



Universidad Nacional de La Plata  
Facultad de Ciencias Exactas  
Departamento de Física

---

Tesis Doctoral

**Medidas entrópicas generalizadas de  
correlaciones cuánticas**

---

Lic. Leonardo Francisco Ciliberti

Director: Dr. Raúl Rossignoli  
Codirector: Dra. Norma Canosa

Diciembre 2014

*A Nuncio*

# Índice general

<b>Tabla de contenidos</b>	<b>1</b>
<b>I. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>II. Conceptos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1. Entropía y medidas afines en sistemas clásicos . . . . .	9
2.1.1. Entropía . . . . .	9
2.1.2. Entropía Condicional e Información Mutua . . . . .	10
2.1.3. Entropía Relativa . . . . .	13
2.2. Entropía y medidas afines en sistemas cuánticos . . . . .	13
2.2.1. Entropía en sistemas cuánticos . . . . .	13
2.2.2. Entropía Condicional e Información Mutua . . . . .	15
2.2.3. Entropía relativa cuántica . . . . .	17
2.3. Entrelazamiento . . . . .	18
2.3.1. Entrelazamiento de estados puros . . . . .	18
2.3.2. Entrelazamiento de estados no puros . . . . .	19
2.3.3. Criterios básicos de separabilidad . . . . .	20
2.3.4. Entrelazamiento de formación. Concurrencia . . . . .	21
2.4. Quantum Discord . . . . .	21
2.4.1. Definición General . . . . .	23
2.4.2. Quantum Discord de estados puros . . . . .	24
2.4.3. Quantum Discord de estados no puros . . . . .	25
2.5. Teoría de la mayorización y entropías generalizadas . . . . .	26
2.5.1. El concepto de orden e información . . . . .	26
2.5.2. Teoría de la mayorización . . . . .	27
2.5.3. Entropías Generalizadas . . . . .	29
2.5.4. Mayorización y entropías generalizadas en el caso cuántico . . . . .	31
<b>III. Medidas entrópicas generalizadas de correlaciones cuánticas</b>	<b>33</b>
3.1. Déficit de información . . . . .	33
3.2. Déficit de información generalizado . . . . .	34
3.2.1. Concepto general . . . . .	34
3.2.2. Casos particulares: Entropías de von Neumann, cuadrática y $q$ . . . . .	35
3.2.3. El caso general para pequeñas perturbaciones del estado . . . . .	37

3.2.4.	Medidas no proyectivas . . . . .	37
3.3.	Déficit de Información por medida local . . . . .	38
3.3.1.	Pérdida de información por medida local en un sistema bipartito . . . . .	38
3.3.2.	Mínima pérdida de información por medida local . . . . .	39
3.3.3.	Estados puros y entropía de entrelazamiento generalizada . . . . .	40
3.3.4.	Mínima pérdida de información por medida local conjunta . . . . .	42
3.3.5.	Medidas basadas en la entropía de von Neumann . . . . .	44
3.3.6.	Medidas basadas en la entropía cuadrática . . . . .	46
3.3.7.	Interpretación operacional del Déficit de Información generalizado . . . . .	46
3.4.	Mezcla de un estado puro general con el estado de entropía máxima . . . . .	48
3.4.1.	El caso general $d$ -dimensional . . . . .	48
3.4.2.	El caso de dos qubits y relación con el entrelazamiento . . . . .	51
3.4.3.	Decoherencia de un estado de Bell . . . . .	53
3.5.	Apéndice: Entrelazamiento de formación generalizado . . . . .	55
<b>IV.</b>	<b>Ecuaciones generales para la determinación de medidas óptimas</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1.	Ecuación estacionaria general . . . . .	57
4.2.	El caso de dos qubits . . . . .	59
4.3.	Medida cuadrática . . . . .	60
4.3.1.	Caso de dos qubits . . . . .	60
4.3.2.	Extensión a un sistema qudit-qubit . . . . .	61
4.4.	Medida cúbica . . . . .	62
4.5.	Ejemplos . . . . .	64
4.5.1.	Estados con densidades reducidas máximamente mezcladas . . . . .	64
4.5.2.	Estados con simetría de paridad (estados $X$ ) . . . . .	68
4.5.3.	Mezcla de estados alineados . . . . .	71
<b>V.</b>	<b>Correlaciones cuánticas en sistemas de espines con interacción XY</b> . . . . .	<b>75</b>
5.1.	Sistemas XY . . . . .	76
5.1.1.	Entrelazamiento y Discord de pares en estados de paridad definida . . . . .	76
5.1.2.	El caso de la mezcla de dos estados alineados . . . . .	78
5.1.3.	Efecto de los términos de coherencia . . . . .	80
5.2.	Discord de pares en cadenas XY . . . . .	81
5.2.1.	Entrelazamiento y Discord en la vecindad del campo factorizante . . . . .	83
5.2.2.	Entrelazamiento y Discord para campos intensos . . . . .	85
5.2.3.	Efectos de términos de coherencia en cadenas pequeñas . . . . .	86
5.2.4.	Sistemas XY o XYZ generales . . . . .	88
5.3.	Déficit de Información de pares en cadenas XY . . . . .	90
5.3.1.	Comportamiento general . . . . .	90
5.3.2.	Medida minimizante . . . . .	92
5.4.	Apéndice: Solución exacta de la cadena XY cíclica finita . . . . .	95

<b>VI. Correlaciones cuánticas en sistemas de espines con interacción XX</b>	<b>97</b>
6.1. Sistemas XX . . . . .	97
6.1.1. Estados reducidos de un par de espines . . . . .	98
6.1.2. Déficit de Información paralelo y perpendicular . . . . .	99
6.2. Resultados en el límite termodinámico . . . . .	101
6.2.1. Correlaciones cuánticas de pares en el estado fundamental . . . . .	101
6.2.2. Correlaciones cuánticas de pares a temperatura finita . . . . .	105
6.3. Resultados para cadenas finitas . . . . .	107
6.3.1. Correlaciones cuánticas de pares en el estado fundamental . . . . .	107
6.3.2. Correlaciones cuánticas de pares a temperatura finita . . . . .	109
<b>VII. Conclusiones</b>	<b>111</b>
<b>VIII. Agradecimientos</b>	<b>114</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

## Resumen

El presente trabajo de Tesis aborda el estudio de correlaciones cuánticas en sistemas generales bipartitos. El objetivo es cuantificar dichas correlaciones a través de la mínima pérdida de información, inducida en el estado del sistema, al realizar sobre éste una medida local completa. Esta pérdida de información se define en base a formas entrópicas generales. La medida así obtenida posee propiedades análogas a la medida conocida como Quantum Discord, pero se enmarca en un concepto distinto, más directo y completamente general. Además, ofrece en ciertos casos la posibilidad de una evaluación más sencilla.

A continuación se detallan los contenidos de los capítulos que componen esta Tesis:

- Los capítulos I y II contienen la introducción y los conceptos básicos utilizados en esta Tesis: Entropía, entrelazamiento, Quantum Discord, y algunos aspectos de la teoría de mayorización y su relación con formas entrópicas generales.
- El capítulo III contiene el punto central de esta Tesis. En él se define el Déficit de Información Generalizado y la mínima pérdida de información por medida local, basadas en formas entrópicas generales y conceptos de teoría de mayorización. Se incluyen ejemplos ilustrativos.
- En el capítulo IV se dan las condiciones necesarias para la obtención de la medida optimizante del Déficit de Información Generalizado, derivándose una ecuación general que debe satisfacer la misma. Se obtienen aquí resultados finales analíticos para entropías particulares. Se discuten también en detalle diversos ejemplos.
- En los capítulos V y VI se analizan las medidas anteriormente introducidas para un par de espines, inmersos en cadenas de espines finitas con interacción XY y XX, en un campo magnético transversal. El resultado central es que las correlaciones cuánticas detectadas por estas medidas alcanzan, a diferencia del entrelazamiento, un valor común finito en el entorno del campo factorizante. Se analizan asimismo los cambios de fase asociados a la medida optimizante.
- El capítulo VII contiene las conclusiones de esta Tesis.

# I Introducción

En los últimas dos décadas, el interés por los llamados estados cuánticos entrelazados [1] aumentó considerablemente a raíz del descubrimiento de su potencial para permitir nuevas formas de transmisión y procesamiento de la información, tales como la teleportación cuántica [2] y la computación cuántica [3–6]. Se han desarrollado algoritmos computacionales cuánticos que reducen sustancialmente el número de pasos requeridos en los mejores algoritmos clásicos conocidos [5, 7, 8]. En algunos casos, los algoritmos cuánticos logran reducir la complejidad de problemas que clásicamente se consideran “duros” o *Hard*, tal como la factorización prima de un número entero [5, 7]. Esta requiere un número exponencial de pasos en los algoritmos conocidos de la computación clásica basada en bits (el número de pasos para factorizar un número de  $n$  bits crece exponencialmente con  $n$ ), pero el número de pasos pasa a ser polinomial en el algoritmo cuántico introducido por Peter Shor [7], basado en qubits (quantum bits).

El entrelazamiento cuántico denota las correlaciones sin análogo clásico que pueden ser exhibidas por sistemas cuánticos compuestos. Hasta hace poco tiempo, se creía que un requisito esencial para que una computadora cuántica fuera más eficiente que una clásica (es decir, para que no pudiera ser simulada eficientemente por una computadora clásica), era que el entrelazamiento, al menos en alguna etapa intermedia del proceso, debía ser no nulo. Si bien esto es cierto para algoritmos cuánticos basados en estados cuánticos puros, en los que el entrelazamiento debe crecer con el tamaño del sistema para que se logre una reducción exponencial del número de pasos [9], no lo es necesariamente para algoritmos basados en estados cuánticos no puros o “mezcla”, tal como el algoritmo diseñado por Knill y Laflamme [10]. Este último, si bien logra reducir la complejidad de un cierto problema (el de la evaluación de la traza de una matriz unitaria de  $2^n \times 2^n$ ), no exhibe entrelazamiento sustancial en ninguna etapa [11]. Además, a diferencia del caso de estados puros, donde el entrelazamiento puede ser cuantificado mediante la entropía de entrelazamiento (*entanglement entropy*) [12, 13], el entrelazamiento cuántico en estados no puros [14, 15] puede ser difícil de detectar en el caso general, no existiendo un criterio general computable necesario y suficiente de entrelazamiento ni tampoco una medida general rigurosa computable del mismo [6].

Surge entonces la necesidad de contar con una nueva medida que de cuenta de las correlaciones cuánticas residuales, presentes en estados no puros, que no son capturadas por el entrelazamiento y que puedan estar presentes en el algoritmo de Knill

y Laflamme. En 2001, Ollivier y Zurek [16] proponen una medida de correlaciones cuánticas a la que denominan *Quantum Discord*, que identifica aquellos estados que permanecen invariantes frente a una medida local. Esta medida, definida en base a dos extensiones distintas de la información mutua clásica al terreno cuántico, tendría en cuenta, en principio, estas correlaciones cuánticas residuales. Una medida similar fue paralelamente propuesta por Henderson y Vedral [17]. La presencia de dichas correlaciones queda verificada en un importante trabajo de Datta, Shaji y Caves [18], en el cual se vuelve a estudiar el circuito original de Knill y Laflamme [10], mostrándose que éste exhibe un valor finito y apreciable del Quantum Discord. Es importante destacar que esta medida no tuvo una inmediata repercusión. Sólo después de la publicación del trabajo de Caves en 2008 [18] es que el Quantum Discord comienza a tener gran difusión.

La determinación del Quantum Discord resulta, no obstante, también difícil en el caso general, ya que requiere una minimización sobre todas las medidas locales posibles en un sistema compuesto. En este trabajo de Tesis Doctoral, se propone una medida entrópica generalizada de correlaciones cuánticas, mediante el denominado *Déficit de Información generalizado por medida local*, basado en el uso de formas entrópicas generales. Esta última cantidad posee propiedades análogas a las del Quantum Discord, anulándose para el mismo tipo de estados, es decir, para estados *clásicamente correlacionados* (un subtipo de estados separables), y coincidiendo con la entropía generalizada de entrelazamiento en el caso de estados puros. Y si bien, al igual que en el caso del Quantum Discord, su evaluación resulta difícil en el caso general, la extensión propuesta permite considerar ciertas entropías para las cuales la evaluación resulta mucho más accesible. Además, la generalización del concepto de Déficit de Información permite identificar ciertas propiedades *universales*, es decir, *independientes* de la entropía, ó medida de desorden, ó mezcla utilizada. Esta medida entrópica generalizada se introduce y discute en detalle en el capítulo III. Asimismo, el capítulo IV trata sobre la determinación de la medición local óptima para este tipo de medidas, es decir, aquella que minimiza la perturbación promedio en el sistema provocada por una medida local, y las correspondientes ecuaciones estacionarias. Estos desarrollos dieron lugar a los trabajos [19, 20].

Los capítulos V y VI examinan el comportamiento, tanto del Quantum Discord como de las medidas entrópicas generalizadas anteriores, para el caso de un par de espines o qubits en el estado fundamental de un sistema finito de espines en interacción, bajo la acción de un campo magnético. Los resultados correspondientes dieron lugar a los trabajos [21–24]. Con este objetivo, se evalúan previamente estas cantidades, en forma analítica, para un estado mezcla típico de dos espines en estos sistemas, y en particular, para una superposición estadística de dos estados de dos espines alineados en direcciones distintas. Este resulta ser el estado real exacto de un par de espines arbitrario en la vecindad del denominado *campo factorizante* del sistema [25, 26]. Esto permite comprender el comportamiento del Quantum Discord y el Déficit de Información Generalizado en su vecindad, y en cierto modo en toda la región por debajo del campo crítico. Los resultados muestran que el comportamiento



de estas medidas difiere significativamente del mostrado por el entrelazamiento del par justamente para campos menores que el campo crítico. Más aún, se muestra que estas medidas adquieren, a diferencia del entrelazamiento, un valor finito apreciable en la vecindad del campo factorizante, que resulta *independiente* de la separación del par y del alcance de la interacción [21]. Por otro lado, mientras que el Discord y el Déficit de Información Generalizado tienen un comportamiento cualitativamente similar, se muestra también que pueden exhibir diferencias sustanciales en la medida local óptima que las determina. En particular, en el caso del Déficit de Información Generalizado, esta medida puede exhibir una transición de “fase” que refleja cambios importantes en el estado reducido del par de espines, tal como se discute en detalle en el capítulo VI.

El capítulo II contiene una reseña general sobre entropías y medidas afines, tanto en sistemas clásicos como cuánticos, conceptos que resultan esenciales a la hora de definir el Quantum Discord y el Déficit de Información Generalizado. Contiene también una breve reseña sobre entrelazamiento cuántico y sus medidas en estados puros y no puros, la definición del Quantum Discord, junto con sus principales propiedades, y finalmente un resumen de los conceptos esenciales asociados a la teoría de la mayorización y entropías generalizadas. Las conclusiones generales se discuten en el capítulo VI.

Los desarrollos realizados en esta Tesis dieron lugar a las siguientes publicaciones científicas en revistas internacionales con referato:

- 1) *Quantum Discord in finite XY chains*,  
L. Ciliberti, R. Rossignoli, N. Canosa,  
Physical Review **A 82** 042316 (2010).
- 2) *Generalized entropic measures of quantum correlations*,  
R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti,  
Physical Review **A 82** 052342 (2010).
- 3) *Quantum correlations and least disturbing local measurements*,  
R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti,  
Physical Review **A 84** 052329 (2011).
- 4) *Generalized measures of quantum correlations for mixed states*,  
L. Ciliberti, N. Canosa, R. Rossignoli,  
Journal of R. Laser Research **52**, 212 (2011).
- 5) *Quantum discord and related measures of quantum correlations in XY chains*,  
N. Canosa, L. Ciliberti, R. Rossignoli,  
International Journal of Modern Physics **B 27** 1345033 (2013).
- 6) *Quantum Discord and Information Deficit in XX chains*,  
L. Ciliberti, N. Canosa, R. Rossignoli,  
Physical Review **A 88** 012119 (2013).
- 7) *Quantum Discord and Information Deficit in Spin Chains*,  
N. Canosa, L. Ciliberti, R. Rossignoli, Entropy **17**, 1634 (2015).



## II Conceptos Básicos

En este capítulo daremos una breve reseña de los principales conceptos básicos utilizados en esta Tesis. Específicamente, entropía y medidas afines en sistemas cuánticos y clásicos, entrelazamiento y discordancia cuántica (Quantum Discord), y finalmente, entropías generalizadas y su relación con la teoría de Mayorización.

### 2.1. Entropía y medidas afines en sistemas clásicos

#### 2.1.1. Entropía

Comenzaremos describiendo ciertos conceptos básicos de la teoría de la información. Dada una distribución de probabilidad (d.p.)  $\{p_i, i = 1, \dots, n\}$ , con  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ , que consideraremos asociada a una cierta variable aleatoria (v.a.) discreta  $X$ , (tal que  $p_i = p(X = x_i)$  es la probabilidad de que  $X$  tome el valor  $x_i$ ), la entropía de Shannon se define como [5, 27–29]

$$S(X) = - \sum_i p_i \log p_i. \quad (2.1)$$

Utilizaremos en lo sucesivo el logaritmo en base 2, siguiendo la convención usual en Información Cuántica e Informática, de forma que la entropía de una v.a. binaria equiprobable (es decir, que toma dos valores con igual probabilidad) es  $S(X) = 1$  [5]. Como es bien sabido,  $S(X)$  es una medida de la falta de información asociada a la d.p. Se tiene obviamente

$$S(X) \geq 0 \quad (2.2)$$

con  $S(X) = 0$  si y sólo si  $p_i = \delta_{ij}$  para un cierto  $j$ , (es decir, si  $X$  toma un valor  $x_j$  con probabilidad 1, siendo entonces 0 la probabilidad de que tome cualquier otro valor). Además,  $S(X)$  es *máxima* para una distribución *equiprobable*  $p_i = 1/n \forall i$ , en cuyo caso  $S(X) = \log n$ . En una descripción estadística de un sistema físico,  $X$  puede representar un cierto observable, convenientemente discretizado.

Dada una distribución de probabilidad conjunta  $\{p_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  asociada a dos v.a.  $X$  e  $Y$  sobre el mismo sistema, de forma que  $p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j)$  es la probabilidad de que  $X$  tome el valor  $x_i$  e  $Y$  el valor  $y_j$  simultáneamente, la correspondiente entropía conjunta es

$$S(X, Y) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log p_{ij}. \quad (2.3)$$

Las distribuciones marginales son

$$p_i^X = \sum_j p_{ij}, \quad p_j^Y = \sum_i p_{ij} \quad (2.4)$$

de forma que  $p_i^X$  es la probabilidad de que  $X$  tome el valor  $x_i$  (independientemente del valor que toma  $Y$ ) y  $p_j^Y$  la probabilidad de que  $Y$  tome el valor  $y_j$ , es decir,  $p_i^X = p(X = x_i)$ ,  $p_j^Y = p(Y = y_j)$ . Las correspondientes entropías marginales son entonces

$$S(X) = - \sum_i p_i^X \log p_i^X, \quad S(Y) = - \sum_j p_j^Y \log p_j^Y. \quad (2.5)$$

Dos v.a. son *independientes* si y sólo si  $p_{ij} = p_i^X p_j^Y \forall i, j$ . En tal caso, (2.3) implica  $S(X, Y) = S(X) + S(Y)$ . Esta es la propiedad de *aditividad* de la entropía de Shannon, válida para v.a. independientes.

### 2.1.2. Entropía Condicional e Información Mutua

Para el caso general, podemos definir la **entropía condicional** [5, 27, 29]

$$S(X|Y) = \sum_j p_j^Y S(X/Y = y_j) = - \sum_{i,j} p_j^Y p_{i/j}^X \log p_{i/j}^X \quad (2.6)$$

donde

$$p_{i/j}^X = p(X = x_i/Y = y_j) = p_{ij}/p_j^Y \quad (2.7)$$

es la probabilidad condicional de que  $X$  tome el valor  $i$  dado que  $Y$  tomó el valor  $j$  ( $p_{i/j}^X \geq 0$ ,  $\sum_i p_{i/j}^X = 1$ ) y  $S(X/Y = y_j) = - \sum_i p_{i/j}^X \log p_{i/j}^X$  la correspondiente entropía condicional.  $S(X|Y)$  es pues el promedio de estas entropías condicionales particulares, es decir, el promedio de la falta de información sobre  $X$  al conocer un dado valor de  $Y$ , y es claramente una cantidad *positiva*:

$$S(X|Y) \geq 0. \quad (2.8)$$

Si  $X$  e  $Y$  son v.a. independientes entonces  $p_{i/j}^X = p_i^X \forall j$  y  $S(X|Y) = S(X)$ .

Reemplazando (2.7) en (2.6) obtenemos una fórmula alternativa de la entropía condicional, expresada puramente en términos de la entropía conjunta y la entropía marginal de  $Y$ :

$$S(X|Y) = S(X, Y) - S(Y). \quad (2.9)$$

La positividad de la entropía condicional implica pues una propiedad básica de toda entropía conjunta:

$$S(X, Y) \geq S(Y) \quad (2.10)$$

y análogamente, también

$$S(X, Y) \geq S(X) \quad (2.11)$$

es decir, la falta de información asociada al par de v.a. es no menor que la asociada a cada una de ellas.

La **información mutua** se define como [5, 27, 29]

$$I(X : Y) = S(X) + S(Y) - S(X, Y) \quad (2.12)$$

y es una medida de las correlaciones entre  $X$  e  $Y$ . Si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces  $S(X, Y) = S(X) + S(Y)$  y por lo tanto  $I(X : Y) = 0$ .

En general, se tiene

$$I(X, Y) \geq 0 \quad (2.13)$$

con  $I(X, Y) = 0$  sólo si  $X$  e  $Y$  son independientes, como se demuestra matemáticamente en la siguiente sección. La positividad de  $I(X, Y)$  es, no obstante, conceptualmente necesaria, ya que  $S(X) + S(Y)$  representa la falta de información sobre el sistema conjunto cuando sólo se dispone de la información marginal (asociada a  $X$  e  $Y$  por separado y determinada por las distribuciones marginales) sin información alguna sobre las correlaciones entre  $X$  e  $Y$ , y debe ser por lo tanto mayor que  $S(X, Y)$  (ya que la d.p. conjunta contiene además la información sobre las correlaciones).

En base a (2.9), podemos expresar la información mutua también en términos de la entropía condicional como

$$I(X : Y) = S(X) - S(X|Y) \quad (2.14)$$

$$= S(Y) - S(Y|X). \quad (2.15)$$

La positividad de  $I(X : Y)$  implica pues  $S(X) \geq S(X|Y)$ ,  $S(Y) \geq S(Y|X)$ .

*Aplicación a sistemas clásicos.* Consideremos un sistema físico clásico  $A$ , que puede estar en un cierto conjunto de estados  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En una descripción estadística [30], podemos asociar al mismo una d.p. tal que  $p_i$  sea la probabilidad de que el sistema esté en el estado  $A_i$ . Por ejemplo, en el caso de una partícula en una dimensión, el índice  $i$  puede enumerar rectángulos en el espacio de fases elemental  $Q, P$  convenientemente discretizado (siendo  $Q$  la coordenada y  $P$  el impulso de la partícula), de forma que  $p_i$  sea la probabilidad de que la partícula tenga coordenada e impulso  $Q_i, P_i$  pertenecientes al rectángulo. En el caso general,  $i$  enumerará las celdas o hipervolumenes elementales del espacio de fases. La entropía de Shannon correspondiente es entonces

$$S(A) = - \sum_i p_i \log p_i \quad (2.16)$$

y el valor medio de un observable  $O$  del sistema  $A$  es  $\langle O \rangle = \sum_i p_i O_i$ , con  $O_i$  el valor en la celda  $i$ .

Consideremos ahora dos sistemas clásicos  $A$  y  $B$ . Estarán caracterizados por una d.p. conjunta  $\{p_{ij}\}$ , tal que  $p_{ij}$  es la probabilidad de que  $A$  y  $B$  estén simultáneamente

en los estados  $A_i$  y  $B_j$ , respectivamente. Tenemos en mente el caso típico de dos sistemas  $A$  y  $B$  espacialmente separados, pero los resultados siguientes son generales y aplicables a todo par de sistemas clásicos. La entropía conjunta o global es entonces

$$S(A, B) = - \sum_{ij} p_{ij} \log p_{ij} \quad (2.17)$$

mientras que las entropías marginales o locales son

$$S(A) = - \sum_i p_i^A \log p_i^A, \quad S(B) = - \sum_j p_j^B \log p_j^B \quad (2.18)$$

con  $p_i^A = \sum_j p_{ij}$ ,  $p_j^B = \sum_i p_{ij}$  las distribuciones marginales ( $p_i^A$  representa pues la probabilidad de que  $A$  esté en el estado  $A_i$ ).

Las consideraciones anteriores permiten definir la **entropía condicional**

$$S(A|B) = \sum_j p_j^B S(A/B_j) = - \sum_{i,j} p_j^B p_{i/j}^A \log p_{i/j}^A \quad (2.19)$$

$$= S(A, B) - S(B) \quad (2.20)$$

que es una cantidad no negativa. Esto implica una propiedad fundamental de todo sistema clásico compuesto: La entropía global *es siempre no menor que la entropía local*:

$$S(A, B) \geq S(A), \quad S(A, B) \geq S(B). \quad (2.21)$$

Como veremos, esta propiedad *no se cumple necesariamente en sistemas cuánticos*.

Por otro lado, la **información mutua** del sistema será

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (2.22)$$

que es también una cantidad positiva:  $S(A : B) \geq 0$ , con  $I(A : B) = 0$  si y sólo si  $A$  y  $B$  no están correlacionados, es decir, si  $p_{ij} = p_i^A p_j^B \forall i, j$ .  $I(A : B)$  es pues una medida de las correlaciones entre  $A$  y  $B$ . Se obtiene así la cadena de desigualdades:

$$S(A) + S(B) \geq S(A, B) \geq S(A) \quad (\text{y } S(B)). \quad (2.23)$$

Sólo la primera desigualdad será también válida en sistemas cuánticos.

La propiedad aditiva usual  $S(A, B) = S(A) + S(B)$  es válida sólo en el caso no correlacionado. Un ejemplo típico de sistema no correlacionado es el de dos sistemas  $A$  y  $B$  sin interacción a temperatura finita [30] en el que  $p_{ij} \propto e^{-E_{ij}/kT} = e^{-E_i^A/kT} e^{-E_j^B/kT}$ , donde  $T$  es la temperatura absoluta y  $E_{ij} = E_i^A + E_j^B$ , con  $E_i^A$  la energía del estado  $i$  de  $A$  y  $E_j^B$  la energía del estado  $j$  de  $B$ . Cuando  $E_{ij} \neq E_i^A + E_j^B$ , debido a la presencia de una interacción,  $p_{ij} \neq p_i^A p_j^B$  y entonces  $S(A, B) < S(A) + S(B)$ .

### 2.1.3. Entropía Relativa

Consideremos dos distribuciones de probabilidad  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  asociadas a un mismo conjunto de eventos elementales. La entropía relativa (también denominada divergencia de Kullback-Leibler [29, 31]) se define como

$$S(p||q) = \sum_i p_i \log p_i/q_i \quad (2.24)$$

y satisface  $S(p||q) \geq 0$ , con  $S(p||q) = 0$  si y sólo si  $p_i = q_i$ , para  $i = 1, \dots, n$  (en realidad, es finita sólo si  $q_i > 0 \forall p_i > 0$ , tendiendo a  $+\infty$  si  $q_i \rightarrow 0$  para  $p_i$  finito).

*Demostración:* Debido a la concavidad del logaritmo, se tiene  $\log x \leq x - 1$  ( $1 - x$  es la recta tangente al logaritmo en  $x = 1$ ), con el igual válido sólo si  $x = 1$ . Por lo tanto,  $-\log q_i/p_i \geq 1 - q_i/p_i$  y

$$S(p||q) = - \sum_i p_i \log q_i/p_i \geq \sum_i p_i(1 - q_i/p_i) = 0$$

donde el igual vale sólo si  $q_i = p_i \forall p_i > 0$ . Notemos que  $S(p||q) \neq S(q||p)$ .

La información mutua (2.22) puede ahora escribirse como la entropía relativa entre la distribución producto  $q_{ij} = p_i^A p_j^B$  y la distribución conjunta  $p_{ij}$ :

$$I(A : B) = - \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_i^X p_j^Y}{p_{ij}} = S(p||q).$$

La positividad de  $S(p||q)$  demuestra así la positividad de la información mutua, siendo entonces ésta última nula sólo si  $p_{ij} = p_i^A p_j^B \forall i, j$ , es decir, sólo si  $A$  y  $B$  son independientes.

La entropía relativa no es una distancia, al no ser simétrica. No obstante, puede definirse una versión simetrizada de la misma, denominada divergencia de Jensen Shannon [32, 33], dada por:  $D_{JS}(p||q) = \frac{1}{2}[S(p||(p+q)/2) + S(q||(p+q)/2)]$ . Esta cantidad es obviamente simétrica, y  $d(p, q) = \sqrt{D_{JS}(p||q)}$  satisface la desigualdad triangular  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ , siendo por lo tanto una métrica para distribuciones de probabilidad [32].

## 2.2. Entropía y medidas afines en sistemas cuánticos

### 2.2.1. Entropía en sistemas cuánticos

Discutiremos ahora la extensión de las definiciones previas a sistemas cuánticos [5, 6, 27, 29]. Consideraremos sistemas cuánticos con espacio de Hilbert accesible de dimensión finita  $n$ . El sistema puede pues estar en cualquier estado del espacio. El conocimiento sobre el estado del sistema se caracteriza no ya por una distribución de probabilidad, si no por un *operador densidad* (o matriz densidad)  $\rho$ , que es un

operador semidefinido positivo (y por lo tanto autoadjunto) en dicho espacio (es decir, todos sus autovalores son no negativos), de traza 1:

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.25)$$

Este operador determina el valor medio de cualquier observable  $O$  por medio de la expresión

$$\langle O \rangle = \text{Tr} \rho O. \quad (2.26)$$

En particular, la probabilidad de encontrar al sistema en un estado particular  $|i\rangle$ , (que supondremos normalizado) es entonces

$$p_i = \langle P_i \rangle = \text{Tr} \rho P_i = \langle i | \rho | i \rangle \quad (2.27)$$

donde  $P_i = |i\rangle\langle i|$  es el proyector ortogonal sobre el estado  $|i\rangle$ .

En el caso de un sistema cuántico en un estado puro  $|i\rangle$  (tal que la probabilidad de encontrarlo en tal estado es 1),  $\rho$  es entonces el proyector ortogonal sobre el subespacio generado por  $|i\rangle$ :

$$\rho = |i\rangle\langle i| \quad (2.28)$$

y satisface  $\rho^2 = \rho$ . En el caso general, la descomposición espectral de  $\rho$  la escribiremos como

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad (2.29)$$

donde  $\{p_i, i = 1, \dots, n\}$  son los autovalores de  $\rho$  ( $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$ ) y  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, n\}$  los correspondientes autovectores normalizados ( $\langle i | i' \rangle = \delta_{ii'}$ ).

El caso puro corresponde a  $p_i = 1$  para un cierto estado y 0 para todos los demás. En el caso general, tenemos  $\rho^2 \leq \rho$  (es decir,  $\rho^2 - \rho$  es un operador con autovalores  $-p_i(1 - p_i)$  negativos o nulos).

La entropía de Shannon se reemplaza ahora por la entropía de von Neumann [5, 27, 34], definida como

$$S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho \quad (2.30)$$

$$= -\sum_i p_i \log p_i. \quad (2.31)$$

Al igual que en el caso clásico,  $S(\rho) \geq 0$ , con  $S(\rho) = 0$  únicamente para un estado puro ( $\rho^2 = \rho$ ).  $S(\rho)$  será por el contrario máximo ( $S(\rho) = \log n$ ) para un estado máximamente “mezclado”  $\rho_n = I_n/n$ , donde  $I_n$  denota el operador identidad, tal que  $p_i = 1/n \forall i$ .

Dados dos sistemas cuánticos distinguibles, que denotaremos nuevamente como  $A$  y  $B$  (lo cual sigue la notación usual en información cuántica, referida a *Alicia* (Alice) y *Benito* (Bob) [5]), con sendos espacios de Hilbert  $H_A$  y  $H_B$ , y espacio de Hilbert conjunto  $H_A \otimes H_B$ , el estado conjunto estará determinado por una cierta *matriz densidad conjunta*  $\rho_{AB}$ . La entropía conjunta es por lo tanto

$$S(A, B) = S(\rho_{AB}) = -\text{Tr} \rho_{AB} \log \rho_{AB}. \quad (2.32)$$



Tenemos en mente, como caso típico, dos sistemas distinguibles  $A, B$  espacialmente separados, aunque las siguientes expresiones son válidas para todo par  $A, B$ , con espacio conjunto accesible  $H_A \otimes H_B$ . Un observable *local* en el sistema  $A$  es un observable de la forma  $O_A \equiv o_A \otimes I_B$ , donde  $I_B$  denota la identidad en  $H_B$ . Su valor medio es entonces

$$\langle O_A \rangle = \text{Tr} \rho_{AB} O_A = \text{Tr}_A \rho_A o_A \quad (2.33)$$

donde hemos definido la *matriz densidad reducida* [5, 27]

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} \quad (2.34)$$

análoga a la distribución marginal en sistemas clásicos, la cual determina completamente los valores medios de todo observable local en  $A$ . Explícitamente,  $\langle i | \rho_A | j \rangle = \sum_k \langle ik | \rho_{AB} | jk \rangle$ , donde  $|ik\rangle \equiv |i\rangle \otimes |k\rangle = |i\rangle |k\rangle$  son los estados de una base producto ortonormal de  $H_A \otimes H_B$ . Análogamente,

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$$

determina los valores medios de cualquier operador local  $O_B$  en  $B$ . Las entropías locales son

$$S(A) = S(\rho_A) = -\text{Tr} \rho_A \log \rho_A, \quad S(B) = S(\rho_B) = -\text{Tr} \rho_B \log \rho_B.$$

El estado conjunto es no correlacionado si y sólo si  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , es decir, si y sólo si es un estado producto, en cuyo caso sus autovalores son  $p_{ij} = p_i^A p_j^B$  con  $p_i^A$  y  $p_j^B$  los autovalores de  $\rho_A$  y  $\rho_B$ , respectivamente. En tal caso las entropías cuánticas satisfacen también  $S(A, B) = S(A) + S(B)$ , como es fácil ver de la definición (2.32).

### 2.2.2. Entropía Condicional e Información Mutua

Para el caso general, podemos ahora definir la primera versión cuántica de la **entropía condicional** utilizando directamente la fórmula (2.9) [5, 27, 29]:

$$S_1(A|B) \equiv S(A, B) - S(B) \quad (2.35)$$

$$= S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \quad (2.36)$$

No obstante, es fundamental notar que en el caso cuántico, esta cantidad *no es necesariamente positiva*. Es decir, en el caso cuántico la entropía global  $S(A, B)$  puede ser mayor, pero también *menor* que las entropías locales. El caso menor se da en los estados *entrelazados*, que definiremos en detalle en la próxima sección, y del cual se dará en este capítulo un ejemplo.

La segunda versión cuántica de la entropía condicional fue introducida por Zurek en 2001 [16] y la discutiremos más adelante.

En forma análoga, la primera versión cuántica de la **información mutua** puede definirse siguiendo las ecuaciones (2.12)–(2.14):

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \quad (2.37)$$

$$= S(A) - S_1(A|B) = S(B) - S_1(B|A) \quad (2.38)$$

la cual es también una medida de las correlaciones entre  $A$  y  $B$  [5, 27]. Si  $A$  y  $B$  son no correlacionados,  $S(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B)$  y por lo tanto  $I(A : B) = 0$ .

A diferencia de  $S_1(A|B)$ ,  $I(A : B)$  *continúa siendo positiva* en el caso cuántico, al igual que en el caso clásico:  $I(A : B) \geq 0$ , con  $I(A : B) = 0$  si y sólo si  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , tal como se demuestra a continuación. Este resultado es también conceptualmente evidente y necesario, ya que  $S(A) + S(B)$  es nuevamente una medida de la falta de información si sólo se dispone de información sobre los valores medios de observables locales, mientras que  $S(A, B)$  mide la falta de información cuando se conoce además toda la información sobre las correlaciones, es decir, sobre los valores medios de observables generales del tipo  $O_{AB} = o_A \otimes o_B$ . Por lo tanto  $S(A, B) \leq S(A) + S(B)$ .

A modo de ejemplo, consideremos un par de qubits o espines 1/2 en un estado de Bell, por ejemplo

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.39)$$

donde  $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$  denota un estado con ambos espines en la dirección  $z$  positiva. Este estado lo reescribiremos, siguiendo la notación acostumbrada en información cuántica, como

$$|\Psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.40)$$

En tal caso,

$$S(\rho_{AB}) = 0$$

(pues  $\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  corresponde a un estado puro ( $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ )) pero

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

es decir, las matrices densidad reducidas están máximamente mezcladas y por lo tanto

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = 1.$$

Esto implica

$$S_1(A|B) = 0 - 1 = -1.$$

Este estado es, como veremos luego, un estado máximamente entrelazado de dos qubits, en el que el sistema conjunto está “máximamente ordenado” (está en un estado puro) pero el sistema local está máximamente desordenado. Esto es imposible en el caso clásico, ya que si  $p_{ij} = 1$  para un cierto par  $(i, j)$  (y 0 para los restantes) entonces necesariamente  $p_i^A = p_j^B = 1$  y entonces  $S(A) = S(B) = 0$ . Este estado

conduce pues a un caso extremo de no extensividad: Mientras que  $S(A) = S(B) = 1$ , la entropía global  $S(A, B)$ , lejos de ser igual a la suma, es **nula**.

Puede también afirmarse que el estado de Bell corresponde a un caso de correlación extremo, sin análogo clásico, en el que

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - 0 = 2.$$

En el caso de dos sistemas clásicos binarios, el valor máximo de  $I(A : B)$  es 1 y corresponde a  $p_{ij} = \delta_{ij}/2$ , es decir a un sistema en el que ambos están, o bien en el estado 0, o bien en el estado 1, con igual probabilidad.

Finalmente, mencionemos que todo el formalismo estadístico clásico se recupera como caso particular del cuántico si nos restringimos a operadores densidad conjuntos de la forma

$$\rho = \sum_{i,j} p_{ij} |ij\rangle\langle ij| \quad (2.41)$$

es decir, diagonales en una base producto  $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle\}$ , y a observables que son diagonales en esta base (y por lo tanto conmutantes y simultáneamente medibles). En este caso, las matrices densidad reducidas son  $\rho_A = \sum_i p_i^A |i\rangle\langle i|$ ,  $\rho_B = \sum_j p_j^B |j\rangle\langle j|$  y quedan completamente determinadas por las distribuciones marginales  $p_i^A = \sum_j p_{ij}$ ,  $p_j^B = \sum_i p_{ij}$ , como en el primer capítulo. Los valores medios de observables diagonales  $O_{AB}$ ,  $O_A$  y  $O_B$  son pues determinados puramente por la distribuciones  $p_{ij}$ ,  $p_i^A$  y  $p_j^B$ , respectivamente.

### 2.2.3. Entropía relativa cuántica

Para demostrar la positividad de la información mutua cuántica es conveniente demostrar primeramente la positividad de la entropía relativa cuántica, definida como [5, 27, 29, 35]

$$S(\rho||\rho') = \text{Tr}\rho[\log \rho - \log \rho']. \quad (2.42)$$

Se tiene  $S(\rho||\rho') \geq 0$ , con  $S(\rho||\rho') = 0$  sii (si y sólo si)  $\rho = \rho'$  [5, 27, 29]:

$$S(\rho||\rho') = \sum_{\nu} p_{\nu} [\log p_{\nu} - \sum_{\mu} |\langle \nu|\mu'\rangle|^2 \log p'_{\mu}] \geq \sum_{\nu} p_{\nu} [\log p_{\nu} - \log q_{\nu}] = S(p||q) \geq 0$$

donde hemos utilizado las descomposiciones espectrales  $\rho = \sum_{\nu} p_{\nu} |\nu\rangle\langle \nu|$ ,  $\rho' = \sum_{\nu} p'_{\nu} |\nu'\rangle\langle \nu'|$ , definido  $q_{\nu} = \langle \nu|\rho'|\nu\rangle$ , y utilizado la concavidad del logaritmo, que implica  $\log q_{\nu} = \log[\sum_{\mu} |\langle \nu|\mu'\rangle|^2 p'_{\mu}] \geq \sum_{\mu} |\langle \nu|\mu'\rangle|^2 \log p'_{\mu}$ . En la última desigualdad hemos utilizado la positividad de la entropía relativa clásica. La igualdad rige sólo si los autovalores y las bases en que  $\rho$  y  $\rho'$  son diagonales coinciden, es decir, sólo si  $\rho = \rho'$ . Al igual que en el caso clásico, puede definirse la divergencia de Jensen-Shannon como la entropía relativa simetrizada [32, 36]  $D(\rho||\rho') = \frac{1}{2}[S(\rho||\frac{\rho+\rho'}{2}) + S(\rho'||\frac{\rho+\rho'}{2})]$ .

A partir de la entropía relativa, es fácil ver que la información mutua cuántica (2.37) puede escribirse como [35]

$$I(A, B) = S(\rho_{AB}||\rho_A \otimes \rho_B) \quad (2.43)$$

y por lo tanto,  $I(A, B) \geq 0$ , con  $I(A, B) = 0$  sii  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ .

### 2.3. Entrelazamiento

En esta sección definimos, en forma general, el concepto de estado cuántico entrelazado [1, 5, 6, 12, 15, 37] y en la sección siguiente introduciremos el concepto de discordancia cuántica o *Quantum Discord*.

#### 2.3.1. Entrelazamiento de estados puros

Un estado cuántico puro  $|\Psi\rangle$  de un sistema conjunto  $A + B$  es un estado *entrelazado* (entangled) si no es posible escribirlo como estado producto. En caso contrario se lo denomina *separable*:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle \text{ separable} \quad (2.44)$$

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle \text{ entrelazado.} \quad (2.45)$$

El entrelazamiento de un estado puro de un sistema bipartito puede medirse por medio de la *entropía de entrelazamiento* [5, 12], definida como la entropía de cualquiera de los subsistemas (ya que son siempre idénticas cuando el estado global es puro, como se demuestra luego):

$$E(A, B) = S(A) = S(B). \quad (2.46)$$

donde  $S(A) = S(\rho_A)$  con  $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$ .  $E(A, B)$  es una medida de las correlaciones cuánticas en el estado: Si  $|\Psi\rangle$  es separable, entonces  $\rho_A = |\Psi_A\rangle\langle\Psi_A|$ ,  $\rho_B = |\Psi_B\rangle\langle\Psi_B|$  y  $E(A, B) = 0$ .

En el caso puro  $E(A, B)$  coincide, pues, con el opuesto de la entropía condicional:

$$S_1(A|B) = S(A, B) - S(B) = -E(A, B)$$

dado que  $S(A, B) = 0$ . Asimismo, la correspondiente información mutua es

$$I(A : B) = S(A) - S(A|B) = 2S(A) = 2E(A, B).$$

Podemos considerar a  $I(A : B)$  como una medida de todas las correlaciones en el sistema, mientras que a  $E(A, B)$  como una medida de correlaciones puramente cuánticas en el mismo.

Para determinar efectivamente si un estado cuántico es entrelazado, debe utilizarse la denominada *descomposición de Schmidt* del estado [5]: Existen siempre bases locales  $\{|k_A\rangle\}$  y  $\{|k_B\rangle\}$  ortonormales en las que  $|\Psi\rangle$  puede escribirse en la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k |k_A\rangle |k_B\rangle \quad (2.47)$$

donde  $n_s$  es el número de Schmidt y  $\sigma_k > 0$ , donde  $\sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2 = 1$ . Las matrices densidad reducidas están entonces dadas por  $\rho_A = \sum_k \sigma_k^2 |k_A\rangle\langle k_A|$ ,  $\rho_B = \sum_k \sigma_k^2 |k_B\rangle\langle k_B|$ , siendo pues siempre isospectrales (considerando sus autovalores no nulos) lo que implica  $S(A) = S(B)$ . El caso separable corresponde a  $n_s = 1$ , donde  $E(A, B) = 0$ , mientras que el caso entrelazado a  $n_s \geq 2$ , en el que

$$E(A, B) = - \sum_{k=1}^{n_s} \sigma_k^2 \log(\sigma_k^2). \quad (2.48)$$

En el caso general, la descomposición de Schmidt puede obtenerse mediante la *descomposición en valores singulares* de la matriz, que contiene los coeficientes de expansión de  $|\Psi\rangle$  en una base ortogonal producto arbitraria [5], siendo los  $\sigma_k$  los valores singulares de dicha matriz. En el caso del estado de Bell, la ecuación (2.39) ya está expresando el estado en la forma (2.47), por lo que  $n_s = 2$ , con  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/\sqrt{2}$ .

Como se mencionó previamente, el entrelazamiento es considerado un *recurso esencial* en información cuántica [5, 6], pues permite formas radicalmente nuevas de comunicación y procesamiento de la información, tales como teleportación cuántica [2] y computación cuántica [5].

### 2.3.2. Entrelazamiento de estados no puros

En el caso de estados  $\rho$  generales, no necesariamente puros ( $\rho^2 \leq \rho$ ), la definición de entrelazamiento cuántico es más compleja. Más aún, en el caso general no es posible obtener un método computable para determinar si el estado es entrelazado en un número finito de pasos, y por lo tanto tampoco una medida computable del mismo.

