

# Perturbaciones al Espaciotiempo de Kerr y Conjetura de Censura Cósmica

Lic. Ignacio Francisco Ranea Sandoval

Director: Dr. Gustavo Dotti

Co-Director: Dr. Héctor Vucetich

*Tesis presentada para optar por el grado de*  
DOCTOR EN ASTRONOMÍA

JUNIO 2015

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata



Facultad de Ciencias  
Astronómicas  
y Geofísicas  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA





## Resumen:

*Desocupado lector, sin juramento me podrás creer que quisiera que este libro, como hijo del entendimiento, fuera el más hermoso, el más gallardo y más discreto que pudiera imaginarse. Pero no he podido contravenir al orden de la naturaleza, que en ella cada cosa engendra su semejante.*  
Miguel de Cervantes Saavedra, “Don Quijote de La Mancha”.

En esta tesis se presentan estudios con los que pretendemos realizar aportes que permitan analizar la validez de una de las grandes preguntas que, en el marco de la teoría general de la relatividad, aún no tiene respuesta: la conjetura de censura cósmica formulada por Roger Penrose a fines de la década de 1960.

Esta conjetura postula, en su versión débil, que el colapso de materia normal no puede dar como resultado singularidades que no estén cubiertas por un horizonte de eventos que las desconecte causalmente de observadores lejanos. La relevancia de la misma para la astronomía radica en que en caso de ser válida, reforzaría el paradigma actual que asegura que las estrellas de gran masa, al finalizar sus procesos de evolución, dan origen a objetos que pueden describirse con un modelo teórico de objetos completamente colapsados: los *agujeros negros*. De esta forma podría descartarse a otra gran familia de modelos teóricos que describen algunas de las propiedades observadas en estos objetos súper compactos: las *singularidades desnudas*, soluciones singulares a las ecuaciones de Einstein que no presentan horizonte de eventos.

Por otro lado, la versión fuerte de la conjetura de censura cósmica afirma que para que una solución a las ecuaciones de Einstein pueda considerarse físicamente razonable, la misma debe ser globalmente hiperbólica.

Sin pretender en estas pocas líneas ser rigurosos, diremos que la forma débil de la conjetura elimina la posibilidad de que existan singularidades desnudas globales sin descartar que las mismas puedan existir localmente. La forma fuerte, descarta de pleno esta posibilidad.

El espaciotiempo de Kerr súper extremo y la región interna (más allá del horizonte de Cauchy) de un agujero negro de Kerr son soluciones exactas y estacionarias a las ecuaciones de campo de Einstein que violan la conjetura de Penrose débil y fuerte, respectivamente. El primero es un modelo alternativo a los agujeros negros y el segundo aparece como consecuencia del proceso de extensión analítica maximal de la solución de Kerr que describe un agujero negro. Si bien la región externa (fuera del horizonte de eventos) de la solución de Kerr es, probablemente, la solución exacta más importante a las ecuaciones de Einstein que se conoce, la relevancia de la región interna ha sido puesta en duda desde varios puntos de vista.

Las consideraciones mencionadas anteriormente motivaron la realización de un estudio de estabilidad lineal de estos espaciotiempos frente a perturbaciones debidas a campos escalares, de Dirac, electromagnéticos y gravitacionales.

La idea rectora de la primer parte de este trabajo de tesis, es la siguiente: *las soluciones a las ecuaciones de Einstein que no sean estables frente a perturbaciones lineales no deben ser consideradas como modelos teóricos viables para describir objetos astronómicos.*

Los resultados más importantes de esta parte de la tesis se pueden condensar en los siguientes puntos:

- En el caso del espaciotiempo de Kerr súper extremo, se probó la existencia de soluciones axialmente simétricas, inicialmente bien comportadas que crecen en forma exponencial con el tiempo. Este resultado se demostró para campos escalares, de Dirac, electromagnéticos y gravitacionales. Este espaciotiempo, que viola la conjetura débil de censura cósmica, es, por lo tanto, linealmente inestable.
- En el caso de la región interna del agujero negro de Kerr, se demostró la existencia de soluciones con simetría axial inicialmente bien comportadas que crecen en forma exponencial con el tiempo. Se demostró este resultado para campos escalares, de Dirac, electromagnéticos y gravitacionales. Entonces, este espaciotiempo, que viola la conjetura fuerte de censura cósmica, es linealmente inestable.
- A partir las soluciones que obtuvimos se reconstruyó el campo electromagnético y se demostró que en este caso, la teoría de perturbaciones utilizada es autoconsistente. Utilizamos como criterio para afirmar esto que la misma no altera el carácter de la singularidad de anillo.

- Se encontró una posible vinculación entre la existencia de estos modos resonantes y el hecho de que el espaciotiempo de Kerr posee curvas temporales cerradas. Para estudiar la validez de esta hipótesis se analizó la estabilidad lineal frente a perturbaciones por campos escalares de otros espaciotiempos que poseen curvas temporales cerradas: cilindro de polvo de Lanczos, universo de Gödel y espaciotiempo BTZ extremo en  $(2+1)$  dimensiones, y se encontraron, salvo en el caso del universo de Gödel, comportamientos similares a los obtenidos para el espaciotiempo de Kerr.
- Dado que los modos inestables encontrados son axialmente simétricos, se analizó la posibilidad de existencia de modos escalares inestables no axiales en espaciotiempos con curvas cerradas temporales, demostrándose que no existen en el cilindro de Lanczos, el universo de Gödel ni en el espaciotiempo BTZ extremo. Además, se obtuvieron fuertes indicios de que un resultado similar debe ser cierto en el caso de la región interna del agujero negro de Kerr, al menos en el límite de rotación lenta.

Siguiendo otra línea de trabajo, se extendieron resultados previos con la intención de estudiar la posibilidad de distinguir, de manera observacional, a los agujeros negros de las singularidades desnudas. Es decir, se desarrolló un modelo teórico que permite, en principio, poner a prueba, a partir de observaciones astronómicas, la conjetura débil de censura cósmica de Penrose.

Para ello se estudiaron las propiedades de discos de acreción compuestos por un plasma globalmente neutro, formados alrededor de agujeros negros y singularidades desnudas de Kerr en presencia de un campo magnético externo. Se estudiaron los espectros de energía emitidos para una gran variedad de casos de interés. Los mismos pueden considerarse de utilidad dado que presentan una serie de diferencias cualitativas cuando los discos están formados alrededor de agujeros negros y singularidades desnudas.

Los resultados centrales de la segunda parte de esta tesis se pueden condensar en los siguientes puntos:

- Se estudió el efecto que produce sobre las trayectorias de partículas cargadas la presencia de campos de inducción magnética externo (uniforme y dipolar) en el espaciotiempo de Kerr. Con este estudio se generalizaron resultados previos al caso en el que la solución describe una singularidad desnuda. Estos estudios analíticos se realizaron utilizando un esquema perturbativo en el parámetro de acoplamiento entre la carga eléctrica *efectiva* de un elemento de volumen del fluido que forma el disco y la intensidad del campo de inducción magnética externo. Se obtuvo como resultado el cambio en las trayectorias circulares, ingrediente central a la hora de estudiar la física de modelos simples de discos de acreción.
- Se calcularon, numéricamente, los espectros de energía térmicos emitidos por discos de acreción magnetizados y se obtuvieron resultados que dan herramientas que pueden ser utilizadas para distinguir, desde un punto observacional, aquellos formados alrededor de agujeros negros de los formados alrededor de singularidades desnudas. En base a las observaciones actuales, los resultados obtenidos favorecen el actual paradigma de agujero negro. Esta es una herramienta que además puede utilizarse para realizar estimaciones a la intensidad y geometría del campo de inducción magnética externo en el entorno cercano de objetos compactos.

## Dedicatoria y Agradecimientos:

*¿Por qué la tierra es mi casa?  
¿Por qué la noche es oscura?  
¿Por qué la luna es blanca  
que engorda como adelgaza?  
¿Por qué una estrella se enlaza  
con otra, como un dibujo?  
Y ¿por qué el escaramujo  
es de la rosa y del mar?  
Yo vivo de preguntar:  
saber no puede ser lujo.  
El agua hirviendo en puchero  
suelta un ánima que sube*

*a disolverse en la nube  
que luego será aguacero.  
Niño soy tan preguntero,  
tan comilón del acervo,  
que marchito si le pierdo  
una contesta a mi pecho.  
Si saber no es un derecho,  
seguro será un izquierdo.  
Yo vine para preguntar  
flor y reflujo.  
Soy de la rosa y de la mar,  
como el escaramujo.*

*Soy aria, endecha, tonada,  
soy Mahoma, soy Lao-Tsé,  
soy Jesucristo y Yahvéh,  
soy la serpiente emplumada,  
soy la pupila asombrada  
que descubre como apunta,  
soy todo lo que se junta  
para vivir y soñar  
soy el destino del mar  
soy un niño que pregunta.*  
Silvio Rodríguez, "El escaramujo".

Este apartado "multidisciplinario" es una (quizás demasiado) pequeña caricia a las personas que me acompañaron durante esta aventura que no empezó con el trabajo que hoy presento ni termina con la escritura de la última palabra del mismo. Es un reconocimiento realizado desde la palabra escrita, algunas veces tan fría, siempre tan poderosa...

Pasaron unos 13 años desde que comencé a transitar las aulas de la Universidad Nacional de La Plata. Aquí presento el resultado de casi de 25 años de formación dentro del sistema público de educación argentino. Claramente los méritos de esta tesis no pueden ser únicamente míos, no así todos sus defectos y errores...

Quiero comenzar agradeciendo a mis viejos por el apoyo incondicional desde siempre en todo, por aguantar los días de silencios, las visitas menos frecuentes y las cortas vacaciones en casa... las discusiones, los vinos y las alegrías... las palabras se quedan cortas, espero me entiendan igual.

A todo el resto de mi pequeña gran familia, por sus preguntas y sus constantes palabras de aliento y toda la ayuda en los momentos complicados que hubo que pasar, afortunadamente, acompañándonos.

A mis directores, Gustavo y Héctor, por las horas de trabajo dedicadas, su incalculable ayuda y, especialmente, porque trabajar con ellos fue realmente placentero.

A Marce por prestarme, generosamente, su computadora con la que realicé muchos de los cálculos numéricos que se presentan en esta tesis.

A los docentes que tuve y con los que compartí y comparto una cátedra, cada uno de ellos aportó algo al estudiante y al docente que soy y quiero ser. A los trabajadores de planta permanente por hacer de esta facultad lo que es, el agradable lugar en el que tengo la suerte de estudiar y trabajar.

A mis viejos, Mai, Tiara, Fede G., Mau y Tincho que leyeron versiones preliminares de este trabajo y que, con sus comentarios y sugerencias, me ayudaron a mejorar la presentación y la redacción del mismo.

A los amigos que elegí como hermanos: Ale, Fede G., Fede Lanu, Fran, Marce, Maxi y Octi por los grandes momentos que compartimos: las risas a carcajadas, los asados y las horas de charlas muchas veces íntimamente asociadas entre sí. Pero en especial por estar en los momentos difíciles donde su ayuda solo puede entenderse en un abrazo.

A Lupe, Javi y Sofi por las muchas breves estadías en las que nos hicimos compañía cada vez que me abrieron las puertas de su casa.

A Mil, Gus y Pipi compañeros de oficina, mates, cafés, sahumeros, charlas de astronomía y física y ¡choripanes con cerveza! Realmente hacen que trabajar en la oficina sea más fácil y divertido. A los demás compañeros del grupo, aun sin trabajar en lo mismo, siempre fueron interesantes las charlas, los comentarios y los ¡choripanes con cerveza! que compartimos.

A todos mis compañeros de militancia en la Facultad, los del principio en la ardua tarea de comenzar a movilizar espacios de debate entre los estudiantes, a los de la etapa de INTI y los más jóvenes que siguen trabajando con las mismas ganas en esa dirección. A los de ahora, los del nuevo desafío de hacer algo

parecido entre los graduados, a los que acompañé en INTI-PUCA; mi más profundo reconocimiento, mis mejores deseos y mi compromiso de trabajo para lo que viene.

A los compañeros del apoyo escolar de los sábados, a cada uno de ellos con los que tuve el placer de trabajar durante ya algo más de 10 años... un espacio en los que claramente enseñando se aprende... se aprende mucho... aprendo mucho...

A los compañeros de la Cátedra Libre “Ciencia, Política y Sociedad: Contribuciones a un pensamiento Latinoamericano” donde cada discusión fue enriquecedora, una ayuda para ordenar ideas en la cabeza. Aprender discutiendo, que forma más bella...

Al grupo del ENEA. Me abrieron las puertas a formar parte de un hermoso proyecto, ahora una realidad que me ayuda a mantenerme joven.

A Mai, Pe, Juli y Tobi por animarse y animarme.

A los chicos del fútbol de los viernes a la noche, a los de “Parada Roble”, al grupo de básquet “El Bosque” y a los de “Yuri FC”, fueron ese importante cable a tierra que significa hacer deporte en una carrera que te aleja tanto de este tipo de actividades.

A los compañeros de viajes por el sur y por el norte de esta hermosa Argentina y por algunos pequeños rincones de nuestra gran América Latina: a Gabriel, Pedro, Joaquín, Inés, Ceci, Romi, Eze A., Fede G., Mai, Mau, Alan, Octi, Pau, Tiara, Nelly, Tom, Kei, Tincho y Santi.

Por supuesto quiero agradecerle a Marucha por darle otro sentido al paso del tiempo, a la teoría de la relatividad, por la luz y los colores que me regala con cada una de sus miradas con las que me roba sonrisas...

Por último, a quienes no van a leer este trabajo, pero que, quizás sin saberlo, lo hicieron posible.



Ricardo Siri (Liniers).

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Generalidades teóricas</b>	<b>9</b>
<b>2. El espaciotiempo de Kerr</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción	13
2.2. La métrica de Kerr	16
2.2.1. Los OMAC y el arrastre de los sistemas de referencia inercial	17
2.2.2. Observadores estáticos: superficie estática	17
2.2.3. Observadores estacionarios: horizontes de eventos	18
2.2.4. Naturaleza de las singularidades	18
2.2.5. Congruencias nulas principales	21
2.2.6. La ergoesfera y la región de violación cronológica	22
2.2.7. El espaciotiempo de Kerr en el formalismo NP	23
<b>3. La(s) conjetura(s) de censura cósmica</b>	<b>25</b>
3.1. Conjetura débil de censura cósmica	28
3.2. Conjetura fuerte de censura cósmica	32
3.3. Sobre la validez de la conjetura de censura cósmica	33
3.3.1. Argumentos a favor	33
3.3.2. Argumentos en contra	36
<b>4. Singularidades en el espaciotiempo</b>	<b>39</b>
4.1. Lo inevitable: sobre el colapso gravitacional	39
4.1.1. Sobrevolando aspectos de la teoría de evolución estelar	40
4.2. Singularidades: diferentes miradas	42
4.2.1. Definición <i>à la</i> Einstein	42
4.2.2. Espaciotiempos singulares y curvatura	43
4.2.3. Afinando la puntería	43
4.2.4. ¿Finale?	43
4.3. Clasificación de singularidades	44
<b>II Inestabilidad lineal de interiores de agujeros negros y de singularidades desnudas</b>	<b>45</b>
<b>5. Inestabilidad de la singularidad desnuda de Kerr</b>	<b>49</b>
5.1. Perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr	49
5.1.1. Ecuación de Teukolsky	51
5.2. Perturbaciones axialmente simétricas	58
5.2.1. Ecuación angular de Teukolsky	58
5.2.2. Ecuación radial de Teukolsky	61

<b>6. Inestabilidad de la región KIII</b>	<b>69</b>
6.1. Modos inestables en la región KIII de un agujero negro extremo de Kerr . . . . .	69
6.2. Modos inestables en la región KIII de un agujero negro de Kerr subextremo . . . . .	70
6.3. Sobre la estabilidad de la región externa de un agujero negro de Kerr . . . . .	71
<b>7. Modos inestables y potenciales de Debye</b>	<b>73</b>
7.1. El método de reconstrucción . . . . .	73
7.2. Reconstrucción para el caso de campos de Maxwell . . . . .	76
<b>8. Inestabilidades y región de violación cronológica</b>	<b>79</b>
8.1. El trabajo de Bachelot . . . . .	82
8.2. Aplicación al espaciotiempo de Kerr . . . . .	83
8.2.1. Singularidad desnuda de Kerr . . . . .	83
8.2.2. La región interna del agujero negro de Kerr . . . . .	85
8.2.3. La región externa del agujero negro de Kerr . . . . .	91
8.2.4. Extensión del Lema 1 . . . . .	91
8.3. Otros espaciotiempos . . . . .	92
8.3.1. El espaciotiempo de Lanczos . . . . .	92
8.3.2. El espaciotiempo BTZ . . . . .	96
8.3.3. El universo de Gödel . . . . .	100

