido que no se produce ningún cambio de fase en el intercambio térmico entre la aleta y el medio fluido y que el espesor de la aleta δ es lo suficientemente pequeño como para poder despreciar cualquier variación de temperatura a lo largo del mismo (*i.e.*, en la dirección perpendicular al plano de la Fig. 1).

La Ec. (1) puede ser escrita en forma adimensional del siguiente modo:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y'^2} - m^2 \ell^2 \theta = 0 \quad (2a)$$

teniendo en cuenta que:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} \quad (2b) \quad ; \quad m^2 = \frac{h 2}{k \delta} \quad (2c)$$

$$y^* = \frac{y}{\ell} \quad (2d) \quad ; \quad x^* = \frac{x}{\ell} \quad (2e)$$

donde $\ell = A_T/P$ se denomina longitud característica y se define como el cociente entre el área exterior de la aleta disponible para el intercambio térmico con el medio por convección (*i.e.*, regiones sombreadas en la Fig. 1 en ambos arreglos) y el perímetro del tubo (arcos $a\hat{e}$ y $a\hat{f}$ en las Fig. 1a y b). T_b en la Ec. (2b) es la temperatura en la base de la aleta (sobre el tubo) que se supone constante.

Las condiciones de contorno que acompañan a la Ec (2) comprenden un valor de temperatura prescrito sobre el perímetro P del tubo ($\theta=1$) y simetría ($\nabla_n\theta=0$) para el resto de los contornos (*i.e.*, segmentos \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{cd} y \overline{de} para el arreglo en línea y \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{de} y \overline{ef} para el arreglo escalonado).

La eficiencia de la aleta se define como la velocidad de transferencia real respecto a la velocidad de transferencia de calor máxima en la aleta (*i.e.*, la que tendría lugar la aleta si la temperatura en todos los puntos de la misma fuese igual a la de la superficie externa del tubo):

$$\eta = \frac{\iint_{A_T} \theta \, dx \, dy}{A_T} \quad (3)$$

Aproximación del comportamiento de la aleta para altas velocidades de transferencia de calor por conducción

La solución de la Ec. (2) a bajos valores de $(m\ell)$ (*i.e.*, altas velocidades de transferencia por conducción térmica en la aleta) puede encontrarse en la literatura para el problema, completamente análogo, de difusión-reacción química en catalizadores sólidos (*e.g.*, Mariani et al., 2003). En estas condiciones, por medio de un análisis de perturbación η puede expandirse en serie de potencias de $(m\ell)^2$:

$$\eta_{\text{Bajos}} = 1 - \gamma (m\ell)^2 \quad (4a)$$

donde γ se expresa como sigue:

$$\gamma = \frac{\iint_{A_T} G \, dx \, dy}{\ell^2 A_T} \quad (4b)$$

G , denominado campo auxiliar, es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -1 \quad \text{sobre } A_T \quad (5a)$$

$$G=0 \text{ sobre } a\hat{e} \text{ y } a\hat{f} \text{ de las Figs. 1a y b} \quad (5b) \quad \nabla G=0 \text{ sobre } \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd} \text{ y } \overline{de} \text{ de las Figs. 1a y b} \quad (5c)$$

La Ec. (4a) corresponde a una serie truncada de dos términos con $O[(m\ell)^4]$. El parámetro γ sólo depende de la geometría de la aleta (*i.e.*, del arreglo y las dimensiones). Por otra parte, la solución a las Ecs. (5) para el campo auxiliar G debe llevarse a cabo una única vez; con esta finalidad se ha probado que la plataforma Comsol Multiphysics®, que emplea el método de los elementos finitos para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, resulta completamente apropiada.

2.2 Modelos de una y dos aletas radiales equivalentes

El balance de conservación de la energía para aleta radial de espesor δ despreciable puede escribirse:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^2 \theta = 0 \quad (6a)$$

donde θ y m se definen conforme a (2b) y (2c)

Las condiciones de contorno que acompañan a (6a) son:

$$\theta=1 \text{ para } r=R_i \quad (6b) \quad ; \quad r=R_e \text{ para } d\theta/dr=0 \quad (6c)$$

La solución de las Ecs. (6) puede encontrarse en los libros de texto (Kraus et al., 2001) y conduce a la siguiente expresión para la eficiencia de aleta:

$$\eta_{1D} = \frac{2}{m_i(R_r^2 - 1)} \left[\frac{l_1(m_i R_r) K_1(m_i) - K_1(m_i R_r) l_1(m_i)}{K_1(m_i R_r) l_0(m_i) + l_1(m_i R_r) K_0(m_i)} \right] \quad (7)$$

donde l_0 , l_1 , K_0 y K_1 son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase y orden entero 0 y 1, respectivamente. $R_r = R_e/R_i$ y $m_i = m R_i$