Según la definición introducida por R.F. Werner en 1989 [14], un estado cuántico general es *separable* si puede ser escrito como una combinación convexa de estados producto, es decir, una superposición estadística de estados no correlacionados. En caso contrario, éste será *entrelazado*:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}, \quad q_{\alpha} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ separable} \quad (2.49)$$

$$\rho \neq \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}, \quad q_{\alpha} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ entrelazado} \quad (2.50)$$

donde  $\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 1$ . En particular, un estado producto  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , es decir, un estado no correlacionado, es un estado separable. Pero también lo es cualquier combinación convexa de los mismos. El argumento [14] es que los estados separables pueden ser generados mediante operaciones locales y comunicación clásica (es decir, por LOCC (*local operations and classical communication*) [5]) y por lo tanto no contienen correlaciones “genuinamente” cuánticas.

En otras palabras, dos personas espacialmente separadas, pueden acordar, mediante llamadas telefónicas (comunicación clásica) preparar un estado producto

$|\Psi_A\rangle|\Psi_B\rangle$ , pero también una combinación estadística de estados producto:  $A$  tira un dado y de acuerdo al valor de este prepara  $|\Psi_A^\alpha\rangle$ ,  $\alpha = 1, \dots, 6$ , y avisa a  $B$ , quien prepara el correspondiente estado  $|\Psi_B^\alpha\rangle$ , originando así una combinación convexa del tipo (2.49) ( $\rho = \sum_{\alpha=1}^6 \frac{1}{6} |\Psi_A^\alpha\rangle\langle\Psi_A^\alpha| \otimes |\Psi_B^\alpha\rangle\langle\Psi_B^\alpha|$ ).

Un estado entrelazado en cambio, no puede ser escrito en la forma anterior con coeficientes  $q_\alpha$  positivos. Los estados entrelazados se generan únicamente por medio de una interacción cuántica entre los sistemas. Por ejemplo, surgen naturalmente como autoestados de un Hamiltoniano que contenga términos de interacción  $\sum_\alpha o_A^\alpha \otimes o_B^\alpha$ , ó sencillamente al hacer evolucionar un estado inicialmente separable con un Hamiltoniano del tipo anterior [5,38] (de forma tal que el operador evolución  $U(t) = \exp[-iHt/\hbar]$  no se pueda expresar como un producto de operadores de evolución locales  $U_A(t) \otimes U_B(t)$ ).

Los estados  $\rho$  diagonales en una base producto tal como (2.41) son un caso particular de estado separable. En el caso general, los distintos términos en (2.49) no son necesariamente conmutantes.

En el caso puro, la definición (2.49) coincide por supuesto con la previa dada en la ecuación (2.45): Si  $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ , la combinación convexa (2.49) es necesariamente un estado producto  $\rho_A \otimes \rho_B$ , con  $\rho_A$  y  $\rho_B$  puros.

### 2.3.3. Criterios básicos de separabilidad

Dada una matriz densidad  $\rho_{AB}$  correspondiente a un estado no puro, no es en general nada fácil determinar si  $\rho_{AB}$  es separable o entrelazado, excepto en casos sencillos, tal como el de dos qubits. Este es en realidad un problema considerado en general “*hard*” [39].

El **criterio de la traspuesta parcial**, introducido por Asher Peres en 1996 [40], proporciona un criterio de separabilidad simple, computable y necesario, pero en general no suficiente. Es decir, es un criterio suficiente pero no necesario de entrelazamiento:

$$\rho_{AB} \text{ separable} \Rightarrow \rho_{AB}^{t_A} \geq 0 \quad (2.51)$$

donde  $t^A$  denota *traspuesta parcial* [5] ( $\langle ij|\rho_{AB}^{t_A}|kl\rangle = \langle kj|\rho_{AB}|il\rangle$ ). Es decir, si  $\rho_{AB}^{t_A}$  tiene algún autovalor negativo entonces  $\rho_{AB}$  es entrelazado. Pero si todos sus autovalores son no-negativos puede ser aún entrelazado. Sólo en el caso de dos qubits o qubit/qutrit, el presente criterio es *necesario y suficiente* [40,41].

El **criterio entrópico estándar** se basa en una característica clásica fundamental de los estados separables: Al igual que los sistemas clásicos, son siempre más desordenados globalmente que localmente [42]:

$$\rho \text{ separable} \Rightarrow S(A, B) \geq S(A) \quad (2.52)$$

y análogamente,  $S(A, B) \geq S(B)$ . Corresponden pues a una entropía condicional  $S_1(A|B)$  (y  $S_1(B|A)$ ) *positiva*. Los estados entrelazados, pueden satisfacer, como vimos anteriormente  $S(A, B) < S(A)$ , pero a diferencia del caso puro, en el caso no

puro esta condición no es necesaria: Existen también estados entrelazados que son más desordenados globalmente que localmente ( $S(A, B) > S(A), S(A, B) > S(B)$ ). Notemos también que en el caso no puro,  $S(A)$  no es necesariamente igual a  $S(B)$ .

El presente criterio entrópico puede extenderse a otras entropías mucho más generales, como veremos en la sec. 2.5.

### 2.3.4. Entrelazamiento de formación. Concurrencia

Medir el entrelazamiento en estados no puros es aún más difícil y no es un tema cerrado. Una medida comunmente utilizada es el entrelazamiento de formación, definido por la denominada extensión de techo convexo (“*convex roof extension*”) de la definición para estados puros [6, 15]:

$$E(\rho_{AB}) = \underset{\rho_{AB} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle\langle\Psi_{\alpha}|}{\text{Min}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} E(|\Psi_{\alpha}\rangle\langle\Psi_{\alpha}|) \quad (2.53)$$

es decir, es el mínimo, entre todas las representaciones posibles de  $\rho_{AB}$  como combinación convexa ( $q_{\alpha} \geq 0$ ) de estados puros  $|\Psi_{\alpha}\rangle$  (no necesariamente ortogonales), del promedio del entrelazamiento en los mismos, definido de acuerdo a (2.46). La cantidad (2.53) no es en general computable en forma exacta, salvo en el caso de dos qubits, donde W.K. Wootters logró obtener, en 1998, una fórmula general computable por medio de la llamada concurrencia  $C$  [43, 44]:

$$E(A, B) = - \sum_{\nu=\pm} q_{\nu} \log q_{\nu}, \quad q_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2(A, B)}}{2} \quad (2.54)$$

$$C(A, B) = \text{Max}[2\lambda_M - \text{Tr}R, 0] \quad (2.55)$$

donde  $\lambda_M$  es el autovalor máximo de la matriz  $R = \sqrt{\rho_{AB}^{1/2} \tilde{\rho}_{AB} \rho_{AB}^{1/2}}$ , con  $\tilde{\rho}_{AB} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho_{AB}^* \sigma_y \otimes \sigma_y$  en la base estándar (compuesta por autoestados producto de  $\sigma_z \otimes \sigma_z$ ).

Se cumple  $0 \leq C(A, B) \leq 1$ ,  $0 \leq E(A, B) \leq 1$ , con  $E(A, B) = C(A, B) = 1$  para un estado de Bell (que es, por lo tanto, un estado máximamente entrelazado), y  $E(A, B) = C(A, B) = 0$  para un estado separable, siendo  $E(A, B)$  una función estrictamente creciente de  $C(A, B)$ .

Para un estado puro arbitrario de dos qubits, puede verse que (2.54) se reduce a la entropía  $S(A) = S(B)$  de cualquiera de los qubits, dada por la expresión (2.48) con  $n_s = 2$ . En tal caso  $C(A, B) = 2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ , con

$$C^2(A, B) = 4\sigma_1\sigma_2 = 2(1 - \text{Tr} \rho_A^2). \quad (2.56)$$

## 2.4. Quantum Discord

Hasta hace poco tiempo se pensaba que el entrelazamiento capturaba todas las correlaciones cuánticas entre las componentes de un sistema. Y para que un algorit-



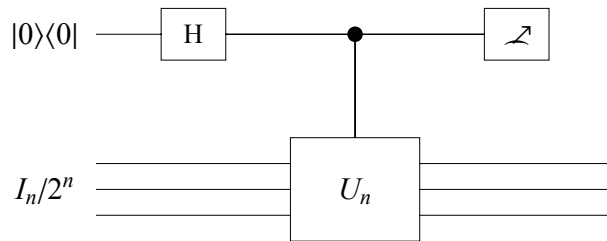


Figura II.1: Circuito del algoritmo de Knill y Laflamme para calcular la traza de un operador unitario  $U_n$ :  $\text{Tr } U_n/2^n = \langle \sigma_x \rangle + i \langle \sigma_y \rangle$ , donde  $\sigma_\mu$  son las matrices de Pauli del primer qubit.  $H$  denota la compuerta de Hadamard ( $H = (\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}$ ) y la última operación la medida sobre el primer qubit.

mo cuántico pudiera realizar una tarea de forma mucho más eficiente que un algoritmo clásico (es decir, para que la dependencia del número de pasos con el tamaño del “input” pasara, por ejemplo, de exponencial a polinomial), se creía necesario que existiera entrelazamiento apreciable en al menos algún paso del circuito cuántico. Esto es efectivamente cierto en el caso algoritmos basados en estados cuánticos puros [9]. Sin embargo, se mostró luego que esto no es necesariamente válido para algoritmos cuánticos basados en estados no puros [11, 18].

Este hecho surgió en el modelo de computación cuántica propuesto por Knill y Laflamme en [10], basado en estados cuánticos no puros (*mixed state quantum computation*). El modelo consta de un único qubit de control en un estado inicial puro (o al menos no completamente mezclado) junto con un conjunto de  $n$  qubits en el estado *máximamente mezclado*  $I_n/n$ . Si bien este esquema no es universal, es decir, no puede implementar un algoritmo arbitrario, el mismo sí es capaz de resolver en forma eficiente ciertos problemas que clásicamente son considerados *duros*, como por ejemplo el de la evaluación de la traza de una matriz unitaria  $U$  de  $2^n \times 2^n$  [10]. La ventaja es que este modelo resultaría en general más robusto frente a la decoherencia que los esquemas basados en estados puros, resultando además particularmente apto para ser implementado en computadoras cuánticas basadas en resonancia magnética nuclear [45], ya que estas trabajan con estados no puros muy cercanos al límite máximamente mezclado [5]. El modelo ha sido también implementado en pequeña escala con fotones ópticos [46].

Datta y Caves mostraron [11] que el modelo original de Knill y Laflamme [10] exhibía un entrelazamiento despreciable entre el denominado qubit de control y cualquier subconjunto de los restantes. Este resultado centró la atención en una medida alternativa de correlaciones cuánticas, propuesta originariamente por Ollivier y Zurek [16], y paralelamente por Henderson y Vedral [17], en 2001, denominada Quantum Discord (discordancia cuántica), la cual, a diferencia del entrelazamiento de formación (2.53), capturaría todas las correlaciones cuánticas presentes en un estado no puro. Datta y Caves mostraron en 2008 [18] que el circuito de Knill y Laflamme, si bien no contenía entrelazamiento apreciable, si exhibía una cantidad sustancial de Quantum Discord (una fracción considerable del máximo valor posible)



entre el qubit de control y el resto. En otras palabras, sería el Quantum Discord, y no el Entrelazamiento Cuántico, el que permitiría la realización en forma eficiente de tareas clásicamente duras, en la computación cuántica basada en estados no puros. A partir de ese momento, el Quantum Discord despertó un gran interés en el campo de la Información Cuántica [21, 47–54].

#### 2.4.1. Definición General

En lo que sigue emplearemos las definiciones dadas en las secciones previas. La extensión cuántica (2.35) de la entropía condicional no es plenamente satisfactoria, ya que puede ser negativa. Zurek propuso [16] una extensión alternativa de la definición clásica (2.6). Las probabilidades condicionales clásicas indican el grado de conocimiento de  $X$  ( $A$ ) dado el conocimiento de  $Y$  ( $B$ ). Cuánticamente, debemos primero seleccionar una base local  $b = \{|j\rangle, j = 1, \dots, n_b\}$  en  $B$ , es decir, realizar una medida de un cierto observable local  $O_B = I_A \otimes o_B$ , con  $o_B = \sum_j o_j |j\rangle\langle j|$  diagonal en esta base (asumiremos que los autovalores  $o_j$  de  $o_B$  son no degenerados) y luego medir el grado de conocimiento de  $A$  una vez realizada esta medida en  $B$ .

El estado del sistema conjunto luego de medir el resultado  $o_j$  en  $B$  es [5]

$$\rho_{AB/j} = P_j^B \rho_{AB} P_j^B / p_j, \quad p_j = \text{Tr} \rho_{AB} P_j^B \quad (2.57)$$

donde  $P_j^B = I_A \otimes |j\rangle\langle j|$  es el correspondiente proyector y  $p_j$  precisamente la probabilidad de haber medido  $o_j$ . El estado reducido de  $A$  luego de esta medición es

$$\rho_{A/j} = \text{Tr}_B \rho_{AB/j}. \quad (2.58)$$

Podemos entonces definir una segunda versión cuántica de la entropía condicional como

$$S_2(A|B_b) = \sum_j p_j S(\rho_{A/j}) \quad (2.59)$$

$$= S(\rho_{AB}^{D_b}) - S(\rho_B^{D_b}) \quad (2.60)$$

donde el subíndice  $b$  indica la base local en  $B$  definida por  $o_B$  y  $\rho_{AB}^{D_b}, \rho_B^{D_b}$  matrices densidad diagonales respecto de esta base:

$$\rho_{AB}^{D_b} = \sum_j p_j \rho_{AB/j} = \sum_j P_j^B \rho_{AB} P_j^B \quad (2.61)$$

$$\rho_B^{D_b} = \text{Tr}_A \rho_{AB}^{D_b} = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|. \quad (2.62)$$

El estado (2.61) representa el estado conjunto del sistema luego de esta medición en  $B$ , si no se conoce el resultado de dicha medición. Se ve de (2.59) que  $S_2(A|B_b) \geq 0$ , es decir, *es no negativa*, a diferencia de  $S_1(A|B)$ .

Podemos definir ahora una segunda extensión cuántica de la información mutua como

$$I_2(A : B_b) = S(A) - S_2(A|B_b). \quad (2.63)$$

La *diferencia* entre las dos versiones cuánticas (2.37) y (2.63) de la información mutua, denominada *Quantum Discord* (dependiente de la medida) por Zurek [16,17], puede escribirse como

$$D(A|B_M) = I(A : B_M) - I_2(A : B) \quad (2.64)$$

$$= S_2(A|B_b) - S_1(A|B) \quad (2.65)$$

$$= S(\rho_{AB}^{D_b}) - S(\rho_{AB}) - [S(\rho_B^{D_b}) - S(\rho_B)] \quad (2.66)$$

$$= S(\rho_{AB}^{D_b}) - S(\rho_B^{D_b}) - [S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)], \quad (2.67)$$

donde hemos escrito por conveniencia (ver abajo) las dos formas obviamente equivalentes (2.66) y (2.67). Esta discordancia cuántica depende de la densidad de probabilidad conjunta  $\rho_{AB}$  y del conjunto de proyectores  $\{P_j^B\}$  determinados por la base ortonormal  $b$ .

En el caso de medidas locales generalizadas tipo POVM definidas por un conjunto de operadores locales  $M_j^B = I_A \otimes M_j$ , con  $\sum M_j^\dagger M_j = I_B$ , deben utilizarse las fórmulas (2.59),(2.64),(2.65), con  $\rho_{AB/J} = M_j^B \rho_{AB} M_j^{B\dagger} / p_j$ ,  $p_j = \text{Tr} \rho_{AB} M_j^{B\dagger} M_j^B$ .

El mínimo de la cantidad anterior respecto de *todas* las posibles medidas locales  $M = \{M_j\}$  es el verdadero *Quantum Discord* (QD), que depende sólomente de  $\rho_{AB}$  [16,18]:

$$D(A|B) = \text{Min}_M D(A|B_M). \quad (2.68)$$

Se puede demostrar [52] que el mínimo se obtiene para operadores  $M_j$  de rango 1 (es decir, que en caso de medidas proyectivas, éstas estarán basadas en proyectores localmente unidimensionales). En lo sucesivo nos restringiremos a este tipo de medidas.

#### 2.4.2. Quantum Discord de estados puros

En el caso de estados puros, el Quantum Discord *se reduce exactamente al entrelazamiento* (2.45) [16]:

$$\rho_{AB}^2 = \rho_{AB} \Rightarrow D(A|B) = D(B|A) = E(A, B). \quad (2.69)$$

Efectivamente, si  $\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , escribiendo en una base producto arbitraria  $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |ij\rangle = \sum_j \sqrt{p_j} |j_A j\rangle$ , con  $|j_A\rangle \equiv \sum_i C_{ij} |i\rangle / \sqrt{p_j}$  y  $p_j = \sum_i |C_{ij}^2|$ , tenemos  $\rho_{A/j} = |j_A\rangle\langle j_A|$  (estado puro) y por lo tanto  $S(\rho_{A/j}) = 0$  (es decir,  $S(\rho_{AB}^{D_b}) = S(\rho_B^{D_b})$ ). Esto implica

$$D(A, B_b) = 0 - S_1(A|B) = S(B) = E(A, B). \quad (2.70)$$

### 2.4.3. Quantum Discord de estados no puros

Sólo en el caso de estados no puros puede la discordancia cuántica ser distinta al entrelazamiento, definido en el caso de estados generales por (2.53).

La cantidad (2.53) satisface las siguientes propiedades fundamentales [16]:

$$D(A|B) \geq 0 \quad (2.71)$$

$$D(A|B) = 0 \Leftrightarrow \rho_{AB} = \rho_{AB}^{D_b} \quad (2.72)$$

donde  $\rho_{AB}^{D_b}$  denota un operador separable de la forma especial (2.61), es decir, diagonal en una cierta base producto condicional  $\{|i_j j\rangle = |i_j^A\rangle \otimes |j^B\rangle, i = 1, \dots, n_A, j = 1, \dots, n_B\}$ . La propiedad (2.71) es consecuencia de una sutil propiedad de la entropía de von Neumann [27]: La entropía condicional  $S_1(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$  (con  $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ ) es una función *cóncava* de  $\rho_{AB}$ . Si bien la concavidad de  $S(\rho_{AB})$  con respecto a  $\rho_{AB}$  es consecuencia directa de la concavidad de la función  $-x \log x$ , la propiedad de concavidad de la entropía condicional  $S_1$  no es trivial y fue demostrada por Lieb [55] (en realidad se desprende de su demostración de la conjetura de Wigner-Yanase-Dyson sobre la concavidad conjunta de la función  $G(\rho_1, \rho_2) = \text{tr} \rho_1^t K \rho_2^{1-t} K \forall t \in (0, 1)$  para cualquier operador  $K$ , como puede verse en [27]). Dado que  $\rho_{AB}^{D_b}$  puede ser considerada la parte “diagonal” de  $\rho_{AB}$  en una cierta base producto, la ec. (2.67), que expresa el Discord como una diferencia de entropías condicionales  $S_1$ , junto con la concavidad de la entropía condicional  $S_1$ , implica  $D(A|B) \geq 0$ .

Con respecto a (2.72), es claro de (2.66) que si  $\rho_{AB}$  es de la forma separable particular (2.61), es decir  $\rho_{AB} = \rho_{AB}^{D_b}$  para un cierto conjunto de proyectores, entonces  $D(A, B) = 0$ , eligiendo como base de  $B$  aquella definida por estos proyectores. Para el camino inverso, puede seguirse el argumento original de Zurek [16].

Se tiene pues que si  $D(A|B) = 0$ ,  $\rho_{AB}$  es de la forma (2.61) y por lo tanto es *separable*, lo que implica  $E(A, B) = 0$ . Por el contrario, si  $E(A, B) = 0$ , esto no implica que  $\rho_{AB}$  sea de la forma (2.61) y que el Quantum Discord sea nulo, ya que los distintos términos en (2.49) no son necesariamente conmutantes. Notemos finalmente que para cualquier estado producto  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , obviamente  $D(A|B) = 0$ .

Debido a la minimización sobre el conjunto completo de medidas locales, el Discord (2.68) es, al igual que el entrelazamiento de formación, difícil de evaluar en el caso general, habiéndose mostrado recientemente que es un problema “hard” (NP completo [56]). Por esta razón, sería conveniente el desarrollo de medidas con propiedades análogas pero de evaluación más simple, algo que en parte se desarrollará en el capítulo siguiente.

## 2.5. Teoría de la mayorización y entropías generalizadas

### 2.5.1. El concepto de orden e información

Resulta difícil dar una definición rigurosa de orden de un sistema. Desde el enfoque de la teoría de la información, un sistema se dice ordenado con respecto a otro sistema dado, si poseemos más información acerca del primero que de este último. Así, el concepto de información está íntimamente ligado al concepto de orden.

Para precisar el concepto de información vamos a apelar a su definición axiomática dada por una función  $I(p)$ , cuyo dominio es el espacio de las distribuciones de probabilidades, y cuya imagen es el conjunto  $\mathfrak{R}^+$ .

A continuación enumeramos los llamados axiomas de Khinchin-Shannon [57] que deben ser satisfechos por una medida de información.

Sea el simplex  $\Delta_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ <sup>1</sup>

- I) Axioma de continuidad  
 $\forall n \in N$ ; la función  $I(p)$  debe ser continua para  $p \in \Delta_n$
- II) Maximización:  
Dado un valor de  $n \in N$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta_n$ , la función  $I(p)$  debe alcanzar su máximo para  $p_i = 1/n \forall i \in (1, \dots, n)$
- III) Expandibilidad  
 $I(p_1, p_2, \dots, p_n) = I(p_1, p_2, \dots, p_n, 0)$
- IV) Aditividad  
 $I(p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) = I(q_1, q_2) + q_1 I(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_1}) + q_2 I(\frac{p_{m+1}}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_2})$   
donde  $q_1 = p_1 + \dots + p_m$ ,  $q_2 = p_{m+1} + \dots + p_n$ .

I) Expresa que distribuciones de probabilidad próximas llevarán informaciones cercanas.

II) Asegura que cuando todos los eventos son equiprobables la falta de información será máxima.

III) Establece que si aumentamos el espacio muestral con eventos que no tienen probabilidad de ocurrencia esto no suma información alguna.

IV) Da cuenta de que la cantidad de información, asociada a un proceso aleatorio, es igual a la suma pesada de la información asociada a los subprocesos en los que éste se puede dividir. Es decir, que si la información es adquirida en dos etapas (la primera surge de elegir entre el grupo 1 y 2 y la segunda de elegir dentro de cada grupo) la información debe ser sumada.

---

<sup>1</sup>Un simplex es la envoltura convexa de un conjunto de puntos de  $\mathfrak{R}^n$ . Si el conjunto de puntos elegidos es la base estándar de  $\mathfrak{R}^n$   $\{e_1, \dots, e_n\}$ , el simplex se dice estándar. El conjunto de distribuciones de probabilidad de un espacio de  $n$  eventos forman un simplex estándar.

Bajo estos requisitos puede deducirse que la única medida de información posible resulta la entropía de Shannon

$$I(p) = S(p) \equiv -k \sum_i p_i \ln p_i \quad (2.73)$$

donde la constante  $k > 0$  puede absorberse en la base utilizada para el logaritmo ( $\log_a p = k \ln p$ , con  $k = 1/\ln a > 0$  para  $a > 1$ ).

Si la distribución de probabilidades  $p$  asociada a la variable aleatoria  $X$  cambia, la información asociada a la misma va a ser también modificada. Resulta natural entonces definir la información ganada o perdida como la diferencia entre las informaciones en una y otra situación. De esta manera la ganancia o pérdida de información estará dada por:

$$\Delta I = S_{final} - S_{inicial} . \quad (2.74)$$

Si se omite el postulado IV, existen muchas funciones  $I(p)$  que satisfacen los postulados I, II y III solamente. Llamaremos a estas funciones entropías generalizadas, que serán discutidas en la próxima sección.

### 2.5.2. Teoría de la mayorización

Si  $p = (p_1, \dots, p_n)$  y  $q = (q_1, \dots, q_n)$  son dos distribuciones de probabilidad, podemos preguntarnos cual de las dos conlleva más información, o lo que es lo mismo, cual de las dos distribuciones es la más *ordenada*.

Existe el llamado principio de transferencia, introducido a comienzos del siglo XX, por el cual, dada una distribución de probabilidad  $p$ , si transferimos parte de la probabilidad de un suceso más probable  $p_i \in p$  a otro menos probable  $p_j \in p$ , de tal manera que la cantidad transferida sea menor que  $\frac{p_i - p_j}{2}$ , se obtiene otra distribución que es más dispersa o menos concentrada, y por ende más desordenada o con menor información. Si volvemos ahora al caso de dos distribuciones de probabilidad, y mediante procesos de transferencia sucesivos obtenemos la distribución  $q$  a partir de la distribución  $p$ , se dice que  $q$  es menos ordenada o “más mezclada” que  $p$ . Existen varias maneras de precisar esto.

Si ordenamos las componentes de  $p$  y  $q$  en forma decreciente, de manera que  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$  y  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ , y se satisface que:

$$\sum_{j=1}^i q_j \leq \sum_{j=1}^i p_j \quad \forall i \in (1, \dots, n) \quad (2.75)$$

se dice que  $p$  *mayoriza* a  $q$  [58, 59] o, en símbolos,

$$q \prec p. \quad (2.76)$$

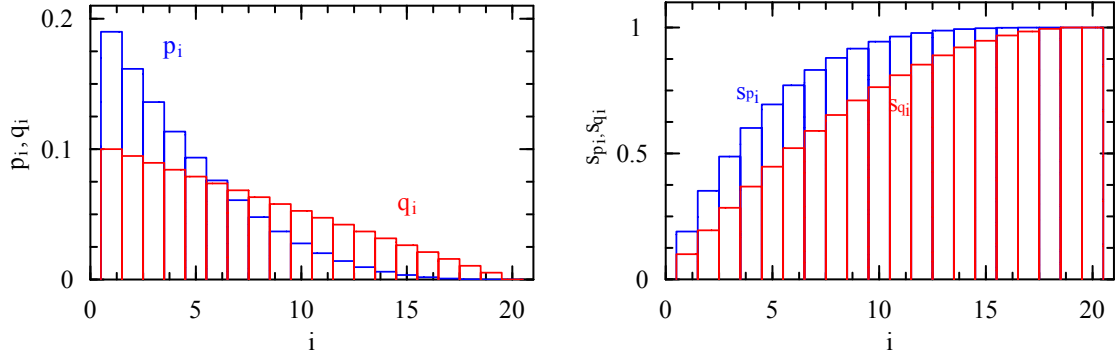


Figura II.2: Ejemplo de distribución de probabilidad (ordenada)  $q = (q_1, \dots, q_n)$  mayorizada por la distribución  $p$ . El panel derecho muestra las sumas parciales  $s_{q_i} = \sum_{j=1}^i q_j$ ,  $s_{p_i} = \sum_{j=1}^i p_j$ .

De esta forma, si  $p_i = \delta_{i,j}$  para un cierto  $j = 1, \dots, n$  (máxima certeza)  $\Rightarrow q \prec p$  para toda distribución  $q$ , mientras que para una distribución equiprobable  $q_i = 1/n \forall i$  (máxima incerteza) se tiene  $q \prec p$  para toda distribución  $p$ .

En la Fig. (II.2) [59] se puede ver el significado geométrico de la mayorización. Si  $q \prec p$ , el área acumulada de la distribución  $p$  (sus sumas parciales) es siempre mayor que la correspondiente a la distribución  $q$ .

Existen otras definiciones equivalentes a la anterior, como por ejemplo la siguiente: si existe un conjunto de matrices de permutación  $\{\Pi_i\}$ , con coeficientes  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_i \alpha_i = 1$  tal que  $q = \sum_i \alpha_i \Pi_i p$ , entonces  $q \prec p$  y viceversa:

$$q \prec p \iff q = \sum_i \alpha_i \Pi_i p \quad (2.77)$$

O, en forma equivalente,

$$q \prec p \iff q = Dp \quad (2.78)$$

siendo  $D$  una matriz doblemente estocástica, o sea, una matriz tal que todas sus entradas son no negativas y tal que todas sus filas y columnas suman uno. Por este motivo, si  $q \prec p$  se dice también que la distribución  $q$  es “más mezclada” que  $p$ .

Notemos que dadas dos distribuciones de probabilidad  $p, q$ , puede cumplirse que  $q \not\prec p$  y  $p \not\prec q$ , es decir, que ninguna mayorice a la otra. Se dice entonces que la mayorización constituye una relación de orden parcial entre distribuciones de probabilidad. Es decir, la mayorización no es un orden total. No puede establecerse una estricta relación de “más mezclada” entre dos distribuciones cualesquiera.

Finalmente, mencionamos que el concepto de mayorización se aplica también a distribuciones  $p = (p_1, \dots, p_n)$  y  $q = (q_1, \dots, q_m)$  aún cuando  $m \neq n$ . En este caso se completa con ceros la distribución asociada al mínimo entre  $m$  y  $n$ .

### 2.5.3. Entropías Generalizadas

Otra manera, muy conveniente, de presentar la mayorización es la siguiente.

Sea  $F$  el conjunto de funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  cóncavas y derivables que satisfacen  $f(0) = f(1) = 0$ . Luego, puede demostrarse [59, 60]

$$q \prec p \iff \sum_i f(q_i) \geq \sum_i f(p_i) \quad \text{para toda } f \in F. \quad (2.79)$$

Recordemos que la concavidad significa

$$f[qp_1 + (1 - q)p_2] \geq qf(p_1) + (1 - q)f(p_2) \quad \forall q \in [0, 1] \quad (2.80)$$

con la igualdad válida (en el caso estricto) sólo si  $p_1 = p_2$  ó  $q(1 - q) = 0$ . Para  $f$  derivable, la concavidad equivale a  $f'(p)$  decreciente para  $p \in (0, 1)$ .

Para  $f \in F$ , la función [27, 59–61]

$$S_f(p) = \sum_i f(p_i) \quad (2.81)$$

es una medida del grado de “mezcla” asociada a la distribución de probabilidad  $p$ , y la denotaremos como entropía generalizada. Estas entropías satisfacen

$$S_f(p) \geq 0$$

con  $S_f(p) = 0$  sólo si  $p_i = \delta_{ij}$  para un cierto  $j = 1, \dots, n$  (máxima certeza) y  $S_f(p)$  máxima para  $p_i = 1/n \forall i$  (máxima incerteza). Más aún, la ecuación (2.79) puede escribirse como [60]

$$q \prec p \iff S_f(q) \geq S_f(p) \quad \text{para toda } f \in F \quad (2.82)$$

por lo que todas estas entropías son sensibles al grado de “mezcla” de la distribución: Si  $q \prec p$  entonces  $S_f(q) \geq S_f(p)$ , para toda  $S_f$ . Y además, si  $S_f(q) \geq S_f(p)$  para toda  $S_f$  entonces  $q \prec p$ . Es decir, son suficientes para asegurar la relación de mayorización. Por otro lado,  $S_f(q) > S_f(p)$  para una  $f$  determinada no implica necesariamente  $q \prec p$ . La relación de mayorización no puede capturarse con una sólo entropía, siendo por lo tanto más estricta que la relación de “desorden” que emerge de un sólo tipo de entropía.

Las entropías (2.81) satisfacen así los axiomas I, II y III (III es consecuencia inmediata de (2.82)). Pero obviamente, IV se satisface sólo si  $f(p) = -k p \ln p$ , con  $k > 0$ .

El concepto de mayorización es una relación de orden muy fuerte, que según veremos luego, nos permitirá capturar el concepto de información cuántica contenida en un cierto estado cuántico no puro. Es una idea de orden cualitativo, en el sentido de que si la distribución  $p$  mayoriza a la distribución  $q$ , estamos en condiciones de afirmar que existirá más información contenida en la distribución  $p$  que en la

distribución  $q$ , pero no sabemos cuanto vale esa cantidad de información. La clave se encuentra en las ec. (2.79)–(2.81). Estas nos dicen que si para toda función suave y cóncava siempre se mantiene la relación de desigualdad entre las entropías  $S_f$ , luego esto impone un orden entre ambas distribuciones, pero desde luego no sabemos cuanto más ordenada está una distribución con respecto a la otra, y por ello se dice que es un orden cualitativo. Esto no nos impide elegir una de entre el conjunto infinito de funciones cóncavas y así expresar en números tal desigualdad. Al haber hecho esto hemos elegido una medida arbitraria de información, al igual que se hace cuando se elige la entropía de Shannon. Es por esta razón que la mayorización es un orden cualitativo más general. Necesitamos precisar que función cóncava se elige para dar un número preciso de cuanta información habrá en cada distribución. Esto, al contrario de lo que podría parecer, es realmente una gran ventaja ya que podemos elegir como medir la información de acuerdo a la naturaleza de la misma y a los recursos de cálculo. Además nos revela algo más profundo. Si omitimos el cuarto postulado, la cuantificación de la información estadística va a depender de como se elija medir tal propiedad.

Por ejemplo, si  $q = (0,4, 0,4, 0,2)$  y  $p = (0,5, 0,25, 0,25)$ , se tiene  $q \not\prec p$ , ya que  $q_1 < p_1$  pero  $q_1 + q_2 > p_1 + p_2$ . Sin embargo, se verifica  $S(q) \approx 1,52 > S(p) = 1,5$ , lo que muestra que al emplear sólo la entropía de Shannon, no se logra detectar la ausencia de una relación de orden estricta entre ambas distribuciones. No obstante, existen funciones “entrópicas”  $f$  tales que  $S_f(q) < S_f(p)$ , detectando así la ausencia de mayorización.

El ejemplo más típico de entropía generalizada de la forma (2.81) es la que corresponde a elegir la función cóncava (en lo sucesivo emplearemos la normalización  $2f(1/2) = 1$ )

$$f_q(p) = \frac{p - p^q}{1 - 2^{1-q}}, \quad q > 0 \quad (2.83)$$

que conduce a la usualmente denominada entropía de Tsallis [62],

$$S_q(p) = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{1 - 2^{1-q}}, \quad q > 0. \quad (2.84)$$

Como casos particulares, podemos resaltar la entropía cuadrática ( $q = 2$ ),

$$S_2 = 2\left(1 - \sum_i p_i^2\right) \quad (2.85)$$

la cual surge de utilizar

$$f_2(p) = p(1 - p) = p - p^2. \quad (2.86)$$

Esta entropía también se denomina usualmente entropía lineal, porque puede ser obtenida a partir de la aproximación lineal  $\log p \approx p - 1 + O(p - 1)^2$ , o sea,  $-p \ln p \approx p - p^2 + O(p(p - 1)^2)$  para  $p \rightarrow 1$ .



Por otro lado, al tomar el límite  $q \rightarrow 1$  en (2.83)–(2.84), se recupera la entropía de Shannon:  $f_q(p) \rightarrow -p \log(p)$  para  $q \rightarrow 1$ , y entonces

$$S_q(p) \xrightarrow{q \rightarrow 1} S(p) = - \sum_i p_i \log(p_i). \quad (2.87)$$

Las muy conocidas entropías de Renyi  $S_q^R$  [63], si bien no son de la forma (2.81), son una función creciente de una forma  $S_f$ :

$$S_q^R(p) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_i p_i^q \quad (2.88)$$

$$= \frac{\log_2[1 - (1 - 2^{1-q})S_q(p)]}{1-q}, \quad q > 0. \quad (2.89)$$

Estas entropías cumplen  $S_q^R(p \times p') = S_q^R(p) + S_q^R(p')$ , pero no cumplen el cuarto postulado. Además, al ser funciones crecientes de  $S_q$ , satisfacen  $S_q^R(p') \geq S_q^R(p)$  si  $p' \prec p$ . Toda función real  $I(p)$  que satisfaga  $I(p') \geq I(p)$  cuando  $p' \prec p$  se denomina “Schur-cóncava” [58]. Tales funciones son simétricas pero no necesariamente cóncavas. De hecho, las entropías de Renyi no son necesariamente cóncavas. No obstante, el conjunto de entropías de la forma (2.81) (entropías “tipo traza”) es ya suficiente para determinar si dos distribuciones exhiben un orden de mayorización, por lo que capturan completamente este concepto. Nos restringiremos a este tipo de entropías generalizadas en lo sucesivo.

#### 2.5.4. Mayorización y entropías generalizadas en el caso cuántico

En el caso cuántico, se define la relación de mayorización entre dos operadores densidad  $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ ,  $\rho' = \sum_i p'_i |i'\rangle\langle i'|$  en términos de sus autovalores  $p_i$ ,  $p'_i$ , ordenados en orden decreciente:

$$\rho' \prec \rho \iff \sum_{j=1}^i p'_j \leq \sum_{j=1}^i p_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.90)$$

Si las dimensiones son distintas, se completa con ceros el conjunto de autovalores del operador de menor dimensión. De esta forma, si  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  es un estado puro,  $\rho' \prec \rho \forall \rho'$ , mientras que si  $\rho' = I_n/n$  es el estado máximamente mezclado,  $\rho' \prec \rho \forall \rho$ .

La entropía generalizada (2.81) se define ahora como [27, 59, 64]

$$S_f(\rho) = \text{Tr } f(\rho) = \sum_i f(p_i) \quad (2.91)$$

donde hemos escrito  $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$  (descomposición espectral). Se satisface (para  $f(0) = 0$ )

$$\rho \prec \rho' \iff S_f(\rho) \geq S_f(\rho') \forall f \in F. \quad (2.92)$$

Se cumple entonces  $S_f(\rho) \geq 0$ , con  $S_f(\rho) = 0$  sii  $\rho$  es puro, mientras que  $S_f(\rho)$  es siempre máxima para  $\rho = I_n/n$ , con  $n$  la dimensión del espacio de Hilbert del sistema. Resulta también obvio que  $S_f(\rho)$  permanece invariante ante transformaciones unitarias  $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$ .

Podemos ahora enunciar *el criterio entrópico generalizado de separabilidad*, mencionado previamente: Si  $\rho_{AB}$  es separable, entonces se cumple [60, 65]

$$S_f(\rho_{AB}) \geq S_f(\rho_A), \quad S_f(\rho_{AB}) \geq S_f(\rho_B) \quad (\rho_{AB} \text{ separable}) \quad (2.93)$$

$\forall S_f$ , es decir [66]

$$\rho_{AB} \prec \rho_A, \quad \rho_{AB} \prec \rho_B. \quad (2.94)$$

Los estados separables son así rigurosamente más desordenados globalmente que localmente, en el sentido que verifican la relación de mayorización, al igual que todo sistema compuesto clásico, es decir, descrito por una distribución de probabilidad conjunta [29]. El criterio (2.93), equivalente a (2.94), es más fuerte que el criterio entrópico estándar (2.52) [60, 65, 66].

La versión cuántica de la entropía cuadrática (2.85),

$$S_2(\rho) = 2(1 - \text{Tr}\rho^2) \quad (2.95)$$

está directamente relacionada con la pureza  $P(\rho) = \text{Tr}\rho^2$  del estado. La condición  $S_2(\rho) = 0$ , satisfecha sólo si  $\rho^2 = \rho$ , es obviamente equivalente a  $P(\rho) = 1$ .

Esta entropía posee una gran ventaja sobre otras entropías: puede ser determinada sin necesidad de calcular los autovalores de  $\rho$ , requiriendo sólo la evaluación de la traza de  $\rho^2$ . Además, desde el punto de vista experimental, puede ser determinada en forma directa, sin necesidad de una tomografía completa del estado [67].

Esta entropía está también directamente relacionada con la concurrencia. La ec. (2.56) muestra que el cuadrado de la concurrencia de un estado puro no es otra cosa que la entropía cuadrática de los estados marginales:

$$C^2(A, B) = S_2(\rho_A) = S_2(\rho_B). \quad (2.96)$$

### III Medidas entrópicas generalizadas de correlaciones cuánticas

En este capítulo definiremos primero el concepto de déficit o pérdida de información ocasionado por una medición sobre un sistema cuántico. Luego se utilizará este concepto para definir una medida entrópica generalizada de correlaciones cuánticas, que se reduce a la correspondiente entropía de entrelazamiento en el caso de estados puros. No obstante, para estados no puros difiere del entrelazamiento, teniendo propiedades análogas a las de la discordancia cuántica. Esta medida generalizada comprende como casos particulares medidas más simples que la discordancia, en el sentido de que admiten una evaluación más sencilla. Los resultados expuestos en este capítulo dieron lugar a los trabajos [19, 24].

#### 3.1. Déficit de información

Una de las características fundamentales de la mecánica cuántica es que un sistema cuántico no queda invariante luego de una medición. La medición implica una interacción entre el aparato de medida y el sistema, quedando luego el sistema entrelazado con el aparato de medida. Como consecuencia, el estado reducido promedio del sistema cuántico luego de la medición es no puro y, como veremos, de mayor entropía que el estado original.

Consideremos primero una medida estándar, es decir, proyectiva, definida por un conjunto de proyectores ortogonales

$$M = \{P_\nu\}, \quad P_\nu P_\mu = \delta_{\nu\mu} P_\nu, \quad \sum_\nu P_\nu = I. \quad (3.1)$$

Luego de esta medición, si se obtiene el resultado  $\nu$ , el sistema queda en el estado

$$\rho'_\nu = \frac{P_\nu \rho P_\nu}{\text{Tr} P_\nu \rho} \quad (3.2)$$

donde  $p_\nu = \text{Tr} P_\nu \rho$  es la probabilidad de obtener este resultado. Al repetir estas mediciones sobre estados igualmente preparados, el estado promedio del sistema luego de la medida es entonces

$$\rho' = \sum_\nu p_\nu \rho'_\nu = \sum_\nu P_\nu \rho P_\nu. \quad (3.3)$$

La Ec. (3.3) representa así el estado del sistema posmedida, cuando no se conoce el resultado de la medida.

Una característica básica de (3.3) es que su entropía de von Neumann nunca será menor que la del estado original, y será normalmente mayor:

$$S(\rho') \geq S(\rho) \quad (3.4)$$

con  $S(\rho') = S(\rho)$  sólo si  $\rho' = \rho$ . Este resultado es en realidad un caso particular del resultado mucho más general que discutiremos en la próxima sección. Refleja el hecho de que luego de la medida, se pierden los elementos “no diagonales” de  $\rho$  en la base definida por los proyectores (decoherencia). La diferencia

$$I^M(\rho) = S(\rho') - S(\rho) \quad (3.5)$$

se denomina *Déficit de Información* [68, 69], y es una cantidad no negativa. Es una medida de la información perdida en los elementos no diagonales en dicha base.

A continuación extenderemos este resultado a entropías generalizadas, lo que permitirá apreciar que la desigualdad (3.4) no es consecuencia de la forma particular de la entropía de von Neumann. Luego, se utilizará esta noción de Déficit de Información para definir una medida general de correlaciones cuánticas, basada en la pérdida de información debido a una medida *local* en el sistema.

## 3.2. Déficit de información generalizado

### 3.2.1. Concepto general

Como hemos visto, la mayorización no es un orden total en un conjunto de distribuciones de probabilidad u operadores densidad, ya que pueden existir casos en los que, siendo  $p$  y  $q$  dos distribuciones de probabilidad,  $p \not\prec q$  y  $q \not\prec p$ .

Sin embargo, una medida proyectiva *sí induce un orden* entre los operadores pre y posmedida  $\rho$  y  $\rho'$  (Ec. (3.3)), según el criterio de mayorización: Se cumple siempre

$$\rho' \prec \rho \quad (3.6)$$

y esto implica

$$S_f(\rho') \geq S_f(\rho) \quad (3.7)$$

para *cualquier forma entrópica generalizada*

$$S_f(\rho) = \text{Tr } f(\rho) \quad (3.8)$$

con  $f : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ , cóncava y definida positiva en  $(0, 1)$ , y  $f(0) = f(1) = 0$ . La ecuación (3.7) refleja de manera más rigurosa que (3.4) el hecho de que  $\rho'$  pierde los elementos no diagonales de  $\rho$  en la base definida por los proyectores, y que por lo tanto, tiene menos información que  $\rho$ : Esta pérdida es detectada por *cualquier*

forma entrópica (3.8). Recordemos que la validez de (3.7)  $\forall S_f$  implica (3.4), pero la relación inversa no es necesariamente válida.

Demostremos la relación (3.6), o equivalentemente, (3.7). Eligiendo adecuadamente la base de cada subespacio definido por  $P_\nu$  (no necesariamente unidimensional), tal que dentro de ese subespacio  $\rho$  sea diagonal en dicha base, podemos escribir el operador (3.3) como

$$\rho' = \sum_j q_j |j'\rangle\langle j'|, \quad q_j = \langle j'|\rho|j'\rangle \quad (3.9)$$

donde  $\{|j'\rangle\}$  es un conjunto de estados ortonormales tal que  $P_\nu = \sum_{|j'\rangle \in \mathcal{H}_\nu} |j'\rangle\langle j'|$  y  $\langle j'|\rho|k'\rangle = \delta_{jk}\langle j'|\rho|j'\rangle$ , con  $\mathcal{H}_\nu$  el soporte de  $P_\nu$ . Esto permite ver que  $\rho'$  es la parte diagonal del operador  $\rho$  en alguna base particular.