### **III Aportes a la distinción observacional de agujeros negros y singularidades desnudas** **103**

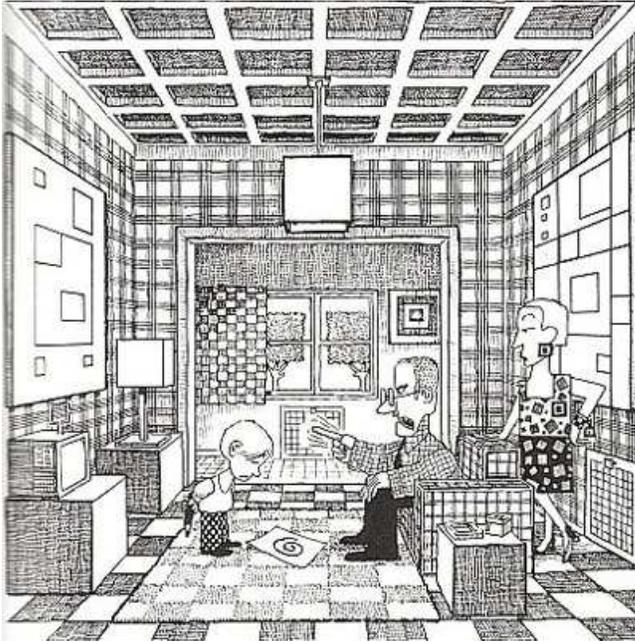
<b>9. Evidencias observacionales de agujeros negros</b>	<b>107</b>
9.1. Evolución estelar de sistemas binarios de gran masa . . . . .	108
9.1.1. Binarias de rayos X . . . . .	110
9.2. Estimación de la masa de agujeros negros en sistemas binarios de rayos X . . . . .	112
9.2.1. El emblemático Cygnus X-1 . . . . .	113
9.3. Estimación del parámetro de rotación . . . . .	114
9.3.1. Oscilaciones cuasiperiódicas . . . . .	114
9.3.2. Ajuste de la línea de hierro . . . . .	115
9.3.3. Ajuste espectral de discos de acreción . . . . .	116
9.4. Diferencias observacionales entre agujeros negros y singularidades desnudas . . . . .	116
9.4.1. Análisis del espectro del continuo en rayos X . . . . .	116
9.4.2. Análisis del fenómeno de lente gravitacional . . . . .	117
9.4.3. Análisis de las propiedades de sombras . . . . .	118
9.4.4. Análisis de las propiedades de discos de acreción . . . . .	119
<b>10. Efecto del campo magnético sobre partículas cargadas en el espaciotiempo de Kerr</b>	<b>121</b>
10.1. Campos electromagnéticos con simetría axial . . . . .	121
10.1.1. Campo uniforme . . . . .	121
10.1.2. Campo dipolar . . . . .	122
10.2. Movimiento en el plano ecuatorial . . . . .	122
10.2.1. El caso no magnetizado . . . . .	123
10.2.2. El caso magnetizado . . . . .	125
10.3. Movimiento en el plano ecuatorial: campo uniforme . . . . .	125
10.3.1. Familia de órbitas en rotación directa . . . . .	126
10.4. Movimiento en el plano ecuatorial: campo dipolar . . . . .	128
10.4.1. La familia de órbitas en rotación directa . . . . .	128
10.5. Eficiencia para la acreción . . . . .	130

<b>11. Alimentando al monstruo: discos de acreción en el espaciotiempo de Kerr</b>	<b>133</b>
11.1. Discos delgados: modelos famosos . . . . .	133
11.1.1. Modelo de Shakura-Sunyaev . . . . .	134
11.1.2. Modelo de Novikov-Page-Thorne . . . . .	135
11.2. Cálculo del espectro de energía observado . . . . .	136
11.2.1. El código YNOGK . . . . .	138
11.3. Disco de Novikov-Page-Thorne magnetizado . . . . .	139
11.3.1. Campo magnético uniforme . . . . .	140
11.3.2. Campo magnético dipolar . . . . .	148
<b>IV Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>151</b>
<b>12. Conclusiones</b>	<b>153</b>
<b>13. Trabajo a futuro</b>	<b>157</b>
<b>V Apéndices</b>	<b>159</b>
<b>A. El formalismo de Newman-Penrose</b>	<b>161</b>
<b>B. Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr</b>	<b>165</b>
B.1. Caso subextremo . . . . .	165
B.2. Casos extremo y súper extremo . . . . .	167
<b>C. La ecuación de Raychaudhuri</b>	<b>171</b>
C.1. Congruencias de geodésicas y condiciones de energía . . . . .	171
C.2. Teorema de enfoque gravitacional . . . . .	172
<b>D. Las funciones de Whittaker</b>	<b>173</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>175</b>



# Capítulo 1

## Introducción



Joaquín Salvador Lavado Tejón (Quino).

*Todos nosotros sabemos algo.  
Todos nosotros ignoramos algo.  
Por eso, aprendemos siempre.*

Paulo Freire

*Existe una falsa creencia popular según la cual la ciencia es una empresa impersonal, desapasionada y completamente objetiva. Mientras que la mayor parte de las otras actividades humanas están dominadas por modas, caprichos y personalidades, se supone que la ciencia se atiene a las reglas de procedimiento establecidas y pruebas rigurosas. Lo que cuenta son los resultados, y no las personas que los producen.*

*Esto es, por supuesto, de lo más absurdo. La ciencia, como cualquier otra empresa humana, es una actividad impulsada por personas y está igualmente sujeta a modas y caprichos. En este caso, la moda no se establece tanto por la elección del tema como por la forma en que los científicos piensan acerca del mundo.*

Paul Davis

Este trabajo de tesis doctoral en astronomía fue realizado, principalmente, en la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata entre abril del año 2009 y febrero del año 2014. Importantes aportes han sido realizados durante una serie de estancias breves en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba donde se encuentra trabajando mi

Director, el Dr. Gustavo Dotti, y donde fui siempre recibido del mejor modo. Durante todo el período en que esta tesis fue desarrollada tuve posesión de una beca del programa de Becas Internas Doctorales que otorga el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, durante los primeros 3 años la de Tipo I y en los restantes la de Tipo II. La Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata me brindó todas las condiciones, tanto en la parte de infraestructura como en la humana, para que pudiese desarrollar este trabajo. Los resultados presentados en esta tesis han sido realizados en colaboración con mis directores, el Dr. Gustavo Dotti y el Dr. Héctor Vucetich y otros colaboradores cercanos. Agradezco a ellos cada una de las discusiones que hemos tenido durante la obtención de los mismos.

El objetivo central de este trabajo de tesis es aportar resultados teóricos que permitan fortalecer el, actualmente aceptado, paradigma de los agujeros negros como el estado final en la evolución de estrellas de gran masa. Se presentarán argumentos teóricos fuertes que debilitan otro tipo de modelos de objetos súper compactos que, también, podrían servir como modelos teóricos con capacidad para explicar algunos de los datos observacionales de los que se dispone. Consideramos importante remarcar que, actualmente, no hay evidencias observacionales que confirmen en forma taxativa que al concluir su proceso de evolución estelar, las estrellas gran masa colapsen por efecto de la gravedad para formar un agujero negro.

Hacia finales de la década de 1960, Roger Penrose formuló la conjetura de censura cósmica que, en su versión débil, postula que del colapso gravitacional de materia normal no pueden resultar espaciotiempos en los que las singularidades que en él aparezcan no estén recubiertas por un horizonte de eventos. Es decir, descarta de plano a las singularidades desnudas como modelo para representar objetos astronómicos. En su versión fuerte, la conjetura afirma que la teoría general de la relatividad es una teoría determinista, es decir que a partir de un dato inicial se debe poder definir la evolución de todos los campos. En lenguaje técnico afirma que el desarrollo de Cauchy máximo de un dato inicial asintóticamente plano o con soporte compacto no puede extenderse localmente como una variedad Lorentziana regular.

Unos diez años después de que la primer versión de su conjetura de censura cósmica viera la luz, Penrose notó que, basados en los principios de la teoría general de la relatividad, no es posible afirmar “la validez de alguna de las formas de la conjetura de censura cósmica”. Por esto concluyó que se debe considerar que esta conjetura representa probablemente “uno de los problemas abiertos más importantes en el marco de la teoría clásica de la relatividad general”. A esta conclusión llegaron otros científicos de renombre en el área como Stephen Hawking, Robert Wald, Pankaj Joshi, Werner Israel, Stuart Shapiro y Saul Teukolsky entre otros. A la fecha, esta conjetura no ha sido demostrada y podría debatirse, inclusive, si la misma ha podido ser formulada en forma completamente correcta y libre de ambigüedades.

Motivados por una serie de resultados relacionados con la estabilidad de soluciones estacionarias exactas a las ecuaciones de Einstein, cuyas respectivas singularidades de curvatura están desprovistas de horizonte de eventos que las recubran, nos proponemos confirmar estos resultados y revisar ciertos aspectos técnicos de los argumentos utilizados en dichos trabajos. Además, pondremos a prueba la aplicabilidad de ciertas hipótesis de trabajo, en particular si el planteo de nuestro estudio de estabilidad lineal es o no consistente. Finalmente intentaremos dar una posible explicación a la aparición de modos inestables.

Esta serie de trabajos obtienen su relevancia desde dos aspectos diferentes pero con una raíz común que los atraviesa. Estudiar la estabilidad lineal de soluciones exactas a cualquier teoría es relevante si se pretende analizar la aplicabilidad de las conclusiones que a partir de ella se obtengan al momento de explicar fenómenos observados o realizar predicciones teóricas. El fundamento de esta frase radica en que si un modelo teórico resulta inestable frente a perturbaciones de algún tipo, difícilmente pueda ser válido para describir objetos o fenómenos con escalas temporales astronómicas. Con esta idea fuerza en mente es que creemos que resultados que demuestren, en forma sistemática, la inestabilidad (lineal) de soluciones que violan a la conjetura de censura cósmica (en alguna de sus formas) deben ser considerados como fuertes indicadores de la validez de la misma.

Además, y siendo totalmente conscientes de la relevancia que tienen los trabajos puramente teóricos, entendemos que cualquier desarrollo teórico debe ser confrontado con el experimento para fortalecer o encontrar los límites de aplicabilidad del mismo. Por este motivo, buscamos hacer aportes que permitan distinguir, desde un punto de vista observacional, diferentes propuestas teóricas para describir objetos súper compactos. En particular centramos nuestra atención en las diferencias entre objetos cuya geometría exterior puede describirse a través del espaciotiempo de Kerr con la singularidad de curvatura cubierta por un horizonte de eventos, es decir, un agujero negro de Kerr y aquellos desprovistos del mismo, o sea, singularidades desnudas

de Kerr. La idea central, entonces, es extender trabajos existentes en el área de la física de discos de acreción en torno a objetos compactos para el caso en el que dichos discos de acreción se forman alrededor de objetos cuya geometría externa es la de Kerr pero en el caso en que se viola el límite  $a^2 \leq M^2$  y el horizonte de eventos, por lo tanto, desaparece. Además, en nuestro modelo incorporamos el efecto de campos de inducción magnética externos ya que se tienen fuertes indicios (teóricos y observacionales) de que los mismos y los discos de acreción están íntimamente relacionados entre sí. Prestaremos atención a uno de los varios observables: los espectros de energía térmica emitidos por los diferentes discos de acreción, buscando diferencias entre ellos y comparándolos con observaciones astronómicas para favorecer, en caso de ser posible, alguno de los modelos frente al otro.

Al inicio de cada una de las partes que conforman esta tesis, en las que se presentan los resultados más importantes que a lo largo de estos años de trabajo se obtuvieron, se expondrá una pequeña reseña histórica del tema junto con la motivación y los objetivos particulares que se persiguen al iniciar la línea de trabajo que se desarrollará. Por este motivo, y para evitar repeticiones, no nos explayaremos en este momento más allá de lo que ya hicimos.

En la **Parte I** de esta tesis se exponen características básicas del espaciotiempo de Kerr y las técnicas para estudiar las perturbaciones lineales a dicho espaciotiempo. Además, se introduce la conjetura de censura cósmica y el concepto de espaciotiempos singulares. Lo presentado en esta parte forma parte de una recopilación y adaptación de contenidos tomados de varios libros de uso constante [1].

En la **Parte II** presentamos resultados originales basados en las publicaciones *Gravitational instabilities in Kerr spacetimes*, Classical and Quantum Gravity, **25** 245012, (2008), que fue realizada en colaboración con G. Dotti, R. J. Gleiser y H. Vucetich; *Instabilities of Naked Singularities and Black Hole Interiors in General Relativity*, International Journal of Modern Physics A, **24**, Issue 08-09, 1578, (2009) realizado conjuntamente con G. Dotti, R.J. Gleiser, J. Pullin y H. Vucetich; *Unstable fields in Kerr spacetime*, Classical and Quantum Gravity **29** 095017, (2012); *Instabilities in Kerr Spacetimes*, International Journal of Modern Physics E, **20**, Issue su, 27, (2011) que fueron realizadas en colaboración con G. Dotti y R.J. Gleiser; *Perturbations of Kerr's Spacetime and Cosmic Censorship* "Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories", 1407, (2015) que fue realizado en conjunto con G. Dotti y R.J. Gleiser y *Scalar Resonances in Axially Symmetric Spacetimes*, International Journal of Modern Physics D, **24**, 1550037 (2015) realizado junto a H. Vucetich.

La **Parte III** de esta tesis presenta desarrollos y resultados propios relacionados con modelos teóricos y predicciones observacionales que pueden ser utilizadas como herramienta a la hora de distinguir desde un punto de vista observacional la naturaleza de los objetos súper compactos de los que se tiene, actualmente, evidencia. Los resultados presentados en el **Capítulo 10** fueron publicados en el trabajo *Effect of magnetic fields on equatorial circular orbits around Kerr spacetimes*, "Relativity and Gravitation: 100 years after Einstein in Prague", J. Bičák y T. Ledvinka Eds., Springer Proceedings in Physics, **157**, 435, (2014) que fue realizado junto con H. Vucetich. Los resultados presentados en el capítulo **Capítulo 11** están basados en el trabajo *Magnetised Accretion Discs in Kerr's Spacetime*, Astronomy and Astrophysics, **574**, A40, (2015) realizado en colaboración con Federico García. Algunos de los resultados de este trabajo más amplio fueron aceptados para formar parte de los proceedings del *Second Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology*, desarrollado en Buenos Aires, Argentina en abril de 2014 bajo el título *Thermal emission and line profiles from magnetized accretion disks*.

En la **Parte IV** expondremos algunas conclusiones y posibles áreas en las que se pueda profundizar los estudios en esta tesis presentados.

Quiero mencionar que realicé gran parte de las figuras que aparecen en esta tesis a mano, no por falta de tiempo, sino porque las encuentro estéticamente más interesantes y porque creo que le aportan algo de calidez al trabajo.

*Es una de las pequeñas ironías de nuestro tiempo que mientras que el hombre común estaba siendo adoctrinado con el estereotipo de los agujeros negros como monstruosidades, los profesionales estuvieron oscilando alrededor de la mirada casi diametralmente opuesta de que los agujeros negros, como la vejez, no son en realidad tan malos cuando se analizan las otras alternativas.*

Werner Israel.

La teoría general de la relatividad, desarrollada durante casi una década y publicada a finales de 1915 por Albert Einstein, es la teoría relativista de la gravedad clásica aceptada por la mayoría de la comunidad científica. La misma ha superado la infinidad de comparaciones contra datos experimentales que se han realizado durante un siglo. Esto la ha vuelto una teoría de la gravitación robusta y completamente vigente en la actualidad. Hay que remarcar que la mayoría de las comparaciones se realizaron en el límite de campos débiles, en lo que suele denominarse gravedad pos-Newtoniana. Sin embargo, los avances tecnológicos pueden hacer que esta situación cambie rápidamente en los próximos años. Además, no podemos dejar de decir que una de las bases fundacionales de la teoría, el principio de equivalencia, también ha sido testada hasta niveles de una enorme precisión (ver [2] y las referencias que allí se mencionan).

Antes de lograr la versión final de su teoría, en la cual representa al espaciotiempo como una variedad real, cuadridimensional y suave, dotada de una métrica pseudo-Riemanniana, es decir una en la que en cualquier punto de la variedad es posible elegir coordenadas de modo que localmente la métrica del espaciotiempo se corresponda con la del espaciotiempo llano de Minkowski, Einstein tuvo varios intentos fallidos. Es interesante notar que, para el año 1912, luego de su paso por Praga, ya había logrado comprender algunos aspectos fundamentales que la misma debía poseer. Teniendo en mente aspectos de las superficies curvas como:

1. el hecho de que cualquier superficie curva se asemeja a un plano cuando uno analiza el entorno de cualquier punto de la misma y
2. que la suma de los ángulos internos de un triángulo se vuelve cada vez más similar a  $\pi$  cuando el área del mismo se vuelve pequeña ya que la diferencia es proporcional al área del mismo y al radio de curvatura de la superficie,

se había convencido de que cualquier región de un espaciotiempo curvo debería asemejarse “localmente” al de Minkowski.

