



Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Física

Tesis presentada para optar al grado de  
Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas

---

# Teorías efectivas para las interacciones hadrónicas y diagrama de fases de la cromodinámica cuántica

---

Juan Pablo Carlomagno

*Director:*

Daniel Gómez Dumm

Año 2015



# Resumen

*Cuando el canto me llega, me llega así,  
decidor y sentido pa' no o pa' sí.*

Herencia pa' un hijo gaucho. José Larralde

La dinámica de quarks se encuentra descrita en el marco del Modelo Standard por la Cromodinámica Cuántica (QCD), que formalmente es una teoría de campos de gauge no abeliana.

En procesos de altas energías la propiedad de libertad asintótica presente en QCD permite obtener predicciones a partir del Lagrangiano fundamental de la teoría. Sin embargo, a bajas energías ( $E \lesssim 1 \text{ GeV}$ ), la constante de acoplamiento fuerte se vuelve grande y la teoría es no perturbativa. En este régimen los quarks se encuentran confinados en hadrones, y la simetría quiral se encuentra espontáneamente rota.

El empleo de teorías efectivas permite estudiar la materia fuertemente interactuante a temperatura y densidad finitas y realizar una descripción fenomenológica de sistemas con estas características. En esta Tesis se estudiaron modelos efectivos para la descripción de la interacción fuerte a bajas energías. En particular, se consideraron teorías con interacciones no locales para tres sabores de quarks con renormalización de la función de onda y con un parámetro de orden efectivo asociable al confinamiento y a los grados de libertad gluónicos. Se estudió también, pero en modelos con dos sabores de quarks, la posibilidad de que el parámetro de orden de la simetría quiral presente una estructura modulada espacialmente.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera:

En el Cap. 1 se realiza una descripción acotada del diagrama de fases QCD y del comportamiento a bajas energías de la materia fuertemente interactuante, presentando las problemáticas de lidiar con esta teoría en la vecindad de las transiciones de fase y describiendo dos de las principales alternativas para hacerlo: *lattice QCD* (LQCD) y teorías efectivas, en particular el modelo propuesto por Nambu y Jona-Lasinio (NJL).

En la primera parte del Cap. 2 se presenta un breve resumen de los aspectos más relevantes para esta Tesis sobre la Cromodinámica Cuántica, que servirán para trazar similitudes con los modelos efectivos. Se comienza con el modelo de quarks, pasando luego por el lagrangiano de QCD y sus simetrías, para posteriormente considerar sistemas hadrónicos a temperatura y potencial químico finitos. En la segunda parte, se

describe el Loop de Polyakov, cuya traza se utilizará como parámetro de orden para estudiar el deconfinamiento de los quarks. Finalmente se detallan brevemente las técnicas de LQCD.

En el Cap. 3 se analiza el modelo efectivo de Nambu y Jona-Lasinio para los sabores de quarks *up* y *down*, y su extensión al incluir el quark *strange*. Se estudian también los núcleos de interacciones no locales y se introduce la renormalización de la función de onda (WFR). Luego, en el Cap. 4, se desarrollan las extensiones del modelo de NJL sobre las cuales se trabajará durante el resto de la Tesis. En este capítulo se presentan también los resultados a temperatura y densidad nulas, fijando los parámetros libres del modelo.

En el Cap. 5 se estudian las transiciones de fase para un modelo acoplado de Polyakov y Nambu Jona-Lasinio para tres sabores de quarks, a densidad nula y finita. En la parte final del Capítulo se muestran los diagramas de fases en el marco del mencionado modelo.

En la primera parte del Cap. 6 se lleva a cabo un análisis general para un modelo de tipo NJL no local con dos sabores de quarks de masa nula con condensados inhomogéneos y se caracterizan las regiones y curvas de transición de los diagrama de fases. En la segunda parte, se presentan los resultados para un caso particular de modulación espacial.

Finalmente en el Cap. 7 se realiza una discusión global de los resultados y se presentan las conclusiones.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Aspectos básicos de QCD</b>	<b>5</b>
2.1. El modelo de quarks . . . . .	5
2.2. El lagrangiano de QCD . . . . .	7
2.3. Ruptura espontánea de la simetría quiral . . . . .	9
2.3.1. Extensión a tres sabores . . . . .	11
2.3.2. Anomalía axial . . . . .	12
2.4. Sistemas con temperatura y potencial químico finitos . . . . .	13
2.5. El loop de Polyakov . . . . .	14
2.5.1. Simetría global $Z(N)$ en $SU(N)$ . . . . .	14
2.5.2. $Z(N)$ a temperatura finita . . . . .	15
2.6. Lattice QCD . . . . .	17
<b>3. Modelo de Nambu Jona-Lasinio</b>	<b>19</b>
3.1. Teorías efectivas de QCD . . . . .	19
3.2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL) . . . . .	20
3.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica . . . . .	21
3.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar . . . . .	24
3.3. El modelo de NJL con tres sabores de quarks . . . . .	26
3.4. Núcleos de interacción no locales . . . . .	28
<b>4. Fenomenología de mesones en un modelo nINJL con simetría <math>SU(3)</math> de sabor</b>	<b>33</b>
4.1. Modelo no local con simetría $SU(3)$ de sabor y WFR . . . . .	33
4.1.1. Acción efectiva . . . . .	33
4.1.2. Aproximación de campo medio . . . . .	35
4.1.3. Fluctuaciones cuadráticas . . . . .	38
4.1.4. Constante de decaimiento débil . . . . .	40

4.2. Parametrizaciones del modelo NJL no-local . . . . .	42
4.3. Resultados numéricos . . . . .	44
<b>5. Transiciones de fase en un modelo nPNJL con simetría <math>SU(3)</math> de sabor y WFR</b>	<b>47</b>
5.1. Modelo de Polyakov Nambu Jona-Lasinio . . . . .	47
5.2. Transiciones de fase a potencial químico nulo . . . . .	52
5.2.1. Termodinámica a campo medio . . . . .	52
5.2.2. Resultados numéricos a temperatura finita . . . . .	54
5.3. Diagrama de fases de QCD en un modelo nPNJL con WFR . . . . .	57
5.3.1. Transiciones de fase en el plano $T - \mu$ . . . . .	61
<b>6. Transiciones de fase inhomogéneas en un modelo nLNJL con simetría <math>SU(2)</math> de sabor</b>	<b>65</b>
6.1. Introducción a las fases inhomogéneas . . . . .	65
6.2. Teoría de Landau . . . . .	67
6.3. Modulación espacial de los condensados quirales . . . . .	68
6.4. Modelo no local quiral con simetría $SU(2)$ de sabor . . . . .	69
6.4.1. Análisis generalizado de Ginzburg-Landau . . . . .	71
6.5. Condensados inhomogéneos en modelos no locales . . . . .	76
6.5.1. Onda dual de densidad quiral (DCDW) . . . . .	77
6.6. Diagramas de fase para factores de forma covariantes . . . . .	79
<b>7. Resumen y Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A. Parametrización de un modelo quiral nLNJL con simetría de sabor <math>SU(2)</math></b>	<b>89</b>
<b>B. Cálculo de las sumas de Matsubara</b>	<b>91</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>97</b>

# Índice de figuras

1.1. Diagrama de fases de QCD . . . . .	2
2.1. Modelo de Quarks . . . . .	6
2.2. Constante de acoplamiento fuerte . . . . .	8
3.1. Forma diagramática de las “ecuaciones del gap” . . . . .	22
3.2. Masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento . . . . .	23
3.3. Forma diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter . . . . .	24
3.4. Forma diagramática de las “ecuaciones del gap” para 3 sabores . . . . .	27
3.5. Vértice efectivo de cuatro puntos . . . . .	28
3.6. Interacción separable . . . . .	30
4.1. Dependencia con el momento de la masa y WFR de los quarks . . . . .	43
5.1. Traza del PL en una teoría gluónica . . . . .	49
5.2. Potencial de PL mejorado . . . . .	50
5.3. Potenciales de PL como función de la $T$ . . . . .	51
5.4. Condensado substraído y PL como función de $T$ . . . . .	55
5.5. Energía de interacción y entropía para distintas parametrizaciones . . . . .	56
5.6. Condensado sustraído y PL para diferentes potenciales efectivos . . . . .	57
5.7. Energía y entropía para diferentes potenciales de PL . . . . .	58
5.8. Condensado quiral y densidad de quarks a $\mu$ finito. . . . .	60
5.9. Condensado sustraído y traza del PL para distintos valores de $\mu$ . . . . .	62
5.10. Diagrama de fases de QCD . . . . .	64
6.1. Mecanismos de formación de pares . . . . .	67
6.2. Dependencia del TCP y el LP con $T$ y $\mu$ . . . . .	74
6.3. Parametrización en el límite quiral . . . . .	80
6.4. Diagramas de Fases Inhomogéneos . . . . .	82
6.5. Curvas de nivel para el potencial termodinámico . . . . .	83
B.1. Contorno de integración . . . . .	92





# Capítulo 1

## Introducción

*Cuando el misterio es demasiado impresionante, es imposible desobedecer.*

El Principito. Antoine de Saint-Exupéry

La dinámica de quarks se encuentra descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD), que es una teoría de campos de gauge no abeliana (Yndurain, 1999). De acuerdo con esta teoría, los hadrones y las interacciones entre éstos pueden describirse en términos de grados de libertad de quarks y gluones.

En interacciones donde el momento transferido es relativamente grande, tales como dispersiones profundamente inelásticas, la propiedad de libertad asintótica presente en QCD permite obtener predicciones a partir del lagrangiano fundamental de la teoría, considerando a las interacciones como perturbaciones de un lagrangiano de quarks no interactuantes (Muta, 1987). Sin embargo, en el régimen de bajas energías ( $E \lesssim 1$  GeV), o equivalentemente largas distancias, la constante de acoplamiento fuerte se vuelve grande y la teoría es no perturbativa. En este régimen los quarks se encuentran confinados en hadrones, y la simetría quirral, presente en el lagrangiano en el límite en que los quarks tienen masa nula, se encuentra espontáneamente rota.

Estas características de QCD hacen que se puedan distinguir dos fases: una hadrónica de quarks y gluones confinados, con simetría quirral rota, y otra fase deconfinada y con simetría quirral restaurada, a la que se denomina genéricamente *plasma de quarks y gluones* (QGP). Bajo condiciones extremas de temperatura y/o densidad puede producirse una transición de la fase confinada a la deconfinada. Ejemplos de QGP podrían encontrarse en la materia que conforma el interior de objetos compactos como las estrellas de neutrones (Glendenning, 1997; Shapiro y Teukolsky, 1983), o durante los primeros instantes de la expansión del Universo.

Además de las mencionadas, otras fases pueden estar presentes en el diagrama de QCD. Por ejemplo, la materia de quarks puede agruparse formando pares, dando lugar a una fase de superconductividad de color (Shifman, 2002; Alford, 2001; Rischke, 2004). En este caso, para potenciales químicos suficientemente grandes, la materia se

halla distribuida de manera tal que los quarks están apareados en condensados donde se acoplan sabores y colores, y por ello a esta fase se la conoce como *Color-Flavor Locked* (CFL). Sin embargo, dado que la masa del quark strange es bastante mayor que las de los quarks up y down, se cree que para potenciales químicos más bajos deben aparecer condensados que sólo contengan estos dos sabores, dando lugar así a la fase conocida como *Two Color-Flavor Superconducting* (2SC). También pueden existir fases inhomogéneas, las cuales resultan de interés para varias ramas de la física de sistemas densos, como el estado sólido (Gruner, 1994), la superconductividad de color (Alford *et al.*, 2001; Casalbuoni y Nardulli, 2004; Anglani *et al.*, 2014) o la condensación de piones (Migdal, 1973; Dautry y Nyman, 1979; Migdal, 1978). Particularmente, se ha propuesto que la región de bajas temperaturas y altas densidades pueda estar caracterizada por la formación de estas fases inhomogéneas (Buballa y Carignano, 2015). Aquí los condensados quirales de quarks se encuentran modulados espacialmente y rompen la invarianza traslacional.

De esta manera, la estructura del diagrama de fases QCD puede resultar en general muy compleja. Un esquema de dicho diagrama está representado en la Fig. 1.1.

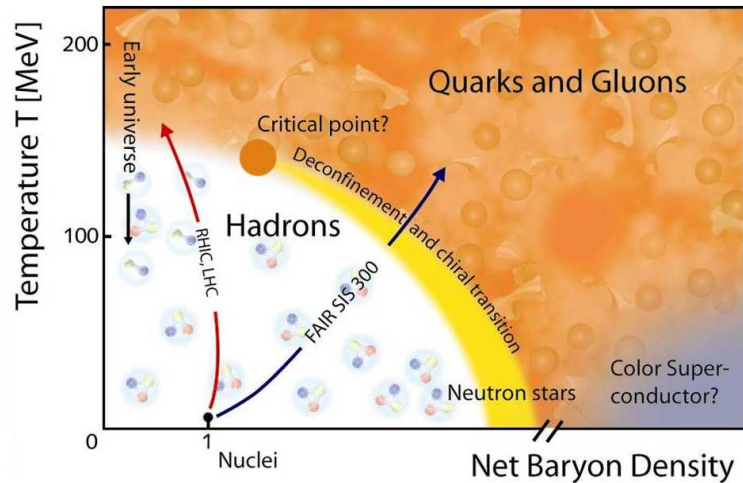


Figura 1.1: Esquema de como se cree actualmente puede ser el diagrama de fases de QCD (Kahara y Tuominen, 2010).

Para describir las propiedades estáticas de los hadrones, como sus masas o constantes de decaimiento, así como para estudiar la transición entre la fase hadrónica y la de QGP, es necesario considerar el rango de bajos momentos transferidos, por lo tanto resulta fundamental desarrollar formalismos que permitan estudiar la teoría en la región no perturbativa.

Una alternativa consiste en resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discretizado. Este enfoque no perturbativo para resolver la dinámica de quarks y gluones se denomina *lattice QCD* (LQCD) (Gattringer y Lang, 2010). Disponiendo de suficiente poder de cálculo es posible disminuir el espaciado de la red e incrementar el tamaño del sistema de manera de acercarse tanto al límite del con-

tinuo como al límite termodinámico. Al mismo tiempo, es posible muestrear un número suficientemente grande de configuraciones de manera de disminuir el error estadístico. Sin embargo, los métodos tipo Monte Carlo comúnmente utilizados para evaluar la función de partición son confiables solamente en el caso de potencial químico nulo. La extensión de los cálculos a potencial químico finito presenta grandes dificultades, entre ellas el “problema del signo” que consiste en una dificultad numérica asociada al cálculo de integrales altamente oscilatorias. En teoría de campos la función de partición se evalúa sumando sobre todas las configuraciones clásicas de campo pesadas por un factor  $e^{-S}$  donde  $S$  es la acción de la configuración. Para potencial químico no nulo, el peso se vuelve una cantidad compleja y no puede ser usado el método Monte Carlo para evaluar la integral.

Otra opción consiste en utilizar modelos efectivos que incorporan las simetrías de la teoría pero cuyo lagrangiano, simplificado, permite un análisis teórico. Uno de los modelos efectivos más utilizados para estudiar las propiedades hadrónicas en el régimen no perturbativo es el propuesto por Nambu y Jona-Lasinio en 1961 (Nambu y Jona-Lasinio, 1961). Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de un límite en el cual el pión era un bosón de Goldstone (no masivo) asociado con la ruptura espontánea de la simetría quiral. En los trabajos de 1961, Nambu y Jona-Lasinio partieron de un lagrangiano con una interacción de dos cuerpos entre nucleones (bloques básicos de materia hadrónica conocidos hasta ese momento) no masivos que respeta la simetría quiral. La ruptura espontánea hace que la masa de los nucleones resulte finita, dando lugar a bosones de Goldstone que fueron identificados con los piones.

Por esa época, QCD aún no había sido formulada. Hacia mediados de los años ‘70, cuando esta teoría fue finalmente concebida, el modelo de NJL empezó a ser abandonado, debido a su naturaleza no fundamental y a su no renormalizabilidad. Sin embargo, como consecuencia de las dificultades antes mencionadas para tratar QCD a bajas energías, en la segunda parte de la década del ‘80 surgió la idea de reinterpretar el modelo de NJL como un modelo para un sistema de quarks interactuantes, donde los grados de libertad de los gluones se pueden “congelar” dando lugar a interacciones efectivas entre los quarks.

En su versión más sencilla este modelo solamente utiliza una interacción local del tipo escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre fermiones y permite entender el mecanismo de ruptura espontánea de simetría quiral y la consiguiente aparición de los piones como bosones de Goldstone. Sin embargo, para dar cuenta del mecanismo de deconfinamiento no basta con un modelo puramente fermiónico sino que es necesario incluir la dinámica de los grados de libertad gluónicos. Para lo cual, se propone un acoplamiento entre los quarks y un campo de fondo de color asociado al parámetro de orden utilizado para describir el deconfinamiento, es decir el llamado Loop de Polyakov (Polyakov, 1978; 't Hooft, 1978). El modelo así obtenido se conoce bajo el nombre de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) (Meisinger y Ogilvie, 1996; Fukushima, 2004; Megias *et al.*, 2006; Ratti *et al.*, 2006).

Debido a la localidad del acoplamiento entre quarks y la no renormalizabilidad del modelo, es necesario regularizar las integrales que aparecen en el cálculo de los loops involucrados en la determinación de la autoenergía de los quarks, las masas de los mesones y las constantes de acoplamiento, que de otra manera conducen a divergencias ultravioletas. En general la regularización se lleva a cabo adoptando una forma esquemática de la interacción: para momentos menores que cierta escala de energía  $\Lambda_{\text{NJL}}$  la constante de acoplamiento se considera constante, mientras que para energías mayores se supone haber alcanzado la libertad asintótica y por lo tanto estar en presencia de un sistema de quarks libres. Este tipo de prescripción trae consigo algunos problemas, como ambigüedades en el tratamiento de los órdenes superiores de la expansión en loops, inconsistencias en el tratamiento de los procesos anómalos, ruptura de la invarianza traslacional, etc.

Una forma de evitar este tipo de inconvenientes, y a la vez incluir una descripción más realista de las interacciones entre quarks, consiste en considerar interacciones no locales (Ripka, 1997), las cuales surgen en el contexto de diversos métodos bien establecidos para describir la dinámica de bajos momentos de los quarks, como por ejemplo el modelo de líquido de instantones (Rapp, R and Schäfer, T and Shuryak, Edward V, 2000) o las técnicas de resumación de Schwinger-Dyson (Roberts y Williams, 1994). Utilizando este tipo de interacciones se obtiene una dependencia en el momento del propagador efectivo de quarks que resulta consistente con los resultados obtenidos mediante técnicas de LQCD (Noguera y Scoccola, 2008). También se ha mostrado (Bowler y Birse, 1995; Plant y Birse, 1998; Golli *et al.*, 2003; Rezaeian *et al.*, 2004; Scarpettini *et al.*, 2004; Gomez Dumm *et al.*, 2006) que los modelos con interacciones no locales proveen una descripción satisfactoria de las propiedades hadrónicas a temperatura y densidad nula.

En esta Tesis se trabajará entonces con extensiones del modelo de NJL que involucran interacciones no locales entre quarks. Se propondrán interacciones covariantes, para asegurar la invarianza de Lorentz de la teoría. El carácter no local se implementará a través de factores de forma separables en el espacio de momentos cuyo comportamiento a altas energías permite regularizar la teoría en el límite ultravioleta. De este modo, la acción efectiva será finita a todo orden en la expansión en loops y no existirá una dependencia de la parametrización tan acentuada como en la versión local del modelo de NJL.

## Capítulo 2

# Aspectos básicos de QCD

*Lo verdadero es siempre sencillo, pero solemos llegar a ello por el camino más complicado.*

George Sand (1804-1876) Escritora francesa.  
Seudónimo de Amandine Aurore Lucile Dupin.

**Resumen:** En este capítulo haremos una revisión de aspectos generales de la Cromodinámica Cuántica, dedicando especial atención a las simetrías vinculadas con las transiciones de fase que describiremos más adelante. Como se mencionó en el Cap. 1, estudiaremos propiedades de la materia fuertemente interactuante empleando modelos efectivos que posean las mismas simetrías que QCD, pero con lagrangianos más simples. De esta manera, antes de introducir estas teorías efectivas es necesario realizar un breve repaso sobre las características más relevantes de la teoría fundamental de las interacciones fuertes.

### 2.1. El modelo de quarks

En 1961 Murray Gell-Mann introdujo lo que hoy se conoce como *Eightfold Way*. Consiste en acomodar a los bariones y mesones en arreglos geométricos de acuerdo con su carga y extrañeza. Por ejemplo, los ocho bariones y mesones más livianos pueden ser distribuidos en un hexágono con dos partículas en el centro, tal como se puede observar en la Fig. 2.1. Si queremos acomodar bariones más pesados, lo podemos hacer en un arreglo triangular para diez partículas, nueve de las cuales eran conocidas experimentalmente. La décima, con carga  $-1$  y extrañeza  $-3$ , fue predicha por Gell-Mann, que incluso estimó su masa y tiempo de vida media. Tres años más tarde la partícula  $\Omega^-$  fue descubierta experimentalmente.

En 1964 Gell-Mann y Zweig, de manera independiente, propusieron que los hadrones están compuestos por constituyentes más elementales, los *quarks*. Éstos se caracterizan por su carga fraccionaria y *sabor*, y pueden ser acomodados en un arreglo triangular.

Así, el modelo de quarks propone que los bariones están compuestos por tres de estos subcomponentes, mientras que los mesones están formados por un par quark-antiquark. Esto permite construir el decuplete de bariones y el octete de mesones. Por ejemplo, si se toman tres sabores de quarks (*up*, *down* y *strange*), éstos se pueden identificar con elementos de la representación fundamental del grupo  $SU(3)$ , mientras que los antiquarks se encuentran en la representación compleja conjugada de dicho grupo. Los nueve estados formados de un par quark-antiquark pueden ser descompuestos en una representación trivial y la representación adjunta,

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 .$$

Si la simetría de sabor fuera exacta, los nueve mesones tendrían la misma masa. Sin embargo, debido a las diferencias entre las masas de los quarks, los mesones poseen masas distintas. De los nueve, el mesón  $\eta'$  resulta tan masivo como un nucleón, y en este esquema es identificado con el estado singlete.

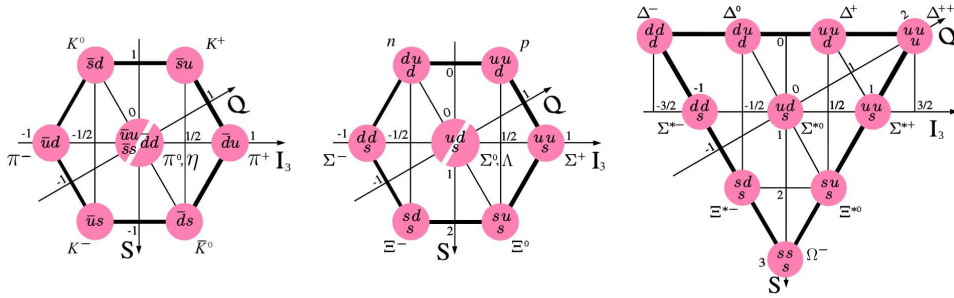


Figura 2.1: Arreglos hexagonales y triangulares para los bariones y mesones más livianos.

Siendo los quarks los componentes más elementales de la materia, serían simples de producir y observar experimentalmente. Sin embargo, resulta imposible detectar un quark libre, ya que éstos se encuentran confinados en hadrones. De todas formas, es posible diseñar experimentos para probar la estructura interna del protón, como la denominada dispersión profundamente inelástica (DIS). Estos experimentos, realizados a finales de los '60, mostraban que la carga del protón estaba concentrada en tres regiones, confirmando experimentalmente el modelo de quarks.

Los quarks, partículas de espín semientero, deben cumplir con el principio de exclusión de Pauli, propiedad que no se satisfacía por ejemplo en bariones formados por quarks del mismo sabor. Para solucionar este problema, O. W. Greenberg en 1964 propuso que los quarks no sólo debían poseer sabor, sino también *color* (rojo, azul o verde). De esta forma los tres quarks  $up$  en el barión  $\Delta^{++}$  serían de distinto color, y no violarían el principio de exclusión.

Con este nuevo número cuántico y proponiendo que toda combinación de quarks debe ser incolora, se explicaba por qué no era posible detectar quarks libres, o por qué sólo combinaciones de tres quarks o pares quark-antiquark eran las que constituían los

hadrones.

La interacción entre quarks, en el marco de las teorías de Yang-Mills, se propone como un intercambio de gluones, que son portadores de color. Han y Nambu introdujeron el color de manera dinámica y, posteriormente, este grupo y otros dos independientemente (D. Gross y F. Wilczek en Princeton, y D. Politzer en Harvard) demostraron que la interacción entre quarks y gluones desaparece a distancias muy pequeñas, explicando por qué los quarks se comportaban como partículas libres dentro del protón, tal y como habían revelado los datos de Stanford sobre colisiones electrón-protón profundamente inelásticas. Este fenómeno de importancia capital se denomina libertad asintótica. Posteriormente H. Fritzsche, M. Gell-Mann y H. Leutwyler formularon el Lagrangiano de QCD en 1973 (Fritzsche *et al.*, 1973).

## 2.2. El lagrangiano de QCD

La Cromodinámica Cuántica es una teoría de gauge no abeliana que describe las interacciones fuertes entre quarks y gluones. La densidad lagrangiana de QCD está dada por (Yndurain, 1999)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} i\gamma_{\mu} D^{\mu} \psi - \bar{\psi} \hat{m} \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $\psi = (u, d, s, \dots)^T$  es el campo de quarks de  $N_c$  colores y  $N_f$  sabores,  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma_0$  y  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$  es la matriz formada por las “masas corrientes” de los quarks. La derivada covariante

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i g \lambda^a A_{\mu}^a, \quad (2.2)$$

que incluye los campos de gauge  $A_{\mu}^a$ , con  $a = 1 \dots 8$ , acopla los sectores fermiónico y gluónico. Aquí  $g$  es la constante de acoplamiento fuerte y  $\lambda^a$  son las matrices de Gell-Mann, que constituyen una representación de los generadores del grupo de color  $SU(3)$ . Estas matrices satisfacen las relaciones

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc}, \quad \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad (2.3)$$

siendo  $f^{abc}$  las constantes de estructura del grupo. El tensor de campo gluónico  $G_{\mu\nu}^a$  que aparece en el último término de la Ec. (2.1) se define como

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c. \quad (2.4)$$

Este término del lagrangiano es responsable de la autointeracción entre los campos de gauge, propio de las teorías de gauge no abelianas como QCD.

Tal como está construido, el lagrangiano de QCD es invariante ante transformaciones de gauge  $SU(3)$  de color. Por el carácter no abeliano del grupo de gauge QCD se

diferencia de otras teorías en algunos aspectos:

- *Universalidad*: Existe sólo una constante de acoplamiento  $g$  para todas las interacciones entre quarks y gluones. Esta es una consecuencia directa de la invarianza de gauge local  $SU(N_c)$ .
- *Libertad asintótica*: A muy altas energías los quarks se comportan como partículas libres. En otras palabras, el acoplamiento se vuelve débil para cortas distancias o, equivalentemente, para valores grandes del cuadrado del momento transferido  $Q^2$ . A un loop, dicho acoplamiento resulta ser

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \log(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}, \quad (2.5)$$

donde  $\Lambda_{QCD} \simeq 340$  MeV (Olive *et al.*, 2014) es un parámetro de escala de la teoría.

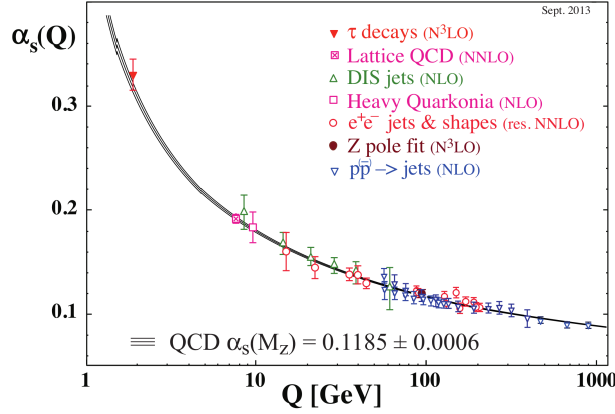


Figura 2.2: Resultados experimentales para la dependencia de la constante de acoplamiento fuerte  $g$  como función de la energía (Olive *et al.*, 2014). En teorías no abelianas, la constante crece cuanto menor es el momento trasferido.

- *Confinamiento*: Inversamente, la Ec. (2.5) muestra que el acoplamiento aumenta a bajas energías (Fig. 2.2). Por tal motivo, no es posible aplicar teoría de perturbaciones para describir procesos con energías menores que  $\sim 1 - 2$  GeV. Resultando difícil comprender en detalle el fenómeno del confinamiento, observado en la naturaleza.
- *Simetría quiral*: En el límite en que las masas corrientes de los quarks son nulas (límite quiral), el lagrangiano de QCD es invariante ante el grupo quiral de transformaciones globales  $SU(N_f)_R \otimes SU(N_f)_L$ .
- *Invarianza de escala*: En el límite quiral, el lagrangiano de QCD no contiene parámetros dimensionales, por lo que resulta invariante ante transformaciones de escala. Esto es  $\psi(x) \rightarrow \lambda^{-3/2}\psi(\lambda x)$  para los campos fermiónicos y  $A_\mu(x) \rightarrow \lambda^{-1}A_\mu(\lambda x)$  para los campos de gauge.



- *Límite de gran número de colores:* Permite realizar un análisis perturbativo de QCD. Consiste en hacer tender a infinito el valor físico del número de colores  $N_c = 3$ , manteniendo la relación  $g^2 N_c$  constante. En estas condiciones y a orden dominante en potencias de  $1/N_c$  los diagramas de loops de quarks y gluones se reducen considerablemente. Es posible describir en el marco de esta aproximación la fenomenología de bariones y mesones si los estados físicos son singletes de color.

### 2.3. Ruptura espontánea de la simetría quiral

A lo largo de la Tesis trabajaremos con modelos efectivos de quarks para dos y tres sabores, tanto en el límite quiral como fuera de éste. Particularmente, como ya se adelantó, se emplearán extensiones del modelo propuesto por Nambu y Jona-Lasinio, basado en la simetría quiral de  $\mathcal{L}_{QCD}$ . Por este motivo, comenzaremos con una descripción de esta simetría para dos sabores de quarks, que luego extenderemos al caso de tres sabores.

Consideremos el lagrangiano de la Ec. (2.1) para dos sabores,  $u$  y  $d$ , en el límite quiral ( $m_u = m_d = 0$ ),

$$\mathcal{L}_{QCD}^{m=0} = \bar{\psi} i\gamma_\mu D^\mu \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Es inmediato ver que  $\mathcal{L}_{QCD}^{m=0}$  puede separarse por estados de helicidad. Si introducimos los campos dextrógiro  $\psi_R$  y levógiro  $\psi_L$  según

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad (2.7)$$

el primer término del lagrangiano de la Ec. (2.6) se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_{quark} = \bar{\psi}_R i\gamma_\mu D^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L i\gamma_\mu D^\mu \psi_L \quad (2.8)$$

y es invariante ante transformaciones globales del grupo  $U(2)_R \otimes U(2)_L = SU(2)_R \otimes U(1)_R \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_L$ , cuya acción sobre los campos  $\psi_R$  y  $\psi_L$  está dada por

$$\begin{aligned} U(2)_R : \quad & \psi_R \rightarrow e^{i\tau_s \alpha_R^s} \psi_R \\ U(2)_L : \quad & \psi_L \rightarrow e^{i\tau_s \alpha_L^s} \psi_L \quad (s = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aquí  $\alpha_{R,L}^s$  son parámetros de las transformaciones, y  $\tau_0 = \mathbb{1}_{2 \times 2}$ , mientras que  $\tau_s$ , con  $s = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli. Las corrientes de Noether asociadas son

$$J_{sR}^\mu = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \tau_s \psi_R, \quad J_{sL}^\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \tau_s \psi_L, \quad (2.10)$$

y se verifica que  $\partial_\mu J_{sR}^\mu = \partial_\mu J_{sL}^\mu = 0$ . De manera alternativa podemos escribir estas corrientes conservadas en términos de las corrientes vectorial y axial

$$V_s^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \tau_s \psi, \quad A_s^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_s \psi, \quad (2.11)$$

que están relacionadas con las corrientes  $R, L$  según

$$J_{sR,L}^\mu(x) = \frac{1}{2}[V_s^\mu \pm A_s^\mu(x)]. \quad (2.12)$$

Como resulta que  $\partial_\mu V_s^\mu = \partial_\mu A_s^\mu = 0$ , la simetría quiral es equivalente a la invarianza frente a las transformaciones

$$\begin{aligned} U(2)_V : \psi &\rightarrow \exp(i\tau_s \alpha_V^s) \psi, \\ U(2)_A : \psi &\rightarrow \exp(i\gamma_5 \tau_s \alpha_A^s) \psi \end{aligned} \quad (2.13)$$

del grupo

$$U(2)_V \otimes U(2)_A = SU(2)_V \otimes U(1)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_A.$$

En el término del lagrangiano de QCD correspondiente a los campos de gauge,  $\mathcal{L}_{gauge}$ , no están presentes los campos fermiónicos, por lo tanto el lagrangiano de la Ec. (2.6) es invariante ante transformaciones quirales.

Cuando consideramos el término de masa en el lagrangiano de la Ec (2.1) encontramos que en general las cuadridivergencias de las corrientes no son nulas. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_s^\mu(x) &= 2i\bar{\psi}(x)[\hat{m}, \tau_s]\psi(x), \\ \partial_\mu A_s^\mu(x) &= 2i\bar{\psi}(x)\{\hat{m}, \tau_s\}\gamma_5\psi(x). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las transformaciones correspondientes a los grupos  $SU(2)_V$  y  $U(1)_V$  son las asociadas a la conservación del isospin, que resulta ser una simetría exacta en el límite  $m_u = m_d$ , y del número bariónico, respectivamente, mientras que las correspondientes a  $SU(2)_A$  y  $U(1)_A$  alteran la paridad de un estado dado. La realización de dichas simetrías en la naturaleza debería implicar para cada multiplete la existencia de otro de paridad opuesta, dado que las masas corrientes son pequeñas. Esto no se observa experimentalmente, de donde se induce que tanto  $SU(2)_A$  como  $U(1)_A$  son simetrías que, de alguna manera, están rotas.

Se cree que  $SU(2)_A$  es una simetría espontáneamente rota. De este modo, en el caso de dos quarks sin masa, aparecen tres modos de excitación de masa nula, cada uno asociado a un generador del grupo de simetría rota, llamados bosones de Goldstone. Estos tres bosones se identifican con los piones, ya que sus masas, si bien no son nulas, resultan mucho menores que la de otros hadrones conocidos. Se dice que una simetría esta espontáneamente rota cuando el vacío no es invariante frente a la acción de un operador que conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Como consecuencia de esto, el estado fundamental deja de ser único y pasa a estar degenerado. En otras palabras, los operadores generadores del álgebra del grupo ya no aniquilan al vacío.

Por otro lado, la simetría  $U(1)_A$  está rota a nivel cuántico por la anomalía axial. Esto significa que, si bien la teoría clásica posee una simetría dada, ésta está rota debido

a que a nivel cuántico la corriente de Noether recibe una contribución extra que hace que su cuadrivergencia deje de ser nula.

### 2.3.1. Extensión a tres sabores

De manera análoga al caso de dos sabores estudiaremos la ruptura de la simetría quiral cuando existen tres sabores de quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ ,  $\psi = (u, d, s)^T$ . En este caso  $\mathcal{L}_{QCD}^{m=0}$  resulta invariante ante el grupo

$$U(3)_R \otimes U(3)_L = SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.15)$$

La simetría axial  $U(1)_A$  está, al igual que antes, rota a nivel cuántico debido a la existencia de una anomalía. Por lo tanto, en el límite quiral, la teoría tiene la simetría global  $SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V$ . Tenemos entonces nueve corrientes vectoriales y ocho axiales conservadas:

$$\begin{aligned} V_\mu^a &= \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi, & a = 0, \dots, 8, \\ A_\mu^a &= \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi, & a = 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (2.16)$$

con  $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}_{3 \times 3}$ , donde  $\mathbb{1}_{3 \times 3}$  es la matriz unitaria de  $3 \times 3$ , y  $\lambda^a$  las matrices de Gell-Mann, generadoras del álgebra del grupo  $SU(3)$  en la representación fundamental. Las correspondientes cargas conservadas son

$$Q^a = \int d^3x V_0^a(x), \quad Q_5^a = \int d^3x A_0^a(x), \quad (2.17)$$

y se satisface que

$$\frac{dQ^a}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_5^a}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

Al igual que en  $SU(2)$ , tendremos tantos bosones de Goldstone no masivos como generadores tenga el grupo de simetría axial, los cuales se identificarán con los mesones pseudoescalares más livianos, es decir los piones  $\pi^0$ ,  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ , los kaones  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$  y los mesones  $\eta$  y  $\eta'$  (estos últimos poseen los mismos números cuánticos, de modo que pueden “mezclarse”). Los primeros ocho bosones corresponden a los ocho generadores del grupo  $SU(3)_A$ , mientras que el  $\eta'$  se asocia con el generador del grupo  $U(1)_A$ .