Modelo de una aleta radial equivalente (1D-SERF)

En este modelo se asume que la eficiencia térmica de la aleta plana continua real puede estimarse asimilándola a una aleta de tipo radial, con el mismo perímetro de tubo y cuya área de transferencia resulte idéntica al área de transferencia de la aleta real (ver Figura 1a y b). Por lo tanto,

$$P_{1D-SERF} = P \quad (8a) \quad A_{1D-SERF} = A_T \quad (8b)$$

A este modelo se lo denominará de una aleta radial equivalente (1D-SERF). Cabe destacar que Zabronski (1955) desarrolló una solución para evaluar la eficiencia de una aleta plana con arreglo en línea y $X_t = X_t$ y mostró que dicha solución resulta similar a la de una aleta radial siempre que se cumplan (8a y b). Mas tarde, Kuan et al. (1984) extendieron esta idea a otras geometrías de tubo.

Para estimar la eficiencia de aleta a través del modelo 1D-SERF debe emplearse la expresión (7).

Modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF)

La Figura 2 muestra esquemáticamente el modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF), el cual representa una extensión del modelo 1D-SERF. Se define:

$$\ell_j = \frac{A_j}{P_j} = \frac{\frac{\phi_j}{2} (R_{e,j}^2 - R_i^2)}{\phi_j R_i} = \frac{R_i}{2} \left(\frac{1 - y_j^2}{y_j^2} \right) \quad (9)$$

donde $y = R_i/R_{e,j}$

Para emplear el modelo 1D-TERF resulta necesario especificar cuatro parámetros (i.e., $R_{e,1}$, $R_{e,2}$, ϕ_1 y ϕ_2). Con esta finalidad se plantean las siguientes relaciones:

$$P_{F1} + P_{F2} = P \quad (10a) \quad A_{F1} + A_{F2} = A_T \quad (10b)$$

$$\phi_{F1} = \phi_{F2} \quad (10c) \quad \ell_{F1}^2 A_{F1} \gamma_{F1} + \ell_{F2}^2 A_{F2} \gamma_{F2} = \ell^2 A_T \gamma \quad (10d)$$

La relación (10c) puede perfectamente ser removida, aunque aquí se la ha adoptado por simplicidad. Cabe aclarar que las relaciones (10a-b) garantizan que la velocidad global de transferencia de calor sea la misma para el modelo que para la aleta real a muy altos y muy bajos valores del parámetro $m\ell$.

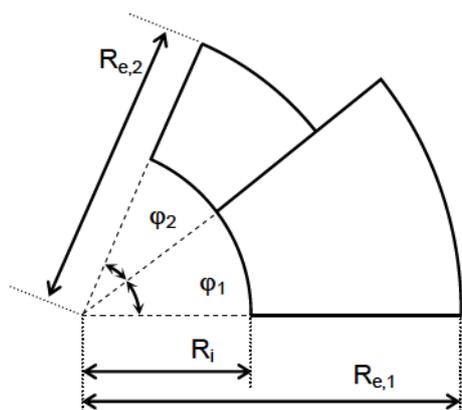


Figura 2. Esquema del modelo de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF)

Las expresiones de los parámetros γ_1 y γ_2 para las aletas radiales pueden calcularse empleando las siguientes expresiones (Mariani et al., 2003):

$$\gamma_j = \frac{y_j^2}{2} \left[\frac{y_j^2 - 3}{q_j^2} - \frac{4 \ln y_j}{q_j^3} \right] \quad \text{donde: } q_j = 1 - y_j^2 \quad ; \quad y_j = R_i / R_e \text{ con } j=F1, F2.$$

La eficiencia de aleta en el modelo 1D-TERF resulta:

$$\eta_{1D-TERF} = \frac{A_{F1}\eta_{F1} + A_{F2}\eta_{F2}}{A_T} \quad (11)$$

donde η_{F1} y η_{F2} se calculan empleando la expresión (7).

