

Aplicación de funciones de parte entera. Objeto de enseñanza

Horacio Caraballo^{1,2}, Cecilia Zulema González^{2,3}

¹Bachillerato de Bellas Artes. Universidad Nacional de La Plata.

²Cátedra de Matemática. Cátedra de Computación. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales.
Universidad Nacional de La Plata.

³Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata.
carallohoracio@gmail.com cgonzalez@agro.unlp.edu.ar

Resumen

Se presenta en este trabajo un objeto de enseñanza referido a la aplicación de funciones discontinuas a la simulación de un problema real; utilizando como complemento didáctico y entorno de desarrollo una aplicación de matemática dinámica o un sistema de algebra computacional.

Definimos un Objeto de Enseñanza (OE) como un conjunto de recursos que puede ser utilizado, en diversos contextos por distintos docentes, con un propósito educativo y está constituido por, al menos, los siguientes componentes: contenidos, actividades de aprendizaje, elementos de contextualización y metadatos.

Las funciones que utilizamos en este OE son escalonadas (floor, ceil, en la aplicación usada) para modelizar situaciones concretas.

En las actividades propuestas en este OE el software de matemática dinámica es usado para presentar y desarrollar el tema de las funciones escalonadas y luego para construir una simulación de una situación real.

Toda esta construcción se lleva al aula y se transforma en un método didáctico, pero además se comparte, lo que permite su reutilización y la realimentación que produce el hecho de que otros docentes la pongan en práctica, mejorándola y volviéndola a compartir. En la primera parte de este artículo se muestra un ejemplo simple, y en la segunda parte una forma de compartirlo con otros docentes

Palabras clave: Objetos de enseñanza. Software matemático. Funciones escalonadas. Modelización.

Introducción

Estas notas tienen un doble propósito, uno es el de mostrar una actividad estructurada donde se utiliza software como complemento didáctico y además como escenario de simulación para una situación real, el otro propósito es el de mostrar la forma en que toda la actividad se empaqueta para ser compartida con otros docentes. Este último aspecto es el que consideramos más relevante en este artículo, sin embargo parece más claro comenzar presentando una situación concreta y a partir de ella mostrar la utilidad, la estructura y el funcionamiento de un OE.

La situación concreta que enfrentamos implica la simulación a partir de funciones escalonadas, esto se realiza en el entorno que proporciona una aplicación de Matemática Dinámica o un Sistema de Álgebra Computacional. En un primer momento se estudian algunos comportamientos de las funciones cambiando distintos parámetros, luego se utiliza la aplicación para crear una simulación.

A continuación desarrollamos los dos aspectos mencionados, la situación didáctica y la forma de compartirla.

Contexto didáctico

La actividad está pensada para un curso de Cálculo de primer año de grado universitario o para un curso de Precálculo del último año de la enseñanza media superior.

El tema abordado es la modelización matemática de situaciones fácticas que impliquen el uso de una función escalonada o de una combinación de ellas.

Los momentos didácticos son dos. El primero se refiere a la definición y manejo de las funciones de parte entera. El segundo a la aplicación de estas funciones y a la modelización de una situación concreta. Ambos momentos están mediados por el uso de software matemático.

En el caso que nos ocupa usamos GeoGebra, pero podríamos optar por Maxima de haber necesitado las herramientas de un sistema de álgebra computacional.

GeoGebra

Tiene licencia GNU (General Public License v2), es un software libre de matemática para la educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único entorno, sencillo a nivel operativo y muy potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (Hohenwarter, 2012).

Maxima

Maxima es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, y vectores, matrices y tensores. Produce resultados con alta precisión usando fracciones exactas y representaciones con aritmética de coma flotante arbitraria. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. (Rodríguez Riotorto, 2011)

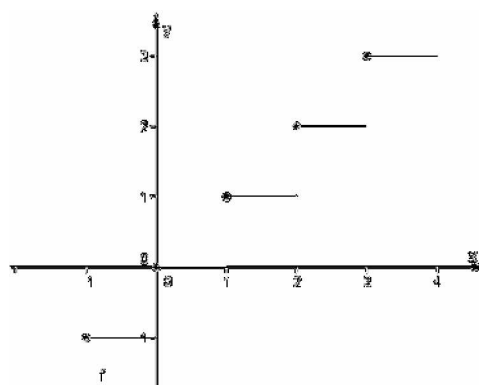
wxMaxima es un entorno gráfico, que permite ejecutar el programa Maxima de forma indirecta, posee licencia libre y se puede instalar de forma complementaria y constituye un ambiente más amigable para el usuario que la consola de Maxima (Rodríguez Galván, 2007)