Si consideramos quarks masivos, la simetría se rompe explícitamente, obteniéndose de manera análoga a la Ec. (2.14) que

$$\begin{aligned} \partial^\mu V_\mu^a(x) &= i\bar{\psi}(x) \left[ \hat{m}, \frac{\lambda^a}{2} \right] \psi(x), \\ \partial^\mu A_\mu^a(x) &= i\bar{\psi}(x) \left\{ \hat{m}, \frac{\lambda^a}{2} \right\} \gamma_5 \psi(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sin embargo, como las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son muy pequeñas ( $m_{u,d} \leq 10$  MeV) comparadas con las masas típicas de los hadrones ( $\gtrsim 1$  GeV), los términos  $m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$  que rompen la simetría quiral pueden ser tratados como perturbaciones. Por el contrario, para el término  $m_s \bar{s}s$ , como la masa del quark  $s$  bastante mayor ( $m_s \sim 150$  MeV), ésta ya no resulta una muy buena aproximación.

### 2.3.2. Anomalía axial

Mencionamos que la simetría  $U(1)_A$  del lagrangiano de QCD en el límite quiral está rota en la naturaleza. Si hubiese una buena simetría quiral  $U(3)_R \otimes U(3)_L$ , tendríamos nueve corrientes axiales conservadas en lugar de ocho. En ese caso, todo el noneto pseudoescalar (piones, kaones,  $\eta$  y  $\eta'$ ) deberían aparecer como bosones de Goldstone no masivos. En cambio se observa que el mesón  $\eta'$ , cuya masa  $m_{\eta'} = 958$  MeV es comparable a la del nucleón, cae fuera de este esquema. Consideremos la corriente axial del singlete de  $SU(3)$  relacionada con la simetría  $U(1)_A$ ,

$$J_{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (2.20)$$

Es de esperar que la divergencia de la corriente se anule en el límite quiral. Sin embargo, cuando se tienen en cuenta correcciones cuánticas se encuentra que

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = \frac{g^2 N_f}{8\pi^2} E^a B^a, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.21)$$

donde  $E^a$  y  $B^a$  son respectivamente campos eléctricos y magnéticos de color.

Las ecuaciones no abelianas de Yang-Mills admiten soluciones para las cuales la acción clásica euclídea  $\int d^4x E^a B^a$  es finita, las llamadas soluciones de instantones (Belavin *et al.*, 1975). A través de la Ec. (2.21), estos instantones se acoplan a los quarks. Gerardus t'Hooft demostró en 1976 (t'Hooft, 1976b,a) que esta interacción efectiva entre quarks inducida por los instantones se puede representar en términos de un determinante de sabor

$$\det_f [\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] + \det_f [\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi], \quad (2.22)$$

donde  $\det_f$  denota un determinante sobre el espacio de sabor.

Fuera del límite de masa cero la simetría quiral se rompe explícitamente. De tal forma, y de una expresión similar a la Ec. (2.14) (reemplazando las matrices  $\tau_s$  por 1), la cuadridivergencia de la corriente axial asociada al grupo  $U(1)_A$  introduce un término adicional  $2i\bar{\psi}m\gamma_5\psi$  en el lado derecho de la Ec. (2.21).

## 2.4. Sistemas con temperatura y potencial químico finitos

El comportamiento estadístico de un sistema cuántico en equilibrio térmico se puede estudiar a través de su función de partición, que se define como

$$Z(\beta) = \text{Tr}\rho(\beta), \quad (2.23)$$

donde la traza es la suma sobre todos los valores de expectación en cualquier base completa,  $\beta$  es la inversa de la temperatura (utilizaremos unidades tales que la constante de Boltzman es  $k = 1$ ), y  $\rho$  representa la matriz densidad del sistema, dada por

$$\rho(\beta) = \exp(-\beta\mathcal{H}) . \quad (2.24)$$

En el ensamble Gran Canónico

$$\mathcal{H} = H - \mu N, \quad (2.25)$$

donde  $H$  y  $N$  son los operadores Hamiltoniano y número de partículas, respectivamente, y  $\mu$  es el potencial químico. El promedio estadístico en el ensamble del valor esperado de un observable  $A$  viene dado por

$$\langle A \rangle = Z^{-1}(\beta)\text{Tr}(\rho(\beta)A) = \frac{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H})A}{\text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H})} \quad (2.26)$$

Consideraremos aquí el formalismo de Matsubara o de tiempo imaginario. La idea básica es que los valores de expectación de operadores en un ensamble térmico se pueden reescribir como valores de expectación en teoría cuántica de campos, donde la configuración evoluciona en un tiempo imaginario o euclídeo  $t = i\beta$ . De esta forma, se puede cambiar a un espacio-tiempo con métrica euclídea, donde la traza de la Ec. (2.26) lleva a requerir que los campos bosónicos y fermiónicos sean respectivamente periódicos o anti-periódicos con respecto a la dirección del tiempo euclídeo, con periodicidad  $\beta$ . En el espacio de momentos, esto conduce al reemplazo de frecuencias continuas por frecuencias discretas, conocidas como modos de Matsubara, dadas por

$$\omega_n = \begin{cases} (2n\pi)/\beta & \longrightarrow \text{bosones} \\ (2n+1)\pi/\beta & \longrightarrow \text{fermiones,} \end{cases} \quad (2.27)$$

donde  $n$  es un entero. Esto se puede comprender fácilmente dentro del contexto de integrales de camino. Para ello necesitamos la amplitud de transición en teoría de campos a temperatura cero, cuya representación funcional está dada por

$$\langle \phi(\vec{x}_1, t_1) | \phi(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | e^{-i\mathcal{H}(t_1-t_2)} | \phi_2 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{iS}, \quad (2.28)$$

donde  $\phi$  es algún campo,  $N'$  una constante de normalización y  $S$  la acción, definida por

$$S[\phi] = \int_{t_2}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L}, \quad (2.29)$$

siendo  $\mathcal{L}$  la densidad lagrangiana del sistema. La integral funcional está definida sobre caminos, cuyos extremos se mantienen fijos, que satisfacen

$$\phi(\vec{x}_1, t_1) = \phi_1, \quad \phi(\vec{x}_2, t_2) = \phi_2. \quad (2.30)$$

Dadas las tres últimas ecuaciones es fácil ver que identificando  $t_1 - t_2 = -i\beta$ , se puede escribir la función de partición para cualquier sistema cuántico en la base de estados  $|\phi_a\rangle$  como

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_a \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E}, \quad (2.31)$$

donde  $S_E$  está relacionada a la acción euclídea (tiempo imaginario) según

$$S_E = S_E + \beta\mu N = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E + \beta\mu N. \quad (2.32)$$

Aquí los campos satisfacen las condiciones periódicas o antiperiódicas  $\phi(\vec{x}, \beta) = \pm\phi(\vec{x}, 0)$ , dependiendo de si las variables de campo son bosónicas o fermiónicas, respectivamente. En el espacio de momentos, la integración sobre un intervalo finito implica que las frecuencias en la transformada de Fourier tomen valores discretos en lugar de continuos. Las distintas condiciones de contorno determinan los posibles valores para dichas frecuencias, definidas para cada caso en la Ec. (2.27).

## 2.5. El loop de Polyakov

El loop de Polyakov fue propuesto por A.M. Polyakov (Polyakov, 1978, 1977) como una aplicación del loop de Wilson (Wilson, 1974) al problema de propiedades térmicas de campos de gauge, en particular como un mecanismo para explicar el deconfinamiento de quarks a una cierta temperatura.

### 2.5.1. Simetría global $Z(N)$ en $SU(N)$

Siguiendo el trabajo de t'Hooft (t'Hooft, 1976b,a), en una teoría de gauge local con simetría  $SU(N)$  aparece una simetría global  $Z(N)$ . Para ver esto, consideremos la densidad lagrangiana, que incluye la interacción de los quarks con los campos gluónicos, de la Ec. (2.6). Este lagrangiano es invariante ante transformaciones de gauge  $SU(N)$ ,  $\Omega$ , dadas por

$$D_\mu \rightarrow \Omega^\dagger D_\mu \Omega, \quad \psi \rightarrow \Omega^\dagger \psi. \quad (2.33)$$

Al ser un elemento de  $SU(N)$ ,  $\Omega$  satisface que

$$\Omega^\dagger \Omega = \mathbb{1} \quad , \quad \det \Omega = 1. \quad (2.34)$$

Consideremos una transformación de gauge dada por una fase constante y la matriz unidad:

$$\Omega_c = e^{-i\varphi} \mathbb{1}. \quad (2.35)$$

Para que esta transformación sea un elemento de  $SU(N)$ , el determinante debe ser igual a uno, lo cual requiere que

$$\varphi = \frac{2\pi j}{N} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, (N-1). \quad (2.36)$$

Esto determina un grupo cíclico, cuyos elementos son generados por las potencias  $j$  de un único elemento, definiendo así una simetría global  $Z(N)$ . Se dice que estos elementos conforman el *centro* del grupo  $SU(N)$ .

### 2.5.2. $Z(N)$ a temperatura finita

Al ser un subgrupo de las transformaciones de gauge, las rotaciones del grupo  $Z(N)$  son una simetría del Lagrangiano. Sin embargo, en presencia de quarks dinámicos, las rotaciones de  $Z(N)$  no son una simetría de la teoría ya que estas violan las condiciones de borde requeridas.

En efecto, trabajando en espacio-tiempo euclídeo a una temperatura  $T$ , la coordenada de tiempo imaginario  $\tau$  es de extensión finita,  $\tau: 0 \rightarrow \beta = 1/T$ . Las condiciones de borde que deben satisfacer los campos están dadas por la estadística propia de cada uno de ellos. Esto es, los gluones deben ser periódicos en  $\tau$ , mientras que los quarks deben ser anti-periódicos:

$$A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0) \quad , \quad \psi(\vec{x}, \beta) = -\psi(\vec{x}, 0). \quad (2.37)$$

Cualquier transformación de gauge que sea periódica en  $\tau$  respeta estas condiciones de borde. Sin embargo, t'Hooft encontró que es posible considerar transformaciones de gauge más generales, las cuales son periódicas a menos de  $\Omega_c$ :

$$\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c \quad , \quad \Omega(\vec{x}, 0) = 1. \quad (2.38)$$

Los campos de color adjuntos son invariantes ante esta transformación, mientras que los que están en la representación fundamental no lo son:

$$A^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger A_\mu(\vec{x}, \beta) \Omega_c = A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0), \quad (2.39)$$

$$\psi^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger \psi(\vec{x}, \beta) = e^{i\varphi} \psi(\vec{x}, \beta) \neq -\psi(\vec{x}, 0). \quad (2.40)$$

Aquí se ha utilizado el hecho de que  $\Omega_c$ , al ser una fase constante por la matriz unitaria,

conmuta con cualquier matriz de  $SU(N)$ . En consecuencia, las teorías de gauge  $SU(N)$  puras tienen una simetría global  $Z(N)$ , la cual deja de ser exacta al incluir quarks dinámicos.

En la teoría de gluones pura, un parámetro de orden para la simetría  $Z(N)$  se construye utilizando la línea de Wilson térmica:

$$L(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left( ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right), \quad (2.41)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento de gauge,  $A_0$  es la componente temporal del potencial vector y el símbolo  $\mathcal{P}$  denota ordenamiento de camino. Con esta definición, la línea de Wilson térmica transforma como un campo adjunto ante transformaciones de gauge  $SU(N)$  locales:

$$L(\vec{x}) \rightarrow \Omega^\dagger(\vec{x}, \beta) L(\vec{x}) \Omega(\vec{x}, 0). \quad (2.42)$$

El loop de Polyakov (Polyakov, 1978) se define como la traza de la línea de Wilson térmica, y es por lo tanto, invariante de gauge:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{N} \text{Tr} L = N^{-1} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left( ig \int_0^\beta A_0(\vec{x}, \tau) d\tau \right). \quad (2.43)$$

Ante transformaciones globales  $Z(N)$ , el loop de Polyakov  $\phi$  trasforma como un campo con carga uno:

$$\phi \rightarrow e^{i\varphi} \phi. \quad (2.44)$$

A muy alta temperatura, la teoría es casi ideal ( $g \approx 0$ ), por lo que se esperaría que  $\langle \phi \rangle \sim 1$ . Sin embargo, el vacío permitido exhibe una degeneración de  $N$  hojas. Esto es,

$$\langle \phi \rangle = \exp \left( \frac{i2\pi j}{N} \right) \phi_0, \quad j = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (2.45)$$

donde  $\phi_0$  es una función real, que además cumple que  $\phi_0 \rightarrow 1$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Cualquier valor de  $j$  es equivalente, por lo que cualquier elección conduce a la ruptura espontánea de la simetría global  $Z(N)$ .

A temperatura cero, el confinamiento implica que  $\phi_0$  se anule. Por lo tanto, aumentando la temperatura debe existir cierto valor  $T_c$ , a partir del cual  $\phi_0$  deja de ser nulo y se produce el deconfinamiento. Esto es

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 & \text{si } T < T_c, \\ \phi_0 > 0 & \text{si } T > T_c. \end{cases} \quad (2.46)$$

Para comprender qué representa el loop de Polyakov tomemos la función de partición



para un sistema de gluones en presencia de un quark de prueba infinitamente pesado:

$$\mathcal{Z}_Q = \int \mathcal{D}A \phi(\vec{x}) e^{-S_{gauge}[A]}, \quad (2.47)$$

donde

$$S_{gauge} = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}_{gauge}^E. \quad (2.48)$$

Podemos calcular el valor medio del loop de Polyakov, esto es

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}A \phi(\vec{x}) e^{-S_{gauge}[A]} = \frac{\mathcal{Z}_Q}{\mathcal{Z}} = e^{-\beta F}. \quad (2.49)$$

Es decir que hallamos que  $\langle \phi \rangle$  es el cociente entre las funciones de partición para el sistema de gluones con y sin una fuente externa de color, por lo tanto es una medida para la energía libre  $F$  de un quark estático externo. Entonces, en el caso de quarks confinados, debe cumplirse que  $\langle \phi \rangle = 0$ , ya que la energía libre de un solo quark es infinita. En cambio, si los quarks se encuentran deconfinados,  $F$  es finita y  $\langle \phi \rangle \neq 0$ .

Por otro lado, en presencia de quarks dinámicos la simetría  $Z(N)$  está explícitamente rota. En este caso entonces, el loop de Polyakov deja de ser un parámetro de orden riguroso, pero sirve aún como indicador de un *crossover* hacia el deconfinamiento.

Recientemente se ha propuesto una extensión del modelo NJL incluyendo al loop de Polyakov (Ratti *et al.*, 2006). La idea principal es introducir tanto el condensado quiral  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  como el loop de Polyakov  $\phi$  como campos que se acoplen a los quarks siguiendo las reglas dictadas por las simetrías y patrones de ruptura de simetría de QCD, unificando así los aspectos de confinamiento y ruptura de simetría quiral. Se suele referir a este esquema como modelo PNJL (NJL extendido con loop de Polyakov).

## 2.6. Lattice QCD

Hemos mencionado en la introducción que existe un método de primeros principios para tratar la dinámica de QCD a bajas energías. Éste consiste en discretizar el espacio-tiempo y reescribir la acción en forma también discretizada (Gattringer y Lang, 2010). En este contexto la función de partición se puede estimar utilizando el método Monte Carlo, es decir, aproximando la integral como una suma sobre configuraciones que están pesadas por la acción. El método de muestreo por importancia permite reducir los cálculos a un número limitado de configuraciones, según la probabilidad con la que éstas pueden ocurrir,  $e^{-S_E}$ . Claramente, este método tiene sentido sólo si la acción euclídea es una cantidad definida positiva.

El formalismo de tiempo imaginario que hemos visto en este capítulo, útil para estudiar QCD a temperatura y densidad finitas, implica reemplazar  $p_4$  por  $\omega_n - i\mu$ , por lo que si el potencial químico es diferente de cero la acción es en general una cantidad compleja. De este modo, para  $\mu$  finito no hay manera de comparar las probabilidades asociadas a distintas configuraciones. Esto es lo que se conoce como el “problema del

signo”.

Para  $\mu = 0$ , utilizando LQCD se estima que para dos sabores livianos la restauración de la simetría quiral ocurre como una transición suave (crossover) a  $T_c \sim 175$  MeV (Karsch y Laermann, 2003), mientras que cuando se incluye el quark strange masivo la temperatura crítica resulta más baja,  $T_c \sim 160$  (Bazavov y Petreczky, 2010; Borsanyi *et al.*, 2010b; Borsanyi, 2013). Estos cálculos predicen además que la transición de deconfinamiento ocurre aproximadamente a la misma temperatura que la transición quiral (Wu *et al.*, 2007).

En cuanto a la posibilidad de extender los cálculos a potencial químico finito existen varias alternativas. Una posibilidad es hacer un desarrollo en serie de potencias de  $\mu/T$  alrededor de  $\mu = 0$  (Allton *et al.*, 2003; Gai y Gupta, 2003), donde no está presente el problema del signo. En esta expansión el radio de convergencia está limitado por la singularidad más cercana en el potencial termodinámico. Por lo tanto, esta alternativa puede ser útil para estimar la posición del punto crítico final, que es el punto sobre la curva de transición de fase que separa las regiones con simetría quiral rota y restaurada. Otra alternativa es utilizar una técnica conocida como *multi-parameter reweighting* (Fodor y Katz, 2002, 2004; Ejiri, 2008), que consiste en tomar para  $\mu \neq 0$  el mismo ensamble que para  $\mu = 0$ , cambiando los valores de las masas de quarks y constante de acoplamiento de manera tal que ciertas cantidades físicas no cambien. Pero los resultados que se obtienen de esta forma presentan fluctuaciones debido al hecho de que en realidad las configuraciones a potencial químico finito que ocurren con más probabilidad no son las mismas que a  $\mu = 0$ . Finalmente, es posible estudiar qué ocurre con un potencial químico imaginario (Wu *et al.*, 2007; Délia y Lombardo, 2003; de Forcrand y Philipsen, 2003) y, usando argumentos de continuidad analítica, extrapolar los resultados a potencial químico real y finito. Esto ha motivado el estudio del diagrama de fases para  $\mu$  imaginario, estimándose en particular la posición del punto crítico asociado a la llamada transición Roberge-Weiss (RW), que es un cambio de fase asociado a la ruptura de la simetría  $Z_3$  (Roberge y Weiss, 1986).

Por otra parte, una limitación que se encuentra en los cálculos con técnicas de LQCD es que en la función de partición aparece el determinante fermiónico, que resulta muy difícil de calcular. Por este motivo, muchos cálculos se han llevado a cabo utilizando el llamado *quenched limit*, que consiste en suponer una masa infinita para los quarks, de modo que estos permanecen estáticos en los sitios de la red. Si bien actualmente se han llevado a cabo análisis que incluyen quarks dinámicos, muchos cálculos todavía se realizan con valores de masa por encima de los valores fenomenológicos procediendo luego a algún tipo de extrapolación para alcanzar la región física.

## Capítulo 3

# Modelo de Nambu Jona-Lasinio

*Todo Ser cree ser todo; pero nada es todo: todo  
es apenas nada. El ave es nada, porque vuela.  
El pez es todo, porque nada.*

Salí Babá (Puccio) - Les Luthiers

**Resumen:** En el capítulo anterior repasamos algunos aspectos generales de la Cromodinámica Cuántica. En particular, mencionamos que al ser una teoría de gauge no abeliana la constante de acoplamiento fuerte se vuelve grande a bajas energías y no es posible tratar las interacciones como perturbaciones de un lagrangiano libre. Fueron también mencionadas dos opciones para atacar este problema. Una posibilidad es obtener numéricamente las soluciones a las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo discretizado, mientras que otra alternativa (sobre la que trata este capítulo) consiste en el estudio de teorías cuyos lagrangianos, más simples que el de QCD, posean las simetrías principales de la Cromodinámica Cuántica y permitan reproducir la fenomenología observada de los hadrones. Estos modelos en su forma más simple describen un sistema de quarks interactuantes, con interacciones locales que satisfacen invarianza quiral. Si bien brindan una descripción muy simplificada de la interacción fuerte, que facilita los cálculos, también dan lugar a inconsistencias y ambigüedades con las que resulta difícil lidiar. Se discutirá entonces, en la parte final del capítulo, la posibilidad de considerar interacciones no locales cuya implementación en las teorías efectivas resulta en una mejor aproximación a QCD.

### 3.1. Teorías efectivas de QCD

Si sólo nos interesa la dinámica de algunos grados de libertad del sistema, es conveniente desarrollar una teoría efectiva que sólo incluya a éstos. Para el caso de QCD a bajas energías es posible construir un lagrangiano efectivo para los hadrones basado en

ciertas propiedades básicas, como las mencionadas en el Cap. 2. Por ejemplo, de acuerdo con el modelo de quarks los hadrones pueden ser acomodados en multipletes, así es posible imaginar una teoría que no contenga explícitamente a los campos de gauge o gluones. También deberá preservarse la simetría quiral global que posee el Lagrangiano de QCD (en el límite de quarks no masivos) y deberá tener lugar la ruptura dinámica de ésta. Además, la teoría deberá poder escribirse en términos de los grados de libertad relevantes a bajas energías, es decir cuando la escala de energía es menor que alguna escala de corte. Por ejemplo, para  $E \lesssim 1$  GeV los grados de libertad fundamentales deberán ser los pseudobosones de Goldstone y sus partículas quirales asociadas.

Así, el Lagrangiano de la teoría efectiva buscada se escribirá en general como

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \sum_n c_n \mathcal{O}_n(x) \left( \frac{1}{\Lambda} \right)^{\dim(\mathcal{O}_n)-4}, \quad (3.1)$$

donde  $c_n$  son constantes de acoplamiento adimensionales y  $\mathcal{O}_n$  son operadores locales, invariantes frente a transformaciones quirales, que contienen los campos que corresponden a los grados de libertad del modelo. La teoría será válida por debajo de la escala  $\Lambda$  y dependerá del número de términos que uno tome en el desarrollo. Una vez que uno corta la serie, determina las constantes de acoplamiento desconocidas a través de un conjunto de observables físicos, y así la teoría puede ser usada para calcular otras cantidades.

### 3.2. Modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL)

Si queremos partir de un lagrangiano efectivo de quarks, más simple que el de QCD, que pueda utilizarse para describir la dinámica de un sistema hadrónico, nos vemos naturalmente inducidos a comenzar por considerar el lagrangiano utilizado por Y. Nambu y G. Jona-Lasinio en sus trabajos de 1961 (Nambu y Jona-Lasinio, 1961). Como ya fue mencionado, este modelo fue originalmente concebido para describir nucleones interactuantes, y luego los grados de libertad fermiónicos fueron reinterpretados en términos de quarks, suponiendo que las interacciones locales de cuatro fermiones se corresponden con una interacción efectiva, resultante de complicados procesos gluónicos.

Estos modelos pueden ser diseñados para incorporar todas las simetrías globales de QCD y permiten estudiar en detalle el mecanismo de ruptura espontánea de la simetría quiral y sus manifestaciones en la física de hadrones, como la generación dinámica de masa de los quarks, la aparición de condensados de quarks-antiquarks y el rol de los piones como bosones de Goldstone. Tal vez el punto más débil del modelo es que no posee la propiedad de confinamiento de color de QCD. Su aplicabilidad está entonces limitada a fenómenos hadrónicos y nucleares que no dependan sensiblemente de los detalles del mecanismo de confinamiento. No obstante, cabe esperar que para muchos aspectos importantes de la física hadrónica de bajas energías, las propiedades determinadas por las simetrías de QCD sean tan o más importantes que el confinamiento de

color.

El modelo NJL más simple considera a los quarks livianos  $u$  y  $d$  como los grados de libertad del sistema, y supone que en el límite de bajas energías los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva local entre quarks, construida según las simetrías de QCD. El lagrangiano del modelo de NJL para dos sabores ( $N_f = 2$ ) se escribe entonces como

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}, \quad (3.2)$$

con la matriz de masas dada por  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d)$ . El lagrangiano de interacción incluye un acoplamiento local de cuatro fermiones. Esta interacción debe satisfacer la simetría quirral  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  junto con la simetría de color  $SU(3)$  y las simetrías discretas C, P y T. El  $\mathcal{L}_{int}$  propuesto originalmente por Nambu y Jona-Lasinio es

$$\mathcal{L}_{int} = G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (3.3)$$

### 3.2.1. Generación dinámica de masa fermiónica

Consideremos el lagrangiano de interacción  $\mathcal{L}_{int}$  de la Ec. (3.3) para fermiones de igual masa  $m$  (límite de isospin). Si la constante de acoplamiento  $G$  es pequeña se puede utilizar teoría de perturbaciones, pero si el acoplamiento es fuerte es preciso realizar resumaciones. En este último caso comúnmente se utiliza la aproximación de Hartree (campo medio), en la que se toman en cuenta sólo los términos directos. Esto equivale a linealizar la interacción de la Ec. (3.3) reemplazando los términos  $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$  por  $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$ , siendo  $\langle\rangle$  el valor de expectación del vacío y  $\Gamma$  cualquiera de los operadores que aparecen en  $\mathcal{L}_{int}$ .

Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y debe conservar paridad (simetrías exactas de QCD), el único valor de expectación no nulo posible es  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ , el condensado quark-antiquark relacionado con la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi$ . De este modo, la ecuación de Dirac en la aproximación de campo medio resulta

$$[i\cancel{\partial} - \hat{m} + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle]\psi(x) = 0. \quad (3.4)$$

Es posible definir entonces una masa fermiónica dinámica

$$M = m - 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (3.5)$$

generada por una interacción escalar suficientemente fuerte entre fermiones. A la Ec. (3.5), que no es otra cosa que la ecuación de Dyson para el propagador de quarks en la aproximación de Hartree, se la denomina “ecuación del gap” del modelo NJL, en analogía con la correspondiente ecuación que determina el gap de energía en un superconductor. Dicha ecuación se puede representar diagramáticamente mediante la Fig. 3.1.

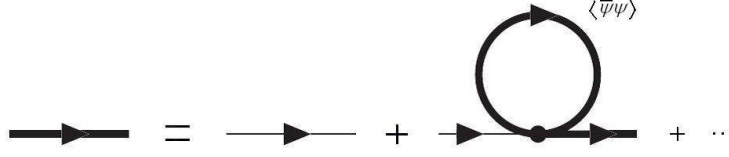


Figura 3.1: Representación diagramática de la Ec. (3.5), conocida como la “ecuación del gap”. La línea fina (gruesa) denota el propagador del quark desnudo (vestido). El lazo fermiónico representa al condensado de quarks en la ecuación.

En la aproximación de campo medio, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  está dado por

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \text{Tr}[S_F(0)] , \quad (3.6)$$

donde la traza se toma sobre los espacios de Dirac, color y sabor, y  $S_F$  corresponde al propagador de Dirac, definido por

$$S_F(x-y) = -i \langle T[\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon} . \quad (3.7)$$

La aparición de  $S_F(0)$  en la Ec. (3.6) refleja el loop cerrado de la Fig. 3.1, con la línea fermiónica comenzando y terminando en el mismo punto del espacio-tiempo. Como la masa dinámica  $M$  aparece explícitamente en el lado izquierdo de la Ec. (3.5), la ecuación del gap es una ecuación autoconsistente.

La integral  $S_F(0)$  es cuadráticamente divergente y requiere, por lo tanto, de un procedimiento de regularización apropiado. El método más sencillo consiste en introducir un *cutoff* para las componentes espaciales de momento  $\Lambda_3$  e integrar sobre la componente temporal  $p_0$  en la Ec. (3.7). Se obtiene

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} , \quad (3.8)$$

donde  $N_c$  y  $N_f$  son el número de colores y el número de sabores respectivamente. Este esquema de regularización se basa en la libertad asintótica de QCD, según la cual para grandes momentos los quarks y gluones se comportan como partículas libres, no interactuantes. De esta manera, el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  representa la integral de densidad escalar de la energía negativa de Dirac, hasta el *cutoff*  $\Lambda_3$ . La ecuación del gap describe la interacción de un fermión con la parte “activa” del mar de Dirac. De la Ec. (3.8) se obtiene la ecuación del gap

$$M = m + \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^{\Lambda_3} \vec{p}^2 dp \frac{M}{\sqrt{\vec{p}^2 + M^2}} . \quad (3.9)$$

Considerando el caso  $m = 0$  (límite quiral), es fácil ver que esta ecuación tiene una solución no trivial con  $M \neq 0$  cuando la constante de acoplamiento  $G$  excede un

valor crítico  $G_{crit} = \pi^2/\Lambda_3^2$ . Los quarks adquieren en ese caso una masa dinámica. La generación dinámica de masa tiene lugar en paralelo con la reestructuración del vacío: para  $G > G_{crit}$  el vacío contiene un condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  no nulo. Como la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi$  rompe la simetría quiral, el estado fundamental no tiene la simetría  $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$  del lagrangiano. La simetría quiral está espontáneamente rota, y el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  sirve como el parámetro de orden correspondiente. Por lo tanto en el límite  $m = 0$ , se distinguen dos casos de realización de la simetría quiral (ver Fig. 3.2):

1. La fase Wigner-Weyl (WW), en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$  y los fermiones no tienen masa. Equivalentemente, la carga axial  $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$  aniquila el vacío:  $Q_5 | 0 \rangle = 0$ . En el modelo NJL este es el caso para  $G < G_{crit}$ .
2. La fase Nambu-Goldstone (NG), en la cual  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  y los fermiones adquieren masa dinámica. En esta fase existen bosones de Nambu-Goldstone de masa nula. La carga axial no aniquila el vacío:  $Q_5 | 0 \rangle \neq 0$ . En el modelo NJL esto sucede cuando  $G > G_{crit}$ .

Por otro lado, para el caso de  $m \neq 0$ , si bien la masa dinámica nunca llega a ser cero, tiene un comportamiento similar al descrito para  $m = 0$ , ya que las masas corrientes de los quarks son pequeñas, mostrando una curva asintótica (representada por la curva a trazos de la Fig. 3.2) a la respectiva al límite quiral, tanto para el rango de  $G$  pequeños como también para  $G \gg 1$ .

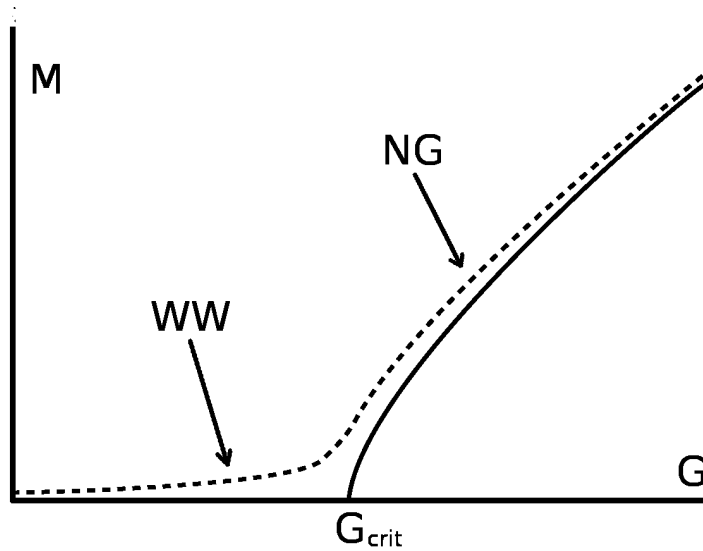


Figura 3.2: Representación de las masas dinámicas en función de la constante de acoplamiento. Se observan claramente las dos realizaciones de la simetría quiral, a la Wigner-Weyl para  $G < G_{crit}$  y a la Nambu-Golstone para  $G > G_{crit}$ . La línea de trazos representa el caso físico, mientras que la línea sólida corresponde al límite quiral ( $m = 0$ ).

### 3.2.2. Bosón de Goldstone pseudoescalar

Como ya se ha mencionado, la ruptura espontánea de una simetría global implica la existencia de un modo de masa cero, llamado bosón de Nambu-Goldstone. En este caso se trata de un par fermión-antifermión pseudoescalar neutro ( $J^\pi = 0^-$ ), identificado con el pion.

Para ver cómo emerge el pion de Goldstone sin masa como consecuencia de la ruptura espontánea de la simetría global  $U(1)$ , construimos la matriz  $T$  (representada en la Fig. 3.3) que surge de resolver la ecuación de Bethe-Salpeter (ecuación de dos cuerpos) en el canal fermión-antifermión pseudoescalar para un dado cuadrimomento cuadrático  $q^2$  del mesón:

$$T_\pi(q^2) = K_\pi + K_\pi J_\pi(q^2) K_\pi + \dots = \frac{K_\pi}{1 - K_\pi J_\pi(q^2)}. \quad (3.10)$$

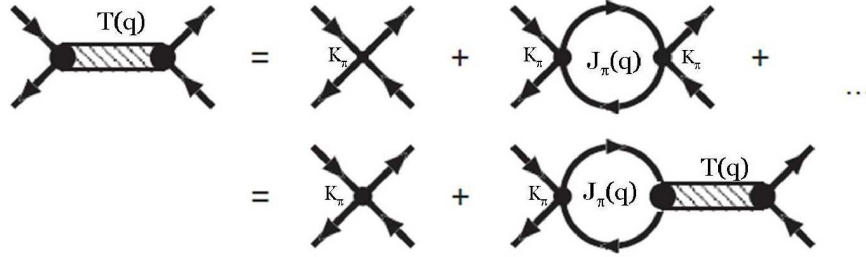


Figura 3.3: Esquemización de la ecuación de Bethe-Salpeter para la matriz quark-antiquark  $T$  (los propagadores de mesones aparecen como bandas sombreadas). Las líneas sólidas corresponden a los propagadores de quarks vestidos en la aproximación de Hartree.

La interacción en este canal está dada por el término  $G(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$  del lagrangiano de la Ec. (3.3). Entonces,  $K_\pi = 2G$  es el núcleo de la interacción, y  $J_\pi$  es la integral del loop de interacción, dada por

$$J_\pi(q^2) = i \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} + \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} i\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - M + i\epsilon} \right]. \quad (3.11)$$

El proceso de regularización de esta integral es idéntico al usado en la ecuación del gap (3.5).

La masa  $m_\pi$  del pion queda determinada por los polos de la matriz  $T$ , es decir, por la condición

$$1 - 2GJ_\pi(m_\pi^2) = 0. \quad (3.12)$$

Utilizando la ecuación del gap (3.9) para  $m = 0$  es posible ver que una solución de esta ecuación es  $m_\pi = 0$ , lo que significa que el pion es un pseudo-bosón de Goldstone, es



decir, un modo de masa nula que aparece como consecuencia la ruptura espontánea de una simetría. Para mostrar esto partimos de

$$J_\pi(q^2 = 0) = -i\text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_5 \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \gamma_5 \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (3.13)$$

Utilizando que  $\text{Tr}_D[\gamma_5(\not{p} + M)\gamma_5(\not{p} + M)] = \text{Tr}(M^2 - \not{p}\not{p}) = -4(p^2 - M^2)$ , se puede obtener que

$$J_\pi(q^2 = 0) = 4N_f N_c i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = \frac{i}{M} \text{Tr} S_F(0). \quad (3.14)$$

A partir de las Ecs. (3.5) y (3.6) se tiene

$$K_\pi J_\pi(q^2 = 0) = -\frac{2G}{M} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 1, \quad (3.15)$$

por lo que se verifica la validez del teorema de Nambu-Goldstone.

El próximo paso es examinar la influencia de la ruptura explícita de la simetría quiral, que se produce al considerar el término  $\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}\psi$ , con una masa corriente fermiónica  $m$  no nula. Ante una rotación quiral  $\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta/2)\psi$ , para ángulo  $\theta$  pequeño este término se transforma en

$$\delta\mathcal{L}_\theta = -m\bar{\psi}(1 + i\gamma_5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots)\psi. \quad (3.16)$$

La densidad pseudoescalar  $\bar{\psi}i\gamma_5\psi$  es la fuente del campo de piones  $\phi$ , por lo que podemos identificar  $\theta = \phi/f_\pi$ , donde  $f_\pi$  es una constante de normalización con dimensiones de energía. La acción de la corriente axial sobre el vacío debe producir partículas pseudoescalares, de modo que, de acuerdo con la invarianza de Lorentz, se tiene

$$A_\mu|0\rangle \sim q_\mu|\pi\rangle.$$

La igualdad se obtiene introduciendo la constante  $f_\pi$ , que es la constante de decaimiento del pion, definida por el elemento de matriz

$$\langle 0 | A_\mu(0) | \pi(q) \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(0) | \pi(q) \rangle = 2 i f_\pi q_\mu \quad (3.17)$$

y describe el decaimiento del pion via la corriente axial  $A_\mu$ .

Consideremos ahora el término de orden  $\theta^2 = \phi^2/f_\pi^2$  de la Ec. (3.16). Este término tiene la forma  $m/(2f_\pi^2)\bar{\psi}\psi\phi^2$ . Esto corresponde exactamente al término de masa  $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2}m_\pi^2\phi^2$  para el pion. Usando nuevamente la aproximación de campo medio con el reemplazo  $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , podemos hallar la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner:

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (3.18)$$

Esta importante ecuación conecta los parámetros de la ruptura explícita y espontánea de la simetría quiral con los observables fenomenológicos del pion. La masa fermiónica desnuda finita  $m$  aumenta la masa del pion  $m_\pi$  desde el valor nulo que tiene en el límite quiral, de tal manera que  $m_\pi$  es proporcional a  $\sqrt{m}$ . Notar que el teorema de Goldstone se verifica nuevamente en el límite  $m \rightarrow 0$ .

El escenario de ruptura espontánea de simetría es de naturaleza general y resulta casi independiente de la forma detallada de la interacción subyacente. Hasta aquí, hemos señalado estas importantes relaciones para el modelo con solamente piones como pseudo-bosones de Goldstone. En las próximas secciones veremos su extensión para el modelo NJL basado en el grupo  $SU(3)$  de sabor.