Durante la estadía en Praga, Einstein también había conseguido interpretar el significado y la importancia de las geodésicas nulas en el estudio de la estructura causal del espaciotiempo.

Para lograr completar las partes del rompecabezas, Einstein estudió durante unos 3 años, junto con su amigo Marcel Grossmann, aspectos asociados con espacios curvos, área de la matemática desarrollada, en gran medida, por Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Finalmente, logró condensar sus ideas en un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen cómo la presencia de materia curva al espaciotiempo y cómo esa curvatura afecta la dinámica de las partículas y los campos que se propagan en él. Las ecuaciones que hacen este trabajo pueden escribirse del siguiente modo:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Analicemos, brevemente, a este conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones de campo de Einstein sin el término de constante cosmológica,  $-\Lambda g_{\mu\nu}$ .<sup>1</sup> En el miembro derecho de esta relación entre matrices  $4 \times 4$  (ya que estamos pensando en un espaciotiempo 4-dimensional), se encuentra condensada toda la información sobre *el contenido* de partículas y campos presentes. La misma es descrita por medio del tensor de energía-impulso,  $T_{\mu\nu}$ . El miembro izquierdo, por el contrario, contiene las propiedades *geométricas* del espaciotiempo. Los tensores que aparecen son: el de Einstein,  $G_{\mu\nu}$ , el de Ricci,  $R_{\mu\nu}$  y el métrico,  $g_{\mu\nu}$ ; y el escalar de Ricci,  $R$ . Todos estos están relacionados con el tensor de Riemann,  $R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}$ , que contiene toda la información sobre la curvatura del espaciotiempo.

A través de la teoría general de la relatividad, Einstein desarrolla los conceptos de espaciotiempo y gravedad e investiga la manera en que ellos se relacionan entre sí. De manera muy simplificada, la idea central que se maneja es que, al contrario de lo que pasa con las otras interacciones de la naturaleza, la gravedad no se representa como un campo *definido* en el espaciotiempo, sino que la gravedad se desprende como una propiedad intrínseca de él. Entonces, lo que antes quedaba descrito por un campo gravitatorio, ahora será interpretado como un efecto debido a la curvatura del espaciotiempo. Einstein llegó a esta conclusión notando lo siguiente: el espaciotiempo de Minkowski no es compatible con el enrojecimiento gravitacional

---

<sup>1</sup>Hoy en día la mayoría de los cosmólogos prefiere colocar este término en el miembro derecho de (1.1) ya que se lo asocia con la contribución al tensor energía-impulso,  $T_{\mu\nu}$ , que realiza la, mal llamada, *energía oscura*.

que la luz debe sufrir en presencia de un campo gravitacional ya que en él todos los observadores<sup>2</sup> que se encuentren en reposo respecto a un marco inercial de referencia deben medir la misma frecuencia para una dada señal luminosa. Otro ingrediente fundamental de la teoría es el principio de equivalencia, que postula que [8]: *en todos los puntos del espaciotiempo, sin importar el campo gravitatorio, se puede elegir un sistema de coordenadas localmente inercial donde todas las leyes de la naturaleza tengan la misma forma que en un sistema coordinado cartesiano no acelerado y en ausencia de gravedad.*

No queremos dejar de mencionar que el matemático David Hilbert obtuvo, independientemente y siguiendo razonamientos matemáticamente mucho más claros, basados en el principio de mínima acción, las ecuaciones de Einstein (1.1).<sup>3</sup> Es por esta razón que en algunos libros las ecuaciones fundamentales de la teoría reciben el nombre de ambos descubridores, además, al presentar este mecanismo para obtener las ecuaciones de Einstein se hace mención a la acción de Hilbert o de Einstein-Hilbert. En la actualidad, siguiendo razonamientos análogos al utilizado por Hilbert, se comenzó a explorar una nueva rama de teorías que generalizan (en la forma más simple) a la de la teoría general de la relatividad: las conocidas como teorías  $F(R, T)$ , ver por ejemplo [3].

A continuación, enumeramos algunos de los logros y verificaciones más relevantes de la teoría:

- I Logró explicar *el problema* de los 43'' por siglo adicionales en la rotación del perihelio de Mercurio.
- II Una serie de experimentos confirmaron la predicción realizada en relación a la deflexión de la luz debido a la curvatura del espaciotiempo. Los mismos comenzaron con la campañas lideradas por los astrónomos ingleses Arthur Stanley Eddington y Frank Watson Dyson en las que, durante el eclipse total de Sol de 1919, observaron, desde Principe (una isla cerca de la costa oeste de África) y Sobral (Brasil) respectivamente, a las Hyades, detectando un corrimiento en la posición esperada de sus estrellas consistente con lo predicho por la teoría de Einstein.<sup>4</sup> Si bien los datos estadísticos no eran muchos (7 estrellas de las observaciones de Sobral y 5 de Principe), ambos resultados se encontraban dentro de dos desviaciones estándar de la predicción de la teoría general de la relatividad y más allá de dos desviaciones estándar de los resultados nulos que predice la gravitación Newtoniana [4].
- III Con el experimento *Gravity Probe B* se lograron comprobar experimentalmente dos predicciones de la teoría general de la relatividad: el efecto geodésico predicho por Willem de Sitter en el año 1916 (y generalizado unos años después por los físicos holandeses Jan Arnoldus Schouten y Adriaan Daniël Fokker), relacionado con la curvatura que nuestro planeta produce sobre el espaciotiempo; y el arrastre de los sistemas inerciales o efecto Lense-Thirring (predicho por el mismo Einstein junto con Josef Lense y Hans Thirring) debido a que la Tierra posee momento angular.<sup>5</sup> Estos dos efectos producen la precesión del eje de rotación de un giróscopo, la misma fue medida por medio de 4 giróscopos de alta precisión colocados en el satélite *Gravity Probe B* en el año 2011. La concordancia entre los resultados experimentales y lo predicho por la teoría general de la relatividad corresponde a un 0.28 % de error para el efecto geodésico y un 19 % de error para el efecto Lense-Thirring [5].
- IV Aunque no existen, al momento de escribir esta tesis, evidencias directas de la existencia de ondas gravitacionales (otra predicción de la teoría general de la relatividad), sí se poseen evidencias indirectas de las mismas. La concordancia entre los cálculos teóricos y las mediciones del aumento del período

---

<sup>2</sup>Utilizaremos el concepto de observadores como un permiso literario, deberíamos, en realidad, hablar de sistemas de referencia.

<sup>3</sup>Debe destacarse, sin embargo, que fue Einstein quien hizo predicciones con esta nueva teoría y permitió dar una explicación (simple) a observaciones astronómicas que hasta el momento no habían podido ser explicadas de modo satisfactorio.

<sup>4</sup>Interesante, astrónomos ingleses intentando validar la teoría de un físico alemán a poco más de un año de finalizada la Primera Guerra Mundial.

<sup>5</sup>La teoría general de la relatividad afirma que la materia que se encuentra en rotación o movimiento produce, respectivamente, una contribución al campo gravitacional análoga a un dipolo magnético o al campo de inducción magnética de una partícula en movimiento. Esta contribución al tensor métrico puede interpretarse en forma completamente análoga al potencial vector electrodinámico. Así, este efecto contribuirá (a primer orden no nulo) con una aceleración con las mismas propiedades que las que sufren partículas cargadas en presencia de campos de inducción magnética. Esto, sumado al efecto de *arrastre de sistemas inerciales* debido a la rotación de un objeto masivo, produce la precesión del eje de rotación de un giróscopo. La *desviación geodésica*, esto es, la precesión que sufre el eje de un giróscopo al moverse en un espaciotiempo curvo. La diferencia central entre estos efectos es que el segundo es debido únicamente a la presencia de una masa central mientras que para el primero la rotación es fundamental. En el experimento *Gravity Probe B*, los giróscopos fueron colocados de forma que este efecto se produzca en el plano orbital del satélite mientras que el correspondiente al otro ocurra de forma perpendicular.

orbital de varios sistemas binarios de estrellas de neutrones (dos de los más famosos son los denominados PSR B1913+16 o púlsar doble de Hulse-Taylor<sup>6</sup> y PSR B1534+12) son algunas de ellas (ver, por ejemplo, [6] y referencias allí mencionadas). En la comunidad de relativistas se espera ansiosamente la primera detección directa de una onda gravitacional, para lo cual se han desarrollado algunos de los detectores más sensibles que el hombre haya jamás construido: los experimentos LIGO, VIRGO, etc.

Entre las muchas formas de poner a prueba a la validez del principio de equivalencia, haremos mención a la relacionada con el efecto Nordtvedt [9] propuesto por Kenneth Leon Nordtvedt. Haremos énfasis en el estudio relacionado con los asteroides Troyanos de Júpiter. La conclusión general del efecto Nordtvedt es que si el principio de equivalencia no fuese válido, dicha violación redundaría en un corrimiento de los puntos de Lagrange  $L_4$  y  $L_5$  hacia la posición del planeta Júpiter de aproximadamente 1 segundo de arco. En [10] se analizaron las órbitas de 12 asteroides y se obtuvieron resultados consistentes con la igualdad entre la masa inercial y la gravitatoria, es decir se aportó una verificación independiente al principio de equivalencia.

En cuanto a los agujeros negros, estas soluciones a las ecuaciones de Einstein son centrales para este trabajo de tesis así que dedicaremos parte de lo que resta a esta Introducción a describir algunos aspectos de las mismas junto con consideraciones históricas.

Aunque su naturaleza no fue completamente comprendida hasta los primeros años de la década de 1960, la primera solución matemática que describe un agujero negro es la descubierta en el año 1916 por Karl Schwarzschild, pocos meses luego de que las ecuaciones fundamentales de la teoría general de la relatividad fueran publicadas. A diferencia de lo que se dice en algunas publicaciones, los “objetos oscuros” propuestos por John Mitchell y Pierre-Simon Laplace a finales del siglo XVIII, no deben considerarse agujeros negros como son entendidos en la actualidad. Sin ignorar ni la enorme cuota de imaginación ni la capacidad que tuvieron estos dos científicos de, utilizando el razonamiento, no sólo dilucidar características y propiedades de objetos de estudio complejos sino de poder, además, realizar predicciones relevantes, debe quedar claro que los agujeros negros son objetos *puramente relativistas* y que, contrario a lo que en ocasiones se deja entrever, de ninguna manera pueden ser predichos utilizando la teoría clásica de la gravitación de Newton.

Continuando con un poco de historia relacionada con las soluciones que representan agujeros negros debemos destacar que, al poco tiempo de que fuera obtenida la solución de Schwarzschild, Hans Jacob Reissner y Gunnar Nordström obtuvieron, en forma independiente, la solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describe a un agujero negro estacionario con carga eléctrica y esféricamente simétrico. Dicha solución queda completamente descrita por su masa,  $M$ , y su carga eléctrica,  $Q$ . Si bien esta, como la descubierta por Schwarzschild, posee una singularidad de curvatura en  $r = 0$ , su estructura causal es radicalmente diferente, siendo su estructura de horizontes mucho más compleja. La solución de Reissner-Nordström posee un horizonte de eventos ubicado en  $r_{\text{HE}} = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  y un segundo horizonte, llamado de Cauchy, en  $r_{\text{HC}} = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ . Presentaremos, más adelante, de modo más detallado espaciotiempos que presentan esta estructura de doble horizonte más adelante, ya que ésta es compartida con la descubierta por Roy Patrick Kerr. Podemos notar que los horizontes desaparecen cuando  $Q^2 > M^2$ , en este caso diremos que el espaciotiempo representado por esta solución no corresponde a un agujero negro sino a una singularidad desnuda, en el sentido que la singularidad de curvatura se encuentra conectada causalmente con observadores en el infinito.

Hubo que esperar casi 45 años (e importantes avances en relación a la comprensión de la teoría general de la relatividad) para que una nueva solución que represente un agujero negro fuera descubierta. El responsable de esto fue el físico/matemático neozelandés Roy Patrick Kerr que obtuvo la solución que permite describir el campo gravitacional exterior a un objeto en rotación. Esta solución es una de las más importantes para la astrofísica ya que, como sabemos, todos los objetos estelares rotan, por lo que es de esperar que, si los agujeros negros se forman del colapso gravitacional de estrellas, todos los agujeros negros se encuentren rotando rápidamente.

El espacio tiempo de Kerr también posee una singularidad de curvatura, pero su geometría es mucho más compleja que la de las otras soluciones que mencionamos, en este caso la misma tiene la estructura de un anillo. En general toda la estructura causal de este espaciotiempo se caracteriza por poseer un mayor

---

<sup>6</sup>En el año 1993, Joseph Hooton Taylor, Jr. y Russell Hulse obtuvieron el premio Nobel de física por su explicación de las observaciones que se tenían del púlsar binario PSR B1913+16 y representan evidencias indirectas de la existencia de ondas de gravedad. La diferencia entre las observaciones en el aumento del período orbital y las pérdidas de energía debidas a radiación de ondas gravitatorias es consistente con un error menor al 0.2% [7].

grado de complejidad que las anteriores aunque comparte muchas características con la solución de Reissner-Nordström. La historia de cómo se obtuvo esta solución es interesante y vale la pena destacar que en dicha tarea estuvieron involucrados personalidades que eran referentes del momento en materia de gravitación (ver detalles en [11] y el **Capítulo 2** de esta tesis). Entre las que se conocen, la solución a las ecuaciones de Einstein obtenida por Kerr es, probablemente, la solución exacta a una ecuación en derivadas parciales no lineal más complicada que sirve para modelar un objeto real.

Las singularidades intrínsecas presentes en los agujeros negros que describimos brevemente, no tienen únicamente diferencias en aspectos geométricos, sino que su naturaleza causal es diferente. La presente en los agujeros negros de Schwarzschild es de tipo espacial, mientras que la de los agujeros negros de Reissner-Nordström y de Kerr son tipo tiempo. Las singularidades tipo espacio son inevitables para una partícula (sea masiva o no) una vez que ésta atraviesa el horizonte de eventos, si esto ocurre, la misma tendrá dicha singularidad *en su futuro*. Las singularidades tipo tiempo, por el contrario, son evitables y las condiciones para que una partícula libre “choque” contra la singularidad son muy particulares.

Los agujeros negros, bautizados de este modo en 1967 por John Archibald Wheeler, fueron durante muchos años considerados como soluciones matemáticas a las ecuaciones de campo de Einstein que no servían para modelar ningún objeto en el Universo. En sus inicios estos objetos no fueron tenidos en cuenta como potenciales modelos con relevancia astronómica, entre otras cuestiones porque nadie lograba concebir que en la naturaleza se pudieran dar las condiciones necesarias para formar objetos completamente colapsados por acción de la gravedad. Hoy existen fuertes argumentos para afirmar que los agujeros negros son, sin lugar a dudas, una de las predicciones más fascinantes de la teoría general de la relatividad.

Junto con los agujeros negros han sido propuestas otras familias de candidatos teóricos que podrían ser el resultado final de un proceso de colapso gravitatorio completo. Cada uno de ellos posee, como es de esperar, sus ventajas y desventajas relativas. Buscar argumentos teóricos y observacionales que nos permitan descartar algunos de estos modelos es una tarea que, también, merece atención.

Además de las evidencias observacionales (incluso antes que éstas) algunos resultados teóricos daban indicios claros de la necesidad de objetos más compactos que las enanas blancas o las estrellas de neutrones. Estos trabajos mostraban, además, que bajo ciertas condiciones se debería producir un colapso gravitatorio completo de la materia que forma un objeto estelar, formando, potencialmente, un agujero negro. El principal motivo de esto se encuentra relacionado con la existencia de una masa máxima a partir de la cual, sin importar la ecuación de estado que se utilice para describir a la materia, tanto las estrellas de neutrones como las enanas blancas no son estables. Los resultados clásicos relacionados con estos temas son los que fueron obtenidos por Subrahmanyan Chandrasekhar, Lev Davidovich Landau, Wilhelm Heinrich, Walter Baade y Fritz Zwicky, Julius Robert Oppenheimer, George Michael Volkov y Richard Chace Tolman y J.R. Oppenheimer y Hartland Sweet Snyder durante la década de 1930 [12]. A pesar de que es el paradigma actual, no hay fundamentos teóricos ni observacionales concluyentes que permitan afirmar que todos los objetos compactos que se producen en un colapso gravitatorio completo pueden modelarse con agujeros negros como los predichos por la teoría general de la relatividad.

Actualmente se conoce una serie de escenarios astronómicos que podrían dar lugar, como punto final de la evolución del mismo, a objetos compactos como enanas blancas, estrellas de neutrones (o de cuárks) e inclusive objetos completamente colapsados debido a la gravedad.