Funciones de Parte Entera

Definimos la función *piso* de un número real como el mayor entero menor o igual que el número dado, también es conocida como parte entera (en este caso la notación habitual es: $y = \lfloor x \rfloor$).

$$y = \lfloor x \rfloor \text{ donde } y \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \leq x < y + 1$$

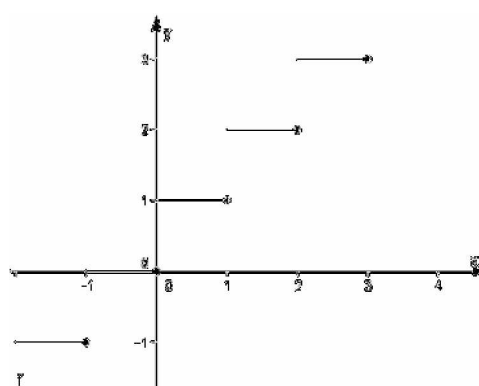
El siguiente gráfico se obtiene en GeoGebra con el comando: **floor(x)**



La función *techo* se define como el menor entero mayor o igual que el número dado.

$$y = \lceil x \rceil \text{ donde } y \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y - 1 < x \leq y$$

El siguiente gráfico se obtiene en GeoGebra con el comando: **ceil(x)**



La primera actividad didáctica que se plantea en este desarrollo pretende que el alumno comprenda el comportamiento de estas funciones respecto a la variación de parámetros que las caracterizan. A

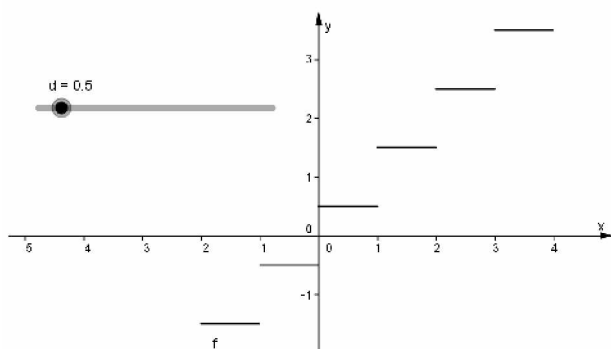
continuación se considera la función piso siendo el análisis para la función techo completamente análogo.

En el entorno de GeoGebra consideremos los comandos:

$$\begin{aligned} & a \text{ floor}(x) \\ & \text{floor}(bx) \\ & \text{floor}(x-c) \\ & \text{floor}(x)+d \end{aligned}$$

Donde a , b , c , d son deslizadores que toman valores en un rango definido con un paso determinado.

Por ejemplo $f(x) = \text{floor}(x) + d$, obtendríamos el siguiente escenario dinámico:



La variación del deslizador permite explorar el comportamiento de $f(x)$. En este caso cambiando los valores de d la representación gráfica muestra que todos los valores de la función aumentan en dicha cantidad. Las actividades propuestas ponen en claro el comportamiento de la función respecto del parámetro estudiado.

Del mismo modo se estudia la variación de f respecto de c , en este caso el efecto es una traslación, los alumnos deben notar que toda la representación gráfica se desplaza hacia la derecha si c es positivo y hacia la izquierda si c es negativo.

El parámetro b altera la frecuencia de variación de los saltos de la función. Si el valor absoluto de b aumenta la frecuencia de variación de los saltos disminuye, si el valor absoluto de b disminuye la frecuencia de variación de los saltos aumenta.

El parámetro a modifica la altura de los saltos de un modo directo.

La comprensión del rol de cada parámetro permite ajustar la función a una situación real. Cada parámetro determina las unidades que corresponden al modelo y adapta las magnitudes correspondientes.

Modelización de un problema

Como ejemplo se presenta un problema de aplicación de funciones discontinuas a una situación real.

Se quiere obtener el costo de un viaje en taxi en función de la distancia recorrida si se aceptan las siguientes premisas:

El costo fijo de inicio es de \$14,43.

El costo cada 200 metros recorridos es de \$1,43. No se considera ningún costo por tiempo de espera.

De las actividades que se realizaron a partir del punto anterior se sigue que la función que representa esta situación es:

$$f(x) = a \text{ floor}(b x) + d$$

Donde las unidades de f , a y d están en pesos las de x en metros y las de b en uno sobre metros.