Que esto implica (3.6) (Teorema de Schur [58]) no es obvio en forma inmediata, pero puede demostrarse fácilmente probando la desigualdad (3.7) para toda  $S_f$  [19], lo que es equivalente a (3.6). Rigurosamente, si la descomposición espectral de  $\rho$  es

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad (3.10)$$

entonces, para toda  $f$  cóncava,

$$S_f(\rho') = \sum_j f(q_j) = \sum_j f\left(\sum_i p_i |\langle i|j'\rangle|^2\right) \quad (3.11)$$

$$\geq \sum_{i,j} |\langle i|j'\rangle|^2 f(p_i) = \sum_i f(p_i) = S_f(\rho). \quad (3.12)$$

Por lo tanto, toda medida de falta de información sobre la distribución  $q$ , o sea sobre el estado promedio después de la medición, será mayor o igual que aquella sobre la distribución  $p$ , o sea, sobre el estado antes de la medición. Y para  $f$  estrictamente cóncava, la igualdad en (3.12) se cumple sólo si  $|\langle i|j'\rangle| = \delta_{ij} \forall j$  (para una elección adecuada de los estados  $|i\rangle$  si existe degeneración), en cuyo caso  $q_j = p_j$  y entonces  $\rho' = \rho$ .

Resulta ahora natural definir el *Déficit de Información generalizado* como [19]

$$I_f^M(\rho) = S_f(\rho') - S_f(\rho) \quad (3.13)$$

que cumple  $I_f^M(\rho) \geq 0 \forall M$  proyectiva, con  $I_f^M(\rho) = 0$  si y sólo si  $\rho' = \rho$ , esto es, sólo si  $\rho$  queda en promedio invariante luego de la medida, lo que implica que  $\rho$  debe ser ya diagonal en la base definida por la medida.

### 3.2.2. Casos particulares: Entropías de von Neumann, cuadrática y q

De la definición (3.13) surgen distintas medidas de Déficit de Información, cada una asociada a una determinada entropía generalizada  $S_f$ . En el caso de la *entropía de von Neumann*,

$$S_f(\rho) = S(\rho) = -\text{Tr } \rho \log_2 \rho$$

$I_f^M$  es el Déficit de Información estándar (3.5). Puede verse que para  $\rho'$  dado por (3.3), esta cantidad es igual a la *entropía relativa* de  $\rho$  a  $\rho'$ :

$$I^M(\rho) = S(\rho') - S(\rho) \quad (3.14)$$

$$= \text{Tr} \rho (\log_2 \rho - \log_2 \rho') = S(\rho || \rho'). \quad (3.15)$$

Se verifica entonces que  $I^M(\rho)$  es no negativa  $\forall \rho, \rho'$ , anulándose sii  $\rho' = \rho$ .

Otro ejemplo muy importante es el de la *entropía cuadrática* (2.95)

$$S_2(\rho) = 2(1 - \text{Tr} \rho^2). \quad (3.16)$$

La correspondiente pérdida de información puede escribirse como [19]

$$\begin{aligned} I_2^M(\rho) &= S_2(\rho') - S_2(\rho) \\ &= 2 \text{Tr} (\rho^2 - \rho'^2) = 2 \text{Tr} \rho (\rho - \rho') \\ &= 2 \|\rho - \rho'\|^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde  $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^\dagger A)$  es el cuadrado de la norma de Hilbert-Schmidt (norma Frobenius). Por lo tanto,  $I_2^M(\rho)$  es proporcional al cuadrado de la norma estándar de la parte no diagonal de  $\rho$  en la base de medida, perdida en la misma. Al igual que en el caso de von Neumann, se verifica entonces que  $I_2^M(\rho) \geq 0$ , con  $I_2^M(\rho) = 0$  sii  $\rho' = \rho$ .

En general, podemos definir, para la entropía (2.84),

$$S_q(\rho) = c_q(1 - \text{Tr} \rho^q) \quad (3.18)$$

donde  $q > 0$  y  $c_q = 1 - 2^{1-q}$ , la pérdida de información como [19]

$$I_q^M(\rho) = S_q(\rho') - S_q(\rho) \quad (3.19)$$

$$= c_q \text{Tr} (\rho^q - \rho'^q) = c_q \text{Tr} \rho (\rho^{q-1} - \rho'^{q-1}). \quad (3.20)$$

Esta cantidad se reduce a (3.17) para  $q = 2$  y a (3.15) para  $q \rightarrow 1$ .

Otra cantidad estrechamente relacionada con  $I_q^M$  es [70]

$$I_{R_q}^M(\rho) = S_q^R(\rho') - S_q^R(\rho) = \frac{1}{1-q} \log_2 \frac{\text{Tr} \rho'^q}{\text{Tr} \rho^q} \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{1-q} \log_2 \left[ 1 - \frac{I_q^M(\rho)}{c_q - S_q(\rho)} \right] \quad (3.22)$$

donde  $S_q^R$  es la entropía de Renyi (2.89), que posee esencialmente el mismo significado que  $I_q^M(\rho)$ . Esta cantidad también satisface  $I_{R_q}^M \geq 0$ , con  $I_{R_q}^M = 0$  sii  $\rho' = \rho$  (tal como se desprende de la desigualdad  $I_q^M(\rho) \geq 0$ , con  $I_q^M(\rho) = 0$  sii  $\rho' = \rho$ ), con  $\lim_{q \rightarrow 1} I_{R_q}^M(\rho) = I^M(\rho)$ .

Nótese que si  $\rho = \rho_S \otimes \rho_E$  y la medida  $M$  afecta sólo a  $\rho_S$ , es decir,  $M \rightarrow M_S$ , definida por proyectores  $P_\nu = P_\nu^S \otimes I_E \forall \nu$ , entonces  $I_{R_q}^{M_S}(\rho_S \otimes \rho_E) = I_{R_q}^{M_S}(\rho_S)$ , ya que  $\text{Tr} \rho^q = \text{Tr}_S \rho_S^q \text{Tr}_E \rho_E^q$ . El cociente en (3.21) y por lo tanto (3.22) resulta así independiente del estado del “entorno” descrito por  $\rho_E$ , tal como sucede para  $I^M(\rho)$  ( $I^{M_S}(\rho_S \otimes \rho_E) = I^{M_S}(\rho_S)$ ).

### 3.2.3. El caso general para pequeñas perturbaciones del estado

Remarquemos que la positividad de (3.13) surge de la relación de mayorización  $\rho' \prec \rho$  y de la estricta concavidad de  $S_f$ , y no de la forma particular de  $S_f$ . De hecho, si en la base definida por la medida, los elementos de  $\rho$  fuera de la diagonal son suficientemente pequeños (o sea, si  $\rho$  no es fuertemente modificado por la medición), una expansión perturbativa estándar (a segundo orden en estos elementos) de (3.13) muestra que [19]

$$I_f^M(\rho) \approx \sum_{j < k} \frac{f'(q_k) - f'(q_j)}{q_j - q_k} |\langle j' | \rho | k' \rangle|^2 \quad (3.23)$$

donde  $q_j = \langle j' | \rho | j' \rangle$ . La fracción en (3.23) es positiva  $\forall q_j \neq q_k$ , dada la concavidad de  $f$ , y si  $q_k \rightarrow q_j$ , debe ser reemplazada por su límite  $-f''(q_j) > 0$ .

La Ec. (3.23) representa el cuadrado de una *norma ponderada* de los elementos de  $\rho$  fuera de la diagonal. En el caso (3.16), el peso es uniforme para todo  $q_j, q_k$  ( $f'(q) = -4q$ ) y la Ec. (3.23) se reduce, por supuesto, a la Ec. (3.17). Para otras  $f$ , el cociente dependerá de  $q_j$  y  $q_k$ .

### 3.2.4. Medidas no proyectivas

Hasta ahora hemos considerado sólo medidas proyectivas. Si utilizamos medidas generalizadas tipo POVM (positive operator valued measurements) [5], definidas por un conjunto de operadores

$$M = \{M_k\}, \quad \sum_k M_k^\dagger M_k = I \quad (3.24)$$

entonces el estado luego de medir el resultado  $k$  es  $\rho_k = p_k^{-1} M_k \rho M_k^\dagger$ , con  $p_k = \text{Tr} \rho M_k^\dagger M_k$  la probabilidad de medir este resultado. El estado promedio luego de la medida es entonces

$$\rho' = \sum_k M_k \rho M_k^\dagger. \quad (3.25)$$

La positividad de (3.13) en este caso queda garantizada si se cumple además que [19, 71]

$$\sum_k M_k M_k^\dagger = I \quad (3.26)$$

es decir, si la medida deja invariante el estado máximamente mezclado  $\rho_m = I/\text{Tr}(I)$  ( $\sum_k M_k \rho_m M_k^\dagger = \rho_m$ ).

*Demostración [19]:* Si  $|i\rangle$  y  $|j'\rangle$  son los autovectores de  $\rho$  y  $\rho'$  respectivamente, se cumple, por (3.24) y (3.26), que  $\sum_{j,k} |\langle j' | M_k | i \rangle|^2 = \sum_{i,k} |\langle j' | M_k | i \rangle|^2 = 1$  y por lo tanto,  $\forall S_f$ ,

$$S_f(\rho') = \sum_j f\left(\sum_{k,i} p_i |\langle j' | M_k | i \rangle|^2\right) \geq \sum_{i,j,k} |\langle j' | M_k | i \rangle|^2 f(p_i) = \sum_i f(p_i) = S_f(\rho)$$

por lo que  $\rho' \prec \rho$ .

La primera condición (3.24),  $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$ , asegura la conservación de la traza, mientras que la segunda condición (3.26) garantiza que los autovalores de  $\rho'$  sean combinación convexa de los autovalores de  $\rho$ , implicando entonces la mayorización. Para medidas proyectivas estándar, los operadores  $M_k$  son proyectores ortogonales y se cumplen ambas identidades.

### 3.3. Déficit de Información por medida local

Hasta aquí hemos presentado una medida general de pérdida de información debido a una medición arbitraria sobre un sistema cuántico. Veremos en lo que sigue que si tenemos un sistema bipartito  $A + B$ , y realizamos una medida *local* en alguno de los dos subsistemas, digamos  $B$ , podemos relacionar la pérdida de información con la correlaciones existentes entre ambos subsistemas antes de realizar la medida local.

#### 3.3.1. Pérdida de información por medida local en un sistema bipartito

Sea  $\rho_{AB}$  el estado de un sistema bipartito  $A + B$ . Una medida proyectiva local *completa* en el subsistema  $B$  queda definida por un conjunto completo de proyectores locales unidimensionales  $P_j^B = |j_B\rangle\langle j_B|$ , con  $P_j^B P_{j'}^B = \delta_{jj'}$ ,  $\sum_j P_j^B = I_B$ . Luego, los operadores de medida sobre el sistema conjunto son

$$P_j = I_A \otimes P_j^B \quad (3.27)$$

que no son unidimensionales, sino de rango  $d_A$ . Si el resultado de la medida local es  $j$ , el estado conjunto posmedida es

$$\rho'_{AB/j} = \rho_{A/j} \otimes P_j^B \quad (3.28)$$

donde

$$\rho_{A/j} = \frac{\text{Tr}_B P_j \rho_{AB} P_j}{\text{Tr}_{AB} \rho_{AB} P_j} \quad (3.29)$$

es el estado reducido del sistema  $A$  luego de esta medida, y

$$q_j = \text{Tr}_{AB} \rho_{AB} P_j = \text{Tr}_B \rho_B P_j^B$$

la probabilidad de obtener este resultado. Por lo tanto, el estado promedio luego de la medición resulta

$$\rho'_{AB} = \sum_j P_j \rho_{AB} P_j = \sum_j q_j \rho_{A/j} \otimes P_j^B. \quad (3.30)$$

La diferencia

$$I_f^{MB} = S(\rho'_{AB}) - S(\rho_{AB}) \quad (3.31)$$



cuantifica la pérdida de información debido a esta medida local. Esta cantidad es no negativa, y es nula sólo si  $\rho'_{AB} = \rho_{AB}$ , esto es, sólo si  $\rho_{AB}$  permanece invariante frente a esta medida local. Para que esto último suceda,  $\rho_{AB}$  tiene que ser por lo tanto de la forma (3.30), es decir, un estado *clásicamente correlacionado* respecto de  $B$ , con  $\rho_B$  diagonal en la base local definida por los proyectores.

Notemos que el estado (3.30) puede escribirse como

$$\rho'_{AB} = \sum_{i,j} q_j p_{i/j} P_{i_j}^A \otimes P_j^B \quad (3.32)$$

con  $p_{i/j}$  los autovalores de  $\rho_{AB/j}$  y  $P_{i_j}^A = |i_{jA}\rangle\langle i_{jA}|$  el proyector sobre los autovalores normalizados de  $\rho_{A/j}$ . El estado (3.30) es entonces diagonal en una base producto condicional  $\{|i_A(j)\rangle \otimes |j_B\rangle\}$ , y una vez elegida esta base queda completamente determinado por una distribución de probabilidad conjunta  $p_{ij} = q_j p_{i/j}$ , tal como un sistema bipartito clásico. Como se mencionó previamente, todo estado que permanece invariante en promedio frente a una medida local es de esta forma.

### 3.3.2. Mínima pérdida de información por medida local

Al realizar una medida proyectiva sobre  $B$ , los elementos perdidos fuera de la diagonal principal son entonces

$$\langle i'_A j'_B | \rho_{AB} | i_A j_B \rangle = \text{Tr} \rho_{AB} | i_A j_B \rangle \langle i'_A j'_B |, \quad j \neq j' \quad (3.33)$$

que conectan estados distintos de  $B$ . Al anularse estos términos en el operador posmedida, se destruyen las correlaciones cuánticas entre  $A$  y  $B$ .

Si la medida local y completa  $M^B$  realizada sobre  $B$  deja a  $\rho_{AB}$  inalterado, es decir, si  $\rho_{AB}$  ya es de la forma (3.30), tenemos  $I_f^{M^B}(\rho_{AB}) = 0$  para una medida local basada en los proyectores  $P_j^B$ . Si por el contrario, el estado original  $\rho_{AB}$  no es de la forma (3.30), luego de aplicar la medida proyectiva se tendrá que  $I_f^{M^B}(\rho_{AB}) > 0$ , cantidad que será menor cuanto menor sea la perturbación producida por dicha medida sobre el sistema. Habrá al menos una medida que sea la que menos perturbe al sistema, es decir, la que lleve al menor aumento posible de entropía. Esta medida particular producirá un estado posmedida más cercano al estado original, en el sentido de haber conservado más información entre todos los estados posmedida posibles. En base a lo discutido previamente definimos

$$I_f^B(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M^B} I_f^{M^B}(\rho_{AB}) \quad (3.34)$$

es decir, la mínima pérdida de información  $I_f^{M^B}$  entre todas las medidas locales en  $B$ . Tenemos entonces

$$I_f^B(\rho_{AB}) \geq 0$$

con  $I_f^B(\rho_{AB}) = 0$  si y sólo si  $\rho_{AB}$  es de la forma (3.30), o sea, un estado clásicamente correlacionado respecto de  $B$ . La cantidad (3.34) se anula entonces para los

mismos estados para los que se anula el Quantum Discord, y sólo para ellos. La medida  $I_f^B(\rho_{AB})$  puede ser interpretada como el mínimo apartamiento entre el estado posmedida  $\rho'_{AB}$  y  $\rho_{AB}$ , bajo el orden inducido por la entropía  $S_f$ .

Recordemos que los estados (3.30) son casos particulares de estados separables, es decir, de estados que son combinaciones convexas de estados producto ( $\rho_{AB}^s = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}$ ,  $q_{\alpha} > 0$ ). En general, las componentes  $\rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}$  de estas combinaciones son no conmutantes (a diferencia del estado (3.30)) y por ende un estado separable no es necesariamente de la forma (3.30), teniendo típicamente autoestados entrelazados. Por lo tanto  $I_f^B(\rho_{AB})$  será positiva no sólo en estados no separables (entrelazados), sino también en todos los estados separables que no son de la forma (3.30), detectando así las correlaciones emergentes de la mezcla de productos  $\rho_A^{\alpha} \otimes \rho_B^{\alpha}$  no conmutantes entre sí.

En forma análoga podemos definir la cantidad

$$I_f^A(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M_A} I_f^{M_A}(\rho_{AB}) \quad (3.35)$$

para medidas locales realizadas en  $A$ .  $I_f^A(\rho_{AB})$  se anula sólo para estados clásicamente correlacionados respecto de  $A$ , es decir, para los que existe al menos una medida local completa en  $A$  que los deja inalterados. En general,  $I_f^A(\rho_{AB}) \neq I_f^B(\rho_{AB})$ .

Notemos finalmente que tanto  $I_f^B(\rho_{AB})$  como  $I_f^A(\rho_{AB})$  son obviamente invariantes frente a transformaciones unitarias locales  $\rho_{AB} \rightarrow U_A \otimes U_B \rho_{AB} U_A^{\dagger} \otimes U_B^{\dagger}$ . Solo se debe “rotar” la base de medida óptima ( $P_j^B \rightarrow U_B P_j^B U_B^{\dagger}$ ) para que  $\rho'_{AB} \rightarrow U_A \otimes U_B \rho'_{AB} U_A^{\dagger} \otimes U_B^{\dagger}$ , conservándose su entropía.

### 3.3.3. Estados puros y entropía de entrelazamiento generalizada

Si el estado del sistema es inicialmente puro ( $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ ), probaremos a continuación que [19]

$$I_f^B(\rho_{AB}) = I_f^A(\rho_{AB}) = S_f(\rho_A) = S_f(\rho_B) \quad (3.36)$$

es decir, la *mínima pérdida de información por medida local se reduce a la entropía  $S_f$  del subsistema (Entropía de entrelazamiento generalizada)*, que mide el entrelazamiento entre  $A$  y  $B$  según la medida  $S_f$ . En el caso de la entropía de von Neumann, (3.36) es la entropía de entrelazamiento estándar [13]  $E_{AB} = S(\rho_A) = S(\rho_B)$ , mientras que en el caso de la entropía cuadrática, (3.36) es el cuadrado de la concurrencia del estado puro,  $C_{AB}^2 = S_2(\rho_A) = S_2(\rho_B)$  [72].

*Demostración:* Para un estado puro  $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ ,  $S_f(\rho_{AB}) = 0$  y tanto  $\rho_A$  como  $\rho_B$  tienen los mismos autovalores no nulos. Por otra parte, dado que el operador posmedida (3.30) es separable, para toda medida local  $M^B$  se satisfacen siempre las desigualdades clásicas [60, 64] (el criterio entrópico generalizado (2.93))

$$S_f(\rho'_{AB}) \geq S_f(\rho'_B), \quad S_f(\rho'_{AB}) \geq S_f(\rho'_A)$$

con  $\rho'_A = \rho_A$  y  $S_f(\rho'_B) \geq S_f(\rho_B)$  ya que  $\rho'_B$  es la parte diagonal de  $\rho_B$  en la base definida por  $M^B$ . Por lo tanto, para toda medida  $M^B$  sobre un estado puro,

$$I_f^{M^B}(\rho_{AB}) \geq S_f(\rho_A) - S_f(\rho_{AB}) = S_f(\rho_A) = S_f(\rho_B). \quad (3.37)$$

Además, existe una medida local que satura esta desigualdad: Es aquella determinada por la representación de Schmidt del estado [5]:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{n_s} \sqrt{p_k} |k_s^A\rangle |k_s^B\rangle \quad (3.38)$$

donde  $n_s$  es el número o rango de Schmidt y  $p_k$  representan los autovalores no nulos de  $\rho_A$  y  $\rho_B$ , donde  $\rho_A = \sum_k p_k |k_s^A\rangle \langle k_s^A|$ , y  $\rho_B = \sum_k p_k |k_s^B\rangle \langle k_s^B|$ . Eligiendo los proyectores locales de la medida como  $P_k^B = |k_s^B\rangle \langle k_s^B|$ , obtenemos

$$\rho'_{AB} = \sum_k p_k P_k^A \otimes P_k^B \quad (3.39)$$

que conduce a estados locales  $\rho'_A = \rho_A$ ,  $\rho'_B = \rho_B$ , con

$$S_f(\rho'_{AB}) = S_f(\rho_A) = S_f(\rho_B) = \sum_k f(p_k) \quad (3.40)$$

lo que implica la ec. (3.36). Luego, la entropía de entrelazamiento de un estado puro puede ser considerada como *la mínima pérdida de información debido a una medida completa local*. Y la medida que lleva a ese mínimo es *universal*, es decir, es la misma para toda entropía  $S_f$ .

Para verificar la ecuación (3.36), notamos que si realizamos una medida local por medio de proyectores  $P_j^B = |j_B\rangle \langle j_B|$ , el estado puede ser reescrito como

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_j \sqrt{q_j} |\Psi_{A/j}\rangle \otimes |j_B\rangle, \quad (3.41)$$

donde

$$|\Psi_{A/j}\rangle = \sum_k \sqrt{p_k/q_j} \langle j_B | k_s^B \rangle |k_s^A\rangle, \quad q_j = \sum_k p_k |\langle j_B | k_s^B \rangle|^2$$

de manera que  $\rho_{A/j} = |\Psi_{A/j}\rangle \langle \Psi_{A/j}|$  en la ecuación (3.30). Por lo tanto, por concavidad,

$$S_f(\rho'_{AB}) = \sum_j f(q_j) \geq \sum_{j,k} |\langle j_B | k_s^B \rangle|^2 f(p_k) = \sum_k f(p_k) = S_f(\rho_A) \quad \forall S_f \quad (3.42)$$

es decir, las distribuciones  $q = \{q_k\}$  y  $p = \{p_k\}$  satisfacen la relación de mayorización

$$q \prec p. \quad (3.43)$$

Entonces, para estados puros la medida sobre la base que diagonaliza a  $\rho_B$  (base de Schmidt local) provee un mínimo para la ecuación (3.13)  $\forall S_f$ . Para un estado máximamente entrelazado, el estado local  $\rho_B$  es máximamente mezclado ( $p_k = 1/d_B \forall k$ ) y por lo tanto toda medida  $M^B$  completa realizada en  $B$  lleva al mínimo anterior.

Para dar un significado a la entropía de entrelazamiento generalizada, destaquemos que un estado puro  $|\Psi_{AB}^I\rangle$  puede considerarse *absolutamente más entrelazado* que un estado  $|\Psi_{AB}^{II}\rangle$  si [19]

$$S_f(\rho_A^I) \geq S_f(\rho_A^{II}) \quad \forall S_f \quad (3.44)$$

es decir, si  $\rho_A^I \prec \rho_A^{II}$ . Este concepto posee un claro significado físico: De acuerdo al teorema de Nielsen [73], un estado puro  $|\Psi_{AB}^{II}\rangle$  puede ser obtenido de otro  $|\Psi_{AB}^I\rangle$  por LOCC sólo si  $\rho_A^I \prec \rho_A^{II}$ , es decir, sólo si  $|\Psi_{AB}^I\rangle$  es absolutamente más entrelazado que  $|\Psi_{AB}^{II}\rangle$ . Y esta condición no puede ser asegurada por ninguna elección individual de entropía, requiriendo medidas generales  $S_f$  para su formulación en términos entrópicos (validez de (3.44)) [19].

### 3.3.4. Mínima pérdida de información por medida local conjunta

Podemos fácilmente extender los conceptos anteriores a una medida local conjunta definida por un conjunto de proyectores producto  $M_{AB} = \{P_i^A \otimes P_j^B\}$ , realizada sobre ambas partes del sistema. Aquí  $P_k^{A,B}$  son proyectores ortogonales unidimensionales. La matriz densidad promedio posmedida es entonces

$$\rho'_{AB} = \sum_{i,j} p_{ij} P_i^A \otimes P_j^B \quad (3.45)$$

donde  $p_{ij} = \langle ij | \rho_{AB} | ij \rangle$ . La correspondiente pérdida de información es

$$I_f^{M_{AB}}(\rho_{AB}) = S_f(\rho'_{AB}) - S_f(\rho_{AB}) \quad (3.46)$$

y su mínimo

$$I_f^{AB}(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M_{AB}} I_f^{M_{AB}}(\rho_{AB}) \quad (3.47)$$

es una cantidad no negativa, que se anula sólo si el estado permanece invariante frente a esta medida, es decir, sólo si el estado es de la forma (3.45). Este estado representa un sistema *clásicamente correlacionado*, tanto desde  $A$  como  $B$ , siendo diagonal en una base producto estándar y estando caracterizado por una densidad de probabilidad conjunta  $p_{ij}$ . Para tales estados existe una medida local en  $A$ , así como también en  $B$ , que deja al estado inalterado (en promedio), y por lo tanto, para estos estados  $I_f^{AB}(\rho_{AB}) = I_f^B(\rho_{AB}) = I_f^A(\rho_{AB}) = 0$ .

Notemos que los estados del tipo (3.45) son un caso particular de (3.30), es decir aquél en que los  $\rho_{A/j}$  son mutuamente conmutantes. A su vez los estados producto

$\rho_A \otimes \rho_B$  son un caso particular de los estados de la forma (3.45): Aquél donde  $p_{ij} = p_i p_j \quad \forall i, j$ .

La medida conjunta puede ser considerada como una medida local en A (B), luego de una medida local en B (A), lo que implica en el caso general

$$I_f^{MAB}(\rho_{AB}) \geq I_f^{MB}(\rho_{AB}), \quad I_f^{MAB}(\rho_{AB}) \geq I_f^{MA}(\rho_{AB}) \quad (3.48)$$

para  $M^{AB} = M^A M^B$ . El mínimo (3.47) satisface entonces

$$I_f^{AB}(\rho_{AB}) \geq I_f^{B(A)}(\rho_{AB}) \quad (3.49)$$

con  $I_f^{AB}(\rho_{AB}) = 0$  si y sólo si  $\rho_{AB}$  es de la forma (3.45). La medida (3.47) es entonces una medida de todas las correlaciones cuánticas presentes en el sistema (tanto respecto de A como de B).

Sin embargo, en el caso de estados puros  $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ , se tiene también

$$I_f^{AB}(\rho_{AB}) = I_f^B(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (3.50)$$

ya que para una medida local conjunta, en las bases determinadas por la descomposición de Schmidt, el estado posmedida vuelve a ser el estado (3.39). En otras palabras, para estados  $\rho_{AB}$  puros, el estado (3.39) resultante de una medida local en B con los proyectores  $P_k^B$ , ya es de la forma (3.45), y no cambia por una nueva medida local a izquierda en la base definida por los proyectores de Schmidt  $P_{k'}^A$ . El entrelazamiento de un estado puro puede entonces ser también visto como la *mínima pérdida de información debido a una medida local conjunta*.

Para una medida en una base producto estándar arbitraria  $\{|i_A\rangle|j_B\rangle\}$ , la expansión

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i_A\rangle |j_B\rangle \quad (3.51)$$

donde  $c_{ij} = \sum_k \sqrt{p_k} \langle i_A | k_s^A \rangle \langle j_B | k_s^B \rangle$ , conduce a  $p_{ij} = |c_{ij}|^2$  en (3.45). Por lo tanto, la ecuación (3.50) implica

$$S_f(\rho'_{AB}) = \sum_{i,j} f(|c_{ij}|^2) \geq \sum_k f(p_k) = S_f(\rho_A) \quad (3.52)$$

$\forall S_f$ . Y dado que  $I_f^{MAB}(\rho_{AB}) \geq I_f^{MB}(\rho_{AB}) \geq I_f^B(\rho_{AB}) \quad \forall S_f$  (ecuaciones (3.42), (3.43), (3.48) y (3.49)), obtenemos

$$|c|^2 \prec q \prec p. \quad (3.53)$$

donde  $|c|^2$  denota la distribución  $\{|c_{ij}|^2\}$ . La primera relación es evidente ya que  $q_j = \sum_i |c_{ij}|^2$  es la distribución marginal de la distribución conjunta  $|c_{ij}|^2$ , y se cumple siempre que la última es mayorizada por la primera.

El estado resultante luego de una medida local en la base de Schmidt, Ec. (3.39) puede ser entonces rigurosamente considerado como el estado *clásico más cercano al estado puro*  $\rho_{AB}$ , ya que proporciona la mínima pérdida de información entre todas

las medidas locales ó conjuntas  $\forall S_f$ . Los estados puros tienen por lo tanto asociado un estado “clásico” que es el menos mezclado, de entre todos los estados obtenidos de éste por una medida completa local. Este estado “clásico” mayoriza a todo otro estado promedio resultante de una medida local.

Mencionamos finalmente que es posible realizar medidas conjuntas locales  $M_{A/B}$  más generales que (3.45), basadas en proyectores producto condicionales de la forma  $P_{i_j}^A \otimes P_j^B$  (que implican un conocimiento en  $A$  del resultado de la medida en  $B$ ). Esto conduce a un estado posmedida  $\rho'_{AB}$  diagonal en una base producto condicional:

$$\rho'_{AB} = \sum_{i,j} p_{i,j} P_{i_j}^A \otimes P_j^B \quad (3.54)$$

donde  $p_{i,j} = \langle i_j j | \rho_{AB} | i_j j \rangle$ . La correspondiente pérdida de información satisfará nuevamente  $I_f^{M_{A/B}}(\rho_{AB}) \geq I_f^{M_B}(\rho_{AB})$ , ya que (3.54) puede ser considerada como la parte diagonal de (3.30) en una base producto condicional  $|i_j j\rangle$ , donde  $|i_j^A\rangle$  no son necesariamente los autovectores de  $\rho_{A/j}$ . Sin embargo, si así los elegimos tenemos que  $I_f^{M_{A/B}}(\rho_{AB}) = I_f^{M_B}(\rho_{AB})$  y por lo tanto

$$I_f^{A/B}(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M_{A/B}} I_f^{M_{A/B}}(\rho_{AB}) = I_f^B(\rho_{AB}) \quad (3.55)$$

ya que (3.30) permanece inalterada en promedio, si se la mide localmente en  $A$  en la base condicional formada por los autovectores de  $\rho_{A/j}$ .

### 3.3.5. Medidas basadas en la entropía de von Neumann

Si  $S_f(\rho)$  es elegida como la entropía de von Neumann (2.73), la ecuación (3.13) resulta [ver Ec. (3.15)]

$$I^{M_B}(\rho_{AB}) = S(\rho'_{AB}) - S(\rho_{AB}) = S(\rho_{AB} || \rho'_{AB}). \quad (3.56)$$

Esta cantidad se denomina también Déficit de Información direccionado (*one way Information Deficit* [69]).

El correspondiente mínimo  $I^B(\rho_{AB})$  es además la mínima entropía relativa entre el estado  $\rho_{AB}$  y cualquier estado  $\rho_{AB}^d$  diagonal en una base producto condicional:

$$I_f^B = \text{Min}_{M_B} I^{M_B}(\rho_{AB}) = \text{Min}_{\rho_{AB}^d} S(\rho_{AB} || \rho_{AB}^d) \quad (3.57)$$

donde  $\rho_{AB}^d$  denota un estado diagonal de la forma (3.54) siendo  $q_j$  y  $\rho_{A/j}$  arbitrarias.

*Demostración:* Para una dada elección de la base producto condicional, el mínimo de la entropía relativa es obtenido cuando  $\rho_{AB}^d$  tiene los mismos elementos diagonales que  $\rho_{AB}$  en esa base (ya que  $-\sum_i p_i \log q_i$  es minimizado cuando  $p_i = q_i$ ). Por lo tanto,  $S(\rho_{AB} || \rho_{AB}^d) \geq S(\rho_{AB} || \rho'_{AB}) = I_f^{M_{A/B}}(\rho_{AB}) \geq I_f^B(\rho_{AB})$ , donde  $\rho'_{AB}$  denota el estado posmedida (3.54) en esa base.

La misma propiedad se mantiene para  $I^{AB}(\rho_{AB})$  si se restringe  $\rho_{AB}^d$  a estados diagonales en bases producto estándar:

$$I^{AB} = \underset{M_{AB}}{\text{Min}} I^{M_{AB}}(\rho_{AB}) = \underset{\rho_{AB}^d}{\text{Min}} S(\rho_{AB} || \rho_{AB}^d) \quad (3.58)$$

donde aquí  $\rho_{AB}^d$  es de la forma (3.45) con  $p_{ij}$  arbitraria. La ecuación (3.58) es precisamente la versión bipartita de la cantidad  $D$  discutida en [51], como medida de correlaciones cuánticas en sistemas compuestos.

La cantidad (3.15) está estrechamente relacionada con el *Quantum Discord* el cual puede ser escrito en la presente notación, y para medidas proyectivas en  $B$ , como  $D^B(\rho_{AB}) = \underset{M_B}{\text{Min}} D^{M_B}(\rho_{AB})$ , con

$$\begin{aligned} D^{M_B}(\rho_{AB}) &= S(\rho'_{AB}) - S(\rho'_B) - [S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)], \\ &= I^{M_B}(\rho_{AB}) - I^{M_B}(\rho_B) \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $\rho'_{AB}$  es el estado (3.30), y los estados  $\rho_B$  y  $\rho'_B$  son los estados reducidos en  $B$  antes y después de la medida, respectivamente. Luego

$$D^B(\rho_{AB}) \leq I^B(\rho_{AB}).$$

Estos cuantificadores  $D^B$  y  $I^B$  van a coincidir cuando las medidas optimizantes sean las mismas para ambos, y correspondan a la base donde  $\rho_B$  es diagonal, tal que  $\rho'_B = \rho_B$  [ $I^{M_B}(\rho_B) = 0$ ]. Esta coincidencia tiene lugar si, por ejemplo,  $\rho_B$  es máximamente mezclado (en este caso  $\rho'_B = \rho_B$  para cualquier elección de bases).

Ambos  $D^B(\rho_{AB})$  y  $I^B(\rho_{AB})$  se anulan en el mismo conjunto de estados [es decir aquellos de la forma (3.30)] y ambos se reducen a la *entropía de entrelazamiento estándar*  $E(A, B) = S(\rho_A)$  para estados puros [aunque en este caso la Ec.(3.13) requiere que se mida en la base local de Schmidt y la Ec. (3.59) se vuelve independiente de la elección de base local, ya que  $\rho_{A/j}$  es puro y resulta  $S(\rho'_{AB}) = S(\rho'_B)$  para cualquier medida local].

Una generalización directa de la Ec. (3.59) para entropías generales  $S_f$  no es posible, ya que la positividad de (3.59) está garantizada por la concavidad de la entropía *condicional* de von Neumann  $S(A|B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ , la cual no se sostiene en general para una elección arbitraria de entropía  $S_f$ .

En la referencia [47] fueron consideradas las distancias mínimas entre el estado  $\rho_{AB}$  y estados clásicos de la forma (3.45), donde se analizó el decrecimiento de la información mutua  $I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$ , luego de realizar una medida conjunta  $M_{AB}$  en la base formada por los autoestados de  $\rho_A$  y  $\rho_B$ . Esta cantidad coincide con  $I^{M_{AB}}(\rho_{AB})$  para tal elección de bases, ya que  $\rho_A$  y  $\rho_B$  permanecen inalteradas. Sin embargo, para  $\rho_{AB}$  general el mínimo de  $I_{AB}^M(\rho_{AB})$  y (3.59) puede ser alcanzado en una base diferente.



### 3.3.6. Medidas basadas en la entropía cuadrática

Si  $S_f$  es elegida como la entropía cuadrática (2.95), la Ec. (3.13) resulta (ver Ec. (3.17))

$$\begin{aligned} I_2^{M_B}(\rho_{AB}) &= 2\text{Tr}(\rho_{AB}^2 - \rho'_{AB}{}^2) \\ &= 2\|\rho_{AB} - \rho'_{AB}\|^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde  $\|\rho_{AB} - \rho'_{AB}\|^2 = \sum_{j \neq j', i, k} |\langle ij | \rho_{AB} | kj' \rangle|^2$  es la norma cuadrado de los elementos fuera de la diagonal que se pierden por la medida local. Esta elección de entropía proporciona por lo tanto una medida simple de la pérdida de información.

Además, su mínimo es el mínimo del cuadrado de la distancia de Hilbert-Schmidt entre  $\rho_{AB}$  y cualquier estado  $\rho_{AB}^d$  diagonal en una base producto general:

$$I_2^B(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M_B} I_2^{M_B}(\rho_{AB}) = 2 \text{Min}_{\rho_{AB}^d} \|\rho_{AB} - \rho_{AB}^d\|^2 \quad (3.61)$$

donde nuevamente la minimización es sobre todos los estados de la forma (3.30) para  $P_j, q_j$  y  $\rho_{A/j}$  arbitrarios. La cantidad  $I_2^B(\rho_{AB})$  coincide por lo tanto (a menos de una constante) con el denominado Discord geométrico [52, 74].

*Demostración:*

Para una base producto general,  $\|\rho_{AB} - \rho_{AB}^d\|^2 = \|\rho_{AB} - \rho'_{AB}\|^2 + \|\rho'_{AB} - \rho_{AB}^d\|^2$ , donde nuevamente  $\rho'_{AB}$  es la parte diagonal de  $\rho_{AB}$  en esa base. Por lo tanto, la elección de óptima es  $\rho_{AB}^d = \rho'_{AB}$ , de donde

$$2\|\rho_{AB} - \rho_{AB}^d\|^2 \geq 2\|\rho_{AB} - \rho'_{AB}\|^2 = I_2^{M_{A/B}}(\rho_{AB}) \geq I_2^B(\rho_{AB}).$$

Por otro lado, si la minimización en (3.61) se hace sobre todos los operadores  $\rho_{AB}^d$  diagonales en una base producto estándar, la mínima distancia coincidirá con el déficit  $I_2^{AB}$ :

$$I_2^{AB}(\rho_{AB}) = \text{Min}_{M_{AB}} I_2^{M_{AB}}(\rho_{AB}) = 2 \text{Min}_{\rho_{AB}^d} \|\rho_{AB} - \rho_{AB}^d\|^2 \quad (3.62)$$

donde  $\rho_{AB}^d$  es aquí de la forma (3.45). En el caso de estados puros, ambos mínimos (3.61) y (3.62) se reducen al cuadrado de la concurrencia del estado puro [72], según la ec. (2.96):  $I_2^B(\rho_{AB}) = S_2(\rho_A) = C^2(A, B)$ .

Recientemente se han introducido nuevas medidas de correlaciones cuánticas “no entrópicas” basadas en la minimización de una distancia generalizada al estado clásicamente correlacionado más cercano [75], que pueden satisfacer propiedades adicionales.

### 3.3.7. Interpretación operacional del Déficit de Información generalizado

Daremos aquí una interpretación operativa del Déficit de Información, la cual muestra que  $I_f$  puede ser interpretado como una *medida del entrelazamiento entre el sistema y el aparato de medición*, creado por la medida (Fig. III.1).



En primer lugar, notamos que el estado posmedida de un sistema  $S$ ,

$$\rho'_S = \sum_k M_k \rho_S M_k^\dagger \quad (3.63)$$

puede ser obtenido mediante la traza parcial de una evolución unitaria conjunta del sistema cerrado, compuesto por el sistema original  $S$  y el aparato de medida ( $C$ ). En efecto, si inicialmente el sistema  $S$  se encuentra en el estado  $\rho_S$  y el aparato en un estado puro que denotaremos por  $|0_C\rangle$ , tal que el estado inicial conjunto es

$$\rho_{SC} = \rho_S \otimes |0_C\rangle\langle 0_C| \quad (3.64)$$

luego de una evolución unitaria conjunta descrita por el operador  $U$ , obtenemos

$$\rho'_{SC} = U \rho_{SC} U^\dagger = U \rho_S \otimes |0_C\rangle\langle 0_C| U^\dagger. \quad (3.65)$$

El estado de  $S$  luego de esta evolución es

$$\rho'_S = \text{Tr}_C \rho'_{SC} = \sum_k \langle k_C|U|0_C\rangle \rho_S \langle 0_C|U^\dagger|k_C\rangle = \sum_k M_k \rho_S M_k^\dagger \quad (3.66)$$

donde  $\{|k_C\rangle\}$  denota una base ortonormal de  $C$  y  $M_k = \langle k_C|U|0_C\rangle$  es un operador de  $S$  ( $\langle i|M_k|j\rangle = \langle ik_C|U|j0_C\rangle$ ). Estos operadores forman un conjunto de operadores de medida, ya que  $\sum_k M_k^\dagger M_k = \sum_k \langle 0_C|U^\dagger|k_C\rangle \langle k_C|U|0_C\rangle = \langle 0_C|U^\dagger U|0_C\rangle = I_S$ , donde hemos utilizado  $\sum_k |k_C\rangle\langle k_C| = I_C$  y  $U^\dagger U = I_S \otimes I_C$ .

La entropía generalizada  $S_f$  inicial del sistema es  $S_f(\rho_S \otimes |0_C\rangle\langle 0_C|) = S_f(\rho_S)$ . Dado que la evolución es unitaria, ésta es igual a la entropía del estado final  $S_f(\rho'_{SC})$ . La diferencia

$$S_f(\rho'_S) - S_f(\rho'_{SC}) = S_f(\rho'_S) - S_f(\rho_S) = I_f^M(\rho_S) \geq 0 \quad (3.67)$$

es justamente el Déficit de Información definido en (3.13), asociado a la medida  $M$ . Vemos entonces que esta diferencia representa la resta entre la entropía  $S_f$  del subsistema  $S$  y la del sistema completo  $S + C$  luego de la evolución.

Si  $\rho_{SC}$  fuese separable, el criterio entrópico generalizado (2.93) implica

$$S_f(\rho'_{SC}) - S_f(\rho'_S) \geq 0 \quad (\rho'_{SC} \text{ separable}) \quad (3.68)$$

es decir, la entropía del sistema conjunto es no menor que la de un subsistema. Por lo tanto, si la igualdad anterior no se cumple, como sucede en (3.67) cuando  $I_f^M(\rho_S) > 0$ , el estado  $\rho'_{SC}$  es entrelazado.

Para medidas de tipo proyectivas, o bien POVM que satisfacen la condición (3.26), la diferencia (3.67) es *no negativa* y típicamente positiva, violando entonces la desigualdad (3.68). Esto implica que  $\rho'_{SC}$  es entrelazado, es decir, que la evolución unitaria ha creado entrelazamiento entre  $S$  y  $C$ . En otras palabras, el Déficit de Información es una medida o indicador del entrelazamiento entre  $S$  y  $C$  creado por la medida.

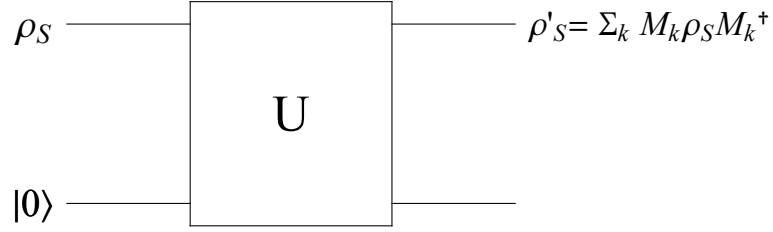


Figura III.1: Esquema del proceso (3.65)–(3.66).

En el caso de una medida proyectiva en la base  $\{|i\rangle\}$  de  $S$ , puede tomarse  $U$  tal que  $U|0_C\rangle|i_S\rangle = |i_C\rangle|i_S\rangle$ , con  $|i_C\rangle$  estados ortogonales de  $C$ . Por ejemplo, en el caso de un qubit,  $U$  correspondería a un operador CNOT. Para una medida proyectiva,  $S(\rho'_S) > S(\rho_S)$ , salvo que la medida sea en la base de autoestados de  $\rho_S$ , en cuyo caso  $\rho'_S = \rho_S = \sum_i p_i |i_S\rangle\langle i_S|$  y  $\rho'_{SC} = \sum_i p_i |i_C i_S\rangle\langle i_C i_S|$  es un estado *clásicamente correlacionado*. Por lo tanto, si el Déficit de Información  $I_f^M(\rho_S)$  se anula para una medida proyectiva, la medición no genera entrelazamiento entre  $S$  y el aparato de medida.

Así, en el caso de un sistema  $S = A+B$ , los estados que tienen  $I_f^B > 0$  (equivalente a Discord  $D(A|B)$  no nulo) tienen pues, la capacidad de generar entrelazamiento con el aparato de medida, para *cualquier* medida proyectiva completa local en  $B$ . Por el contrario, para los estados con  $I_f^B = 0$ , o sea  $D(A|B) = 0$ , existe una medida proyectiva local en  $B$  que no lo entrelaza con el sistema  $C$ .

### 3.4. Mezcla de un estado puro general con el estado de entropía máxima

Para finalizar este capítulo, discutiremos un ejemplo ilustrativo y a la vez muy importante: El de una mezcla estadística de un estado puro arbitrario con el estado máximamente mezclado [19]. Si el estado puro es entrelazado, esta mezcla será entrelazada sólo a partir de un cierto valor umbral del peso del mismo en la mezcla. En cambio, veremos que la medida  $I_f^B$  será no nula para cualquier peso no nulo del mismo, mostrando un comportamiento inicial universal, es decir, independiente de la elección de entropía  $S_f$ .

#### 3.4.1. El caso general $d$ -dimensional

Consideremos la mezcla del estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{k=1}^{n_s} \sqrt{p_k} |k_s^A\rangle |k_s^B\rangle$$

[Ec.(3.38)] con el estado máximamente mezclado  $I_d/d$ , es decir,

$$\rho_{AB}(x) = x|\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| + \frac{1-x}{d}I_A \otimes I_B \quad (3.69)$$

donde  $x \in [0, 1]$  y  $d = d_A d_B$  es la dimensión del espacio de Hilbert total. Mostraremos [19] que: i) el mínimo  $I_f^B(x) \equiv I_f^B(\rho_{AB}(x))$  corresponde, para toda  $S_f$ , nuevamente a la medida local realizada en la base de Schmidt de  $|\Psi_{AB}\rangle$  (es decir, en la base de autoestados de  $\rho_B$ ), y está dada por

$$I_f^B(x) = \sum_{k=1}^{n_s} \left[ f\left(xp_k + \frac{1-x}{d}\right) - f\left(x\delta_{k1} + \frac{1-x}{d}\right) \right] \quad (3.70)$$

con

$$I_f^A(x) = I_f^{AB}(x) = I_f^B(x)$$

y ii) la Ec.(3.70) es una función estrictamente creciente de  $x \forall S_f$  si  $n_s \geq 2$  (es decir, si el estado  $|\Psi_{AB}\rangle$  es entrelazado), lo que implica  $I_f^B(x) > 0 \forall x \in (0, 1]$ .