Desde una mirada astronómica, los agujeros negros son los objetos más compactos que conocemos,<sup>7</sup> por este motivo son objetos ideales para realizar estudios que sirvan para poner a prueba las predicciones de campo fuerte que realiza la teoría general de la relatividad. En un intento de dar evidencias observacionales de la existencia de estos objetos se han desarrollado técnicas que permiten medir, no sólo la masa de estos objetos ultra compactos sino también su momento angular, pudiendo de esta manera obtener el parámetro de rotación,  $a$ .

Desde el punto de vista teórico aparecieron, entre otros, una serie de interrogantes relacionados a los agujeros negros: ¿cómo es el proceso de formación de estos objetos?, ¿las estrellas pueden lograr las condiciones necesarias para formar un objeto completamente colapsado?, ¿cómo es la evolución (si existe) de este tipo de objetos?, ¿resultan estables frente a perturbaciones lineales?, ¿son las únicas soluciones posibles en el

---

<sup>7</sup>Para dar un ejemplo numérico (que dé una idea del orden de magnitud de cuán “compacto” debe ser uno de estos objetos) debemos tener en cuenta que, para formar un agujero negro, un objeto con la misma masa que el Sol debería ocupar el volumen de una esfera cuyo radio sea algo menor a 3 kilómetros.

marco de la relatividad general clásica que pueden explicar la evidencia observacional de objetos compactos hoy disponible? Para algunos de ellos se han obtenido respuestas y otros quedan aún abiertos y son objeto de interesantes debates. Esta tesis intenta dar indicios que aporten a responder a una de las preguntas más importantes que quedan por resolver en el marco de la teoría general de la relatividad clásica: ¿es válida la *conjetura de censura cósmica* de Penrose?

Para presentar la conjetura de censura cósmica resulta imprescindible, primero, introducir otro tipo de soluciones que la teoría general de la relatividad admite y que tienen, en principio, la misma validez matemática que los agujeros negros: las *singularidades desnudas*. En esta tesis desarrollaremos en detalle las características principales de estos objetos, pero en este momento las presentaremos de modo simple y no completamente formal.

Las singularidades desnudas son descritas por las mismas soluciones matemáticas que los agujeros negros, la única diferencia es el rango de valores que adoptan las constantes de integración ( $M$ ,  $a$  y  $Q$ ) que definen dicha solución. Dado que vamos a trabajar mayormente con el espaciotiempo de Kerr nos centraremos, por el momento, en describir algunas de las propiedades relevantes de esta solución.

Una característica fundamental de un agujero negro, es que posee un *horizonte de eventos*, que actúa como una membrana semi-permeable que permite que partículas (masivas o no) y cualquier tipo de señal puedan cruzarla en una dirección, pero no en la otra. Diremos que el horizonte de eventos del agujero negro *desconecta causalmente* dos regiones del espaciotiempo. En el caso en que describimos al agujero negro de Kerr ( $a^2 \leq M^2$ ) utilizando las coordenadas de Boyer-Lindquist, la posición de este horizonte de eventos se encuentra en la mayor de las raíces de la ecuación  $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ , que son  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ . La raíz interna,  $r_-$ , tiene una naturaleza diferente y recibe el nombre de *horizonte de Cauchy*, al que también denotaremos con  $r_{\text{HC}}$  en partes de esta tesis. Cuando  $a^2 > M^2$ , dichos horizontes desaparecen, esta familia de soluciones se denominan singularidades desnudas de Kerr (SDK).<sup>8</sup>

Este tipo de soluciones presentan características físicas no deseables para un modelo que pretende describir objetos reales. Para el caso de un SDK, por ejemplo, aparecen violaciones potenciales a un principio físico de enorme importancia: el de causalidad. Estas situaciones, entre otras, son las que llevaron a Sir Roger Penrose a formular su conjetura de censura cósmica que, en una de sus tantas maneras de formularse postula, de modo poco formal, que: *del colapso gravitacional de materia normal sólo se puede obtener como resultado final un objeto cuya singularidad de curvatura está cubierta por un horizonte de eventos*.

Otra gran área de interés está asociada con la estabilidad de estas soluciones. La razón fundamental de nuestro interés por estudiar la estabilidad de soluciones dentro de un cierto modelo físico radica en que con ellas pretendemos representar objetos que existen en la naturaleza. Existen indicios de que los objetos compactos de los que hay evidencias observacionales deben ser estables frente a una enorme cantidad de perturbaciones de diversa naturaleza. Por tal motivo debemos poner a prueba nuestros modelos teóricos para asegurarnos de que las soluciones que de ellos se desprenden resulten estables frente a perturbaciones (lineales). Si una solución matemática en un dado modelo no cumple con este requisito, difícilmente pueda ser tenido en cuenta como una posible forma para representar un objeto o fenómeno real.

Podemos resumir que, tanto para intentar dar fundamentos apropiados a aspectos teóricos básicos relacionados con los agujeros negros, como para comprender las aplicaciones astrofísicas que tiene la física de agujeros negros, es importante dar respuesta a algunas preguntas centrales y a aspectos que de ellas se desprenden. ¿Cuál es el destino final del colapso gravitatorio de estrellas de gran masa? y ¿cuál es el comportamiento frente a perturbaciones lineales de los objetos obtenidos de esta forma? Los capítulos centrales de esta tesis están abocados a aportar resultados que ayuden a responder a estos dos interrogantes.

---

<sup>8</sup>Otros espaciotiempos (el de Schwarzschild cuando  $M < 0$  o el de Reissner-Nordström cuando  $Q^2 > M^2$ ) que presentan singularidades de curvatura conectadas causalmente con el resto del espaciotiempo reciben, también, el nombre genérico de singularidades desnudas.

## Parte I

# Generalidades teóricas



# Breve descripción de la primera parte

*¡Oh!, perdón, ya que una reducida figura ha de representarnos un millón en tan pequeño espacio, y permitidme que contemos como cifras de ese gran número las que forje la fuerza de vuestra imaginación.*  
William Shakespeare, Enrique V (Primer Acto)

En esta parte de la tesis pretendemos exponer aspectos teóricos que caracterizan generalidades de la teoría general de la relatividad, la solución a sus ecuaciones fundamentales con la que vamos a trabajar y las herramientas que se han desarrollado para estudiar perturbaciones a la misma. Además, presentaremos resultados relevantes para el planteo de las preguntas a las que pretendemos aportar respuesta en este trabajo.

En el **Capítulo 2** describiremos al espaciotiempo de Kerr, sus características básicas, sus tres regímenes (subextremo  $a^2 < M^2$ , extremo  $a^2 = M^2$  y súper extremo  $a^2 > M^2$ ).

En el **Capítulo 3** presentaremos dos versiones de la conjetura de censura cósmica postulada por Penrose. Esta conjetura es uno de los problemas abiertos más importantes en el marco de la teoría clásica de la relatividad general.

Finalmente, en el **Capítulo 4** desarrollaremos desde un punto de vista técnico el concepto de singularidad en un espaciotiempo o, mejor dicho, el concepto de espaciotiempo singular.



## Capítulo 2

# El espaciotiempo de Kerr

*En mi vida como científico, que se extiende por más de 45 años, la experiencia más conmovedora fue constatar que la solución exacta a las ecuaciones de Einstein, descubierta por el matemático neozelandés, Roy Kerr, provee la representación exacta de la enorme cantidad de agujeros negros que existen en el universo. Este “estremecimiento ante la belleza”, este hecho increíble de que un descubrimiento motivado por la búsqueda de la belleza en la matemática encuentra su correlato en la Naturaleza, hace que me lleve a decir convencido que la belleza es a lo que la mente humana responde en su límite más profundo. Es más, esto que intento decir es afirmado de forma más breve en estos lemas en latín:*

*- **Simplex sigillum veri** - La simpleza es el sello de la verdad.*

*- **Pulchritudo splendor veritatis** - La belleza es el esplendor de la verdad.*

Subrahmanyan Chandrasekhar, “Shakespeare, Newton, and Beethoven or patterns of creativity”.

### 2.1. Introducción

En el marco de la teoría clásica de la relatividad general, la solución de agujero negro estacionario más general en electro-vacío (es decir que los únicos campos externos considerados son de Maxwell) es la de Kerr-Newman que describe un agujero negro eléctricamente cargado y en rotación. Esta solución, obtenida en el año 1965 por Ezra Theodore Newman y sus colaboradores, queda totalmente descrita por 3 parámetros:  $M$  asociado con la masa,  $a$  con el momento angular por unidad de masa y  $Q$  con la carga eléctrica. Una vez que alcanzan el estado estacionario dos agujeros negros con los mismos parámetros son indistinguibles entre sí sin importar la historia que llevó a la formación de cada uno ni los objetos que le dieron origen, como se dice: *los agujeros negros no tienen pelos*. De este modo podemos ver lo simple de describir que resultan, en palabras del genial astrofísico Chandrasekhar: “los únicos objetos macroscópicos que son descritos de modo exacto por una teoría física”.

A pesar de no ser la solución más general que conocemos, teniendo en cuenta que la evidencia nos muestra que, cuando no se encuentran aislados, los objetos macroscópicos eléctricamente cargados suelen, por medio de acreción de partículas con carga de signo opuesto u otro mecanismo, neutralizarse. Dado que los modelos que tenemos actualmente predicen la formación de discos de acreción (o al menos alguna distribución de material) en torno a objetos que se forman por colapso gravitatorio, es razonable pensar que los agujeros negros no son una excepción a esa regla. Por tal motivo, no esperamos que agujeros negros eléctricamente cargados tengan vidas medias grandes (del orden de los 30 años para un agujero negro de 10 masas solares [13]). Además otros fenómenos, como el de producción de pares de Schwinger (el mismo fenómeno por el que

se descargan núcleos atómicos que poseen  $Z \gg 137$ ) acelerarían este proceso de descarga [14]. Dicho esto, no es de esperar que agujeros negros cargados existan en el universo o al menos no resulta factible pensar en la posibilidad de poder distinguirlos en forma observacional de sus compañeros neutros [15]. Por este motivo podemos concluir que el agujero negro con *mayor relevancia astronómica* es el de Kerr, descrito, como dijimos, completamente por su masa y su momento angular. El espaciotiempo de Kerr y sus características es el objeto central de estudio de este trabajo de tesis doctoral en astronomía.

La historia del descubrimiento de la hoy conocida como solución de Kerr, es larga y muy interesante. Presentaremos un breve resumen de la misma, sus principales momentos y algunas anécdotas que consideramos interesantes.

Uno de las personas que más trabajó en el problema de obtener el campo gravitacional de una masa puntual en rotación, es decir, una generalización apropiada para la métrica de Schwarzschild, fue el físico griego Achilles Papapetrou. Papapetrou, su grupo de colaboradores y otros físicos trabajaron durante cerca de 30 años intentando dar una respuesta al interrogante sin poder responderlo de forma completa. Sin embargo, realizaron una serie de avances en la comprensión de soluciones con simetría axial a las ecuaciones de Einstein, de las cuales, hacia finales de la década de 1950, no se sabía mucho. Los trabajos que pueden citarse, y que formaban “la literatura” en ese momento son: el trabajo de Cornelius Lanczos [18] del año 1924, el de T. Lewis [19] de 1932, el de Williem Jacob van Stockum [20] del año 1937, el de Achilles Papapetrou [21] de 1953 y el de Jürgen Ehlers [22] de 1957. Existían, además, trabajos anteriores que habían atacado el problema de buscar soluciones aproximadas al problema general, siendo W.R. Andress y Edward S. Akeley dos de los que realizaron aportes significativos [23].

El cambio de enfoque que permitió a Kerr resolver el problema de encontrar la “solución de Schwarzschild en rotación”, fue utilizar el formalismo de tetradas. Según el propio Kerr [24], los estudios que concluyeron con la solución obtenida en 1963 se remontan al trabajo de Aleksei Zinovyevich Petrov [25] en el que el autor desarrolló la (hoy conocida como) clasificación de Petrov. Kerr, al contrario que los otros que intentaron, se restringió al estudio de métricas algebraicamente simples, por este motivo utilizar el formalismo de tetradas resultó de vital importancia. Esta simplificación, lo llevó a un sistema de ecuaciones complicadas de resolver pero que, gracias a su perseverancia, lo llevaron a realizar un descubrimiento fascinante y que sirve como modelo teórico para describir una enorme variedad de fenómenos astronómicos, incluidos algunos de los más energéticos que actualmente conocemos.

Luego de unos años de trabajo intenso, durante su paso por la Universidad de Texas en Austin, Kerr obtuvo la “tan esperada” solución (sin saber que la misma era la única) y obtuvo, finalmente, el campo gravitacional producido por una masa puntual en rotación.

Kerr presentó, por primera vez, su solución en el “*First Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*”, una reunión que se desarrolló en Dallas en diciembre del año 1963 ante un público muy poco entusiasta. En [26] Kip Thorne describe sus recuerdos al respecto de la exposición de Kerr:<sup>1</sup>

*Para fomentar el diálogo entre relativistas y astrónomos [...] se realizó en Dallas, Texas [...] una reunión con más de 300 asistentes pensada para discutir sobre los cuásares [...] Las presentaciones se extendían desde las 8:30 de la mañana hasta, aproximadamente, las 2:00 de la mañana con una interrupción de una hora para almorzar [...] entre las muchas charlas, un joven matemático neozelandés, desconocido por la mayoría de los otros participantes, llamado Roy Kerr, tenía asignada una exposición breve, de 10 minutos. Kerr acababa de descubrir una nueva solución a las ecuaciones de Einstein - una década más tarde, esta solución serviría para explicar las propiedades de agujeros negros [...]. Pero en 1963, la solución de Kerr no parecía más que una curiosidad matemática, no se sabía siquiera que describía un agujero negro - [...]*

*[...] cuando Kerr comenzó su charla, muchos se escaparon del auditorio para discutir [...] otros, menos respetuosos, se quedaron murmurando dentro del auditorio. Otros dormitaron [...] Sólo unos pocos relativistas lo escucharon, con gran atención.*

*Esto fue más de lo que Achilles Papapetrou, uno de los relativistas más reconocidos en el mundo, pudo soportar. Cuando Kerr terminó, Papapetrou exigió la palabra [...], explicó la importancia del descubrimiento de Kerr. Él, Papapetrou, había intentado, como muchos otros relativistas, durante 30 años obtener dicha solución sin éxito. Los astrónomos asintieron con la cabeza en*

<sup>1</sup>Traducción y adaptación del texto original.

*forma respetuosa y, cuando el siguiente expositor, comenzó a presentar una teoría sobre cuásares, volvieron a prestar atención y la reunión volvió a su funcionamiento normal.*

Podemos afirmar, sin temor a equivocarnos, que, a partir de este momento, los caminos de los relativistas y el de los astrónomos quedaron, sin lugar a dudas, íntimamente vinculados.

Como ya mencionamos, los modelos de evolución estelar actuales predicen la formación de un agujero negro como estado final de una estrella extremadamente masiva. Podemos suponer, además, que el estado final, producto de un colapso gravitacional de estas estrellas podrá ser descrito por un espaciotiempo estacionario. Podemos imaginar, también, que la configuración inicial necesaria para describir, apropiadamente, a dicho objeto “inicial”, sea (arbitrariamente) compleja, en el sentido de que sea necesario conocer una cantidad (arbitrariamente) grande de momentos multipolares independientes para describir, apropiadamente, el campo gravitacional por ella producida.

Una serie de resultados, de gran importancia, fueron obtenidos, de forma independiente durante los primeros años de la década de 1970, por los físicos Brandon Carter [27] y David Clyde Robinson [28]. Los mismos pueden ser expresados en la forma del siguiente teorema:

**Teorema:** Si  $(\mathcal{M}, g)$  es un espaciotiempo asintóticamente llano, estacionario y con simetría axial, solución a las ecuaciones de Einstein de vacío y libre de singularidades fuera de un horizonte de eventos conexo, entonces,  $(\mathcal{M}, g)$  pertenece a la familia de soluciones biparamétrica de Kerr.

Este teorema nos motiva a esperar que *toda* la “información”<sup>2</sup> relacionada con la configuración inicial, excepto la masa,  $M$  y el momento angular,  $J$  deberá ser radiada (en forma de ondas gravitacionales) durante el proceso de colapso. Vemos, así, que la descripción de agujeros negros resulta (en algún sentido) extremadamente simple.

La solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describe al espaciotiempo exterior a un objeto que se encuentra en rotación fue encontrada, como ya dijimos, por Roy Patrick Kerr en el año 1963 y presentada en un extremadamente breve trabajo [29]. Esta solución describe un agujero negro en rotación y queda completamente descrita por dos parámetros  $M$  y  $J$  que, respectivamente, admiten ser interpretados como la masa y el momento angular del mismo.