Del mismo modo, del manejo y la comprensión sobre la función desarrollada previamente se desprende que el valor de los parámetros es:

$$a = 1,43 \$ \quad b = 1/200 \text{ m}^{-1} \quad d = 14,43 \$$$

Si se pretendiera utilizar una variable distinta, por ejemplo tomar unidades en cuadras y no en metros, por considerarlo más intuitivo, la única modificación sería tomar $b = 1/2$

El producto final será una función de una variable independiente (el número de cuadras recorridas) que devuelve el costo del viaje en pesos respetando las condiciones dadas:

$$f(x) = 1,43 \text{ floor}(1/2 x) + 14,43$$

Notemos que este modelo está contextualizado en el entorno que proporciona el software elegido. La relación entre la matemática y la tecnología utilizada para el desarrollo va

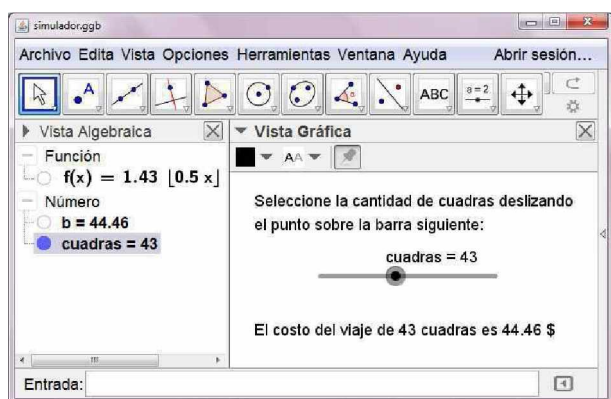
más allá del resultado obtenido ya que se hizo presente en el comienzo de las actividades proporcionando el escenario donde se establecieron comprensión y competencias sobre el tema.

Simulador del problema

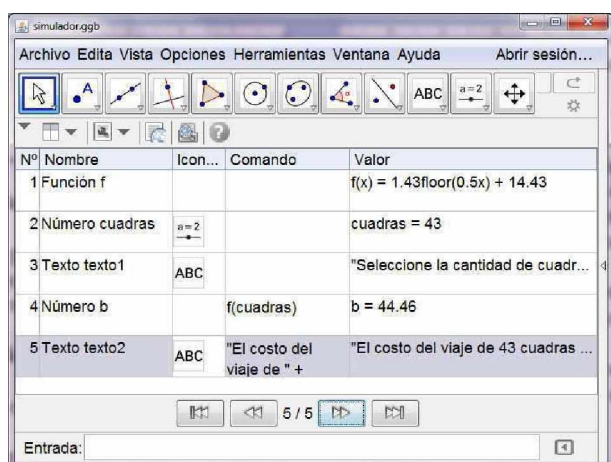
En la aplicación es sencillo generar los objetos correspondientes que en base a la o las funciones del modelo permiten construir un simulador. En nuestro ejemplo elemental: si la entrada es la cantidad de cuadras recorridas, el sistema informa el costo del viaje.

En la imagen siguiente se muestra el entorno de la aplicación sin ningún tipo de edición.

Se podría exportar la ventana derecha en forma de applet.



El protocolo de construcción del simulador se muestra a continuación



Estructura de la actividad

- Funciones de parte entera: se desarrolla una guía de trabajos prácticos que se realiza usando el software elegido.

- Problemas de aplicación: se propone la resolución de problemas cuya resolución implique el uso de funciones escalonadas. Los pasos que se consideran son: planteo y comprensión del problema, identificación de las funciones necesarias para modelarlo, ajuste de los parámetros de la función, implementación del modelo en el software.

- Informe final: es el producto de toda la actividad. Si bien hay una componente descriptiva en el informe, la nota central sería la construcción de un simulador para cada uno de los problemas propuestos.

Contexto colaborativo

En esta segunda parte se muestra el modo de compartir con otros docentes el método y los materiales de la situación didáctica presentada antes.

Objetos de Enseñanza

Tomando como fuente el artículo sobre el tema presentado en la reunión anterior de TEyET (Caraballo, González, 2014) podemos resumir que: un OE se define como un conjunto de recursos que puede ser utilizado, en diversos contextos por distintos docentes, con un propósito educativo y está constituido por, al menos, los siguientes componentes: contenidos, actividades de aprendizaje, elementos de contextualización y metadatos. Un OE se transforma en un método de enseñanza cuando se lo lleva al aula.