*Demostración:* Utilizando la descomposición de Schmidt (3.38), el estado luego de una medida local en la base  $\{|k_s^B\rangle\}$  resulta

$$\rho'_{AB}(x) = x \sum_{k=1}^{n_s} p_k P_k^A \otimes P_k^B + \frac{1-x}{d} I_A \otimes I_B, \quad (3.71)$$

con  $P_k^{A(B)} = |k_s^{A(B)}\rangle\langle k_s^{A(B)}|$ , que es diagonal en la base producto  $\{|k_s^A\rangle \otimes |k_s^B\rangle\}$ , con autovalores  $p_{kk'} = \delta_{kk'} xp_k + \frac{1-x}{d}$ . Para cualquier otra medida completa local,  $\rho'_{AB}$  será diagonal en una base  $\{|i_j^A\rangle \otimes |j_B\rangle\}$ , donde  $|i_j^A\rangle = |\Psi_{A/j}\rangle$  [Ec. (3.41)], con elementos diagonales  $p'_{ij} = \delta_{ij} xq_j + \frac{1-x}{d}$ . Los últimos están siempre mayorizados por  $p_{kk'}$  ( $p' \prec p$ ), ya que  $\{q_j\} \prec \{p_k\}$  [Ec.(3.53)] y  $x \geq 0$ . Por lo tanto,  $S_f(\rho'_{AB})$  será mínimo para una medida hecha en la base  $\{|k_s^B\rangle\}$ , lo que conduce a la Ec. (3.70). Además,  $I_f^{AB}(x) = I_f^A(x) = I_f^B(x)$ , ya que (3.71) es diagonal en una base producto estándar.

La ecuación (3.71) es entonces *el estado clásico más cercano* al estado (3.70), en el sentido de mayorizar cualquier otro estado obtenido luego de una medida local o producto, y por lo tanto minimizar la entropía del estado posmedida  $\forall S_f$ .

Para verificar la monotonía, notamos que

$$\frac{dI_f^B}{dx} = \sum_{k=1}^{n_s} \left[ \left(p_k - \frac{1}{d}\right) f'(p_k^x) - \left(\delta_{k1} - \frac{1}{d}\right) f'(\lambda_k^x) \right] \quad (3.72)$$

$$\geq \left( \frac{n'_s - 1}{d} + \sum_{p_k < 1/n} p_k \right) [f'(\lambda_2^x) - f'(\lambda_1^x)] \geq 0 \quad (3.73)$$

donde  $p_k^x = xp_k + \frac{1-x}{d}$ ,  $n'_s \geq 1$  es el número de  $p_k$ 's no menores que  $1/d$  y  $\lambda_2^x = \frac{1-x}{d}$ ,  $\lambda_1^x = x + \frac{1-x}{d}$ , ya que  $\lambda_2^x \leq p_k^x \leq \lambda_1^x$  y por lo tanto  $f'(\lambda_2^x) \geq f'(p_k^x) \geq f'(\lambda_1^x)$ . La

Ec.(3.70) es entonces estrictamente creciente si  $f$  es cóncava y si  $n_s \geq 2$ , implicando que  $I_f^B(x) = 0$  si  $x = 0$  ó  $n_s = 1$ .

Una expansión en serie de potencias de (3.70) muestra que

$$I_f^B(x) = \frac{1}{2}x^2|f''\left(\frac{1}{d}\right)|\left(1 - \sum_k p_k^2\right) + O(x^3) \quad (3.74)$$

en acuerdo con Ec.(3.23), indicando un *aumento universal cuadrático* de  $I_f^B(x)$  para pequeños valores de  $x$  [asumiendo  $f''(1/d) \neq 0$ ]. Para la medida cuadrática (3.61), se encuentra una simple dependencia cuadrática  $\forall x \in [0, 1]$ :

$$I_2^B(x) = x^2 I_2^B(1) = 2x^2 \left(1 - \sum_k p_k^2\right). \quad (3.75)$$

Por lo tanto, para  $|\Psi_{AB}\rangle$  entrelazado,  $I_f^B(x) > 0$  tan pronto como (3.70) se aparta del estado máximamente mezclado.

En contraste, cualquier medida de entrelazamiento, tal como el entrelazamiento de formación (3.90) o la negatividad [37], requieren un valor finito umbral  $x \geq x_c > 0$  para ser no nula, ya que la Ec. (3.70) es separable para valores suficientemente pequeños de  $x$ : cualquier estado bipartito  $\rho_{AB}$  es separable si [76]

$$\text{Tr}(\rho - I_d/d)^2 < \frac{1}{d(d-1)}$$

lo que asegura aquí separabilidad para el caso  $x \leq \frac{1}{d-1} \leq x_c$  ( $d \geq 4$ ). Por ejemplo, en el caso máximamente entrelazado  $p_k = 1/d_A$  (suponiendo  $d_A = d_B = \sqrt{d}$ ), el estado (3.69) es de hecho separable sii  $x \leq 1/(d_A + 1)$  [76]. En el caso general, la negatividad va a ser positiva para

$$x > x_c = \frac{1}{1 + d\sqrt{p_1 p_2}}$$

ordenando los  $p_k$  en orden decreciente [19].

Notamos finalmente que dados dos estados puros  $|\Psi_{AB}^I\rangle$  y  $|\Psi_{AB}^{II}\rangle$ , las correspondientes mezclas (3.69) van a satisfacer, para un valor fijo de  $x \in (0, 1]$ ,

$$I_f^{BI}(x) \geq I_f^{BII}(x) \quad (3.76)$$

$\forall S_f$  si y sólo si  $|\Psi_{AB}^I\rangle$  es *absolutamente más entrelazado* que  $|\Psi_{AB}^{II}\rangle$ , esto es, si y sólo si

$$S_f(\rho_A^I) \geq S_f(\rho_A^{II}), \quad \forall S_f \quad (3.77)$$

$(\{p_k^I\} \prec \{p_k^{II}\})$ .

*Demostración:* Obviamente,  $S_f(\rho_{AB}^I(x)) = S_f(\rho_{AB}^{II}(x))$ , mientras que  $\rho_{AB}^I(x) \prec \rho_{AB}^{II}(x)$ , sí y sólo si  $\{p_k^I\} \prec \{p_k^{II}\}$ , como se ve de la ec. (3.71), en cuyo caso  $S_f(\rho_{AB}^I(x)) \geq S_f(\rho_{AB}^{II}(x))$ .

### 3.4.2. El caso de dos qubits y relación con el entrelazamiento

Consideremos ahora la mezcla (3.69) en el caso de dos qubits, donde el estado  $|\Psi_{AB}\rangle$  puede ser siempre escrito como

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle \quad (3.78)$$

con  $|ij\rangle \equiv |i_s^A\rangle|i_s^B\rangle$  y  $p \in [0, 1]$ , siendo  $|0\rangle, |1\rangle$  los autoestados de  $\sigma_z$  ( $\sigma_z|i\rangle = (-1)^i|i\rangle$ ) para  $i = 0, 1$ . Para una medida local de espín, a lo largo de un eje cuya dirección forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ , se puede mostrar fácilmente que la pérdida de información está dada por:

$$I_f^{\theta_B}(x) = \sum_{\nu=\pm} \left[ f\left(\frac{1+x(1+2\nu\cos\theta(2p-1))}{4}\right) - f\left(\frac{1+(1+2\nu)x}{4}\right) \right]. \quad (3.79)$$

Se verifica que para  $p \neq 1/2$ ,  $I_f^{\theta_B}(x)$  es mínimo para  $\theta = 0$ , esto es, para medidas realizadas en la base local de Schmidt (autoestados de  $\rho_B$ ) ya que  $\rho'(\theta) \prec \rho'(0)$ , mientras que para  $p = 1/2$  (estado de Bell),  $I_f^{\theta_B}(x)$  es independiente de  $\theta$ , ya que la base de Schmidt se vuelve arbitraria. El mínimo resulta entonces

$$I_f^B(x) = f\left(\frac{1+x(4p-1)}{4}\right) + f\left(\frac{1+x(3-4p)}{4}\right) - f\left(\frac{1+3x}{4}\right) - f\left(\frac{1-x}{4}\right) \quad (3.80)$$

(Ec.(3.70)), siendo una función estrictamente creciente de  $x$  si  $f$  es estrictamente cóncava y  $p \in (0, 1)$  (si  $p = 0$  ó  $p = 1$ ,  $|\Psi_{AB}\rangle$  es separable y  $I_f^{\theta_B}(x) = 0 \ \forall x$ ), siendo además una función decreciente de  $p$  para  $p \in [1/2, 1]$  y  $x$  fijo. En particular, si  $S_f(\rho) = S_2(\rho)$ , la Ec.(3.80) resulta

$$I_2^B(x) = 4x^2p(1-p). \quad (3.81)$$

Podemos comparar (3.81) con el Entrelazamiento de Formación asociado (3.90), que es el cuadrado de la concurrencia (*Tangle*) (ver Apéndice). Para este estado, (2.55) conduce a

$$C(x) = \text{Max}[2x\sqrt{p(1-p)} - \frac{1-x}{2}, 0] \quad (3.82)$$

la cual se anula para

$$x \leq x_c = \frac{1}{1+4\sqrt{p(1-p)}}. \quad (3.83)$$

Puede verificarse que

$$I_2^B(x) \geq C^2(x)$$

$\forall p, x$ , con  $I_2^B(x) = C^2(x)$ , sólo para  $x = 0$  ó  $x = 1$ , si  $p \in (0, 1)$ , como puede apreciarse en el panel superior de la figura (III.2). En contraste, la medida basada en la entropía de von Neumann  $I^B(x)$  (Ec.(3.15)) no es una cota superior del Entrelazamiento de Formación  $E(x)$  de  $\rho_{AB}(x)$ , como puede verse en el panel central, aún

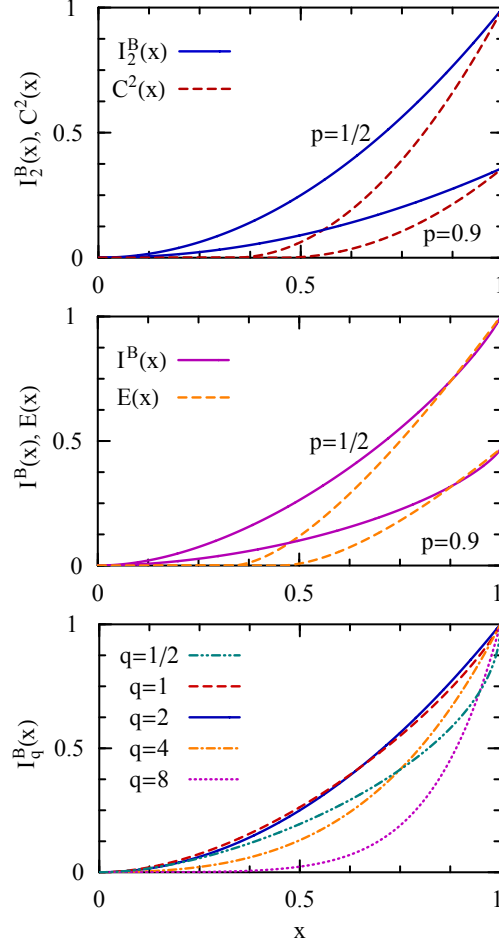


Figura III.2: Medidas de correlaciones cuánticas y entrelazamiento para la mezcla (3.69) del estado puro (3.39) con el estado máximamente mezclado, para  $p = 1/2$  y  $p = 0,9$ . Panel superior: El Déficit de Información  $I_2^B(x)$  asociado a la entropía cuadrática (Eqs. (3.61), (3.81)), y el cuadrado de la concurrencia  $C^2(x)$  (Eq. (3.82)), que es no nula para  $x > x_c$  (Eq. (3.83)). Se satisface  $I_2^B(x) > C^2(x)$  para  $x \in (0, 1)$ . Panel Central: El Déficit de Información basado en la entropía de von Neumann  $I^B(x)$  (Ecs. (3.15), (3.80) para  $f(p) = -p \log_2 p$ ) y el entrelazamiento de formación  $E(x)$ , nuevamente coincidentes para  $x = 1$  pero sin mostrar una relación de orden fija para  $x \in (0, 1)$ . Panel inferior: Comportamiento del Déficit de Información asociado a la entropía (2.84),  $I_q^B(x)$  (Ec. (3.80) para  $f(p) = \frac{p-p^q}{1-2^{1-q}}$ ), para diferentes valores de  $q$  y  $p = 1/2$ .

cuando ambas cantidades coincidan en  $x = 1 \forall p$ . Recordemos que para cualquier estado de dos qubits, el Entrelazamiento de Formación  $E(A, B)$  puede ser evaluado en términos de la concurrencia  $C(A, B)$  por la ec. (2.54) [44].

Por consiguiente, para  $x$  próximo a 1 se obtiene

$$E(x) - I^B(x) \approx -\frac{1-x}{4} \log_2(1-x) > 0$$

dado que  $E(x)$  decrece linealmente, mientras  $I^B(x)$  decrece en forma logarítmica, a medida que  $1-x$  aumenta desde cero. Notemos que  $I^B(x)$  coincide con el Quantum Discord  $\forall p, x$ , dado que la Ec. (3.59) es también minimizada para una medida a lo largo del eje  $z$  ( $\theta = 0$ ), en cuyo caso  $\rho'_B = \rho_B$ .

El panel inferior de la figura muestra el comportamiento de la Eq. (3.80) para el caso de la entropía de Tsallis  $f(p) = f_q(p) \equiv \frac{p-p^q}{1-2^{1-q}}$ . A medida que  $q$  aumenta y toma valores mayores que 2,  $I_q^B(x)$  se vuelve menos sensible a las correlaciones cuánticas débiles (ya que  $f_q''(1/d)$  en (3.74) se vuelve pequeña), a semejanza del comportamiento exhibido por las medidas de entrelazamiento.

Si  $E_q(x)$  es el entrelazamiento de formación asociado a  $I_q(x)$  (ver apéndice), la desigualdad  $I_q^B(x) \geq E_q(x) \forall x \in [0, 1]$  valdrá en un cierto intervalo *finito* alrededor de  $q = 2$ , a saber  $1,27 \lesssim q \lesssim 3,5$  para  $p = 1/2$  y  $1,3 \lesssim q \lesssim 4,3$  para  $p = 0,9$ . Estos límites son determinados de la condición entre las pendientes:  $I_q^{B'}(1) < E_q'(1)$ . Por ejemplo, para  $p = 1/2$  y una función  $f$  general tal que (3.91) sea convexa, tenemos, para  $x \rightarrow 1$ ,

$$I_f^B(x) \approx 1 - \frac{1}{4}[f'(0) + 2f'(1/2) - 3f'(1)](1-x) \quad (3.84)$$

$$E_f(x) \approx 1 + \frac{3}{4}f''(1/2)(1-x) \quad (3.85)$$

tal que  $I_f^B(x) > E_f(x)$  en este límite, sii

$$f'(0) + 2f'(1/2) - 3f'(1) < -3f''(1/2).$$

Esto deja de lado la entropía de von Neumann ( $f'(0) \rightarrow \infty$ ) así como todos los valores  $q < 1$  en el caso de la entropía de Tsallis, lo que conduce al intervalo anterior  $1,27 \lesssim q \lesssim 3,5$ .

### 3.4.3. Decoherencia de un estado de Bell

Consideremos finalmente el estado

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(z) &= \frac{1}{2}[|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + z(|00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|)] \\ &= \frac{1+z}{2}|\Psi_+\rangle\langle \Psi_+| + \frac{1-z}{2}|\Psi_-\rangle\langle \Psi_-| \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde  $|z| \leq 1$  y

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

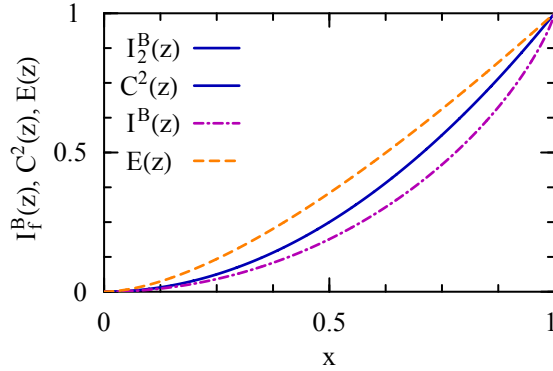


Figura III.3: Las mismas cantidades de la Fig. III.2 para los estados (3.86). Aquí  $I_2^B(z) = C^2(z)$  mientras que  $E(z) > I^B(z) \forall z \in (0, 1)$ .

son estados de Bell. Esto corresponde a la decoherencia parcial de  $|\Psi_{\pm}\rangle$  y puede ser visto, además, como una mezcla de estos dos estados de Bell. aunque los estados reducidos  $\rho_A$  y  $\rho_B$  son máximamente mezclados  $\forall z$ , una medida local de spin a lo largo de un eje formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$  conduce a  $\rho'(\theta)$  con autovalores doblemente degenerados  $\frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1 - z^2)}}{4}$ , y por lo tanto a una pérdida de información  $\theta$ -dependiente

$$I_f^{\theta B}(z) = \sum_{\nu=\pm} [2f(\frac{1+\nu\sqrt{1-\sin^2\theta(1-z^2)}}{4}) - f(\frac{1+\nu z}{2})]. \quad (3.87)$$

Esta cantidad es mínima, para  $z \in (-1, 1)$  y  $f$  cóncava, nuevamente para  $\theta = 0$ , ya que  $\rho'(\theta) \prec \rho'(0) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \forall \theta$ . Obtenemos entonces, fijando nuevamente  $2f(1/2) = 1$ ,

$$I_f^B(z) = 1 - f(\frac{1+z}{2}) - f(\frac{1-z}{2}) \quad (3.88)$$

con  $I_f^{AB}(z) = I_f^A(z) = I_f^B(z)$  ya que  $\rho(0)$  es diagonal en una base producto estándar. Por lo tanto,  $I_f^B(z) > 0$ , si  $z \neq 0$ , con  $I_f^B(z) = -\frac{1}{4}f''(\frac{1}{2})z^2 + O(z^3)$  para  $z \rightarrow 0$ . Además,  $I_f^B(z)$  es una función convexa ( $I_f^{B''}(z) > 0$ ) y creciente de  $z$  ( $I_f^{B'}(z) > 0$ )  $\forall S_f$ . En el caso de la entropía cuadrática, la Ec. (3.88) se reduce a

$$I_2^B(z) = z^2 = C^2(z) \quad (3.89)$$

donde  $C(z) = |z|$  es la concurrencia de (3.86). En consecuencia, aquí  $I_2^B(z)$  y  $E_2(z)$  coinciden exactamente  $\forall z \in [0, 1]$ . En contraste, la medida de von Neumann  $I^B(z)$  es menor que el Entrelazamiento de Formación asociado,

$$E(z) = \sum_{\nu=\pm} f(\frac{1+\nu\sqrt{1-z^2}}{2})$$

(con  $f(p) = -p \log p$ )  $\forall z \in (0, 1)$  (Fig. III.3). Para pequeños  $z$  tenemos, en particular,

$$E(z) \approx -\frac{1}{2}z^2 \log_2 z^2 > I^B(z) \approx \frac{1}{2}z^2 / \ln 2.$$



Nuevamente,  $I^B(z)$  coincide aquí con el QD ya que  $\rho_B$  es máximamente mezclado. Finalmente, las Ecs. (3.93) y (3.88) del Apéndice implican, además,

$$I_3^B(z) = z^2 = E_3(z).$$

Puede verse que para  $2 < q < 3$ ,  $I_q^B(z) > E_q(z) \forall z \in (0, 1)$  (aunque la diferencia es pequeña) mientras que si  $q < 2$  or  $q > 3$  (dentro de los límites permitidos por la validez de (3.91)),  $I_q^B(z) < E_q(z) \forall z \in (0, 1)$ . Estos intervalos pueden ser corroborados de las expansiones

$$\begin{aligned} I_f^B(z) - E_f(z) &= \frac{1}{4}[-f''(\frac{1}{2}) - f'(0) + f'(1)]z^2 + O(z^3) \\ &= \frac{1}{4}[-f''(\frac{1}{2}) - f'(0) + f'(1)](1-z) + O(1-z)^2 \end{aligned}$$

para  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow 1$ , lo que implica  $I_f^B(z) > E_f(z)$  dentro de esos límites si y solo si  $f'(0) - f'(1) < -f''(1/2)$ , conduciendo a  $2 < q < 3$  en el caso de Tsallis.

### 3.5. Apéndice: Entrelazamiento de formación generalizado

La extensión de techo convexo (*Convex roof extension*) [72, 77], aplicada a las medidas entrópicas generalizadas  $S_f$ , conduce a una medida de entrelazamiento generalizada para estados no puros, dada por

$$E_f(\rho_{AB}) = \text{Min}_{\sum_{\alpha} q_{\alpha} |\Psi_{\alpha}\rangle\langle\Psi_{\alpha}| = \rho_{AB}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} E_f(|\Psi_{\alpha}\rangle\langle\Psi_{\alpha}|) \quad (3.90)$$

donde  $q_{\alpha} \geq 0$  y  $E_f(\rho_{AB}^{\alpha}) = S_f(\rho_A^{\alpha}) = S_f(\rho_B^{\alpha})$  es la entropía de entrelazamiento generalizada de  $|\Psi^{\alpha}\rangle$ . La minimización es sobre todas las representaciones de  $\rho_{AB}$  como combinación convexa de estados puros del sistema. La cantidad (3.90) es semi-definida positiva y se anula sólo en el caso que  $\rho_{AB}$  sea separable, es decir combinación convexa de estados producto. Es además un “monótono de entrelazamiento” (*Entanglement monotone*) [77], en el sentido de que no se incrementa por operaciones locales o comunicación clásica (LOCC): El entrelazamiento generalizado de estados puros  $E_f(\rho_{AB}^{\alpha})$  es una función cóncava de  $\rho_A^{\alpha}$ , invariante bajo operaciones unitarias locales, satisfaciendo entonces las condiciones de la referencia [77] para asegurar la monotonía de la correspondiente extensión de techo convexo.

En el caso de la entropía de von Neumann, la ec. (3.90) es el entrelazamiento de formación usual (2.53) [15], mientras que en el caso de la entropía cuadrática, la ec. (3.90) es el denominado *tangle*  $\tau(\rho_{AB})$  [72, 78]. Recordemos que en el caso de dos qubits, el entrelazamiento de formación está dado en términos de la concurrencia por (2.54), mientras que el tangle es directamente el cuadrado de la concurrencia:  $\tau(\rho_{AB}) = C^2(A, B)$ .

Puede preguntarse aquí si es posible utilizar la extensión directa de la Ec. (2.54), es decir,

$$E_f = \sum_{\nu=\pm} f\left(\frac{1+\nu\sqrt{1-C^2}}{2}\right) \quad (3.91)$$

para evaluar el entrelazamiento de formación asociado a una función cóncava  $f$  general. De acuerdo a los argumentos de [44] y [79], esto es posible si se cumple que la Ec. (3.91), la cual es una función estrictamente creciente de la concurrencia  $C$   $\forall f$  cóncava, es además *convexa*. En el caso de la entropía de Tsallis  $f(p) = f_q(p)$  (2.84), esto permite la aplicabilidad de (3.91) para [19]

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{2} \leq q \leq \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad (3.92)$$

(que surge de la condición  $E''(C) \geq 0 \forall C \in [0, 1]$ ), es decir,  $0,7 \lesssim q \lesssim 4,3$ , que está de acuerdo con los resultados numéricos de [79].

Denotando a la cantidad resultante como  $E_q$ , se obtiene, con la presente normalización,

$$E_2 = E_3 = C^2 \quad (3.93)$$

dado que para cualquier estado de un qubit  $\rho$ , se verifica  $S_2(\rho) = S_3(\rho) = 4 \det(\rho)$  (ver próximo capítulo).

Mientras que  $I_f(\rho_{AB}) = 0$  implica  $E_f(\rho_{AB}) = 0$  (ya que (3.30) es separable), la recíproca no es necesariamente cierta, ya que  $I_f(\rho_{AB})$  puede ser no nula aún en estados separables ( $E_f(\rho_{AB}) = 0$ ). No obstante, y aunque ambas cantidades coinciden para estados puros,  $I_f(\rho_{AB})$  y  $E_f(\rho_{AB})$  no guardan necesariamente una relación de orden entre sí, para estados  $\rho_{AB}$  no puros. Esto sucede en particular con la entropía de von Neumann.

## IV Ecuaciones generales para la determinación de medidas óptimas

En el capítulo precedente vimos que dado un sistema bipartito  $A + B$ , la realización de una medida local sobre cualquiera de los subsistemas,  $A$  ó  $B$ , conduce a una pérdida de información sobre el operador densidad conjunto  $\rho_{AB}$ , salvo que el estado posmedida  $\rho'_{AB}$  coincida con el original, y que es posible relacionar esta pérdida de información con las correlaciones existentes entre  $A$  y  $B$  antes de realizar la medida, por medio de  $I_f^{MB}$ . La menor de todas las posibles  $I_f^{MB}$  es la que en verdad cuantifica las correlaciones netamente cuánticas presentes en el sistema, ya que esta información mínima perdida, es la que separa al estado cuántico  $\rho_{AB}$  del conjunto de todos los estados clásicos. La medida local que minimiza  $I_f^{MB}$ , puede entonces considerarse como la medida local que menos perturba al sistema, según la entropía  $S_f$ . En este capítulo analizaremos como determinar esta medida. Los desarrollos expuestos en este capítulo dieron lugar al trabajo [20].

### 4.1. Ecuación estacionaria general

A continuación derivaremos las ecuaciones que permiten determinar la medida local óptima, es decir la que conlleva la mínima perturbación, definida por la Ec. (3.34).

*Resultado 1.* Dada función entrópica  $f$ , la medida local que menos perturba al sistema satisface la ecuación

$$\text{Tr}_A[f'(\rho'_{AB}), \rho_{AB}] = 0 \quad (4.1)$$

donde  $f'$  es la derivada de  $f$  y  $\rho'_{AB}$  el estado posmedida (3.30).

*Demostración:* La entropía generalizada del estado (3.30) es, utilizando (3.32),

$$S_f(\rho'_{AB}) = \sum_{i,j} f(p_j^i), \quad p_j^i = q_j p_{i/j} = \langle i_j j | \rho_{AB} | i_j j \rangle \quad (4.2)$$

donde  $\langle i_j j | \rho_{AB} | k_j j \rangle = \delta_{ik} p_j^i$ . Considerando una pequeña variación unitaria de la base local de medida, tal que  $\delta |j_B\rangle = (e^{i\delta h_B} - 1) |j_B\rangle \approx i\delta h_B |j_B\rangle$ , con  $\delta h_B$  un operador

hermítico local pequeño, tenemos  $\delta p_j^i \approx i \langle i_j j | [\rho_{AB}, \delta h] | i_j j \rangle$  a primer orden en  $\delta h$ , con  $\delta h = I_A \otimes \delta h_B$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta I_f^{MB} &= \sum_{i,j} f'(p_j^i) \delta p_j^i = i \text{Tr} [f'(\rho'_{AB}), \rho_{AB}] \delta h \\ &= i \text{Tr}_B (\text{Tr}_A [f'(\rho'_{AB}), \rho_{AB}]) \delta h_B. \end{aligned}$$

La condición  $\delta I_f^{MB} = 0 \forall \delta h_B$  conduce a la Ec. (4.1).

La Ec. (4.1) implica explícitamente que

$$\sum_i f'(p_j^i) \langle i_j j | \rho_{AB} | i_j k \rangle = \sum_i f'(p_k^i) \langle i_k j | \rho_{AB} | i_k k \rangle$$

$\forall k, j$ , y determina un cierto conjunto de bases locales factibles  $\{|j_B\rangle\}$ . El significado es que  $f'(\rho'_{AB})$  y  $\rho_{AB}$  “conmutan localmente”, es decir, el estado reducido en  $B$  de su conmutador es nulo.

Los estados correspondientes  $|i_j\rangle$  de  $A$  dependen en general de  $j$ . La base local minimizante  $\{|j_B\rangle\}$  no diagonalizará en general al estado reducido  $\rho_B$ . Sin embargo, los autoestados locales serán óptimos en algunos casos importantes: Si en una base producto estándar  $\{|ij\rangle = |i_A\rangle |j_B\rangle\}$ , formada por los autoestados de  $\rho_A$  y  $\rho_B$  los únicos elementos fuera de la diagonal de  $\rho_{AB}$  son  $\langle ij | \rho_{AB} | kl \rangle$ , con  $i \neq k$ , y  $j \neq l$ , tal que

$$\langle ij | \rho_{AB} | ik \rangle = \delta_{jk} p_j^i, \quad \langle ij | \rho_{AB} | lj \rangle = \delta_{il} p_j^i \quad (4.3)$$

entonces la Ec. (4.1) se satisface trivialmente  $\forall S_f$ , para una medida en la base  $\{|j_B\rangle\}$ . Tal base proporcionaría entonces *un punto estacionario universal de  $I_f^B$* . Este es precisamente el caso de un estado puro, escrito en la base de Schmidt como  $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |k_A k_B\rangle$ , y también el de una mezcla de  $|\Psi_{AB}\rangle$  con el estado máximamente mezclado, visto en la sec. 3.4:

$$\rho_{AB} = x |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| + \frac{1-x}{n} I, \quad x \in [0, 1]$$

donde las Ecs. (4.3), y por lo tanto (4.1), se satisfaran  $\forall f$  para una medida en la base  $\{|k_B\rangle\}$ . Se mostró justamente en 3.4 que tal base proporciona la *medida universal local de perturbación mínima* para estos estados, minimizando  $I_f^{MB} \forall S_f$ .

En el caso de la entropía cuadrática,  $f'(\rho'_{AB}) \propto I - 2\rho'_{AB}$  y la Ec. (4.1) da como resultado justamente

$$\text{Tr}_A [\rho'_{AB}, \rho_{AB}] = 0$$

indicando que el estado posmedida  $\rho'_{AB}$  debe conmutar localmente (en  $B$ ) con el estado original.

En el caso del Discord original (3.59), el término adicional local conduce en la variación a la ecuación modificada

$$\text{Tr}_A [f'(\rho'_{AB}), \rho_{AB}] - [f'(\rho'_B), \rho_B] = 0 \quad (4.4)$$

donde  $f'(\rho) = -\log \rho$ .

## 4.2. El caso de dos qubits

Analizaremos a continuación el caso de dos qubits en detalle. Cualquier estado de un sistema de dos qubits puede ser escrito como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}(I + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B + \boldsymbol{\sigma}_A^t J \boldsymbol{\sigma}_B) \quad (4.5)$$

donde aquí  $\boldsymbol{\sigma}_A \equiv \boldsymbol{\sigma} \otimes I$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_B \equiv I \otimes \boldsymbol{\sigma}$ , con  $\boldsymbol{\sigma}^t = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  los operadores de Pauli e  $I$  el operador identidad (en el espacio correspondiente). Las trazas básicas  $\text{tr } \sigma_\mu = 0$ ,  $\text{tr } \sigma_\mu \sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$  para  $\mu, \nu = x, y, z$ , implican que

$$\mathbf{r}_A = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \rangle, \quad \mathbf{r}_B = \langle \boldsymbol{\sigma}_B \rangle, \quad J = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\sigma}_B^t \rangle \quad (4.6)$$

esto es,  $J_{\mu\nu} = \langle \sigma_{A\mu} \sigma_{B\nu} \rangle$ , donde  $\langle O \rangle = \text{Tr } \rho_{AB} O$ .

Cualquier medida proyectiva completa local en  $B$ , puede ser considerada como una medida de espín a lo largo de la dirección de un vector unitario  $\mathbf{k}$ , representado por medio de los proyectores ortogonales  $P_{\pm\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(I \pm \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ . Esto deja sólo aquellos elementos de  $\rho_{AB}$  proporcionales a  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , y conduce al estado posmedida

$$\rho'_{AB} = \frac{1}{4}[I + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A + (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B + (\boldsymbol{\sigma}_A^t J \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)] \quad (4.7)$$

el cual corresponde a  $\mathbf{r}_B \rightarrow \mathbf{k}\mathbf{k}^t\mathbf{r}_B$  y  $J \rightarrow J\mathbf{k}\mathbf{k}^t$  en (4.5). La pérdida de información debida a esta medida será expresada como

$$I_f^{\mathbf{k}} \equiv S_f(\rho'_{AB}) - S_f(\rho_{AB}). \quad (4.8)$$

Mostraremos ahora que empleando la Ec. (4.1), se obtiene la siguiente condición:

*Resultado 2:* La condición general estacionaria para la dirección  $\mathbf{k}$  de medida en  $B$  satisface

$$\alpha_1 \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A + \alpha_3 J^t J \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \quad (4.9)$$

es decir,

$$\mathbf{k} \times (\alpha_1 \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A + \alpha_3 J^t J \mathbf{k}) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

donde  $\lambda$  es un factor de proporcionalidad y los coeficientes  $\alpha_i$  están dados por [20]

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu = \pm 1} f'(p_\nu^\mu) \left( \nu, \frac{\nu\mu}{|\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}|}, \frac{\mu}{|\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}|} \right) \quad (4.11)$$

con  $p_\nu^\mu$  ( $\mu, \nu = \pm 1$ ) los autovalores de (4.7):

$$p_\nu^\mu = \frac{1}{4}(1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k} + \mu |\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}|). \quad (4.12)$$

*Demostración:* El estado (4.7) es diagonal en la base producto condicional formada por los autoestados de  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$  y  $(\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_A$ , donde  $\nu = \pm 1$ , lo cual conduce a los autovalores Ec.(4.12). Podemos escribir entonces

$$f'(\rho'_{AB}) = \frac{1}{4} \sum_{\nu, \mu} f'(p_\nu^\mu) (I + \mu \frac{\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}}{|\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}|} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A) (I + \nu \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)$$

Usando las relaciones básicas de la traza y la relación  $[\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = 2i(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , obtenemos  $\text{Tr}_A[(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A)(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B), \boldsymbol{\sigma}_A J \boldsymbol{\sigma}_B] = 4i(\mathbf{s} \times J^t \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$ , resultando entonces

$$\text{Tr}_A[f'(\rho'_{AB}), \rho_{AB}] = i[\mathbf{k} \times (\alpha_1 \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A + \alpha_3 J^t J \mathbf{k})] \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$$

con  $\alpha_i$  dado por la Ec. (4.11). La ecuación (4.1) conduce entonces a la Ec. (4.9).

Podemos verificar la Ec. (4.9) directamente. De (4.12), tenemos que

$$\delta p_\nu^\mu = \frac{\nu}{4} (\mathbf{r}_B + \mu \frac{J^t(\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k})}{|\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}|}) \cdot \delta \mathbf{k}$$

para cambios  $\delta \mathbf{k}$  en la dirección del aparato de medida local, con  $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{k} = 0$  ya que  $\mathbf{k}$  es un vector unitario. La condición  $\delta I_f^k = \sum_{\nu, \mu} f'(p_\nu^\mu) \delta p_\nu^\mu = 0$  implica entonces

$$(\alpha_1 \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A + \alpha_3 J^t J \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{k} = 0$$

lo que conduce a la Ec. (4.9), ya que  $\delta \mathbf{k}$  es ortogonal a  $\mathbf{k}$ .

Escribiendo  $\mathbf{k} = (\sin \gamma \cos \phi, \sin \gamma \sin \phi, \cos \gamma)$ , la Ec. (4.9) conduce a una ecuación trascendente para  $\gamma, \phi$  ( $\tan \gamma = d_z / \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ ,  $\tan \phi = d_y / d_x$ , con  $\mathbf{d}$  el lado izquierdo de (4.9)). La Ec. (4.9) puede ser vista, además, como una ecuación autoconsistente de autovalores para la matriz  $(\alpha_1 \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A) \mathbf{k}^t + \alpha_3 J^t J$ .

El estado inicial reducido local  $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB} = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\sigma})$  cambia a

$$\rho'_B = \frac{1}{2}[I + (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})] \quad (4.13)$$

luego de la medida local. La dirección minimizante  $\mathbf{k}$  dependerá de la matriz  $J$  y puede obviamente desviarse de  $\mathbf{r}_B$ , cambiando el estado local. Se espera entonces una “transición” en la dirección de menor perturbación  $\mathbf{k}$ , de  $\mathbf{r}_B$  a la dirección del autovector principal de  $J^t J$ , a medida que  $J$  aumenta, tal como se aprecia en la Ec. (4.9). El tipo de transición dependerá en general de la elección de entropía.

En el caso del Quantum Discord original (3.59), la contribución adicional local (4.4) conducirá a una condición estacionaria modificada [20, 80]

$$(\alpha_1 - \eta) \mathbf{r}_B + \alpha_2 J^t \mathbf{r}_A + \alpha_3 J^t J \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \quad (4.14)$$

donde  $\eta = \frac{1}{2} \sum_{\nu=\pm} \nu f'(p_\nu) = \frac{1}{2} \log(p_-/p_+)$ , con  $p_\nu = \sum_\mu p_\nu^\mu = \frac{1}{2}(1 + \nu \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k})$  los autovalores de  $\rho'_B$ . El término extra  $-\eta \mathbf{r}_B$  tenderá a disminuir el efecto de  $\mathbf{r}_B$ , favoreciendo la dirección determinada por  $J^t J$ .

## 4.3. Medida cuadrática

### 4.3.1. Caso de dos qubits

Mientras que la evaluación de una entropía general  $S_f(\rho)$  requiere la determinación de los autovalores de  $\rho$ , para aquellas elecciones de  $f$  que involucran sólo

potencias enteras pequeñas de  $\rho$ , tal como la entropía cuadrática (2.95),  $S_f(\rho)$  puede ser determinada sin el conocimiento explícito de los autovalores.

Por ejemplo, usando nuevamente los resultados básicos  $\text{tr } \sigma_\mu = 0$ ,  $\text{tr } \sigma_\mu \sigma_\nu = 2\delta_{\mu\nu}$ , la entropía cuadrática (3.16) de un estado cualquiera de dos qubits puede ser evaluada como

$$S_2(\rho_{AB}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(|\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2) \quad (4.15)$$

donde  $\|J\|^2 = \text{tr } J^t J$  y  $|\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \mathbf{r}$ . Para el estado posmedida (4.7), la Ec. (4.15) resulta

$$S_2(\rho'_{AB}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|\mathbf{r}_A|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{k}^t M_2 \mathbf{k}, \quad (4.16)$$

$$M_2 = \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^t + J^t J \quad (4.17)$$

donde  $M_2$  es una matriz simétrica semidefinida positiva. La pérdida de información puede entonces ser expresada como *una forma cuadrática* en  $\mathbf{k}$ , más un término constante:

$$I_2^{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(|\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2 - \mathbf{k}^t M_2 \mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\text{tr } M_2 - \mathbf{k}^t M_2 \mathbf{k}). \quad (4.18)$$

El mínimo de  $I_2^{\mathbf{k}}$  corresponde luego a  $\mathbf{k}$  dirigido a lo largo del autovector asociado con el *mayor autovalor* de la matriz  $M_2$ :

$$I_2^B(\rho_{AB}) = \text{Min}_{\mathbf{k}} I_2^{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}(\text{tr } M_2 - \lambda_1) = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) \quad (4.19)$$

donde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  son los autovalores de  $M_2$  ordenados en forma *decreciente*. Mencionemos que el mínimo  $I_2^B$  es proporcional al *Discord geométrico*, como se mostró en el capítulo anterior.

Un estado  $\rho_{AB}$  que es ya de la forma (4.7), es decir, un estado *clásicamente correlacionado respecto de B*, conduce a  $I_f^B(\rho_{AB}) = 0 \forall S_f$ , y está entonces caracterizado por una matriz  $M_2$  de rango 1 (tal que  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ). Se verifica que para  $f'(p_\nu^t) \propto 1 - 2p_\nu^t$ , la Ec. (4.9) se reduce a la presente ecuación de autovalores  $M_2 \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k}$ , dado que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \propto (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}, 0, 1)$ .

Vemos así que en el caso de la entropía cuadrática, la determinación de la medida local minimizante de  $I_2^B(\rho_{AB})$  es analítica para cualquier  $\rho_{AB}$ , ya que requiere sólo la diagonalización de una matriz  $M_2$  de  $3 \times 3$ .

### 4.3.2. Extensión a un sistema qudit-qubit

Consideremos ahora el caso en que  $A$  es un sistema cuyo espacio de Hilbert es de dimensión arbitraria  $d_A$  (qudit). Considerando nuevamente un conjunto ortogonal de  $d_A^2 - 1$  operadores  $\sigma_A$  que satisfagan

$$\text{Tr } \sigma_A = \mathbf{0}, \quad \text{Tr } \sigma_{A_i} \sigma_{A_j} = d_A \delta_{ij}$$

podemos escribir un estado conjunto general en forma similar al caso de dos qubits:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2d_A} [I + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{r}_B \cdot \boldsymbol{\sigma}_B + \boldsymbol{\sigma}_A^t J \boldsymbol{\sigma}_B] \quad (4.20)$$

con  $\mathbf{r}_A = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \rangle$ ,  $\mathbf{r}_B = \langle \boldsymbol{\sigma}_B \rangle$ , y  $J = \langle \boldsymbol{\sigma}_A \boldsymbol{\sigma}_B^t \rangle$  una matriz de  $d_A \times 3$ .

El resultado (4.15) puede extenderse directamente:

$$S_2(\rho_{AB}) = \frac{2d_A - 1}{d_A} - \frac{1}{d_A}(|\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2) \quad (4.21)$$

donde  $\|J\|^2 = \text{tr } J^t J$  y  $|\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r}^t \mathbf{r}$ . El estado posmedida sigue siendo de la forma (4.7) y por lo tanto la Ec. (4.16) se generaliza a

$$S_2(\rho'_{AB}) = \frac{2d_A - 1}{d_A} - \frac{1}{d_A}|\mathbf{r}_A|^2 - \frac{1}{d_A} \mathbf{k}^t M_2 \mathbf{k} \quad (4.22)$$

donde nuevamente

$$M_2 = \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^t + J^t J$$

es una matriz de  $3 \times 3$ , tal como en el caso de dos qubits, ya que los grados de libertad de  $A$  están contraidos. Por lo tanto,

$$I_2^{\mathbf{k}} = \frac{1}{d_A}(\text{tr } M_2 - \mathbf{k}^t M_2 \mathbf{k}). \quad (4.23)$$

La determinación de la medida óptima es entonces analítica también en este caso, requiriendo nuevamente la diagonalización de una matriz de  $3 \times 3$ .

#### 4.4. Medida cúbica

Otra entropía que puede ser fácilmente evaluada para cualquier estado de dos qubits es la correspondiente al caso  $q = 3$  en (2.84),

$$S_3(\rho) = \frac{4}{3}(1 - \text{Tr } \rho^3). \quad (4.24)$$

*Lema 1.* La entropía (4.24) de un estado general de dos qubits (4.5) es [20]

$$S_3(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}[S_2(\rho_{AB}) + 1 - (\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B - \det J)] \quad (4.25)$$

donde  $S_2(\rho_{AB})$  es la entropía (4.15).

*Demostración:* Aplicando nuevamente las relaciones básicas de la traza y notando que  $\text{tr } \sigma_\mu \sigma_\nu \sigma_\tau = 2i\epsilon_{\mu\nu\tau}$ , con  $\epsilon$  el tensor completamente antisimétrico ( $\mu, \nu, \tau \in \{x, y, z\}$ ), los únicos términos con traza no nula en  $\rho^3$  son

$$\text{Tr}(\mathbf{r}_A^t \boldsymbol{\sigma}_A)(\boldsymbol{\sigma}_A^t J \boldsymbol{\sigma}_B)(\mathbf{r}_B^t \boldsymbol{\sigma}_B) = 4\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B$$

(y lo mismo para sus 3! permutaciones) y

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_A^t J \boldsymbol{\sigma}_B)^3 = 3!(2i)^2 \det J$$

estos resultados junto con las contracciones cuadráticas, conducen a la Ec. (4.25).



*Resultado 3.* Para la entropía (4.24) y el estado general de dos qubits (4.5), la mínima pérdida de información asociada a una medida local en  $B$ , está dada por [20]

$$\begin{aligned} I_3^B(\rho_{AB}) &= \text{Min}_{\mathbf{k}} I_3^{\mathbf{k}} = \frac{1}{4}(\text{tr } M_3 - 2 \det J - \lambda_1) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_2 + \lambda_3) - \frac{1}{2} \det J \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  son los autovalores, ordenados en forma decreciente, de la matriz semidefinida positiva

$$M_3 = \mathbf{r}_B \mathbf{r}_B^t + J^t J + \mathbf{r}_B \mathbf{r}_A^t J + J^t \mathbf{r}_A \mathbf{r}_B^t. \quad (4.27)$$

*Demostración.* Usando la Ec. (4.25), la entropía cúbica del estado posmedida (4.7) puede ser expresada como

$$S_3(\rho'_{AB}) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(|\mathbf{r}_A|^2 + \mathbf{k}^t M_3 \mathbf{k}) \quad (4.28)$$

donde  $M_3$  es la matriz (4.27), ya que  $\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B = \text{tr } \mathbf{r}_B \mathbf{r}_A^t J = \text{tr } J^t \mathbf{r}_A \mathbf{r}_B^t$  y

$$\det(J \mathbf{k} \mathbf{k}^t) = 0.$$

La matriz  $M_3$  es claramente simétrica y además semidefinida positiva, pues

$$\mathbf{k}^t M_3 \mathbf{k} \geq (|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_B| - |J \mathbf{k}|)^2 \geq 0, \quad \forall \mathbf{k}$$

ya que  $|\mathbf{r}_A| \leq 1$ . La pérdida de información  $I_3^{\mathbf{k}} = S_3(\rho'_{AB}) - S_3(\rho_{AB})$  es, por lo tanto,

$$I_3^{\mathbf{k}} = \frac{1}{4}(\text{tr } M_3 - 2 \det J - \mathbf{k}^t M_3 \mathbf{k}) \quad (4.29)$$

donde  $\text{tr } M_3 = |\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2 + 2\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B$ . Su mínimo se obtiene luego para  $\mathbf{k}$  paralelo al autovector correspondiente al *mayor autovalor* de  $M_3$ , lo cual conduce a la Ec. (4.26). A diferencia de  $I_2^{\mathbf{k}}$ , la medida minimizante puede ahora depender, además, de  $\mathbf{r}_A$  a través de los últimos terminos de  $M_3$ .