Las coordenadas en las que Kerr describió, por primera vez, al espaciotiempo que hoy lleva su nombre y que representa a un objeto masivo en rotación, no son para nada intuitivos por lo que su interpretación física tampoco es para nada evidente. Por esta razón nosotros no presentaremos sus resultado como lo hizo él.

En física Newtoniana (donde la rotación es irrelevante en el sentido que uno puede ir a un sistema de coordenadas donde el objeto no esté rotando) es natural describir a un objeto con simetría esférica en rotación en torno a un eje fijo utilizando coordenadas espaciales esféricas  $r, \theta, \phi$  y una coordenada temporal  $t$ .

Este razonamiento puede utilizarse, también, para el caso donde se pretende estudiar al espaciotiempo de Kerr, esto nos lleva a utilizar las coordenadas conocidas como de Boyer-Lindquist. Del mismo modo que ocurre en el espaciotiempo de Schwarzschild, cuando uno no está interesado en describir un objeto como una estrella por lo que lo único relevante es, entonces, la métrica exterior o pretende estudiar al agujero negro, aparecen una serie de problemas con la elección de coordenadas ya que las mismas pueden tener singularidades inherentes a esta elección. A pesar de esto, este tipo de singularidades no son singularidades físicas y que describen superficies características de los agujeros negros, los horizontes de eventos.

Uno puede, sin embargo, extender el dominio de las coordenadas en el cual una dada métrica está definida. Pero para entender como construir estas extensiones se debe, primero, comprender la geometría del espaciotiempo, en especial las propiedades fundamentales de su o sus familias de geodésicas nulas principales.

---

<sup>2</sup>Las comillas hacen relación a que la *información* no es una propiedad de los sistemas físicos, sino una propiedad de una construcción humana, los *lenguajes*.

## 2.2. La métrica de Kerr

El elemento de línea del espaciotiempo de Kerr, descrito utilizando coordenadas de Boyer-Lindquist, se expresa de la siguiente manera:

$$ds^2 = -\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2,$$

donde  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ .

Las componentes del tensor métrico inverso vienen dadas por:

$$g^{rr} = \Delta/\Sigma, \quad g^{\theta\theta} = \Sigma^{-1},$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta}, \quad g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta}, \quad g^{t\phi} = -\frac{2Mar}{\Sigma \Delta}.$$

Presentamos algunas características del mismo:

- Cuando se anula el parámetro de rotación,  $a$ , la solución de Kerr se reduce a la de Schwarzschild.
- Posee las siguientes singularidades: el eje de simetría, donde  $\sin \phi = 0$  (un problema similar al que poseen las coordenadas esféricas). Presenta fallas en los puntos donde  $\Delta$  y  $\Sigma$  se anulan. Los ceros de  $\Delta$ , cuando existen, indican la posición del horizonte de eventos y del horizonte de Cauchy. Los puntos del espaciotiempo donde  $\Sigma$  se anula se conocen como singularidad física. La misma posee una geometría más compleja que el caso del agujero negro de Schwarzschild, ya que en este caso, como veremos más adelante, describe un anillo.
- Como el tensor métrico es independiente de las coordenadas  $t$  y  $\phi$ , se desprende que los campos vectoriales  $\partial_t$  y  $\partial_\phi$  son vectores de Killing. Así, la solución de Kerr presenta invariancia temporal y simetría axial.
- El espaciotiempo de Kerr es asintóticamente llano como se desprende del estudio del límite  $r \rightarrow \infty$ . En dicho límite la métrica de Kerr se reduce a la de Minkowski cualquiera sea el valor de  $M$  y  $a$ .
- Las fórmulas de Komar confirman que los parámetros  $M$  y  $J = aM$  son, respectivamente, la masa ADM y el momento angular del espaciotiempo.

Ahora centraremos nuestra atención al estudio de la estructura causal del espaciotiempo de Kerr o, hablando estrictamente, de la familia biparamétrica de espaciotiempos de Kerr. Tenemos, sin contar el caso sin rotación ( $a = 0$ ) en el que no estamos interesados, y dependiendo de la relación entre los parámetros  $M$  y  $a$ , tres casos diferentes a analizar. Si  $0 < a^2 < M^2$ , tenemos el que llamaremos *agujero negro de Kerr subextremo*, si  $a^2 = M^2$  el *agujero negro extremo de Kerr*, mientras que si  $a^2 > M^2$  la *singularidad desnuda de Kerr* o el *espaciotiempo de Kerr súper extremo*. Un primer indicio de las diferencias entre estos casos es la naturaleza de las raíces de la ecuación  $\Delta = 0$ , aunque las diferencias geométricas son, como veremos, más profundas.

La función  $\Delta$  tiene, en el caso subextremo, dos raíces reales diferentes ubicadas en  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ . En el caso extremo las mismas degeneran a una única raíz real doble ubicada en  $r = M$ , mientras que en el caso súper extremo  $\Delta$  no tiene raíces reales.

Al contrario de lo que ocurre en espaciotiempos con simetría esférica (como el de Schwarzschild o el de Reissner–Nordström), en el caso del espaciotiempo de Kerr  $r = 0$  no es un punto singular por lo que la coordenada radial puede extenderse a todo el eje real. De esta manera tenemos que  $r$  y  $t$  son coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^2$  y que  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas esféricas en la 2-esfera,  $S^2$ . Consideremos, entonces, la variedad  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ . En dicha variedad, la métrica de Kerr presenta fallas, únicamente, en los siguientes tres subconjuntos:

- Horizonte(s)  $H$ : Son las superficies donde se anula la función  $\Delta$ . Como veremos más adelante, puede mostrarse que, del mismo modo que en el agujero negro de Schwarzschild, estas son singularidades coordenadas. No están presentes en el caso del espaciotiempo súper extremo.

- La singularidad anillo  $A$ : Superficie caracterizada por la ecuación  $\Sigma = 0$ . La misma se cumple, únicamente, cuando  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  simultáneamente. Tenemos, pues, que  $\Sigma$  es el producto cartesiano de un círculo  $S^1$  (el círculo ecuatorial de radio  $r = 0$ ) y un eje temporal. Así,  $A = S^1 \times R^1$  es la “historia” de dicho círculo. La geometría del anillo queda en evidencia de manera mucho más clara, como veremos a continuación, cuando uno usa las llamadas coordenadas de Kerr-Schild.
- Eje  $E$ : Donde  $\sin \phi = 0$ . En este punto debemos hacer una distinción importante con el caso del espaciotiempo euclídeo de 3 dimensiones en el que  $\sin \phi = 0$  coincide, si se usan las convenciones tradicionales, con el eje cartesiano  $z$ . Ahora debemos recordar que la coordenada  $r$  toma valores negativos, por lo que tenemos *dos* de estos ejes.

Después, estudiaremos en detalle las diferencias entre estas singularidades, pero el análisis de uno de los invariantes escalares asociados al tensor de Riemann, el escalar de Kretschmann,  $K$ , nos sirve para distinguir entre singularidades coordenadas y físicas ya que el mismo presenta un comportamiento divergente, únicamente, en el anillo,  $A$ , como puede verse a partir de su expresión:

$$K \equiv R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\Sigma^2 - 16a^2r^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^6}.$$

Para estudiar ciertas características de este espaciotiempo —incluidos algunos de los subconjuntos singulares, resulta conveniente definir familias de observadores de tres tipos:

- los que poseen momento angular cero (OMAC),
- los estáticos,
- los estacionarios.

### 2.2.1. Los OMAC y el arrastre de los sistemas de referencia inercial

Como lo dice su nombre, los OMAC son observadores con momento angular nulo. Por este motivo, si uno define su 4-velocidad,  $u^a$ , se satisface la relación  $u_a \partial_\phi^a = 0$ , de manera que la condición  $g_{\phi t} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} = 0$  (con  $\dot{\phantom{x}}$  significando derivación respecto al tiempo propio  $\tau$ ) resulta válida. De esta manera tenemos que los OMAC poseen una velocidad angular,  $\Omega$ , dada por:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}}.$$

De esta expresión se desprenden las siguientes conclusiones:  $\Omega$  aumenta a medida que el observador se acerca al agujero negro y su dirección coincide con la del sentido de rotación que tiene el propio agujero negro. Como veremos, debido a esta propiedad, existe un punto a partir del cual observadores en reposo respecto a observadores lejanos no resultan posibles. Esta característica, que la solución de Kerr comparte con todas las soluciones que describen la geometría de objetos en rotación, se suele denominar genéricamente *arrastré de sistemas inerciales*.

A partir de las expresiones de las componentes del tensor métrico puede concluirse que, al alejarse lo suficiente del objeto central,  $\Omega \sim 2J/r^3$ . Debido a esto, vemos que este efecto desaparece por completo en el infinito o si la el momento angular del espaciotiempo se anula.

### 2.2.2. Observadores estáticos: superficie estática

Para que un observador sea considerado estático su 4-velocidad,  $u^a$ , debe ser proporcional al vector de Killing  $\partial_t$ . Entonces, imponiendo que la misma se encuentre apropiadamente normalizada, tenemos que:

$$u^a = (-g_{cd} \partial_t^c \partial_t^d)^{-1/2} \partial_t^a = \gamma \partial_t^a.$$

Claramente estos observadores no se mueven a lo largo de geodésicas y que un agente externo es el responsable de “mantenerlos en su lugar”.

Algo importante de notar es que este tipo de observadores no pueden existir en todo el espaciotiempo de Kerr ya que el vector  $\partial_t$  no es tipo tiempo en todo el espaciotiempo. Dicho vector se anula cuando

se satisface la ecuación  $g_{tt} = 0$ . La solución a esta ecuación define lo que se conoce como *límite estático*,  $r_{\text{est}} = M^2 + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ . De esto, se desprende que no importa cuan grande sea la fuerza externa que se aplique sobre una partícula, si  $r < r_{\text{est}}$  no será posible mantener estático a dicho observador. Así, el arrastre de los sistemas de referencia inerciales, obliga a que las partículas se encuentren, dentro de esta región, en rotación de modo similar al agujero negro. La región comprendida entre estas dos superficies ( $r_{\text{est}}$  y  $r = M^2 - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ ) recibe el nombre de *ergoesfera*, pero su topología cambia a la de un toro cuando  $a^2 > M^2$  y el espaciotiempo describe a una singularidad desnuda.

### 2.2.3. Observadores estacionarios: horizontes de eventos

Por último consideraremos observadores que se mueven en la dirección de la coordenada  $\phi$  con una velocidad angular arbitraria pero constante dada por  $\omega$ . Estos observadores, que llamaremos *estacionarios* reciben su nombre debido a que no perciben variación alguna en el campo gravitacional producido por el agujero negro. Los mismos se mueven con una 4-velocidad,  $u^a$ , dada por:

$$u^a = \gamma(\partial_t^a + \omega \partial_\phi^a) = \gamma K^a,$$

donde el vector  $K^a$ , por ser combinación lineal de vectores de Killing, también lo es. En este caso la constante de normalización,  $\gamma$ , no es la misma que en el caso estático. En esta oportunidad la misma está dada por  $\gamma = -g_{\phi\phi}(\omega^2 + 2g_{\phi t}/g_{\phi\phi}\omega + g_{tt}/g_{\phi\phi})$ .

Nuevamente, no es complicado notar que los observadores estacionarios no pueden existir en todo el espaciotiempo de Kerr ya que el vector de Killing,  $K^a$ , deja de ser tipo tiempo cuando  $\gamma^{-2} > 0$ . Esta condición le impone a la velocidad angular de dichos observadores, la siguiente restricción:

$$\omega_- < \omega < \omega_+,$$

donde:

$$\omega_{\pm} = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} \pm \frac{\sqrt{\Delta}\Sigma}{\mathcal{B} \sin \theta},$$

y

$$\mathcal{B} = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta.$$

Teniendo en cuenta que el vector  $\partial_t^a + \omega \partial_\phi^a$  se vuelve nulo en el horizonte de eventos,  $r_+$ , podemos concluir que los observadores que se encuentran justo afuera del horizonte de eventos se encontrarán rotando en forma sincrónica con el agujero negro. Por este motivo, su velocidad angular deberá coincidir con la del agujero negro que viene dada por:

$$\Omega_H \equiv -\frac{g_{t\phi}(r_+)}{g_{\phi\phi}(r_+)} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}.$$

### 2.2.4. Naturaleza de las singularidades

Ahora analizaremos cuales de los subconjuntos singulares que describimos anteriormente son debidos, simplemente, a problemas de las coordenadas que elegimos (motivo por el cual deberíamos ser capaces de extender la solución de manera analítica a través de ellos) y cuales son, por el contrario, singularidades físicas. Comenzaremos nuestra presentación con las últimas.

#### Singularidad de curvatura

El escalar  $K \equiv R_{abcd}R^{abcd}$  es, únicamente, divergente cuando  $\Sigma = 0$ , es decir cuando *simultáneamente* se cumplen las condiciones  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Esta es la singularidad de curvatura del espaciotiempo de Kerr. Vamos a presentar las coordenadas de Kerr-Schild, donde la naturaleza de la misma es más evidente.

La transformación a estas coordenadas se puede escribir del siguiente modo:

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta e^{i \int (d\phi + a/\Delta dr)}, \quad z = r \cos \theta, \quad \tau = \int (dt - (r^2 + a^2)/\Delta dr) - r,$$

donde la función  $r = r(x, y, z)$  queda determinada (implícitamente) por la ecuación:

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 = 0.$$

Esta ecuación define (a menos de un signo) la coordenada  $r$ . Cuando se utilizan estas coordenadas para representar al espaciotiempo, su elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left( \frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\tau \right)^2.$$

Presentada de esta manera vemos que la métrica no es singular en el eje de simetría (que en estas coordenadas está ubicado en los puntos  $x = y = 0$ ).

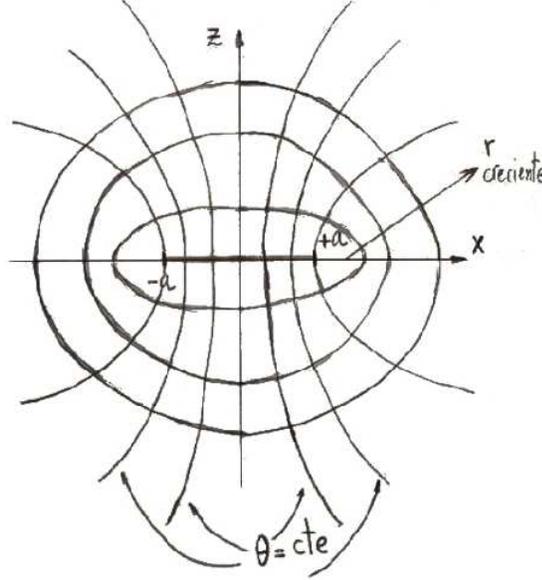


Figura 2.1: La singularidad anillo. Presentamos los elipsoides de  $r$ ,  $\tau$  constante así como las superficies de coordenada  $\theta$  constante.

Ahora pasemos a estudiar las superficies con coordenadas  $r$  y  $\tau$  constantes. Las mismas pueden representarse por medio de la ecuación:

$$x^2 + y^2 + \left( \frac{r^2 + a^2}{r^2} \right) z^2 - (r^2 + a^2) = 0,$$

y representan elipsoides, que degeneran al disco  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq a^2$  en el caso límite  $r = 0$  (ver la [Figura 2.1](#)).

De esta forma, vemos que la singularidad  $r = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  se corresponde con el anillo  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ ; de ahí el nombre que recibe.

Analicemos el límite en el que  $x^2 + y^2 < a^2$  y  $z \rightarrow 0^-$ ; podemos ver que en este caso:

$$r \sim \frac{az}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

así, vemos que exigir a la métrica que sea analítica impone la necesidad de que  $r$  también lo sea. Por este motivo, podemos concluir que cuando la coordenada  $z$  se vuelve negativa (y  $x^2 + y^2 < a^2$ ), la coordenada  $r$  debe, también, ser negativa (ver la [Figura 2.2](#)).

Analizando lo que ocurre con las coordenadas en la región del anillo vemos que *cruzar el disco* nos lleva a una región de espaciotiempo con coordenadas espaciales *primadas* con la misma forma, pero donde  $r(x', y', z') < 0$ . Vemos, entonces, que la región en la que  $r < 0$  es asintóticamente plana cuando  $r \rightarrow -\infty$ .