Algunas características de los OE (la mayoría compartidas con los Objetos de Aprendizaje) que nos interesa destacar son:

- Intención didáctica específica. Apuntan a un propósito de aprendizaje que es claramente definido en el objeto.
- Apertura. Lo cual implica la posibilidad de compartirlos con los demás brindando la oportunidad de acceso al conocimiento y generando recursos que pueden ser mejorados por parte de quienes los utilizan.
- Posibilidad de una construcción activa y colaborativa del conocimiento.
- Actividades didácticas centradas en el estudiante y mediadas por el objeto en manos del docente.
- Apoyo de la propuesta didáctica a partir de distintas piezas de software libre diseñado para educación matemática o como auxiliares para la misma.
- Residencia en repositorios, sitio Web, aulas virtuales, blogs, etc. con el propósito de facilitar su catalogación, almacenamiento, búsqueda y recuperación.
- Accesibilidad. Se puede acceder a ellos con una conexión a Internet a través de un navegador.
- Metadatos. Información sobre el contenido del objeto, que facilita su reutilización.
- La utilización que se hace de ellos. Están pensados para que los utilice un docente en el aula.
- La reutilización por el propio docente o por otros docentes en otros contextos.
- La posibilidad de reciclar el objeto, actualizarlo, modificarlo, etc. por parte del autor del objeto o por otro docente que decida hacerlo.

Si bien los Objetos de Enseñanza tienen características similares a los Objetos de Aprendizaje hay una diferencia central referida

al destinatario, ya que están pensados específicamente como insumos para docentes. Asimismo, un OE puede contener uno o varios objetos de aprendizaje.

En general un OE se estructura sobre una base HTML, este soporte permite la existencia en línea del objeto. Tiene metadatos (se describen a continuación) y un sistema de archivos de distintos tipos con contenidos, actividades, contextualización, etc. En otras palabras un OE se piensa como una estructura empaquetada y etiquetada en un repositorio en línea.

Los metadatos son los que permiten identificar el objeto y es posible tomar el LearningObjectMetadata (LOM) (IEEE, 2012) como estándar para los OE, es una especificación que define un conjunto de etiquetas que se estructuran en las siguientes categorías:

- General: agrupa la información general que describe un objeto en su conjunto.
- Ciclo de vida: describe la historia y estado actual de un objeto, así como aquellas entidades que han intervenido en su creación y evaluación.
- Meta-metadatos: describe el propio registro de metadatos. Describe como puede ser identificada una instancia de metadatos, quién la creó, cómo, cuándo y con qué referencias.
- Técnica: describe los requisitos y características técnicas del objeto.
- Uso Educativo: describe las características educativas y pedagógicas fundamentales del objeto. Concretamente, es la información didáctica esencial para aquellos docentes involucrados en una experiencia educativa de calidad.
- Derechos: describe los derechos de propiedad intelectual y las condiciones de uso aplicables al objeto.

- Relación: describe las relaciones existentes, si las hubiese, entre un objeto y otro. Para definir relaciones múltiples deben utilizarse varias instancias de esta categoría. Si existen varios objetos con los cuales está relacionado, cada uno de ellos tendrá una instancia propia de esta categoría.

- Anotación: proporciona comentarios sobre la utilización pedagógica del objeto, e información sobre quién creó el comentario y cuando fue creado. Esta categoría permite a los educadores compartir sus valoraciones sobre el objeto, recomendaciones para su utilización, etc.

- Clasificación: describe dónde se sitúa el objeto dentro de un sistema de clasificación concreto. Para definir múltiples clasificaciones, deben utilizarse múltiples instancias de esta categoría. Las etiquetas pueden rellenarse con dos tipos de valores, o bien valores correspondientes a vocabularios controlados con un formato determinado o bien valores de texto libre.

Estructura del OE del ejemplo

Como ya vimos la situación didáctica contempla los siguientes momentos:

- Resolución de tareas relacionadas a las funciones de parte entera.

- Resolución de problemas de aplicación donde se utilizan las funciones anteriores.

- Obtención de un simulador para cada problema.

Archivo general

Hay un archivo de texto dirigido al docente (principal.pdf) donde se detallan los siguientes puntos:

Presentación de la actividad.

Marco teórico.

Objetivos.

Metodología.

Evaluación.

Información sobre el software utilizado.

Funciones de parte entera

En esta parte hay dos archivos de texto, una guía con todas las actividades y el otro es un instructivo que resuelve la interacción del alumno con el software. Estos instructivos son documentos que se utilizan simultáneamente con el software y con la guía. Cada instructivo muestra una secuencia de comandos y acciones en la interfase del programa que permite resolver las distintas actividades. (Caraballo, González, 2012).

Archivos:

funciones de parte entera.pdf

instructivofunciones de parte entera.pdf

Problemas de aplicación

Guía de trabajos prácticos con los problemas propuestos. Es un archivo de texto.

Archivo:

problemas de aplicacion.pdf

Simulador

Guía teórico-práctica e instructivo.