Se verifica que la Ec. (4.9) conduce, en el presente caso, a la misma ecuación de autovalores  $M_3 \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k}$ , ya que  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \propto (\mathbf{r}_B^t \mathbf{k} + \mathbf{r}_A^t J \mathbf{k}, \mathbf{r}_B^t \mathbf{k}, 1)$  para  $f'(p_\nu^\mu) \propto 1 - 3(p_\nu^\mu)^2$ . Y se verifica que un estado clásicamente correlacionado de la forma (4.7) se caracteriza por matrices  $M_3$  y  $J$  de rango 1, tal que la Ec. (4.26) se anula.

Notemos que bajo rotaciones arbitrarias locales

$$\sigma_\alpha \rightarrow R_\alpha \sigma_\alpha, \quad \alpha = A, B$$

con  $R_\alpha R_\alpha^t = I$ ,  $\det R_\alpha = +1$ , tenemos  $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow R_\alpha^t \mathbf{r}_\alpha$  y  $J \rightarrow R_A^t J R_B$  en (4.5), tal que  $M_2 \rightarrow R_B^t M_2 R_B$  y  $M_3 \rightarrow R_B^t M_3 R_B$ . Sus autovalores permanecen por lo tanto invariantes. Por supuesto,  $\det J$  y todos los otros términos en las Ecs. (4.15) y (4.25) permanecen inalterados.

Las Ecs. (4.15) y (4.25) proporcionan de hecho límites estrictos a estos invariantes. Como  $S_2(\rho_{AB}) \geq 0 \forall \rho_{AB}$ , La Ec. (4.15) implica

$$|\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2 \leq 3 \quad (4.30)$$

con  $|\mathbf{r}_A|^2 + |\mathbf{r}_B|^2 + \|J\|^2 = 3$  si y sólo si  $\rho_{AB}$  (asumido semidefinido positivo) es puro ( $\rho_{AB}^2 = \rho_{AB}$ ,  $S_2(\rho_{AB}) = 0$ ). Además, como  $\text{Tr } \rho^{q'} \leq \text{Tr } \rho^q$  si  $q' > q > 0$ , obtenemos para la presente normalización,  $S_3(\rho) \geq \frac{2}{3}S_2(\rho)$ , lo cual, para el caso de dos qubits, implica

$$\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B - \det J \leq 1 - \frac{1}{3}S_2(\rho_{AB}) \quad (4.31)$$

con  $\mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B - \det J = 1$  si y solo si  $\rho_{AB}$  es puro.

Podemos verificar estos resultados escribiendo el estado puro de dos qubits en la base de Schmidt,  $|\Psi_{AB}\rangle = \sqrt{p}|00\rangle + \sqrt{1-p}|11\rangle$ , con  $p \in [0, 1]$ , lo que conduce a

$$|\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B| = |2p - 1|, \quad \|J\|^2 = 1 + 8p(1-p), \quad \mathbf{r}_A^t J \mathbf{r}_B = (2p - 1)^2$$

con  $\det J = -4p(1-p)$ , y por lo tanto a la igualdad en (4.30)–(4.31).

Un aspecto importante acerca de las entropías cuadrática y cúbica es que resultan *iguales* para un estado arbitrario de un qubit  $\rho_A = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{r}_A \cdot \boldsymbol{\sigma})$ , ya que  $\text{tr } \sigma_\mu^m = 0$  para  $m$  impar:

$$S_2(\rho_A) = S_3(\rho_A) = 1 - |\mathbf{r}_A|^2. \quad (4.32)$$

Esto implica que los entrelazamientos de formación asociados (3.90) para un estado de dos qubits son *idénticos* [19], coincidiendo con el cuadrado de la concurrencia  $C_{AB}$  [44, 72]. Ambas cantidades  $I_2^B$  e  $I_3^B$  se reducen entonces al cuadrado de la concurrencia  $C_{AB}^2$  en el caso de un estado puro de dos qubits.

Este último resultado puede ser directamente verificado usando la descomposición de Schmidt: Ambas matrices  $M_2$  y  $M_3$  son diagonales en la correspondiente base  $z$ , y sus dos autovalores más bajos son idénticos  $\lambda_2 = \lambda_3 = 4p(1-p) = -\det J$ . Las Ecs. (4.19) y (4.26) conducen entonces a

$$I_2^B = I_3^B = 4p(1-p) = -\det J$$

que coinciden con el cuadrado de  $C_{AB} = 2\sqrt{p(1-p)}$ .

## 4.5. Ejemplos

### 4.5.1. Estados con densidades reducidas máximamente mezcladas

Como primer ejemplo vamos a considerar estados de dos qubits con  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{0}$  en (4.5), tal que  $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2}I$  son máximamente mezclados y

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}(I + \boldsymbol{\sigma}_A^t J \boldsymbol{\sigma}_B) = \frac{1}{4}(I + \sum_{\mu, \nu=x, y, z} J_{\mu\nu} \sigma_{A\mu} \sigma_{B\nu}). \quad (4.33)$$

Estos estados son diagonales en la base de Bell.

Mostraremos que para el estado (4.33) es válido el siguiente Teorema [20]:

a) *La dirección de medida  $\mathbf{k}$  en el sistema B que minimiza  $I_f^B$  es universal, es decir,*

es la misma para cualquier entropía  $S_f$ , y está dada por la dirección del autovector con el autovalor más grande de la matriz  $J^t J$ .

b) La mínima pérdida de información resultante está dada por

$$I_f^B(\rho_{AB}) = 2f\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{p_3+p_4}{2}\right) - f(p_1) - f(p_2) - f(p_3) - f(p_4) \quad (4.34)$$

donde  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  son los autovalores de (4.33) ordenados en orden decreciente.

c)  $I_f^A = I_f^B \forall f$ , siendo la dirección minimizante en  $A$  aquella del autovector con autovalor más grande de  $J J^t$ .

*Demostración de a):* Para  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = \mathbf{0}$ , los autovalores (4.12) del estado posmedida  $\rho'_{AB} = \frac{1}{4}[I + \sigma_A^t J \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \sigma_B)]$  son

$$p_\nu^\mu(\mathbf{k}) = \frac{1}{4}(1 + \nu\mu|J\mathbf{k}|), \quad \mu, \nu = \pm 1$$

siendo entonces doblemente degenerados. Si  $\mathbf{k}_m$  es el autovector normalizado asociado al autovalor más grande ( $J_m^2$ ) de  $J^t J$ , tenemos

$$|J\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}^t J^t J \mathbf{k}} \leq \sqrt{\mathbf{k}_m^t J^t J \mathbf{k}_m} = |J_m|$$

para cualquier vector unitario  $\mathbf{k}$ , y por lo tanto  $p_\mu^\mu(\mathbf{k}) \leq p_\mu^\mu(\mathbf{k}_m)$ . Esto implica que la distribución  $\{p_\mu^\nu(\mathbf{k})\}$  es *mayorizada* por  $\{p_\mu^\nu(\mathbf{k}_m)\}$ , es decir,

$$\rho'_{AB}(\mathbf{k}) \prec \rho'_{AB}(\mathbf{k}_m) = \frac{1}{4}[I + J_m(\tilde{\mathbf{k}}_m \cdot \sigma_A)(\mathbf{k}_m \cdot \sigma_B)] \quad (4.35)$$

donde  $\tilde{\mathbf{k}}_m = J\mathbf{k}_m/J_m$  es el correspondiente autovector de  $J J^t$ . Esto implica

$$S_f(\rho'_{AB}(\mathbf{k})) \geq S_f(\rho'_{AB}(\mathbf{k}_m))$$

y por lo tanto  $I_f^{\mathbf{k}} \geq I_f^{\mathbf{k}_m} \forall \mathbf{k}$  y  $S_f$ . El estado  $\rho'_{AB}(\mathbf{k}_m)$  es entonces el estado clásicamente correlacionado *menos mezclado* asociado con  $\rho_{AB}$ , y la medida a lo largo de  $\mathbf{k}_m$  es la *medida local* (en  $B$ ) que menos perturba al sistema para *cualquier*  $S_f$ . Se verifica que la condición general estacionaria (4.9) conduce en este caso a la ecuación de autovalores  $J^t J \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \forall f$ , con  $M_2 = M_3 = J^t J$  en las ecuaciones (4.17) y (4.27).

El resultado (4.35) es natural: Los ejes locales pueden ser siempre elegidos tales que la matriz  $J$  sea *diagonal*. Esto puede ser logrado a través de su *descomposición de valores singulares*  $J = U_A J^d U_B^t$ , donde  $J_{\mu\nu}^d = J_\mu \delta_{\mu\nu}$ , con  $J_\mu^2$  los autovalores de  $J^t J$  (los mismos que los de  $J J^t$ ) y  $U_A, U_B$  matrices ortonormales ( $U_\alpha U_\alpha^t = I$  para  $\alpha = A, B$ ). Los signos de  $J_\mu$  deben ser elegidos tal que las  $U_\alpha$  sean matrices de rotación ( $\det U_\alpha = +1$ ). Sustituyendo  $\sigma_{A,B} \rightarrow U_{A,B} \sigma_{A,B}$  en (4.33), obtenemos la representación diagonal

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}\left(I + \sum_{\mu=x,y,z} J_\mu \sigma_{A\mu} \sigma_{B\mu}\right). \quad (4.36)$$

Dado que  $|J_m| = \text{Max}\{|J_\mu|\}$ , la medida universal que menos perturba al sistema es, por lo tanto, aquella *a lo largo de la dirección de máxima correlación*, dejando sólo el término más grande de (4.36) en el estado posmedida (4.35). Notemos que la Ec. (4.36) satisface las ecuaciones estacionarias (4.3) en la base producto formada por los autoestados de  $\sigma_{A\mu}\sigma_{B\mu}$ , para cualquier  $\mu = x, y, z$ .

*Demostración de b):* La Ec. (4.36) es diagonal en la base de Bell  $\{|\Psi_{1,2}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, |\Psi_{3,4}\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}\}$ , es decir,

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^4 p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (4.37)$$

con autovalores

$$p_{1,2} = \frac{1 + J_z \pm (J_x - J_y)}{4}, \quad p_{3,4} = \frac{1 - J_z \pm (J_x + J_y)}{4}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos siempre elegir los ejes locales  $x, y, z$  tales que  $|J_m| = |J_z| \geq |J_x| \geq |J_y|$ , con  $J_z \geq 0, J_x \geq 0$  (rotaciones de ángulo  $\pi$  alrededor de uno de los ejes en  $A$  o  $B$  conducen a  $J_\mu \rightarrow -J_\mu$  para el otro eje). En tal caso  $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$ , y la medida que menos perturba es a lo largo del eje  $z$ , tal que la ecuación (4.35) resulta

$$\rho'_{AB}(\mathbf{k}_m) = \frac{1}{4}(I + J_z \sigma_{Az} \sigma_{Bz}). \quad (4.38)$$

Este estado posee los autovalores doblemente degenerados

$$\frac{1 + J_z}{4} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \frac{1 - J_z}{4} = \frac{p_3 + p_4}{2}.$$

La mínima pérdida de información  $I_f^B(\rho_{AB}) = S_f(\rho'_{AB}(\mathbf{k}_m)) - S_f(\rho_{AB})$  conduce por lo tanto a la Ec. (4.34), donde  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  son en general los autovalores de  $\rho_{AB}$  ordenados en orden decreciente.

*Demostración de c):* Dado que la Ec. (4.34) queda completamente determinada por los autovalores ordenados de  $\rho_{AB}$ , se obtiene obviamente  $I_f^A = I_f^B$ , un resultado que es evidente de la representación simétrica (4.36). De (4.35) se ve que la medida minimizante en  $A$  es a lo largo de  $\tilde{\mathbf{k}}_m$ .

*Análisis del resultado (4.34):* Discutiremos ahora las principales propiedades de la Ec. (4.34). Se verifica que la estricta concavidad de  $f$  asegura  $I_f^B(\rho_{AB}) \geq 0 \forall S_f$ , con  $I_f^B(\rho_{AB}) = 0$  sólo si  $p_1 = p_2$  y  $p_3 = p_4$ , es decir, sólo si  $J_x = J_y = 0$ , en cuyo caso el estado (4.37) se reduce a

$$\rho_{AB} = p_1(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) + p_3(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$$

que es un estado clásicamente correlacionado, es decir, con Discord nulo.

En el caso de la entropía de von Neumann  $f(p) = -p \log_2 p$ , la Ec. (4.34) es justamente el Quantum Discord  $D(A|B) = D(B|A)$  del estado, coincidiendo con el resultado de la ref. [47], ya que para los estados (4.33),  $\rho'_B = \rho_B = \frac{1}{2}I$  para cualquier medida local  $M_B$ , lo que implica que el Quantum Discord de la ecuación (3.59) se reduce al Déficit de Información.

En el caso cuadrático (4.15), las Ec. (4.19) o (4.34) conducen a

$$I_2^B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}(J_x^2 + J_y^2) = (p_1 - p_2)^2 + (p_3 - p_4)^2 \quad (4.39)$$

resultado que representa justamente el Discord geométrico (normalizado) del estado. Y en el caso de la entropía cúbica, (4.25), las Ecs. (4.26) o (4.34) conducen a

$$I_3^B(\rho_{AB}) = \frac{1}{4}(J_x^2 + J_y^2) - \frac{1}{2}J_x J_y J_z \quad (4.40)$$

$$= (p_1 - p_2)^2(p_1 + p_2) + (p_3 - p_4)^2(p_3 + p_4) \quad (4.41)$$

el cual es el promedio de los términos en (4.39) e implica  $I_3^B(\rho_{AB}) \leq I_2^B(\rho_{AB})$ .

Notemos también que para  $J$  suficientemente pequeño, el resultado exacto (4.34) resulta proporcional a (4.39) para cualquier entropía  $S_f$ : Si  $J_m = J_z$ ,

$$I_f^B(\rho_{AB}) \approx \frac{1}{2}c_f(J_x^2 + J_y^2) + O(J^3) = c_f I_2^B(\rho_{AB}) + O(J^3) \quad (4.42)$$

con  $c_f = -\frac{1}{4}f''(\frac{1}{4}) > 0$ . Esto implica un comportamiento universal en las vecindades del estado máximamente mezclado  $I/4$ .

*Relación con el entrelazamiento.* Es bien sabido que el estado (4.33) es entrelazado sí y sólo sí su autovalor más grande  $p_1$  satisface

$$p_1 > 1/2.$$

Su concurrencia [44] está dada por

$$C_{AB} = \text{Max}[2p_1 - 1, 0] \quad (4.43)$$

con  $2p_1 - 1 = p_1 - p_2 - p_3 - p_4$ . Esto implica

$$I_2^B \geq C_{AB}^2, \quad I_3^B \geq C_{AB}^2 \quad (4.44)$$

con la igualdad válida (para  $C_{AB} > 0$ ) sólo si  $p_3 = p_4 = 0$  ( $C_{AB}^2 \leq (p_1 - p_2)^2 - (p_1 - p_2)(p_3 + p_4) \leq (p_1 - p_2)^2(p_1 + p_2)$  si  $p_3 + p_4 \leq p_1 - p_2$ ). La Ec. (4.44) significa que para los estados (4.33),  $I_2^B$  e  $I_3^B$  son cotas superiores de su correspondiente entrelazamiento de formación (3.90). Esta no es una propiedad general. Por ejemplo, esto no es válido en el caso de von Neumann  $f(\rho) = -\rho \log_2 \rho$ , donde la Ec. (4.34) puede ser menor que el entrelazamiento de formación  $E_{AB} = \sum_{\nu=\pm} f(\frac{1+\nu\sqrt{1-C_{AB}^2}}{2})$  para los presentes estados.

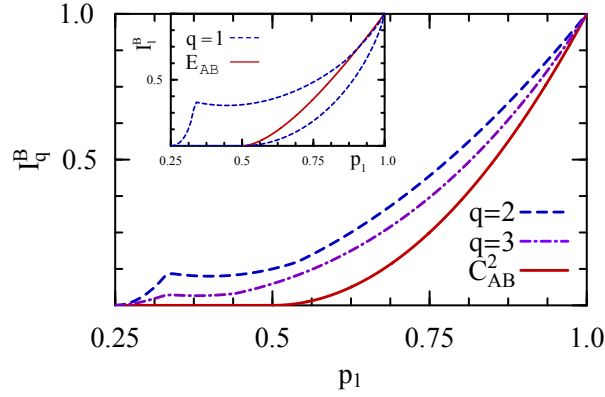


Figura IV.1: Valores máximos y mínimos alcanzados por los Déficit de Información generalizados  $I_2^B(\rho_{AB})$  e  $I_3^B(\rho_{AB})$ , en el estado (4.33), como función de su autovalor máximo  $p_1$ . El mínimo común es justamente el cuadrado de la concurrencia  $C_{AB}^2$ , mientras que los máximos están indicados por las líneas de trazos y de trazos-punteadas, respectivamente. El panel interior representa los valores máximos y mínimos alcanzados por  $I_1^B$  en el caso de von Neumann ( $q = 1$ ), en donde coincide con el Quantum Discord. La línea continua representa el entrelazamiento de formación.

La Figura (IV.1) representa los valores máximos y mínimos alcanzados por  $I_2^B$  e  $I_3^B$  en los estados (4.33) para valores fijos del autovalor máximo  $p_1$ . El mínimo común es justamente el cuadrado de la concurrencia  $C_{AB}^2$ , alcanzado para  $p_3 = p_4 = 0$  si  $p_1 \geq 1/2$  (y  $p_2 = p_1, p_3 = p_4$  si  $p_1 \leq 1/2$ ). El máximo es alcanzado para  $p_2 = p_3 = p_4$  si  $p_1 \geq 7/13 \approx 0,54$  para  $I_2$  y  $p_1 \gtrsim 0,44$  para  $I_3$ , y para  $p_2 = p_3, p_4 = 0$ , para  $p_1$  por debajo de los valores previos y por arriba de  $1/3$ . Como resultado, los valores máximos para concurrencia 0 de  $I_2$  e  $I_3$  son  $1/8$  y  $2/27$  respectivamente, obtenidos para  $p_1 = 1/2$ .

En contraste, en el caso de von Neumann, el mínimo (obtenido nuevamente para  $p_3 = p_4 = 0$  si  $p_1 \geq 1/2$ ) yace claramente por debajo del entrelazamiento de formación  $E(A, B) \forall p \in (1/2, 1)$ , e incluso el máximo (obtenido para  $p_2 = p_3 = p_4$  si  $p \gtrsim 0,86$  y para  $p_2 = p_3, p_4 = 0$  si  $1/3 \leq p_1 \lesssim 0,86$ ) yace por debajo de  $E(A, B)$  si  $p_1 \gtrsim 0,91$ . Para  $p \leq 1/3$  el máximo para las tres entropías se alcanza cuando  $p_2 = p_3 = p_1$ .

#### 4.5.2. Estados con simetría de paridad (estados $X$ )

Vamos a considerar ahora el caso donde ambos vectores de Bloch  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  están direccionados a lo largo de un mismo eje principal de  $J$ , es decir,  $\mathbf{r}_B$  a lo largo de  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{r}_A$  a lo largo de  $J\mathbf{k}$ , con  $\mathbf{k}$  un autovector de  $J^t J$  (y por lo tanto,  $J\mathbf{k}$  un autovector de  $JJ^t$ ). Eligiendo a estos ejes como el eje  $z$  local, tal que  $\mathbf{r}_A = r_A \mathbf{k}_z, \mathbf{r}_B = r_B \mathbf{k}_z$  y

$J_{\mu\nu} = J_\mu \delta_{\mu\nu}$ , tal estado puede ser escrito como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4}(I + r_A \sigma_{Az} + r_B \sigma_{Bz} + \sum_{\mu=x,y,z} J_\mu \sigma_{A\mu} \sigma_{B\mu}) \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & \alpha_+ \\ 0 & c_+ & \alpha_- & 0 \\ 0 & \alpha_- & c_- & 0 \\ \alpha_+ & 0 & 0 & a_- \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_\pm &= 1 + J_z \pm (r_A + r_B) \\ c_\pm &= 1 - J_z \pm (r_A - r_B) \\ \alpha_\pm &= J_x \mp J_y \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde la matriz es la representación de  $\rho$  en la base estándar de autoestados producto de  $\sigma_{Az} \sigma_{Bz}$ . Por la forma de la matriz (4.46) estos estados se denominan usualmente estados  $X$  [81]. Las condiciones de positividad del estado implican  $a_\pm \geq 0$ ,  $c_\pm \geq 0$ , con  $|\alpha_+| \leq \sqrt{a_+ a_-}$ ,  $|\alpha_-| \leq \sqrt{c_+ c_-}$ .

Notemos que estos estados conmutan con el operador paridad de espín:

$$[\rho, P_z] = 0, \quad P_z = -\exp[i\pi(\sigma_{Az} + \sigma_{Bz})/2] \quad (4.47)$$

para todo valor de los parámetros  $\alpha_\pm$ ,  $a_\pm$ ,  $c_\pm$ . Por esta razón, estos estados emergen naturalmente en muchos sistemas físicos, como por ejemplo al considerar estados reducidos de pares de espines en sistemas con interacción XY o XYZ en un campo magnético transversal, como veremos en el próximo capítulo.

Mostraremos que *una medida de  $\sigma_B$  a lo largo de cualquiera de los ejes principales  $x, y, z$ , provee un punto estacionario de  $I_f^{\mathbf{k}} \forall S_f$*  [20].

*Demostración:* Para una medida a lo largo del eje  $z$  ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}_z$ ), es decir, a lo largo del vector de Bloch de  $\rho_B$ ,  $J^t J \mathbf{k}_z = J_z^2 \mathbf{k}_z$ ,  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  están todos a lo largo de este eje y la Ec. (4.9) es entonces satisfecha trivialmente. Este es un caso particular de la Ec. (4.3), la cual se satisface para este estado en la base estándar.

Para una medida a lo largo del eje  $x$  ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}_x$ ),  $J^t J \mathbf{k}_x = J_x^2 \mathbf{k}_x$  mientras que  $\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{k}_x = 0$  y  $|\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}_x| = \sqrt{r_A^2 + J_x^2}$ . Por lo tanto  $p_\nu^\mu = \frac{1}{4}(1 + \mu |\mathbf{r}_A + \nu J \mathbf{k}_x|)$  es independiente de  $\nu$ . Esto conduce a  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  en (4.11), en cuyo caso la Ec. (4.9) es nuevamente satisfecha. Para  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y$  el argumento es similar. Remarcamos aquí que además, estos argumentos resultan también válidos para el Quantum Discord, dado que  $\eta = 0$  en (4.14) para  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_x$  o  $\mathbf{k}_y$ , y entonces la condición estacionaria resulta idéntica a la de  $I_1^B$ .

Si bien pueden existir también otras direcciones estacionarias, los ejes principales de  $J$  son fuertes candidatos a minimizar  $I_f^{\mathbf{k}}$ . Típicamente, los mínimos serán alcanzados para medidas a lo largo del eje  $z$  si  $\text{Max}[|J_x|, |J_y|]$  es suficientemente pequeño, mientras en el caso opuesto serán preferidas las medidas a lo largo de los ejes  $x$  o  $y$ . Una transición entre estos dos regímenes surgirá a medida que  $J_x$  o  $J_y$  se incrementen. Los detalles de la transición dependerán, no obstante, de la elección de entropía. Puede suceder que en la región de transición se prefieran valores intermedios de  $\mathbf{k}$ .

Escribiendo  $\mathbf{k} = (\sin \gamma \cos \phi, \sin \gamma \sin \phi, \cos \gamma)$ , estas soluciones intermedias pueden ser encontradas desde la Ec. (4.9), la cual conduce a  $\phi = 0$  o  $\phi = \pi/2$  (si

$|J_x| > |J_y|$  el mínimo corresponde a  $\phi = 0$  para *toda*  $S_f$ , ya que la correspondiente distribución mayoriza aquella para  $\phi = \pi/2$ , y para  $\gamma = 0$  o

$$\cos \gamma = \frac{\alpha_1 r_B + \alpha_2 J_z r_A}{\alpha_3 (J_x^2 - J_z^2)} \quad (4.48)$$

donde hemos asumido  $|J_x| > |J_y|$  tal que  $\phi = 0$ . Las soluciones intermedias  $|\gamma| \in (0, \pi/2)$  de (4.48), si existen, son *degeneradas*, ya ambas elecciones  $\pm\gamma$  conducen a la misma  $I_f^{\mathbf{k}}$ . Solo las soluciones coincidentes con los ejes principales son no degeneradas.

La expresión final para  $I_f^B(\mathbf{k})$  es formalmente

$$I_f^B(\mathbf{k}) = \sum_{\mu, \nu = \pm} f(p_\nu^\mu) - f(\lambda_\nu^\mu) \quad (4.49)$$

donde

$$p_\nu^\mu = \frac{1}{4} (1 + \nu r_B k_z + \mu \sqrt{(r_A + \nu J_z k_z)^2 + J_x^2 k_x^2}) \quad (4.50)$$

son los autovalores (4.12) de  $\rho'_{AB}$  y  $\lambda_\nu^\mu$  los de  $\rho_{AB}$ :

$$\lambda_\nu^\mu = \frac{1}{4} [1 + \nu J_z + \mu \sqrt{(r_A + \nu r_B)^2 + (J_x - \nu J_y)^2}]. \quad (4.51)$$

Podemos verificar los resultados previos en los casos cúbico y cuadrático. Para un estado  $X$  ambas matrices  $M_2$  y  $M_3$  (Ecs. (4.17), (4.27)) son diagonales en la base de los ejes principales:

$$\begin{aligned} M_{2\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} (J_\mu^2 + \delta_{\mu z} r_B^2), \\ M_{3\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} [J_\mu^2 + \delta_{\mu z} (r_B^2 + 2r_B r_A J_z)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida óptima será a lo largo del eje que corresponda al valor máximo de la diagonal y *no surgirán soluciones intermedias* (para autovalores no degenerados), a diferencia del caso general. Asumiendo  $|J_y| < |J_x|$ , tendrá lugar una transición abrupta  $z \rightarrow x$  para la medida que menos perturba al sistema, al aumentar  $J_x$ . El eje  $x$  será preferido para

$$J_x^2 > J_z^2 + r_B^2, \quad q = 2 \quad (4.52)$$

en el caso cuadrático, y para

$$J_x^2 > J_z^2 + r_B^2 + 2r_B r_A J_z, \quad q = 3 \quad (4.53)$$

en el caso de la entropía cúbica, tal que el mínimo es

$$I_2^B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2} \{J_y^2 + \text{Min}[J_x^2, r_B^2 + J_z^2]\}, \quad (4.54)$$

$$I_3^B(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \{J_y^2 - 2J_x J_y J_z + \text{Min}[J_x^2, r_B^2 + J_z^2 + 2r_A r_B J_z]\}. \quad (4.55)$$



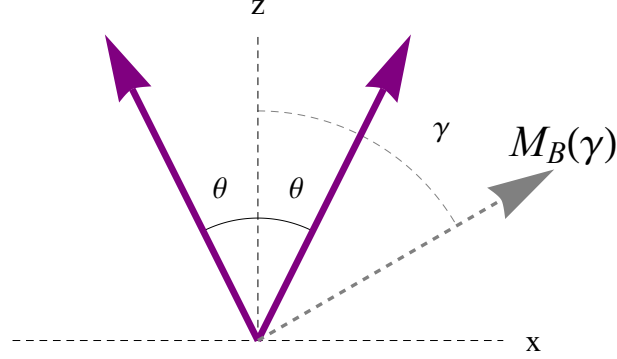


Figura IV.2: Esquema del estado (4.57) y de la dirección de la medida local de espín  $M_B$ .

Estas expresiones no son en general cota superior del cuadrado de la concurrencia, la cual para estos estados es

$$C_{AB} = \frac{1}{2} \text{Max}[|\alpha_+| - \sqrt{c_+c_-}, |\alpha_-| - \sqrt{a_+a_-}, 0].$$

Sin embargo,  $I_2^B$  permanece cota superior de  $C_{AB}^2$  en la fase “z”, dado que

$$C_{AB}^2 \leq \frac{1}{4} \alpha_{\pm}^2 = \frac{1}{4} (J_x \pm J_y)^2 \leq \frac{1}{2} (J_x^2 + J_y^2). \quad (4.56)$$

### 4.5.3. Mezcla de estados alineados

Como un caso particular relevante de la Ec. (4.45), consideraremos la mezcla de dos estados con espines alineados a lo largo de dos diferentes direcciones [20]. Eligiendo el eje  $z$  como la bisectriz (Fig. IV.2) tal estado puede ser escrito como

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} (|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + |-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta|) \quad (4.57)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & c \\ 0 & c & c & 0 \\ 0 & c & c & 0 \\ c & 0 & 0 & a_- \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_{\pm} &= (1 \pm \cos \theta)^2 \\ c &= \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (4.58)$$

el cual corresponde a  $(J_x, J_y, J_z) = (\sin^2 \theta, 0, \cos^2 \theta)$  y  $r_A = r_B = \cos \theta$  en (4.45). Aquí

$$|\theta\rangle = \exp[-i\frac{\theta}{2}\sigma_y]|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (4.59)$$

es el estado con el espín formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$  en el plano  $x, z$ . Este estado representa, aproximadamente, el estado reducido de un par de espines en el estado fundamental de una cadena finita de  $n$  espines con interacción XY de tipo ferromagnética, en un campo magnético trasversal  $|B| < B_c$ , tal como se verá con más detalle en el próximo capítulo. Además representa el estado *exacto* de cualquier par de espines en la inmediata vecindad del denominado campo factorizante [26]

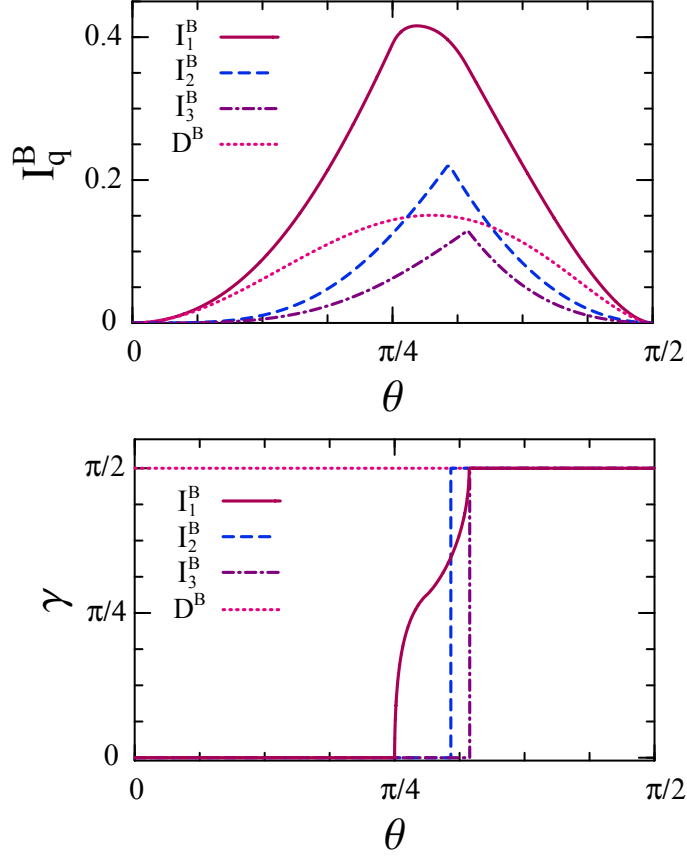


Figura IV.3: Panel Superior: El Déficit de Información  $I_q^B(\rho_{AB})$  en la mezcla de estados alineados (4.57), en función del ángulo  $\theta$  que define el estado, para  $q = 1$  (caso de von Neumann),  $q = 2$  (entropía cuadrática) y  $q = 3$ .  $D^B = D(A|B)$  denota el Quantum Discord. Todas las cantidades se anulan para  $\theta = 0$  (estado producto) y  $\theta = \pi/2$  (estado clásicamente correlacionado). El entrelazamiento es nulo  $\forall \theta$ . Panel inferior: Se muestra el ángulo de medida minimizante  $\gamma$  entre el eje  $z$  y la dirección en la que se mide el espín en  $B$ , que produce la mínima perturbación, en función de  $\theta$  para las cantidades mostradas en el panel superior. Se puede observar que  $\gamma$  exhibe una transición abrupta desde 0 a  $\pi/2$  (es decir, desde el eje  $z$  al eje  $x$ ) en los casos cuadrático ( $q = 2$ ) y cúbico ( $q = 3$ ), mientras que en el caso de von Neumann ( $q = 1$ ) la transición es suavizada por la existencia de una estrecha zona de transición donde  $0 < \gamma < \pi/2$ . Ninguna transición ocurre en el caso del Discord, donde se prefiere una medida a lo largo del eje  $x$  ( $\gamma = \pi/2$ )  $\forall \theta$ .

(despreciando pequeños términos de coherencia  $\propto \cos^{n-2} \theta$ ), como también veremos en el próximo capítulo.

Este estado es *separable*, es decir, es una combinación convexa de estados producto (Cap. II) y la concurrencia  $C_{AB}$  en consecuencia se anula  $\forall \theta$ . Sin embargo, posee

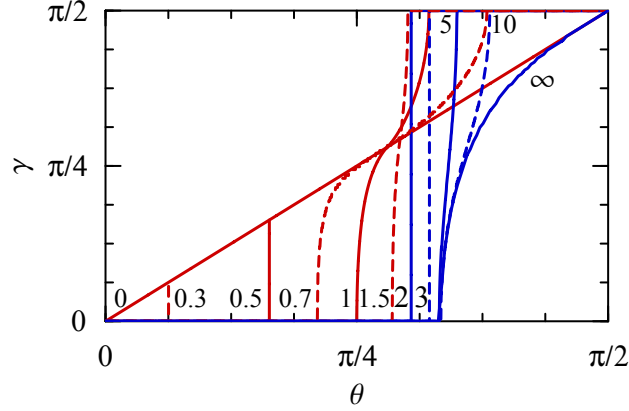


Figura IV.4: El ángulo que produce la medida de mínima perturbación  $\gamma$  vs.  $\theta$  para diferentes valores de  $q$ , incluyendo los límites asintóticos  $q = 0$  y  $q = \infty$ .

Discord no nulo [21] si  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Además,  $I_f^B$  será no nula en este intervalo, para cualquier elección de entropía, con  $I_f^B = I_f^A \forall S_f$  dada la simetría de estos estados. Para  $\theta = 0$  este es obviamente un estado puro producto, mientras que para  $\theta = \pi/2$  es un estado *clásicamente correlacionado*, es decir, diagonal en una base producto estándar, implicando  $I_f^B(\theta) \equiv I_f^B(\rho_{AB}(\theta)) = 0$  para  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi/2 \forall S_f$ .

Se espera que para  $\theta$  creciente, la medida minimizante cambie de  $z$  a  $x$ . En el caso cuadrático y cúbico, la transición es *abrupta*. Obtenemos, de acuerdo a las Ecs. (4.52)–(4.55),

$$I_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin^4 \theta & \theta < \theta_{c2} \\ \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) & \theta > \theta_{c2} \end{cases}, \quad (4.60)$$

$$I_3 = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin^4 \theta & \theta < \theta_{c3} \\ \frac{1}{4} (\cos^2 \theta + 3 \cos^4 \theta) & \theta > \theta_{c3} \end{cases}, \quad (4.61)$$

donde

$$\cos^2 \theta_{c2} = 1/3 \quad (4.62)$$

( $\theta_{c2} \approx 0,61\pi/2$ ) y

$$\cos^2 \theta_{c3} = (\sqrt{17} - 3)/4$$

( $\theta_{c3} \approx 0,64\pi/4$ ), con la medida minimizante cambiando de  $z$  a  $x$  para  $\theta > \theta_{ci}$ . Estas dos cantidades exhiben entonces un máximo tipo cúspide en  $\theta = \theta_{ci}$ , es decir, ligeramente por encima de  $\pi/4$ , como se aprecia en la figura IV.3.

Por otra parte, para otras entropías puede surgir una transición más suave de la dirección  $z$  hacia la  $x$ . Por ejemplo, en el caso de von Neumann, la dirección  $z$  es preferida para  $\theta \leq \pi/4$ , pero la dirección  $x$  es mínima para  $\theta > 0,64\pi/2$ . Entremedio, la medida óptima es obtenida para un ángulo intermedio  $\gamma$ , determinado por la Ec. (4.48), el cual varía continuamente desde 0 hasta  $\pi/2$ , como puede apreciarse en la Fig. IV.3. Esto conduce a un máximo suave, localizado cerca de  $\pi/4$ . En el caso del Quantum Discord, el ángulo minimizante es  $\gamma = \pi/2 \forall \theta$ , exhibiendo entonces un

*comportamiento muy distinto* debido al efecto del término local en (4.4). En este caso se minimiza una entropía condicional en lugar de una entropía global. Se darán más detalles sobre el Discord de este estado en el próximo capítulo.

Para el presente estado no existe, en general, un estado posmedida  $\rho'_{AB}$  menos mezclado, y la medida menos perturbadora depende, por lo tanto, de la función entrópica. Con el fin de apreciar los resultados previos desde una perspectiva más general, se muestra en la Fig. IV.4 el comportamiento del ángulo minimizante para diferentes valores de  $q$  en las entropías (2.84). La transición abrupta  $z \rightarrow x$  (es decir,  $0 \rightarrow \pi/2$ ) ocurre para  $2 \leq q \leq 3$ , indicando un comportamiento crítico especial para estos dos valores. Una transición suave como aquella encontrada en el caso de von Neumann surge para  $1/2 < q < 2$  y además  $q > 3$ , donde  $\gamma$  varía continuamente desde 0 a  $\pi/2$ , dentro de una ventana de valores de  $\theta$ , la cual se estrecha para  $q$  cerca de 2 o 3.

Para  $0 < q \leq 1/2$ , el ángulo minimizante cambia abruptamente desde 0 hasta un valor intermedio  $\gamma \approx \theta$ , creciendo casi linealmente con  $\theta$  ( $\gamma \approx \theta$ ). Esto se debe a que para valores bajos de  $q$ ,  $S_q(\rho'_{AB})$  es mínimo cuando el autovalor más bajo de  $\rho'_{AB}$  se anula, y esto ocurre precisamente para  $\gamma = \theta$ . Por otra parte, para valores grandes de  $q$ ,  $S_q(\rho'_{AB})$  es minimizado cuando el autovalor más grande de  $\rho'_{AB}$  es máximo, y este último es maximizado para  $\gamma = 0$  si  $\theta \leq \theta_c \approx 0,66\pi/2$ , y para un  $\gamma$  intermedio si  $\theta > \theta_c$ , el cual varía continuamente de 0 a  $\pi/2$  para  $\theta_c < \theta < \pi/2$ . En consecuencia, para valores grandes pero finitos de  $q$ ,  $\gamma = 0$  para  $\theta < \theta_c$ , creciendo entonces con  $\theta$  y alcanzando  $\pi/2$  para valores mayores de  $\theta$ . En este caso diferentes criterios de desorden (distintas  $S_f$ ) conducen a diferentes medidas minimizantes, a diferencia de lo que sucede con el estado (4.33).

## V Correlaciones cuánticas en sistemas de espines con interacción XY

Las cadenas de espines interactuantes [82] ofrecen un escenario atractivo para el campo de la información cuántica [83, 84], y actualmente pueden ser también simuladas mediante distintos métodos, en particular redes ópticas [85]. En este capítulo se examinarán las correlaciones cuánticas entre dos espines, en el estado fundamental exacto de una cadena finita de espines  $1/2$  con acoplamiento anisotrópico tipo XY en un campo magnético transversal  $B$ . Dado que el estado fundamental es en general entrelazado, el estado reducido de un par de espines en la cadena será un estado no puro, y por lo tanto el Discord y el entrelazamiento del par no serán en general coincidentes. Analizaremos entonces el Discord y el entrelazamiento del par, así como también el correspondiente Déficit de Información generalizado. Para este último nos concentraremos en las entropías de von Neumann y cuadrática.

Estas cadenas pueden exhibir un peculiar *campo factorizante* (o de separabilidad)  $B_s$  [25, 26], en el que el sistema posee un estado fundamental exacto *completamente separable*, es decir un estado producto. Este estado violará una simetría fundamental del Hamiltoniano, siendo por lo tanto degenerado. En su vecindad, el entrelazamiento de pares es prácticamente nulo. Mostraremos que en contraste con el entrelazamiento, en la vecindad del campo factorizante tanto el Discord como el Déficit de Información *se acercan a un límite finito no nulo y no despreciable*, el cual es *independiente de la separación del par* y del alcance del acoplamiento. Esto indica un claro comportamiento crítico de estas cantidades en este punto. Se deriva una expresión analítica de las medidas de correlaciones en este límite.

Se muestra también que los resultados de estas medidas, para pares de espines inmersos en una cadena, pueden ser comprendidos esencialmente en términos de la mezcla de pares de espines alineados en dos direcciones diferentes, considerada en el capítulo anterior (sec. 4.5.3). Se analiza, asimismo, la inclusión de correcciones en el estado anterior debido a términos de coherencia, relevantes en cadenas pequeñas, que son responsables de la aparición de un entrelazamiento pequeño, pero no nulo, entre cualquier par de espines en la vecindad de  $B_s$ , así como del desdoblamiento de paridad (tanto en el entrelazamiento como el Discord y el Déficit de Información) en el mismo. El estado reducido exacto de un par de espines con acoplamiento de primeros vecinos, se evalúa por medio de la fermionización de Jordan-Wigner [86] (ver apéndice), y mediante diagonalización exacta, en el caso de cadenas completamente conectadas. Los resultados de este capítulo dieron lugar a los trabajos [21, 23].

## 5.1. Sistemas XY

Consideraremos sistemas de espines 1/2 con acoplamiento XY de rango arbitrario, en un campo magnético transverso uniforme  $B$ , actuando a lo largo del eje  $z$ . El Hamiltoniano del sistema toma la forma

$$H = B \sum_i s_{iz} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (J_x^{ij} s_{ix} s_{jx} + J_y^{ij} s_{iy} s_{jy}) \quad (5.1)$$

donde  $s_{i\mu}$ ,  $\mu = x, y$ , son las componentes del espín en el sitio  $i$  (en unidades de  $\hbar$ ).

El Hamiltoniano (5.1) conmuta siempre con el operador paridad de espín

$$P_z = \exp[i\pi \sum_i (s_{iz} + 1/2)] = \prod_i (-\sigma_{iz}) \quad (5.2)$$

donde  $\sigma_{iz} = 2s_{iz}$ , el cual cambia  $s_{i\mu}$  por  $-s_{i\mu}$  para  $\mu = x, y \forall i$ . Los autoestados no degenerados  $|\Psi_\nu\rangle$  de  $H$  tendrán luego paridad de espín definida  $P_z = \pm 1$ , una simetría que jugará un rol fundamental en este capítulo. Destaquemos también que esta simetría de paridad se mantiene aún en presencia de acoplamientos  $J_z^{ij} s_{iz} s_{jz}$  (sistema  $XYZ$ ).

### 5.1.1. Entrelazamiento y Discord de pares en estados de paridad definida

Primeramente describiremos los elementos básicos para poder evaluar el entrelazamiento y el Discord de un par de espines, en un autoestado típico de una cadena finita de  $n$  espines, donde el resto de los espines jugarán el papel de entorno.

La matriz densidad reducida de un par arbitrario  $i, j$  en tal autoestado,

$$\rho_{ij} = \text{Tr}_{(i,j)} |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu| \quad (5.3)$$

no contendrá elementos que conecten estados de paridad opuesta, conmutando por lo tanto con el operador paridad del par  $P_z^{ij} = \sigma_{iz}\sigma_{jz}$ . En la base estándar  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ ,  $\rho_{ij}$  será luego un estado  $X$  de la forma (4.46), que reescribiremos aquí como

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & c & \beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} & c' & 0 \\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

donde, si  $\langle O \rangle \equiv \text{tr} \rho_{ij} O$  y  $s_{i\pm} = s_{ix} \pm i s_{iy}$ , obtenemos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \langle s_{iz} + s_{jz} \rangle + \langle s_{iz} s_{jz} \rangle \quad (5.5)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \langle s_{iz} - s_{jz} \rangle - \langle s_{iz} s_{jz} \rangle \quad (5.6)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \langle s_{i-} s_{j\mp} \rangle \quad (5.7)$$

con  $a + b + c + c' = 1$ . Consideraremos aquí sistemas con invarianza traslacional, tal que  $\langle s_{iz} \rangle = \langle s_{jz} \rangle$  y por lo tanto  $c = c' = \frac{1}{2}(1 - a - b)$ . Además,  $\alpha$  y  $\beta$  son reales ya que  $H$  puede ser representado por una matriz real en la base producto estándar del espacio completo. Recordemos que la semipositividad de  $\rho_{ij}$  implica  $|\alpha| \leq \sqrt{ab}$ ,  $|\beta| \leq c$ , con  $a, b, c$ , no negativos.