3. Resultados y Discusión

En la Fig. 3 se presenta el comportamiento de η frente al parámetro $m\ell$ para una aleta plana continua con arreglo en línea ($P_1=1.28$, $P_1/P_1=2$). Se muestran tres curvas correspondientes a los valores numéricos obtenidos empleando la plataforma Comsol Multiphysics y las predicciones de los modelos 1D-SERF y 1D-TERF. Ambos modelos permiten capturar adecuadamente las asíntotas a altos y bajos valores del parámetro $m\ell$, dado que se ha establecido que las áreas de transferencia coincidan (Eqs. 8b y 10b) lo cual garantiza que para ambos modelos $\eta \rightarrow 1$ cuando $m\ell \rightarrow 0$ (muy altas velocidades de transferencia por conducción); mientras que la igualdad de perímetros (Eqs. 8c y 10c) hace que $\eta \rightarrow 1/m\ell$ cuando $m\ell \rightarrow \infty$ (muy bajas velocidades de transferencia por conducción). Por ende, las mayores desviaciones en la estimación para cualquiera de los dos modelos aparecerán a valores intermedios de $m\ell$. Se define entonces el error como:

$$\varepsilon_i = (\eta_{num} - \eta_i) / \eta_{num} \cdot 100 \quad (12)$$

donde η_{num} son los valores obtenidos numéricamente mientras que η_i corresponde a los alcanzados con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF.

Se analizará la precisión de los modelos 1D valorando el máximo error, que se presenta cuando se varía $m\ell$ para cada configuración geométrica (arreglo y relaciones pasos/diámetro), definido como:

$$\varepsilon_i^{max} = \max_{m\ell} |\varepsilon_i| \quad (13)$$

En la Tabla 1 se presentan los valores ε_i^{max} que surgen de la aplicación de los modelos 1D-SERF y 1D-TERF para distintos valores de P_1 y de la relación P_1/P_1 correspondientes a arreglos en línea (ver Fig. 1a). Puede observarse que para todos los casos analizados, como era de esperar, el modelo 1D-TERF conduce a resultados más precisos que el 1D-SERF. No obstante, si se admite un nivel de error del orden del 4% este último puede ser utilizado siempre que $P_1 > 1.39$ y, simultáneamente, $P_1/P_1 < 1.25$.

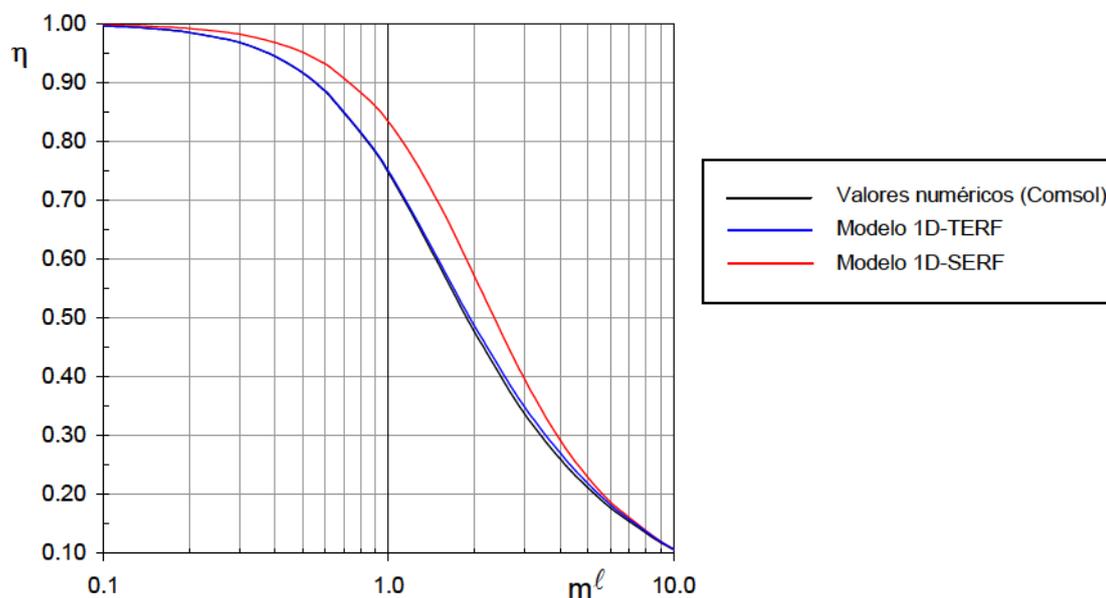


Figura 3. η vs $m\ell$

En la Tabla 1 se han incluido también algunas relaciones de pasos ($P_1=1.19$ y $1 < P_1/P_1 < 2$) que resulta poco probable que se presenten en la práctica, no obstante, se analizan con la finalidad de otorgarle una mayor generalidad a la evaluación de la capacidad predictiva del modelo 1D-TERF. Se comprueba que

los errores se encuentran en todos los casos por debajo del 4.8% mientras que empleando el modelo 1D-SERF se presentan valores que superan el 20%.