### 3.3. El modelo de NJL con tres sabores de quarks

En la sección anterior hemos desarrollado las características principales del modelo NJL para dos sabores. Éste ha sido extensamente estudiado (Hatsuda y Kunihiro, 1985; Bernard, 1986), resultando de gran utilidad para explorar la ruptura espontánea de la simetría quiral y la consecuente aparición de condensados de quarks y generación dinámica de masa.

En esta sección estudiaremos el modelo NJL generalizado a  $SU(3)$  de sabor, es decir, con la incorporación del quark *strange* (Hatsuda y Kunihiro, 1994; Kunihiro y Hatsuda, 1988; Hatsuda y Kunihiro, 1991; Bernard *et al.*, 1987, 1988; Reinhardt y Alkofer, 1988; Takizawa *et al.*, 1990; Klimt *et al.*, 1990). Como la masa desnuda del quark *strange* es  $m_s \simeq 150$  MeV, nos encontramos con un caso donde el quark “no es liviano ni pesado”. Además, al introducir la extrañeza en el modelo, tendremos que prestar atención a la anomalía axial  $U(1)$ , como se explicó en la Sección 2.3.2, ya que en este caso el mesón  $\eta'$  forma parte del espectro de partículas.

La extensión del lagrangiano NJL a tres sabores resulta

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - \hat{m})\psi + \mathcal{L}_{int}^{(4)} + \mathcal{L}_{int}^{(6)}, \quad (3.19)$$

donde la matriz de masas corrientes en este caso es  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$  y el lagrangiano de interacción tiene una componente de interacción local de cuatro fermiones  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  y un término de ruptura de la simetría  $U(1)_A$ , dado por un acoplamiento de seis fermiones  $\mathcal{L}_{int}^{(6)}$ .

La interacción de cuatro fermiones debe satisfacer la simetría quiral  $U(3)_R \otimes U(3)_L$  junto con la simetría  $SU(3)$  de color y las simetrías discretas C, P y T. La forma más sencilla para esta interacción es

$$\mathcal{L}_{int}^{(4)} = \frac{G}{2} \sum_{a=0}^8 \left[ (\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^a\psi)^2 \right], \quad (3.20)$$

donde  $\psi = (u \ d \ s)^T$  y las matrices de Gell-Mann actúan sobre el espacio de sabor.

El acoplamiento  $\mathcal{L}_{int}^{(4)}$  tiene la simetría axial  $U(1)_A$ , que no se observa en la naturaleza. Como mencionamos antes, una manera de romper esta simetría en forma efectiva es introduciendo el término de 't Hooft

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = H \left\{ \det_f \left[ \bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi \right] + \det_f \left[ \bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi \right] \right\}, \quad (3.21)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{L}_{int}^{(6)} = \frac{H}{4} A_{abc} (\bar{\psi}\lambda^a\psi) \left[ (\bar{\psi}\lambda^b\psi)(\bar{\psi}\lambda^c\psi) - 3(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^b\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\lambda^c\psi) \right], \quad (3.22)$$

donde la suma es sobre los índices de sabor  $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 8\}$ . La constante de acoplamiento  $H$  tiene dimensiones de (longitud)<sup>5</sup> y las constantes de estructura están dadas por

$$A_{abc} = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}. \quad (3.23)$$

Este vértice de interacción de seis fermiones que surge a partir de la interacción de 't Hooft produce modificaciones tanto en las ecuaciones del gap como en la interacción efectiva de cuatro puntos. En el primer caso esto se traduce en la presencia de un término adicional con dos loops de quarks, tal como se muestra diagramáticamente en la Fig. 3.4. La ecuación correspondiente resulta

$$M_i = m_i + G \langle \bar{\psi}\psi \rangle_i + \frac{H}{2} \epsilon_{ijk} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_j \langle \bar{\psi}\psi \rangle_k, \quad (3.24)$$

con  $(i, j, k) =$  cualquier permutación de  $(u, d, s)$ , identificados con  $(1, 2, 3)$ . Vemos que estas ecuaciones contienen un término sin mezcla de sabores, proporcional a la constante de acoplamiento  $G$ , tal como en el caso de dos sabores. Pero además hay un término, proporcional a la constante  $H$ , que los mezcla.

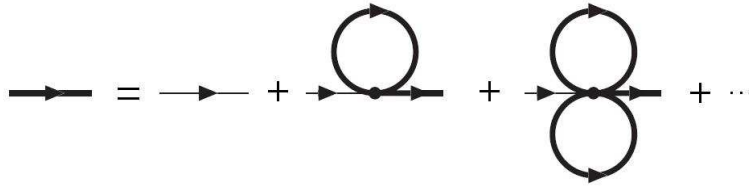


Figura 3.4: Diagrama de las “ecuaciones del gap” (ecuaciones de Dyson en la aproximación de Hartree) para tres sabores de quarks.

Por otro lado, para describir los mesones deberemos primero construir vértices efectivos de cuatro puntos, dados por la suma del vértice de cuatro puntos propiamente dicho y los vértices de seis puntos con un lazo, como muestra la Fig. 3.5. Estos vértices efectivos de cuatro puntos son luego usados como núcleos de interacción en la ecuación de Bethe-Salpeter (ver Fig. 3.3). Si bien en este caso se presentan nuevas complicaciones debido a la diferencia de masas de los quarks, el mecanismo resulta básicamente

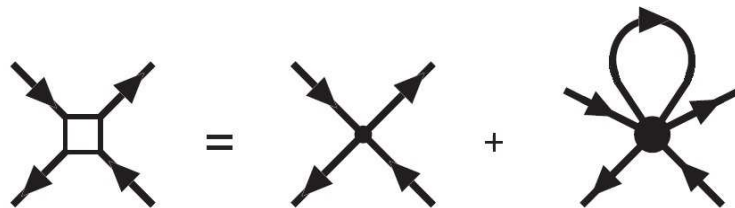


Figura 3.5: Vértice efectivo para la interacción de cuatro puntos.

similar al llevado a cabo en la versión de dos sabores, por lo que no lo desarrollaremos aquí. Cálculos detallados encontrarse por ejemplo en las Refs. (Rehberg *et al.*, 1996; Klimt *et al.*, 1990; Vogl *et al.*, 1990).

Al igual que en el modelo de dos sabores, en general las integrales de lazos resultan ser divergentes por lo que, como parte del modelo, es preciso especificar cómo regularizar estas divergencias. En la literatura pueden encontrarse diferentes esquemas de regularización (Klevansky, 1992; Ripka, 1997). En esta Tesis, tal como explicaremos detalladamente en la próxima sección, consideraremos interacciones no locales separables que incluyen factores de forma capaces de regularizar las divergencias ultravioletas.

### 3.4. Núcleos de interacción no locales

En las secciones anteriores hemos descrito un sistema de quarks que interactúan a través de acoplamientos locales e invariantes quirales. Estas interacciones locales conducen a sistemas de ecuaciones cuyas integrales resultan divergentes y a un modelo que carece de confinamiento. En cuanto a las divergencias, hay varios mecanismos de regularización usados en la literatura (cutoff en 3 y 4 dimensiones, Pauli-Villars, etc.), que en general conducen a resultados cualitativamente similares. Una alternativa a estos modelos es proponer una interacción efectiva entre quarks basada en el intercambio de uno o más gluones. En materia densa donde los quarks interactúan débilmente el intercambio de un gluón es la interacción dominante entre quarks y puede proveer la fuerza de atracción necesaria para formar singletes de color. Comenzaremos por tratar el caso de dos sabores degenerados, y luego la extensión a tres sabores será directa.

Consideremos la acción efectiva para modelos *no locales* con interacciones de cuatro fermiones, en el espacio de momentos,

$$S_E = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) [\not{p} - \hat{m}] \psi(p) + S_{int}, \quad (3.25)$$

con el término de interacción

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'_2}{(2\pi)^4} \times K_{12,1'2'}(P, p; P', p') \bar{\psi}_1(p_1) \psi_2(p_2) \bar{\psi}_{2'}(p'_2) \psi_{1'}(p'_1). \quad (3.26)$$

Aquí hemos usado la notación  $P = (p_1 + p_2)/2$ ,  $p = p_1 - p_2$ . Los índices 1, 2, 1' y 2' corren sobre color, sabor y espacio de Dirac. El núcleo de la interacción  $K_{12,1'2'}(P, p; P', p')$  debe respetar la conservación del momento total, así como las simetrías básicas de QCD detalladas en el Cap. 2. Sin embargo, estas restricciones no son suficientes para determinar completamente su forma explícita. Para ello se debe recurrir a modelos fenomenológicos que den lugar a ecuaciones relativamente sencillas de tratar. Una posibilidad frecuentemente utilizada en la literatura (ver por ejemplo Schmidt *et al.* (1994)) es suponer que la interacción corresponde al intercambio de un gluón efectivo entre corrientes vectoriales con color de quarks. Es decir,

$$S_{int} = - \int d^4x d^4y j_\mu^a(x) G_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^b(y), \quad (3.27)$$

donde

$$j_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi(x). \quad (3.28)$$

Aquí las matrices de Gell-Mann  $\lambda_a$  actúan sobre el espacio de color. Suponiendo que las componentes diagonales del propagador efectivo de gluones son las dominantes [es decir,  $G_{\mu\nu}^{ab}(x-y) \sim \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} G(x-y)$ ] y utilizando las transformaciones de Fierz (Ripka, 1997; Buballa, 2005) se obtiene que esta interacción da lugar a un núcleo de la forma

$$K_{12,1'2'}(P, p; P', p') = -\delta^{(4)}(p - p') \mathcal{G}(P, P') \sum_\alpha c_\alpha \Lambda_{12}^\alpha \Lambda_{1'2'}^\alpha. \quad (3.29)$$

En esta ecuación  $\Lambda^\alpha$  representa productos de matrices de color, sabor y Dirac, y  $c_\alpha$  son los coeficientes que surgen de las transformaciones de Fierz. En general, en los modelos más simples sólo se retienen las componentes singletes de color relevantes para el mecanismo de ruptura de simetría, debido a que es el término dominante en el proceso de intercambio de un gluón (el octete está suprimido por  $1/N_c$  en el límite de gran número de colores). Se tiene entonces

$$\sum_\alpha c_\alpha \Lambda_{12}^\alpha \Lambda_{1'2'}^\alpha \rightarrow \sum_\alpha \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{1'2'}^\alpha, \quad (3.30)$$

donde  $\Gamma_\alpha = (\mathbb{1}, i\gamma_5\tau_a)$  con  $a = 1, 2, 3$ , y se han omitido las matrices identidad en el espacio de color. En cuanto a lo que hace a la dependencia en los momentos, la función  $\mathcal{G}(P, P')$  lleva en general a ecuaciones integrales no lineales que son complicadas de resolver. Por este motivo, es conveniente introducir una simplificación adicional que consiste en proponer que la interacción es separable, es decir

$$\mathcal{G}(P, P') \rightarrow G g(P) g(P'), \quad (3.31)$$

donde  $g(0) = 1$ . Teniendo en cuenta las aproximaciones hasta aquí mencionadas una forma adecuada para el núcleo de interacción es

$$K_{12,1'2'}(P, p; P', p') = -G \delta^{(4)}(p - p') g(P) g(P') \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{1'2'}^\alpha. \quad (3.32)$$

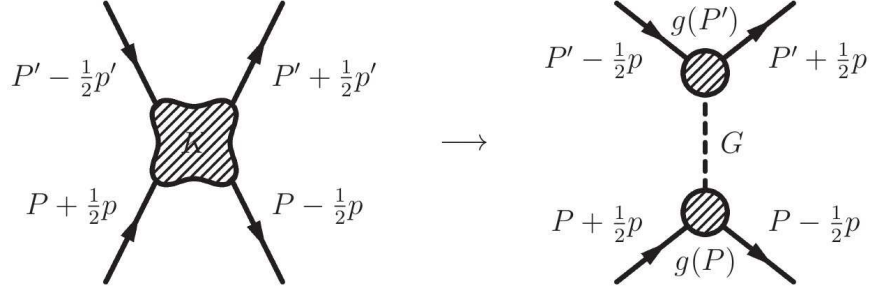


Figura 3.6: Representación diagramática de la Ec. (3.32). En el diagrama de la izquierda  $K$  es un núcleo de interacción general de cuatro puntos que depende de todos los momentos, mientras que en el de la derecha los vértices son diagonales en el espacio de sabor y en cada uno de ellos aparece un factor de forma  $g(p)$ , que depende de un solo momento.

El reemplazo de la Ec. (3.29) por las Ecs. (3.30) y (3.31) está representado en la Fig. 3.6. En la función  $g(P)$  se encuentra la información acerca de la no localidad de la interacción, y es por esto que en general recibe el nombre de factor de forma. Notemos aquí que desde el punto de vista del núcleo de interacción el modelo de NJL corresponde a utilizar la Ec. (3.32) con  $g(p) = 1$ .

En este punto es importante notar que la forma más general del propagador efectivo de los quarks es

$$S(p) = \frac{Z(p)}{-\not{p} + M(p)} \quad (3.33)$$

donde  $M(p)$  es la masa efectiva y  $Z(p)$  la llamada *renormalización de función de onda* (WFR), ambas en general dependientes del momento.

Si bien el núcleo dado en la Ec. (3.32) puede dar lugar a una masa efectiva no trivial, es fácil ver que conduce a  $Z(p) = 1$ , lo cual no está de acuerdo con resultados encontrados en cálculos de LQCD (Bowman *et al.*, 2002, 2003; Furui y Nakajima, 2006; Parappilly *et al.*, 2006) que indican, por ejemplo, que a momento cero las correcciones de la WFR pueden ser hasta del orden del 30%. Para dar cuenta de estas correcciones es necesario introducir una interacción adicional entre los quarks. Una forma conveniente es la propuesta en la Ref. (Noguera, 2007):

$$K_{12,1'2'}(P, p; P', p') = G \delta^{(4)}(p - p') f(P) f(P') P_\mu P'_\nu \gamma_{12}^\mu \gamma_{1'2'}^\nu. \quad (3.34)$$

En lo que sigue utilizaremos la suma de los núcleos dados en las Ecs. (3.32) y (3.34) para modelar las interacciones entre quarks generadas por QCD en el régimen no perturbativo. Antes de terminar esta sección conviene aclarar que la forma dada en la Ec. (3.34) no es la única que da lugar a una función  $Z(p)$  no trivial. Una forma alternativa es la introducida en la Ref. (Burden *et al.*, 1997),

$$K_{12,1'2'}(P, p; P', p') = G \delta^{(4)}(p - p') f(P) f(P') P \cdot P'. \quad (3.35)$$

---

Es posible ver que dentro de las aproximaciones usualmente utilizadas para tratar este tipo de modelos efectivos, ambos tipos de interacción conducen a resultados muy similares. Finalmente, para extender este formalismo a tres sabores de quarks es necesario reemplazar en la expresión de  $\Gamma_\alpha$  las tres matrices de Pauli de  $2 \times 2$  por las ocho de Gell-Mann de  $3 \times 3$ , más la correspondiente matriz identidad.





## Capítulo 4

# Fenomenología de mesones en un modelo nNJJL con simetría $SU(3)$ de sabor

*Las líneas de las manos no son otra cosa que la consecuencia de que la mano se cierra por la palma*

Alejandro Dolina

**Resumen:** En este capítulo generalizaremos el modelo de Nambu Jona-Lasinio para obtener una descripción más realista de las interacciones entre quarks. Se considerará un modelo no local de tipo NJL con simetría  $SU(3)$  de sabor a nivel de campo medio y posteriormente a orden cuadrático en las fluctuaciones de los campos. En este marco podremos determinar propiedades fenomenológicas de los mesones escalares y pseudoescalares en función de factores de forma presentes en las corrientes fermiónicas.

### 4.1. Modelo no local con simetría $SU(3)$ de sabor y WFR

#### 4.1.1. Acción efectiva

Consideremos un modelo no local de quarks para los sabores  $u$ ,  $d$  y  $s$ , con simetría de sabor  $SU(3)$ . De acuerdo con los lineamientos expuestos en el capítulo anterior, proponemos una acción euclídea dada por (Carlomagno *et al.*, 2013)

$$S_E = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(x)(-i\not{D} + m_c)\psi(x) - \frac{G}{2} \{j_a^s(x)j_a^s(x) + j_a^p(x)j_a^p(x) + j^r(x)j^r(x)\} - \frac{H}{4} A_{abc} \{j_a^s(x)j_b^s(x)j_c^s(x) - 3j_a^s(x)j_b^p(x)j_c^p(x)\} \right], \quad (4.1)$$

donde hemos llamado

$$\begin{aligned}
 j_a^s(x) &= \int d^4z g(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) \lambda_a \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) , \\
 j_a^p(x) &= \int d^4z g(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) i \lambda_a \gamma_5 \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) , \\
 j^r(x) &= \int d^4z f(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) \frac{\overleftrightarrow{\not{D}}}{2\kappa} \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) .
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aquí  $\psi(x)$  representa el campo de quarks, que incluye índices de color y sabor. Como se ha definido previamente, la matriz de masas es  $m_c = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ . Las  $A_{abc}$  son las constantes de estructura simétricas de  $SU(3)$  definidas en la Ec. (3.23),  $G$  y  $H$  son constantes de acoplamiento y  $\kappa$  es un parámetro con dimensiones de energía que determina el peso relativo entre los términos de interacción de cuatro fermiones. Comparando con el modelo NJL con simetría  $SU(3)$ , Ec. (3.20), se ha incluido un nuevo acoplamiento de cuatro fermiones que contiene la llamada corriente de momento  $j^r(x)$ , responsable de la renormalización de la función de onda de los quarks. Por último, las funciones  $f(z)$  y  $g(z)$  son factores de forma covariantes que caracterizan la no localidad de las interacciones. Los acoplamientos del modelo local NJL se recuperan en el límite  $g(z) = f(z) = \delta^{(4)}(z)$ .

Para trabajar con grados de libertad mesónicos bosonizamos la acción de la Ec. (4.1). Para esto es necesario considerar la función de partición

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_E} . \tag{4.3}$$

Introducimos ahora campos mesónicos escalares  $\sigma_a(x)$ ,  $\zeta(x)$  y pseudoescalares  $\pi_a(x)$ , junto con campos auxiliares  $S_a(x)$ ,  $P_a(x)$  y  $R(x)$  que satisfacen

$$f(j_a^s, j_a^p, j^r) = \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \mathcal{D}R \delta(S_a - j_a^s) \delta(P_a - j_a^p) \delta(R - j^r) f(S_a, P_a, R) . \tag{4.4}$$

Estos campos pueden utilizarse para representar las deltas como integrales funcionales

$$\begin{aligned}
 \delta(S_a - j_a^s) &= N_s \int \mathcal{D}\sigma_a \exp \left\{ \int d^4x \sigma_a(x) [S_a(x) - j_a^s(x)] \right\} , \\
 \delta(P_a - j_a^p) &= N_p \int \mathcal{D}\pi_a \exp \left\{ \int d^4x \pi_a(x) [P_a(x) - j_a^p(x)] \right\} , \\
 \delta(R - j^r) &= N_r \int \mathcal{D}\zeta \exp \left\{ \int d^4x \zeta(x) [R(x) - j^r(x)] \right\} .
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Usando la forma (4.4) para escribir la exponencial de la acción en (4.3), es posible

integrar sobre los campos fermiónicos obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}\zeta \det A(\sigma_a, \pi_a, \zeta) \\ &\times \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \mathcal{D}R \exp \left\{ \int d^4x \left[ \sigma_a S_a + \pi_a P_a + \zeta R + \frac{G}{2}(S_a S_a + P_a P_a + R R) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3S_a P_b P_c) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aquí hemos definido un operador  $A$  en el espacio de momentos,

$$\begin{aligned} A(p, p') &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') (-\not{p} + m_c) + g \left( \frac{p + p'}{2} \right) [\sigma_a(p' - p) + \gamma_5 \pi_a(p' - p)] \lambda_a \\ &+ \frac{1}{2\kappa} f \left( \frac{p + p'}{2} \right) (\not{p} + \not{p}') \zeta(p' - p), \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde  $g(p)$  y  $f(p)$  denotan las transformadas de Fourier de los factores de forma presentes en las corrientes de las Ecs. (4.2). Notar que la invarianza de Lorentz implica que estas funciones sólo pueden depender de  $p^2$ . Para  $H = 0$  la exponencial en la Ec. (4.6) es cuadrática, y puede resolverse en forma exacta (Noguera y Scoccola, 2008), de modo que no es necesario entonces introducir los campos auxiliares. En general este no es el caso, pero puede emplearse el método de aproximación de fase estacionaria (SPA), según el cual la integral se realiza sobre el camino que minimiza la acción. De esta forma se definen los campos  $\tilde{S}_a$ ,  $\tilde{P}_a$  y  $\tilde{R}$ , que satisfacen dicha condición. Variando la acción respecto a los campos auxiliares, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) + G\tilde{S}_a(x) + \frac{3}{4}HA_{abc} [\tilde{S}_b(x)\tilde{S}_c(x) - \tilde{P}_b(x)\tilde{P}_c(x)] &= 0, \\ \pi_a(x) + G\tilde{P}_a(x) - \frac{3}{2}HA_{abc} \tilde{S}_b(x)\tilde{P}_c(x) &= 0, \\ \zeta(x) + G\tilde{R}(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

con lo cual se obtiene una acción efectiva escrita en términos de los grados de libertad  $\sigma_a$ ,  $\zeta$  y  $\pi_a$ :

$$\begin{aligned} S_E = & - \log \det A(\sigma_a, \pi_a, \zeta) - \int d^4x \left[ \sigma_a \tilde{S}_a + \pi_a \tilde{P}_a + \zeta \tilde{R} + \frac{G}{2}(\tilde{S}_a \tilde{S}_a + \tilde{P}_a \tilde{P}_a + \tilde{R} \tilde{R}) \right. \\ & \left. + \frac{H}{4} A_{abc} (\tilde{S}_a \tilde{S}_b \tilde{S}_c - 3\tilde{S}_a \tilde{P}_b \tilde{P}_c) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.1.2. Aproximación de campo medio

En esta aproximación, se expanden los campos bosónicos alrededor de sus valores de expectación de vacío. Los campos escalares  $\sigma_a(x)$ ,  $a = 0, 3, 8$ , y  $\zeta(x)$  tienen valores de campo medio  $\bar{\sigma}_a$ ,  $\bar{\zeta}$  no nulos, mientras que  $\bar{\sigma}_a = 0$  para  $a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$ , y  $\bar{\pi}_a = 0$ , ya que el vacío de QCD debe ser invariante ante conjugación de carga y paridad. Con

lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x) , \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x) , \\ \zeta(x) &= \bar{\zeta} + \delta\zeta(x) ,\end{aligned}\tag{4.10}$$

y la acción de la Ec. (4.9) se puede desarrollar en serie a distintos órdenes en las fluctuaciones de los campos.

El orden cero de este desarrollo corresponde a la Aproximación de Campo Medio (MFA), mientras que el término lineal es nulo ya que  $\bar{\sigma}_a(x)$  y  $\bar{\zeta}(x)$  minimizan la acción. De este modo,

$$S_E = S^{\text{MFA}} + S^{\text{cuad}} + \dots\tag{4.11}$$

Si pasamos al espacio de impulsos, de acuerdo con la Ec. (4.7) el operador  $A$  en la MFA puede ser expresado como

$$A(p, p') = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \left[ \frac{-\not{p} + M(p)}{Z(p)} \right],\tag{4.12}$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned}M(p) &= Z(p) [m + g(p) \bar{\sigma}_a \lambda_a] , \\ Z(p) &= \left[ 1 - \frac{\bar{\zeta}}{\kappa} f(p) \right]^{-1} .\end{aligned}\tag{4.13}$$

De este modo, se ha obtenido un propagador efectivo de quark, que incluye una masa dinámica  $M(p)$  dependiente del momento, y una WFR  $Z(p)$  también dependiente del momento. Esta dependencia viene dada por los factores de forma no locales cuya forma funcional puede ser propuesta y ajustada de modo tal de reproducir el comportamiento del propagador obtenido en cálculos provenientes de LQCD, tal como será explicado en la Sección 4.2.

Suponiendo que los factores de forma son funciones reales y realizando la integral sobre el espacio 4-dimensional, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{S_E^{\text{MFA}}}{V^{(4)}} &= -2 \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log \left[ \frac{p^2 + M^2(p)}{Z^2(p)} \right] \\ &\quad - \bar{\sigma}_a \bar{S}_a - \bar{\zeta} \bar{R} - \frac{G}{2} (\bar{S}_a \bar{S}_a + \bar{R}^2) - \frac{H}{4} A_{abc} \bar{S}_a \bar{S}_b \bar{S}_c ,\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde se ha definido  $\bar{S}_a, \bar{R}$  como los valores de campo medio de los campos auxiliares  $\tilde{S}_a, \tilde{R}$ . De este modo se obtienen las “ecuaciones del gap”,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_a + G \bar{S}_a + \frac{3}{4} H A_{abc} \bar{S}_b \bar{S}_c &= 0 , \\ \bar{\zeta} + G \bar{R} &= 0 .\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dado que sólo son no nulos  $\bar{\sigma}_0$ ,  $\bar{\sigma}_3$  y  $\bar{\sigma}_8$  es conveniente realizar un cambio de base definiendo valores medios “de sabor”,

$$\text{diag}(\bar{\sigma}_u, \bar{\sigma}_d, \bar{\sigma}_s) = \bar{\sigma}_0 \lambda_0 + \bar{\sigma}_3 \lambda_3 + \bar{\sigma}_8 \lambda_8 . \quad (4.16)$$

Con este cambio de base, los  $\bar{S}_a$  pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{S}_u + \bar{S}_d + \bar{S}_s) , \\ \bar{S}_3 &= \frac{1}{2} (\bar{S}_u - \bar{S}_d) , \\ \bar{S}_8 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{S}_u + \bar{S}_d - 2\bar{S}_s) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Finalmente las ecuaciones del gap pueden expresarse como

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_u + G\bar{S}_u + \frac{H}{2} \bar{S}_d \bar{S}_s &= 0 , \\ \bar{\sigma}_d + G\bar{S}_d + \frac{H}{2} \bar{S}_s \bar{S}_u &= 0 , \\ \bar{\sigma}_s + G\bar{S}_s + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d &= 0 , \\ \bar{\zeta} + G\bar{R} &= 0 , \end{aligned} \quad (4.18)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{S}_q &= -8N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} g(p) \frac{Z(p) M_q(p)}{p^2 + M_q^2(p)} , \quad q = u, d, s, \\ \bar{R} &= \frac{4N_c}{\kappa} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} p^2 f(p) \sum_{i=1}^3 \frac{Z(p)}{p^2 + M_i^2(p)} , \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde se ha definido  $M_i(p) = Z(p) [m_i + \bar{\sigma}_i g(p)]$ . Aquí los subíndices 1, 2, 3 corresponden a los quarks  $u, d, s$ , respectivamente.

Los condensados quirales  $\langle \bar{q}q \rangle$ , parámetros de orden de la ruptura de la simetría quiral, se definen como los valores de expectación del vacío de los operadores  $\bar{q}q$  y pueden obtenerse por derivación del logaritmo de la función de partición de la Ec. (4.3) respecto de la masa desnuda del quark  $q$ ,

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial}{\partial m_q} \log \mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_E} \bar{\psi}_q \psi_q . \quad (4.20)$$

Para quarks de masa no nula la expresión que se obtiene por derivación en la MFA resulta cuadráticamente divergente. Usualmente es regularizada restándole el valor del condensado para quarks no interactuantes,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{Z(p) M_q(p)}{p^2 + M_q^2(p)} - \frac{m_q}{p^2 + m_q^2} \right] , \quad q = u, d, s. \quad (4.21)$$

### 4.1.3. Fluctuaciones cuadráticas

En esta sección nos ocuparemos del término cuadrático de la Ec. (4.11), a partir del cual se obtendrán los términos de masa para los mesones escalares y pseudoescalares más livianos.

Para obtener estados de masa físicos, reescribimos las fluctuaciones  $\delta\pi_a$  y  $\delta\sigma_a$  en una base de estados  $\phi_M$ . Previo cambio de base  $\psi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_a\psi_a)_{ij}$ , el sector pseudoescalar queda determinado por

$$\delta\pi_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad (4.22)$$

mientras que para el sector escalar basta con reemplazar  $\pi \rightarrow a_0$ ,  $K \rightarrow \kappa$  y  $\eta \rightarrow \sigma$ .

Consideraremos además el límite de isospin, esto es  $m_u = m_d$ . En este límite, el lagrangiano de quarks masivos es invariante frente a la simetría global  $SU(2)_V$ . Con lo cual, en términos de los campos  $\phi_M$ , el término cuadrático del desarrollo de la acción euclídea de la Ec. (4.14) resulta (Carломagno *et al.*, 2013)

$$S_E^{\text{cuad}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_M r_M G_M(p^2) \phi_M(p) \bar{\phi}_M(-p), \quad (4.23)$$

donde el coeficiente  $r_M$  toma valores 1 para los estados  $M = a_0^0, \sigma, f_0, \zeta, \pi^0, \eta, \eta'$ , y 2 para  $M = a_0^+, K_0^{*+}, K_0^{*0}, \pi^+, K^+, K^0$ . Las funciones  $G_M(p)$  están definidas como

$$\begin{aligned} G_{(a_0)}(p) &= (G \pm \frac{H}{2} \bar{S}_s)^{-1} + 4 C_{uu}^\mp(p), \\ G_{(K)}(p) &= (G \pm \frac{H}{2} \bar{S}_u)^{-1} + 4 C_{us}^\mp(p), \\ G_{(\eta)}(p) &= \frac{G_{88}^-(p) + G_{00}^-(p)}{2} \mp \sqrt{G_{80}^-(p)^2 + \left(\frac{G_{88}^-(p) - G_{00}^-(p)}{2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $C_{ij}^\mp(p)$ , con  $i, j = u$  o  $s$  vienen dados por

$$\begin{aligned} C_{ij}^\mp(p) &= -2 N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(q) \frac{Z(q^+)}{q^{+2} + M_i^2(q^+)} \frac{Z(q^-)}{q^{-2} + M_j^2(q^-)} \\ &\quad \times [(q^+ \cdot q^-) \pm M_i(q^+) M_j(q^-)], \end{aligned} \quad (4.25)$$

con  $q^\pm = q \pm p/2$ , y hemos definido

$$\begin{aligned} G_{00}^\mp(p) &= \frac{4}{3} \left[ 2C_{uu}^\mp(p) + C_{ss}^\mp(p) + \frac{6G \mp H\bar{S}_s \pm 4H\bar{S}_u}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right], \\ G_{88}^\mp(p) &= \frac{4}{3} \left[ 2C_{ss}^\mp(p) + C_{uu}^\mp(p) + \frac{6G \mp 2H\bar{S}_s \mp 4H\bar{S}_u}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right], \\ G_{80}^\mp(p) &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \left[ C_{uu}^\mp(p) - C_{ss}^\mp(p) \pm \frac{H(\bar{S}_s - \bar{S}_u)}{8G^2 - 4H^2\bar{S}_u^2 \mp 4HG\bar{S}_s} \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para diagonalizar el sector  $\eta_8, \eta_0$  de la acción cuadrática es necesario introducir ángulos de mezcla  $\theta_\eta, \theta_{\eta'}$  tales que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_8 \cos \theta_\eta - \eta_0 \sin \theta_\eta, \\ \eta' &= \eta_8 \sin \theta_{\eta'} + \eta_0 \cos \theta_{\eta'}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Estos ángulos están dados por

$$\tan 2\theta_{\eta, \eta'} = \frac{-2G_{80}^-}{G_{88}^- - G_{00}^-} \Big|_{p^2 = -m_{\eta, \eta'}^2}. \quad (4.28)$$

Finalmente, los estados físicos para el sector no diagonal de la acción escalar en la Ec. (4.23) se obtienen de diagonalizar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4C^\zeta(p) + G^{-1} & \sqrt{\frac{8}{3}}[2C_u^{+\zeta}(p) + C_s^{+\zeta}(p)] & \frac{4}{\sqrt{3}}[C_u^{+\zeta}(p) - C_s^{+\zeta}(p)] \\ \sqrt{\frac{8}{3}}[2C_u^{+\zeta}(p) + C_s^{+\zeta}(p)] & G_{00}^+(p) & G_{80}^+(p) \\ \frac{4}{\sqrt{3}}[C_u^{+\zeta} - C_s^{+\zeta}(p)] & G_{80}^+(p) & G_{88}^+(p) \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

con

$$\begin{aligned} C^\zeta(p) &= \frac{N_c}{\kappa^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q^2 f^2(q) \sum_{i=1}^3 \frac{Z(q^+)}{q^{+2} + M_i^2(q^+)} \frac{Z(q^-)}{q^{-2} + M_i^2(q^-)}, \\ &\quad \times \left[ q^+ q^- + \frac{q^{+2} q^{-2} - (q^+ q^-)^2}{2q^2} - M_i(q^+) M_i(q^-) \right] \\ C_i^{+\zeta}(p) &= -\frac{2N_c}{\kappa} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g(q) f(q) \frac{Z(q^+)}{q^{+2} + M_i^2(q^+)} \frac{Z(q^-)}{q^{-2} + M_i^2(q^-)} \\ &\quad \times q \cdot \left[ q^- M_i(q^+) + q^+ M_i(q^-) \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Las funciones  $G_\zeta(p)$ ,  $G_\sigma(p)$  y  $G_{f_0}(p)$  en la Ec. (4.23), para un dado valor de  $p^2$  son los autovalores de la matriz de la Ec. (4.29).

Las expresiones de la Ec. (4.24) junto a los autovalores de la Ec. (4.29), permiten calcular las masas de los mesones escalares y pseudoescalares resolviendo las ecuaciones

$$G_M(-m_M^2) = 0, \quad (4.31)$$

donde el signo menos en el argumento de  $G_M$  se debe a que hemos trabajado en el espacio euclídeo. Notar que los espectros de piones y kaones, así como de sus compañeros quirales están degenerados, como es de esperar dado que se ha trabajado en el límite de isospin.

Por último, debemos tener en cuenta que los campos mesónicos en la acción de la Ec. (4.23) no son todavía los estados físicos dado que no están correctamente normalizados. Para llevar la acción a la forma canónica en el límite  $p^2 = -m_M^2$  es necesario renormalizar estos campos mediante constantes  $Z_M$  adecuadas. Los campos físicos vendrán dados entonces por

$$\tilde{\phi}_M(p) = Z_M^{-1/2} \phi_M(p) , \quad (4.32)$$

donde

$$Z_M^{-1} = \left. \frac{dG_M(p)}{dp^2} \right|_{p^2 = -m_M^2} . \quad (4.33)$$

#### 4.1.4. Constante de decaimiento débil

Por definición, las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares están dadas por los elementos de matriz de las corrientes axiales  $A_\mu^a$  definidas en la Ec. (2.16), entre el vacío y los estados mesónicos, esto es:

$$if_{ab}(p^2) p_\mu = \langle 0 | A_\mu^a(0) | \delta\pi_b(p) \rangle . \quad (4.34)$$

Los elementos de matriz en la Ec. (4.34) se obtienen a través de la derivada funcional de la acción euclídea respecto de los campos de gauge y los campos mesónicos,

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \delta\pi_b(p) \rangle = \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta A_\mu^a \delta \pi_b(p)} \right|_{A_\mu^a = \delta\pi_b = 0} . \quad (4.35)$$

Para obtener la expresión de la corriente axial es necesario realizar transformaciones de gauge en la acción efectiva introduciendo un conjunto de campos axiales externos  $A_\mu^a$ . En una teoría local, es suficiente reemplazar  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a$  en la Ec. (4.1), para que la acción resulte invariante frente a transformaciones axiales locales. En nuestro caso, al trabajar con interacciones no locales, es necesario realizar un reemplazo adicional en los campos fermiónicos (Ripka, 1997):

$$\begin{aligned} \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) &\longrightarrow W_A \left( x, x - \frac{z}{2} \right) \psi \left( x - \frac{z}{2} \right) , \\ \psi^\dagger \left( x + \frac{z}{2} \right) &\longrightarrow \psi^\dagger \left( x + \frac{z}{2} \right) W_A \left( x + \frac{z}{2}, x \right) , \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde la función  $W_A(x, y)$  está definida por

$$W_A(x, y) = P \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_x^y ds_\mu \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a(s) \right\} , \quad (4.37)$$



siendo  $P$  el operador orden temporal, y  $s$  tomando valores sobre algún camino que conecte  $x$  con  $y$ .