### Singularidades de coordenadas

Por una cuestión de simplicidad comenzaremos estudiando al eje,  $E$ . Estudios elementales de geometría nos permiten concluir que las coordenadas esféricas no son buenas para describir al eje. Veamos de que manera podemos extender analítica la métrica de Kerr en el eje. Para ello tomemos la parte del elemento de

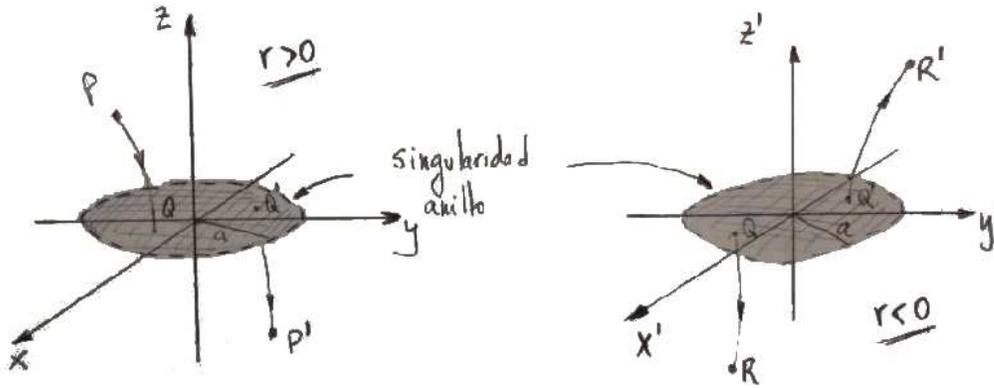


Figura 2.2: Geometría de la singularidad de anillo. Se presentan las regiones  $r > 0$  (izquierda) y  $r < 0$  (derecha) a la que se accede al atravesar el anillo. La forma en la que se realiza la extensión a la región  $r < 0$  exige que las curvas  $PQR$  y  $P'Q'R'$  sean analíticas.

línea correspondiente a la 2-esfera, es decir,  $\Sigma d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2$ . Si reemplazamos en ella la expresión de  $g_{\phi\phi}$ , obtendremos:

$$\Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2Mra^2 \sin^4 \theta}{\Sigma} d\phi^2.$$

Si ahora utilizamos la identidad  $r^2 + a^2 = \Sigma + a^2 \sin^2 \theta$ , obtenemos que:

$$\Sigma d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 = \Sigma d\Omega^2 + a^2 \sin^4 \theta \left( d\phi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} d\phi^2 \right),$$

donde todos los términos de la derecha pueden extenderse, sin dificultad, sobre los polos y, por lo tanto sobre el eje. De esta manera, vemos que aunque las coordenadas de Boyer-Lindquist no cubren el eje, la métrica de Kerr está bien definida en ese subconjunto (excluyendo, por el momento, los puntos de los horizontes).

Finalmente, tenemos que en el subconjunto  $\mathbb{R}^2 \times S^2 - (H \cup A)$ , el elemento de línea puede escribirse como:

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\Omega^2 + a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2.$$

Vemos, de esta manera, que utilizando las coordenadas de Boyer-Lindquist el espaciotiempo queda separado en diferentes regiones por los horizontes, cuando los mismos están presentes. Así, tendremos al espaciotiempo de Kerr separado en los siguientes *bloques de Boyer-Lindquist*, que no son otra cosa que subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2 \times S^2 - A$  donde las coordenadas de Boyer-Lindquist están bien definidas. En el caso general, tendremos tres bloques diferentes, a los que denotaremos como: KI, KII y KIII que están definidos del siguiente modo:

- Kerr subextremo. Con sus dos horizontes en  $r = r_{\pm}$ .
  - KI :  $r > r_+$ . Región externa.
  - KII :  $r_- < r < r_+$ . Región entre los horizontes.
  - KIII :  $r < r_-$ . Región interna.
- Kerr extremo. Con un único horizonte en  $r = M$ .
  - KI :  $r > M$ . Región externa.
  - KIII :  $r < M$ . Región interna.
- Kerr súper extremo. No posee horizontes, por lo que  $\mathbb{R}^2 \times S^2 - A$  puede considerarse como un único bloque, KI = KIII.

Veamos que, efectivamente, en  $r = r_+$  el espaciotiempo de Kerr posee un horizonte de eventos. Para ello recordemos que en cualquier espaciotiempo estacionario un horizonte de eventos es una superficie de

*expansión nula para la congruencia de geodésicas nulas salientes que son ortogonales a la superficie.* Dicho esto, concluimos que un horizonte es una superficie estacionaria nula. Sabemos que la normal a una superficie estacionaria debe, necesariamente, ser proporcional al vector  $\partial_a r$  y que una superficie como esa será nula siempre que satisfaga la condición:  $g^{ab}(\partial_a r)(\partial_b r) = g^{rr} = 0$ . La expresión del tensor métrico nos permite obtener que la posición de los horizontes está dada por las soluciones a la ecuación  $\Delta = 0$ , que, como vimos, son  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ . La solución exterior,  $r_+$ , es la que se denomina horizonte de eventos, mientras que la interna,  $r_-$ , recibe la denominación de horizonte de Cauchy.

Habiendo definido los bloques de Boyer-Lindquist, construiremos, mediante uniones apropiadas de los mismos, la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Kerr. Prestaremos especial atención al caso subextremo ya que en el caso súper extremo el bloque KI es, directamente, la extensión analítica máxima y el caso extremo se desprenderá del subextremo eliminando el bloque KII.

### 2.2.5. Congruencias nulas principales

Las coordenadas de Boyer-Lindquist resultan singulares en los horizontes, de manera similar a lo que ocurre en el caso del espaciotiempo de Schwarzschild cuando utilizamos las coordenadas que llevan su nombre. Esta afirmación está justificada en el hecho de que un observador requiere de un intervalo de tiempo propio finito para alcanzar el horizonte mientras que en dicho viaje su coordenada temporal,  $t$ , sufre una variación infinita. Esto mismo ocurre con la coordenada  $\phi$  ya que la cantidad  $d\phi/dt$  toma, como vimos previamente, un valor finito en el horizonte. Estamos, pues, interesados en buscar un sistema de coordenadas que permita extender la solución a través de los horizontes. Para comenzar con esta tarea, resulta importante notar que es ventajoso adaptar este nuevo sistema de coordenadas al comportamiento de las geodésicas nulas. En particular, a dos congruencias de geodésicas nulas que reciben el nombre de congruencias nulas *principales* ya que con las mismas resultará nuestro trabajo resultará más simple. En esta parte del texto, como anticipamos, nos vamos a restringir al caso subextremo, en el que la solución de Kerr posee dos horizontes.

Primero, presentaremos aspectos asociados con las geodésicas en el espaciotiempo de Kerr. A primera vista es llamativo el hecho de que en este espaciotiempo se pueden escribir las ecuaciones de una geodésica como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas entre sí. Esto se debe a que el espaciotiempo de Kerr admite no sólo dos cantidades conservadas asociadas a vectores de Killing, sino también una tercera, descubierta por Carter [30], asociada a la existencia de un *tensor de Killing*.

Las ecuaciones que describen geodésicas nulas pueden escribirse, utilizando las coordenadas de Boyer-Lindquist, como:

$$\begin{aligned}\Sigma \dot{t} &= -a \left( a\tilde{E} \sin^2 \theta - \tilde{L} \right) + (r^2 + a^2) P/\Delta \\ \Sigma \dot{r} &= \pm \sqrt{R} \\ \Sigma \dot{\theta} &= \pm \sqrt{\Theta} \\ \Sigma \dot{\phi} &= - \left( a\tilde{E} - \tilde{L}/\sin^2 \theta \right) + aP/\Delta,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde con  $\dot{\phantom{x}}$  estamos expresando derivación respecto de un parámetro afín,  $\lambda$ , y donde, además, utilizamos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}P &= \tilde{E} (r^2 + a^2) - a\tilde{L}, \\ R &= P^2 - \Delta \left( \left[ \tilde{L} - a\tilde{E} \right]^2 + \mathcal{Q} \right), \\ \Theta &= \mathcal{Q} + \cos^2 \theta \left[ a^2 \tilde{E}^2 - \tilde{L}^2 / \sin^2 \theta \right],\end{aligned}$$

donde  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{L}$  y  $\mathcal{Q}$  son, respectivamente, la energía, el momento angular (constantes asociadas a los dos vectores de Killing) y la constante de Carter (asociada al tensor de Killing).

Las ecuaciones para las geodésicas (2.1), se simplifican si hacemos la siguiente elección para las constantes:

$$\tilde{L} = a\tilde{E} \sin^2 \theta \text{ y } \mathcal{Q} = -(\tilde{L} - a\tilde{E})^2 = -(a\tilde{E} \cos^2 \theta)^2.$$

Así, las ecuaciones (2.1) pueden expresarse como:

$$\dot{t} = (r^2 + a^2)/\Delta, \quad \dot{r} = \pm 1, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = a/\Delta,$$

donde hemos redefinido el parámetro afín para eliminar de las expresiones a la constante  $\tilde{E}$ .

De esta manera, resulta natural definir la congruencia entrante eligiendo el signo  $-$  en la ecuación para  $\dot{r}$  y la saliente tomando el signo  $+$ .

Para el caso entrante y saliente podemos expresar (manteniendo la convención de signos) a los respectivos vectores tangentes a las geodésicas de la siguiente manera:

$$k_{\pm}^a \partial_a = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_t \pm \partial_r + \frac{a}{\Delta} \partial_{\phi}.$$

Para clarificar la descripción de la congruencia entrante (saliente) es conveniente definir nuevas coordenadas dadas por:

$$u^{\pm} = t \pm r^*, \quad \xi^{\pm} = \phi \pm r^{\dagger},$$

donde:

$$r^* = \int dr \frac{r^2 + a^2}{\Delta} = r + \frac{Mr_+}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{Mr_-}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right|$$

y

$$r^{\dagger} = \int dr \frac{a}{\Delta} = \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right|.$$

De esta forma construimos un sistema de coordenadas donde la única componente no nula del vector tangente a la geodésica es  $k_{\pm}^r = \pm 1$ , por este motivo tanto  $u^{\pm}$  como  $\xi^{\pm}$  y  $\theta$  se mantienen constantes a lo largo de la trayectoria caracterizada en función de  $\pm r$  como su parámetro afín. Las coordenadas salientes (entrantes) resultan singulares en el horizonte futuro (pasado) pero bien comportado en el horizonte pasado (futuro), esto motiva la necesidad de utilizar varios parches coordenados de este tipo para describir, completamente, al espaciotiempo de Kerr.

### 2.2.6. La ergoesfera y la región de violación cronológica

A excepción de tres casos, los campos vectoriales coordenados de Boyer-Linquist poseen una naturaleza causal bien definida. Las excepciones son:  $\partial_t$  en los bloques KI y KIII y  $\partial_{\phi}$  en el bloque KIII.

Hay que tener en claro que la naturaleza causal del campo vectorial  $\partial_t$  es muy relevante, ya que si un vector de Killing,  $X$ , es tipo tiempo uno puede definir observadores que sean estacionarios. Para estos observadores el espaciotiempo no cambia con el paso del tiempo.

De esta forma podremos demostrar los siguientes puntos:

- en las regiones  $|r| \gg 1$ , tanto en el bloque KI como en el KIII, los únicos campos vectoriales de Killing de naturaleza temporal son múltiplos constantes de  $\partial_t$ ;
- el espaciotiempo de Kerr no es, estrictamente hablando, estacionario ya que no hay un vector de Killing que resulte estacionario a lo largo de todo el mismo.

Como conclusión, tenemos que en el conjunto abierto en el que  $g_{tt} < 0$ ,  $\partial_t$  es un vector temporal que *orienta temporalmente* al bloque KI si le exigimos que sea dirigido hacia el futuro. De esta manera tenemos la familia de *observadores estacionarios* de Kerr que, debido al efecto de la rotación, no pueden ser *observadores estáticos*.

La región que se encuentra separando la región estacionaria:  $\{g_{tt} < 0\}$  y la región:  $\mathbb{D} = \{g_{tt} < 0\}$ , es una hipersuperficie temporal (salvo en los horizontes  $r_{\pm}$ ) perteneciente a  $KI \cup KIII$  que recibe el nombre de *límite estacionario* ya que en ella  $g_{tt}$  se anula.

La región  $\mathcal{E}$  del bloque KI donde  $\partial_t$  es espacial recibe el nombre de *ergoesfera*. La región equivalente  $\mathcal{E}'$  del bloque KIII recibe el mismo nombre, aunque las mismas son diferentes. La ergoesfera envuelve al bloque KII y coincide con el horizonte externo en los polos. La existencia de estas regiones se debe, exclusivamente, a efectos de la rotación. Una particularidad de la ergoesfera es que su existencia permite, en teoría, extraer energía del agujero negro. Esto fue descubierto por Penrose, variantes del mecanismo original se utilizan para dar una explicación a algunos de los fenómenos astronómicos más energéticos que se conocen.

En la ergoesfera, un observador no puede mantenerse en reposo respecto a observadores lejanos y es obligado a rotar en la dirección en la que lo hace el agujero negro.

El módulo del vector de Killing axial vienen dado por la componente  $g_{\phi\phi}$  del tensor métrico que puede ser escrita como:

$$g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta \left[ 1 + \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] + \frac{Ma^2}{r} \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + (a/r)^2 \cos^2 \theta}.$$

Si estudiamos su comportamiento para puntos de la forma  $r = a\delta$ ,  $\theta = \pi/2 + \delta$  con  $|\delta| \ll 1$  vemos que, para valores negativos de  $\delta$ , se satisface la siguiente relación:

$$g_{\phi\phi} = Ma\delta^{-1} + a^2 + \mathcal{O}(\delta) < 0.$$

De este modo llegamos a la siguiente conclusión: el vector de Killing axial es temporal cerca de la singularidad anillo en la región donde la coordenada  $r$  es negativa, pero sus órbitas son cerradas. Las mismas son conocidas como *curvas temporales cerradas*.

La existencia de este tipo de curvas genera debates y especulaciones dado que la teoría general de la relatividad deja abierta la posibilidad a que el principio de causalidad sea violado en el siguiente sentido: una curva temporal cerrada,  $\alpha$ , representa la trayectoria de una partícula material que, comenzando en un evento,  $q$ , se encuentra, luego de una cantidad finita de tiempo propio en el mismo evento. Este tipo de situaciones abren un enorme abanico de posibilidades “inquietantes”. Veremos que en el espaciotiempo de Kerr siempre aparecen regiones donde este tipo de violaciones son posibles, aunque no en el bloque astronómico, KI, del agujero negro (extremo o subextremo) ni en la región entre los horizontes del caso subextremo. Hay que notar que en el caso de la singularidad desnuda tenemos un único bloque de Boyer-Linquist, por lo que, como veremos, todos los eventos están causalmente conectados con una región del espaciotiempo donde el principio de causalidad puede ser violado. Este es otro motivo que se utiliza, normalmente, para descartar la importancia física de este espaciotiempo.

### 2.2.7. El espaciotiempo de Kerr en el formalismo NP

Como dijimos, las coordenadas más utilizadas para describir al espaciotiempo de Kerr son las de Boyer-Lindquist.

La métrica de Kerr posee una familia de geodésicas nulas caracterizadas por los siguientes vectores tangentes:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} E, \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} E,$$

donde  $E$  es una constante.

Utilizando estas coordenadas puede construirse la tetra nula cuyos vectores contravariantes (omitiendo de la lista a  $\bar{m}^\mu$ ) se escriben como:

$$\begin{aligned} l^\mu &= [(r^2 + a^2)/\Delta, 1, 0, a/\Delta], \\ n^\mu &= [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a]/(2\Sigma), \\ m^\mu &= [ia \sin \theta, 0, 1, i/\sin \theta]/(\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)), \end{aligned}$$

y su forma covariante (omitiendo a  $\bar{m}_\mu$  de la lista) como:

$$\begin{aligned} l_\mu &= [1, -\Sigma/\Delta, 0, -a \sin^2 \theta], \\ n_\mu &= [\Delta, \Sigma, 0, -\Delta \sin^2 \theta]/(2\Sigma) \\ m_\mu &= [ia \sin \theta, 0, -\Sigma, -i(r^2 + a^2) \sin \theta]/(\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)). \end{aligned}$$

Esta tetra nula fue introducida por primera vez por William Morris Kinnersley, motivo por el cual hoy lleva su nombre.

Trabajando con esta tetra nula, puede mostrarse que los únicos coeficientes de espín no nulos y el único

escalar de Weyl que no se anula son:

$$\begin{aligned}
 \rho &= -1/(r - ia \cos \theta), \\
 \beta &= -\bar{\rho} \cot \theta / (2\sqrt{2}), \\
 \pi &= ia\rho^2 \sin \theta / \sqrt{2}, \\
 \tau &= -ia\rho\bar{\rho} \sin \theta / \sqrt{2}, \\
 \mu &= \rho^2 \bar{\rho} \Delta / 2, \\
 \gamma &= \mu + \rho\bar{\rho}(r - M)/2, \\
 \alpha &= \pi - \bar{\beta}, \\
 \Psi_2 &= M\rho^3.
 \end{aligned}$$

Esto caracteriza al espaciotiempo de Kerr como de tipo D en la clasificación de Petrov. Esta es una característica compartida con el resto de las soluciones de agujero negro estacionarios que se conocen. Como veremos en el [Sección 5.1](#) esto resultó central a la hora de desarrollar el formalismo con el que se pueden estudiar, en forma sistemática, las perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr.