Tabla 1 ε_i^{\max} en la estimación de η con los modelos 1D-SERF y 1D-TERF para arreglos en línea.

P_i/P_1 ↓	$P_i=X_i/D$									
	3.33		2.38		1.85		1.39		1.19	
	SERF	TERF	SERF	TERF	SERF	TERF	SERF	TERF	SERF	TERF
1	0.5	0.2	0.8	0.3	1.3	0.4	3.2	0.5	7.2	0.2
1.25	1.1	0.5	1.6	0.6	2.4	0.9	4.8	1.4	8.6	2.4
1.5	2.5	1.1	3.4	1.4	4.8	1.7	8.5	2.6	13.9	4.1
1.75	4.2	1.8	5.6	2.1	7.6	2.4	12.6	3.3	19.2	4.8
2	6.0	2.5	7.9	2.8	10.6	3.0	16.8	3.5	23.5	4.4

Respecto al arreglo escalonado (ver Fig. 1b) ambos modelos presentan un nivel de precisión superior al 3% para todos los casos analizados ($1.19 < P_i < 3.33$ y, simultáneamente, $P_i/P_1 < 2$), por lo que se sugiere el uso del modelo 1D-SERF en virtud a la mayor simplicidad en su aplicación.

4. Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo unidimensional denominado de dos aletas radiales equivalentes (1D-TERF) para predecir la velocidad de transferencia de calor desde o hacia aletas planas continuas solidarias a tubos de sección circular como los típicamente empleados en radiadores para refrigeración o calefacción y otras aplicaciones que impliquen intercambio gas (aire)-líquido. En este modelo se propone asimilar la aleta plana continua a dos aletas de tipo radial, manteniendo el perímetro exterior del tubo y el área disponible para la transferencia de calor. El parámetro libre restante del modelo se obtiene estableciendo que el mismo replique exactamente el comportamiento térmico (eficiencia de aleta) de la aleta continua real (2D) cuando la velocidad de transferencia de calor por conducción a través de la aleta es relativamente alta frente a la velocidad de transferencia de calor por convección entre la aleta y el fluido, situación que por otra parte es la que normalmente se presenta en sistemas aletados. Se demuestra en el trabajo que este criterio de ajuste para el parámetro libre permite estimar la eficiencia de una aleta continua con un nivel de precisión superior al 3.5% en todo el rango condiciones analizadas (*i.e.*, valores de la relación entre velocidad de transferencia por conducción frente a convección entre 0 e infinito) para arreglos en línea y escalonado ($3.3 > P_i > 1.39$ y $7 > P_i > 1.39$).

Referencias

- Acosta-Iborra A., Campo A., Int. J. of Ther. Sci., 48 (2009) 773–780.
 Jang J-Y., Lin C-N., J. of Thermal Sci., 11 (2002) 249-254.
 Kraus, A. D., Aziz A., Welty J., Extended Surface Heat Transfer, J. Wiley (2001).
 Kuan D.Y., Aris R., Davis H. T., Int. J. Heat Mass Transfer 27 (1984) 148–151.
 Kundu B., Das P. K., The Can. J. of Chem. Eng., 78-2 (2000) 395–401.
 Kuppan T., Heat exchanger design handbook, 2nd edition, CRC Press, Taylor & Francis Group (2014).
 Mariani N. J., Keegan S. D., Martínez O. M., Barreto G. F., Chem. Eng. Res. and Des., 81-A (2003) 1033-1042.
 Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D. B., Lesnic D., Wen X., Int. J. of Heat and Mass Transfer, 48 (2005) 3018–3033.
 Sabbaghi S., Rezaii A., Shahri Gh.R., Baktash M.S., Int. J. of Ref., 34 (2011) 1877-1882.
 Shah R. K., Plate-fin and tube-fin heat exchanger design procedures. In Heat Transfer Equipment Design (Edited by Shah R. K., Subbarao E. C., Mashelkar R. A., pp. 255-266. Hemisphere (1988).
 Zabronski H., ASME J. Appl. Mech., 22 (1955) 119–122.
 Zukauskas A., Air Cooled Heat Exchangers, in Heat Exchangers: Thermal-Hydraulic Fundamentals and Design, S. Kakac, A.E. Bergles and F. Mayinger, Eds., Hemisphere Publication Corp., pp. 49-83 (1981).