De la Ec. (4.35) vemos que sólo contribuyen a los elementos de matriz los términos lineales en  $A_\mu^a$ , por lo tanto desarrollamos  $W_A$  a primer orden en los campos de gauge,

$$W_A(x, y) = 1 + i \int_x^y \frac{1}{2} \gamma_5 \lambda_a A_\mu^a(s) ds_\mu + \mathcal{O}(A^2). \quad (4.38)$$

Luego de un largo cálculo, se obtiene que la acción puede escribirse como

$$S_E^{[A, \phi]} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \sum_{i,j=1}^3 A_{\mu ij}(p) \delta\pi_{ji}(p') G_{ij}^\mu(p, p'), \quad (4.39)$$

donde se ha escrito explícitamente sólo la parte lineal en  $A_\mu^a$  y  $\delta\pi$ , es decir la parte que contribuye al elemento de matriz estudiado. En esta expresión las funciones  $G_{ij}^\mu$  vienen dadas por

$$p_\mu G_{ij}^\mu(p, p') = -i \delta^{(4)}(p + p') F_{ij}(p^2), \quad (4.40)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{ij}(p^2) &= 2N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [g(q^+) + g(q^-) - 2g(q)] Z(q) \left[ \frac{M_i(q)}{q^2 + M_i^2(q)} + \frac{M_j(q)}{q^2 + M_j^2(q)} \right] \\ &- 2N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_j) [g(q^+) + g(q^-) - 2g(q)] g(q) \\ &\times \frac{Z(q^+)}{M_i^2(q^+) + q^{+2}} \frac{Z(q^-)}{M_j^2(q^-) + q^{-2}} [(q^+ \cdot q^-) + M_i(q^+)M_j(q^-)] \\ &+ 4N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q) \frac{[M_i(q^+)q^- - M_j(q^-)q^+] \cdot [Z(q^-)q^+ - Z(q^+)q^-]}{[q^{+2} + M_i^2(q^+)] [q^{-2} + M_j^2(q^-)]}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

De este modo, introduciendo el factor de renormalización de la Ec. (4.33), en el límite de isospin obtenemos las constantes de decaimiento

$$\begin{aligned} f_\pi &= \frac{Z_\pi^{1/2}}{m_\pi^2} F_{uu}(p^2) \Big|_{p^2 = -m_\pi^2}, \\ f_K &= \frac{Z_K^{1/2}}{m_K^2} F_{us}(p^2) \Big|_{p^2 = -m_K^2}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

para los mesones  $\pi$  y  $K$  respectivamente. Para el sector  $\eta - \eta'$ , donde existe una mezcla entre los estados  $\eta_0$  y  $\eta_8$ , pueden definirse dos constantes de decaimiento débil  $f_{\eta,a}$  y  $f_{\eta',a}$  para cada componente  $a = 0, 8$  de la corriente axial definida en la Ec. (4.34). Éstas

se escriben en términos de los ángulos de mezcla de la Ec. (4.28) como

$$\begin{aligned} f_\eta^a &= \frac{Z_\eta^{1/2}}{m_\eta^2} \left[ f_{a8}(p^2) \cos \theta_\eta - f_{a0}(p^2) \sin \theta_\eta \right] \Big|_{p^2=-m_\eta^2}, \quad a = 0, 8, \\ f_{\eta'}^a &= \frac{Z_{\eta'}^{1/2}}{m_{\eta'}^2} \left[ f_{a8}(p^2) \sin \theta_{\eta'} + f_{a0}(p^2) \cos \theta_{\eta'} \right] \Big|_{p^2=-m_{\eta'}^2}, \quad a = 0, 8. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Las constantes  $f_{ab}$  que aparecen en la expresión anterior pueden escribirse en términos de las funciones  $F_{ij}$  definidas en la Ec. (4.41), resultando

$$\begin{aligned} f_{00}(p^2) &= \frac{1}{3} \left[ 2F_{uu}(p^2) + F_{ss}(p^2) \right], \\ f_{88}(p^2) &= \frac{1}{3} \left[ F_{uu}(p^2) + 2F_{ss}(p^2) \right], \\ f_{08}(p^2) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ F_{uu}(p^2) - F_{ss}(p^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

## 4.2. Parametrizaciones del modelo NJL no-local

Para completar la descripción del modelo que hemos presentado, debemos fijar los valores de los parámetros y elegir una dependencia funcional para los factores de forma  $f(p)$  y  $g(p)$  introducidos en las corrientes fermiónicas de la Ec. (4.2), que caracterizan la interacción entre quarks. De este modo, además de los factores de forma, en el límite de isospin el modelo incluye cinco parámetros libres: la masas desnudas de los quarks  $m_u$  y  $m_s$ ; las constantes de acoplamiento  $G$  y  $H$ ; y el factor de peso  $\kappa$ .

Consideraremos dos parametrizaciones. La primera, que denominaremos como *PI*, corresponde a factores de forma exponenciales utilizados frecuentemente en la literatura (Schmidt *et al.*, 1994; Bowler y Birse, 1995; Golli *et al.*, 1998; Gomez Dumm y Scoccola, 2002; Scarpettini *et al.*, 2004; Gomez Dumm y Scoccola, 2005; Gomez Dumm *et al.*, 2006):

$$g(p) = \exp(-p^2/\Lambda_0^2), \quad f(p) = \exp(-p^2/\Lambda_1^2). \quad (4.45)$$

Éstos garantizan una rápida convergencia ultravioleta de las integrales de loops. Los parámetros  $\Lambda_0$  y  $\Lambda_1$  determinan el rango de no localidad de la interacción para cada canal en el espacio de momentos.

La segunda parametrización, de aquí en más *PII*, consiste en factores de forma que incluyen Lorentzianas

$$g(p) = \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(p)} \frac{\alpha_m f_m(p) - m_c \alpha_z f_z(p)}{\alpha_m - m_c \alpha_z}, \quad f(p) = \frac{1 + \alpha_z}{1 + \alpha_z f_z(p)} f_z(p), \quad (4.46)$$

donde

$$f_m(p) = \left[ 1 + (p^2/\Lambda_0^2)^{3/2} \right]^{-1}, \quad f_z(p) = \left[ 1 + (p^2/\Lambda_1^2) \right]^{-5/2}. \quad (4.47)$$

Como se puede ver en la Fig. 4.1, estas formas funcionales pueden ser ajustadas de

forma tal de reproducir la dependencia con el momento de la masa dinámica (panel superior) y de la función de renormalización de onda de los quarks (panel inferior) obtenida en cálculos de LQCD (Parappilly *et al.*, 2006).

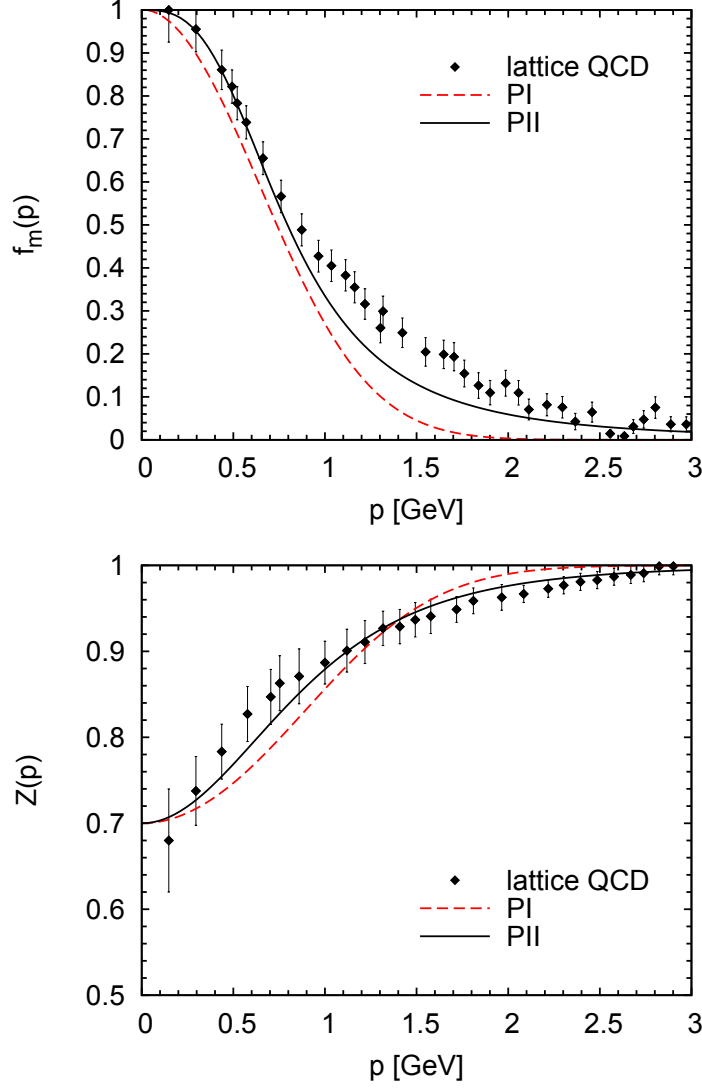


Figura 4.1: Dependencia con el momento de la masa y WFR de los quarks para las parametrizaciones PI y PII con el momento, comparadas con cálculos de LQCD para  $N_f = 2 + 1$  extraídos de la Ref. (Parappilly *et al.*, 2006).

Definidos los factores de forma, es posible determinar los parámetros libres del modelo eligiendo reproducir ciertos observables fenomenológicos. Para este análisis hemos fijado la masa corriente  $m_u$  y el valor del condensado quiral  $\langle \bar{u}u \rangle$  para la PI y la masa corriente  $m_u$  y el valor de  $\Lambda_1$  para la PII, este último basado en el ajuste a los resultados de LQCD para  $Z(p)$ . Los restantes cinco parámetros se determinaron tomando el valor de la WFR a momento cero, es decir  $Z(0) = 0,7$ , y exigiendo que el modelo reproduzca las masas de los mesones pseudoescalares  $\pi$ ,  $K$  y  $\eta'$ , como así también la constante de decaimiento débil del pión  $f_\pi$ . En particular, se eligió la masa del mesón  $\eta'$  porque

es la más sensible al valor de la constante de acoplamiento  $H$ , que es la que regula la anomalía axial.

En la Tabla 4.1 se resumen los valores de los parámetros correspondientes a las dos parametrizaciones propuestas (Carlomagno *et al.*, 2015a).

	PI	PII
$m_u$ [MeV]	5.70*	2.60*
$m_s$ [MeV]	136.19	64.91
$G\Lambda_0^2$	23.64	16.65
$-H\Lambda_0^5$	525.59	202.80
$\Lambda_0$ [MeV]	814.19	795.46
$\Lambda_1$ [MeV]	1032.89	1510.00*
$\kappa$ [GeV]	4.36	10.33

Tabla 4.1: Valores para los parámetros del modelo correspondientes a los factores de forma de las Ecs. (4.45) y (4.46). Los asteriscos indican las cantidades escogidas como *input*.

### 4.3. Resultados numéricos

Una vez que los parámetros libres del modelo han sido determinados, es posible calcular otras propiedades de los mesones escalares y pseudoescalares. En la Tabla 4.2 se presentan los resultados para los valores de expectación de los campos, los condensados, las masas de los mesones y los parámetros de decaimiento para las dos parametrizaciones descritas en la sección anterior. Las cantidades marcadas con un asterisco corresponden a aquéllas que fueron elegidas para fijar los parámetros del modelo (Carlomagno *et al.*, 2015a).

En general, las masas de los mesones, los ángulos de mezcla y las constantes de decaimiento predichas están en razonable acuerdo con los valores fenomenológicos. Puede verse que los obtenidos para la PI no difieren de aquéllos calculados en la Ref. (Contrera *et al.*, 2010a) para un modelo no local sin WFR. Con respecto al sector escalar, la inclusión de la función de onda conduce a un nuevo campo escalar  $\zeta$  que se acopla con los campos de isospin cero  $\sigma_0$  y  $\sigma_8$ . Las masas de las partículas físicas son obtenidas a partir de los autoestados de la matriz de  $3 \times 3$  en la Ec. (4.29). La diagonalización de esta matriz muestra que una de las funciones  $G_M(p)$  es definida positiva para todo el rango de momentos, de modo que la Ec. (4.31) no tiene solución y no es posible asociar el campo escalar correspondiente con un estado físico. Es natural identificar este estado con el campo  $\zeta$ . Los restantes dos estados son interpretados como los mesones escalares  $\sigma(500)$  y  $f_0(980)$  descritos en el *Review of Particle Physics* (Olive *et al.*, 2014).

En el caso de mesones cuya masa es superior a 1 GeV, los quarks que constituyen el mesón pueden estar simultáneamente *on-shell* cuando  $p^2$  es del orden de su masa. En

	PI	PII	Empírico
$\bar{\sigma}_u$ [MeV]	529	472	-
$\bar{\sigma}_s$ [MeV]	702	709	-
$\zeta/\kappa$	-0,429	-0,429	-
$-\langle\bar{u}u\rangle^{1/3}$ [MeV]	240*	316	-
$-\langle\bar{s}s\rangle^{1/3}$ [MeV]	198	341	-
$m_\pi$ [MeV]	139*	139*	139
$m_K$ [MeV]	495*	495*	495
$m_\eta$ [MeV]	527	523	547
$m_{\eta'}$ [MeV]	958*	958*	958
$m_{a_0}$ [MeV]	936	1070	980
$m_{K_0^*}$ [MeV]	1240	1150	1430
$m_\sigma$ [MeV]	601	564	400 - 550
$m_{f_0}$ [MeV]	1364	1315	990 / 1350
$f_\pi$ [MeV]	92.4*	92.4*	92.4
$f_K/f_\pi$	1.17	1.17	1.22
$f_\eta^0/f_\pi$	0.17	0.21	(0.11 - 0.507)
$f_\eta^8/f_\pi$	1.12	1.09	(1.17 - 1.22)
$f_{\eta'}^0/f_\pi$	1.09	1.49	(0.98 - 1.16)
$f_{\eta'}^8/f_\pi$	-0.48	-0.46	-(0.42 - 0.46)
$\theta_0$	-8.63°	-7.97°	-(0° - 10°)
$\theta_8$	-22.94°	-23.09°	-(19° - 22°)

Tabla 4.2: Resultados numéricos para varias cantidades fenomenológicas. El asterisco indica las cantidades escogidas para determinar el modelo.

estas condiciones la integral resulta divergente y es necesaria una regularización, por ejemplo la definida en la Ref. (Scarpettini *et al.*, 2004). Sin embargo se puede realizar una buena estimación extrapolando las funciones desde la región donde la integral está definida hasta la región donde se satisfaga la Ec. (4.31).

De la Tabla 4.1 se observa que para la PII se obtienen masas bajas para  $m_u$  y  $m_s$  y condensados algo grandes para los sabores livianos, en comparación con los valores fenomenológicos usuales. Resultados similares se obtienen en las Refs. (Noguera y Scoccola, 2008) y (Hell *et al.*, 2011). Como se discute en esos artículos, esto se debe a que los ajustes a los cálculos de lattice QCD para la WFR están basados en resultados obtenidos de la Ref. (Parappilly *et al.*, 2006) donde la escala de renormalización es  $\mu = 3$  GeV (es importante notar que tanto las masas de los quarks como los condensados son cantidades dependientes de esta escala). Por otro lado, para ambas parametrizaciones se encuentra que el cociente  $m_s/m_u \simeq 25$  es fenomenológicamente adecuado, y algo similar sucede con el factor  $-\langle\bar{u}u\rangle m_u$ , para el que se obtiene  $7,9 \times 10^{-5}$  GeV<sup>4</sup> para la PI y  $8,2 \times 10^{-5}$  GeV<sup>4</sup> para la PII. Estos valores están en buen acuerdo con los obtenidos a partir de la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner de la Ec. (3.18),  $-\langle\bar{u}u\rangle m_u = f_\pi^2 m_\pi^2 / 2 \simeq 8,3 \times 10^{-5}$  GeV<sup>4</sup>.



## Capítulo 5

# Transiciones de fase en un modelo nPNJL con simetría $SU(3)$ de sabor y WFR

*El cambio es la única cosa inmutable.*

Arthur Schopenhauer (1788-1860)

Filósofo alemán.

### Resumen:

Comenzaremos describiendo el modelo de Polyakov-NJL no local, considerando distintos potenciales de Polyakov y estudiaremos, en el contexto de este modelo, las temperaturas críticas para las transiciones de restauración de la simetría quiral y deconfinamiento para potencial químico nulo. El análisis de las transiciones en estas condiciones es de fundamental importancia debido a que para  $\mu = 0$  es posible estudiar QCD a bajas energías utilizando técnicas de LQCD. De este modo, existen resultados *ab initio* con los cuales contrastar aquéllos obtenidos utilizando modelos efectivos. En segundo lugar se estudiarán las transiciones a potencial químico finito, para luego construir el diagrama de fases de QCD en el plano  $T-\mu$  para los distintos potenciales y factores de forma.

### 5.1. Modelo de Polyakov Nambu Jona-Lasinio

Para estudiar el comportamiento de la materia fuertemente interactuante a temperatura y densidad finitas incorporando una descripción del deconfinamiento, se puede considerar el loop de Polyakov (PL), y construir un modelo efectivo para una teoría de gauge pura que luego se acople al modelo de NJL.

Como hemos visto en el Cap. 2, puede identificarse al valor de expectación de la traza del loop de Polyakov  $\Phi = \langle \phi \rangle$  como un parámetro de orden, siendo  $\Phi = 0$  el

valor correspondiente a la fase en que los quarks y gluones están confinados. Cálculos de LQCD para el valor de la traza del PL como función de la temperatura indican, como se puede ver en la Fig. 5.1, que la transición de deconfinamiento en ausencia de quarks dinámicos ocurre a una temperatura  $T_0 = 270$  MeV, siendo esta transición de primer orden.

Es posible construir un potencial efectivo  $\mathcal{U}(\Phi, T)$  de acuerdo a las estimaciones de LQCD. Éste deberá tener un mínimo en  $\Phi = 0$  cuando  $T < T_0$ , y en  $T = T_0$  pasar a tener un máximo local en  $\Phi = 0$  y un mínimo en un valor de  $\Phi > 0$ , dando lugar a la transición de fase (ver Fig. 5.3). Esto se corresponde con la ruptura del grupo de simetría  $Z_3$ . El mínimo debe acercarse a  $\Phi = 1$  cuando la temperatura continúe aumentando por encima de  $T_0$  (ver Fig. 5.1). A continuación se describirán algunos potenciales propuestos en la literatura.

En primer lugar consideraremos un potencial efectivo basado en la forma logarítmica de la medida de Haar de integración asociada con el grupo  $SU(3)$  de color. Éste viene dado por (Roessner *et al.*, 2007)

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{Log}}(\Phi, T)}{T^4} = -\frac{1}{2}a(T)\Phi^2 + b(T)\log(1 - 6\Phi^2 - 3\Phi^4 + 8\Phi^3), \quad (5.1)$$

con los coeficientes parametrizados según

$$a(T) = a_o + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad \text{y} \quad b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (5.2)$$

Los parámetros del potencial están ajustados de manera tal que se pueda reproducir la ecuación de estado para la teoría de gauge pura y el valor asintótico de expectación del loop de Polyakov cuando  $T \rightarrow \infty$ . Se tiene (Roessner *et al.*, 2007)

$$a_0 = 3,51, \quad a_1 = -2,47, \quad a_2 = 15,2, \quad b_3 = -1,75. \quad (5.3)$$

Una forma alternativa, basada en el ansatz de Ginzburg-Landau (Ratti *et al.*, 2006), viene dada por

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{Poly}}(\Phi, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi^2 - \frac{b_3}{3}\Phi^3 + \frac{b_4}{4}\Phi^4 \quad (5.4)$$

donde

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (5.5)$$

Ajustando una vez más el valor de las constantes a resultados de la teoría de gauge pura en LQCD, se obtiene

$$\begin{aligned} a_0 &= 6,75, & a_1 &= -1,95, & a_2 &= 2,625, \\ a_3 &= -7,44, & b_3 &= 0,75, & b_4 &= 7,5. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Otro potencial considerado en la literatura es el propuesto en las Refs. (Fukushima, 2004, 2008), que incluye un término logarítmico y uno cuadrático con un coeficiente



que decrece en forma exponencial con la temperatura,

$$\mathcal{U}_{\text{Fuku}}(\Phi, T) = -bT \left[ 54 \exp(-a/T) \Phi^2 + \log \left( 1 - 6 \Phi^2 + 8 \Phi^3 - 3 \Phi^4 \right) \right]. \quad (5.7)$$

Por último, consideramos el potencial propuesto en la Ref. (Haas *et al.*, 2013). Aquí

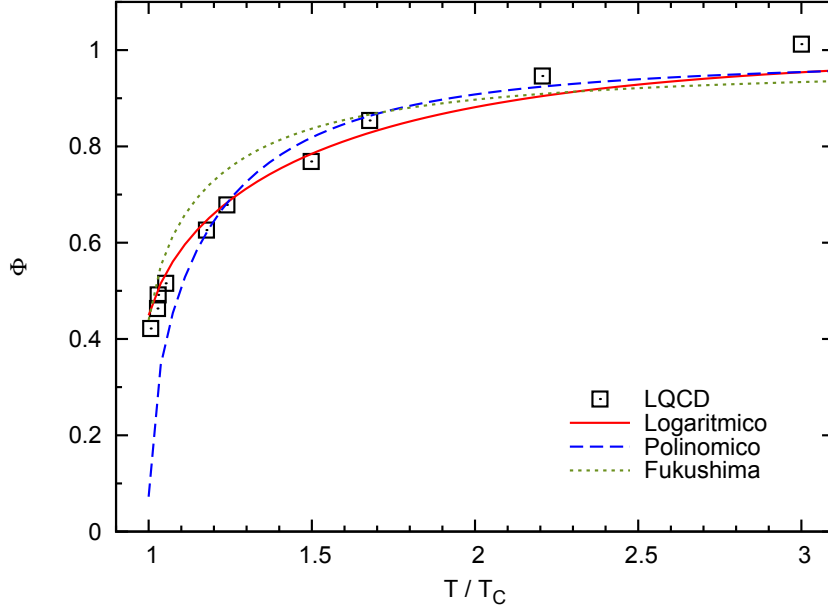


Figura 5.1: Trazo del loop de Polyakov como función de la temperatura reducida ( $T_C = 270$  MeV) para los potenciales logarítmico (línea sólida), polinómico (línea de trazos) y de Fukushima (línea punteada) para una teoría sin quarks dinámicos. Los cuadrados representan resultados de LQCD tomados de la Ref. (Kaczmarek *et al.*, 2002)

la contribución de quarks y gluones al potencial  $\mathcal{U}_{\text{glue}}$  se relaciona con el de Yang-Mills  $\mathcal{U}_{\text{YM}}$  a través de,

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{glue}}(\Phi, t_{\text{glue}})}{T^4} = \frac{\mathcal{U}_{\text{YM}}[\Phi, t_{\text{YM}}(t_{\text{glue}})]}{T_{\text{YM}}^4}, \quad (5.8)$$

donde

$$t_{\text{YM}}(t_{\text{glue}}) = 0,57 t_{\text{glue}} = 0,57 \left( \frac{T - T_c^{\text{glue}}}{T_c^{\text{glue}}} \right). \quad (5.9)$$

En este caso se tiene en cuenta la acción de quarks dinámicos sobre los gluones, a diferencia de los potenciales anteriores donde se consideraba una teoría puramente gluónica. Para incorporar este efecto se define una medida que determina dicha acción y a partir de la cual puede estimarse cuánto se modifica el potencial efectivo a través de un factor que escala la temperatura reducida  $t_{\text{glue}}$  (ver Fig. 5.2). Esto puede realizarse porque la forma del potencial se conserva al variar la escala de temperaturas. La dependencia del potencial del PL con  $\Phi$  es elegida entre los potenciales de las Ecs. (5.4) o (5.1), mientras que para  $T_c^{\text{glue}}$  se toma un valor de 210 MeV (Haas *et al.*, 2013). Los parámetros  $a$  y  $b$  definidos en la Ref. (Fukushima, 2008) de la Ec. (5.7) conducen a una temperatura

crítica de  $T_c \simeq 200$  MeV, que resulta ser un poco mayor a la estimada por lattice QCD, por lo cual  $b$  y  $T_c^{\text{glue}}$  se modificaron a  $(145 \text{ MeV})^3$  y 200 MeV, respectivamente.

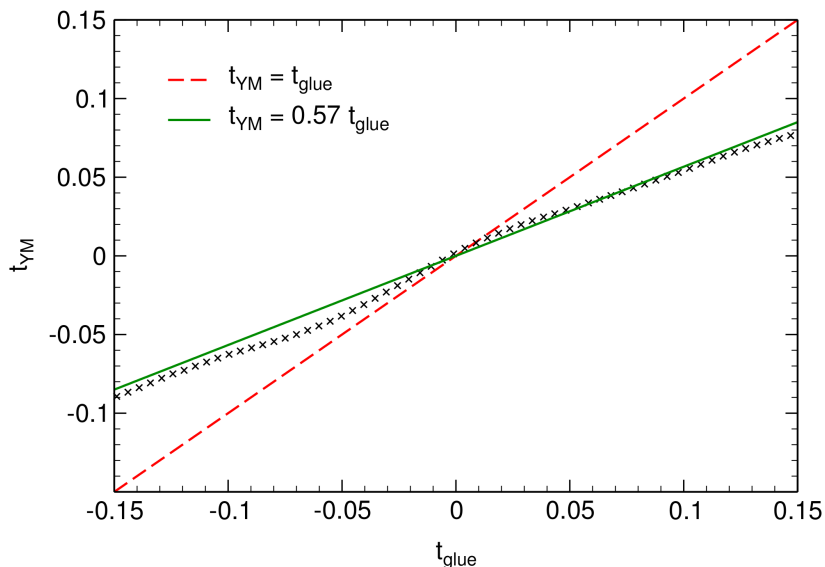


Figura 5.2: Relación entre la escala de temperatura para una teoría Yang-Mills (línea de trazos) y una teoría donde se considera la acción de los quarks sobre los bosones de gauge (línea sólida). Las cruces corresponden a los cálculos obtenidos a partir de la medida definida para comparar ambas teorías (Haas *et al.*, 2013).

En relación al parámetro  $T_0$  que fija la escala para el potencial del PL, se ha argumentado que su valor debe ser modificado en presencia de quarks dinámicos. De acuerdo con el análisis en la Ref. (Schaefer *et al.*, 2007) se obtiene  $T_0 = 210$  MeV para  $N_f = 2$ ,  $T_0 = 190$  MeV para  $N_f = 2 + 1$  y  $T_0 = 180$  MeV para  $N_f = 3$ , con un error de aproximadamente 30 MeV. El caso  $N_f = 2 + 1$  corresponde a quarks *up* y *down* no masivos y al quark *strange* con una masa corriente de aproximadamente 150 MeV, mientras que  $N_f = 3$  representa a los tres quarks como no masivos.

En el panel superior de la Fig. 5.3 se muestra el valor del potencial efectivo  $\mathcal{U}(\Phi, T)$  para los tres potenciales mencionados a una temperatura de 100 MeV, a la que todavía la transición de deconfinamiento no ha ocurrido, con lo cual la simetría  $Z_3$  no está rota y el único mínimo del potencial se encuentra en  $\Phi = 0$ . Una vez superada la transición de fase, a medida que la temperatura aumenta el mínimo del potencial se traslada por medio de una transición de primer orden a valores finitos de  $\Phi$ , y  $\Phi = 0$  se convierte en un máximo local, como se puede ver en los paneles central e inferior de la Fig. 5.3.

Hasta aquí tenemos por un lado el modelo de NJL para los quarks, y por otra parte un potencial para el PL que involucra al sector gluónico. El acoplamiento entre ellos se puede incorporar utilizando la derivada covariante. Esto es, en la acción euclídea de la Ec. (4.1) se reemplaza

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu \quad (5.10)$$

con  $A_\mu = g A_\mu^a \lambda^a / 2$ , donde  $A_\mu^a$  son los campos de gauge de color de  $SU(3)$ .

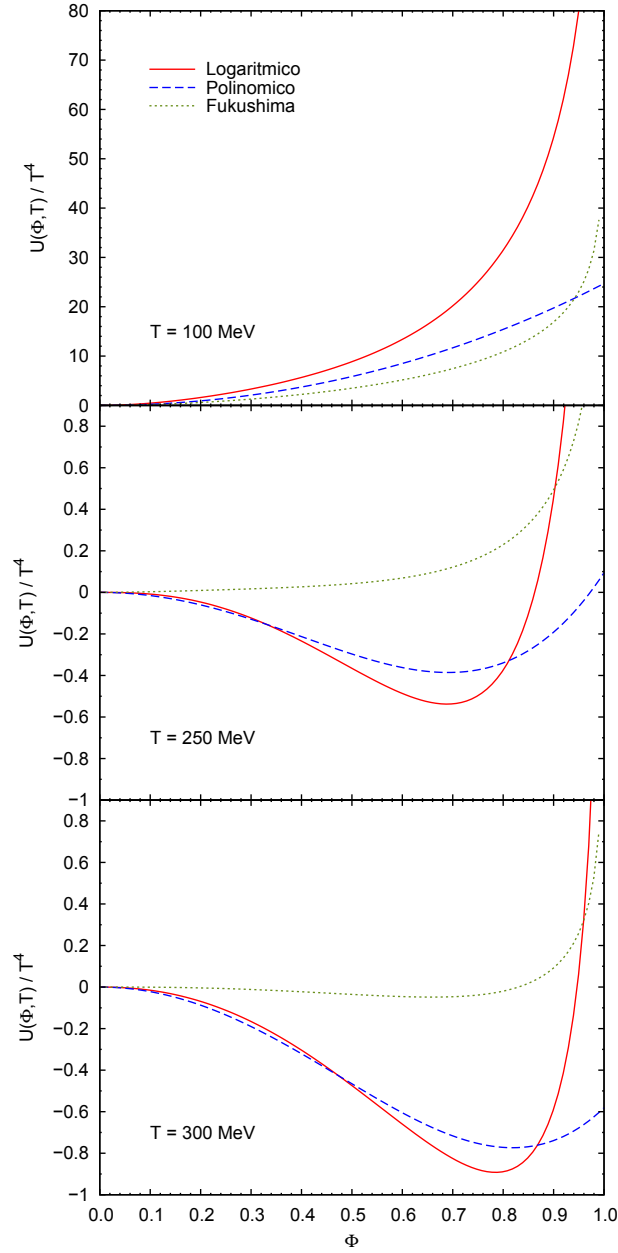


Figura 5.3: Potencial termodinámico del loop de Polyakov para  $T = 100$  MeV (arriba), para  $T = 250$  (centro) y  $300$  MeV (abajo) con  $T_0 = 200$  MeV. La línea sólida representa al potencial logarítmico, la de trazos al potencial polinómico y la punteada al de Fukushima. Se observa cómo los potenciales pasan de tener un mínimo en  $\Phi = 0$ , a tener allí un máximo relativo y un mínimo en algún valor de  $\Phi > 0$  que se desplaza hacia la derecha al aumentar la temperatura.

Por simplicidad, en general no se toma en cuenta la dependencia espacial del PL, es decir que se supone que los quarks se mueven en un fondo uniforme de un campo estático de gauge de color,  $A_4 = i A_0 = \varphi$ . Además, trabajando en el llamado *gauge de*

*Polyakov*, la matriz  $A_4$  tiene representación diagonal

$$A_4 = \varphi_3 \lambda_3 + \varphi_8 \lambda_8 , \quad (5.11)$$

de manera que hay sólo dos variables independientes:  $\varphi_3$  y  $\varphi_8$ . Debido a las propiedades del Lagrangiano de QCD frente a la transformación de conjugación de carga,  $\Phi$  debe ser una cantidad real, por ende si  $\varphi_3$  y  $\varphi_8$  son números reales, necesariamente  $\varphi_8 = 0$ .

Entonces, la traza del PL,  $\Phi = \frac{1}{3} \text{Tr} \exp(i\varphi/T)$ , que puede tomarse como parámetro de orden para el confinamiento, se puede escribir a nivel de campo medio, como

$$\Phi = [2 \cos(\varphi_3/T) + 1]/3 . \quad (5.12)$$

## 5.2. Deconfinamiento y restauración de la simetría quiral a potencial químico nulo

### 5.2.1. Termodinámica a campo medio

Para estudiar las transiciones de fase y la dependencia con la temperatura de los observables termodinámicos partimos de la Ec. (4.14), incorporando la interacción con el campo de color. Consideraremos el potencial termodinámico por unidad de volumen en la aproximación de campo medio (MFA) empleando el formalismo de Matsubara descrito en el Cap. 2, y seguiremos el mismo procedimiento de regularización usado en otros trabajos, por ejemplo en las Refs. (Scarpettini *et al.*, 2004; Gomez Dumm y Scoccola, 2002). Éste consiste en sustraer la contribución del potencial termodinámico en ausencia de interacciones fermiónicas y luego sumarla en su forma regularizada. Se obtiene así (Carlomagno *et al.*, 2013, 2015a)

$$\Omega^{\text{MFA}} = \Omega^{\text{reg}} + \Omega^{\text{free}} + \mathcal{U}(\Phi, T) + \Omega_0 , \quad (5.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{reg}} &= -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{c,f} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{p_{nc}^2 + M_f^2(p_{nc})}{Z^2(p_{nc})(p_{nc}^2 + m_f^2)} \right] \\ &\quad - \left( \bar{\zeta} \bar{R} + \frac{G}{2} \bar{R}^2 + \frac{H}{4} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s \right) - \frac{1}{2} \sum_f \left( \bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G}{2} \bar{S}_f^2 \right) , \\ \Omega^{\text{free}} &= -2T \sum_{c,f} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Re} \log \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\epsilon_{fp} + i s \varphi_c}{T} \right) \right] . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aquí hemos definido  $p_{nc}^2 = [(2n+1)\pi T + \varphi_c]^2 + \vec{p}^2$  y  $\epsilon_{fp} = \sqrt{\vec{p}^2 + m_f^2}$ . Las sumas involucran índices de color y sabor  $c = r, g, b$  y  $f = u, d, s$ , respectivamente, y los campos de fondo de color se definen como  $\varphi_r = -\varphi_g = \varphi_3$ ,  $\varphi_b = 0$ . Finalmente, el término  $\Omega_0$  es una constante que fija el valor del potencial termodinámico a  $T = 0$ . A

través de este potencial termodinámico se pueden encontrar los valores medios  $\bar{\sigma}_f$ ,  $\bar{\zeta}$  y  $\varphi_3$  resolviendo el sistema acoplado de “ecuaciones del gap”

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega^{\text{MFA}}}{\partial\bar{\sigma}_f} &= 0, \\ \frac{\partial\Omega^{\text{MFA}}}{\partial\bar{\zeta}} &= 0, \\ \frac{\partial\Omega^{\text{MFA}}}{\partial\varphi_3} &= 0.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Naturalmente, al tomar el límite  $T = 0$  se recuperan las expresiones de la Ec. (4.18). A su vez, es posible calcular cantidades termodinámicas como la densidad de energía  $\epsilon$  o la densidad de entropía  $s$ , por medio de las relaciones

$$\epsilon = \Omega^{\text{MFA}} + Ts, \quad s = -\frac{\partial\Omega^{\text{MFA}}}{\partial T}.\tag{5.16}$$

Para el estudio de la transiciones de fase es importante analizar el comportamiento de los condensados quirales y las susceptibilidades correspondientes. En términos del potencial  $\Omega$ , se tiene

$$\begin{aligned}\langle\bar{q}q\rangle &= \frac{\partial\Omega}{\partial m_q}, \\ \chi_q &= \frac{\partial\langle\bar{q}q\rangle}{\partial m_q} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial m_q^2}, \quad q = u, d, s.\end{aligned}\tag{5.17}$$

También definiremos una susceptibilidad asociada a la traza del PL,

$$\chi_\Phi = \frac{d\Phi}{dT}.\tag{5.18}$$

Para altas temperaturas, el condensado regularizado es dominado por el término libre  $\Omega^{\text{free}}$ , y crece con la temperatura como  $\langle\bar{q}q\rangle \sim -m_q T^2$ . Por lo tanto, para analizar la restauración de la simetría quiral es útil definir una nueva cantidad denominada condensado quiral sustraído,

$$\langle\bar{q}q\rangle_{\text{sub}} = \frac{\langle\bar{u}u\rangle - \frac{m_u}{m_s}\langle\bar{s}s\rangle}{\langle\bar{u}u\rangle_0 - \frac{m_u}{m_s}\langle\bar{s}s\rangle_0},\tag{5.19}$$

normalizado a uno para los valores de los condensados  $\langle\bar{q}q\rangle_0 = \langle\bar{q}q\rangle(T = 0)$ .

De esta forma, nos centraremos en el condensado de quarks sustraído  $\langle\bar{q}q\rangle_{\text{sub}}$  y en el valor de expectación del PL  $\Phi$ , que serán tomados como parámetros de orden para las transiciones de fase de restauración de la simetría quiral y deconfinamiento, respectivamente. Si estas transiciones son de primer orden, se verán reflejadas en una discontinuidad en los parámetros de orden y las funciones termodinámicas. En cambio, si ocurren de manera suave (crossover), no existe una única manera de definir la tempe-

ratura de transición. Para estos casos, en lo que sigue, tomaremos como temperaturas críticas a aquéllas para las que encontramos un máximo en las susceptibilidades antes definidas.

### 5.2.2. Resultados numéricos a temperatura finita

En esta sección se presentan los resultados para las cantidades definidas en la subsección anterior, empleando los factores de forma introducidos en la Sec. 4.2 y los potenciales efectivos de la Sec. 5.1 (Carломagno *et al.*, 2013).

En la Fig. 5.4 graficamos el condensado quiral sustraído, la traza del loop de Polyakov y las susceptibilidades asociadas como función de la temperatura. Las curvas corresponden a la parametrización PII, donde los factores de forma están basados en resultados de LQCD, y al potencial de Polyakov de tipo logarítmico de la Ec. (5.1). En las figuras se muestran también los resultados obtenidos en cálculos de LQCD, tomados de las Refs. (Borsanyi *et al.*, 2010b; Bazavov y Petreczky, 2010).

En el panel superior, se observan los resultados para el condensado sustraído  $\langle \bar{q}q \rangle_{\text{sub}}$  y la traza del loop de Polyakov  $\Phi$ , para  $T_0 = 270$  y  $200$  MeV (línea a trazos y sólida, respectivamente). Como se mencionó anteriormente  $T_0 = 270$  MeV es la temperatura de deconfinamiento para una teoría que sólo incluye bosones de gauge, mientras que  $T_0 = 200$  MeV tiene en cuenta la presencia de quarks dinámicos (Schaefer *et al.*, 2007). De acuerdo con el comportamiento de los parámetros de orden, encontramos que para  $T = 0$  los quarks se encuentran confinados en hadrones y al aumentar la temperatura observamos que a través de una transición crossover el sistema pasa a una fase donde la simetría quiral se encuentra restaurada y los quarks se deconfinan.