El entrelazamiento interno del par de espines puede ser medido mediante el entrelazamiento de formación (2.53), el cual, como hemos visto en el caso de dos qubits, puede ser calculado explícitamente mediante la expresión (2.54). La concurrencia (2.55) está dada ahora por

$$C = 2 \text{Max}[|\alpha| - c, |\beta| - \sqrt{ab}, 0]. \quad (5.8)$$

El entrelazamiento del par es del tipo paralelo (como en los estados de Bell  $\frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$ ) si la primera entrada en (5.8) es positiva y de tipo antiparalelo (como en los estados de Bell  $\frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$ ) si la segunda entrada es positiva [26, 87]. Sólo una de estas entradas puede ser positiva para un  $\rho_{ij}$  semidefinido positivo.

Por otra parte, para evaluar el Discord del par, necesitamos conocer los autovalores de  $\rho_{ij}$ , dados para  $c = c'$ , por  $\lambda_{ij} = (\frac{1-a-b}{2} \pm |\beta|, \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{(\frac{a-b}{2})^2 + |\alpha|^2})$  (Ec. (4.51) para  $r_A = r_B$ ) y aquellos de la matriz densidad de un único espín,

$$\rho_j = \text{Tr}_i \rho_{ij} = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & c + b \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

los cuales son obviamente  $\lambda_j = \frac{1}{2}[1 \pm (a - b)]$ . Necesitamos además considerar una medida de espín en el sitio  $j$ , a lo largo de un eje arbitrario  $z'$ , definido por los ángulos  $(\gamma, \phi)$  ( $\mathbf{k}'_z = (\sin \gamma \cos \phi, \sin \gamma \sin \phi, \cos \gamma)$ ) (Consideraremos sólo medidas proyectivas). El estado del par luego de tal medida (Ecs. (3.45)), (4.7) es

$$\rho'_{ij} = P_{0'}^j \rho_{ij} P_{0'}^j + P_{1'}^j \rho_{ij} P_{1'}^j \quad (5.10)$$

donde  $P_{k'}^j = I_i \otimes |k'\rangle\langle k'|$  para  $k = 0, 1$ , con

$$|0'\rangle = \cos(\frac{1}{2}\gamma)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{1}{2}\gamma)|1\rangle \quad (5.11)$$

$$|1'\rangle = \cos(\frac{1}{2}\gamma)|1\rangle - e^{-i\phi} \sin(\frac{1}{2}\gamma)|0\rangle \quad (5.12)$$

tal que  $s_{jz'}|k'\rangle = \frac{1}{2}e^{i\pi k}|k'\rangle$  para  $s_{jz'} = s_{jz} \cos \gamma + s_{jx} \sin \gamma \cos \phi + s_{jy} \sin \gamma \sin \phi$ . Para  $\alpha$  y  $\beta$  reales, los autovalores de  $\rho'_{ij}$  son (Ecs. (4.12)-(4.50))

$$\lambda'_{ij} = \frac{1 + \nu(a-b) \cos \gamma + \mu \sqrt{[(2(a+b)-1) \cos \gamma + \nu(a-b)]^2 + 4|\alpha + \beta|^2 \sin^2 \gamma}}{4} \quad (5.13)$$

donde  $\nu = \pm 1$ ,  $\mu = \pm 1$  y  $|\alpha + \beta|^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos 2\phi$ , correspondiendo  $\nu = 1$  ( $-1$ ) a los autovalores del primer (segundo) término en (5.10). Finalmente, los autovalores de  $\rho'_j = \text{Tr}_i \rho'_{ij}$  son

$$\lambda'_j = \frac{1}{2}[1 \pm (a - b) \cos \gamma].$$

Tenemos entonces todos los elementos necesarios para evaluar la diferencia  $D(\gamma, \phi) \equiv D(A|B_M)$ , dada por

$$D(\gamma, \phi) = S(\rho'_{ij}) - S(\rho'_j) - [S(\rho_{ij}) - S(\rho_j)] \quad (5.14)$$

cuyo mínimo (con respecto a  $\theta, \phi$ ) es el Discord  $D$  (Eq. (2.68)). Para  $\alpha\beta \geq 0$ , la minimización con respecto a  $\phi$  conduce a  $\cos 2\phi = 1$ , por lo que finalmente sólo se requiere una minimización sobre  $\gamma$ , la cual puede ser restringida al intervalo  $[0, \pi/2]$ . El mínimo para la matriz densidad del par, que se empleará en la sección (5.2), se obtiene para  $\gamma = \pi/2$  ( $z' = x$ ), donde los autovalores (5.13) resultan

$$\lambda'_{ij} = \frac{1 + \mu\sqrt{(a-b)^2 + 4(\alpha + \beta)^2}}{4} \quad (5.15)$$

con  $\mu = \pm 1$ , siendo independientes de  $\nu$  y por lo tanto doblemente degenerados.

### 5.1.2. El caso de la mezcla de dos estados alineados

Un caso particular de (5.4) que será de suma importancia para comprender los resultados exactos es el de la mezcla estadística (4.57) de dos estados alineados a lo largo de direcciones arbitrarias, no necesariamente opuestas,

$$\rho_{ij}(\theta) = \frac{1}{2}(|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + |-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta|) \quad (5.16)$$

que corresponde a  $\alpha = \beta = \frac{1}{4}\sin^2\theta$ , y  $a, b = \frac{1}{4}(1 \pm \cos\theta)^2$ , tal que los estados locales involucrados son *no ortogonales*. Como veremos, la Ec. (5.16) es el estado reducido *exacto* de dos espines cualquiera de la cadena, en la inmediata vecindad del campo factorizante (ver sec. 5.2), si los efectos de los términos de coherencia (relevantes sólo en cadenas muy pequeñas) son despreciados. Además, este estado proporciona una descripción básica aproximada del estado de un par en la fase con simetría de paridad rota (en la aproximación de campo medio)  $|B| < B_c$ .

Como se mencionó en 4.5.3, el estado (5.16) es obviamente *separable* y por lo tanto su concurrencia y entrelazamiento son idénticamente nulos. Sin embargo, su Discord *es positivo* para  $\theta \in (0, \pi/2)$ , anulándose para  $\theta = 0$  (en el que (5.16) es un estado producto y por lo tanto  $D(\gamma, \phi) = 0 \forall \gamma, \phi$ ) ó  $\theta = \pi/2$  (en el que (5.16) resulta clásicamente correlacionado, con  $D(\gamma, \phi) = 0$  para  $\gamma = \pi/2$  y  $\phi = 0$ ).

En el caso general, los autovalores de (5.16) son  $\lambda_{ij} = (\frac{1}{2}(1 \pm \cos^2\theta), 0, 0)$ , con los de  $\rho_j(\theta)$  dados por  $\lambda_j = \frac{1}{2}(1 \pm \cos\theta)$ , mientras los autovalores correspondientes (5.13) de  $\rho'_{ij}$  son, para  $\cos 2\phi = 1$ ,

$$\lambda'_{ij} = \frac{1 + \nu \cos\theta \cos\gamma + \mu\sqrt{[(1 + \nu \cos\theta \cos\gamma)^2 \cos^2\theta + \sin^2\gamma \sin^4\theta]}}{4} \quad (5.17)$$

con los de  $\rho'_j$  dados por  $\lambda'_j = \frac{1}{2}(1 \pm \cos\theta \cos\gamma)$ . Para  $\theta \in (0, \pi/2]$ , el mínimo de (5.14) *es siempre alcanzado* para  $\gamma = \pi/2$  y  $\phi = 0$ , es decir, para una medida local a lo largo



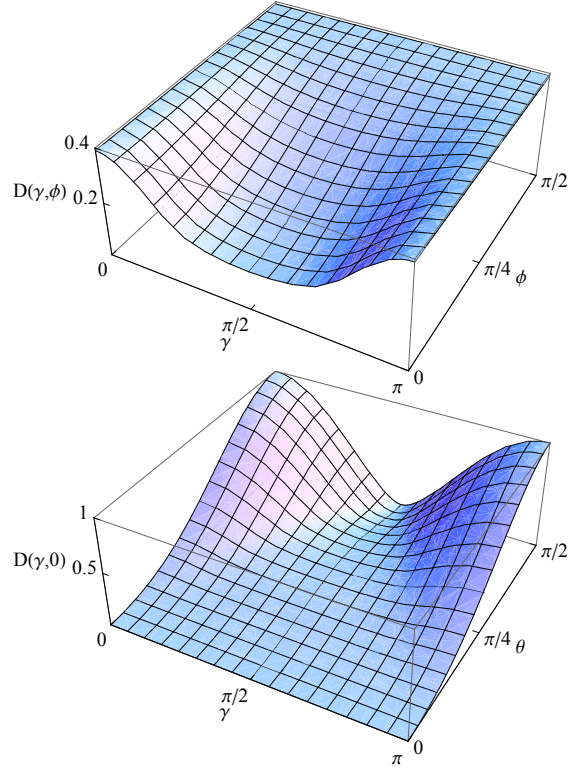


Figura V.1: La diferencia (5.14), cuyo mínimo es el Discord, evaluada en el estado (5.16) como función de  $\gamma$  y  $\phi$ , para  $\theta = \pi/4$  fijo (panel superior), y como función de  $\gamma$  y  $\theta$  para  $\phi = 0$  (panel inferior).  $D(\gamma, \phi)$  es mínimo en  $\gamma = \pi/2$  y  $\phi = 0 \forall \theta \in (0, \pi/2]$ .

del eje  $x$ , como puede verse en la figura V.1, con  $D(\gamma, 0)$  aplanándose apreciablemente para pequeños valores de  $\theta$ . Ambos,  $\gamma = \pi/2$  y  $\gamma = 0$  son puntos estacionarios de  $D$ , con el máximo en  $\gamma = 0$ . La Fig. V.2 muestra el mínimo  $D \equiv D(\pi/2, 0)$  (que es el verdadero Discord), como función de  $\theta$ , que está dado explícitamente por

$$D = \sum_{\mu=\pm 1} \left\{ \left[ 2f\left(\frac{1 + \mu\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta}}{4}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \left[ f\left(\frac{1 + \mu\cos^2 \theta}{2}\right) - f\left(\frac{1 + \mu\cos \theta}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.18)$$

donde  $f(p) = -p \log_2 p$ .  $D$  es máximo para  $\theta = \theta_m \approx 1,15\pi/4$ , donde  $D \approx 0,15$ . Mientras  $S(\rho'_{ij}) - S(\rho'_j)$  (el primer paréntesis en (5.18)) es una función par de  $\theta - \pi/4$ ,  $S(\rho_{ij}) - S(\rho_j)$  (el último paréntesis) no lo es, siendo máximo para  $\theta \approx 0,91\pi/4$ , y originando una desviación de  $\theta_m$  desde  $\pi/4$ , como se aprecia en el panel inferior de la figura. Para  $\theta \rightarrow 0$ ,  $D$  se anula cuadráticamente ( $D \approx \frac{1}{2}\theta^2$ ), mientras que para  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $D \approx -\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 [\log_2(\frac{\pi}{2} - \theta)^2 + \log_2 e - 2]$ .

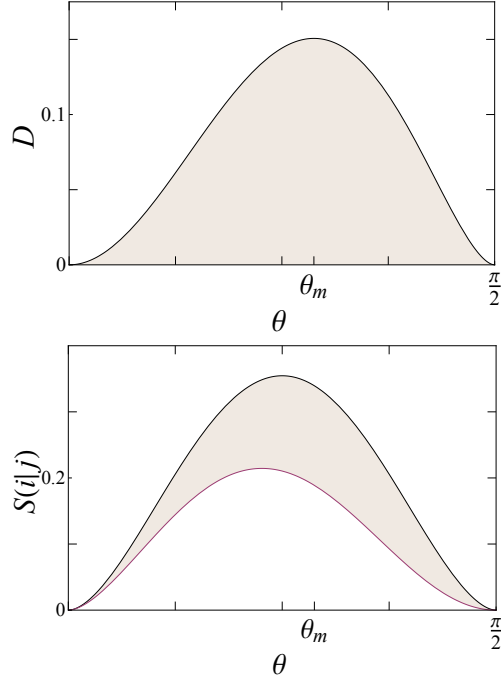


Figura V.2: El panel superior muestra el Discord  $D \equiv D(\pi/2, 0)$  en función de  $\theta$  para el estado (5.16).  $D$  es máximo en  $\theta = \theta_m \approx 1,15\pi/4$ . En el panel inferior se muestran las entropías condicionales  $S(\rho'_{ij}) - S(\rho'_j)$  (curva superior) y  $S(\rho_{ij}) - S(\rho_j)$  (curva inferior) como función de  $\theta$ , siendo la diferencia entre ambas el Discord del panel superior.

### 5.1.3. Efecto de los términos de coherencia

El estado reducido de dos espines en el campo factorizante contiene en realidad un pequeño término de coherencia  $\propto \varepsilon(|\theta\theta\rangle\langle-\theta-\theta| + |-\theta-\theta\rangle\langle\theta\theta|)$  (ver sección 5.2), que conduce al estado

$$\rho_{ij}^\varepsilon(\theta) = \frac{|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + |-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta| + \varepsilon(|\theta\theta\rangle\langle-\theta-\theta| + h.c.)}{2(1 + \varepsilon\langle\theta\theta|-\theta-\theta\rangle)} \quad (5.19)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{(1+\varepsilon)(1\pm\cos\theta)^2}{4(1+\varepsilon\cos^2\theta)} \\ \langle \alpha \rangle &= \frac{(1\pm\varepsilon)\sin^2\theta}{4(1+\varepsilon\cos^2\theta)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde  $|\varepsilon| \leq 1$ . El término  $\varepsilon$  depende de la paridad  $P_z$  y genera una pequeña corrección a los resultados previos. Los autovalores de  $\rho_{ij}$  y  $\rho_j$  son ahora  $\lambda_{ij} = (a+b, 2\beta, 0, 0)$ ,  $\lambda_j = (a+\beta, b+\beta)$ , mientras que los de  $\rho'_{ij}$  y  $\rho'_j$  pueden ser obtenidos de la Ec. (5.13). El mínimo de la Ec. (5.14) se obtiene nuevamente para  $\gamma = \pi/2$  (y

$\phi = 0$ ), (la superficie es nuevamente similar a la de la Fig. V.1), conduciendo a

$$D = \sum_{\mu=\pm 1} \left\{ \left[ 2f\left(\frac{1}{4} + \mu \frac{\sqrt{\cos^2 \theta (1 + \varepsilon)^2 + \sin^4 \theta}}{4(1 + \varepsilon \cos^2 \theta)}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \left[ f\left(\frac{(1 + \mu \cos^2 \theta)(1 + \mu \varepsilon)}{2(1 + \varepsilon \cos^2 \theta)}\right) - f\left(\frac{(1 + \mu \cos \theta)(1 + \mu \varepsilon \cos \theta)}{2(1 + \varepsilon \cos^2 \theta)}\right) \right] \right\}. \quad (5.21)$$

Para  $\varepsilon \neq 0$  surge además un entrelazamiento de pares no nulo, con la concurrencia dada por

$$C = \frac{|\varepsilon| \sin^2 \theta}{1 + \varepsilon \cos^2 \theta} \quad (5.22)$$

la cual es paralela para  $\varepsilon > 0$  y antiparalela para  $\varepsilon < 0$ .

En el límite  $\varepsilon \rightarrow \pm 1$ , la Ec. (5.19) resulta un estado puro, a saber,  $\rho_{ij} \rightarrow |\Psi_{\pm}\rangle\langle\Psi_{\pm}|$  con

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{|\theta\theta\rangle \pm |-\theta-\theta\rangle}{\sqrt{2(1 \pm \cos^2 \theta)}} = \begin{cases} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} |00\rangle + \sin^2 \frac{\theta}{2} |11\rangle}{\sqrt{(1 + \cos^2 \theta)/2}} \\ \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Por lo tanto,  $D$  y  $E$  coinciden  $\forall \theta$  en este límite. Mientras que  $|\Psi_{-}\rangle$  es un estado de Bell independiente de  $\theta$ , conduciendo a  $D = E = C = 1$ , el entrelazamiento de  $|\Psi_{+}\rangle$  depende de  $\theta$  (con  $C = \sin^2 \theta / (1 + \cos^2 \theta) \leq 1$ ), aumentando con  $\theta$  creciente para  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

La respuesta de  $D$  y  $E$  a los términos de coherencia se muestra en la Fig. V.3 [21]. Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, la corrección a  $D$  es lineal en  $\varepsilon$  para  $\theta$  lejos de  $\pi/2$ , con el Discord creciendo (decreciendo) para  $\varepsilon < 0$  ( $> 0$ ), mientras que para  $\theta = \pi/2$  la corrección es cuadrática y positiva para ambos signos (en  $\theta = \pi/2$ ,  $D = 1 - \sum_{\mu=\pm 1} h(\frac{1+\mu\varepsilon}{2}) \approx \frac{1}{2}\varepsilon^2 \log_2 e$ ). El entrelazamiento, por otra parte, se vuelve finito tan pronto como  $|\varepsilon|$  se aparta de 0, haciéndose incluso más grande que el Discord para  $\theta$  cerca de  $\pi/2$  (donde  $C = |\varepsilon|$  y  $E \propto -\varepsilon^2 \log \varepsilon^2$  para  $\varepsilon$  pequeño). Como puede verse en el panel inferior de la Fig. V.3, para un  $\theta$  intermedio, el entrelazamiento es menor que el Discord sólo en un intervalo alrededor de  $\varepsilon = 0$ , tornándose ligeramente superior antes de alcanzar el límite de un estado puro  $\varepsilon = \pm 1$ , donde  $D$  y  $E$  coinciden.

## 5.2. Discord de pares en cadenas XY

Contamos ahora con los elementos para evaluar y entender el comportamiento del Discord de un par de espines arbitrario, en el estado fundamental de una cadena finita. Consideramos primero una cadena unidimensional cíclica, de  $n$  espines, con acoplamiento de primeros vecinos tipo XY, donde

$$J_{\mu}^{ij} = \delta_{j, i \pm 1} J_{\mu}, \quad \mu = x, y \quad (5.23)$$

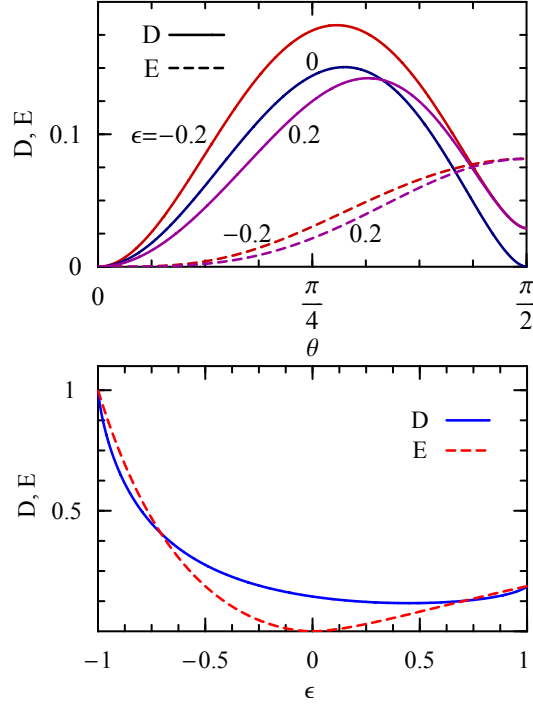


Figura V.3: Efecto del término de coherencia. El Discord ( $D$ ) y el entrelazamiento de formación ( $E$ ) del estado como función de  $\theta$  para  $\epsilon = 0,2$ ;  $0$  y  $-0,2$  (panel superior) y como función de  $\epsilon$  para  $\theta = \pi/4$  (panel inferior). El entrelazamiento se anula para  $\epsilon = 0$ , pero se hace mayor que el Discord en el límite en el que el estado se aproxima a un estado puro  $\epsilon = \pm 1$ , donde  $D$  y  $E$  coinciden.

con  $n + 1 \equiv 1$ . La solución exacta para  $n$  finito puede ser obtenida a través de la fermionización de Jordan-Wigner [86] (ver Apéndice). El estado fundamental exacto tiene paridad de espín definida (dependiente del campo), y el estado reducido de cualquier par de espines será de la forma (5.4), donde los elementos (5.5)–(5.7) pueden ser evaluados con las expresiones del Apéndice.

Para acoplamiento de primeros vecinos y  $n$  par, el signo de  $J_x$  puede ser cambiado por medio de una transformación local  $s_{2i,\mu} \rightarrow -s_{2i,\mu}$  para  $\mu = x, y$  (rotación de ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $z$ ) en sitios pares, de manera que ambos, el caso ferromagnético ( $J_x > 0$ ) y el caso antiferromagnético ( $J_x < 0$ ), exhibirán, para un valor fijo de la anisotropía

$$\chi = J_y/J_x$$

exactamente el mismo entrelazamiento y Discord. Los resultados son además independientes del signo de  $B$  ( $B \rightarrow -B$  al rotar el sistema alrededor del eje  $x$  un ángulo  $\pi$ ), y es posible elegir, sin pérdida de generalidad,  $|J_y| \leq |J_x|$  ( $|\chi| \leq 1$ ). Asumiremos en lo sucesivo  $J_x > 0$ , con  $|J_y| < J_x$ .

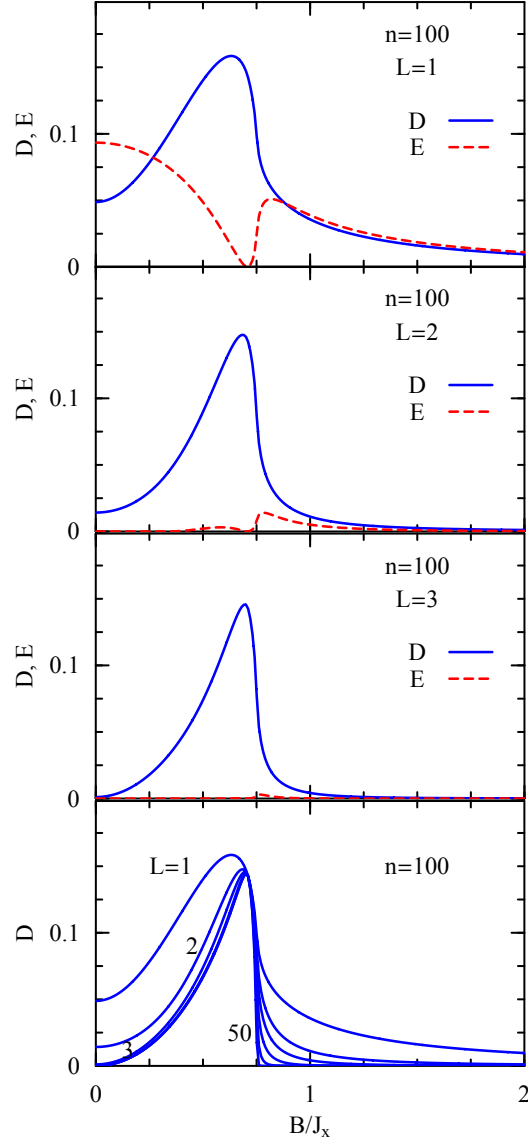


Figura V.4: Discord ( $D$ ) y entrelazamiento ( $E$ ) de pares de espines con separación  $L$  en el estado fundamental exacto de una cadena cíclica de  $n = 100$  espines, con acoplamiento de primeros vecinos XY y anisotropía  $J_y/J_x = 0,5$ , como función del campo magnético transversal.  $L = 1$  indica primeros vecinos,  $L = 2$ , segundos vecinos, etc. En el campo factorizante  $B_s = \sqrt{J_y J_x} \approx 0,71 J_x$ ,  $E$  se anula mientras que  $D$  aproxima el mismo límite finito (5.21)  $\forall L$ , con  $\theta$  determinado por las ecuación (5.26). El panel inferior muestra el Discord para todas las separaciones  $L$ . Este alcanza un límite finito de saturación para  $L$  grande si  $|B| < B_c$ .

### 5.2.1. Entrelazamiento y Discord en la vecindad del campo factorizante

Los resultados exactos para el Discord y el entrelazamiento de pares en el estado fundamental de la cadena anterior se muestran en las Figs. V.4–V.5 para  $\chi = 0,5$

y dos valores del número de espines  $n$  [21]. Se ve inmediatamente que el entrelazamiento y el Discord de pares exhiben diferencias significativas para campos

$$|B| < B_c = \frac{1}{2}(1 + \chi)J_x$$

donde  $B_c$  denota el campo crítico del límite termodinámico  $n \rightarrow \infty$  [86]. En primer lugar, se observa que el entrelazamiento del par se anula (veremos luego que en realidad es muy pequeño) para toda separación  $L$ , en un valor particular del campo. Este campo es precisamente el denominado *campo factorizante* [25, 26, 87–91]

$$B_s = \sqrt{J_y J_x} \quad (5.24)$$

existente para  $\chi > 0$ , donde la cadena posee un estado fundamental exacto completamente separable y degenerado, con ruptura de paridad [26] (ver Ec. (5.25)). No obstante, el Discord permanece no nulo, alcanzando de hecho un máximo en su vecindad. Además, el entrelazamiento decrece rápidamente a medida que la separación  $L$  entre los espines aumenta, siendo no nulo para  $L > 2$  sólo en la vecindad inmediata de  $B_s$ , donde es muy pequeño. En contraste, el Discord decrece sólo ligeramente con la separación para  $|B| < B_c$ , alcanzando un valor de saturación para  $L$  grande y siendo estrictamente *independiente* de la separación  $L$  en el campo factorizante  $B_s$ .

Para entender estos resultados, es fundamental destacar que en  $B = B_s$ , el estado producto uniforme con simetría de paridad rota

$$|\Theta\rangle = \otimes_{i=1}^n |\theta_i\rangle = |\theta\theta\dots\theta\rangle, \quad |\theta\rangle = \exp[i\theta s_{iy}]|0\rangle, \quad (5.25)$$

$$\cos\theta = B_s/J_x = \sqrt{\chi} \quad (5.26)$$

donde  $s_z|0\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle$ , es un *estado fundamental exacto* de la cadena [26] (hemos asumido aquí  $J_x > 0$ ; si  $J_x < 0$ ,  $\theta_i \rightarrow (-1)^i\theta$ , por las consideraciones de simetría ya mencionadas). Este es un estado con los espines totalmente alineados a lo largo de un eje que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $-z$  original. Debido a la simetría de paridad, su estado asociado

$$|-\Theta\rangle = P_z|\Theta\rangle = |-\theta-\theta\dots-\theta\rangle \quad (5.27)$$

es también un estado fundamental exacto en  $B_s$ . Estos dos estados, no ortogonales, pueden ser por lo tanto autoestados exactos de  $H$  sólo cuando niveles de paridad opuesta se cruzan [26]. El estado fundamental de esta cadena sufre en realidad  $n/2$  transiciones de paridad de espín cuando el campo  $B$  crece desde 0 (reminiscencia de las  $m/2$  transiciones de  $S_z$  en el límite XX [92]), *la última precisamente en el campo factorizante*  $B_s$ . La diferencia de energía entre los estados de energía más baja de cada paridad, es muy pequeña para  $|B| \lesssim B_c$ , aunque no nula en cadenas finitas.

En la inmediata vecindad de  $B_s$ , el estado fundamental exacto posee por lo tanto paridad definida, y los límites laterales correctos en  $B_s$  están determinados por los estados de paridad definida

$$|\Theta^\pm\rangle = \frac{|\Theta\rangle \pm |-\Theta\rangle}{\sqrt{2(1 \pm \langle -\Theta|\Theta\rangle)}} \quad (5.28)$$

donde  $|\pm\Theta\rangle$  son los estados (5.25)–(5.27) y  $\langle-\Theta|\Theta\rangle = \cos^n\theta$ . El estado reducido de un par de espines *cualquiera* derivado del estado (5.28) estará dado precisamente por la mezcla de estados alineados  $\rho(\theta)$ , Ec. (5.16), si se desprecia el solapamiento complementario

$$\langle-\Theta_{n-2}|\Theta_{n-2}\rangle = \cos^{n-2}\theta \quad (5.29)$$

el cual es despreciable si  $\theta \neq 0$  y  $n$  no es muy pequeño.

Podemos entonces entender inmediatamente la diferencia cualitativa entre el entrelazamiento y el Discord en las cercanías de  $B_s$ . Cuando  $B$  se acerca a  $B_s$ , el Discord entre dos espines *cualquiera* se acercará a *un límite finito común para cualquier separación  $L$* , dada por la Ec. (5.18) con  $\theta$  obtenido de (5.26) ( $D \approx 0,145$  en el caso de la Fig. V.4, donde  $\theta = \pi/4$  en  $B_s$ ). En contraste, el entrelazamiento de pares se anulará para  $B \rightarrow B_s$  (para un solapamiento complementario (5.29) despreciable), ya que el estado (5.16) es separable.

Remarcamos aquí que la misma matriz densidad reducida  $\rho(\theta)$ , Ec. (5.16), surge también de la mezcla estadística

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(|\Theta^+\rangle\langle\Theta^+| + |\Theta^-\rangle\langle\Theta^-|) \quad (5.30)$$

si se desprecia el solapamiento (5.29).  $\rho_0$  representa el límite  $T \rightarrow 0^+$  del estado térmico  $\rho(T) \propto \exp[-H/kT]$  del sistema en  $B_s$ . Por lo tanto, el límite común (5.18) del Discord en  $B_s$  permanece también válido para temperaturas  $T$  suficientemente bajas.

En las Figs. V.4–V.5 hemos empleado el estado fundamental exacto con su paridad correcta. El valor no despreciable del Discord entre un par de espines cualquiera, para  $|B| < B_c$ , puede ser entendido de manera similar. En esta fase, la aproximación de campo medio, basado en estados productos de la forma (5.25), rompe la simetría de paridad ( $\theta \neq 0$ ). El estado fundamental puede ser entonces visto, aproximadamente, como una combinación (5.28) con paridad definida de estados de campo medio con simetría rota (5.25), con el ángulo  $\theta$  dado por

$$\cos\theta = B/J_x.$$

El estado reducido de un par de espines puede entonces ser aproximado nuevamente por la mezcla  $\rho(\theta)$  (Ec. (5.16)), más correcciones no despreciables aunque de orden menor. El valor no nulo del Discord para  $|B| < B_c$  surge entonces esencialmente de  $\rho(\theta)$ , aunque las correcciones son no despreciables (ver Fig. V.6) (curva b).

### 5.2.2. Entrelazamiento y Discord para campos intensos

Por otra parte, para campos intensos  $B \gg J_x$ , el estado fundamental es esencialmente el estado con todos los espines completamente alineados con el eje  $-z$ ,  $|\Psi_0\rangle = |00\dots 0\rangle$ , más pequeñas correcciones perturbativas. Como se ve en la Fig. V.4, el Discord en esta región es bastante pequeño y decrece rápidamente con la

separación, ya que los efectos de superposición derivados de (5.28) ya no están presentes. Además, el Discord entre primeros vecinos es muy cercano al entrelazamiento de formación, ya que el estado reducido es casi puro.

Esto puede verificarse por medio de una expansión perturbativa del estado reducido del par. En el caso de acoplamientos de primeros vecinos obtenemos, para  $|B| \gg J_x$  y  $L = 1$ , el estado fundamental aproximado

$$|\Psi_0^p\rangle \propto |\Psi_0\rangle + \eta \sum_i |1_i 1_{i+1}\rangle, \quad \eta = \frac{J_x - J_y}{8B} \ll 1 \quad (5.31)$$

donde  $|1_i 1_{i+1}\rangle$  representa el estado con los espines  $i$  e  $i + 1$  paralelos al campo. Este estado conduce a un estado reducido del par de la forma (5.4) con  $\alpha \approx \eta + O(\eta^3)$ ,  $a = c \approx \eta^2$  y  $\beta \approx 0$ . Obtenemos así las expresiones asintóticas (tomando  $\log = \log_2$ ) [19]

$$D \approx \eta^2(-\log \eta^2 + \log e - 2) \quad (5.32)$$

$$E \approx \eta^2(-\log \eta^2 + \log e). \quad (5.33)$$

Por consiguiente, en esta región el entrelazamiento del par es ligeramente *mayor* que el Discord del par, como puede apreciarse en el panel superior de las Figs. V.4–V.5. Ambos decrecen esencialmente como  $(J_x/B)^2$ . Veremos luego que, para otras medidas de correlaciones cuánticas tales como el Déficit de Información, la relación de orden con el entrelazamiento de formación asociado puede invertirse.

### 5.2.3. Efectos de términos de coherencia en cadenas pequeñas

Los resultados para cadenas pequeñas de  $n = 10$  espines se muestran en la Fig. V.5. aunque el comportamiento es similar al del caso  $n = 100$ , los efectos de tamaño finito se vuelven importantes, y el solapamiento (5.29) ya no puede ser despreciado. Estos efectos son visibles en el Discord y el entrelazamiento de pares en el estado fundamental especialmente para  $|B| < B_s$ , donde pueden apreciarse ahora las transiciones de paridad a través de las pequeñas discontinuidades en estas cantidades. La última transición tiene lugar justamente en el campo factorizante  $B = B_s$ , donde  $D$  exhibe ahora una *discontinuidad finita* común *independiente de la separación  $L$  del par*, debido al efecto del término de coherencia (sec. 5.1.3), que depende de la paridad y que ya no es más despreciable. El estado reducido exacto de un par de espines derivado de los estados (5.28) está dado por la Ec. (5.19) con

$$\varepsilon = \pm \cos^{n-2} \theta \quad (5.34)$$

donde los signos  $- (+)$  corresponden al lado izquierdo (derecho) de  $B_s$ , es decir, paridad de espín negativa (positiva). Los límites laterales de  $D$  en  $B_s$  están dados por la Ec. (5.21) para los valores (5.26)–(5.34) de  $\theta$  y  $\varepsilon$  (dando lugar a  $D_- \approx 0,153$ ,  $D_+ \approx 0,137$  en el caso de la Fig. V.5) [21].



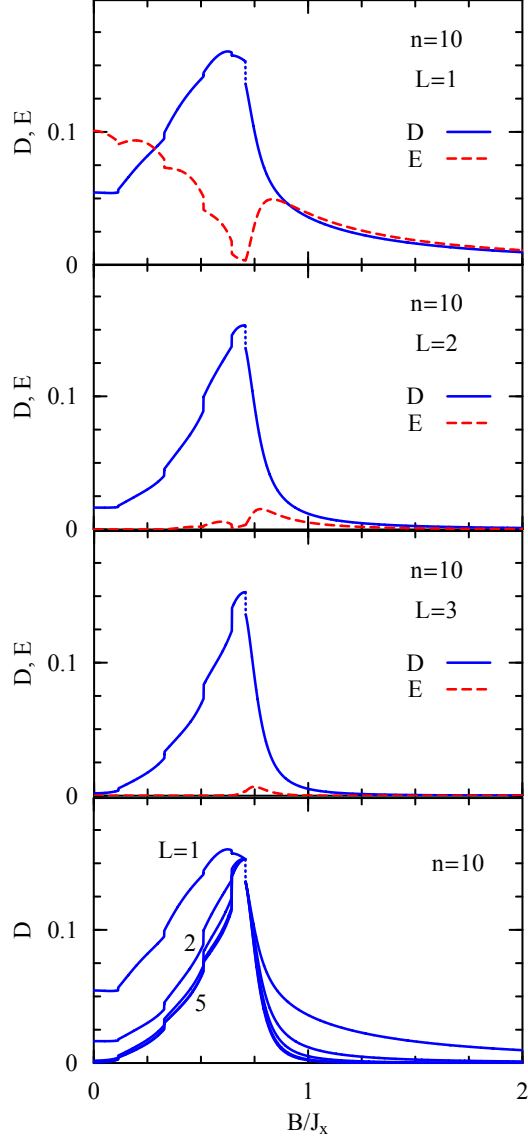


Figura V.5: Las mismas cantidades de la figura (V.4) para una cadena con  $n = 10$  espines. Ahora se pueden apreciar los diferentes límites laterales comunes de  $D$  en el campo factorizante, dados por la ecuación (5.21) con factor de coherencia (5.34), y las transiciones de paridad.

En  $B_s$  también surgen límites laterales finitos, aunque de pequeña magnitud, del entrelazamiento entre dos espines cualesquiera [26], que son también *independientes de la separación* y están determinados por la Ec. (5.22). En contraste con el Discord, la Eq. (5.22) satisface, por supuesto, las relaciones de *monogamia* [93, 94], que implican que  $C_{ij}$  no puede ser grande cuando todos los pares están igualmente entrelazados. De hecho, el máximo valor que puede alcanzar en este caso es [21]

$$C_{\max} = 2/n$$

el cual disminuye al aumentar el número  $n$  de espines. Este máximo es alcanzado

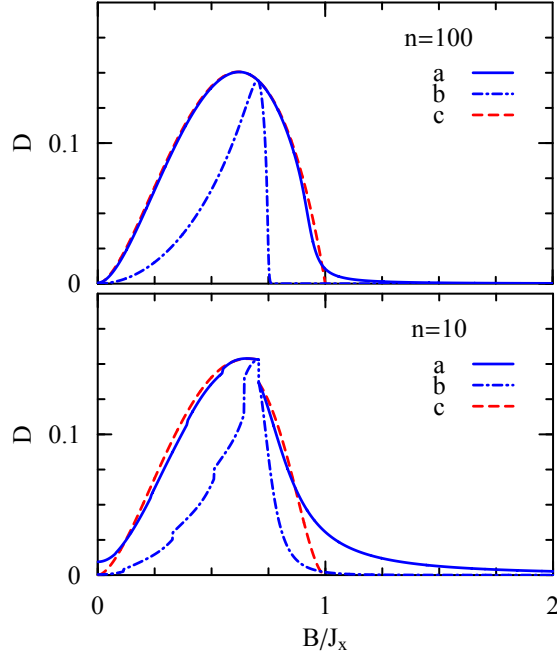


Figura V.6: Panel superior: El Discord de un par de espines en un sistema de  $n = 100$  espines para acoplamiento XY de rango completo (curva a, sistema completamente conectado) y de primeros vecinos (curva b, para separación  $L \approx 4$ ), para  $J_y/J_x = 0,5$ . Los límites laterales en el campo factorizante  $B_s$  coinciden exactamente en ambos casos. La curva (c) muestra el resultado de campo medio, es decir, el Discord (5.18) para el estado (5.16) con  $\cos \theta = B/J_x$ ; Panel inferior: Detalles similares para  $n = 10$  espines. La curva (c) corresponde al resultado (5.21) para la mezcla dada por (5.19), que incluye el término de coherencia. Los límites laterales en  $B_s$  de nuevo coinciden.

en el límite XX ( $J_y \rightarrow J_x$ ), donde  $\theta \rightarrow 0$  y  $C(\varepsilon) \rightarrow 0$  mientras que  $C(-\varepsilon) \rightarrow 2/n$ . En este límite el estado  $|\Theta_+\rangle$  es separable mientras que  $|\Theta_-\rangle$  se acerca a un estado  $W$  [26]. El Discord, en cambio, no está sujeto a relaciones de monogamia, por lo que puede tomar un valor finito constante entre cualquier par de espines, que no disminuye con  $n$ , tal como sucede en los estados (5.28).

#### 5.2.4. Sistemas XY o XYZ generales

Los valores del Discord en el campo factorizante, determinado por las Ecs. (5.18), o en general (5.21), son en realidad mucho más generales: Cadenas uniformes o sistemas XY con acoplamiento ferromagnético ( $J_x^{ij} > 0$ ) de rango *arbitrario* pero anisotropía *común*

$$\chi = J_y^{ij}/J_x^{ij} \in (0, 1)$$

presentarán también un campo factorizante transverso, que para el caso de espín 1/2 estará dado por [26, 88, 90, 91]

$$B_s = \sqrt{\chi} \sum_{j \neq i} J_x^{ij}. \quad (5.35)$$

En el mismo, la cadena posee nuevamente el estado fundamental degenerado separable (5.25). Los límites laterales en  $B_s$  estarán determinados por los mismos estados con paridad definida (5.28). Lo mismo ocurre en cadenas  $XYZ$  si

$$\chi = (J_y^{ij} - J_z^{ij}) / (J_x^{ij} - J_z^{ij})$$

es constante [26], con el campo factorizante transverso dado por

$$B_s = \sqrt{\chi} \sum_{j \neq i} (J_x^{ij} - J_z^{ij}).$$

Como resultado, el Discord del par en el estado fundamental en todos estos sistemas es finito, e independiente de la separación del par y del rango del acoplamiento en las vecindades de  $B_s$ , y se obtiene de las Ecs. (5.18) o (5.21), con los valores dados por las Ecs. (5.26)–(5.34). Argumentos similares se aplicarán en la vecindad de campos factorizantes más generales [90].

En la Fig. V.6 se muestran los resultados para un sistema de espines completamente conectados mediante una interacción tipo XY uniforme y de rango completo (análogo al modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) para fermiones [95]),

$$J_\mu^{ij} = (1 - \delta_{ij}) J_\mu / (n - 1), \quad \mu = x, y \quad (5.36)$$

con la misma anisotropía  $J_y/J_x = 0,5$ . Los resultados exactos pueden ser obtenidos en este caso mediante diagonalización directa, ya que  $H$  puede ser expresado en términos de los operadores del espín total  $S_\mu = \sum_i s_{i\mu}$ . La matriz densidad reducida del par resulta obviamente independiente de la separación, para cualquier valor de campo. El entrelazamiento de pares es pequeño para valores no muy pequeños de  $n$ , y la concurrencia es  $O(n^{-1})$ .

El Discord, sin embargo, es no despreciable y prácticamente independiente de  $n$  para valores de  $n$  grandes. En la Fig. V.6 se verifica que para  $B = B_s$ , se obtienen los mismos límites (5.18) para  $n = 100$ , y los mismos límites laterales (5.21)–(5.34) para  $n = 10$ . Además, los modelos simples (5.16) (para  $n$  grande) o (5.19) (para  $n$  pequeño) para la matriz densidad reducida de un par de espines son capaces de describir el Discord con precisión *en toda la región*  $|B| < B_c = J_x$  (y no solamente en  $B_s$ ) si se emplea para  $\theta$  el valor del campo medio  $\cos \theta = B/J_x$ , como se ve en la Fig. V.6. Esto indica que los efectos sobre el Discord de las correlaciones que van más allá de la descripción de campo medio, con simetría de paridad restaurada, (5.28), resultan muy pequeños para este sistema, y se tornan despreciables para grandes valores de  $n$ . En contraste, el modelo de campo medio no puede describir en forma precisa el Discord de pares en el caso de un acoplamiento de primeros vecinos, excepto cerca de  $B_s$ , aunque sí proporciona una descripción cualitativa.

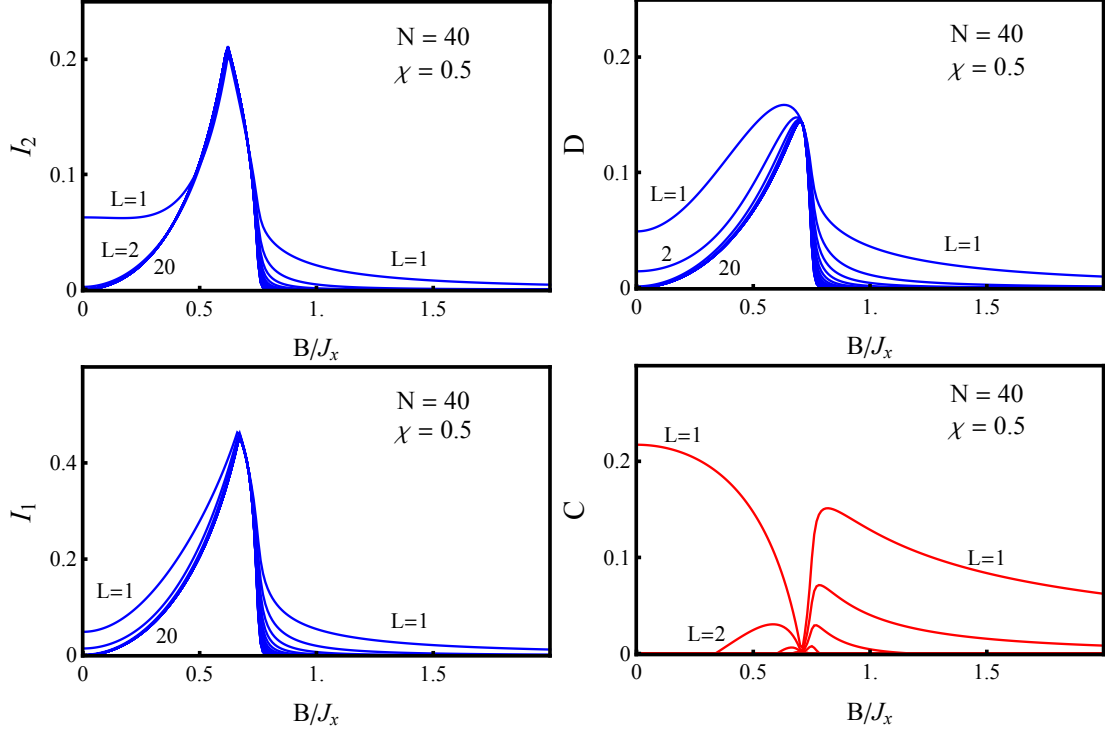


Figura V.7: A la izquierda se muestran el Déficit de Información  $I_2$  (arriba) e  $I_1$  (abajo), en función del campo magnético escalizado  $B/J_x$ , entre pares de espines con separación  $L = 1, 2, \dots, n/2$ , en el estado fundamental exacto de una cadena cíclica de 40 espines, con interacción XY de primeros vecinos y anisotropía  $\chi = 0,5$ . A la derecha se muestra también el Discord  $D$  (arriba) y la concurrencia  $C$  (abajo). Los resultados para distintas separaciones se superponen exactamente en el campo factorizante  $B_s = \sqrt{J_y J_x} \approx 0,71 J_x$ .