## Capítulo 3

# La(s) conjetura(s) de censura cósmica

*Forbidden to forbid. Freedom begins with a ban.*

James Douglas “Jim” Morrison Clarke.

*“There must be something in books,  
something we can’t imagine, to make a woman stay in a burning house;  
there must be something there. You don’t stay for nothing.”*

Ray Douglas Bradbury, Fahrenheit 451

La visión estándar sobre el colapso gravitacional de objetos para los cuales no se conoce ningún mecanismo capaz de soportar la acción de la atracción gravitatoria lleva a lo que suele denominarse *colapso gravitacional completo*. En el marco de la teoría general de la relatividad clásica esto resulta en la formación de una singularidad en la estructura misma del espaciotiempo. Debemos entender al término *singularidad* en el mismo sentido que en cualquier teoría clásica de campos. En este caso particular como el de una “región donde la teoría misma deja de ser aplicable para intentar dar una descripción válida del espaciotiempo”. Para intentar lograr dicha descripción se deberán, seguramente, incorporar algún tipo de correcciones que tengan en cuenta fenómenos cuánticos cuando las curvaturas involucradas son del orden de la de Planck.

La validez de la *conjetura de censura cósmica* subyace, al menos tácitamente, en cualquier teoría de colapso gravitacional en la que se afirme que al colapsar completamente, una estrella de gran masa forma un agujero negro. Además, esta conjetura está formulada de modo que una de las características fundamentales de toda teoría clásica de campos resulte válida, también, en el contexto de la teoría general de la relatividad; el principio de causalidad.

En este momento diremos que existen dos formas de esta conjetura, la *débil* y la *fuerte*. Más adelante describiremos, detalladamente, cada una de estas versiones.

Esta hipótesis es fundamental en el marco de la teoría de agujeros negros, ya sea que se esté interesado en realizar un estudio de principios fundamentales de la física o uno aplicado a modelar fenómenos astronómicos, si es que pueden pensarse como cosas completamente independientes.

A pesar de que, debido a su central relevancia, se ha dedicado mucho trabajo y esfuerzo, no existe por el momento una prueba formal de que la misma sea (o no) válida. Lo que se sabe es que la misma no es válida en general dentro de la teoría ya que se conocen configuraciones de materia *altamente simétricas* que al colapsar, la violan [31]. Sin embargo, la validez de la misma o la inexistencia de singularidades desnudas en la naturaleza es utilizada para demostrar teoremas importantes relacionados con la física de agujeros negros. Algunos ejemplos que vale la pena mencionar son: el principio de aumento del área del horizonte de eventos y el hecho de que al fusionarse dos agujeros negros el resultado sea un tercero, entre otros.

Se podría resumir en palabras sencillas que la conjetura de censura cósmica es una afirmación relacionada con la estructura causal del espaciotiempo. Esta afirmación está relacionada con cualquier proceso astronómico donde el colapso gravitacional de objetos cumpla un rol preponderante y un objeto completamente colapsado por la gravedad sea utilizado como modelo teórico.

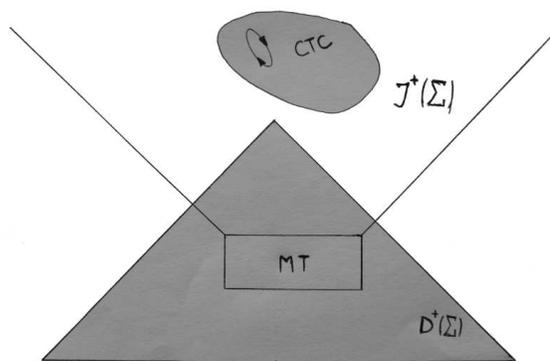


Figura 3.1: Esquema de una máquina de tiempo  $MT$  “operable”.

Antes de entrar en la presentación y el análisis de las dos versiones de la conjetura que presentaremos, vamos a profundizar algunos aspectos relacionados con espaciotiempos que admiten curvas temporales cerradas [32].

Un objeto cuya trayectoria puede describirse con una curva temporal cerrada viaja en el tiempo, en el sentido de que en algún momento de su historia alcanzará un evento que “ocupó previamente”.

Uno de los ejemplos más simples de espaciotiempos que admiten curvas temporales cerradas es el conocido como espaciotiempo de Minkowski *enrollado*. Este espaciotiempo se construye *identificando*  $t = \infty$  con  $t = -\infty$ . Puede verse que la única diferencia entre el espaciotiempo de Minkowski y su “versión enrollada” se encuentra en su topología. Como las ecuaciones de Einstein no pueden diferenciar espaciotiempos en base a aspectos topológicos, tenemos que ambos espaciotiempos son soluciones válidas a las ecuaciones de Einstein.

Espaciotiempos que admiten curvas temporales cerradas permiten razonamientos “contradictorios” en el siguiente sentido: pensemos en un viajero del tiempo que organiza un viaje para asesinar a su ser anterior, si tiene éxito no viajará en el tiempo por lo que no podrá asesinarse. Este tipo de paradojas son las que se conocen, generalmente, como *paradoja del abuelo*.

A este tipo de construcciones lógicas existen, al menos, dos salidas:

- Plantear que las soluciones a las ecuaciones de Einstein que admiten curvas temporales cerradas no son físicamente aceptables.
- Plantear que las soluciones a las ecuaciones de Einstein que admiten curvas temporales cerradas son físicamente aceptables, pero deben existir restricciones de modo que se eviten violaciones al principio de causalidad. Esto suele conocerse como *principio de autoconsistencia*. Podría decirse, en palabras simples, que el universo “conspirará” contra el viajero en el tiempo para que no pueda asesinar a su ser anterior ya que, si está viajando en el tiempo, no lo hizo. Este tipo de conspiraciones, que parecen, en principio, complicadas de justificar pueden, tranquilamente, ser interpretadas como restricciones a las condiciones iniciales requeridas por diferentes fenómenos físicos.

Existen otro tipo de paradojas asociadas a los viajes en el tiempo. Las mismas son conocidas como *paradojas ontológicas*, como lo es la del libro (cuadro) nunca escrito (pintado). La idea básica es la siguiente: una versión mayor de una persona visita a su ser joven con un libro (cuadro), el ser joven lo conserva hasta que se desarrolla una máquina de tiempo. En ese momento toma el libro (cuadro) y realiza un viaje temporal para visitar a una versión más joven y le hace entrega del libro (cuadro). Los problemas aparecen a la hora de responder a la pregunta ¿quién escribió (pintó) el libro (cuadro)? La curva temporal cerrada pensada como un todo, no tiene una causa. Ese libro (cuadro) es denominado *objeto autoexistente*, está ahí, atrapado en el propio espaciotiempo. Es importante remarcar que estas paradojas son solamente aparentes y que al ser analizadas cuidadosamente logran ser resueltas.

Analicemos la segunda de las opciones presentadas para resolver las paradojas del abuelo con algo más de detalle e intentemos entender que puede entenderse como estas “restricciones a las condiciones iniciales”

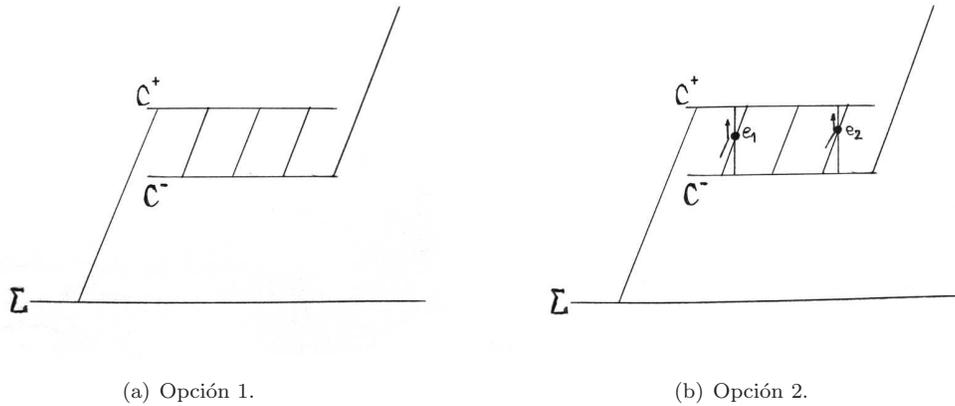


Figura 3.2: Dos (de las infinitas posibles) series de eventos que pueden darse en la región de violación cronológica del espaciotiempo de Deutsch-Politzer y que consistentes con los datos especificados en  $\Sigma$ .

de las que hablamos.

Para ello consideremos un espaciotiempo en el que existe una única partícula. Si en el mismo no se admiten curvas temporales cerradas (pensemos tranquilamente en el espaciotiempo de Minkowski) tenemos, como sabemos, libertad de elegir la velocidad inicial de la misma en cualquier dirección. Si por el contrario estamos en un espaciotiempo como el de Minkowski con la coordenada temporal enrollada vemos que esto no es así. Deben imponerse restricciones a dichas condiciones iniciales, dado que, en caso contrario, podrían obtenerse situaciones completamente equivalentes a pensar que en el universo existen (por dar un ejemplo) 3 partículas y no sólo 1 como habíamos imaginado originalmente.

Trataremos ahora de estudiar los “problemas” que surgen al permitir la existencia de regiones de violación cronológicas dentro de un espaciotiempo.

Particularmente importantes resultarán los conceptos de superficie de dato inicial; el de dominio de dependencia futuro (pasado) de una superficie  $S$ , es decir el conjunto de todos los puntos a través de los cuales toda curva temporal que pasa por él no posee un punto terminal pasado (futuro) dentro de la superficie  $S$ ; el de dominio de dependencia, definido como la unión de los dos conjuntos anteriormente definidos, que puede ser entendido como el conjunto de todos los puntos que quedan unívocamente determinados por el conjunto  $S$ . Finalmente, recordemos la definición del pasado (futuro) causal de  $S$ , es decir el conjunto de todos aquellos puntos tales que existe una curva causal apuntada hacia el pasado (futuro) que lo conecta con uno perteneciente a  $S$ . La unión de estos conjuntos conforma todos los puntos que la superficie  $S$  puede influenciar causalmente. Notar que este último conjunto no coincide con el dominio de dependencia de  $S$ .

Consideremos la siguiente idea de *máquina de tiempo*. La misma estará confinada a una cierta región finita que llamaremos  $MT$  de nuestro espaciotiempo que posee curvas temporales cerradas en una región  $CTC$ . Además, debe poder conectarse causalmente con dicha región, condición que asegurará que la misma resulte “operable” (ver la Figura 3.1). Analicemos cada parte de nuestra definición de  $MT$ : que la misma se encuentre confinada a una cierta región del espaciotiempo significa que el mismo admite una superficie parcial de Cauchy,  $\Sigma$ , previa a  $MT$  ya que no existen curvas temporales que la intersequen más de una vez y, por lo tanto,  $MT \subset D^+(\Sigma)$ . Que la región donde opera la  $MT$  esté causalmente conectada con la que posee las curvas temporales cerradas refleja que  $CTC \subset J^+(\Sigma)$  y que también resulta válido que, a pesar de que las condiciones que se impongan en  $\Sigma$  determinarán que la  $MT$  resulte operable o no, las mismas condiciones no determinarán *unívocamente* lo que ocurra en la región  $CTC$ , es decir  $CTC$  está fuera de  $D^+(\Sigma)$ .

Esperamos clarificar estas cuestiones con un ejemplo. Presentaremos el que se conoce como espaciotiempo de Deutsch-Politzer, imaginado en forma independiente por David Deutsch y Hugh David Politzer para estudiar fenómenos cuánticos en espaciotiempos que poseen curvas temporales cerradas. Este espaciotiempo es el de Minkowski donde se realiza la identificación de dos cintas que denominaremos  $C^+$  y  $C^-$ . Esta identificación produce la formación de una región donde pueden producirse violaciones cronológicas (ver la Figura 3.2). Este tipo de diferencias entre espaciotiempos se conocen como *diferencias topológicas*.

Veamos una forma de mostrar que la especificación del dato inicial en una superficie parcial de Cauchy

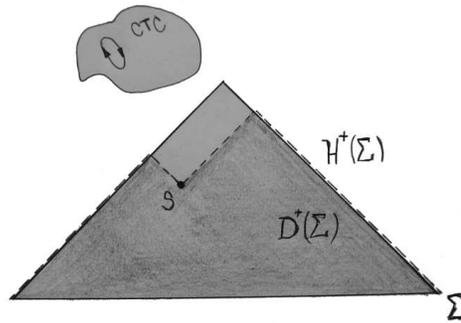


Figura 3.3:  $MT$  en un espaciotiempo singular.

no alcanza para que los eventos dentro de la región donde pueden producirse violaciones cronológicas que determinada de forma única. Para ello imaginemos el siguiente experimento: una partícula se encuentra viajando *hacia la derecha*, cuando ingresa a la región donde se producen las violaciones cronológicas,  $VC$ , y alcanza  $C^+$ . Luego (por la identificación realizada entre  $C^+$  y  $C^-$  emerge desde  $C^-$  y continúa su evolución hacia la derecha, repite esto un par de veces más hasta que escapa de  $VC$ . El problema es que podemos imaginar otra serie (infinita) de sucesos en  $VC$  que *también* son consistentes con los datos establecidos sobre la superficie de Cauchy. Por ejemplo, consideremos, nuevamente, nuestra partícula que se propaga hacia la derecha, ingresa en  $VC$ . Luego, en el evento  $e_1$  golpea a una versión *anterior* de ella misma y se frena para luego viajar en el tiempo (hacia atrás, por medio de la identificación que realizamos entre  $C^+$  y  $C^-$ ) y, nuevamente, en  $e_1$  golpear a su versión *moderna*, de esta forma la misma vuelve a propagarse hacia la derecha con la misma velocidad que tenía al inicio de su viaje. De este modo, alcanza  $C^+$  y emerge por  $C^-$  un par de veces hasta que, ahora en  $e_2$ , golpea a una versión previa de sí misma y queda en reposo, un fenómeno como el que ocurrió en  $e_1$  hace que, luego de emerger desde  $C^-$ , la partícula continúe su trayectoria con la velocidad original hasta escapar de la región  $VC$ . Si nos preguntásemos el número de veces que la partícula colisiona con versiones de sí misma dentro de la región  $VC$ , vemos que la información establecida en la superficie de Cauchy no lo determina en forma unívoca.

Existen una serie de inconvenientes técnicos asociados con las  $MT$ , en especial en aquellos espaciotiempos singulares que ya que en ese caso puede ocurrir que eventos que no son determinados por la superficie de Cauchy logren influenciar la región  $CTC$  (ver la [Figura 3.3](#)). Así, surgieron algunas restricciones a las  $MT$ . Hawking propuso que, para que una  $MT$  exista, el horizonte futuro de Cauchy de  $\Sigma$ ,  $H^+(\Sigma)$  tiene que ser *generado en forma compacta*. Es decir, sus generadores no pueden *emerger* ni de puntos singulares del espaciotiempo. Hawking logró encontrar condiciones que aseguran que  $H^+(\Sigma)$  *no sea* generado en forma compacta en lo que denominó *conjetura de protección cronológica* [33] y que, tiene algunos puntos que la relacionan con la de censura cósmica formulada, anteriormente, por Penrose.

Ahora sí, presentaremos las dos versiones de esta conjetura: la versión *débil* y la *fuerte* que describiremos en la [Sección 3.1](#) y en la [Sección 3.2](#) respectivamente. En el camino, daremos, además, una definición formal de lo que se entiende por *singularidad desnuda*.

### 3.1. Conjetura débil de censura cósmica

Sin entrar, en este momento, en los detalles relacionados a los procesos astronómicos que pueden dar como resultado que una distribución de materia colapse completamente por efectos de la gravedad, ni a la definición formal de una singularidad en el espaciotiempo o de un espaciotiempo singular, ya que dedicaremos el [Capítulo 4](#) a tales fines. Por el momento supondremos que, en el marco de los teoremas de singularidades de Penrose-Hawking, se ha dado un proceso que desencadenó un colapso gravitacional completo de una cierta distribución de materia.

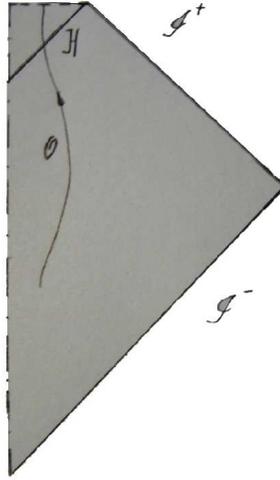


Figura 3.4: Diagrama de Penrose de un colapso de materia con simetría esférica. Con línea a trazos se marca la singularidad de naturaleza espacial (aunque, quizás, más complejas de interpretar visualmente, este tipo de representaciones son mucho más útiles que las de Finkelstein).  $\mathcal{H}$  denota el horizonte. Como queda claro del diagrama, el observador,  $\mathcal{O}$ , no puede percatarse de la existencia de la singularidad hasta que la alcanza. El eje de simetría está dibujado con línea discontinua y puntos. Presentamos, además, los infinitos nulos futuro y pasado  $\mathcal{I}^\pm$ .