En el panel central e inferior, se grafican la susceptibilidad de Polyakov  $\chi_\Phi$  y la susceptibilidad quiral  $\chi_q$  definidas en la Ecs. (5.17) y (5.18), respectivamente, en función de la temperatura. Como ya se mencionó, las temperaturas críticas se definen por medio de las posiciones de los picos de estas susceptibilidades. Encontramos que estos picos se vuelven más pronunciados cuanto menor es el valor de  $T_0$ , hasta que las transiciones se vuelven de primer orden para  $T_0 \lesssim 185$  MeV. En las curvas correspondientes a  $\chi_s$  se observa un segundo pico (muy ancho) que corresponde a la restauración completa de la simetría quiral  $SU(3)$ .

Para  $T_0 = 270$  y  $200$  MeV encontramos que  $T_c \simeq 200$  MeV y  $T_c \simeq 165$  MeV, respectivamente, mientras que los resultados de lattice QCD rondan los  $160$  MeV (Bazavov y Petreczky, 2010; Borsanyi *et al.*, 2010b; Borsanyi, 2013). Se observa que tanto la restauración de la simetría quiral  $SU(2)$  como el deconfinamiento ocurren a la misma temperatura crítica. De esta manera, encontramos que para un sistema con tres sabores de quarks el parámetro  $T_0$  debe ser modificado a  $200$  MeV para que la temperatura crítica coincida con los resultados obtenidos en LQCD. Esto está en buen acuerdo con lo esperado teóricamente, como se discutió en la sección 5.1.

Se observa también que estos resultados son “robustos”: si bien las curvas pre-

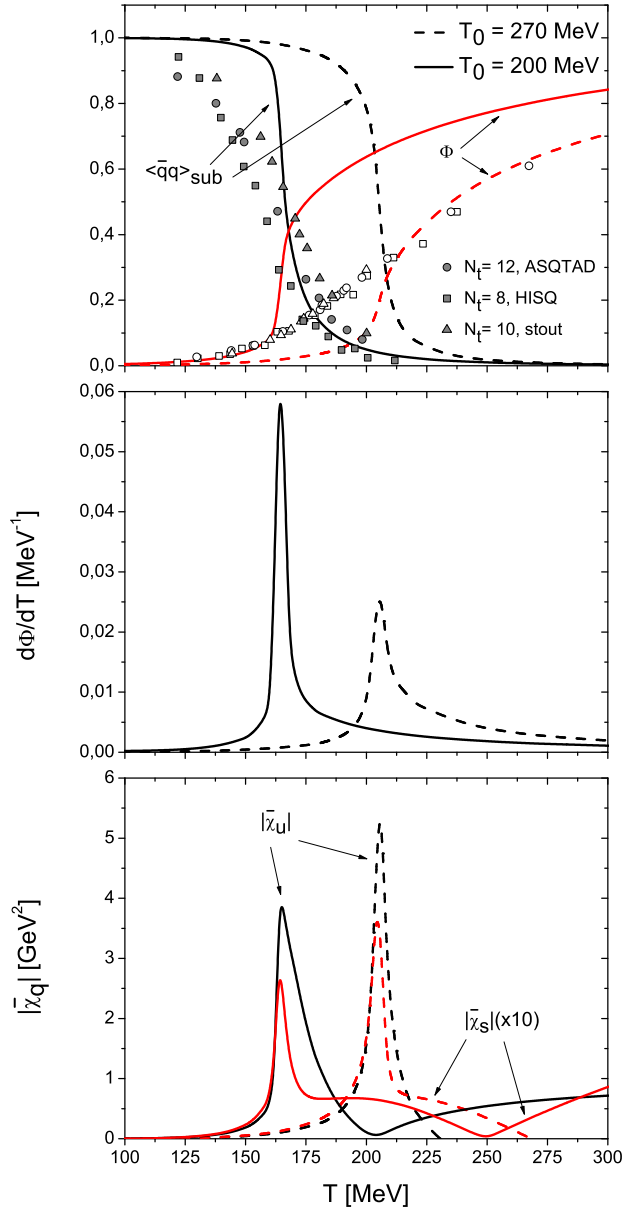


Figura 5.4: Condensado quiral substraído, loop de Polyakov, susceptibilidades quirales y susceptibilidad del PL como función de la temperatura. La línea sólida (de trazos) corresponde a la parametrización PII, para un potencial logarítmico con  $T_0 = 200$  (270) MeV. Triángulos, círculos y cuadrados representan resultados de LQCD tomados de las Refs. (Borsanyi *et al.*, 2010b; Bazavov y Petreczky, 2010).

sentadas hasta ahora corresponden a la PII, la situación es similar para los factores de forma de la PI. Con el objeto de comparar las características de las distintas parametrizaciones, se consideraron otras cantidades termodinámicas como la energía de interacción o la entropía. De esta manera, en la Fig. 5.5 graficamos la energía de interacción normalizada  $(\varepsilon - 3p)/T^4$  y la densidad de entropía normalizada  $s/s_{SB}$ , siendo  $s_{SB} = [4(N_c^2 - 1) + 7N_c N_f]\pi^2 T^3/45$  la entropía de Stefan-Boltzmann para un gas de gluones y quarks no interactuantes con  $N_c$  colores y  $N_f$  sabores. En este caso se tomó

$T_0 = 200$  MeV en el potencial logarítmico, tanto para la PI (línea de trazos) como para la PII (línea sólida). Se incluyeron 3 conjuntos de resultados de LQCD obtenidos de las Refs. (Bazavov y Petreczky, 2010; Bazavov *et al.*, 2009; Borsanyi *et al.*, 2010a).

En ambas cantidades de la Fig. 5.5, se observa para la PI una caída pronunciada cerca de los  $T \sim 300$  MeV, que no se observa para la PII. Para rastrear el origen de este efecto, se consideró una tercera parametrización PIII, en donde el factor de forma  $g(p)$  es también del tipo exponencial pero sin WFR, es decir  $Z(p) = 1$  [esta parametrización ha sido previamente estudiada en la Ref. (Contrera *et al.*, 2010a)]. Se puede observar que las curvas correspondientes a la PIII no poseen dicha caída, por lo tanto el efecto es atribuible al factor de forma  $f(p)$ , de tipo Gaussiano, considerado en la PI. Este mismo comportamiento se encuentra en los resultados de la Ref. (Hell *et al.*, 2011), donde la parametrización empleada (representada como PIV en la figura) posee también un factor de forma cuya dependencia con el momento es del tipo exponencial.

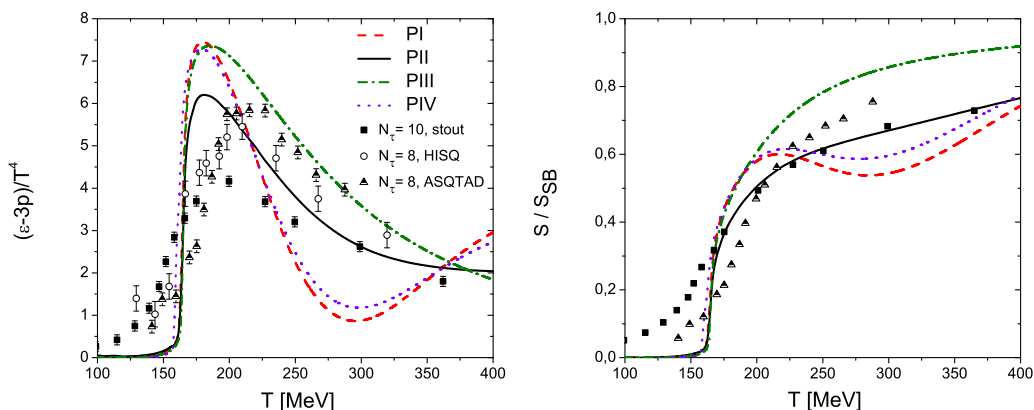


Figura 5.5: Energía de interacción normalizada (izquierda) y densidad de entropía (derecha) como función de la temperatura, para diferentes parametrizaciones. Las curvas corresponden a un modelo nPNJL, considerando un potencial logarítmico con  $T_0 = 200$  MeV. Cuadrados, círculos y triángulos representan cálculos de LQCD tomados de las Refs. (Bazavov y Petreczky, 2010), (Bazavov *et al.*, 2009) y (Borsanyi *et al.*, 2010a), respectivamente.

Para analizar el efecto del potencial de Polyakov sobre el modelo, se consideraron los potenciales efectivos descritos en la Sec. 5.1. Para el potencial logarítmico y polinómico se fijó  $T_0 = 200$  MeV, mientras que los parámetros  $b$  y  $T_c^{\text{glue}}$  en las Ecs. (5.7) y (5.9) fueron modificados a  $(145 \text{ MeV})^3$  y  $200$  MeV, respectivamente. En el panel izquierdo de la Fig. 5.6, donde se grafica el condensado sustraído, se observa que el potencial propuesto en la Ref. (Haas *et al.*, 2013) conduce a transiciones más suaves, lo cual está en mejor acuerdo con los resultados de lattice QCD. Por otro lado, si analizamos la traza del PL en el panel derecho, se observa que la transición es demasiado abrupta respecto a las estimaciones de LQCD. Esta es una característica general de los modelos tipo PNJL, tanto locales como no locales. Sin embargo, como se discute en las Refs. (Marhauser y Pawłowski, 2008; Braun *et al.*, 2010; Herbst *et al.*, 2014), debe te-



nerse en cuenta que la comparación entre la traza del PL obtenido en modelos efectivos y el calculado por LQCD debe ser realizada con bastante cuidado, debido a diferencias propias de la definición del espaciado discreto de la red. Esperamos avanzar sobre este problema en trabajos futuros.

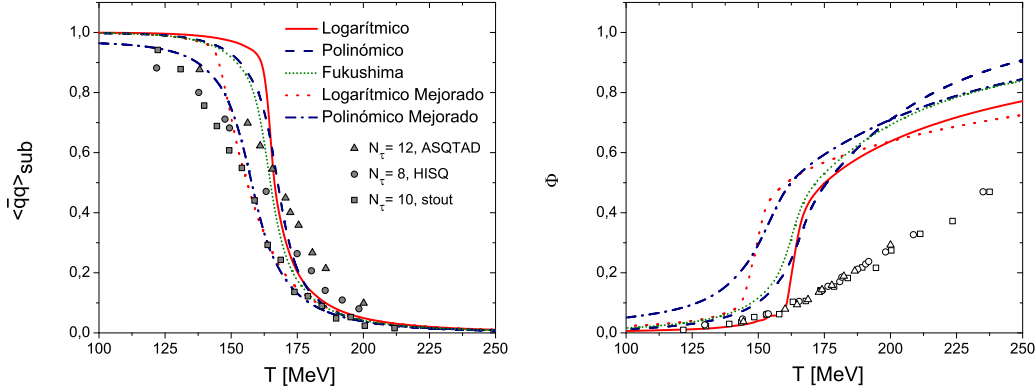


Figura 5.6: Condensado quiral substraído (izquierda) y traza del loop de Polyakov (derecha) como función de la temperatura, para diferentes potenciales efectivos de Polyakov. Las curvas corresponden a la PII. Cuadrados, círculos y triángulos representan resultados de LQCD obtenidos de las Refs. (Borsanyi *et al.*, 2010b; Bazavov y Petreczky, 2010).

En los modelos nPNJL la restauración de la simetría quiral y el deconfinamiento tienen lugar a aproximadamente una misma temperatura, en coincidencia con los resultados provenientes de lattice QCD. Mientras que en las extensiones locales del NJL, estas temperaturas están separadas hasta unos 20 MeV (Fu *et al.*, 2008; Costa *et al.*, 2009), diferencia que puede eliminarse si se introduce una dependencia con la traza del loop de Polyakov en la interacción efectiva de cuatro quarks (Sakai *et al.*, 2010; Sasaki *et al.*, 2011). En otras palabras, si se propone la interacción como el intercambio de un gluón efectivo, la constante de acoplamiento dependerá explícitamente con  $\Phi$ . El efecto de esta dependencia es el de generar transiciones más abruptas y que la temperatura de restauración de la simetría quiral y de deconfinamiento coincidan, al igual que en los modelos no locales de Polyakov-NJL.

Es importante mencionar entonces, que aunque las transiciones en los modelos no locales resultan más pronunciadas que en las versiones locales, esto no debe ser visto como una consecuencia de la no localidad de las interacciones. Este comportamiento es debido a la relación entre las transiciones de deconfinamiento y restauración de la simetría quiral.

Finalmente, por completitud mostramos en la Fig. 5.7 la densidad de energía y la densidad de entropía para tres potenciales distintos: el polinómico, el logarítmico y el polinómico mejorado, obtenido de la Ref. (Haas *et al.*, 2013), para la PII. Puede verse que para estas cantidades las curvas muestran un acuerdo razonable con los resultados de LQCD.

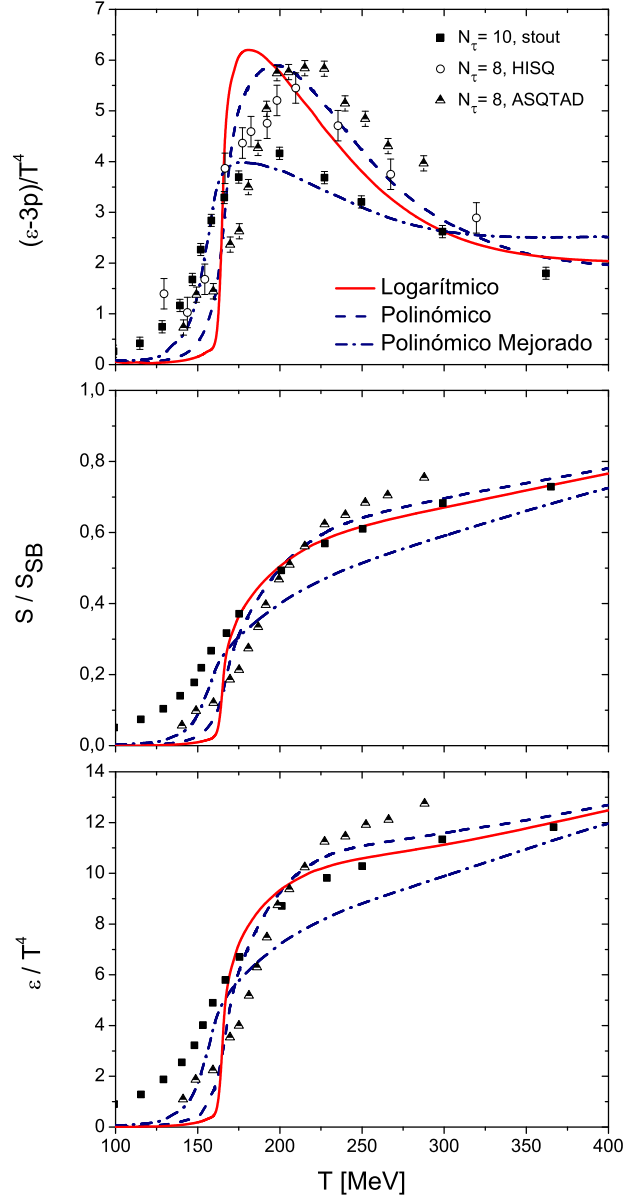


Figura 5.7: Energía de interacción normalizada y densidades de entropía y energía normalizadas como función de la temperatura, para la PII y tres potenciales de PL. Cuadrados, círculos y triángulos representan cálculos de LQCD tomados de las Refs. (Bazavov y Petreczky, 2010; Bazavov *et al.*, 2009; Borsanyi *et al.*, 2010a).

### 5.3. Diagrama de fases de QCD en un modelo nPNJL con WFR

En esta sección consideraremos sistemas con potencial químico finito, en el marco de los modelos de nPNJL para tres sabores de quarks desarrollados anteriormente. Recordemos que la traza del loop de Polyakov depende solamente de dos variables independientes  $\varphi_3$  y  $\varphi_8$ . Para el caso en que el potencial químico es cero, las condiciones

de conjugación de carga de QCD hacen que el PL sea una cantidad real y por lo tanto se tiene  $\varphi_8 = 0$ , obteniéndose la expresión de la Ec. (5.12). A potencial químico real diferente de cero, se debe minimizar la parte real del potencial termodinámico ya que los valores de expectación de vacío  $\Phi$  y  $\Phi^*$  deben ser reales, y en estas condiciones se satisface nuevamente que  $\varphi_8 = 0$  (Roessner *et al.*, 2007).

Al utilizar el formalismo de Matsubara de tiempo imaginario con potencial químico finito, en las expresiones para el potencial termodinámico es necesario reemplazar la cuarta componente del momento  $p_4$  por  $\omega_n - i\mu$ . Por lo tanto, debemos modificar la definición que hemos hecho de la variable  $p_{nc}^2$  que aparece en la Ec. (5.14). Las expresiones correspondientes son:

$$\begin{aligned}\Omega^{\text{reg}} &= -2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{c,f} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{\rho_{nc,\vec{p}}^2 + M_f^2(\rho_{nc,\vec{p}})}{Z^2(\rho_{nc,\vec{p}}) (\rho_{nc,\vec{p}}^2 + m_f^2)} \right] \\ &\quad - \left( \bar{\zeta} \bar{R} + \frac{G}{2} \bar{R}^2 + \frac{H}{4} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s \right) - \frac{1}{2} \sum_f \left( \bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G}{2} \bar{S}_f^2 \right), \\ \Omega^{\text{free}} &= -2T \sum_{c,f} \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Re} \log \left[ 1 + \exp \left( -\frac{\epsilon_{fp} + s(\mu + i\varphi_c)}{T} \right) \right],\end{aligned}\quad (5.20)$$

donde ahora hemos definido

$$\rho_{nc,\vec{p}}^2 = [(2n+1)\pi T - i\mu + \varphi_c]^2 + \vec{p}^2. \quad (5.21)$$

De la misma forma que lo hicimos en la sección anterior, a partir de estas cantidades obtendremos los parámetros de orden y susceptibilidades que permitan caracterizar las transiciones de restauración de la simetría quiral y deconfinamiento, utilizando las diferentes parametrizaciones para los factores de forma que ya hemos analizado anteriormente, como así también los distintos potenciales efectivos para el PL.

Consideremos primero el caso de temperatura cero. A diferencia del análisis realizado en la Sec. 5.2, estudiaremos solamente la restauración de la simetría quiral, ya que en estas condiciones el loop de Polyakov se desacopla de los fermiones. La transición encontrada es de primer orden, mostrando una discontinuidad en los observables. En el límite  $T = 0$  se tiene

$$\begin{aligned}\Omega^{\text{reg}} &= -2 \sum_{c,f} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log \left[ \frac{\rho_{c,p}^2 + M_f^2(\rho_{c,p})}{Z^2(\rho_{c,p}) (\rho_{c,p}^2 + m_f^2)} \right] \\ &\quad - \left( \bar{\zeta} \bar{R} + \frac{G}{2} \bar{R}^2 + \frac{H}{4} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s \right) - \frac{1}{2} \sum_f \left( \bar{\sigma}_f \bar{S}_f + \frac{G}{2} \bar{S}_f^2 \right), \\ \Omega^{\text{free}} &= 2 \sum_{c,f} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{Re} (\epsilon_{fp} - \mu), \quad \epsilon_{fp} < \mu.\end{aligned}\quad (5.22)$$

En el panel superior de la Fig. 5.8 se muestra el condensado quiral de quarks para las parametrizaciones PI y PII, normalizado respecto de su valor a potencial químico nulo.

La discontinuidad en las curvas indica el valor de  $\mu$  para el cual tiene lugar la restauración de la simetría quiral. En el panel inferior se grafica para ambas parametrizaciones la densidad de quarks  $\rho$ , definida como

$$\rho = -\frac{\partial\Omega^{MFA}}{\partial\mu}, \quad (5.23)$$

normalizada con el valor de la densidad de materia nuclear  $\rho_0$ . De los resultados mostrados en secciones anteriores se observa que a potencial químico cero la transición es un crossover que ocurre a una temperatura aproximada de 165 MeV, mientras que de la Fig. 5.8 vemos que a temperatura cero la transición es de primer orden para un potencial químico crítico de aproximadamente 310 MeV (Carlomagno *et al.*, 2013, 2015a). De esta manera, si para  $\mu$  fijos analizamos los parámetros de orden en función de la temperatura, nos encontraremos con una curva de transición de fase de primer orden para la restauración de la simetría quiral con temperaturas críticas que irán aumentando desde cero hasta un cierto valor  $T_{\text{CEP}}$  donde la transición se vuelve crossover (ver Tabla 5.1). Este punto final de la curva de transición de primer orden es el llamado *critical end point* (CEP), de coordenadas  $(\mu_{\text{CEP}}, T_{\text{CEP}})$  en el espacio de fases. Los valores de  $\mu_{\text{CEP}}$  y  $T_{\text{CEP}}$  para los distintos potenciales de Polyakov y factores de forma pueden determinarse numéricamente con buena precisión (Contrera *et al.*, 2010b).

	PI		PII	
	Logarítmico	Polinómico	Logarítmico	Polinómico
$\mu_c (T = 0)$ [MeV]	311		304	
$T_c (\mu = 0)$ [MeV]	164	168	167	171
$\mu_{\text{CEP}}$ [MeV]	120	169	140	193
$T_{\text{CEP}}$ [MeV]	157	145	156	139

Tabla 5.1: Valores para las temperaturas críticas  $T_c$  (a potencial químico cero), potenciales químicos críticos  $\mu_c$  (a temperatura cero) y coordenadas de los puntos críticos finales (CEP) para las parametrizaciones PI y PII.

Para obtener el diagrama de fases en el plano  $T - \mu$  estudiaremos el comportamiento de los parámetros de orden para las transiciones de deconfinamiento y restauración de la simetría quiral como función de la temperatura, variando el valor del potencial químico. Ilustramos esto en la Fig. 5.9, donde se puede ver el condensado quiral sustraído (línea sólida) y el valor a campo medio de la traza del PL  $\Phi$  (línea a trazos) para tres valores de potencial químico, y para los tres potenciales del PL considerados previamente, con  $T_0 = 200$  MeV. Se ha optado por mostrar los resultados correspondientes a la parametrización PI (curvas similares se obtienen para la parametrización PII).

En la Fig. 5.9 se observa que para  $\mu = 100$  MeV (panel superior) existe una temperatura para la que el condensado cae rápidamente, señal de la restauración de la simetría quiral, mientras que de manera simultánea  $\Phi$  aumenta, indicando que comienza la transición confinamiento-deconfinamiento. Notamos que para este valor de

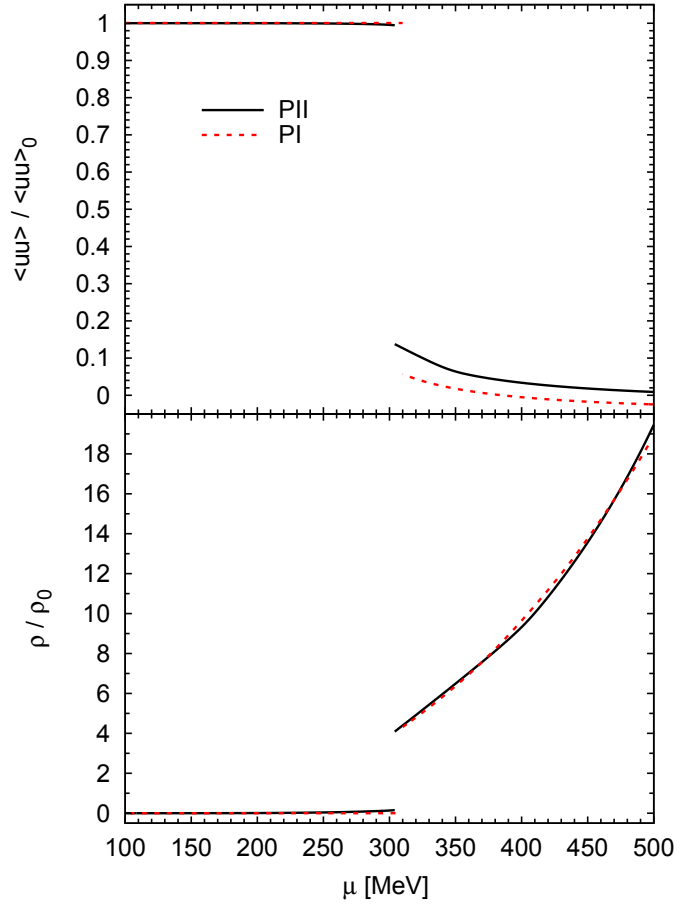


Figura 5.8: Condensado quiral y densidad de quarks como función del potencial para temperatura cero. La línea sólida (a trazos) representa la parametrización PII (PI), mientras que la discontinuidad señala el valor de potencial químico para el cual ocurre la transición de primer orden de restauración de la simetría quiral.

potencial químico ambas transiciones son de tipo crossover.

Si comenzamos a aumentar el potencial químico encontramos que existe un valor  $\mu_{\text{CEP}}$  (ver Tabla 5.1) a partir del cual hay una discontinuidad en el condensado quiral, indicando que la transición es ahora de primer orden. En particular aquí mostramos el caso para  $\mu = 250$  y  $\mu = 300$  MeV (panel central e inferior). El carácter de esta transición induce una discontinuidad también en el parámetro de orden para el deconfinamiento. Se observa como la temperatura de transición, indicada para cada potencial del PL por el salto en las cantidades graficadas, cambia a medida que aumenta el potencial químico, tendiendo a cero cuanto mayor es el valor de  $\mu$ .

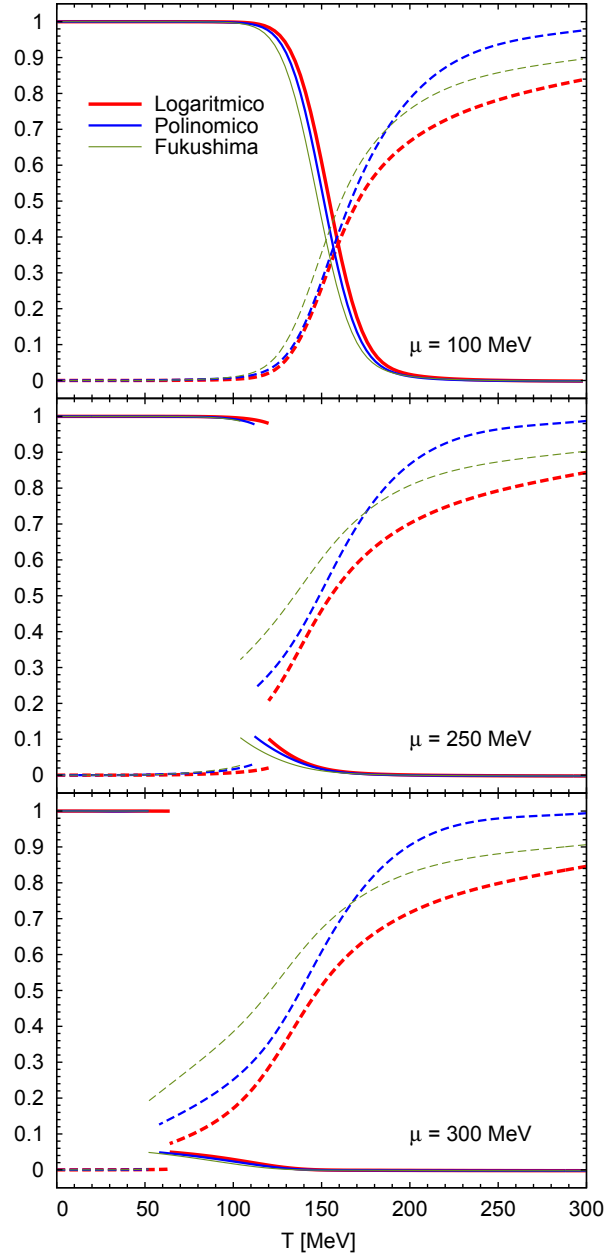


Figura 5.9: Condensado quiral sustraído (líneas sólidas) y traza de loop de Polyakov (líneas de trazos) como función de la temperatura para tres valores de potencial químico,  $\mu = 100, 250$  y  $300$  MeV en los paneles superior, central e inferior, respectivamente.

### 5.3.1. Transiciones de fase en el plano $T - \mu$

Estamos en condiciones de calcular y analizar el diagrama de fases de QCD en el marco de un modelo nPNJL para tres sabores de quarks con WFR. Para esto emplearemos lo estudiado en secciones anteriores para determinar las curvas de transición de fase de primer orden y crossover de restauración de la simetría quiral y deconfinamiento

a través de los parámetros de orden ya considerados, es decir el condensado quiral de quarks y el valor de la traza del PL.

En la Fig. 5.10 se muestran los diagramas de fases para los potenciales del PL logarítmico (panel izquierdo) y polinómico (panel derecho) con  $T_0 = 200$  MeV para los factores de forma correspondientes a las parametrizaciones PI y PII en los paneles superior e inferior, respectivamente. La transición de restauración de la simetría quiral está indicada con línea sólida y de trazos para las curvas de primer orden y crossover, respectivamente, separadas por el punto crítico final (CEP).

La temperatura crítica para la transición de deconfinamiento a potencial químico nulo fue determinada por medio del pico de la susceptibilidad de PL. De acuerdo con el análisis de la sección anterior, esta temperatura coincide con la correspondiente a la restauración de la simetría quiral (ver Fig. 5.4). Para  $\mu$  finito se observa que a partir de cierto valor de potencial químico la restauración de la simetría quiral induce una discontinuidad en la traza del PL, pero su valor se mantiene próximo a cero (ver Fig. 5.9), indicando que todavía no ha ocurrido la transición confinamiento-deconfinamiento, y por lo tanto la susceptibilidad del PL de la Ec. (5.18) no permite determinar las temperaturas críticas con buena precisión. En la Fig. 5.10 con líneas de trazos graficamos las curvas de transición de fase en el plano  $T - \mu$  que corresponden a fijar el valor de  $\Phi$  en 0.3, 0.4 y 0.5, respectivamente. De este modo, la región delimitada entre estas curvas y la de restauración de la simetría quiral determinan una fase, denominada Quarkiónica (McLerran y Pisarski, 2007; McLerran *et al.*, 2009), donde puede interpretarse que los quarks permanecen confinados pero con la simetría quiral restaurada.

Se observa que a temperatura cero el valor del potencial químico crítico  $\mu_c$  resulta independiente del potencial de Polyakov, ya que en estas condiciones el PL se desacopla de los fermiones. Por otro lado,  $\mu_c$  y  $T_c$  difieren solamente en un  $\sim 2\%$  entre parametrizaciones y potenciales de Polyakov.

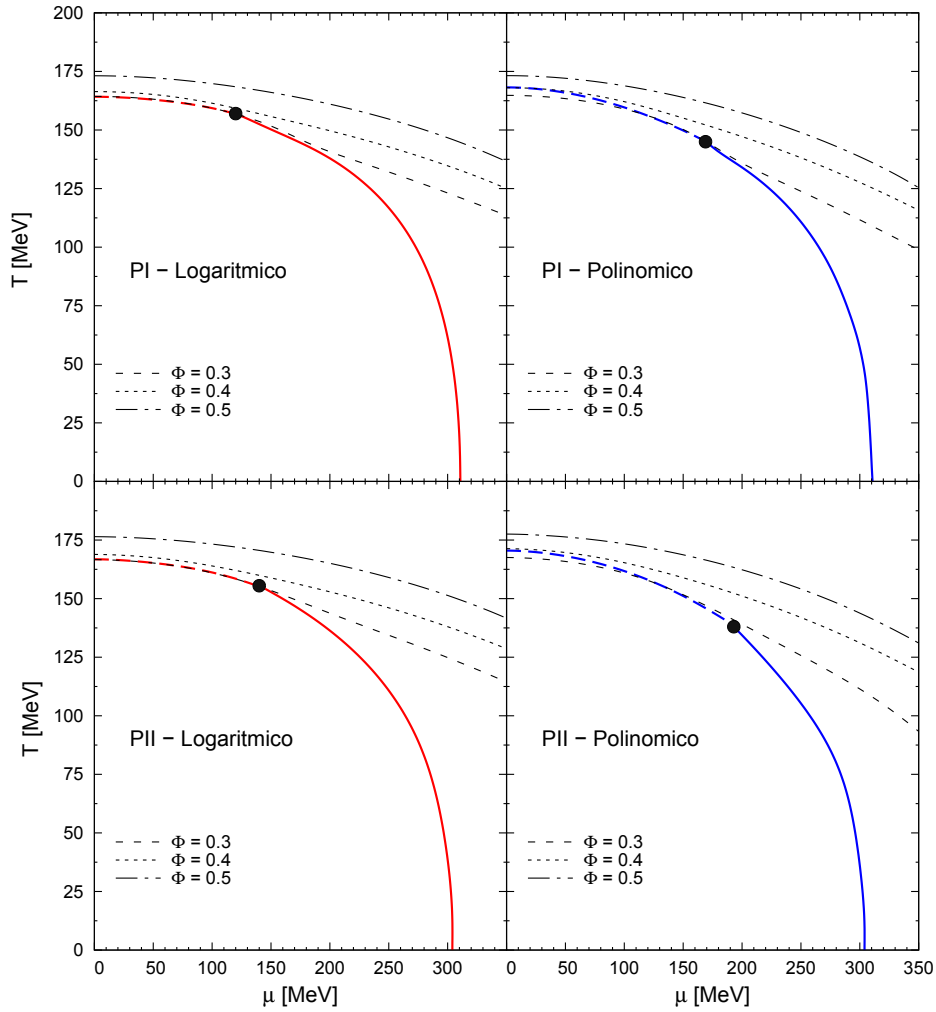


Figura 5.10: Diagrama de fases para los potenciales de PL logarítmico (izquierda) y polinómico (derecha) para los factores de forma de las parametrizaciones PI (arriba) y PII (abajo) con  $T_0 = 200$  MeV. La transición quiral señalada con línea sólida (a trazos) corresponde a la de primer orden (crossover).



## Capítulo 6

# Transiciones de fase inhomogéneas en un modelo nlNJL con simetría $SU(2)$ de sabor

*Somos del grupo los salieris de Charly  
Le robamos melodias a él, ah, ah, ah...*

Los salieris de Charly. León Gieco.

**Resumen:** En este capítulo consideraremos un modelo no local de quarks de masa nula tipo NJL donde los valores de expectación de vacío de los campos poseen una dependencia explícita en las variables espaciales, dando origen a una estructura de fases homogéneas e inhomogéneas. En la primera parte se realizará una breve introducción a las fases no uniformes y a la teoría de Landau. Luego, en la parte final del capítulo se estudiará el diagrama de fases en el marco de esta teoría efectiva.

### 6.1. Introducción a las fases inhomogéneas

En lo desarrollado hasta ahora, cuando estudiamos el modelo de NJL y su extensión con interacciones no locales, nos basamos en la suposición de que el estado de mínima energía siempre satisfacía invarianza traslacional. En particular, que el condensado quiral, parámetro de orden de la simetría quiral, era constante en el espacio. Sin embargo, resulta razonable esperar que la transición desde bajas densidades (donde los bariones son los grados físicos de libertad del sistema) hacia una fase homogénea de quarks y gluones a grandes potenciales químicos, ocurra vía fases intermedias no uniformes.

El estudio de estas fases inhomogéneas en materia de quarks no es algo nuevo [una revisión detallada puede encontrarse en la Ref. (Broniowski, 2012)]. Pueden citarse los trabajos de Migdal (Migdal, 1971, 1973) para la condensación de piones, que a finales de la década del '70 fueron generalizados por Dautry y Nyman (Dautry y Nyman, 1979) para sistemas relativistas, mientras que una década más tarde Kutschera, Kotlorz y Broniowski (Kutschera *et al.*, 1990a; Broniowski *et al.*, 1991; Kutschera *et al.*, 1990b) estudiaron la condensación de piones en materia de quarks en el contexto de un modelo tipo NJL (Broniowski y Kutschera, 1990; Sadzikowski y Broniowski, 2000; Schon y Thies, 2000). En las últimas décadas un estudio sistemático fue realizado por Nakano, Tsumi (Nakano y Tsumi, 2005) y Nickel (Nickel, 2009b,a).

Estudiaremos aquí la ruptura inhomogénea de la simetría quiral, esto es, la formación de fases caracterizadas por un condensado que rompe la invarianza traslacional. Cualitativamente, la formación de condensados quirales inhomogéneos puede entenderse por analogía con los pares de Cooper: cerca de la superficie de Fermi, si existe una fuerza atractiva, el sistema puede reducir su energía libre creando pares de partículas, hasta que eventualmente condensan. En la teoría BCS (Bardeen *et al.*, 1957) los fermiones que forman el par tienen momento opuesto, de modo que el momento total que lleva el par es cero, y como consecuencia el condensado es constante en el espacio. Por el contrario, si las partículas tienen momentos diferentes como en el caso de fermiones con espín opuesto en un campo magnético, no podrán estar sobre la superficie de Fermi y por lo tanto formar el par costará algo de energía. En esas condiciones, sólo se formará el condensado si la diferencia de momentos es menor que el gap de energía del par de Cooper, es decir, si aún teniendo en cuenta esta diferencia el condensado sigue siendo la configuración de menor energía (Clogston, 1962; Chandrasekhar y Hulm, 1962).

En el vacío, la ruptura de la simetría quiral se da por la formación de pares de quarks con diferente quiralidad, que generan un condensado no nulo. Si despreciamos la masa de los quarks esto puede hacerse sin costo de energía. A potencial químico finito, en cambio, se requiere una energía mayor a  $2\mu$  para excitar un par quark-antiquark, por lo cual este mecanismo de momento total nulo a altas densidades no es probable. Pero podemos considerar un par formado por un quark izquierdo de momento  $\vec{p}$  y el hueco dejado un por quark derecho de momento  $-\vec{p}$ . En esta configuración el par tiene momento total  $\vec{P} = 2\vec{p}$ , con lo cual el condensado que se formará es no uniforme en el espacio, variando con  $x$  como  $e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}}$ .