### 5.3. Déficit de Información de pares en cadenas XY

#### 5.3.1. Comportamiento general

Pasaremos ahora a examinar el comportamiento del Déficit de Información de pares de espines en la cadena XY [23]. Nos concentraremos en los Déficits de Información  $I_2$  e  $I_1$ , correspondientes a la entropía cuadrática y de von Neumann, respectivamente. Por la simetría del estado, se tiene obviamente  $I_f^A(\rho_{ij}) = I_f^B(\rho_{ij}) \equiv I_f(\rho_{ij}) \forall i, j$  y  $S_f$ .

En la Fig. V.7 se muestran resultados de  $I_2$  e  $I_1$ , junto con el Discord y la concurrencia, en función del campo transversal, para pares de espines en el estado fundamental exacto de una cadena cíclica con  $n = 40$  espines, con interacción XY de primeros vecinos. Se puede apreciar que estas cantidades exhiben un comportamiento cualitativo similar al del Discord, tomando valores finitos apreciables para cualquier separación entre los espines, en la región  $|B| < B_c$ . Este efecto emerge nuevamente de la simetría de paridad. Todas las medidas convergen a un valor finito independiente

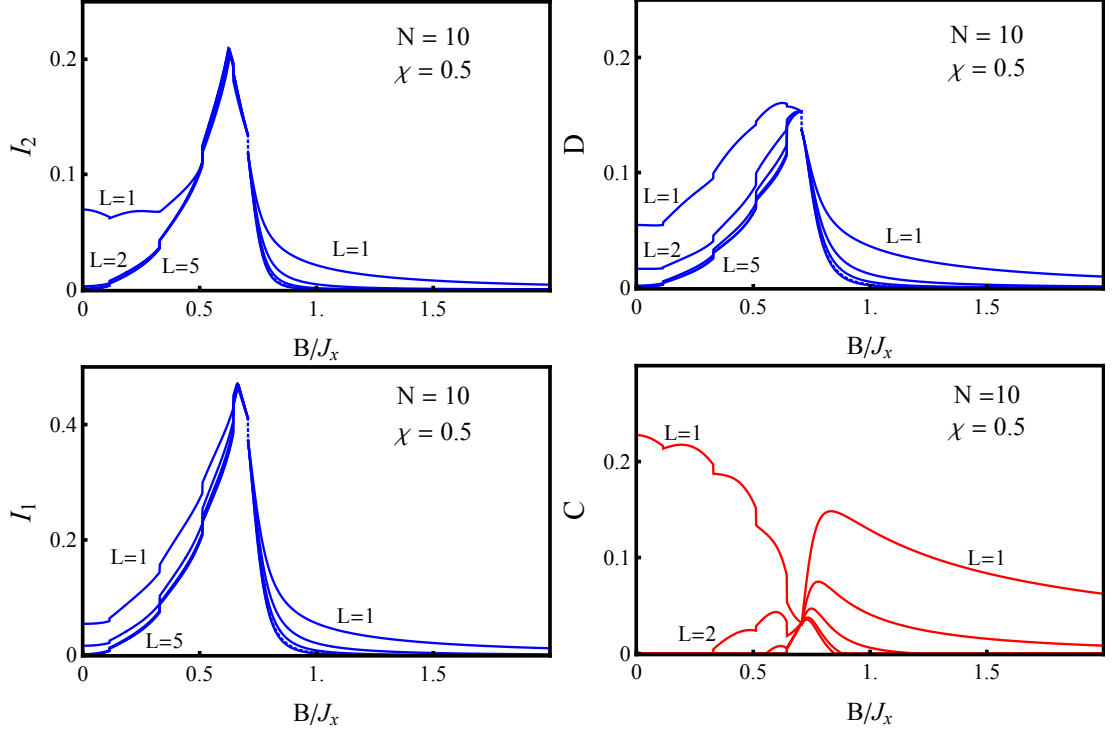


Figura V.8: Las mismas cantidades que en la figura V.7 para  $n = 10$  espines. Se aprecian las discontinuidades originadas por las transiciones de paridad del estado fundamental.

de la separación  $L$  en el campo factorizante, punto donde la concurrencia es nula.

El Déficit  $I_2$  resulta más fácil de evaluar que el Quantum Discord. Recordemos que para  $\rho_{ij}$  de la forma (5.4),  $I_2$  puede evaluarse en forma analítica mediante la expresión (4.54) para estados  $X$ . Y en el campo factorizante, es posible utilizar directamente (4.60) con el ángulo (5.26). Por lo tanto, en  $B = B_s$  y asumiendo que se cumple en el mismo la condición (4.52) ( $\chi > 1/3$ ), obtenemos, despreciando el solapamiento complementario, el valor común [70]

$$I_2(B_s) = \frac{(1 - \chi)^2}{2} \quad (5.37)$$

válido  $\forall L$ .

En el caso de cadenas pequeñas, Fig. V.8, los resultados son similares, pero se aprecian los efectos de las transiciones de paridad en el estado fundamental, que inducen, en particular, una discontinuidad finita visible en  $I_2$  e  $I_1$  en el campo factorizante. Estas transiciones están en realidad presentes para todo  $n$  finito, pero dejan de ser apreciables para  $n$  no muy pequeño (Fig. V.7). En el caso de  $I_2$ , utilizando (4.54), (5.19), (5.26) y (5.34), obtenemos el resultado común exacto

$$I_2(B_s) = \frac{(1 - \chi)^2}{2} \frac{1 + \chi^{n-2}}{(1 \pm \chi^{n/2})^2} \quad (5.38)$$

donde el signo  $-$  ( $+$ ) corresponde al lado izquierdo (derecho) del campo factorizante. El salto de  $I_2$  en  $B = B_s$  es entonces proporcional a  $\chi^{n/2}$ .

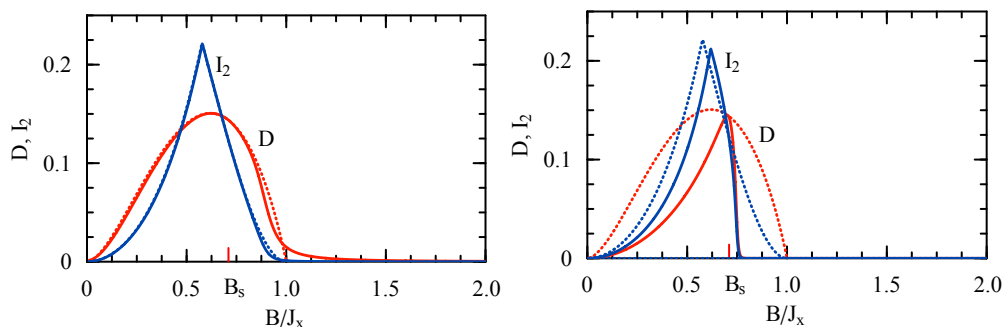


Figura V.9: Izquierda: Comparación entre  $D$  e  $I_2$  para un par de espines en el estado fundamental exacto del sistema de espines completamente conectado de la Fig. V.6. Las líneas punteadas representan nuevamente el resultado para la mezcla de dos estados alineados, con el ángulo de campo medio  $\cos \theta = B/J_x$ , que prácticamente coincide con el resultado exacto para  $|B| < J_x$  (y coincide exactamente en el campo factorizante). Derecha: Las mismas cantidades para acoplamiento de primeros vecinos, y separación  $L = 4$ .

Al igual que en el caso del Discord, el valor de  $I_f$  para  $B < B_c$  puede comprenderse esencialmente por medio del estado de campo medio con simetría de paridad restaurada (5.28). La estimación de campo medio es en realidad prácticamente exacta en el caso de la cadena completamente conectada (Fig. V.9), mientras que en el caso de acoplamientos de primeros vecinos, el acuerdo es cualitativo.

### 5.3.2. Medida minimizante

A pesar de que el comportamiento cualitativo de  $I_2$  e  $I_1$  es similar al del Discord, tanto  $I_1$  como especialmente  $I_2$  exhiben un máximo absoluto más pronunciado que el Discord  $D$ , como se observa en las Figs. V.7-V.8. A diferencia del Discord,  $I_2$  presenta en realidad una *transición abrupta* en la orientación de la medida de espín local que la determina, pasando de una orientación *paralela al eje x* ( $\gamma = \pi/2$ ), a una dirección *paralela al eje z* ( $\gamma = 0$ ) al aumentar el campo, tal como se aprecia en la Fig. V.10. Esta transición se origina en la expresión (4.52) y ocurre, en el caso de la Fig. V.7, para  $B \approx 0,65J_x$ . En el caso del Deficit de Información  $I_1$ , en cambio, esta transición no es abrupta, pasando el ángulo  $\gamma$  por todos los valores intermedios entre 0 y  $\pi/2$ , como también se observa en la figura. Por el contrario, el Discord no presenta transición en la medida minimizante, para ninguna separación, siendo la óptima siempre a lo largo del eje  $x$ , aún para valores intensos del campo. Esto también se indica en la Fig. V.10.

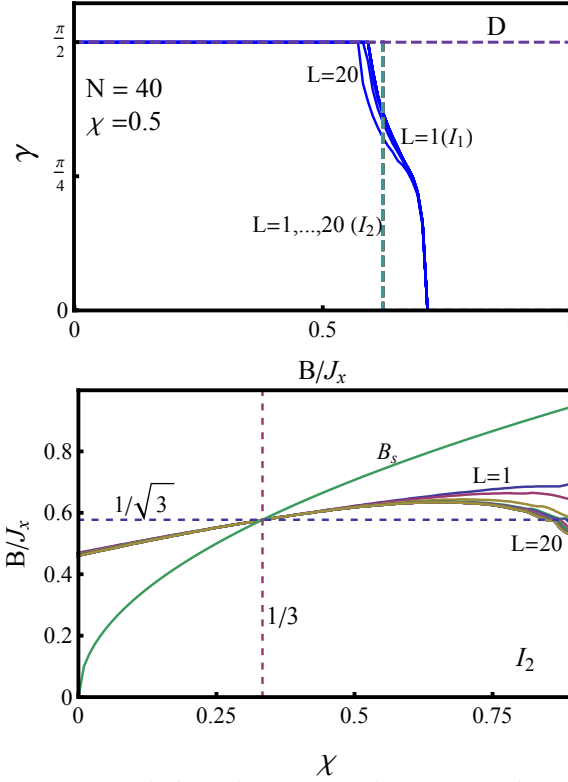


Figura V.10: Panel superior: el ángulo  $\gamma$  que determina la medida local de espín óptima para el Discord ( $D$ ) y los Déficit de Información  $I_2$  e  $I_1$ , en función del campo magnético transversal escalizado, para la cadena de  $n = 40$  espines y anisotropía  $\chi = 0, 5$ . Se muestra el resultado para todas las separaciones  $L$  del par. Panel inferior: El campo en el cual se produce la transición en la medida minimizante para  $I_2$ , en función de la anisotropía  $\chi = J_y/J_x$ . Se muestra también el campo factorizante  $B_s$ .

El campo donde se produce la transición en la medida optimizante depende de la anisotropía y sólo ligeramente de la separación  $L$ , como se observa en el panel inferior de la Fig. V.10, excepto en el límite XX, que se discutirá en detalle en el próximo capítulo. Esta transición en la medida minimizante refleja un cambio cualitativo en el estado reducido del par. De acuerdo a la Ec. (5.22), la medida óptima paralela al eje  $x$  ocurre para  $J_x^2 > J_z^2 + r_B^2$ , lo que implica un estado reducido con una correlación sustancial en la dirección  $x$  (ya que  $\langle s_{ix} \rangle = 0$ ), de forma que el estado clásicamente correlacionado  $\rho'_{ij}$  más “cercano” a  $\rho_{ij}$  es diagonal en la base de autoestados de  $s_{jx}$ . Por el contrario, la medida óptima paralela al eje  $z$  significa que el  $\rho'_{ij}$  más “cercano” es diagonal en la base estándar. El Discord, en cambio, es sensible sólo a la correlación [96], que en este caso es mayor en la dirección  $x$  por la forma del acoplamiento. Se darán más detalles en el caso particular XX (Cap. VI).

El campo de transición para la medida no coincide en general con el campo factorizante, aunque ambos exhiben una tendencia creciente al disminuir la anisotropía (o sea, al aumentar  $\chi$ ), excepto en el límite XX para separaciones  $L > 1$ . En el caso

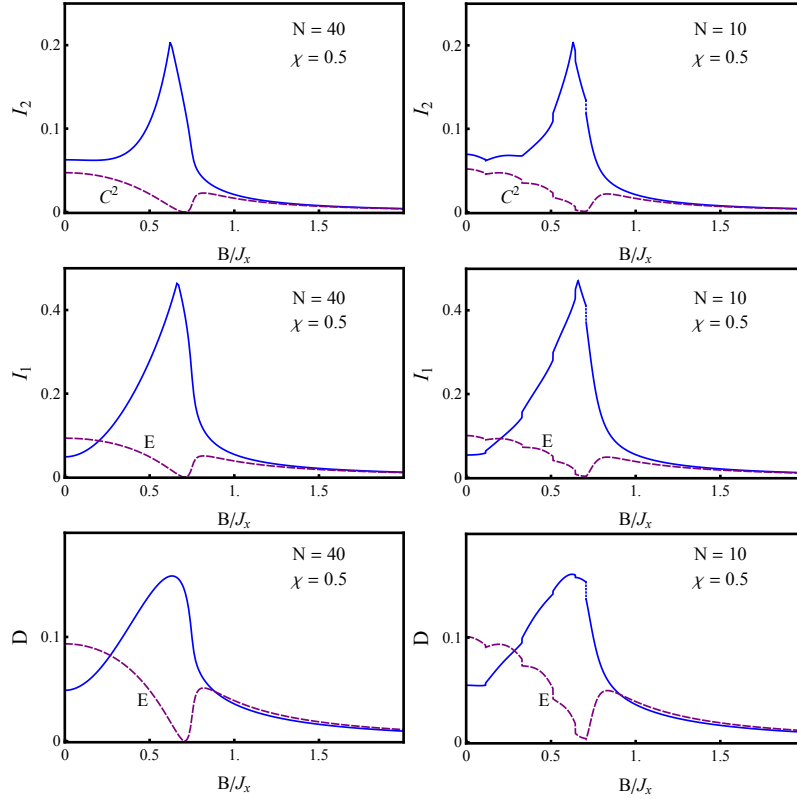


Figura V.11: Comparación entre el Déficit de Información  $I_2$  (panel superior),  $I_1$  (panel central) y Discord (panel inferior) y la correspondiente medida de entrelazamiento, para un par de espines contiguos ( $L = 1$ ) en el estado fundamental de una cadena de  $n = 40$  espines, con acoplamiento XY de primeros vecinos y anisotropía  $\chi = 0,5$ . Se observa que  $I_2$  es cota superior de  $C^2$  (cuadrado de la concurrencia), mientras que  $I_1$  es cota superior del entrelazamiento de formación  $E$  sólo para campos intensos y  $D$  no es cota de  $E$  incluso en este último límite.

de  $I_2$ , el punto de cruce entre ambos puede obtenerse directamente de las ecuaciones (4.62) y (5.26), dado que en  $B = B_s$  el estado de todo par es de la forma (5.16) (despreciando el solapamiento (5.29)). Esto conduce inmediatamente a  $\chi = 1/3$ , y  $B = J_x/\sqrt{3}$  en el punto de cruce (Fig. V.10).

Finalmente, mostramos en la Figura V.11 el comportamiento de  $I_2$ ,  $I_1$  y  $D$  en relación con la medida de entrelazamiento asociada, (el cuadrado de la concurrencia  $C$  para  $I_2$ , y el entrelazamiento de formación  $E$  para  $I_1$  y  $D$ ), para un par de espines contiguos. Se observa que  $I_2$  es cota superior de  $C^2$  para todo campo, mientras que  $I_1$  deja de serlo en la región de campos débiles [70]. En contraste,  $D$  no es cota de  $E$ , aún para campos intensos, tal como se mencionó previamente.

Para  $|B| \gg J_x$ , se obtiene, a partir de (5.31),  $C \approx 2(\eta - \eta^2)$ , mientras que  $I_2 \approx 4\eta^2$ , verificándose que  $I_2 - C^2 = O(\eta^3) > 0$ . Esto está de acuerdo con los resultados generales del capítulo III para estados  $X$ , que prueban  $I_2 \geq C^2$  cuando la medida optimizante para  $I_2$  es a lo largo del eje  $z$  (Eq. 4.56).



## 5.4. Apéndice: Solución exacta de la cadena XY cíclica finita

La transformación de Jordan-Wigner [86] permite reescribir el Hamiltoniano (5.1), en el caso de primeros vecinos y para cada valor  $\pm$  de la paridad de espín total  $P_z$ , como una forma cuadrática en operadores fermiónicos  $c_i^\dagger, c_i$ , definidos por

$$c_i^\dagger = s_{i+} \exp[-i\pi \sum_{j=1}^{i-1} s_{j+} s_{j-}]. \quad (5.39)$$

La transformación inversa es

$$s_{i+} = c_i^\dagger \exp[i\pi \sum_{j=1}^{i-1} c_j^\dagger c_j]. \quad (5.40)$$

El resultado es

$$\begin{aligned} H^\pm &= \sum_{i=1}^n B(c_i^\dagger c_i - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \eta_i^\pm (J_+ c_i^\dagger c_{i+1} + J_- c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.) \\ &= \sum_{k \in K_\pm} \lambda_k (a_k^\dagger a_k - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde  $J_\pm = \frac{1}{2}(J_x \pm J_y)$  y, en el caso cíclico  $n+1 \equiv 1$ ,  $\eta_i^- = 1$ ,  $\eta_i^+ = 1 - 2\delta_{in}$  [86]. En (5.41),  $K_+ = \{\frac{1}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}\}$ ,  $K_- = \{0, \dots, n-1\}$ , con [21, 26, 92]

$$\lambda_k = \sqrt{(B - J_+ \cos \omega_k)^2 + J_-^2 \sin^2 \omega_k}, \quad \omega_k = 2\pi k/n.$$

La forma diagonal (5.41) se obtiene por medio de una transformada de Fourier discreta dependiente de la paridad,

$$c_j^\dagger = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{n}} \sum_{k \in K_\pm} e^{-i\omega_k j} c_k'^\dagger \quad (5.42)$$

seguida por una transformación de Bogoliubov

$$c_k'^\dagger = u_k a_k^\dagger + v_k a_{n-k}, \quad c_{n-k}' = u_k a_{n-k} - v_k a_k^\dagger$$

a operadores fermiónicos de cuasipartícula  $a_k, a_k^\dagger$ , con

$$\begin{pmatrix} u_k^2 \\ v_k^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [1 \pm (B - J_+ \cos \omega_k) / \lambda_k].$$

Para  $B \geq 0$ , puede fijarse  $\lambda_k \geq 0$  para  $k \neq 0$  y  $\lambda_0 = J_+ - B$ , en cuyo caso el vacío de cuasipartículas en  $H^-$  es impar y la energía más baja para cada paridad está dada por

$$E^\pm = -\frac{1}{2} \sum_{k \in k_\pm} \lambda_k.$$

En el campo factorizante,  $B = B_s = \sqrt{J_x J_y}$ ,  $\lambda_k = J_+ - B_s \cos \omega_k$  y  $E^\pm = -nJ_+/2$  [26].

El estado reducido de un par de espines en el estado fundamental de paridad definida puede ser obtenido a partir de las contracciones  $\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle = 0$ ,  $\langle a_k^\dagger a_{k'} \rangle = 0$ , que conducen a  $\langle c_k^\dagger c_{k'} \rangle = v_k^2 \delta_{kk'}$ ,  $\langle c_k^\dagger c_{k'}^\dagger \rangle = u_k v_k \delta_{k,-k'}$  y ( $L = i - j$ )

$$f_L \equiv \langle c_i^\dagger c_j \rangle - \frac{1}{2} \delta_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k \in K_\pm} e^{-i\omega_k L} v_k^2 - \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (5.43)$$

$$g_L \equiv \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k \in K_\pm} e^{-i\omega_k L} u_k v_k. \quad (5.44)$$

A partir de estos resultados y el Teorema de Wick, se obtiene [21, 86]

$$\langle s_{iz} \rangle_\pm = f_0, \quad \langle s_{iz} s_{jz} \rangle_\pm = f_0^2 - f_L^2 + g_L^2 \quad (5.45)$$

$$\langle s_{i+} s_{j\pm} \rangle = \frac{1}{4} [\det(A_L^+) \mp \det(A_L^-)] \quad (5.46)$$

con  $(A_L^\pm)_{ij} = 2(f_{i-j\pm 1} + g_{i-j\pm 1})$  matrices de  $L \times L$ . Todos estos resultados, válidos para  $n$  arbitrario, fueron verificados mediante diagonalización directa exacta para un número  $n$  pequeño de espines.

En el límite termodinámico  $n \rightarrow \infty$ , pueden despreciarse los efectos de paridad y reemplazar directamente  $\frac{1}{n} \sum_{k \in K_\pm} F(\omega_k) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega) d\omega$ .

## VI Correlaciones cuánticas en sistemas de espines con interacción XX

En este capítulo final examinaremos en detalle las correlaciones cuánticas de pares en una cadena de espines  $1/2$  con acoplamiento XX, es decir, isotrópico en el plano  $x, y$ . Este sistema posee entonces una mayor simetría que la cadena XY, conservando la componente  $z$  del espín total. Esta simetría origina propiedades especiales del estado fundamental y del estado reducido de un par de espines en dicho estado, que merecen un estudio detallado. Los principales resultados derivados en este capítulo fueron publicados en el trabajo [22].

### 6.1. Sistemas XX

Consideramos un sistema de  $N$  espines  $\mathbf{s}_i$  con acoplamiento de primeros vecinos XX en un campo magnético transversal uniforme. El hamiltoniano correspondiente es

$$H = B \sum_i s_{iz} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} J^{ij} (s_{ix}s_{jx} + s_{iy}s_{jy}). \quad (6.1)$$

Este hamiltoniano es obviamente invariante bajo rotaciones globales alrededor del eje  $z$ , por lo que

$$[H, S_z] = 0$$

con  $S_z = \sum_i s_{iz}$  la componente  $z$  del espín total. Sus autoestados pueden ser entonces caracterizados por la magnetización total  $M$  a lo largo del eje  $z$ . El signo del campo magnético  $B$  puede ser cambiado mediante una rotación global alrededor del eje  $x$   $e^{i\pi S_x}$ , que no afecta la interacción.

En este capítulo nos concentraremos en el caso de una cadena de primeros vecinos,

$$H = B \sum_i s_{iz} - J (s_{ix}s_{i+1,x} + s_{iy}s_{i+1,y}). \quad (6.2)$$

En esta cadena, el signo del acoplamiento  $J$  puede ser invertido por medio de una rotación alrededor del eje  $z$ , aplicada sólo a los espines pares (asumiendo  $N$  par en el caso cíclico  $N + 1 \equiv 1$ ). Por lo tanto, en lo que sigue haremos  $B \geq 0, J \geq 0$ .

### 6.1.1. Estados reducidos de un par de espines

Examinaremos el caso de espín 1/2, donde los resultados exactos tanto para valores finitos de  $N$ , como también en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  pueden ser obtenidos por medio de la transformación de Jordan-Wigner (ver apéndice del capítulo anterior). Nos enfocaremos en el caso cíclico  $N + 1 \equiv 1$ , donde las correlaciones de pares entre espines  $i$  y  $j$  en el estado fundamental, ó en el estado térmico  $\rho \propto \exp[-\beta H]$ , dependerán sólo de la separación  $L = |i - j|$ .

Para cualquier estado global  $\rho$  que satisface  $[\rho, S_z] = 0$ , el estado reducido  $\rho_{ij} = \text{Tr}_{\overline{\{ij\}}} \rho$  de un par de espines  $i \neq j$  conmutará con  $s_{iz} + s_{jz}$ . En el caso cíclico,  $\rho_L \equiv \rho_{ij}$  tendrá la forma

$$\rho_L = \begin{pmatrix} p_L^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_L & \alpha_L & 0 \\ 0 & \alpha_L & p_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_L^- \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$= p_L^+ |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + p_L^- |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + (p_L + \alpha_L) |\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + (p_L - \alpha_L) |\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \quad (6.4)$$

donde (6.3) es la representación en la base estándar y (6.4) es la expansión en autovectores, con  $|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$  estados de Bell. Aquí  $p_L^+ + p_L^- + 2p_L = 1$ , con

$$p_L^{\pm} = \frac{1}{4} \pm \langle s_z \rangle + \langle s_{iz} s_{jz} \rangle \quad (6.5)$$

$$\alpha_L = \langle s_{ix} s_{jx} + s_{iy} s_{jy} \rangle \quad (6.6)$$

donde  $\langle s_z \rangle = \langle S_z \rangle / N$  representa la magnetización intensiva promedio a lo largo del eje  $z$ . El estado (6.4) corresponde a  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B = (0, 0, 2\langle s_z \rangle)$  y  $J_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} J_{\mu}$  en (4.45), con  $2\langle s_z \rangle = p_L^+ - p_L^-$ ,  $J_x = J_y = 2\alpha_L$ ,  $J_z = 1 - 4p_L$ .

Luego, los autovectores de  $\rho_L$  en el estado fundamental, ó en el estado térmico, *no dependerán de la separación ni del campo*. Sí dependerá, por supuesto, el orden de los autovalores. Para  $B \geq 0$  y  $J \geq 0$  en (6.2),  $p_L^- \geq p_L^+$  y  $\alpha_L \geq 0$ . El autovalor más grande de  $\rho_L$  corresponderá al estado de Bell  $|\Psi_+\rangle$  si

$$\alpha_L > \alpha_L^c = p_L^- - p_L \quad (6.7)$$

y al estado separable alineado  $|\downarrow\downarrow\rangle$  si  $\alpha_L < \alpha_L^c$ . Por lo tanto, en el estado fundamental podemos esperar que, a medida que el campo disminuye, se produzca una transición en el autoestado dominante de  $\rho_L$ , desde  $|\downarrow\downarrow\rangle$  al estado  $|\Psi_+\rangle$ , para cierto valor del campo  $B_c^L \leq B_c$ . Aquí  $B_c = J$  representa el campo crítico a temperatura  $T = 0$ , a partir del cual el estado fundamental es el estado con todos los espines completamente alineados, o sea  $M = -N/2$ . Veremos tal cruce reflejado en las transiciones exhibidas por la medida optimizante de los Déficit de Información  $I_2$  e  $I_1$ , pero no por el Discord. También encontraremos el mismo efecto a temperatura finita.

### 6.1.2. Déficit de Información paralelo y perpendicular

Vamos a discutir primero las propiedades del Discord y del Déficit de Información para los estados (6.4). Debido a la simetría de permutación de  $\rho_{ij}$ , omitiremos en lo que sigue el superíndice  $B$  en  $I_f$  y en  $D$  (ya que  $I_f^B = I_f^A$ ,  $D(A|B) = D(B|A)$ ). Para  $\alpha_L = 0$ ,  $\rho_L$  es diagonal en la base estándar y tendrá por lo tanto entrelazamiento y Discord nulos:  $E = D = I_f = 0 \forall S_f$ . Este será, sin embargo, clásicamente correlacionado, siendo un estado producto  $\rho_i \otimes \rho_j$  sólo cuando  $p_L = \sqrt{p_L^+ p_L^-}$  (es decir, sólo cuando  $p_L/p_L^+ = p_L^-/p_L$ ). En este caso,  $\rho_i = \rho_j = \sqrt{p_L^+}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{p_L^-}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ .

Las correlaciones cuánticas se deberán solamente a  $\alpha_L$ , y conducirán a un valor finito de  $I_f$  y  $D \forall \alpha_L \neq 0$ . El valor de  $I_2$ , Ec. (3.61), para este estado puede ser evaluado inmediatamente con la Ec. (4.19). Aquí la matriz  $M_2$  es diagonal,  $(M_2)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \lambda_\mu$ , con  $\lambda_x = \lambda_y = J_x^2$ ,  $\lambda_z = J_z^2 + |\mathbf{r}_B|^2$ , resultando

$$I_2 = \begin{cases} I_2^z = 4\alpha_L^2, & |\alpha_L| \leq \alpha_L^t \\ I_2^\perp = 2(\alpha_L^2 + \alpha_L^{t2}), & |\alpha_L| \geq \alpha_L^t \end{cases} \quad (6.8)$$

donde el valor de transición es

$$\alpha_L^t = \frac{\sqrt{\lambda_z}}{2} = \sqrt{\frac{(p_L^- - p_L)^2 + (p_L - p_L^+)^2}{2}} \quad (6.9)$$

y el superíndice en  $I_2$  indica la dirección de la medida local de espín minimizante (a lo largo del eje  $z$  si  $|\alpha_L| < \alpha_L^t$  y a lo largo de cualquier dirección  $\mathbf{k}$  en el plano  $xy$  si  $|\alpha_L| > \alpha_L^t$ ). Por consiguiente,  $I_2$  crece cuadráticamente con  $\alpha_L$  y exhibe entonces una transición paralela  $\rightarrow$  perpendicular para  $\alpha_L = \alpha_L^t$ , correspondiente a un campo de transición  $B_t^L$ . Para  $p_L^- > p_L$  tal transición se correlaciona con la exhibida por el autoestado dominante de  $\rho_L$  (Eq. (6.7)). De hecho, si  $|p_L^+ - p_L| = |p_L^- - p_L|$  y  $p_L^- > p_L$ ,  $\alpha_L^t = \alpha_L^c$ .

La Ec. (6.8) puede ser comparada con la concurrencia de  $\rho_L$ , la cual requiere un valor umbral finito  $\alpha_L$ :

$$C = 2\text{Max}[|\alpha_L| - \sqrt{p_L^+ p_L^-}, 0]. \quad (6.10)$$

Por lo tanto, surgirán correlaciones no nulas tipo Discord, con entrelazamiento *nulo*, para  $0 < |\alpha_L| \leq \sqrt{p_L^+ p_L^-}$ .

El comportamiento del Déficit de Información generalizado  $I_f$  es similar al de  $I_2$ . Para una medida de espín a lo largo del vector  $\mathbf{k}$ , formando un ángulo  $\gamma$  con el eje  $z$ , los autovalores del estado posmedida  $\rho_L'$  son, definiendo

$$\delta = \langle s_z \rangle = (p_L^+ - p_L^-)/2$$

y  $\mu, \nu = \pm 1$ ,

$$p_{\mu}^{\nu} = \frac{1 + 2\nu\delta \cos \gamma + \mu \sqrt{[(1 - 4p_L) \cos \gamma + 2\nu\delta]^2 + 4\alpha_L^2 \sin^2 \gamma}}{4}.$$

Se verifica entonces que

$$I_f^\gamma = \sum_{\mu, \nu = \pm 1} f(p_\mu^\nu) - f(p_L^+) - f(p_L^-) - f(p_L + \alpha) - f(p_L - \alpha) \quad (6.11)$$

satisface  $\partial I_f^\gamma / \partial \gamma = 0$  para  $\gamma = 0$  y  $\gamma = \pi/2$ : *ambas medidas, paralela ( $\gamma = 0$ ) y perpendicular ( $\gamma = \pi/2$ ), son siempre estacionarias*, en acuerdo con las consideraciones generales [20]. Para una dada  $S_f$  pueden surgir, además, puntos estacionarios intermedios, pero la competencia es esencialmente entre  $I_f^z \equiv I_f^0$  e  $I_f^\perp \equiv I_f^{\pi/2}$ .

Para pequeños valores de  $\alpha_L$  y  $\delta \neq 0$ , el mínimo  $I_f^\gamma$ , para cualquier  $S_f$ , se obtiene para  $\gamma = 0$ , con

$$I_f^z = 2f(p_L) - f(p_L + \alpha_L) - f(p_L - \alpha_L) \approx k_f \alpha_L^2 \quad (6.12)$$

donde  $k_f = |f''(p_L)|$  (asumimos aquí  $p_L \neq 0$ ). Por consiguiente, cuando  $\alpha_L$  crece desde 0, todas las  $I_f$  exhibirán un crecimiento inicial *cuadrático* con  $\alpha_L$ , como ocurre con  $I_2$ .

Por otra parte, si  $\delta = 0$ , como en el caso de campo cero (para el estado fundamental o térmico), el mínimo  $I_f^\gamma$  para *cualquier*  $S_f$  es alcanzado para  $\gamma = 0$  si  $|\alpha_L| < \alpha_L^t$  y para  $\gamma = \pi/2$  si  $|\alpha_L| > \alpha_L^t$ , donde  $\alpha_L^t = |\frac{1}{2} - 2p_L| = |p_L^- - p_L|$  (Ec. (6.9)). Por lo tanto, *todas* las  $I_f$  exhibirán, como ocurre con  $I_2$ , una transición paralela  $\rightarrow$  perpendicular para el *mismo* valor de  $\alpha_L$ . Además, para  $p_L^- > p_L$ ,  $\alpha_L^t$  coincide *exactamente* en este caso con  $\alpha_L^c$ , es decir, con el valor donde el autoestado dominante de  $\rho_L$  se vuelve un estado de Bell.

El mismo comportamiento ocurre cuando  $p_L^\pm = \frac{1}{4} \pm \delta$  (implicando  $p_L = \frac{1}{4}$ ), con  $\alpha_L$  y  $\delta$  pequeño, una situación típica que se encuentra para temperaturas altas o grandes separaciones. Una expansión en serie de  $I_f^\gamma$  conduce a

$$I_f^\gamma \approx k_f [\alpha_L^2 + \frac{1}{2}(\alpha_L^2 - \delta^2) \sin^2 \gamma]$$

donde  $k_f = |f''(1/4)|$ , implicando nuevamente

$$I_f = \begin{cases} I_f^z \approx k_f \alpha_L^2, & |\alpha_L| < |\delta| \\ I_f^\perp \approx \frac{1}{2} k_f (\alpha_L^2 + \delta^2), & |\alpha_L| > |\delta| \end{cases} \quad (6.13)$$

con  $\alpha^t = |\delta| = \alpha_c^L$  si  $p_L^- > p_L$ . Por lo tanto, en este caso obtenemos una transición paralela  $\rightarrow$  transversal *universal* para  $|\alpha_L| = \alpha_t \forall S_f$  y  $L$ . En otras palabras, todas las medidas  $I_f$  se comportan como  $I_2$  en este límite.

En contraste, la medida proyectiva minimizante del Discord  $D = D^\gamma \equiv D(A|B_{M_\gamma})$  no exhibirá tal transición para el Hamiltoniano estudiado. Para una medida proyectiva de espín obtenemos, fijando ahora  $f(p) = -p \log_2 p$ ,

$$D^\gamma = I_1^\gamma - \sum_{\nu = \pm} [f(\frac{1}{2} + \nu \delta \cos \gamma) - f(\frac{1}{2} + \nu \delta)]. \quad (6.14)$$

Por lo tanto,  $D^z \equiv D^0 = I_1^0 = I_1^z$ , pero  $D^\gamma < I_1^\gamma$  si  $|\cos \gamma| < 1$  y  $\delta \neq 0$  (sólo a campo cero, donde  $\delta = 0$ , se tiene  $D^\gamma = I_1^\gamma \forall \gamma$ , implicando  $D = I_1$ ). Mientras que, nuevamente, ambos  $\gamma = 0$  y  $\gamma = \pi/2$  son siempre estacionarios, el mínimo  $D^\gamma$  se obtendrá siempre para  $\gamma = \pi/2$  ( $D = D^\perp$ ) para los estados reducidos derivados del estado fundamental o térmico de la cadena determinado por  $H$ , reflejando directamente la “dirección” de la correlación (el acoplamiento XX de un espín con otro). Esto ocurrirá también para valores pequeños de  $\alpha_L$ , ya que en este límite  $p_L^\pm$  se corresponderá con el estado producto, no habiendo una dirección preferencial en  $D^\gamma$  para  $\alpha_L = 0$ . De hecho, para pequeños valores de  $\alpha_L$  y  $\gamma = \pi/2$ , la Ec. (6.14) conduce, para  $p_L = \sqrt{p_L^+ p_L^-} > 0$ , a

$$D^\perp \approx \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{1}{p_L} - \frac{\operatorname{arctanh} 2\delta}{\delta} \right) \alpha_L^2 \quad (6.15)$$

el cual es siempre más pequeño que

$$D^z = I_f^z \approx \frac{1}{p_L \ln 2} \alpha_L^2.$$

Sin embargo, se presenta también un crecimiento cuadrático con  $\alpha_L$ .

## 6.2. Resultados en el límite termodinámico

Analizaremos primero las medidas previas en los estados fundamental y térmico de (6.2) en el límite de valores de  $n$  grandes. Por medio de la fermionización de Jordan Wigner, en este límite podemos expresar todos los elementos del  $\rho_L$  exacto, tanto a temperatura cero como a temperatura finita  $T$ , en términos de las integrales [22]. (En este caso  $J_- = 0$  en el apéndice del capítulo previo, con  $L = i - j$ ).

$$f_L = \langle c_i^\dagger c_j \rangle - \frac{1}{2} \delta_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(L\omega)}{1 + e^{\beta(B - J \cos \omega)}} d\omega - \frac{1}{2} \delta_{L0} \quad (6.16)$$

donde  $\beta = 1/k_B T$  y, en términos de operadores de espín,  $f_0 = \langle s_z \rangle = \langle S_z \rangle / n$  es la magnetización intensiva y  $f_L^2 = \langle s_z \rangle^2 - \langle s_{iz} s_{jz} \rangle$ . Obtenemos así

$$p_L^\pm = (f_0 \pm \frac{1}{2})^2 - f_L^2, \quad p_L = \frac{1}{4} - f_0^2 + f_L^2 \quad (6.17)$$

$$\alpha_L = \frac{1}{2} \operatorname{Det}(A_L), \quad A_{ij} = 2f_{i-j+1} \quad (6.18)$$

con  $A_L$  el primer bloque de la matriz  $L \times L$  de elementos  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, L$ ). De esta forma,  $\alpha_1 = f_1$ ,  $\alpha_2 = f_2 f_0 + 2f_1^2$ , etc.

### 6.2.1. Correlaciones cuánticas de pares en el estado fundamental

A temperatura cero, todas las correlaciones se anulan para  $|B| > J$ , ya que el estado fundamental en esta zona es el estado con todos los espines completamente alineados a lo largo del eje  $z$  ( $\alpha_L = 0$ ,  $p_L^\pm = 1 \forall L$ ). Para  $|B| < J$ , de (6.16) obtenemos en cambio

$$f_L = \frac{\sin(\omega L)}{L\pi} - \frac{1}{2}\delta_{L0}, \quad \omega = \arccos(B/J) \quad (6.19)$$

con  $f_0 = \omega/\pi - \frac{1}{2}$ .

Los resultados para  $I_2$ ,  $I_1$ ,  $D$  y los autovalores de  $\rho_L$  se muestran en las Figs. VI.1–VI.2 para  $L = 1$  y 3. Se verifica primero que, mientras el Discord mínimo corresponde a  $D^\perp \forall |B| < J$ , el mínimo de  $I_2$  exhibe, para  $B$  decreciente, la transición abrupta  $I_2^z \rightarrow I_2^\perp$ . Además, para  $L = 1$ , esta transición tiene lugar *exactamente en el punto donde el estado de Bell  $|\Psi_+\rangle$  se vuelve dominante* en  $\rho_L$ , es decir,  $B_c^L = B_t^L$ .

Notablemente, esta coincidencia para  $L = 1$  es *exacta tanto a temperatura cero como a temperatura finita*. Esto puede apreciarse en las Ecs. (6.17)–(6.18): En este caso  $\alpha_1 = f_1$  y la condición de cruce (6.7),  $\alpha_1 = p_1^- - p_1$ , implica

$$f_1 = -f_0 \quad (6.20)$$

en este punto. En tal caso  $p_1 - p_1^+ = p_1^- - p_1 = \alpha_1$ , de manera que  $\alpha_1^c = \alpha_1^t$  (Ec. (6.8)) y por lo tanto  $B_t^L = B_c^L$  para  $L = 1$ . A  $T = 0$  tenemos, explícitamente,

$$\alpha_1 = \frac{\sin \omega}{\pi} = \frac{\sqrt{1 - B^2/J^2}}{\pi} \quad (6.21)$$

y esta transición ocurre en el campo

$$B_t \approx 0,67J$$

es decir,  $\sin \omega = \pi/2 - \omega$ , correspondiendo a una magnetización intensiva  $\langle s_z \rangle \approx -0,235$ . Se ve, además, que  $I_2 \geq C^2 \forall B$ , es decir,  $I_2$  permanece mayor que la correspondiente medida de entrelazamiento.

El comportamiento del Déficit de Información  $I_1$  es similar, excepto que el cambio abrupto anterior se suaviza a través de una pequeña *región de transición*  $0,55 \lesssim B/J \lesssim 0,67$  donde una medida *intermedia* ( $0 < \gamma < \pi/2$ ) provee el mínimo correspondiente: A medida que  $B$  decrece, el ángulo de minimización  $\gamma$  crece suavemente desde 0 a  $\pi/2$  en este intervalo.

Para separaciones grandes, el comportamiento es similar excepto que los valores de  $I_f$  y  $D$  son menores, y que el campo de transición  $B_t^L$  disminuye en magnitud, en acuerdo con el decrecimiento del campo  $B_c^L$  donde  $|\Psi_+\rangle$  se vuelve dominante, como se ve en la Fig. VI.2 para  $L = 3$ .  $B_t^L$  permanece próximo a  $B_c^L$ , pero el acuerdo no es exacto. El Discord continúa siendo minimizado por la medida perpendicular  $\forall |B| < J$ . Notemos que en este caso, la concurrencia es muy pequeña y diferente de cero sólo en la vecindad de  $B = J$ , mientras que todas las  $I_f$  y la  $D$  permanecen diferentes de cero  $\forall |B| < J, \forall L$ .