Archivos:

simulador.pdf

instructivosimulador.pdf



Metadatos

- Información general que describe el objeto.
- Historia y estado actual del objeto.
- Características técnicas del objeto.
- Información didáctica para aquellos docentes involucrados en la experiencia.
- Derechos de propiedad intelectual y condiciones de uso.
- Comentarios sobre la utilización pedagógica del objeto e información sobre quién creó el comentario y cuando fue creado.

Publicación en unrepositorio.

Todo el conjunto de elementos del OE se publica en línea en un sitio web, un blog, un aula virtual, etc. Los archivos se pueden ofrecer en un paquete comprimido, en una carpeta compartida en la nube, etc.

Una vez que otro docente toma el OE y lo utiliza, lo esperado es que devuelva un comentario sobre su experiencia. También puede pasar que haya modificado algunos elementos del OE. En este caso, lo esperable es que vuelva a enviar el nuevo OE modificado para su publicación. Este último punto requiere que el repositorio tenga un grupo de editores que evalúen y clasifiquen las modificaciones.

Conclusiones

Respecto a la situación didáctica, la secuencia de actividades tiene distintas implicaciones cognitivas:

- En términos matemáticos se estudia el tipo particular de funciones escalonadas dentro de las funciones que no son continuas, además con la particularidad de tener imagen discreta. El registro que predomina en la presentación del tema es visual (representación gráfica) lo que hace que el uso de una aplicación de matemática dinámica sea la más indicada.

- El uso de tecnología es central en este desarrollo de dos maneras. La primera está relacionada con el uso del software como complemento didáctico y como espacio en el que se investigan las propiedades de las funciones mencionadas. La segunda manera se relaciona con el hecho de utilizar el software como una herramienta de simulación para un problema concreto.

Respecto de la posibilidad de compartir este tipo de actividades en un repositorio hace que enfrentemos las siguientes cuestiones:

-La definición de OE tiene que ver con la necesidad de generar un marco para poder compartir este tipo de actividades entre docentes. En este sentido, nuestro desarrollo es incipiente. Las alternativas de compartir materiales educativos mediados por tecnología son muchas, pero al estar poco conectadas con una situación didáctica bien definida, se vuelven poco útiles. Un OE pondría remedio a esta situación.

- La publicación de OE en un repositorio propone un conjunto de desafíos complejos. Los problemas técnicos no ofrecen gran dificultad, de una manera u otra es fácil empaquetar y publicar el OE, pero los detalles no son menores y complican la resolución. El estudio y la solución de estas cuestiones es actualmente objeto de desarrollo.

Bibliografía

Chiappe, C. Segovia, Y. Rincón, H. *Toward an instructional design model based on learning objects*. Educational Technology Research and Development, 2007.

Del Carmen, Y.; Ruiz, L.; Trujillo, Y.; Ril, Y. (2011) *La calidad de los objetos de aprendizaje producidos en la universidad de las ciencias informáticas*. [Artículo en línea]. Edutec, Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm. 36 / Junio 2011

Galeana, L. *Objetos de Aprendizaje*. Centro Universitario de Producción de Medios Didácticos, México, 2005.

Gómez Gabaldón J. *Nuevos planteamientos metodológicos en la Enseñanza de la geometría*. XVI Congreso Internacional De Ingeniería Gráfica. Zaragoza España. 2004.

González, C., Caraballo, H. *Incorporación de software educativo al aula. Entornos colaborativos locales*. Acta TEyET. Universidad Nacional de Chilecito. La Rioja. 2014

González, C. Caraballo, H. *Sistemas de cálculo simbólico. Instructivos*. Acta de la IX CAREM. Buenos Aires. 2012.

Hodgins, W. *Into the future*. A visionpaper, 2000.

Hohenwarter, M. *¿Qué es GeoGebra?* Recuperado en abril de 2015 desde: <http://geogebra.org/markus-hohenwarter-about-geogebra-blog/>

IEEE. *Draft Standard for Learning Object Metadata*. IEEE Learning Technology Standards Committee, 2002.

IEEE, Learning Technology Standards Committee, IEEE LOM working draft 6.1, <http://ltsc.ieee.org/wg12/index.html>

Jacobsen, P. *Reusable Learning Objects- What does the future hold*. E-learning Magazine, 2002.

Rodríguez Galván, J.(2007) *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*. Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz.

Rodríguez Riotorto, M.(2011) *Primeros pasos en Maxima* <http://riotorto.users.sourceforge.net> junio de 2012.

Santos Trigo, L. *Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas*. Avance y Perspectiva vol. 20. Pág.247 258. 2001.

Wiley, D. *Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy*. The Instructional Use of Learning Objects. Online Version, 2000.