Para ejemplificar lo anterior veamos un caso simple. Consideremos una versión 1+1 dimensional del modelo de NJL (NJL<sub>2</sub>), cuyo lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}_2} = \bar{\phi}\nu\gamma^\nu\partial_\nu\phi + \frac{g^2}{2} [(\bar{\phi}\phi)^2 + (\bar{\phi}\nu\gamma^5\phi)^2] , \quad (6.1)$$

donde el campo fermiónico  $\phi$  y su conjugado tienen dos componentes espinoriales. Tomaremos la representación de las matrices  $\gamma^\nu$  como  $\gamma^0 = \sigma^1$ ,  $\gamma^1 = -i\sigma^2$  y  $\gamma^5 = \sigma^3$ , siendo  $\sigma^i$  las matrices de Pauli de  $2 \times 2$ . Para describir un sistema a densidad finita

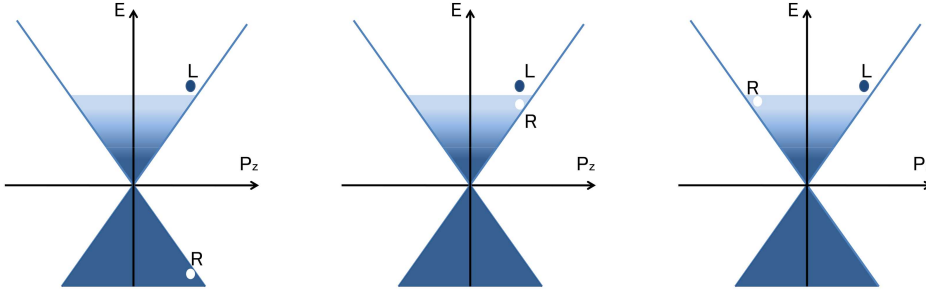


Figura 6.1: Esquema de los diferentes mecanismos para la formación de pares en presencia del mar de Fermi (Buballa y Carignano, 2015). De izquierda a derecha, par quark-antiquark, par quark-hueco con momento total cero y par quark-hueco con momento total no nulo.

es necesario agregar el término  $\mu\phi^\dagger\phi$  a la Ec. (6.1). Lo interesante es que este término puede ser eliminado por una transformación quirral local

$$\phi(x) = e^{-i\mu z\gamma^5} \phi'(x) , \quad (6.2)$$

donde  $z$  denota la coordenada espacial. Esta transformación mapea exactamente un sistema a potencial químico  $\mu$  en el de uno a  $\mu = 0$ . Con lo cual, si a densidad nula el estado de vacío esta caracterizado por un condensado escalar no nulo y uno pseudoescalar nulo, se mantendrá así para cualquier valor del potencial químico, obteniéndose lo que se conoce como “espiral quirral” en 1 + 1 dimensiones,

$$\langle \bar{\phi}\phi \rangle = \cos(2\mu z) \langle \bar{\phi}\phi \rangle_{\mu=0} , \quad (6.3)$$

$$\langle \bar{\phi}i\gamma^5\phi \rangle = \sin(2\mu z) \langle \bar{\phi}\phi \rangle_{\mu=0} . \quad (6.4)$$

El diagrama de fases que se obtiene de este modelo NJL<sub>2</sub> es tal que por debajo de la temperatura crítica  $T_c$ , que es la temperatura a la cual se restaura la simetría quirral a densidad nula, la fase inhomogénea de espirales quirales es la energéticamente favorecida para cualquier valor de  $\mu$ . Por encima de  $T_c$  la simetría se restaura y el sistema se encuentra en una fase homogénea. Por lo tanto, el diagrama de fases en el plano  $T - \mu$  se encuentra dividido por una línea recta horizontal  $T = T_c$  que separa las fases con simetría quirral rota y restaurada. Sólo a  $\mu = 0$  el sistema se encuentra en un estado de fase homogénea con simetría quirral rota.

## 6.2. Teoría de Landau

Esta teoría fue formulada por Lev Davidovich Landau en 1937. Tiene como principal ventaja su carácter fenomenológico, ya que no depende de la naturaleza de las interacciones que gobiernan al sistema, sino de las simetrías de éste. Más aún, sólo describe transiciones de fase donde existe un cambio en dicha simetría.

La energía libre de Landau  $\mathcal{F}$  es una aproximación a la energía libre en la vecindad de la transición de fase, que depende de todas las variables externas del sistema y parámetros de orden. Si se supone que existe una fase de mayor simetría donde todos estos parámetros de orden se anulan, uno puede descomponer la energía libre de Landau como

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Delta\mathcal{F}(\eta^i) , \quad (6.5)$$

donde  $\mathcal{F}_0$  no depende de los parámetros de orden  $\eta^i$  y  $\Delta\mathcal{F}(\eta^i)$  es pequeño en un entorno de la transición de fase. De este modo, es posible hacer un desarrollo de Taylor de  $\Delta\mathcal{F}(\eta^i)$  en potencias de  $\eta^i$ . Por ejemplo, para un único parámetro de orden real,

$$\Delta\mathcal{F} = \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{k} \eta^k + \mathcal{O}(\eta^{N+1}) . \quad (6.6)$$

Naturalmente, si existe una transformación  $\eta \rightarrow -\eta$ , todas las potencias impares no contribuyen al desarrollo. Por este motivo, el término lineal estará presente sólo cuando  $\eta$  se acople con campos externos y satisfaga la simetría de paridad. El cuadrático está siempre presente y para asegurar una fase estable se deberá cumplir que  $\alpha_2 > 0$  (para tener derivadas segundas positivas en  $\eta = 0$ ). Con lo cual, en esta teoría ocurre una transición de fase cuando el coeficiente  $\alpha_2$  cambia de signo mientras los otros lo conservan. Si existe un término cúbico, el desarrollo no estará bien comportado (la energía libre de Landau puede no estar limitada por debajo); además, su ausencia asegura que la transición de fase sea continua. El signo del coeficiente  $\alpha_4$  puede generar un cambio en el carácter de la transición si se vuelve negativo, esto es, que la transición pase de ser de segundo a primer orden. Finalmente, para tener una energía libre bien comportada será necesario la positividad del último coeficiente del desarrollo cuando  $|\eta| \rightarrow \infty$ .

### 6.3. Modulación espacial de los condensados quirales

Describiremos en esta sección un ansatz simple para la modulación espacial de los condensados quirales, y sobre esta base estudiaremos la estructura del diagrama de fases en el contexto de un modelo quiral nlNJL con simetría  $SU(2)$  de sabor. Teniendo en cuenta la teoría de Landau, es esperable que las características principales de los diagramas no dependan fuertemente de la dependencia de los condensados con las variables espaciales. Como punto de partida propondremos una dependencia espacial para los condensados de la forma de una onda plana, cuya parte real e imaginaria serán el condensado quiral escalar y pseudoescalar, respectivamente.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi}\phi \rangle &\propto \cos(\vec{Q} \cdot \vec{x}) \\ \langle \bar{\phi}\nu\gamma^5\phi \rangle &\propto \text{sen}(\vec{Q} \cdot \vec{x}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Por analogía con la onda de densidad de espines en sistemas de materia condensada, esta propuesta es denominada “Onda dual de densidad quiral” (DCDW) (Nakano y Tatsumi, 2005). Este *ansatz* también es llamado “espiral quiral”, ya que el condensado describe una espiral en la dirección de  $\vec{Q}$ .

Para entender mejor el rol de esta modulación, estudiemos el espectro de un quark sin masa en presencia de una DCDW como campo externo. La densidad lagrangiana de este sistema será (Nakano y Tatsumi, 2005)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left[ i\not{\partial} - \mathcal{M} \left( \cos(\vec{Q} \cdot \vec{x}) + i\gamma_5 \sin(\vec{Q} \cdot \vec{x}) \right) \right] \psi(x) . \quad (6.8)$$

El efecto de la interacción es el de conectar partículas izquierdas con derechas en pares de momento total  $\vec{Q}$ :

$$\int d^3r \mathcal{L} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \begin{pmatrix} \psi_L(p - q/2) \\ \psi_R(p + q/2) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_\mu(p - q/2)^\mu & -\mathcal{M} \\ -\mathcal{M} & \sigma_\mu(p + q/2)^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(p - q/2) \\ \psi_R(p + q/2) \end{pmatrix}$$

donde  $q^\mu = (0, \vec{Q})$ , mientras que  $\mathcal{M}$  representa la masa dinámica generada por la interacción con la DCDW. El espectro se obtiene de los polos del propagador, es decir

$$\det \left[ \bar{\sigma}_\mu(p - q/2)^\mu \sigma_\mu(p + q/2)^\mu - \mathcal{M}^2 \right] = 0 , \quad (6.9)$$

que tiene como solución

$$E_\pm(\vec{p}) = \sqrt{E_0(\vec{p})^2 + \frac{|\vec{q}|^2}{4} \pm \sqrt{(\vec{p} \cdot \vec{q})^2 + \mathcal{M}^2 |\vec{q}|^2}} , \quad E_0(\vec{p}) = \sqrt{\mathcal{M}^2 + |\vec{p}|^2} . \quad (6.10)$$

Si  $\vec{Q}$  es distinto de cero el espectro se separa en dos ramas. Para pequeños valores de  $|\vec{Q}|$  se tiene que  $\partial E_-^2 / \partial |\vec{Q}|^2 < 0$ , con lo cual para un valor constante de  $\mathcal{M}$  es posible disminuir la energía de una partícula de momento  $\vec{p}$  eligiendo un valor no nulo de  $\vec{Q}$ . De esta forma, a densidad no nula, se reduce la energía del sistema poblando la rama negativa, generando así una fase inhomogénea.

## 6.4. Modelo no local quiral con simetría $SU(2)$ de sabor

En el límite quiral, donde los quarks no tienen masa, el punto crítico final (CEP) se transforma en un punto tricrítico (TCP). En este límite, el TCP determina cuándo la transición pasa de primer a segundo orden en el diagrama de fases. Si uno considera fases no uniformes análogas a las descritas en secciones anteriores, este punto puede ser reemplazado por otro, denominado punto de Lifshitz (LP), donde dos fases homogéneas con simetría quiral rota y restaurada se encuentran con una inhomogénea (Nickel, 2009a). El objetivo en esta sección es el de analizar la posición relativa entre el TCP y el LP en el marco de la versión más simple de un modelo quiral de quarks con interacciones no locales con simetría  $SU(2)$  de sabor en el límite de masa nula. Para

este caso, la acción euclídea efectiva está dada por (ver Sección 3.4)

$$S_E = \int d^4x \left[ -i\bar{\psi}(x) \not{\partial} \psi(x) - \frac{G}{2} j_a(x) j_a(x) \right], \quad (6.11)$$

donde  $\psi \equiv (u, d)^T$  representa el campo fermiónico para  $N_f = 2$  sabores. Las corrientes no locales  $j_a(x)$  están definidas como

$$j_a(x) = \int d^4z \mathcal{G}(z) \bar{\psi} \left( x + \frac{z}{2} \right) \Gamma_a \psi \left( x - \frac{z}{2} \right), \quad (6.12)$$

donde  $\Gamma_a = (\mathbb{1}, i\gamma_5 \vec{\tau})$ , y la función  $\mathcal{G}(z)$  es un factor de forma no local que caracteriza la interacción efectiva.

Como hemos discutido previamente a energías menores de 1 GeV los grados de libertad físicos son los mesones escalares y pseudoescalares livianos, dado que a esta escala los quarks se encuentran confinados en hadrones. Por lo tanto, al igual que en el caso del modelo con simetría  $SU(3)$  de sabor analizado en capítulos anteriores, procederemos a bosonizar la teoría introduciendo campos bosónicos auxiliares  $\Phi_a(x)$ , y los campos fermiónicos serán eliminados por integración siguiendo el formalismo de la integral funcional. Este proceso conduce a la acción (Carlomagno *et al.*, 2015b,c)

$$S_E = \int d^4x d^4x' \bar{\psi}(x') D^{-1}(x', x) \psi(x) + \frac{1}{2G} \int d^4x \Phi_a(x) \Phi_a(x), \quad (6.13)$$

con

$$D^{-1}(x', x) = \delta^{(4)}(x' - x)(-i\not{\partial}_x + m_c) + \mathcal{G}(x' - x) \Gamma_a \Phi_a \left( \frac{x + x'}{2} \right). \quad (6.14)$$

Consideremos una vez más la aproximación de campo medio (MFA), donde los campos escalares y pseudoescalares son reemplazados por sus valores de expectación de vacío  $\bar{\Phi}_a(x)$  que dependen, en este caso, explícitamente de las coordenadas espaciales. En el límite quiral ( $m_c = 0$ ), la acción euclídea en la MFA resulta

$$S_{\text{MFA}} = \int d^4x \int d^4x' \left[ \text{Tr} \log D_{\text{MFA}}^{-1}(x', x) + \frac{1}{2G} \bar{\Phi}_a(x') \bar{\Phi}_a(x) \delta^{(4)}(x' - x) \right], \quad (6.15)$$

donde la traza actúa sobre los espacios de color, sabor y Dirac. Hemos definido el operador  $D_{\text{MFA}}^{-1}(x', x) = D_0^{-1}(x', x) + M(x', x)$ , siendo

$$\begin{aligned} D_0^{-1}(x', x) &= \delta^4(x' - x) (-i\not{\partial}_x) \\ M(x', x) &= \mathcal{G}(x' - x) \Gamma^a \bar{\Phi}^a \left( \frac{x + x'}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

El análisis de los sistemas con temperatura y potencial químico finitos puede realizarse mediante el formalismo de tiempo imaginario desarrollado en el Cap. 2. Como hemos visto, en el espacio de momentos esto implica para algún dado operador  $F$  el

reemplazo

$$\int \frac{dp_4}{2\pi} F[p_4, \dots] \rightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[(2n+1)\pi T - i\mu, \dots] . \quad (6.17)$$

### 6.4.1. Análisis generalizado de Ginzburg-Landau

Este análisis constituye una extensión de la Teoría de Landau y consiste en desarrollar el potencial termodinámico en potencias del parámetro de orden y sus gradientes. Por lo tanto resulta válido en el entorno donde estas magnitudes son pequeñas, es decir en la vecindad de las transiciones de segundo orden. Este análisis permite realizar un estudio general sin necesidad de especificar la forma explícita de la inhomogeneidad (Nickel, 2009a; Abuki *et al.*, 2012).

De la Ec. (6.15), podemos escribir

$$\text{Tr} \log D_{\text{MFA}}^{-1} = \text{Tr} \log D_0^{-1} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} [(D_0 M)^n] , \quad (6.18)$$

con lo cual la acción euclídea de la Ec. (6.15), puede ser reescrita como

$$S_{\text{MFA}} = S_{\text{MFA}}^0 + \Delta S_{\text{MFA}} , \quad (6.19)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{\text{MFA}}^0 &= -\text{Tr} \log D_0^{-1} , \\ \Delta S_{\text{MFA}} &= -\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} [(D_0 M)^n] + \frac{1}{2G} \int d^3x \bar{\Phi}^a(\vec{x}) \bar{\Phi}^a(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Estamos ahora en condiciones de escribir el gran potencial termodinámico llevando a cabo una expansión doble en el parámetro de orden y su gradiente hasta el orden seis ( $n = 6$ ). Siguiendo el análisis propuesto en la Ref. (Nickel, 2009a) se tiene en la MFA que (Iwata *et al.*, 2012)

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{MFA}}(T, \mu, \bar{\Phi}_a(\vec{x})) &= \frac{\alpha_2}{2} \bar{\Phi}^2 + \frac{\alpha_4}{4} (\bar{\Phi}^2)^2 + \frac{\alpha_{4b}}{4} (\nabla \bar{\Phi})^2 + \frac{\alpha_6}{6} (\bar{\Phi}^2)^3 + \frac{\alpha_{6b}}{6} (\bar{\Phi}, \nabla \bar{\Phi})^2 \\ &\quad + \frac{\alpha_{6c}}{6} [\bar{\Phi}^2 (\nabla \bar{\Phi})^2 - (\bar{\Phi}, \nabla \bar{\Phi})^2] + \frac{\alpha_{6d}}{6} (\Delta \bar{\Phi})^2 , \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde  $\bar{\Phi}^2 = (\bar{\Phi}, \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}_a \bar{\Phi}_a = \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2$ ,  $(\bar{\Phi}, \nabla \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}_a \nabla \bar{\Phi}_a = \bar{\sigma} \nabla \bar{\sigma} + \bar{\pi} \nabla \bar{\pi}$ , etc. Después de algunos cálculos, se encuentran las expresiones para los coeficientes de este

desarrollo (Carlomagno *et al.*, 2015b),

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \frac{1}{G} - 8 N_c \sum_{np}^f \frac{g^2}{p_n^2} \\
 \alpha_4 &= 8 N_c \sum_{np}^f \frac{g^4}{p_n^4} \\
 \alpha_{4b} &= 8 N_c \sum_{np}^f \frac{g^2}{p_n^4} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{g'}{g} \vec{p}^2 \right) \\
 \alpha_6 &= -8 N_c \sum_{np}^f \frac{g^6}{p_n^6} \\
 \alpha_{6b} &= -40 N_c \sum_{np}^f \left[ \frac{g^4}{p_n^6} \left( 1 - \frac{26}{15} \frac{g'}{g} \vec{p}^2 + \frac{8}{5} \frac{g'^2}{g^2} \vec{p}^2 p_n^2 \right) \right] \\
 \alpha_{6c} &= -24 N_c \sum_{np}^f \frac{g^4}{p_n^6} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{g'}{g} \vec{p}^2 \right) \\
 \alpha_{6d} &= -4 N_c \sum_{np}^f \frac{g^2}{p_n^6} \left[ 1 - \frac{2}{3} \frac{g'}{g} \vec{p}^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{g'^2}{g^2} + \frac{g''}{g} \right) \vec{p}^4 \right], \quad (6.22)
 \end{aligned}$$

donde se han definido

$$\sum_{np}^f \equiv \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d|\vec{p}| \vec{p}^2 \quad (6.23)$$

y  $p_n^2 \equiv [(2n+1)\pi T - i\mu]^2 + \vec{p}^2$ .

La función  $g$  es la transformada de Fourier del factor de forma que aparece en las corrientes fermiónicas  $\mathcal{G}(x)$  evaluado en  $p^2 = p_n^2$ , mientras que  $g'$ ,  $g''$  denotan las derivadas respecto  $\vec{p}^2$ . En las Ecs. (6.22) se optó por mantener las derivadas (algunas de éstas pueden ser removidas con integración por partes) para poder facilitar la comparación con el modelo local de NJL, que se obtiene tomando  $\mathcal{G}(x) = \delta^{(4)}(x)$ , o equivalentemente  $g = 1$ . En este límite  $g' = g'' = 0$ , recuperándose los resultados presentes en las Refs. (Nickel, 2009a; Iwata *et al.*, 2012),

$$\alpha_{4b} = \alpha_4, \quad (6.24)$$

$$\alpha_{6b}/5 = \alpha_{6c}/3 = 2\alpha_{6d} = \alpha_6. \quad (6.25)$$

Hemos supuesto aquí simetría rotacional, que junto a la simetría quiral nos aseguran que todos los términos impares del desarrollo de Ginzburg-Landau (GL) sean cero. También se ha supuesto que los coeficientes de mayor orden, no presentes en este desarrollo, son positivos para tener un sistema bien comportado.

Los coeficientes de GL son funciones de  $T$  y  $\mu$  y por lo tanto determinan la estructura de fases. Si  $\alpha_{4b} > 0$ , los gradientes son desfavorecidos y tendremos fases homogéneas; si además  $\alpha_4 > 0$ , tendremos una transición de segundo orden desde una fase con simetría quiral rota donde  $\alpha_2 < 0$  a una con la simetría restaurada en la que  $\alpha_2 > 0$ . Si por el contrario  $\alpha_4 < 0$ , la transición será de primer orden. Con lo cual el punto tricrítico,



donde la transición de segundo orden se vuelve de primer orden, se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 0. \quad (6.26)$$

Si tenemos fases homogéneas para  $\alpha_{4b} > 0$  e inhomogéneas para  $\alpha_{4b} < 0$ , y por otro lado regiones con simetría quirral rota para  $\alpha_2 < 0$  y restaurada si  $\alpha_2 > 0$ , podemos determinar la posición del LP (punto donde donde dos fases homogéneas con simetría quirral rota y restaurada se encuentran con una inhomogénea) resolviendo el sistema de ecuaciones que surge de hacer cero a los coeficientes  $\alpha_2$  y  $\alpha_{4b}$ , esto es

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_{4b} = 0. \quad (6.27)$$

De la Eq. (6.24) podemos ver que en el modelo NJL el TCP y el LP coinciden, mientras que en la versión no local esto no se cumple necesariamente. Para encontrar la posición de estos puntos es necesario resolver las Eqs. (6.26) y (6.27), lo cual puede ser realizado numéricamente. Esto implica determinar una parametrización para los parámetros libres del modelo (ver Apéndice A), como así también elegir la forma explícita del factor de forma, para luego proceder en forma análoga a lo explicado en la Sección 4.2. Consideremos por simplicidad la forma Gaussiana

$$g = \exp(-p^2/\Lambda^2), \quad (6.28)$$

que ya ha sido utilizada en esta Tesis y también en otros trabajos (Schmidt *et al.*, 1994; Bowler y Birse, 1995; Golli *et al.*, 1998; Gomez Dumm y Scoccola, 2002, 2005; Gomez Dumm *et al.*, 2006). El rango de la interacción esta controlado por el parámetro  $\Lambda$ , que junto a la constante de acoplamiento  $G$  determinan el modelo por completo. Para fijar los valores de estos parámetros usualmente se eligen como observables fenomenológicos el valor de la constante de decaimiento débil del pion y el condensado quark-antiquark. De acuerdo a trabajos recientes (Aoki *et al.*, 2014), consideramos  $f_\pi = 86$  MeV y  $\langle \bar{q}q \rangle = -(270 \text{ MeV})^3$ . Estos valores difieren de los usados en la Sección 4.2 debido a que estamos trabajando con un modelo de quarks con masa nula.

Dado que  $\Lambda$  y  $G$  son los únicos parámetros del modelo, cualquier cantidad adimensional resulta proporcional a  $\bar{G} = G\Lambda^2$ , mientras que una con dimensiones se relacionará con  $\bar{G}$  a través de alguna potencia de una cantidad dimensional, por ejemplo  $f_\pi$ . Con lo cual, uno puede definir un valor “físico” para  $\bar{G}$  como resultado del cociente  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}/f_\pi \simeq 3,14$ . La parametrización que reproduce los mencionados valores fenomenológicos es, para un factor de forma Gaussiano,  $G = 14,65 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $\Lambda = 1,045 \text{ GeV}$  y por lo tanto  $\bar{G} = 16,03$ .

Para entender la dependencia de los resultados con la parametrización empleada, se varió el cociente  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}/f_\pi$  en un rango de 3,0 a 3,3, que para  $f_\pi = 86$  MeV, equivale a variar en 20 MeV al condensado quirral. Los resultados numéricos obtenidos para las coordenadas del TCP y del LP se muestran en la Fig. 6.2 (Carlomagno *et al.*, 2015b). En

el panel superior izquierdo se grafican las posiciones del TCP y del LP en el plano  $T - \mu$ , para el rango ya mencionado. Se observa que para cada parametrización el LP siempre se encuentra a menores temperaturas y mayores densidades que el TCP. En los paneles superior derecho e inferior izquierdo se muestra la dependencia de la temperatura y del potencial químico del TCP y el CP como funciones del condensado quiral, normalizados con  $f_\pi = 86$  MeV. Finalmente en el panel inferior derecho se grafica como función del condensado de quarks el valor de  $G\Lambda^2$ . Esta curva representa las parametrizaciones fenomenológicas posibles que se obtienen al variar  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$  dejando  $f_\pi$  constante. El valor “físico” está indicado por las líneas de trazos.

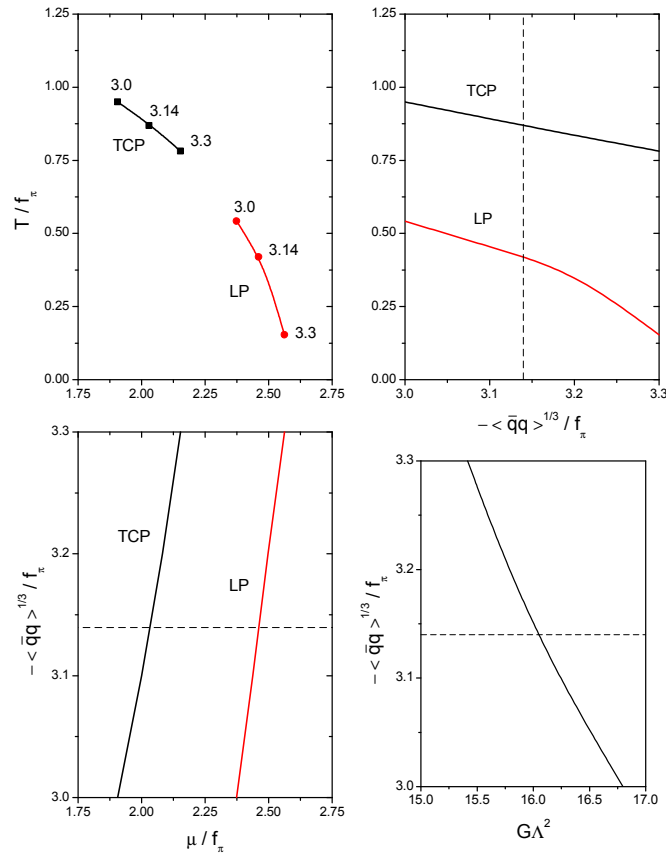


Figura 6.2: Dependencia del TCP y LP en el rango de condensado quiral 250 a 290 MeV con la temperatura y el potencial químico. En el panel inferior derecho se grafica  $G\Lambda^2$  para el mismo rango de condensado de quarks. El valor “físico”,  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}/f_\pi^{\text{ch}} \simeq 3,14$ , esta indicado por una línea de trazos.

Es interesante notar que los resultados presentados para los coeficientes de GL pueden ser aproximados por expresiones semi-analíticas, que facilitan el análisis. Detalles de estos cálculos pueden encontrarse en el Apéndice B y en la Ref. (Gomez Dumm y Scoccola, 2005). Como resultado se obtiene, para un factor de forma  $g(p)$  arbitrario,

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{1}{G} + \frac{N_c}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} T^2 + \mu^2 - \int_0^\infty dp p g^2(p^2) \right] , \\
\alpha_4 &= -\frac{N_c}{\pi^2} \left[ 4g'(0) \left( \frac{\pi^2}{3} T^2 + \mu^2 \right) + \frac{1}{2} + \log 2 - \int_0^\infty dp \frac{g^4(p^2) - n_+(p) - n_-(p)}{p} \right] , \\
\alpha_{4b} &= -\frac{N_c}{\pi^2} \left[ g'(0) \left( \frac{\pi^2}{3} T^2 + \mu^2 \right) - \frac{2}{3} [g'(0)^2 + g''(0)] \left( \frac{7\pi^4}{30} T^4 + \pi^2 T^2 \mu^2 + \frac{1}{2} \mu^4 \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{8} + \log 2 - \int_0^\infty dp \frac{g^2(p^2) - n_+(p) - n_-(p)}{p} \right] . \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Si bien las expresiones no son exactas, en la región de interés (es decir en el entorno a la transición de fase donde a su vez el desarrollo de GL es válido) estas relaciones proveen una muy buena aproximación (errores del orden del por ciento) a aquellos resultados obtenidos realizando numéricamente las sumas sobre las frecuencias de Matsubara.

En particular, el valor del coeficiente  $\alpha_{4b}$  en el TCP puede ser calculado si se exige que  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
\alpha_{4b}^{(\text{TCP})} &= \frac{N_c}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^4}{9} [g'(0)^2 + g''(0)] \left[ \frac{7}{5} T^4 + 2T^2(T_c^2 - T^2) + \frac{1}{3} (T_c^2 - T^2)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \pi^2 g'(0) T_c^2 + \frac{1}{8} - 4 \int_0^\infty dp p \log p [1 - 2g^2(p^2)] g(p^2) g'(p^2) \right\} , \tag{6.30}
\end{aligned}$$

donde  $T_c$  representa la temperatura de la transición quiral (de segundo orden) a  $\mu = 0$ . Observando la expansión de GL, vemos que la condición  $\alpha_{4b}^{(\text{TCP})} > 0$  ( $< 0$ ) implica que el LP está ubicado a menores (mayores) temperaturas y mayores (menores) densidades que el TCP. Ahora bien, para el caso particular de un factor de forma Gaussiano, la Eq. (6.30) se reduce a

$$\alpha_{4b}^{(\text{TCP})} = N_c \left\{ -t_c^2 + \frac{1 + 4 \log 2}{8\pi^2} + \frac{\pi^2}{9} \left[ \frac{14}{5} t^4 + 4t^2(t_c^2 - t^2) + \frac{2}{3} (t_c^2 - t^2)^2 \right] \right\} , \tag{6.31}$$

donde hemos llamado  $t = T/\Lambda$  y  $t_c = T_c/\Lambda$ . Puede verse que en este caso se tiene  $\alpha_{4b}^{(\text{TCP})} < 0$  sólo si se cumple

$$\bar{G} > \frac{4\pi^2}{N_c[\sqrt{6(13 - 2 \log 2)} - 8]} \simeq 37,9 , \tag{6.32}$$

que se encuentra muy lejos del rango aceptado fenomenológicamente. Si en lugar de un factor de forma Gaussiano consideramos otras formas funcionales, se obtienen resultados similares (Carlomagno *et al.*, 2015b). Por ejemplo, para funciones Lorentzianas

$$g = \frac{1}{1 + (p^2/\Lambda^2)^n} , \tag{6.33}$$

con  $n \geq 2$ , a medida que  $n$  crece tanto el TCP como el LP tienden a localizarse a

menores temperaturas y eventualmente el LP desaparece. En general, para todas las parametrizaciones consideradas encontramos que el TCP esta a mayores temperaturas y menores densidades que el LP.

Finalmente, también se consideraron factores de forma instantáneos (esto es, que sólo dependen de variables espaciales). Los cálculos numéricos muestran que la posición del TCP y LP sigue en estos casos el mismo comportamiento antes descrito para los factores de forma covariantes.

Por lo tanto, dado que la posición del TCP (punto final de la línea de transición quiral de segundo orden) se ubica siempre a mayores temperaturas y menores densidades que el LP (punto donde dos fases homogéneas con simetría quiral rota y restaurada coexisten con una inhomogénea), la estructura de fases en estos modelos no locales es tal que la transición de primer orden entre fases homogéneas no está cubierta por una fase inhomogénea, favorecida energéticamente. El análisis detallado de los diagramas de fase inhomogéneos se realizará en la siguiente sección.

## 6.5. Condensados inhomogéneos en modelos no locales

En esta sección se estudiarán en detalle las fases inhomogéneas en un modelo nlNJL. Consideraremos, al igual que en la Sección 6.4, su versión con dos sabores de quarks no masivos e interacciones no locales de cuatro fermiones. Como hemos visto, la acción euclídea efectiva viene dada por la Ec. (6.11), y las interacciones están definidas por las corrientes de la Ec. (6.12). El modelo puede ser bosonizado introduciendo campos auxiliares  $\Phi_a(x)$ , conduciendo a la acción de la Ec. (6.13). De la misma manera que antes, se trabajará en la MFA y se integrarán los grados de libertad fermiónicos, obteniéndose la acción bosonizada a campo medio de la Ec. (6.15).

En la MFA, el potencial gran canónico por unidad de volumen, se define

$$\Omega_{\text{MFA}} = -\frac{T}{V} \log \mathcal{Z}_{\text{MFA}}, \quad (6.34)$$

donde  $\mathcal{Z}_{\text{MFA}}$  es la función de partición a campo medio, que se obtiene directamente de la Ec. (6.15). Si el estado fundamental no es homogéneo, el condensado de quarks puede calcularse introduciendo un campo auxiliar estático  $\varphi(\vec{x})$ . Se tiene

$$\langle \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}) \rangle = -\left. \frac{\delta \log \mathcal{Z}[\varphi]}{\delta \varphi(\vec{x})} \right|_{\varphi=0}, \quad (6.35)$$

donde  $\mathcal{Z}[\varphi]$  se obtiene a partir de  $\mathcal{Z}_{\text{MFA}}$  cambiando  $D_{\text{MFA}}^{-1}(x', x) \rightarrow D_{\text{MFA}}^{-1}(x', x) + \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})\varphi(\vec{x})$  en el propagador de la Ec. (6.14). Como en estas condiciones no necesariamente se conserva paridad, se pueden obtener valores no nulos para los condensados  $\langle \bar{\psi}(\vec{x}) \Gamma_3 \psi(\vec{x}) \rangle = \langle \bar{\psi}(\vec{x}) i\gamma_5 \tau_3 \psi(\vec{x}) \rangle$ . Éstos pueden obtenerse en forma análoga a la Ec. (6.35) sumando un término  $\delta^{(3)}(x' - x) i\gamma_5 \tau_3 \varphi(\vec{x})$  al propagador  $D_{\text{MFA}}^{-1}(x', x)$ .

Resultará conveniente considerar el propagador de la Ec. (6.14) en el espacio de momentos,

$$D_{\text{MFA}}(p', p; \vec{Q}) = \left[ (-\not{p} + m_c) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) + g \left( \frac{p + p'}{2} \right) \Gamma_a \bar{\Phi}_a(p' - p) \right]^{-1}, \quad (6.36)$$

donde  $g(p)$  es la transformada de Fourier del factor de forma  $\mathcal{G}(z)$ . De esta manera los condensados resultan

$$\langle \bar{\psi}(\vec{x}) \Gamma_a \psi(\vec{x}) \rangle = -T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \text{Tr} [\Gamma_a \tilde{D}(p', p)], \quad a = 0, 3, \quad (6.37)$$

donde se ha definido un propagador efectivo  $\tilde{D}(p', p)$  a partir de  $D_{\text{MFA}}(p', p; \vec{Q}) = (2\pi)\delta(p'_4 - p_4) \tilde{D}(p', p)$ . La cuarta componente de  $p'$  y  $p$  en la Ec. (6.37) es  $p'_4 = p_4 = \omega_n - i\mu$ , siendo  $\mu$  el potencial químico y  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$  las frecuencias fermiónicas de Matsubara.

### 6.5.1. Onda dual de densidad quiral (DCDW)

En la Sección 6.3 introdujimos la modulación espacial más simple para el condensado quiral y vimos su aplicación y efectos en un modelo sencillo de un quark que interactuaba con una DCDW (Nakano y Tatsumi, 2005) como campo externo. En este caso estudiaremos la presencia de una DCDW pero en el marco del modelo analizado anteriormente, es decir, un modelo no local de NJL con simetría  $SU(2)$  de sabor. La dependencia espacial del condensado viene dada por (Muller *et al.*, 2013)

$$\langle \bar{q}(\vec{x}) q(\vec{x}) \rangle \propto \cos(\vec{Q} \cdot \vec{x}), \quad \langle \bar{q}(\vec{x}) i\gamma_5 q(\vec{x}) \rangle \propto \sin(\vec{Q} \cdot \vec{x}), \quad (6.38)$$

para  $q = u$  y  $d$ . Por simplicidad, consideraremos una vez más el límite de masa nula  $m_c = 0$ . En este límite el comportamiento deseado para los condensados puede ser obtenido con la siguiente propuesta para los campos medios bosónicos (Muller *et al.*, 2013):

$$\Gamma_a \bar{\Phi}_a(p' - p; \vec{Q}) = \phi (2\pi)^4 \delta(p'_4 - p_4) \sum_{s=\pm} \frac{1 + s\gamma_5 \tau_3}{2} \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p} + s\vec{Q}). \quad (6.39)$$

En efecto, de la Ec. (6.39) se observa que el propagador efectivo resultará diagonal por bloques en el espacio de sabor, por lo cual podrá separarse en una suma de propagadores  $D_u$  y  $D_d$ , los cuales luego de invertir la Eq. (6.36) resultan (Carlomagno *et al.*, 2015c)

$$\begin{aligned} \tilde{D}_u(p', p; \vec{Q}) &= \begin{pmatrix} B_+(\frac{p'+p}{2}; \vec{Q}) \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p} - \vec{Q}) & A_-(p; \vec{Q}) \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \\ A_+(p; \vec{Q}) \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) & B_-(\frac{p'+p}{2}; \vec{Q}) \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p} + \vec{Q}) \end{pmatrix}, \\ \tilde{D}_d(p', p; \vec{Q}) &= \tilde{D}_u(p', p; -\vec{Q}), \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde  $A_{\pm}(p; \vec{Q})$  y  $B_{\pm}(\frac{p'+p}{2}; \vec{Q})$  son matrices de Dirac de  $2 \times 2$ , definidas por

$$\begin{aligned} A_{\pm}(p; \vec{Q}) &= \frac{1}{\Delta(p; \vec{Q})} \left\{ [p_4^2 + (\vec{p} \pm \vec{Q})^2 + \phi^2 g(p)^2] (ip_4 \mathbb{1} \pm \vec{p} \cdot \vec{\tau}) + \phi^2 g(p)^2 \vec{Q} \cdot \vec{\tau} \right\}, \\ B_{\pm}(t; \vec{Q}) &= \frac{\phi g(t)}{\Delta(t; \vec{Q})} \left\{ [t^2 - \vec{Q}^2/4 + \phi^2 g(t)^2] \mathbb{1} - i(\vec{t} \times \vec{Q} \pm t_4 \vec{Q}) \cdot \vec{\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

con

$$\Delta(p; \vec{Q}) = \left[ p^2 - \vec{Q}^2/4 + \phi^2 g(p)^2 \right]^2 + p^2 \vec{Q}^2 - (\vec{p} \cdot \vec{Q})^2. \quad (6.42)$$

De este modo, de la Ec. (6.37) se obtiene la dependencia espacial buscada,

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}(\vec{x}) u(\vec{x}) \rangle &= \langle \bar{d}(\vec{x}) d(\vec{x}) \rangle = F(Q^2) \cos(\vec{Q} \cdot \vec{x}), \\ \langle \bar{u}(\vec{x}) i\gamma_5 u(\vec{x}) \rangle &= -\langle \bar{d}(\vec{x}) i\gamma_5 d(\vec{x}) \rangle = F(Q^2) \sin(\vec{Q} \cdot \vec{x}), \end{aligned} \quad (6.43)$$

donde

$$F(Q^2) = -4 N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\phi g(p) [p^2 - Q^2/4 + \phi^2 g(p)^2]}{\Delta(p; \vec{Q})}, \quad (6.44)$$

con  $p_4 = \omega_n - i\mu$ .