Los resultados para separaciones grandes  $L \gtrsim 3$  pueden ser completamente entendidos por medio de las expresiones para  $\alpha_L$  y  $\delta$  (6.12), (6.13) y (6.15). Para  $L$  grande podemos despreciar  $f_L$  en  $p_L^\pm$  y  $p_L$ , en cuyo caso

$$p_L \approx \sqrt{p_L^+ p_L^-} = \frac{\omega}{\pi} \left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right)$$



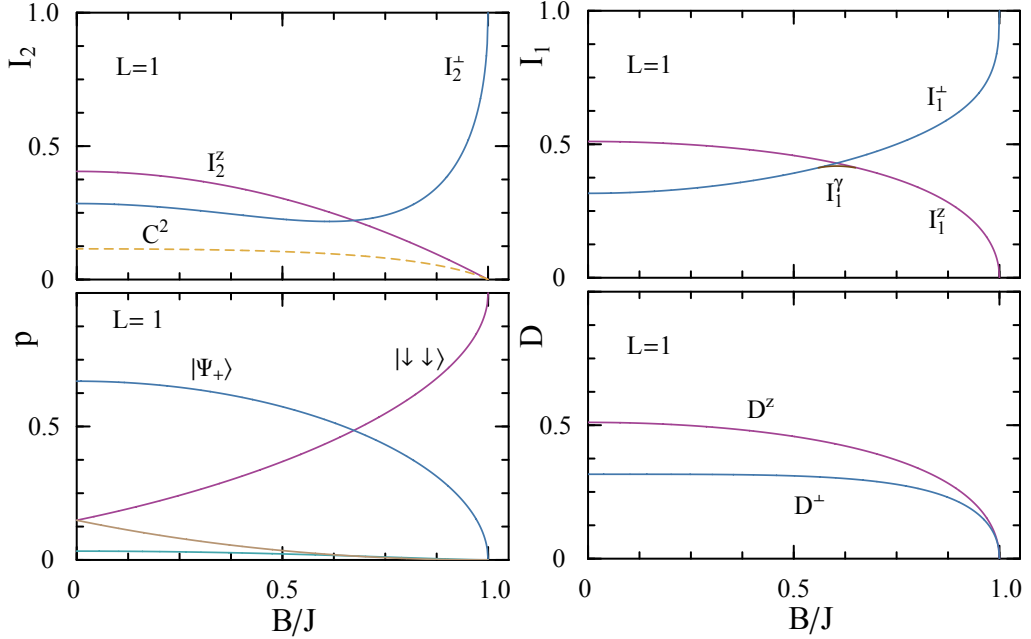


Figura VI.1: Resultados para los Déficit de Información  $I_2$  (arriba izquierda) e  $I_1$  (arriba derecha), el Discord  $D$  (abajo derecha), y los autovalores de la matriz densidad reducida  $\rho_L$  (abajo izquierda) para un par de espines contiguos ( $L = 1$ ), en el estado fundamental de la cadena XX en el límite termodinámico, en función del campo magnético escalizado. Los subíndices  $z$  y  $\perp$  representan los resultados para medidas de espín paralelas y perpendiculares al campo. En el panel superior derecho se muestra el mínimo intermedio  $I_1^\gamma$  correspondiente a la pequeña región de transición. La línea de trazos en el panel superior izquierdo muestra el cuadrado de la concurrencia  $C$ . El mínimo  $I_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) corresponde a  $I_\nu^\perp$  esencialmente en la región donde el autovalor dominante de  $\rho_L$  es el estado de Bell  $|\Psi_+\rangle$ .

mientras que

$$\alpha_L = \eta_L / \sqrt{L} \quad (6.22)$$

con  $\eta_L$  acercándose a valores *finitos* a medida que  $L$  crece ( $\eta_L \rightarrow 0,294$  en  $B = 0$ , y disminuyendo cuando  $B$  crece). Para  $L$  suficientemente grande, la Ec. (6.12) conduce entonces a

$$I_f = I_f^z \approx k_f \eta_L^2 / L, \quad |B| > B_t^L \quad (6.23)$$

con  $k_f = |f''(p_L)|$  ( $k_f = 4$  en  $I_2$  y  $\frac{1}{p_L \ln 2}$  en  $I_1$ ). Por lo tanto, *todas las  $I_f$  decrecen como  $L^{-1}$  para separaciones crecientes  $L$ .*

Para grandes  $L$  el campo de transición  $B_t^L$  se vuelve pequeño, de manera que para  $|B| < B_t^L$  podemos emplear la segunda fila de la Ec. (6.13), con  $\delta \approx -B/(\pi J)$ , ya que (6.19) implica aquí  $\omega \approx \pi/2 - B/J$  y por lo tanto  $p_L^\pm \approx \frac{1}{4} \mp B/(\pi J)$ :

$$I_f = I_f^\perp \approx \frac{1}{2} k_f [\eta_L^2 / L + B^2 / (\pi J)^2] \quad |B| < B_t \quad (6.24)$$

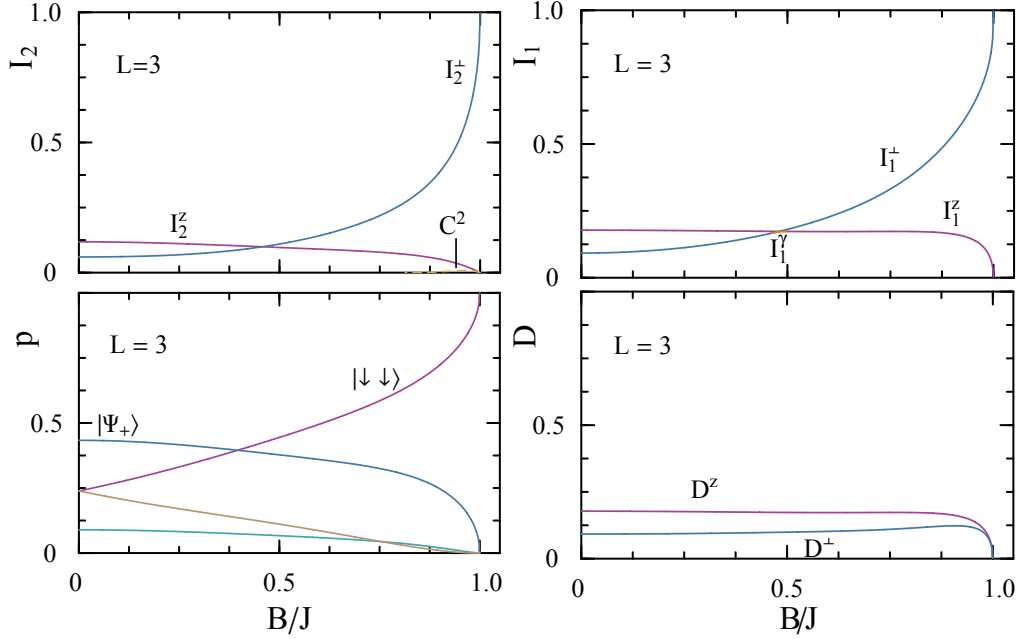


Figura VI.2: Las mismas cantidades de la Fig. VI.1 para terceros vecinos ( $L = 3$ ).

donde  $k_f = |f''(1/4)|$  y

$$B_t^L \approx \pi \eta_L J / \sqrt{L} \quad (6.25)$$

determinada de la condición  $I_f^\perp = I_f^z$  ( $\eta_L \approx 0,294$  en (6.24)–(6.25)). Esta última ecuación coincide para grandes  $L$  con la condición  $\alpha_L = p_L^- - p_L$  (Ec. (6.7)), de manera que en este límite  $B_t^L = B_c^L$ , como se ve en el panel izquierdo de la Fig. (VI.3). El campo (6.25) determina, además, el surgimiento de  $|\Psi^+\rangle$ , cuando  $B$  decrece, como autoestado dominante de  $\rho_L$ . Este campo decrece entonces como  $L^{-1/2}$ .

Por otra parte, el Discord no exhibe transición para  $|B| < J$ : se verifica que  $D = D^\perp \forall L$  y  $|B| < J$ . Su expresión para valores de  $L$  grandes puede ser obtenida directamente de la Ec. (6.15) e implica  $D \propto L^{-1}$  (para  $L$  grande), al igual que  $I_f$ :

$$D = D^\perp \approx k_D \eta_L^2 / L \quad (6.26)$$

donde  $k_D = \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{1}{p_L} - \frac{\text{arctanh } 2\delta}{\delta} \right)$  con  $\delta = \omega/\pi - 1/2$ . Para  $B \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  mientras que  $p_L \rightarrow 1/4$ , y  $D^\perp \rightarrow I_1^\perp$ .

Notamos finalmente que para  $B \rightarrow J$ , la Ec. (6.19) conduce a  $\omega \approx \sqrt{2(1 - B/J)}$ , y por lo tanto  $\alpha_L \approx f_L \approx \omega/\pi \forall L$ , a orden más bajo. Obtenemos entonces el límite común *independiente de  $L$*

$$I_2 \approx 8(1 - B/J)/\pi^2, \quad I_1 \approx \sqrt{I_2}, \quad (B \rightarrow J) \quad (6.27)$$

con  $D \approx I_1$ , a orden más bajo. La independencia de la separación para  $B \rightarrow J$ , en el caso finito, puede ser verificada y fácilmente entendida (ver siguiente sección).

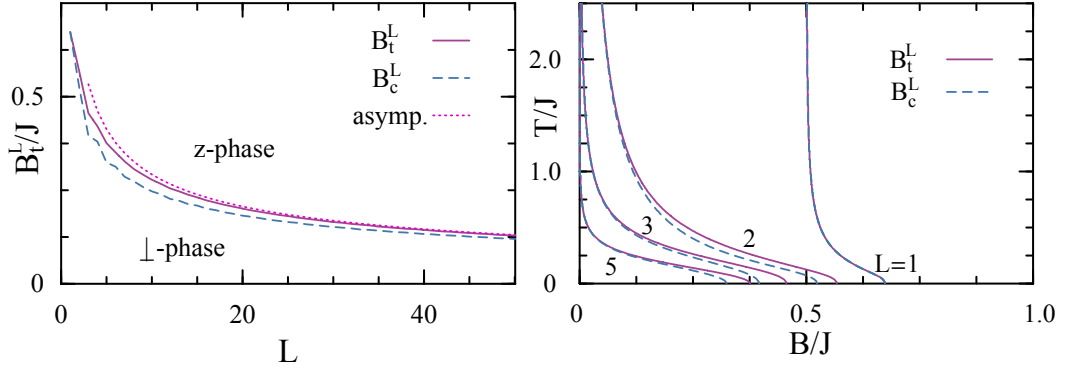


Figura VI.3: Izquierda: El campo de transición  $B_t^L$  donde la medida minimizante de  $I_2$  cambia de perpendicular a paralela, en función de la separación  $L$  (línea sólida), junto con el campo  $B_c^L$  donde el autovector dominante de  $\rho_L$  cambia desde un estado de Bell a un estado alineado (línea de trazos). Los resultados corresponden al estado fundamental ( $T = 0$ ). Ambos campos coinciden para  $L = 1$  y  $L \rightarrow \infty$ . El resultado asintótico (6.25) para  $L$  grande está representado por la línea de puntos. Derecha: Los campos de transición  $B_t^L(T)$  de  $I_2$  a temperatura finita, para  $L = 1, 2, 3$  y  $5$ , tal que  $I_2 = I_2^\perp$  ( $I_2^z$ ) para  $B < B_t^L(T)$  ( $> B_t^L(T)$ ). Las líneas de trazos representan nuevamente los campos  $B_c^L(T)$  por debajo de los cuales el estado de Bell es el autovector dominante de  $\rho_L$ . Para  $L = 1$ , ambos campos coinciden exactamente  $\forall T$ , aproximándose a  $J/2$  para  $T \rightarrow \infty$ , mientras que para  $L \geq 2$  son muy próximos, coincidiendo exactamente en el límite de altas temperaturas, donde se anulan como  $(J/T)^{L-1}$  (Eq. (6.30)).

### 6.2.2. Correlaciones cuánticas de pares a temperatura finita

Al aumentar la temperatura,  $\alpha_L$  decrece para campos  $|B| < J$  (en realidad para  $|B| < J - \varepsilon_L$ , con  $\varepsilon_L$  pequeño), implicando el decrecimiento de todas las correlaciones cuánticas en esta región. Sin embargo, mientras que la concurrencia (y por lo tanto el entrelazamiento) desaparecen a temperatura finita  $T$  [92], el Discord y todas las  $I_f$  se anulan sólo asintóticamente para temperaturas altas. Además, para  $T > 0$  surgen valores pequeños pero finitos de  $D$  e  $I_f$  para  $B > J$  (Fig. VI.4), debido a que estados excitados correlacionados se vuelven accesibles.

A temperaturas altas  $T \gg \text{Max}[J, B]$ , fijando  $k_B = 1$ , las Ecs. (6.17)–(6.18) conducen a

$$f_0 \approx -\frac{B}{4T}, \quad f_1 \approx \frac{J}{8T}$$

con  $f_L = O(T^{-3})$  o superiores para  $L \geq 2$ . Por lo tanto, en este límite obtenemos, al orden no nulo más bajo,

$$p_L^\pm \approx \frac{1}{4}(1 \mp B/T), \quad p_L \approx \frac{1}{4}, \quad \alpha_L \approx \frac{1}{2}(J/4T)^L \quad (6.28)$$

implicando que podemos aplicar directamente las ecuaciones (6.13) y (6.15). Por

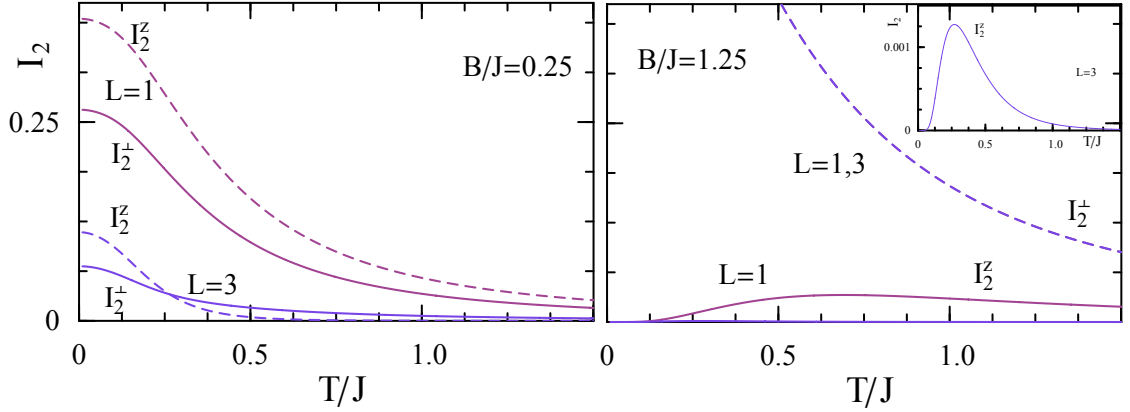


Figura VI.4: El Déficit de Información  $I_2$  en función de la temperatura, para valores fijos (indicados) del campo, para primeros y terceros vecinos. Para campos  $B < B_c = J$  (panel izquierdo),  $I_2$  decrece a medida que  $T$  aumenta, ocurriendo una transición  $I_2^\perp \rightarrow I_2^z$  para  $L = 3$ . Para campos intensos  $B > B_c$ ,  $I_2 = I_2^z$ , creciendo inicialmente al aumentar la temperatura, aunque este resurgimiento se torna muy pequeño a medida que  $L$  aumenta, como puede apreciarse en el panel interno de la figura derecha para  $L = 3$ . Para temperaturas altas,  $I_2 \propto (T/J)^{-2L}$  (Eq. (6.29)).

lo tanto,  $I_f$  y  $D$  se anularán *exponencialmente* a medida que  $L$  crece, es decir,  $I_f, D \propto (T/J)^{-2L}$ . Sin embargo, para todas las  $I_f$  existe aún un campo de transición  $B_t^L \forall T$ , tal que  $I_f^\perp < I_f^z$  para  $|B| < B_t^L$ , con  $B_t^L$  decreciendo para  $T$  creciente y acercándose al campo  $B_c^L$ , con el surgimiento de  $|\Psi_+\rangle$  como autoestado dominante de  $\rho_L$ . El resultado final para  $T$  altas derivados de la Ec. (6.13) es

$$I_f = \begin{cases} I_f^z \approx \frac{k_f}{4} \left(\frac{J}{4T}\right)^{2L}, & |B| > B_t^L \\ I_f^\perp \approx \frac{k_f}{2} \left(\frac{1}{4}\left(\frac{J}{4T}\right)^{2L} + \frac{B^2}{(4T)^2}\right), & |B| < B_t^L \end{cases} \quad (6.29)$$

donde  $k_f = |f''(p_L)| \approx |f''(1/4)|$  y

$$B_t^L \approx \frac{J}{2} \left(\frac{J}{4T}\right)^{L-1} \quad (6.30)$$

determinado de la condición  $I_f^\perp = I_f^z$ , el cual coincide en este límite con el derivado de la condición de cruce (6.7). Por lo tanto, para primeros vecinos ( $L = 1$ )  $B_t^L$  se acerca, para temperaturas  $T$  altas, al límite *finito*  $J/2$ , mientras que para  $L \geq 2$ , éste decrece como  $(J/T)^{L-1}$ , como se puede apreciar en el panel derecho de la Fig. VI.3 para  $I_2$ . En este límite el campo de transición  $B_t^L$  se acerca a  $B_c^L \forall I_f$ . Para  $T$  baja ambos campos permanecen bastante próximos. Se muestra en la Fig. VI.3 que en el caso de  $I_2$ ,  $B_t^L = B_c^L \forall T$  para  $L = 1$ , como fué demostrado previamente.

En contraste  $D = D^\perp \forall B, T$ , con (Ec. (6.15))

$$D^\perp \approx \frac{k_D}{4} \left(\frac{J}{4T}\right)^{2L} \quad (6.31)$$

para  $T$  altas, donde  $k_D \approx \frac{2}{\ln 2}$ . Nuevamente,  $D^\perp \approx I_1^\perp$  para  $B \rightarrow 0$ .

Finalmente, notamos que para  $T > 0$  y campos intensos  $B \gg J, T$ , tenemos

$$f_L + \frac{1}{2}\delta_{L0} \approx \frac{e^{-\beta B}}{\pi} \int_0^\pi e^{\beta J \cos \omega} \cos(L\omega) d\omega = e^{-\beta B} I_L(\beta J)$$

donde  $I_L(x)$  denota la función de Bessel modificada de primera especie ( $I_L(x) \approx e^x/\sqrt{2\pi x}$ , para  $x \rightarrow \infty$ , mientras  $I_L(x) \approx (x/2)^L/L!$  para  $x \rightarrow 0$ ). Por lo tanto, en este límite  $f_L + \frac{1}{2}\delta_{L0}$  decrece exponencialmente a medida que crece el campo, con  $p_L \approx f_0 + \frac{1}{2}$  y  $\alpha_L \approx f_L$ .  $I_2$  resulta entonces

$$I_2 \approx 4e^{-2B/T} I_L^2(J/T) \quad (6.32)$$

decreciendo para campos intensos como  $e^{-2B/T}$ , y decreciendo también muy rápidamente con la separación  $L$  si  $B \gg T \gg J$  ( $I_L(J/T) \approx (J/2T)^L/L!$ ). Por otra parte, para campos intensos,  $I_1$  y  $D$  decrecerán como  $\alpha_L$  ( $\propto e^{-B/T}$ ).

### 6.3. Resultados para cadenas finitas

#### 6.3.1. Correlaciones cuánticas de pares en el estado fundamental

En una cadena finita, el estado fundamental exacto tiene una magnetización finita discreta  $M$ . En consecuencia exhibirá  $N$  transiciones  $M \rightarrow M + 1$ , a medida que el campo decrece desde  $B_c = J$ , comenzando en  $M = -N/2$  para  $B > B_c$ . En el caso cíclico, los campos críticos están dados por [92]

$$B_k = J \frac{\cos[\pi(k - 1/2)/N]}{\cos[\pi/(2N)]}, \quad k = 1, \dots, N \quad (6.33)$$

tal que  $M = k - N/2$  para  $B_{k+1} < B < B_k$ , con  $B_1 = J$ ,  $B_N = -J$ . Para  $N \rightarrow \infty$  la Ec. (6.33) se reduce a la Ec. (6.19) ( $B = J \cos \omega$ , con  $\omega/\pi = k/N = 1/2 + M/N$ ). Los detalles del cálculo exacto para la cadena de tamaño finito [92] pueden obtenerse del apéndice del capítulo anterior, fijando  $J_- = 0$  y  $J_+ = J$ .

En consecuencia, todas las medidas  $I_f$  y  $D$  exhiben a  $T = 0$  un comportamiento escalonado, anulándose para  $B > B_c$ , que puede apreciarse en la Fig. VI.5. Los valores son muy cercanos al resultado para el límite termodinámico si  $L \lesssim N/4$ . Para grandes valores  $L \gtrsim N/4$ , el resultado en la cadena finita es mayor. En contraste, para grandes separaciones  $L$  la concurrencia es no nula sólo en la inmediata vecindad de  $B_c = J$ . Como se muestra en los paneles internos, todas las medidas  $I_f$ ,  $D$  y  $C$  adquieren un *valor finito común para todas las separaciones  $L$*  para  $B \rightarrow J$ , es decir, en el primer intervalo  $B_2 < B < B_1$ , donde  $M = -N/2 + 1$  y el estado fundamental es un estado  $W$ :

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\dots\rangle + \dots + |\dots\downarrow\downarrow\rangle).$$

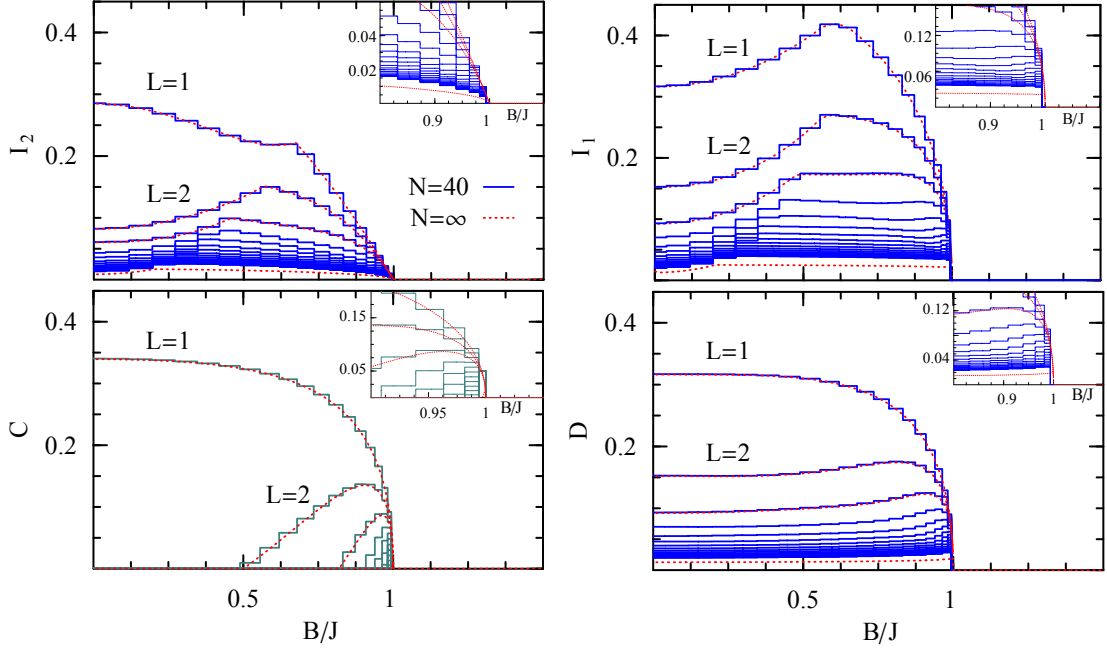


Figura VI.5: Déficit de Información mínimo  $I_2$  (panel superior izquierdo), e  $I_1$  (panel superior derecho), y Discord  $D$  (panel inferior derecho) para pares de espines con separación  $L = 1, \dots, N/2$ , en el estado fundamental de una cadena finita de  $N = 40$  espines, en función del campo magnético escalizado. Como referencia, se muestra también la concurrencia en el panel inferior izquierdo. Las líneas de puntos representan el límite termodinámico para las separaciones  $L = 1, 2, 3$  y  $N/2$ . En cada panel se incluye un gráfico mostrando el comportamiento en la vecindad del campo crítico  $B_c = J$ , donde todas las curvas alcanzan un valor común para todas las separaciones  $L$  (Ecs. (6.34)–(6.35)).

Este estado conduce a un estado reducido de rango 2, independiente de  $L$ , con  $p_L^+ = 0$ ,  $p_L^- = 1 - 2/N$  y  $p_L = \alpha_L = 1/N$  en (5.4). Para tal estado obtenemos, si  $N \geq 4$ ,

$$I_2 = I_2^z = \frac{4}{N^2} = C^2, \quad I_1 = I_1^z = \sqrt{I_2} \quad (6.34)$$

de acuerdo con el resultado del límite termodinámico (6.27) (para grandes  $N$  el segundo campo crítico es  $B_2 \approx J(1 - \frac{\pi^2}{N^2})$  y por lo tanto,  $\frac{8}{\pi^2}(1 - \frac{B}{J}) \approx \frac{4}{N^2}$  si  $B = \frac{B_1 + B_2}{2}$ ). Notemos que para este estado,  $\alpha_L \leq \alpha_c = p_L^- - p_L \forall N \geq 4$  (para  $N = 3$ , donde  $\alpha_L > \alpha_c$ , se prefiere una medida perpendicular en ambas cantidades,  $I_2$  y  $I_1$ ). En contraste,  $D$  es minimizado por una medida perpendicular  $\forall N$ , con

$$D^\perp \approx \frac{2}{N} - \frac{1}{N^2} \log_2(N/e) \quad (6.35)$$

para grandes  $N$  (aunque  $D^\perp \approx D^z = I_1^z$  a orden más bajo).

Podemos ver también que para separaciones  $L \geq 2$ ,  $I_2$  es máximo en la transición de la medida paralelo-perpendicular. Tal máximo se vuelve plano en  $I_1$ , y se

encuentra más cercano a  $B_c = J$  en el Discord  $D$ , en el que la medida optimizante es perpendicular  $\forall B < J$  y  $L$ .

Los ángulos minimizantes para  $I_2$  y  $D$ , correspondientes al caso finito de la Fig. VI.5, se muestran en la Fig. VI.6. Para  $I_2$ , el ángulo exhibe una transición abrupta desde  $\gamma = 0$  (fase  $z$ ) a  $\gamma = \pi/2$  (fase  $\perp$ ) al decrecer el campo. Dicho cambio coincide ahora con una de las transiciones de magnetización (6.33) del estado fundamental ( $B_t^L = B_k$  para algún  $k$  independiente de  $L$ ). Para  $L = 1$  la medida de transición señala exactamente la transición de estado  $M \rightarrow M + 1$  donde  $\rho_L$  cambia su autoestado dominante, como se aprecia claramente en el panel superior derecho de la Fig. VI.6 (donde la transición corresponde a  $k = 11$  en (6.33)), mientras que para valores de  $L$  grandes ambas transiciones son muy cercanas. Como se aprecia en la parte izquierda de la Fig. VI.6, el campo de transición para separaciones  $L$  crecientes tiende a saturar, siendo constante para  $L \gtrsim N/4$ , mientras que cuando  $N$  crece el campo se acercan al resultado del límite termodinámico para  $L \lesssim N/4$ , siendo luego constante. Un resultado similar se obtiene para el ángulo de minimización de  $I_1$ , aunque en este caso la medida de transición puede ocurrir en dos o tres “escalones”, reminiscencias de la transición suavizada del límite termodinámico.

### 6.3.2. Correlaciones cuánticas de pares a temperatura finita

La parte inferior derecha de la Fig. VI.6 muestra el diagrama de “fase” para el Déficit de Información  $I_2$  a temperatura finita, de acuerdo a la medida minimizante para una cadena de  $N = 40$  espines (campo  $B_t^L$ ), junto con el campo  $B_c^L$ , donde el autoestado dominante del estado reducido cambia del estado de Bell al estado alineado. Para  $L = 1$  se produce nuevamente una coincidencia exacta entre ambos campos para todas las temperaturas  $T$ , ya que la desviación de la condición (6.20) del límite termodinámico es pequeña. Para separaciones mayores el acuerdo para temperaturas bajas es aproximado, pero los valores coinciden para temperaturas altas, en las que el apartamiento del resultado correspondiente al límite termodinámico es muy pequeño.

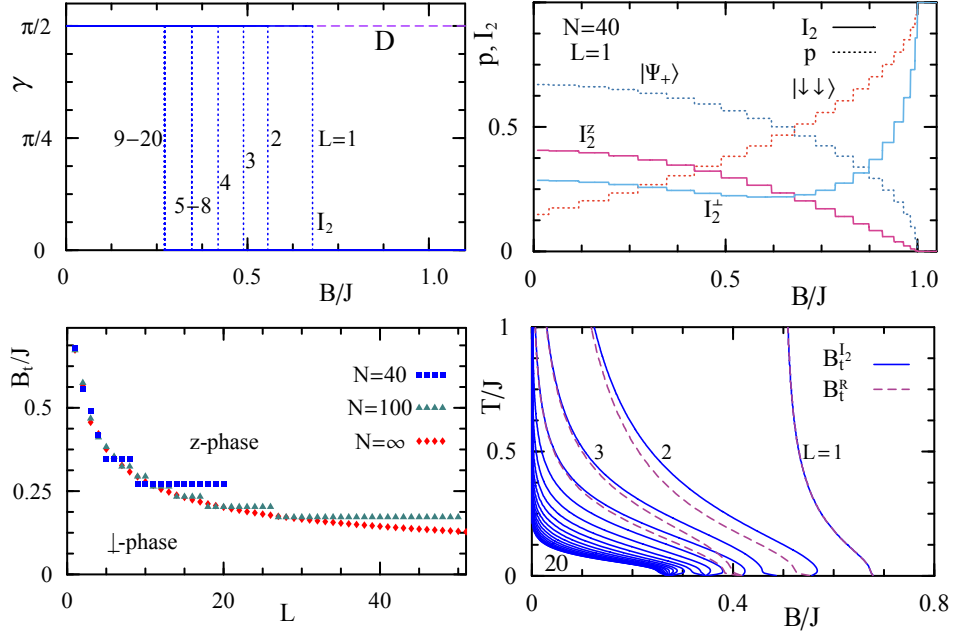


Figura VI.6: Panel superior: Izquierda: El ángulo minimizante para  $I_2$  en función del campo magnético para pares de espines con separaciones  $L = 1, \dots, N/2$ , en la cadena finita de la Fig. VI.5. Las líneas de puntos indican la transición abrupta  $\perp \rightarrow z$  para diferentes  $L$ . Ninguna transición ocurre para el Discord  $D$  (líneas de trazos), donde  $\gamma = \pi/2 \forall B$  y  $L$ . Derecha: Resultados para  $I_2^\perp$  y  $I_2^z$  (líneas sólidas) para  $N = 40$  y  $L = 1$ , junto con los dos autovalores dominantes de  $\rho_1$  (líneas punteadas). Ambos se cruzan en el mismo punto. Panel inferior: Izquierda: Campo exacto de transición  $B_t^L$  delimitando las fases  $\perp$  y  $z$  de  $I_2$  a  $T = 0$ , para  $N = 40$  y  $N = 100$ , junto con el resultado para el límite termodinámico. Derecha: Diagrama de fase  $T - B$  de  $I_2$  en la cadena finita de  $N = 40$  espines, para todas las separaciones  $L = 1, \dots, N/2$  (líneas sólidas). Las fases  $z$  ( $\perp$ ) yacen a la derecha (izquierda) de las curvas. Las líneas de trazos representan los campos  $B_c^L(T)$  para  $L \leq 4$ , debajo de los cuales el estado de Bell se vuelve el estado dominante en  $\rho_L$ .



## VII Conclusiones

En primer lugar, hemos introducido una medida general de correlaciones cuánticas basada en conceptos entrópicos. La misma representa la mínima pérdida de información, medida en base a una entropía general  $S_f$ , en el estado  $\rho_{AB}$  del sistema tras realizar sobre el mismo una medida local completa. Sus propiedades básicas son similares a las del Discord, anulándose para el mismo tipo de estados. Más aún, coincide con la entropía de entrelazamiento generalizada  $E_f(A, B)$  en el caso de estados puros. No obstante, mientras que en el Discord se minimiza una entropía condicional, aquí se minimiza una diferencia entrópica global. De acuerdo a la entropía  $S_f$  seleccionada, esta cantidad se reduce, por ejemplo, al Déficit de Información estándar  $I_1$  o al Discord geométrico  $I_2$ , o también a la cantidad que hemos denominado Déficit de Información  $I_q$ . El formalismo permite identificar ciertas propiedades *universales* de algunos estados (por ejemplo, estados puros o mezcla de un estado puro con el estado máximamente mezclado), tales como la existencia de una medida local de perturbación mínima, *única* para todas las entropías, así como la de un estado clásicamente correlacionado (respecto del sistema medido) *menos mezclado*, cualquiera sea la entropía utilizada para medir el grado de mezcla. En estos casos, no existe pues ambigüedad en la elección de la medida optimizante o del estado clásico más próximo. Todas las medidas exhiben también un crecimiento cuadrático en la vecindad del estado máximamente mezclado, a diferencia del entrelazamiento, que es siempre nulo en un entorno del estado máximamente mezclado. También hemos discutido generalizaciones a medidas locales conjuntas, que permiten identificar estados clásicamente correlacionados respecto de ambas componentes.

Se ha derivado, asimismo, una ecuación estacionaria general para hallar la medida local de perturbación mínima, la cual ha permitido, para ciertas entropías, obtener expresiones analíticas cerradas para dicha medida y el correspondiente Déficit de Información, en estados generales de dos qubits o qudit-qubit. Ejemplos concretos para estados con marginales máximamente mezclados y estados  $X$  fueron discutidos en detalle. Una conclusión general importante es que si bien el Déficit de Información exhibe un comportamiento cualitativo similar al del Discord, la correspondiente medida minimizante puede diferir sustancialmente de la que optimiza la cantidad anterior.

En la segunda parte de esta Tesis, se ha investigado el comportamiento de estas medidas en sistemas de espines. El primer resultado importante a destacar es la existencia de Quantum Discord y Déficit de Información finito entre dos espines *arbi-*

*trariamente separados*, en la vecindad del campo magnético factorizante transversal, en cadenas y sistemas de espines con acoplamientos anisotrópicos tipo XY. Más aún, para campos uniformes, el valor en este punto es *independiente* de la separación entre los espines y del alcance de la interacción. Es decir, se obtiene una correlación cuántica finita aún para espines distantes, no vinculados directamente por la interacción. Este resultado es además analítico, habiéndose derivado una expresión analítica para el Discord y las otras medidas en dicho punto. El mismo fue corroborado mediante cálculos numéricos obtenidos por diagonalización directa así como por otros métodos, tal como la fermionización de Jordan-Wigner. Hemos también proporcionado una visión aproximada simple del estado del par para  $|B| < B_c$ , por medio de su aproximación en términos de una mezcla de estados alineados, que resulta exacta en el campo factorizante, y que permite comprender el valor apreciable de estas medidas en toda la zona  $|B| < B_c$ , aún para separaciones significativas del par.

El comportamiento anterior del Discord y las medidas afines desarrolladas difiere sustancialmente del exhibido por el entrelazamiento, mostrando que estas medidas son libres de la restricción usual de monogamia que afecta al entrelazamiento. En otras palabras, los resultados muestran que es posible un valor finito apreciable del Discord y el Déficit de Información para varias separaciones simultáneamente. Notemos que el entrelazamiento también exhibe un valor finito constante (igual para todo par) en las proximidades del campo factorizante transversal, aunque su valor es muy pequeño y tiende a cero al aumentar el tamaño, precisamente por la restricción de monogamia. Los resultados para el Discord y el Déficit de Información corroboran que el campo factorizante transversal constituye un punto crítico cuántico especial para la cadena o sistema finito, en el que el estado fundamental “se olvida” del alcance de la interacción de pares y en el que todo par tiende al mismo estado reducido. Destaquemos que el campo factorizante es rigurosamente *independiente* del tamaño de la cadena, existiendo ya para un par de espines.

El segundo resultado destacable es que si bien el Discord y el Déficit de Información generalizado de pares exhiben un comportamiento cualitativamente similar en estas cadenas, la medida optimizante puede diferir sustancialmente. Mientras que en el caso del Discord es normalmente constante para todo valor del campo (una medida de espin en la dirección de máximo acoplamiento, es decir el eje  $x$  en los casos considerados), en el caso del Déficit de Información la medida optimizante exhibe una “transición” entre dos direcciones perpendiculares (la del campo transversal y la de máximo acoplamiento). Esta transición (que puede ser abrupta o gradual dependiendo del tipo de media entrópica), indica un cambio cualitativo importante en el estado reducido del par. En el caso de las cadenas con interacción tipo XX, se mostró que esta transición coincide (exactamente para primeros vecinos y aproximadamente para pares más distantes) con el punto en el cual el autovector dominante de la matriz densidad reducida cambia de un estado Bell a un estado alineado. Es decir, está indicando un cambio significativo *en el estado reducido*. Este efecto también se observa (aunque en forma menos pronunciada) en cadenas XY.

En resumen, se ha desarrollado una nueva herramienta general para cuantificar correlaciones cuánticas bipartitas e identificar puntos críticos del sistema y cambios de estructura en estados reducidos de sistemas cuánticos fuertemente interactuantes. Quedan muchos problemas abiertos por investigar, entre ellos la evaluación de estas medidas para sistemas de espín más alto o en sistemas más complejos, y también para particiones generales de estos sistemas, aunque las ecuaciones estacionarias desarrolladas han permitido ya avances en esta línea.

Un último comentario se refiere a la relación entre el Déficit de Información (un concepto estrictamente cuántico) y el de aumento de entropía de un sistema. La mecánica cuántica nos dice que si bien la evolución temporal de un sistema compuesto aislado es unitaria, la evolución de un subsistema del mismo no lo es en general. Si el estado inicial es un producto de un estado del subsistema por uno del complemento (como en el caso de conocer el estado inicial del subsistema, es decir, de haberlo medido), tal evolución queda entonces determinada por los operadores  $M_k$  vistos en el capítulo III, produciéndose un aumento de la entropía del subsistema si se satisface la condición (3.26). Más aún, este aumento de entropía es, en realidad, universal, en el sentido de que *toda* entropía de la forma  $S_f$  aumenta. Y tal evolución puede ser vista como una medida del subsistema, al satisfacerse la condición (3.24). Este aumento de entropía es justamente el Déficit de Información. Quizás el origen de la denominada flecha del tiempo pueda también asociarse a este efecto. Se contempla abordar en profundidad esta temática en el futuro.

## VIII      Agradecimientos

Si he logrado escribir esta tesis es gracias a la ayuda de mucha gente sin los cuales muchas cosas que hago dejarían de tener propósito.

Por empezar quisiera nombrar a mis directores Raul Y Norma, que puedo decir, son enormes y estaré siempre agradecido por enseñarme y por toda su paciencia.

A mis amigos, viejos amigos y amigos recientes, no los enumeraré aquí, es suficiente decir que son una fuente de inspiración para hacer lo que sea.

A mis hermanos, ellos son un caso particular de amigo, pero quiero agradecerles especialmente a ellos y al destino que siempre nos mantuvo juntos.

A mis padres y madre, sin duda las personas que estuvieron presentes en mi vida desde siempre, espero que esten para siempre también.

Por último quisiera agradecerle a quién es mi sosten día a día, a Mariana, por ser quien es...

Gracias!

## Bibliografía

- [1] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935); *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [2] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [3] D. Deutsch, and R. Jozsa, *Proc. R. Soc.* **A 439**, 553 (1992).
- [4] D.P. DiVincenzo, *Science* **270**, 255 (1995); *Phys. Rev.* **A 51**, 1015 (1995).
- [5] M.A. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press (2000).
- [6] V. Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford Univ. Press (2006).
- [7] P.W. Shor, in 35<sup>th</sup> Proc. Ann. Symp. Found. Comp. Science, IEEE Press, Ca. (1994).
- [8] L.K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [9] R. Jozsa and N. Linden, *Proc. R. Soc. A* **459**, 2011 (2003); G. Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 147902 (2003).
- [10] E. Knill and R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5672 (1998).
- [11] A. Datta, S.T. Flammia and C.M. Caves, *Phys. Rev. A* **72**, 042316 (2005).
- [12] B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
- [13] C.H. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [14] R.F. Werner *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [15] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W.K. Wootters, *Phys. Rev. A* **54**, 3824 (1996).
- [16] H. Ollivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001); W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).

- [17] L. Henderson and V. Vedral, J. Phys. A **34**, 6899 (2001); V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **90**, 050401 (2003).
- [18] A. Datta, A. Shaji, and C.M. Caves, Phys. Rev. Lett. **100**, 050502 (2008).
- [19] R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti, Phys. Rev. A **82**, 052342 (2010).
- [20] R. Rossignoli, N. Canosa, L. Ciliberti, Phys. Rev. A **84**, 052329 (2011).
- [21] L. Ciliberti, R. Rossignoli, N. Canosa, Phys. Rev. A **82**, 042316 (2010).
- [22] L. Ciliberti, N. Canosa, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **88**, 012119 (2013).
- [23] N. Canosa, L. Ciliberti, R. Rossignoli, Int. J. Mod. Phys. B **27**, 1345033 (2013).
- [24] L. Ciliberti, N. Canosa, R. Rossignoli, J. of R. Laser Research **52**, 212 (2011).
- [25] J. Kurmann, H. Thomas and G. Müller, Physica A **112**, 235(1982).
- [26] R. Rossignoli, N. Canosa, J.M. Matera, Phys. Rev. A **77**, 052322 (2008).
- [27] A. Wherl, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).
- [28] C.E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Tech. **27**, 379, 623 (1948).
- [29] *Concepts and recent advances in generalized information measures and statistics*, A.M. Kowalski, R. Rossignoli, E. Curado, Eds., Cap. 2, Bentham (2013).
- [30] R.K. Pathria *Statistical Mechanics*, Pergamon Press Oxford (1972).
- [31] S. Kullback, R.A. Leibler, Ann. Math. Stat. **22**, 79 (1951); S. Kullback, *Information Theory and Statistic J.* Wiley and Sons (1959).
- [32] P.W. Lamberti, A. Majtey, en *Concepts and recent advances in generalized information measures and statistics*, Cap. 6, Bentham (2013).
- [33] D.M. Endres, J. E. Schindlin, IEEE Trans. Inf. Theory **49**, 1858 (2003).
- [34] J. von Neumann, *Göttinger Nachrichten*, 245 (1927).
- [35] V. Vedral, Rev. Mod. Phys. **74**, 197 (2002).
- [36] A. Majtey, P.W. Lamberti and D. Prato, Phys. Rev. A **72**, 052310 (2005).
- [37] G. Vidal, and R.F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [38] R. Rossignoli, C.T. Schmiegelow, Phys. Rev. A **75**, 012320 (2007).
- [39] F. Giraldi and P. Grigolini, Phys. Rev. A **64**, 032310 (2001).

- [40] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [41] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [42] R. Horodecki, M. Horodecki, Phys. Rev. A **54**, 1838 (1996).
- [43] S. Hill and W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
- [44] W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [45] C.A. Ryan et al, Phys. Rev. Lett. **95**, 250502 (2005).
- [46] B.P. Lanyon et al, Phys. Rev. Lett. **101**, 200501 (2008).
- [47] S. Luo, Phys. Rev. A **77**, 042303 (2008).
- [48] A. Datta, S. Garibian, Phys. Rev. A **79**, 042325 (2009).
- [49] A. Shabani, D.A. Lidar, Phys. Rev. Lett. **102**, 100402 (2009).
- [50] M.S. Sarandy, Phys. Rev. A **80**, 022108 (2009).
- [51] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral, M. Williamson, Phys. Rev. Lett. **104**, 080501 (2010).
- [52] K. Modi et al, Rev. Mod. Phys. **84**, 1655 (2012).
- [53] B. Dakić et al, Nat. Phys. **8**, 666 (2012); M. Gu et al, Nat. Phys. **8**, 671 (2012).
- [54] B.P. Lanyon et al, Phys. Rev. Lett. **111**, 100504 (2014).
- [55] E. Lieb, Commun. Math. Phys. **31**, 327 (1973); Adv. Math. **11**, 267 (1973).
- [56] Y. Huang, New. J. Phys. **16**, 033027 (2014).
- [57] A.I. Khinchin, Uspekhi Matem. Nauk. **8**, 3 (1953), R.A. Silverman and M.D. Friedman, *Mathematical Foundation of Information Theory*, Dover, N.Y. (1957).
- [58] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer (NY) (1997); A. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press (1979).
- [59] N. Canosa, R. Rossignoli en *Concepts and recent advances in generalized information measures and statistics*, Cap. 5, Bentham (2013).
- [60] R. Rossignoli, N. Canosa, Phys. Rev. A **67**, 042302 (2003).
- [61] R. Rossignoli, N. Canosa, Phys. Lett. A **264**, 148 (1999).

- [62] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479, (1988); C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer, NY, (2009).
- [63] A. Renyi, *Probability Theory*, North Holland, Amsterdam (1970).
- [64] N. Canosa, R. Rossignoli, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 170401 (2002).
- [65] R. Rossignoli, N. Canosa, *Phys. Rev. A* **66**, 042306 (2002).
- [66] M. A. Nielsen and J. Kempe, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5184 (2001).
- [67] R. Filip, *Phys. Rev. A* **65**, 062320 (2002); H. Nakazato et al, *Phys. Rev. A* **85**, 042316 (2012); T. Tanaka et al, *Phys. Rev. A* **87**, 012302 (2013).
- [68] M. Horodecki, et al, *Phys. Rev. A* **71**, 062307 (2005); J. Oppenheim et al, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 180402 (2002).
- [69] A. Streltsov, H. Kampermann, and D. Bruß, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 160401 (2011); M. Piani et al, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 220403 (2011).
- [70] N. Canosa, L. Ciliberti, R. Rossignoli, *Entropy* **17**, 1634 (2015).
- [71] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.* **33**, 305 (1973).
- [72] P. Rungta and C.M. Caves, *Phys. Rev. A* **67**, 012307 (2003); P. Rungta, V. Bužek, C.M. Caves, M. Hillery, G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2001).
- [73] M.A. Nielsen, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 436 (1999).
- [74] B. Dakić, V. Vedral, and Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010).
- [75] F.M. Paula, T.R. de Oliveira, M. Sarandy, *Phys. Rev. A* **87**, 064101 (2013); J.D. Montealegre et al, *Phys. Rev. A* **87**, 042115 (2013); F. Ciccarello, T. Tufarelli, V. Giovanetti, *New J. Phys.* **16**, 013038 (2014).
- [76] L. Gurvits and H. Barnum, *Phys. Rev. A* **66**, 062311 (2002); *Phys. Rev. A* **68**, 042312 (2003).
- [77] G. Vidal, *J. Mod. Opt.* **47**, 355 (2000).
- [78] T.J. Osborne, *Phys. Rev. A* **72**, 022309 (2005).
- [79] J.S. Kim, *Phys. Rev. A* **81**, 062328 (2010).
- [80] D. Girolami and G. Adesso, *Phys. Rev. A* **83**, 052108 (2011).
- [81] M. Ali, A.R.P. Rau, and G. Alber, *Phys. Rev. A* **81**, 042105 (2010); *ibid* **82**, 069902(E) (2010).
- [82] A. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge Univ. Press (1999).



- [83] L. Amico et al, Rev. Mod. Phys. **80**, 516 (2008).
- [84] T.J. Osborne, M.A. Nielsen, Phys. Rev. A **66**, 032110 (2002).
- [85] I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2006). T. Ramos et al, arXiv:1408.4357 [quant-ph] (2014); A.W. Gaetzle et al, arXiv:1410.3388 [quant-ph] (2014).
- [86] E. Lieb, T. Schultz and D. Mattis, Ann. of Phys. **16**, 407 (1961).
- [87] L. Amico et al, Phys. Rev. A **74**, 022322 (2006); F. Baroni et al., J. Phys. A **40**, 9845 (2007).
- [88] S.M. Giampaolo et al, Phys. Rev. B **79**, 224434 (2009).
- [89] T. Roscilde, et al, Phys. Rev. Lett. **93**, 167903 (2004); *ibid* **94**, 147208 (2005).
- [90] R. Rossignoli, N. Canosa, J.M. Matera, Phys. Rev. A **80**, (2009) 062325.
- [91] N. Canosa, R. Rossignoli, J.M. Matera, Phys. Rev. B **81**, 054415 (2010).
- [92] N. Canosa, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **75**, 032350 (2007).
- [93] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
- [94] T.J. Osborne, and F. Verstraete, Phys. Rev. Lett. **96**, 220503 (2006).
- [95] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick, Nucl. Phys. **62**, 188 (1965).
- [96] N. Gigena, R. Rossignoli, Phys. Rev. A **90**, 042318 (2014).