Si el estado fundamental es homogéneo, los campos  $\bar{\Phi}_a(x)$  son uniformes y por paridad se tiene que  $\bar{\Phi}_a(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) \bar{\sigma}_a$ , con  $\bar{\sigma}_a = (\phi, \vec{0})$ . De esta manera el operador de la Ec. (6.36) puede ser invertido trivialmente obteniéndose la ecuación del gap de la Ref. (Gomez Dumm *et al.*, 2006)

$$\phi = 8 G N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g(p)^2 \phi}{p^2 + g(p)^2 \phi^2}. \quad (6.45)$$

Los condensados quirales en ese caso, pueden obtenerse tomando  $\vec{Q} = 0$  en las Ecs. (6.43) y (6.44),

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}u \rangle &= \langle \bar{d}d \rangle = -4 N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{g(p) \phi}{p^2 + g(p)^2 \phi^2}, \\ \langle \bar{u}i\gamma_5 \tau_3 u \rangle &= \langle \bar{d}i\gamma_5 \tau_3 d \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Estas expresiones han sido obtenidas en trabajos previos (Gomez Dumm y Scoccola, 2002; Gomez Dumm *et al.*, 2006), y coinciden (como era de esperarse) con el resultado de la Ec. (4.21) a  $T$  y  $\mu$  finitos en el límite de dos sabores, tomando  $Z(p) = 1$ .

Consideremos ahora el potencial termodinámico de la Ec. (6.34) para el caso de una DCDW. Si se integra la acción (6.15) sobre los campos auxiliares y sobre el espacio 4-dimensional empleando el ansatz de la Ec. (6.39) junto al propagador efectivo (6.40), y usando que  $\text{Tr} \log D_{\text{MFA}}^{-1} = \log \det D_{\text{MFA}}^{-1}$  se obtiene

$$\Omega_{\text{MFA}}(T, \mu) = -2 N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \Delta(p; \vec{Q}) + \frac{\phi^2}{2G}, \quad (6.47)$$

donde nuevamente la cuarta componente de  $p$  en  $\Delta(p; \vec{Q})$  es  $p_4 = \omega_n - i\mu$ . Al igual que en el potencial termodinámico estudiado en la Sección 5.2, la integral sobre  $p$  resulta divergente a grandes momentos. La manera de corregir dicho comportamiento, ya utilizada en capítulos anteriores, consiste en remover la contribución libre al potencial  $\Omega_{\text{free}} = \Omega_{\text{MFA}}(\phi = 0)$  para luego sumarla de forma regularizada, obteniendo (Carlomagno *et al.*, 2015c)

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{MFA}}^{\text{reg}} &= -2N_c T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \\ &\times \log \left[ 1 + \phi^2 g(p)^2 \frac{\phi^2 g(p)^2 + 2(p^2 - Q^2/4)}{(p^2 + Q^2/4)^2 - (\vec{p} \cdot \vec{Q})^2} \right] + \frac{\phi^2}{2G} + \Omega_{\text{free}}^{\text{reg}}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

donde

$$\Omega_{\text{free}}^{\text{reg}} = -N_c \left[ \frac{7\pi^2 T^4}{90} + \frac{T^2 \mu^2}{3} + \frac{\mu^4}{6\pi^2} \right]. \quad (6.49)$$

Si en una región del plano  $T - \mu$  se obtiene un mínimo absoluto del potencial termodinámico para un valor no nulo del momento  $\vec{Q}$ , dicha región corresponderá a una fase inhomogénea. Los valores a campo medio  $\phi$  y  $Q \equiv |\vec{Q}|$ , para estas fases pueden determinarse a partir de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\text{MFA}}^{\text{reg}}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial \Omega_{\text{MFA}}^{\text{reg}}}{\partial Q} &= 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

En la fase donde la simetría quiral esta restaurada, es decir cuando  $\phi = 0$ , el potencial termodinámico regularizado se reduce a la contribución libre, y resulta independiente de  $Q$ .

## 6.6. Diagramas de fase para factores de forma covariantes

Como ya se mencionó, en el límite quiral el modelo tiene una única constante de acoplamiento libre  $G$ . Para caracterizar el modelo, además es necesario especificar la forma funcional del factor de forma  $g(p)$ . Se procederá entonces de forma análoga a la Sección 6.4.

Para estudiar la dependencia con los parámetros de nuestro modelo consideraremos el rango  $2,8 < \bar{G} < 3,5$ , que corresponde a una variación de 60 MeV en el condensado si se fija el valor de la constante de decaimiento en  $f_\pi = 86$  MeV. En la Fig. 6.3 presentamos nuestros resultados numéricos, graficando con línea sólida en el panel izquierdo  $\bar{G}$  en función del cociente  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} / f_\pi$ , y en el derecho  $\Lambda$  como función del condensado de quarks en el rango de interés con  $f_\pi = 86$  MeV. Además, en la figura incluimos con línea de trazos los resultados correspondientes a un factor de forma también exponencial, pero cuya dependencia con el momento es a través de las componentes espaciales, es

decir  $g(\vec{p}) = \exp(\vec{p}^2/\Lambda^2)$ . Este tipo de factores de forma instantáneos conducen, como es discutido en la Ref. (Gomez Dumm *et al.*, 2006), a valores mayores (menores) para el condensado de quarks (*cutoff*).

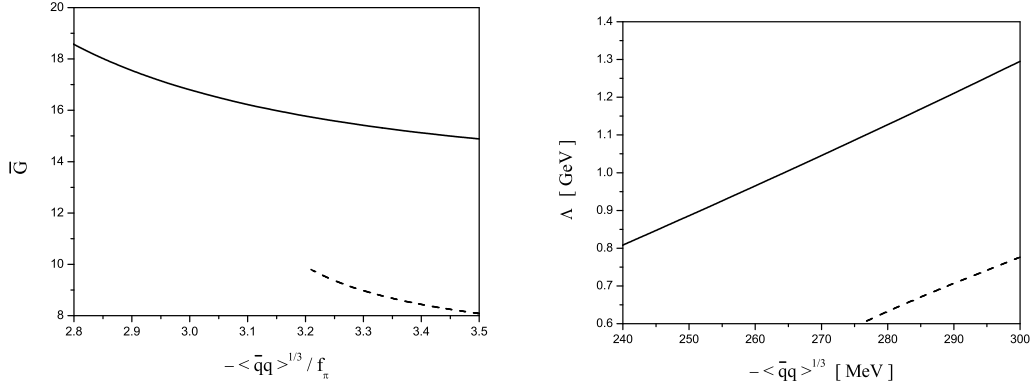


Figura 6.3: En los paneles izquierdo y derecho se grafican los resultados numéricos para  $\bar{G}$  y  $\Lambda$  como función del cociente  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} / f_\pi$  y de  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ , respectivamente, para  $f_\pi = 86$  MeV. Líneas sólidas y de trazos corresponden a factores de forma exponenciales covariantes e instantáneos, respectivamente.

Consideremos ahora un sistema hadrónico a temperatura  $T$  y potencial químico  $\mu$ , para el cual queremos analizar las transiciones de fase en el contexto del modelo descrito previamente. En general se pueden encontrar fases con simetría quiral rota o restaurada, y regiones donde las fases homogéneas o inhomogéneas sean las favorecidas energéticamente. Los resultados para el factor de forma Gaussiano de la Ec. (6.28) se presentan en la Fig. 6.4 (Carlomagno *et al.*, 2015c), donde hemos considerado cuatro escenarios que surgen de variar el condensado en el rango discutido anteriormente. Los parametrizaciones correspondientes han sido denominadas PI, PII, PIII y PIV, y corresponden a  $f_\pi = 86$  MeV con condensados de quarks  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240, 247, 270$  y  $300$  MeV, respectivamente.

En los paneles izquierdos de la Fig. 6.4 mostramos los diagramas de fases en el plano  $(\mu, T)$ , las curvas de transición de fase y los puntos críticos para cada parametrización, mientras que en los paneles derechos graficamos para cada caso el valor de campo medio  $\phi$  y el momento  $Q$  para temperatura cero, como función del potencial químico.

En todos los diagramas se distingue para valores bajos de temperatura y potencial químico una fase hadrónica con simetría quiral rota (HCB) delimitada por una curva de transición de fase que a  $T = 0$  toma un valor de potencial químico crítico  $\mu_c(0)$ . A mayores densidades, pero aún a bajas temperaturas, se encuentra en todos los casos una fase inhomogénea (IH) con simetría quiral parcialmente restaurada (para la parametrización PIV esta fase aparece a potenciales químicos que quedan fuera del rango graficado en la Fig. 6.4). A medida que aumenta la temperatura se observa la restauración de la simetría quiral por medio de una transición de segundo orden entre



la fase inhomogénea IH a una homogénea con simetría quiral restaurada (HCR) y via transiciones de primer o segundo orden entre fases homogéneas (HCB a HCR).

	$(-\langle\bar{q}q\rangle^{\text{ch}})^{1/3}$	$\Lambda$	$\phi$	$\mu_c(0)$	$\mu_c''(0)$	$\mu_c'(0)$
PI	240	808	338	274	-	-
PII	247	863	315	266	288	295
PIII	270	1045	264	249	-	470
PIV	300	1295	227	236	-	629

Tabla 6.1: Parámetro  $\Lambda$  de los factores de forma, condensados quirales de quarks  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$  y valor a campo medio  $\phi$  a  $T = \mu = 0$ , y potenciales químicos críticos a temperatura cero para las parametrizaciones graficadas en la Fig. 6.4. Todos los valores están en MeV.

Comencemos por analizar el panel superior de la Fig. 6.4 correspondiente a la PI, donde las distintas fases están indicadas por las zonas sombreadas, y las curvas de transición por líneas sólidas y a trazos para transiciones de primer y segundo orden, respectivamente. A temperaturas del orden de 100 MeV y potenciales químicos bajos uno encuentra, como ya se anticipó, una fase hadrónica homogénea (HCB) donde la simetría quiral esta espontáneamente rota. Al aumentar  $\mu$  tiene lugar una transición de segundo orden a una fase de simetría quiral restaurada (HCR). Si la temperatura disminuye, esta transición se vuelve de primer orden. El punto sobre la curva de transición de fase que separa ambas regiones es el punto tricrítico (TCP). Si continuamos bajando  $T$  sobre la curva de transición, a una temperatura  $T_{3P} \simeq 20$  MeV se encuentra un punto triple (3P), donde la curva de transición de primer orden homogénea se encuentra con una curva de transición de segundo orden inhomogénea. Para  $T > T_{3P}$ , a un dado valor  $\mu_c(T)$ , el sistema pasa de la fase con simetría quiral rota HCB a la restaurada homogénea HCR, mientras que para  $T < T_{3P}$  el sistema pasa a una fase con simetría quiral parcialmente restaurada IH. Por otro lado, si se aumenta la temperatura a potencial químico fijo en la fase IH, uno se encuentra con una transición de segundo orden hacia la fase HCR. La curva de transición correspondiente, que pasa por el punto triple 3P, puede continuarse dentro de la fase HCB (línea de puntos y trazos en la figura), delimitando una región donde el potencial termodinámico posee un mínimo local que corresponde a una fase inestable IH. Finalmente, en la figura se denotan con línea punteada las curvas espinodales de segundo orden homogéneas.

La transición de primer orden de la fase HCB a la IH se encuentra ilustrada en la Fig. 6.5, donde se grafica el potencial termodinámico para los valores  $\mu = 260$  y  $\mu = 280$  MeV en los paneles superior e inferior, respectivamente (es decir, a ambos lados del punto de transición  $\mu_c(0) = 274$  MeV). Aquí ocurre un cambio del mínimo absoluto del potencial donde  $\phi \simeq 340$  MeV,  $Q = 0$  (panel superior) hacia un punto en el que  $\phi$  se reduce a 50 MeV con  $Q \simeq 450$  MeV. Esto mismo puede distinguirse en el panel derecho de la Fig. 6.4, donde se grafica para temperatura cero el valor de  $\phi$  y  $Q$  como función de  $\mu$ . Se observa en estas figuras como para las diferentes parametrizaciones el valor de  $\phi$  en la fase HCB decrece a medida que aumenta el valor del condensado

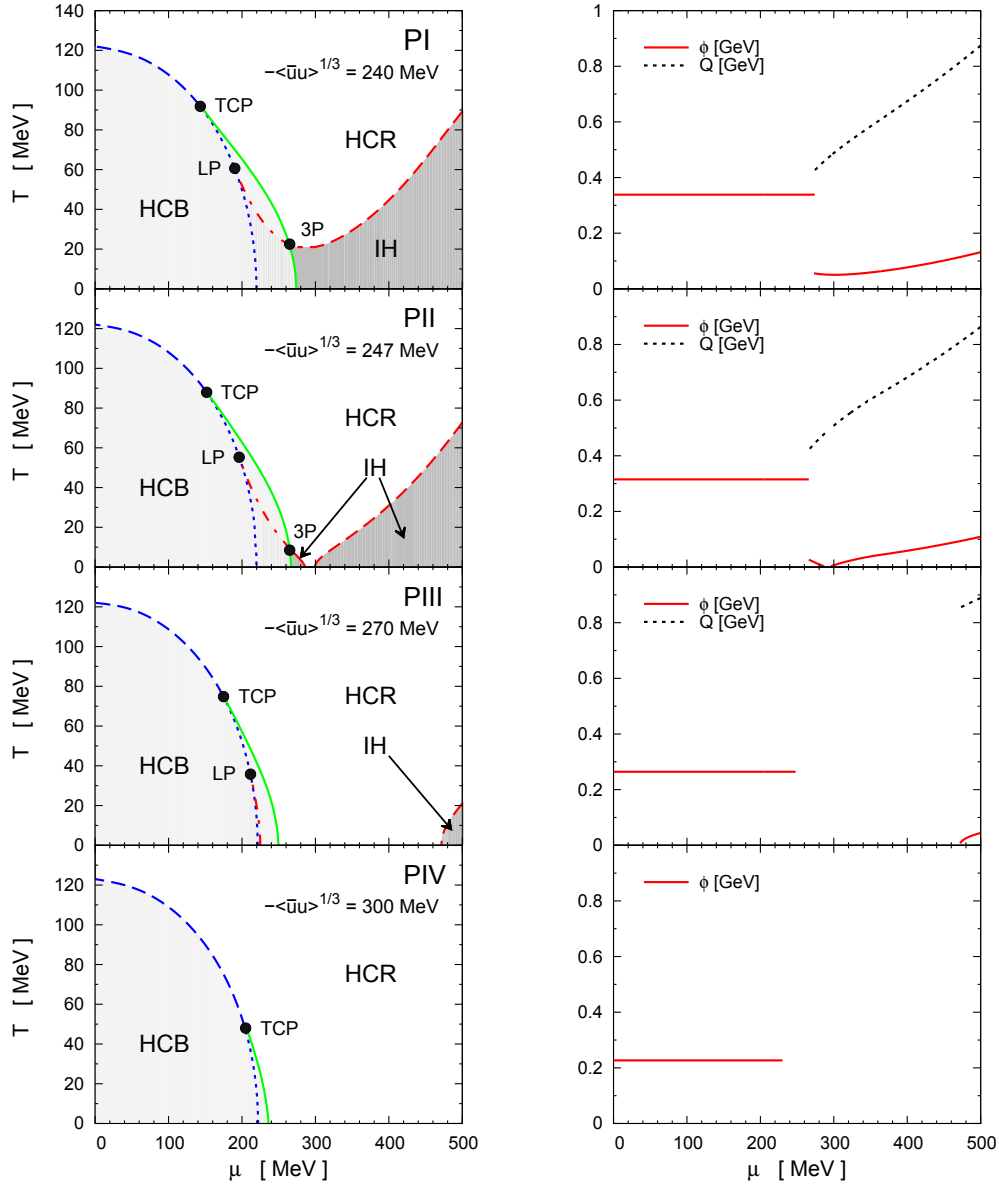


Figura 6.4: En el panel derecho se grafica el valor de expectación de vacío  $\phi$  y momento  $Q$  como función del potencial químico  $\mu$  para un factor de forma Gaussiano a  $T = 0$  para cuatro parametrizaciones distintas con  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 240, 247, 270$  y  $300$  MeV para PI, PII, PIII y PIV, respectivamente. En el izquierdo, se muestran los diagramas de fases en el plano  $(T, \mu)$  para cada una de las parametrizaciones mencionadas.

de quarks, a la vez que aumenta la discontinuidad en  $Q$  cuando la simetría quiral se restaura parcialmente.

Para el caso de la PII, el condensado es algo mayor que para la PI,  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 247$  MeV. En estas condiciones la región abarcada por la fase IH se divide en dos, una pequeña área delimitada por la curva de transición  $\mu_c''(T)$  y otra acotada por la curva  $\mu_c'(T)$ , denominadas “isla” y “continente”, respectivamente. En las restantes dos situaciones, PIII y PIV, que corresponden a condensados mayores (270 y 300 MeV),

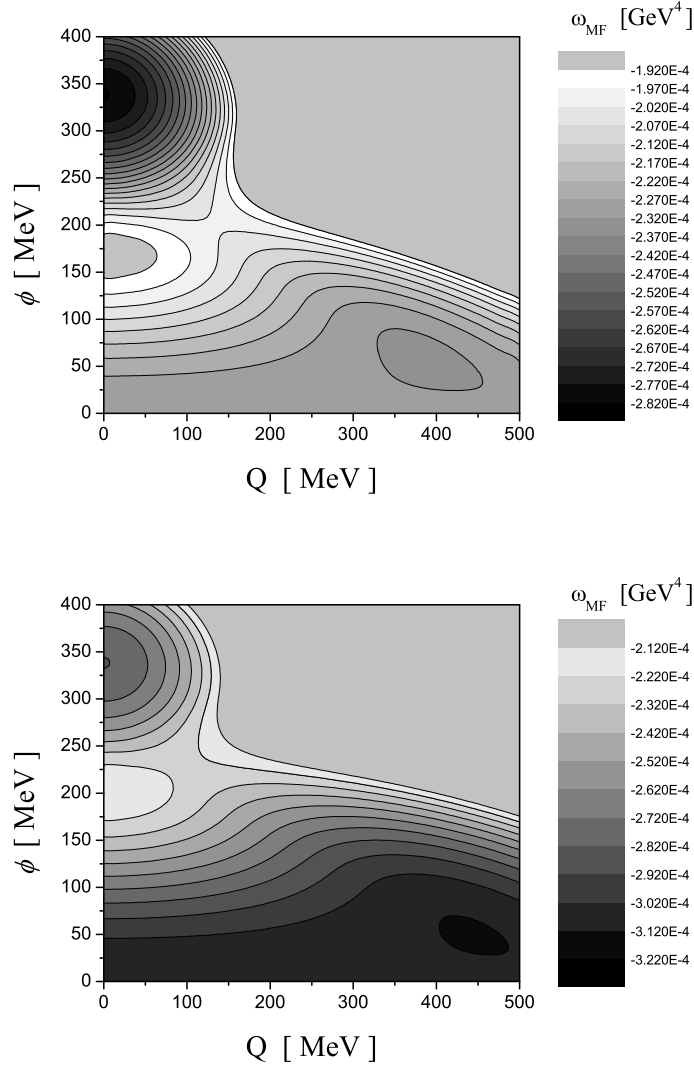


Figura 6.5: Curvas de nivel para el potencial termodinámico  $\Omega_{MFA}^{\text{reg}}$  para un modelo quiral no local a temperatura cero y potenciales químicos finitos cercanos al punto de transición de primer orden entre una fase homogénea y una inhomogénea. Los gráficos corresponden a la PI con  $\mu = 260$  MeV (panel superior) y  $\mu = 280$  MeV (panel inferior).

se distingue un comportamiento en el que la “isla” desaparece bajo la fase HCB y el “continente” es empujado hacia potenciales químicos mayores (notar en la Fig. 6.4 que para la PIV la fase IH queda fuera del rango graficado).

Es importante mencionar que en estos modelos el punto de Lifshitz (LP) (donde la fase HCB y la HCR se encuentran con la IH) se ubica en todos los casos analizados “por debajo” de la fase hadrónica, siempre energéticamente favorecida frente a la homogénea restaurada e inhomogénea rota.

Las características de los diagramas de fases analizados pueden ser comparadas con aquéllos obtenidos en el marco del modelo local NJL, Ref. (Nickel, 2009a), o modelos de Quarks-Mesones (QM), Ref. (Carignano *et al.*, 2014), donde la posición del TCP y el

LP pueden coincidir o no, dependiendo de la parametrización. Sin embargo, para todos los casos la fase IH se extiende arbitrariamente a medida que crece el potencial químico. Estas condiciones para las regiones inhomogéneas como así también la presencia de los TCP y LP, se mantienen independientemente del modelo o la forma de regularización, y por lo tanto constituyen predicciones robustas sobre la fenomenología del diagrama de fases de QCD. A diferencia de los modelos locales NJL o QM, en nuestro caso encontramos también un punto triple donde se unen las fases homogéneas e inhomogéneas con simetría quiral rota con una homogénea de simetría quiral restaurada. Este punto triple desaparece para parametrizaciones que conducen a condensados de quarks grandes, desplazándose la región de fase inhomogénea hacia potenciales químicos mayores.

Por último, en relación con los factores de forma instantáneos, se encontró un comportamiento cualitativamente similar al de los factores de forma covariantes. Es decir, los diagramas de fases obtenidos de fijar condensados de quarks con diferencias de  $\sim 40$  MeV resultan comparables entre sí (Carlomagno *et al.*, 2015c). Por ejemplo, el diagrama correspondiente a la parametrización PI de la Fig. 6.4 resulta equivalente al de un modelo instantáneo cuyo valor de condensado es  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3} = 270$  MeV, mientras que un diagrama de fases similar al de la PII se obtiene para un modelo instantáneo cuya parametrización conduce a  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3} = 285$  MeV. Al igual que para los factores de formas covariantes, la fase IH obtenida de parametrizaciones que corresponden a valores crecientes de condensado de quarks, se desplaza a mayores valores de potencial químico.

## Capítulo 7

# Resumen y Conclusiones

*Yo qué sé.*

Warren Sánchez. Les Luthiers.

A lo largo de esta Tesis Doctoral estudiamos distintos aspectos del comportamiento de la materia fuertemente interactuante a temperatura y potencial químico finitos en el marco de modelos de quarks relativistas con interacciones no locales. Como aspectos sobresalientes de este análisis pueden destacarse por una parte la incorporación de un acoplamiento efectivo entre quarks y gluones y la identificación de un parámetro de orden asociado al confinamiento, y por otro lado el estudio de posibles fases inhomogéneas donde los condensados quirales de quarks están modulados espacialmente.

En el primer capítulo realizamos una introducción general a los temas desarrollados a lo largo de la Tesis. En el Cap. 2 repasamos algunos conceptos de la Cromodinámica Cuántica (QCD), en particular aquéllos relacionados con la ruptura espontánea de las simetrías vinculadas a las transiciones de fase. Luego, en el Cap. 3 introducimos las teorías efectivas como una herramienta para estudiar la fenomenología de hadrones a bajas energías. En particular consideramos el modelo de Nambu y Jona-Lasinio (NJL), mostrando que permite describir adecuadamente la ruptura espontánea de la simetría quiral y la aparición de los pseudobosones de Goldstone. Finalmente notamos que es posible obtener una descripción más realista de las interacciones entre quarks teniendo en cuenta interacciones de tipo no local.

En estos tres primeros capítulos presentamos las bases fundamentales para lo que es el aporte original de esta Tesis, que puede dividirse en tres partes. En el Cap. 4 analizamos un modelo de quarks con interacciones no locales con simetría  $SU(3)$  de sabor, fijando los parámetros libres de la teoría, es decir, las constantes de acoplamiento, las masas corrientes de los quarks y los factores de forma. Luego en el Cap. 5 consideramos en este marco sistemas con temperatura y potencial químico finitos, estudiando el correspondiente diagrama de fases. Finalmente, en el Cap. 6 estudiamos un modelo tipo NJL para dos sabores de quarks con interacciones no locales donde los condensados quirales de quarks están modulados espacialmente, lo cual conduce a la presencia de

fases inhomogéneas.

El análisis del Cap. 4 está centrado en una extensión a tres sabores de quarks del modelo de NJL introducido en el Cap. 3, incluyendo interacciones no locales y un acoplamiento que conduce a la renormalización de la función de onda (WFR) de quarks. El modelo incluye asimismo una interacción de seis quarks que genera la ruptura de la simetría  $U(1)_A$ . Trabajando en la aproximación de campo medio, obtuvimos las masas dinámicas de los quarks y los condensados quirales, mientras que a segundo orden en la acción efectiva determinamos las masas de los mesones escalares y pseudoescalares, los ángulos de mezcla para el sector  $\eta - \eta'$  y las constantes de decaimiento débil de los mesones pseudoescalares. Consideramos dos tipos de parametrización para las interacciones: una de ellas (PI), basada en el frecuentemente utilizado factor de forma exponencial; la segunda (PII) determinada a partir del ajuste de las funciones de masa  $M(p)$  y renormalización de la función de onda  $Z(p)$  de quarks a resultados obtenidos en LQCD.

Los resultados encontrados para las propiedades de los mesones livianos (ver Sección 4.3) se encuentran en un buen acuerdo con los valores obtenidos experimental o fenomenológicamente, y a su vez resultan cualitativamente similares entre ambas parametrizaciones (ver Tabla 4.2).

En el Cap. 5 comenzamos describiendo el formalismo necesario para estudiar sistemas hadrónicos a temperatura y potencial químico finitos y mostramos cómo acoplar los grados de libertad fermiónicos al loop de Polyakov en lo que llamamos “modelo nIPNJL”. Presentamos tres formas alternativas para el potencial termodinámico de Polyakov: una polinómica basada en el ansatz de Ginzburg-Landau, otra basada en la forma logarítmica de la medida de Haar de integración asociada con el grupo  $SU(3)$  de color, y finalmente un potencial efectivo “mixto” que incluye un término logarítmico y uno cuadrático con un coeficiente que decrece en forma exponencial con la temperatura. Se analizó también una variación de los potenciales de PL donde, además de considerar la presencia de gluones, se tiene en cuenta el efecto de los quarks sobre los primeros.

En la Sección 5.2 estudiamos dicho modelo a potencial químico cero con el objeto de analizar la restauración de la simetría quiral y la transición de deconfinamiento en función de la temperatura y comparar los resultados con los obtenidos en cálculos de LQCD. Encontramos que ambas transiciones ocurren como crossover a la misma temperatura crítica, de manera similar que en LQCD. Dicha temperatura depende fuertemente del parámetro de escala  $T_0$  de los potenciales de PL. Para  $T_0 \simeq 200$  MeV, se obtuvo una temperatura crítica de aproximadamente 170 MeV, resultado que se encuentra en buen acuerdo con las estimaciones de lattice QCD para tres sabores de quarks dinámicos. Para comparar las parametrizaciones (que a temperatura cero arrojan resultados similares) analizamos la energía de interacción y la entropía como función de la temperatura, encontrando que la parametrización PII muestra un mejor acuerdo con los resultados de lattice QCD. En relación con los potenciales efectivos de Polyakov, observamos que el potencial logarítmico conduce a transiciones más abruptas

en comparación con el polinómico o el “mixto”, mientras que los “mejorados” son los que muestran las transiciones más suaves, y en mejor acuerdo con LQCD.

En la parte final de este capítulo, Sección 5.3, presentamos los diagramas de fases en el plano  $T - \mu$  para las parametrizaciones PI y PII. Estudiamos la restauración de la simetría quiral a temperatura cero, donde el Polyakov se desacopla del resto de la teoría, reduciéndose el modelo a uno del tipo NJL no local. Encontramos que la transición es de primer orden para ambas parametrizaciones, y que los potenciales químicos críticos obtenidos resultan próximos entre sí. Luego analizamos el diagrama de fases completo, estudiando la dependencia de los parámetros de orden con la temperatura para valores fijos de densidad bariónica. Las transiciones para potenciales químicos bajos, como se esperaba, resultan de segundo orden, y a medida que el potencial químico aumenta éstas cambian su carácter y se vuelven de primer orden. El punto sobre la línea de transición donde esto ocurre es llamado “punto crítico final” (CEP). En los diagramas de fase obtenidos para ambas parametrizaciones y para los potenciales de PL logarítmico y polinómico se observa que a temperatura cero, cuando el Polyakov se desacopla, las líneas de transición de fase de primer orden tienden al mismo valor de potencial químico crítico. Mientras que cuando el potencial químico va a cero, las curvas de transición de tipo crossover se acercan a las temperaturas críticas encontradas en la Sección 5.2.

El Cap. 6 se puede desglosar en tres partes: la primera donde se introducen las fases inhomogéneas y se explican las herramientas teóricas necesarias para abordar su análisis, y luego dos secciones donde investigamos la presencia de estas fases en un modelo tipo NJL con simetría  $SU(2)$  de sabor en el límite de quarks de masa nula y con interacciones no locales. Las fases inhomogéneas surgen como consecuencia de considerar que valores de expectación de vacío de los campos que no satisfacen invarianza traslacional puedan ser energéticamente favorecidos.

En la Sección 6.4 llevamos a cabo un análisis generalizado de Ginzburg-Landau que implica desarrollar el potencial termodinámico en función de los parámetros de orden y sus gradientes en la vecindad de una transición de segundo orden. Este estudio no requiere la especificación de la forma particular de la inhomogeneidad y, por lo tanto, puede efectuarse en forma muy general. Mediante este desarrollo caracterizamos la posición relativa en el plano  $T - \mu$  entre el punto tricritico (TCP), que es el punto donde la curva de transición de fase de primer orden se encuentra con la de segundo orden, y el punto de Lifshitz (LP) que es aquél donde se unen dos fases homogéneas y una inhomogénea. Encontramos que para todas las parametrizaciones fenomenológicamente aceptables el TCP se ubica a mayores temperaturas y menores potenciales químicos que el LP. Consecuentemente, la estructura de fases en este modelo es tal que la transición entre fases homogéneas (y en particular el TCP) no está cubierta por una fase inhomogénea, favorecida energéticamente. Situación que difiere de la versión local del NJL donde el TCP y el LP coinciden, o de los modelos de Quarks-Mesones donde la posición relativa depende de la parametrización elegida.

Finalmente, en la Sección 6.6 obtuvimos los diagramas de fases inhomogéneos para

el modelo NJL no local con simetría  $SU(2)$  de sabor, empleando factores de forma exponenciales, tanto covariantes como instantáneos. La inhomogeneidad fue introducida a través de la ruptura de la isotropía del vacío de la teoría, modulando espacialmente el condensado de quarks con una onda dual de densidad quiral, esto es, considerando un condensado que “rota” a lo largo del círculo quiral. Obtuvimos que para todos los escenarios estudiados la posición y forma de las fases inhomogéneas dependen fuertemente de los parámetros del modelo. Es decir, tanto para factores de forma instantáneos como covariantes la fase inhomogénea se desplaza hacia potenciales químicos mayores para modelos que conducen a valores mayores del condensado quiral  $-\langle\bar{q}q\rangle^{-1/3}$ , con  $f_\pi$  fija.

Para todas las parametrizaciones analizadas determinamos la posición del punto tricrítico (TCP), que separa las curvas de transición de primer y segundo orden entre fases homogéneas. También encontramos un punto triple (3P), donde se juntan la fases homogéneas con simetría quiral rota y restaurada con la inhomogénea. Para distintas parametrizaciones este punto se va trasladando sobre la curva de primer orden hasta desaparecer cuando una de las regiones de fase inhomogénea es cubierta completamente por la región hadrónica. Simultáneamente, otra región de fase inhomogénea tiene lugar para potenciales químicos grandes y temperaturas bajas. En estos modelos el LP siempre se ubica “por debajo” de la región hadrónica, siempre energéticamente favorecida frente a la homogénea restaurada e inhomogénea rota.

Es importante mencionar que el comportamiento a grandes potenciales químicos (que es encontrado en distintos modelos efectivos, independientemente de la elección de parámetros o de regularización) debe ser enmarcado por los alcances de estas teorías. Para  $\mu$  grandes es esperable la presencia de fases con superconductividad de color que deberían ser las energéticamente favorecidas, y por lo tanto el diagrama de fases podría verse modificado considerablemente.



## Apéndice A

# Parametrización de un modelo quiral nNJJL con simetría de sabor $SU(2)$

Como se mencionó en el Cap. 6, un modelo no local de NJL en el límite quiral sólo tiene como parámetros libres la constante de acoplamiento  $G$  en la acción euclídea de la Ec. (6.11) y la forma funcional de los factores de forma que determinan la no localidad de las interacciones en las corrientes fermiónicas. Si se elige la dependencia funcional de la Ec. (6.28), el parámetro a fijar en el factor de forma es  $\Lambda$ , que determina el rango de la interacción en el espacio de momentos. De tal manera, en el límite de masa nula sólo hay dos parámetros libres ( $G$  y  $\Lambda$ ), por lo que se requieren dos observables para fijarlos. Es natural elegir la constante de decaimiento débil del pion  $f_\pi = 86$  MeV y el condensado quiral de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle = -(270 \text{ MeV})^3$ , cuyos valores fenomenológicos pueden encontrarse en la Ref. (Aoki *et al.*, 2014).

La expresión para el condensado de quarks a temperatura cero puede ser obtenida directamente de la Ec. (6.46),

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4 N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g(p) \sigma}{p^2 + g(p)^2 \sigma^2}, \quad (\text{A.1})$$

mientras que para la constante de decaimiento débil del pion seguiremos el análisis realizado en la Ref. (Gomez Dumm *et al.*, 2006) donde se procede de forma análoga al cálculo efectuado en la Sección 4.1. De dicho procedimiento se obtiene

$$f_\pi = Z_\pi^{1/2} \frac{F(-m_\pi^2) - F(0)}{m_\pi^2}, \quad (\text{A.2})$$

con  $F(p^2)$  definido por

$$F(p^2) = m_c J(p^2) + \sigma K(p^2), \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\begin{aligned} J(p^2) &= 8 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g(q^2) \frac{[(q^+ \cdot q^-) + \Sigma(q^+) \Sigma(q^-)]}{[(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)]}, \\ K(p^2) &= 8 N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2(q^2) \frac{[(q^+ \cdot q^-) + \Sigma(q^+) \Sigma(q^-)]}{[(q^+)^2 + \Sigma^2(q^+)] [(q^-)^2 + \Sigma^2(q^-)]}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

siendo  $q^\pm = q \pm p/2$  y  $\Sigma(p) = m_c + \sigma g(p)$ , que resulta análoga a la Ec. (4.13) cuando se toma  $Z(p) = 1$ . En el límite quiral ( $m_c \rightarrow 0$ ), la Ec. (A.2) se reduce a

$$f_{\pi,0} = Z_{\pi,0}^{1/2} \left[ \frac{F_0(-p^2) - F_0(0)}{p^2} \right]_{p^2=0} = -\sigma_0 Z_{\pi,0}^{1/2} \left. \frac{\partial K_0(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}, \quad (\text{A.5})$$

donde el subíndice 0 denota el límite quiral y  $Z_{\pi,0}^{1/2}$  puede obtenerse de una expresión equivalente a la Ec. (4.33). Calculando la derivada, la Ec. (A.5) puede reescribirse como

$$f_{\pi,0}^2 = 2N_c \sigma_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2 g^2(q) - q^2 g(q) g'(q)}{[q^2 + \sigma_0^2 g^2(q)]^2}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente el sistema de ecuaciones a resolver se completa con la ecuación del gap (6.45). Si tomamos para  $g(p)$  la forma funcional Gaussiana de la Ec. (6.28), se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{N_c}{\pi^2} G \Lambda^2 \int dx x^3 \frac{e^{-2x^2}}{x^2 + \sigma^2 e^{-2x^2}}, \\ \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\Lambda^3} &= -\frac{N_c}{2\pi^2} \sigma \int dx x^3 \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \sigma^2 e^{-2x^2}}, \\ \frac{f_\pi^2}{\Lambda^2} &= \frac{N_c}{2\pi^2} \sigma^2 \int dx x^3 \frac{e^{-x^2} (1 + x^2/2)}{(x^2 + \sigma^2 e^{-2x^2})^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde se ha definido la variable adimensional  $x = p/\Lambda$ . Fijados los valores de  $f_\pi$  y  $\langle \bar{q}q \rangle$ , a partir de este sistema acoplado de ecuaciones se obtienen los parámetros  $G$  y  $\Lambda$ , necesarios para fijar el modelo.

## Apéndice B

# Cálculo de las sumas de Matsubara

En este Apéndice mostraremos como realizar las sumas de Matsubara presentes en la Ec. (6.22). Estas sumatorias son producto del desarrollo del potencial termodinámico [ver Ec. (6.21)] en potencias del parámetro de orden de la simetría quiral y sus gradientes en el marco de un análisis generalizado de Ginzburg-Landau cerca de la transición de fase.

Para calcular las mencionadas sumas nos basaremos en el estudio realizado en la Ref. (General *et al.*, 2001), donde se emplea el teorema de Cauchy para transformar la suma sobre frecuencias discretas en una integral más una contribución de los residuos en los polos de la función. Consideremos entonces la siguiente suma sobre la función  $F[q_n^2]$ ,

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[(\omega_n - i\mu)^2 + \vec{q}^2] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} I(\vec{q}^2) . \quad (\text{B.1})$$

Para evaluar la suma en la Ec. (B.1) es conveniente fijar  $\vec{q}$  y definir la función compleja  $\mathcal{F}(z) \equiv F[(-iz - i\mu)^2 + \vec{q}^2]$ , con lo cual el argumento de la suma viene dado por  $\mathcal{F}(i\omega_n)$ . Introduciremos además una función auxiliar,

$$f(z) = [1 + \exp(z/T)]^{-1} , \quad (\text{B.2})$$

que tiene polos en  $z_n = i\omega_n$ , siendo  $-T$  el residuo en dichos polos. Con lo cual la suma que queremos realizar resulta análoga a sumar sobre los residuos en los polos de la función  $-\mathcal{F}(z)f(z)$ . De acuerdo con el teorema de Cauchy, podemos escribir

$$I(\vec{q}^2) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(i\omega_n) = \frac{i}{2\pi} \int_{C_1} dz \mathcal{F}(z) f(z) - \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} dz \mathcal{F}(z) f(z) , \quad (\text{B.3})$$

donde hemos reemplazado el contorno rectangular que encierra todos los polos de la función  $f(z)$  por dos contornos  $C_1$  y  $C_2$ , ilustrados en la Fig. B.1.

Los coeficientes presentes en la Ec. (6.22) pueden ser condensados en una única

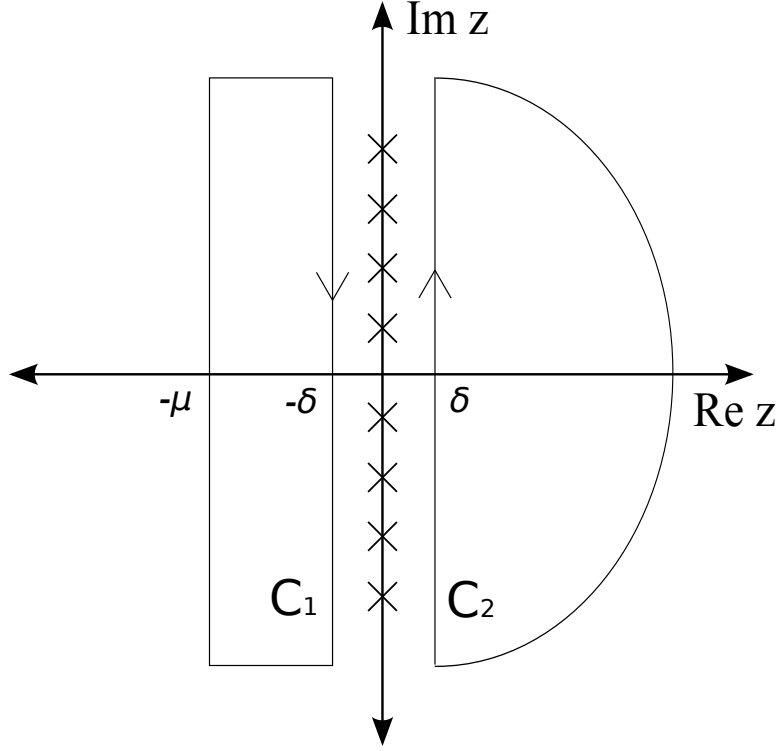


Figura B.1: Contorno de integración en el plano complejo  $z$ . Se indican con cruces los polos de la función  $f(z)$  en  $z_n = i\omega_n$ . El contorno cerrado que encierra dichos polos puede ser reemplazado por los contornos  $C_1$  y  $C_2$ .

función  $I_{mn}(\vec{q}^2)$ , definida como

$$I_{mn}(\vec{q}^2) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{g((\omega_k - i\mu)^2 + \vec{q}^2)^m}{[(\omega_k - i\mu)^2 + \vec{q}^2]^n}, \quad (\text{B.4})$$

de modo que a partir de la Ec. (B.3) se tiene

$$I_{mn}(\vec{q}^2) = \frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty+\delta}^{i\infty+\delta} dz \mathcal{F}(z) f(z) - \frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} dz \mathcal{F}(z) f(z), \quad (\text{B.5})$$

Luego de realizar las integrales en el plano complejo  $z$  se obtiene

$$I_{mn}(\vec{q}^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega^2 + \vec{p}^2)^m}{(\omega^2 + \vec{p}^2)^n} + \text{Res} \frac{\mathcal{F}(z)}{1 + e^{z/T}} \Big|_{z=-\mu+p, p>\mu} \\ + \text{Res} \frac{\mathcal{F}(z)}{1 + e^{z/T}} \Big|_{z=-\mu+p, p<\mu} - \text{Res} \frac{\mathcal{F}(z)}{1 + e^{z/T}} \Big|_{z=-\mu-p}, \quad (\text{B.6})$$

donde se han incluido los residuos en los polos de la función  $\mathcal{F}(z)$ . Aquí hemos supuesto que cuando el contorno del camino de integración es tal que  $\text{Re } z \rightarrow \infty$ , la función  $|\mathcal{F}(z)| \rightarrow 0$ , lo cual no necesariamente es cierto. En cualquier caso, la Ec. (B.6) resulta una buena aproximación para  $T, \mu \ll \Lambda$ .

Consideremos, por ejemplo, el coeficiente  $\alpha_2$  de la Ec. (6.22), que resulta equivalente

a considerar la función  $I_{21}$ . Se tiene

$$I_{21}(\vec{q}^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega^2 + \vec{p}^2)^2}{(\omega^2 + \vec{p}^2)} + \frac{g(0)^2}{2p} (n_+(z) + n_-(z)) , \quad (\text{B.7})$$

donde hemos introducido las funciones número de ocupación  $n_{\pm}(z)$ , definidas por

$$n_{\pm}(z) = \frac{1}{1 + \exp[(z \mp \mu)/T]} . \quad (\text{B.8})$$

Finalmente y luego integrar los números de ocupación, el coeficiente  $\alpha_2$  resulta,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{G} - 8 N_c \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dq q^2 I_{21}(q^2) = \\ &= \frac{1}{G} + \frac{N_c}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^2}{3} T^2 + \mu^2 - \int_0^{\infty} dq q g^2(q^2) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De manera análoga es posible calcular los coeficientes restantes de la Ec. (6.29), obteniendo de esta manera un resultado semi-analítico para las sumatorias presentes en los coeficientes de GL de la Ec. (6.22). Aunque la expresión en la Ec. (B.9) no es exacta, en el entorno a la transición de fase provee una muy buena aproximación a aquellos resultados obtenidos realizando numéricamente las sumas sobre las frecuencias de Matsubara.



# Agradecimientos

*No man is an island entire of itself; every man  
is a piece of the continent, a part of the main.*

John Donne

Tal vez por ser estos párrafos los más personales, resulten en los más difíciles de escribir. Traducir a palabras un manojito de sentimientos es un ideal demasiado ambicioso, más aún para los que nos sentimos cómodos en la exactitud de los números. En este sentido, entiéndase lo que sigue como una primera aproximación.

Quiero comenzar agradeciendo a Debora Peres Menezes, a Esteban Calzetta y a Alejandro Mariano, quienes muy gentilmente aceptaron la tarea de evaluar esta Tesis Doctoral.

También dar las gracias a mi director, Daniel Gómez Dumm. Cuya dedicación constante y motivación cuasi endémica constituyeron los pilares fundamentales sobre los que este trabajo de investigación se edificó.

Agradecer al Departamento de Física y a la Universidad Nacional de la Plata por formarme en esta hermosa ciencia que es la Física. También expresar mi gratitud al Instituto de Física La Plata y al CONICET por el apoyo y el financiamiento brindado durante estos casi cinco años.

Imposible no recordar a los amigos, compañeros y otros fulanos con los que transité distintas etapas de este largo recorrido, que también es mi vida. Deseo agradecerles la compañía incondicional, las discusiones, charlas y divagues. Tan oportunos como necesarios.

Las palabras no son, ni serán suficientes. Cuando los cruce por ahí, un beso y un abrazo harán el resto.

Para un primer intento una página esta bien, dos sería un exceso.





# Bibliografía

*Yo me atrevo a insinuar esta solución del antiguo problema: La biblioteca es ilimitada y periódica.*

La Biblioteca de Babel. Jorge Luis Borges.

- ABUKI, H., ISHIBASHI, D. y SUZUKI, K. Crystalline chiral condensates off the tricritical point in a generalized Ginzburg-Landau approach. *Phys.Rev.*, vol. D85, página 074002, 2012. doi: [10.1103/PhysRevD.85.074002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.074002).
- ALFORD, M. Color superconducting quark matter. *arXiv preprint hep-ph/0102047*, 2001.
- ALFORD, M. G., BOWERS, J. A. y RAJAGOPAL, K. Crystalline color superconductivity. *Phys.Rev.*, vol. D63, página 074016, 2001. doi: [10.1103/PhysRevD.63.074016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.074016).
- ALLTON, C., EJIRI, S., HANDS, S., KACZMAREK, O., KARSCH, F. *et al.* The Equation of state for two flavor QCD at nonzero chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D68, página 014507, 2003. doi: [10.1103/PhysRevD.68.014507](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.014507).
- ANGLANI, R., CASALBUONI, R., CIMINALE, M., IPPOLITO, N., GATTO, R. *et al.* Crystalline color superconductors. *Rev.Mod.Phys.*, vol. 86, páginas 509–561, 2014. doi: [10.1103/RevModPhys.86.509](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.509).
- AOKI, S., AOKI, Y., BERNARD, C., BLUM, T., COLANGELO, G. *et al.* Review of lattice results concerning low-energy particle physics. *Eur.Phys.J.*, vol. C74, página 2890, 2014. doi: [10.1140/epjc/s10052-014-2890-7](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2890-7).
- BARDEEN, J., COOPER, L. y SCHRIEFFER, J. Theory of superconductivity. *Phys.Rev.*, vol. 108, páginas 1175–1204, 1957. doi: [10.1103/PhysRev.108.1175](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175).
- BAZAVOV, A., BHATTACHARYA, T., CHENG, M., CHRIST, N., DETAR, C. *et al.* Equation of state and QCD transition at finite temperature. *Phys.Rev.*, vol. D80, página 014504, 2009. doi: [10.1103/PhysRevD.80.014504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.014504).
- BAZAVOV, A. y PETRECKZY, P. Deconfinement and chiral transition with the highly improved staggered quark (HISQ) action. *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 230, página 012014, 2010. doi: [10.1088/1742-6596/230/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/230/1/012014).

- BELAVIN, A., POLYAKOV, A. M., SCHWARTZ, A. y TYUPKIN, Y. Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations. *Phys.Lett.*, vol. B59, páginas 85–87, 1975. doi: [10.1016/0370-2693\(75\)90163-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(75)90163-X).
- BERNARD, V. Remarks on Dynamical Breaking of Chiral Symmetry and Pion Properties in the Nambu and Jona-lasinio Model. *Phys.Rev.*, vol. D34, páginas 1601–1605, 1986. doi: [10.1103/PhysRevD.34.1601](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.34.1601).
- BERNARD, V., JAFFE, R. y MEISSNER, U. G. Flavor mixing via dynamical chiral symmetry breaking. *Phys.Lett.*, vol. B198, página 92, 1987. doi: [10.1016/0370-2693\(87\)90166-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90166-3).
- BERNARD, V., JAFFE, R. y MEISSNER, U. G. Strangeness Mixing and Quenching in the Nambu-Jona-Lasinio Model. *Nucl.Phys.*, vol. B308, página 753, 1988. doi: [10.1016/0550-3213\(88\)90127-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90127-7).
- BORSANYI, S. Thermodynamics of the QCD transition from lattice. *Nucl.Phys.*, vol. A904-905, páginas 270c–277c, 2013. doi: [10.1016/j.nuclphysa.2013.01.072](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2013.01.072).
- BORSANYI, S., ENDRODI, G., FODOR, Z., JAKOVAC, A., KATZ, S. D. *et al.* The QCD equation of state with dynamical quarks. *JHEP*, vol. 1011, página 077, 2010a. doi: [10.1007/JHEP11\(2010\)077](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2010)077).
- BORSANYI, S. *et al.* Is there still any Tc mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III. *JHEP*, vol. 1009, página 073, 2010b. doi: [10.1007/JHEP09\(2010\)073](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2010)073).
- BOWLER, R. y BIRSE, M. A Nonlocal, covariant generalization of the NJL model. *Nucl.Phys.*, vol. A582, páginas 655–664, 1995. doi: [10.1016/0375-9474\(94\)00481-2](https://doi.org/10.1016/0375-9474(94)00481-2).
- BOWMAN, P. O., HELLER, U. M., LEINWEBER, D. B. y WILLIAMS, A. G. Modeling the quark propagator. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, vol. 119, páginas 323–325, 2003. doi: [10.1016/S0920-5632\(03\)01533-0](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(03)01533-0).
- BOWMAN, P. O., HELLER, U. M. y WILLIAMS, A. G. Lattice quark propagator with staggered quarks in Landau and Laplacian gauges. *Phys.Rev.*, vol. D66, página 014505, 2002. doi: [10.1103/PhysRevD.66.014505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.014505).
- BRAUN, J., GIES, H. y PAWLOWSKI, J. M. Quark Confinement from Color Confinement. *Phys.Lett.*, vol. B684, páginas 262–267, 2010. doi: [10.1016/j.physletb.2010.01.009](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.01.009).
- BRONIOWSKI, W. Chiral waves in quark matter. *Acta Phys.Polon.Supp.*, vol. 5, página 631, 2012. doi: [10.5506/APhysPolBSupp.5.631](https://doi.org/10.5506/APhysPolBSupp.5.631).
- BRONIOWSKI, W., KOTLORZ, A. y KUTSCHERA, M. Quarks with a pion condensate. A new phase of matter. *Acta Phys.Polon.*, vol. B22, páginas 145–166, 1991.

- BRONIOWSKI, W. y KUTSCHERA, M. Ambiguities in Effective Chiral Models With Cutoff. *Phys.Lett.*, vol. B242, páginas 133–138, 1990. doi: [10.1016/0370-2693\(90\)91449-L](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91449-L).
- BUBALLA, M. NJL model analysis of quark matter at large density. *Phys.Rept.*, vol. 407, páginas 205–376, 2005. doi: [10.1016/j.physrep.2004.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.11.004).
- BUBALLA, M. y CARIGNANO, S. Inhomogeneous chiral condensates. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, vol. 81, páginas 39–96, 2015. doi: [10.1016/j.ppnp.2014.11.001](https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2014.11.001).
- BURDEN, C., QIAN, L., ROBERTS, C. D., TANDY, P. y THOMSON, M. J. Ground state spectrum of light quark mesons. *Phys.Rev.*, vol. C55, páginas 2649–2664, 1997. doi: [10.1103/PhysRevC.55.2649](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.55.2649).
- CARIGNANO, S., BUBALLA, M. y SCHAEFER, B.-J. Inhomogeneous phases in the quark-meson model with vacuum fluctuations. *Phys.Rev.*, vol. D90(1), página 014033, 2014. doi: [10.1103/PhysRevD.90.014033](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.014033).
- CARLOMAGNO, J. P., DUMM, D. G., PAGURA, V. y SCOCCOLA, N. N. Meson phenomenology and phase transitions in nonlocal chiral quark models. *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 630(1), página 012049, 2015a. doi: [10.1088/1742-6596/630/1/012049](https://doi.org/10.1088/1742-6596/630/1/012049).
- CARLOMAGNO, J. P., DUMM, D. G. y SCOCCOLA, N. N. Deconfinement and chiral restoration in nonlocal SU(3) chiral quark models. *Phys. Rev.*, vol. D88(7), página 074034, 2013. doi: [10.1103/PhysRevD.88.074034](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.074034).
- CARLOMAGNO, J. P., DUMM, D. G. y SCOCCOLA, N. N. Generalized Ginzburg-Landau approach to inhomogeneous phases in nonlocal chiral quark models. *Phys. Lett.*, vol. B745, páginas 1–4, 2015b. doi: [10.1016/j.physletb.2015.04.023](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.04.023).
- CARLOMAGNO, J. P., DUMM, D. G. y SCOCCOLA, N. N. Inhomogeneous phases in nonlocal chiral quark models. *Phys. Rev. D*, vol. 92, página 056007, 2015c. doi: [10.1103/PhysRevD.92.056007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.056007).
- CASALBUONI, R. y NARDULLI, G. Inhomogeneous superconductivity in condensed matter and QCD. *Rev.Mod.Phys.*, vol. 76, páginas 263–320, 2004. doi: [10.1103/RevModPhys.76.263](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.263).
- CHANDRASEKHAR, B. y HULM, J. Current carrying capacity of high field superconducting solenoids. 1962.
- CLOGSTON, A. Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors. *Phys.Rev.Lett.*, vol. 9, páginas 266–267, 1962. doi: [10.1103/PhysRevLett.9.266](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.266).
- CONTRERA, G., DUMM, D. G. y SCOCCOLA, N. N. Meson properties at finite temperature in a three flavor nonlocal chiral quark model with Polyakov loop. *Phys.Rev.*, vol. D81, página 054005, 2010a. doi: [10.1103/PhysRevD.81.054005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.054005).

- CONTRERA, G., ORSARIA, M. y SCOCCOLA, N. Nonlocal Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model with wavefunction renormalization at finite temperature and chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D82, página 054026, 2010b. doi: [10.1103/PhysRevD.82.054026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.054026).
- COSTA, P., RUIVO, M., DE SOUSA, C., HANSEN, H. y ALBERICO, W. Scalar-pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model. *Phys.Rev.*, vol. D79, página 116003, 2009. doi: [10.1103/PhysRevD.79.116003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.116003).
- DAUTRY, F. y NYMAN, E. PION CONDENSATION AND THE SIGMA MODEL IN LIQUID NEUTRON MATTER. *Nucl.Phys.*, vol. A319, páginas 323–348, 1979. doi: [10.1016/0375-9474\(79\)90518-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(79)90518-9).
- DÉLIA, M. y LOMBARDO, M.-P. Finite density QCD via imaginary chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D67, página 014505, 2003. doi: [10.1103/PhysRevD.67.014505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.014505).
- EJIRI, S. Canonical partition function and finite density phase transition in lattice QCD. *Phys.Rev.*, vol. D78, página 074507, 2008. doi: [10.1103/PhysRevD.78.074507](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.074507).
- FODOR, Z. y KATZ, S. Lattice determination of the critical point of QCD at finite T and  $\mu$ . *JHEP*, vol. 0203, página 014, 2002. doi: [10.1088/1126-6708/2002/03/014](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/03/014).
- FODOR, Z. y KATZ, S. Critical point of QCD at finite T and  $\mu$ , lattice results for physical quark masses. *JHEP*, vol. 0404, página 050, 2004. doi: [10.1088/1126-6708/2004/04/050](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/04/050).
- DE FORCRAND, P. y PHILIPSEN, O. QCD phase diagram at small densities from simulations with imaginary  $\mu$ . 2003.
- FRITZSCH, H., GELL-MANN, M. y LEUTWYLER, H. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, vol. B47, páginas 365–368, 1973. doi: [10.1016/0370-2693\(73\)90625-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90625-4).
- FU, W.-J., ZHANG, Z. y LIU, Y.-X. 2+1 flavor Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio model at finite temperature and nonzero chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D77, página 014006, 2008. doi: [10.1103/PhysRevD.77.014006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.014006).
- FUKUSHIMA, K. Chiral effective model with the Polyakov loop. *Phys.Lett.*, vol. B591, páginas 277–284, 2004. doi: [10.1016/j.physletb.2004.04.027](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.04.027).
- FUKUSHIMA, K. Phase diagrams in the three-flavor Nambu-Jona-Lasinio model with the Polyakov loop. *Phys.Rev.*, vol. D77, página 114028, 2008. doi: [10.1103/PhysRevD.77.114028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.114028).
- FURUI, S. y NAKAJIMA, H. Unquenched Kogut-Susskind quark propagator in lattice Landau gauge QCD. *Phys.Rev.*, vol. D73, página 074503, 2006. doi: [10.1103/PhysRevD.73.074503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.074503).

- GATTRINGER, C. y LANG, C. B. Quantum chromodynamics on the lattice. *Lect.Notes Phys.*, vol. 788, páginas 1–343, 2010. doi: [10.1007/978-3-642-01850-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-01850-3).
- GAVALI, R. V. y GUPTA, S. Pressure and nonlinear susceptibilities in QCD at finite chemical potentials. *Phys.Rev.*, vol. D68, página 034506, 2003. doi: [10.1103/PhysRevD.68.034506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.034506).
- GENERAL, I., GOMEZ DUMM, D. y SCOCCOLA, N. Chiral phase transition in a covariant nonlocal NJL model. *Phys.Lett.*, vol. B506, páginas 267–274, 2001. doi: [10.1016/S0370-2693\(01\)00240-4](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00240-4).
- GLENDENNING, N. Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity. 1997.
- GOLLI, B., BRONIOWSKI, W. y RIPKA, G. Solitons in a chiral quark model with nonlocal interactions. *Phys.Lett.*, vol. B437, páginas 24–28, 1998. doi: [10.1016/S0370-2693\(98\)00942-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00942-3).
- GOLLI, B., BRONIOWSKI, W. y RIPKA, G. Baryons as solitons in chiral quark models. *Few Body Syst.Suppl.*, vol. 14, páginas 1–6, 2003.
- GOMEZ DUMM, D., GRUNFELD, A. y SCOCCOLA, N. On covariant nonlocal chiral quark models with separable interactions. *Phys.Rev.*, vol. D74, página 054026, 2006. doi: [10.1103/PhysRevD.74.054026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.054026).
- GOMEZ DUMM, D. y SCOCCOLA, N. Characteristics of the chiral phase transition in nonlocal quark models. *Phys.Rev.*, vol. C72, página 014909, 2005. doi: [10.1103/PhysRevC.72.014909](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.72.014909).
- GOMEZ DUMM, D. y SCOCCOLA, N. N. Chiral quark models with nonlocal separable interactions at finite temperature and chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D65, página 074021, 2002. doi: [10.1103/PhysRevD.65.074021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.074021).
- GRUNER, G. The dynamics of spin-density waves. *Rev.Mod.Phys.*, vol. 66, páginas 1–24, 1994. doi: [10.1103/RevModPhys.66.1](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.66.1).
- HAAS, L. M., STIELE, R., BRAUN, J., PAWLOWSKI, J. M. y SCHAFFNER-BIELICH, J. Improved Polyakov-loop potential for effective models from functional calculations. *Phys.Rev.*, vol. D87(7), página 076004, 2013. doi: [10.1103/PhysRevD.87.076004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.076004).
- HATSUDA, T. y KUNIHIRO, T. Critical Phenomena Associated with Chiral Symmetry Breaking and Restoration in QCD. *Prog.Theor.Phys.*, vol. 74, página 765, 1985. doi: [10.1143/PTP.74.765](https://doi.org/10.1143/PTP.74.765).
- HATSUDA, T. y KUNIHIRO, T. Flavor mixing in the low-energy hadron dynamics: Interplay of the SU(3)(f) breaking and the U(1)(A) anomaly. *Z.Phys.*, vol. C51, páginas 49–68, 1991. doi: [10.1007/BF01579559](https://doi.org/10.1007/BF01579559).

- HATSUDA, T. y KUNIHIRO, T. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. *Phys.Rept.*, vol. 247, páginas 221–367, 1994. doi: [10.1016/0370-1573\(94\)90022-1](https://doi.org/10.1016/0370-1573(94)90022-1).
- HELL, T., KASHIWA, K. y WEISE, W. Extensions and further applications of the nonlocal Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model. *Phys.Rev.*, vol. D83, página 114008, 2011. doi: [10.1103/PhysRevD.83.114008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.114008).
- HERBST, T. K., MITTER, M., PAWLOWSKI, J. M., SCHAEFER, B.-J. y STIELE, R. Thermodynamics of QCD at vanishing density. *Phys.Lett.*, vol. B731, páginas 248–256, 2014. doi: [10.1016/j.physletb.2014.02.045](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.02.045).
- 'T HOOFT, G. Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle. *Phys.Rev.*, vol. D14, páginas 3432–3450, 1976a. doi: [10.1103/PhysRevD.18.2199.3](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.18.2199.3), [10.1103/PhysRevD.14.3432](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.3432).
- 'T HOOFT, G. Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies. *Phys.Rev.Lett.*, vol. 37, páginas 8–11, 1976b. doi: [10.1103/PhysRevLett.37.8](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.8).
- 'T HOOFT, G. On the Phase Transition Towards Permanent Quark Confinement. *Nucl.Phys.*, vol. B138, página 1, 1978. doi: [10.1016/0550-3213\(78\)90153-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(78)90153-0).
- IWATA, Y., ABUKI, H. y SUZUKI, K. Splitting of the chiral critical point and realization of solitonic pion condensate driven by isospin density. 2012.
- KACZMAREK, O., KARSCH, F., PETRECZKY, P. y ZANTOW, F. Heavy quark anti-quark free energy and the renormalized Polyakov loop. *Phys.Lett.*, vol. B543, páginas 41–47, 2002. doi: [10.1016/S0370-2693\(02\)02415-2](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02415-2).
- KAHARA, T. y TUOMINEN, K. Effective models of two-flavor QCD: Finite  $\mu$  and  $m_q$ -dependence. *Phys.Rev.*, vol. D82, página 114026, 2010. doi: [10.1103/PhysRevD.82.114026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.114026).
- KARSCH, F. y LAERMANN, E. Thermodynamics and in medium hadron properties from lattice QCD. 2003.
- KLEVANSKY, S. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev.Mod.Phys.*, vol. 64, páginas 649–708, 1992. doi: [10.1103/RevModPhys.64.649](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.64.649).
- KLIMT, S., LUTZ, M. F., VOGL, U. y WEISE, W. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio Model. Part 1. Mesonic Modes. *Nucl.Phys.*, vol. A516, páginas 429–468, 1990. doi: [10.1016/0375-9474\(90\)90123-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90123-4).
- KUNIHIRO, T. y HATSUDA, T. Effects of Flavor Mixing Induced by Axial Anomaly on the Quark Condensates and Meson Spectra. *Phys.Lett.*, vol. B206, página 385, 1988. doi: [10.1016/0370-2693\(88\)91596-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91596-1).

- KUTSCHERA, M., BRONIEWSKI, W. y KOTLORZ, A. Quark Matter With Neutral Pion Condensate. *Phys.Lett.*, vol. B237, página 159, 1990a. doi: [10.1016/0370-2693\(90\)91421-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91421-7).
- KUTSCHERA, M., BRONIEWSKI, W. y KOTLORZ, A. Quark Matter With Pion Condensate in an Effective Chiral Model. *Nucl.Phys.*, vol. A516, páginas 566–588, 1990b. doi: [10.1016/0375-9474\(90\)90128-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90128-9).
- MARHAUSER, F. y PAWLOWSKI, J. M. Confinement in Polyakov Gauge. 2008.
- MCLERRAN, L. y PISARSKI, R. D. Phases of cold, dense quarks at large  $N(c)$ . *Nucl.Phys.*, vol. A796, páginas 83–100, 2007. doi: [10.1016/j.nuclphysa.2007.08.013](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2007.08.013).
- MCLERRAN, L., REDLICH, K. y SASAKI, C. Quarkyonic Matter and Chiral Symmetry Breaking. *Nucl.Phys.*, vol. A824, páginas 86–100, 2009. doi: [10.1016/j.nuclphysa.2009.04.001](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2009.04.001).
- MEGIAS, E., RUIZ ARRIOLA, E. y SALCEDO, L. Polyakov loop in chiral quark models at finite temperature. *Phys.Rev.*, vol. D74, página 065005, 2006. doi: [10.1103/PhysRevD.74.065005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.065005).
- MEISINGER, P. N. y OGILVIE, M. C. Chiral symmetry restoration and  $Z(N)$  symmetry. *Phys.Lett.*, vol. B379, páginas 163–168, 1996. doi: [10.1016/0370-2693\(96\)00447-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00447-9).
- MIGDAL, A. Stability of vacuum and limiting fields. *Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, vol. 61, páginas 2209–2224, 1971.
- MIGDAL, A. Pi condensation in nuclear matter. *Phys.Rev.Lett.*, vol. 31, páginas 257–260, 1973. doi: [10.1103/PhysRevLett.31.257](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.31.257).
- MIGDAL, A. B. Pion Fields in Nuclear Matter. *Rev.Mod.Phys.*, vol. 50, páginas 107–172, 1978. doi: [10.1103/RevModPhys.50.107](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.50.107).
- MULLER, D., BUBALLA, M. y WAMBACH, J. Dyson-Schwinger study of chiral density waves in QCD. *Phys.Lett.*, vol. B727, páginas 240–243, 2013. doi: [10.1016/j.physletb.2013.10.050](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.10.050).
- MUTA, T. Foundations of quantum chromodynamics: An Introduction to perturbative methods in gauge theories. *World Sci.Lect.Notes Phys.*, vol. 5, páginas 1–409, 1987.
- NAKANO, E. y TATSUMI, T. Chiral symmetry and density wave in quark matter. *Phys.Rev.*, vol. D71, página 114006, 2005. doi: [10.1103/PhysRevD.71.114006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.114006).
- NAMBU, Y. y JONA-LASINIO, G. Dynamical Model of Elementary Particles based on an Analogy with Superconductivity. II. *Phys.Rev.*, vol. 124, páginas 246–254, 1961. doi: [10.1103/PhysRev.124.246](https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.246).

- NICKEL, D. How many phases meet at the chiral critical point? *Phys.Rev.Lett.*, vol. 103, página 072301, 2009a. doi: [10.1103/PhysRevLett.103.072301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.072301).
- NICKEL, D. Inhomogeneous phases in the Nambu-Jona-Lasino and quark-meson model. *Phys.Rev.*, vol. D80, página 074025, 2009b. doi: [10.1103/PhysRevD.80.074025](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.074025).
- NOGUERA, S. Non local Lagrangians. (I): The Pion. *Int.J.Mod.Phys.*, vol. E16, páginas 97–132, 2007. doi: [10.1142/S021830130700565X](https://doi.org/10.1142/S021830130700565X).
- NOGUERA, S. y SCOCCOLA, N. Nonlocal chiral quark models with wavefunction renormalization: Sigma properties and pi - pi scattering parameters. *Phys.Rev.*, vol. D78, página 114002, 2008. doi: [10.1103/PhysRevD.78.114002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.114002).
- OLIVE, K. *et al.* Review of Particle Physics. *Chin.Phys.*, vol. C38, página 090001, 2014. doi: [10.1088/1674-1137/38/9/090001](https://doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001).
- PARAPPILLY, M. B., BOWMAN, P. O., HELLER, U. M., LEINWEBER, D. B., WILLIAMS, A. G. *et al.* Scaling behavior of quark propagator in full QCD. *Phys.Rev.*, vol. D73, página 054504, 2006. doi: [10.1103/PhysRevD.73.054504](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.054504).
- PLANT, R. S. y BIRSE, M. C. Meson properties in an extended nonlocal NJL model. *Nucl.Phys.*, vol. A628, páginas 607–644, 1998. doi: [10.1016/S0375-9474\(97\)00635-0](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(97)00635-0).
- POLYAKOV, A. M. Quark Confinement and Topology of Gauge Groups. *Nucl.Phys.*, vol. B120, páginas 429–458, 1977. doi: [10.1016/0550-3213\(77\)90086-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90086-4).
- POLYAKOV, A. M. Thermal Properties of Gauge Fields and Quark Liberation. *Phys.Lett.*, vol. B72, páginas 477–480, 1978. doi: [10.1016/0370-2693\(78\)90737-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90737-2).
- RAPP, R AND SCHÄFER, T AND SHURYAK, EDWARD V. High-density QCD and instantons. *Annals of Physics*, vol. 280(1), páginas 35–99, 2000.
- RATTI, C., THALER, M. A. y WEISE, W. Phases of QCD: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Phys.Rev.*, vol. D73, página 014019, 2006. doi: [10.1103/PhysRevD.73.014019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.014019).
- REHBERG, P., KLEVANSKY, S. y HUFNER, J. Hadronization in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys.Rev.*, vol. C53, páginas 410–429, 1996. doi: [10.1103/PhysRevC.53.410](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.53.410).
- REINHARDT, H. y ALKOFER, R. Instanton Induced Flavor Mixing in Mesons. *Phys.Lett.*, vol. B207, páginas 482–488, 1988. doi: [10.1016/0370-2693\(88\)90687-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)90687-9).
- REZAEIAN, A. H., WALET, N. R. y BIRSE, M. C. Baryon structure in a quark-confining non-local NJL model. *Phys.Rev.*, vol. C70, página 065203, 2004. doi: [10.1103/PhysRevC.70.065203](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.70.065203).



- RIPKA, G. Quarks bound by chiral fields: The quark-structure of the vacuum and of light mesons and baryons. 1997.
- RISCHKE, D. H. The quark–gluon plasma in equilibrium. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 52(1), páginas 197–296, 2004.
- ROBERGE, A. y WEISS, N. Gauge Theories With Imaginary Chemical Potential and the Phases of QCD. *Nucl.Phys.*, vol. B275, página 734, 1986. doi: [10.1016/0550-3213\(86\)90582-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90582-1).
- ROBERTS, C. D. y WILLIAMS, A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog.Part.Nucl.Phys.*, vol. 33, páginas 477–575, 1994. doi: [10.1016/0146-6410\(94\)90049-3](https://doi.org/10.1016/0146-6410(94)90049-3).
- ROESSNER, S., RATTI, C. y WEISE, W. Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram. *Phys.Rev.*, vol. D75, página 034007, 2007. doi: [10.1103/PhysRevD.75.034007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.034007).
- SADZIKOWSKI, M. y BRONIOWSKI, W. Nonuniform chiral phase in effective chiral quark models. *Phys.Lett.*, vol. B488, páginas 63–67, 2000. doi: [10.1016/S0370-2693\(00\)00830-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00830-3).
- SAKAI, Y., SASAKI, T., KOUNO, H. y YAHIRO, M. Entanglement between deconfinement transition and chiral symmetry restoration. *Phys.Rev.*, vol. D82, página 076003, 2010. doi: [10.1103/PhysRevD.82.076003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.076003).
- SASAKI, T., SAKAI, Y., KOUNO, H. y YAHIRO, M. Quark-mass dependence of the three-flavor QCD phase diagram at zero and imaginary chemical potential: Model prediction. *Phys.Rev.*, vol. D84, página 091901, 2011. doi: [10.1103/PhysRevD.84.091901](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.091901).
- SCARPETTINI, A., GOMEZ DUMM, D. y SCOCCOLA, N. Light pseudoscalar mesons in a nonlocal SU(3) chiral quark model. *Phys.Rev.*, vol. D69, página 114018, 2004. doi: [10.1103/PhysRevD.69.114018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.114018).
- SCHAEFER, B.-J., PAWLOWSKI, J. M. y WAMBACH, J. The Phase Structure of the Polyakov–Quark-Meson Model. *Phys.Rev.*, vol. D76, página 074023, 2007. doi: [10.1103/PhysRevD.76.074023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.074023).
- SCHMIDT, S., BLASCHKE, D. y KALINOVSKY, Y. Scalar - pseudoscalar meson masses in nonlocal effective QCD at finite temperature. *Phys.Rev.*, vol. C50, páginas 435–446, 1994. doi: [10.1103/PhysRevC.50.435](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.50.435).
- SCHON, V. y THIES, M. Emergence of Skyrme crystal in Gross-Neveu and 't Hooft models at finite density. *Phys.Rev.*, vol. D62, página 096002, 2000. doi: [10.1103/PhysRevD.62.096002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.096002).

- SHAPIRO, S. y TEUKOLSKY, S. Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. 1983.
- SHIFMAN, M. *At the Frontier of Particle Physics: Handbook of QCD*, vol. 4. World Scientific, 2002.
- TAKIZAWA, M., TSUSHIMA, K., KOHYAMA, Y. y KUBODERA, K. Study of meson properties and quark condensates in the Nambu-Jona-Lasinio model with instanton effects. *Nucl.Phys.*, vol. A507, páginas 611–648, 1990. doi: [10.1016/0375-9474\(90\)90173-J](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90173-J).
- VOGL, U., LUTZ, M. F., KLIMT, S. y WEISE, W. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio Model. Part 2. From Current to Constituent Quarks. *Nucl.Phys.*, vol. A516, páginas 469–495, 1990. doi: [10.1016/0375-9474\(90\)90124-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90124-5).
- WILSON, K. G. Confinement of Quarks. *Phys.Rev.*, vol. D10, páginas 2445–2459, 1974. doi: [10.1103/PhysRevD.10.2445](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2445).
- WU, L.-K., LUO, X.-Q. y CHEN, H.-S. Phase structure of lattice QCD with two flavors of Wilson quarks at finite temperature and chemical potential. *Phys.Rev.*, vol. D76, página 034505, 2007. doi: [10.1103/PhysRevD.76.034505](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.034505).
- YNDURAIN, F. The theory of quark and gluon interactions. 1999.

*Mas naides se crea ofendido  
pues a ninguno incomodo,  
y si canto de este modo,  
por encontrarlo oportuno,  
no es para mal de ninguno  
sino para bien de todos.*

*Martín Fierro. José Hernández*