Dicho esto, la conjetura *débil* de censura cósmica puede expresarse de la siguiente forma:

*En el marco de la teoría general de la relatividad clásica, la evolución de un sistema descrito con una ecuación de estado razonable, que evoluciona a partir de un dato inicial genérico y libre de singularidades dado en una hipersuperficie de Cauchy, no desarrollará singularidades que sean visibles desde el infinito.*

Así, lo que plantea esta conjetura es que la naturaleza (por alguna razón) no permite, a partir de datos iniciales físicamente aceptables, la formación de espaciotiempos singulares en los que dichas singularidades no estén ocultas detrás de un horizonte de eventos.<sup>1</sup> Como puede verse, esta definición contiene una serie de expresiones vagas, como por ejemplo el concepto de condición inicial “físicamente aceptable” o cuando puede interpretarse en forma adecuada que la evolución del espaciotiempo dio como resultado un horizonte de eventos o no. La naturaleza de estas ambigüedades es diferente; la primera radica en propiedades locales de tensor de energía-impulso mientras que la segunda es de carácter global dado que no puede afirmarse la existencia o no de un horizonte de eventos a partir de cálculos locales.

En un lenguaje (algo) más técnico, diremos que la versión débil de la conjetura de Penrose afirma que la intersección del futuro causal entre una superficie parcial de Cauchy y el pasado causal de su borde en el infinito, es globalmente hiperbólica.

A continuación, intentaremos justificar el enunciado de la versión débil de Penrose que acabamos de presentar. A lo largo del capítulo, iremos profundizando algunos puntos.

- ¿Por qué la exigencia de trabajar en el marco de la teoría general de la relatividad clásica?

A través del proceso cuántico, por el momento simplemente teórico, de evaporación de un agujero negro propuesto por Hawking, el mismo irradia su masa por lo que, eventualmente, su horizonte de eventos desaparecerá.

- ¿Por qué se exige que el sistema esté descrito con una ecuación de estado razonable?

Los teoremas de singularidades de Penrose-Hawking imponen, para asegurar la formación de espaciotiempo singulares, restricciones sobre el tensor de energía-impulso. Esto resulta equivalente a restringir las ecuaciones de estado que pueden ser consideradas “aceptables”. De esta forma, se po-

<sup>1</sup>Recordar que la teoría general de la relatividad predice la formación de singularidades de modo natural, ver el [Apéndice C](#) para más detalles.

dría evitar o favorecer la formación de espaciotiempo singulares proponiendo ecuaciones de estado “no realistas” para describir al sistema.

- ¿Por qué la exigencia de que el dato inicial no sea singular y esté dado sobre una hipersuperficie de Cauchy?

El modelo cosmológico actualmente más aceptado por la comunidad de cosmólogos es el del *Big Bang* con inflación. La singularidad asociada a él es, ciertamente, visible. Esto hace que debamos elegir una hipersuperficie inicial de modo que esta singularidad cosmológica se encuentre en su pasado. Así, es de esperarse que en el futuro de la misma no aparezcan singularidades desnudas. Dado que la presencia de una singularidad sobre una hipersuperficie inicial puede perdurar en el tiempo, tendremos, si la hipersuperficie inicial es visible desde el infinito, que dicha singularidad será desnuda. Por este motivo no puede permitirse que en la hipersuperficie inicial existan singularidades de ningún tipo.

- ¿Por qué se exige que el dato inicial sea genérico?

En los ejemplos que se conocen de espaciotiempos que desarrollan, durante su evolución temporal, singularidades desnudas se hacen fuertes restricciones a la simetría del dato inicial. Por ejemplo, en el caso estudiado de colisiones de cáscaras de materia, se exige que las mismas se muevan en forma ortogonal a la hipersuperficie inicial (ver, por ejemplo, el trabajo [31]). Este tipo de suposiciones (con algunas variantes) aparecen, sistemáticamente, en los ejemplos de configuraciones de materia que, al evolucionar, generan espaciotiempos con singularidades desnudas. Para evitar que este tipo de situaciones poco realistas constituyan contraejemplos “válidos” a la conjetura de Penrose se hace dicha suposición sobre el dato inicial.

La versión débil de la conjetura suele escribirse, formalmente, en relación a observadores en el infinito futuro nulo,  $\mathcal{I}^+$ . En este sentido, esta versión de la conjetura postula que la aparición de singularidades accesibles a observadores ubicados en  $\mathcal{I}^+$  no es posible. Dicho de otra manera, un observador de una singularidad en el espaciotiempo no podrá escapar al pasado cronológico del infinito futuro nulo,  $\mathcal{I}^-(\mathcal{I}^+)$ . Pero, si la conjetura de censura cósmica (en alguna de sus formas) fuese la representación de algún principio natural, es de esperar que no admita singularidades desnudas *ni siquiera localmente visibles* ya que no resulta razonable que *para las leyes de la naturaleza sea relevante si un rayo de luz alcanza o no  $\mathcal{I}^+$* . Esto se satisface en el caso del colapso esférico de materia que forma un agujero negro, ya que un observador que atraviesa el horizonte de eventos del agujero negro no puede ver a la singularidad hasta que la choca, mostrando, como puede apreciarse en la **Figura 3.4**, la naturaleza espacial que la misma posee.

Ahora que hemos presentado una serie de ideas que nos dan una visión del problema que estamos atacando, comenzaremos a formalizar el lenguaje. Para ello, presentaremos una serie de conceptos que nos permitirán describir en forma matemática de lo que entenderemos como una *singularidad desnuda*. Una vez logrado esto, podremos presentar, formalmente, la conjetura débil de censura cósmica.

Comenzaremos introduciendo el concepto de *pasado (futuro) irreducible*, conjunto al que denotaremos como pI (fI) [34]. Los pI (fI) son un conjunto pasado (futuro) de alguna variedad  $\mathcal{M}$ , es decir, un conjunto que coincide con su pasado (futuro) cronológico y que, además, no puede reducirse a la unión de otro par de conjuntos pasados (futuros).

Cuando un pI (fI) es formado por el conjunto de eventos correspondientes al pasado (futuro) de un punto en  $\mathcal{M}$ , diremos que es un pasado (futuro) irreducible *propio*, pIp (fIp). Llamaremos a todo pI (fI) que no es un pIp (fIp), un pasado (futuro) irreducible *terminal*, pIt (fIt), también conocidos como *puntos ideales* de la variedad [34]. Los puntos ideales de la variedad pueden interpretarse como puntos *adicionales* que se agregan a la misma (sean puntos singulares o en el infinito) para asegurar que las curvas temporales en  $\mathcal{M}$  que no poseen un final hacia el futuro posean un punto final ideal (a través de un pIt) y, de forma análoga, para que las que no lo poseen hacia el pasado, adquieran un punto inicial ideal (por medio de un fIt).

Supongamos que nuestra variedad,  $\mathcal{M}$ , es fuertemente causal, bajo esta hipótesis, los pIt son los conjuntos de la forma  $\mathcal{I}^-(\gamma)$ , donde la curva temporal,  $\gamma$ , no posee un punto final en el futuro, mientras que los fIt son conjuntos de la forma  $\mathcal{I}^+(\gamma)$  donde la curva temporal no posee un punto final en el pasado (ver la **Figura 3.5**). Puede mostrarse que cada punto de la variedad,  $\mathcal{M}$ , se encuentra relacionado, a través de una función biyectiva, tanto con los pIt como con los fIt de  $\mathcal{M}$ . Los pIt (fIt) forman lo que se denomina *frontera*

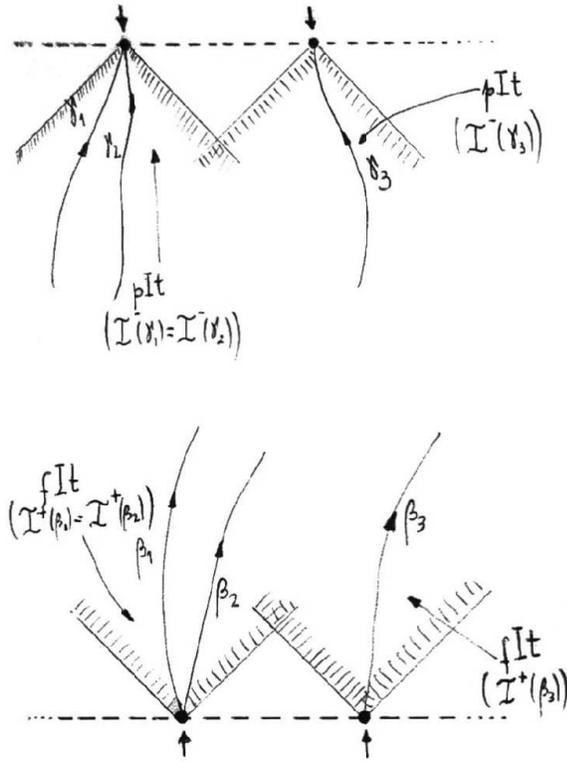


Figura 3.5: En una variedad fuertemente causal,  $\mathcal{M}$ , se presentan los conjuntos pIt (parte superior de la figura) y fIt (parte inferior) asociados a diferentes curvas temporales. Señalados con flechas ( $\uparrow$ ,  $\downarrow$ ) se identifican los puntos ideales (pasados y futuros) que definen dichos conjuntos.

*causal pasada (futura)* de la variedad a los que denotaremos con  $\partial^- \mathcal{M}$  ( $\partial^+ \mathcal{M}$ ). La unión de  $\partial^- \mathcal{M}$  con  $\partial^+ \mathcal{M}$  da como resultado lo que se denomina *frontera causal* de  $\mathcal{M}$ , que denotaremos como  $\partial \mathcal{M}$ .

Presentaremos, a continuación, una forma de separar en conjuntos (no necesariamente disjuntos) a los puntos singulares de  $\mathcal{M}$ . Lo haremos teniendo en cuenta si los mismos representan puntos singulares *de* la variedad o *en el infinito* de la misma. De esta manera tenemos dos tipos de pIt (fIt), los generados por curvas temporales de *longitud infinita*, a los que denotaremos con pIt- $\infty$  (fIt- $\infty$ ) y los pIt (fIt) *singulares* que representan los puntos singulares de la variedad. Con todas las definiciones presentadas nos encontramos en condiciones de caracterizar, de manera formal, a una singularidad desnuda.

Una singularidad desnuda es una singularidad que se encuentra *en el futuro* de algún evento (de modo de descartar la asociada al inicio del universo en el marco de la teoría del *Big Bang*) y que *puede ser vista* por algún observador. De esta forma, una singularidad desnuda está, tanto en el pasado de algún evento,  $p$ , como en el futuro de otro,  $q$ . De modo técnico, diremos que un pIt singular *desnudo*, puede definirse como un pIt singular,  $S_D$ , que satisface, para puntos  $p$  y  $q$  de la variedad  $\mathcal{M}$ , la siguiente condición:

$$p \in S_D, \quad S_D \subset \mathcal{I}^-(q),$$

donde, con  $\mathcal{I}^-(q)$  estamos denotando al pasado cronológico del punto  $q$ . Debe remarcarse que, de manera análoga, puede definirse a una singularidad desnuda en función de un fIt singular (ver la [Figura 3.6](#)).

Queremos finalizar esta sección diciendo que, en caso de existir singularidades desnudas, la teoría general de la relatividad no podría especificar la evolución temporal de ninguna región que esté causalmente comunicada con ellas. Esto conforma un grave problema para la teoría, por lo que desde nuestro punto de vista dar respuesta al interrogante relacionado con la validez de la conjetura débil de Penrose es de gran importancia.

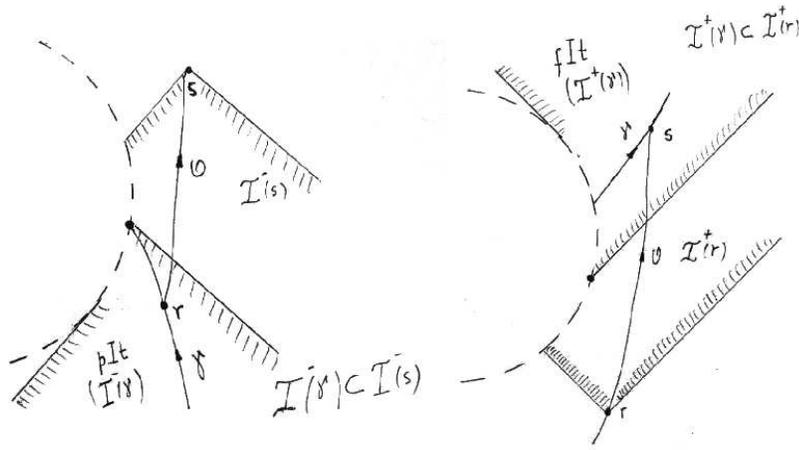


Figura 3.6: Una singularidad desnuda *local* (línea a trazos) ubicada en el futuro de  $r$  y el pasado de  $s$ . Se presenta a la izquierda una definición en función de un pIt singular y a la derecha en función de un fIt singular. En ambos casos,  $\mathcal{O}$  denota al observador que tiene la capacidad de “ver” dicha singularidad desnuda.

### 3.2. Conjetura fuerte de censura cósmica

La conjetura fuerte de censura cósmica establece que: *especificado un dato inicial en una hipersuperficie espacial, las leyes de la teoría general de la relatividad deben determinar, en forma completa y unívoca, el futuro del espaciotiempo.* Esto puede ser expresado en lenguaje técnico de la siguiente manera: *el dominio de dependencia de una superficie de dato inicial debe ser la variedad completa del espaciotiempo o, de forma análoga, que el horizonte de Cauchy de una superficie de dato inicial debe ser igual al conjunto vacío.* De la forma en que la entendemos a la fecha, esta conjetura exige a una solución a las ecuaciones de Einstein ser globalmente hiperbólica para que pueda ser considerada como físicamente razonable.

Las regiones internas (aquellas que se encuentran detrás de sus respectivos horizontes de Cauchy) de soluciones como la de Reissner-Nordström, Kerr o Kerr-Newman, por citar algunas de las más conocidas, constituyen ejemplos de soluciones exactas a las ecuaciones de campo, que violan la forma fuerte de la conjetura de censura cósmica. Esto queda de manifiesto en la [Figura B.4](#), donde vemos que el espaciotiempo de Kerr posee un horizonte de Cauchy. Por este motivo, entre otros, la relevancia física de estas regiones está en duda.

Además, esta versión de la conjetura de censura cósmica ataca el problema de las singularidades desnudas en el infinito (el espaciotiempo Anti de Sitter presenta este tipo de singularidades). Así, exigir que un espaciotiempo esté libre tanto de pIt y fIt singulares como de pIt- $\infty$  y fIt- $\infty$  es análogo a exigir que el espaciotiempo en cuestión sea globalmente hiperbólico.

Para nuestra presentación formal de la conjetura fuerte de censura cósmica, realizaremos algunas definiciones asociadas con relaciones causales entre puntos ideales de una variedad.

Diremos que un pIt,  $P$ , precede causalmente a otro pIt,  $R$ , si  $P \subseteq R$ . También, diremos que si existe un punto  $r$  en el pIt  $R$  para el cual se cumple que  $P \subset \mathcal{I}^-(r)$ , entonces el pIt  $P$  precede cronológicamente al pIt  $R$ . Con estas definiciones notamos que un pIt será singular desnudo cuando exista otro pIt en su futuro cronológico.

Estas definiciones pueden extenderse al caso de los fIt sin modificaciones sustanciales. Diremos, entonces, que un fIt  $R$  precede causalmente a otro  $S$  cuando se cumpla que  $S \subseteq R$  y que  $R$  precede cronológicamente a  $S$  si existe un punto  $q \in R$  tal que se satisfaga la condición  $S \subset \mathcal{I}^+(q)$ . Podemos decir que un fIt es desnudo sí y sólo sí existe otro fIt en su pasado cronológico, quedando de esta forma manifiesta, en forma explícita, la naturaleza temporal de estas entidades (estén o no *ubicadas* en el infinito).



Cauchy de agujeros negros asintóticamente llanos, centrando nuestra atención al caso del espaciotiempo de Kerr. Como vimos anteriormente el dominio de dependencia de una hipersuperficie de Cauchy,  $S$ , no cubre todo el espaciotiempo. A continuación describiremos algunos resultados que muestran que los horizontes de Cauchy no son estables y que, por lo tanto, es de esperar que los mismos sean reemplazados, como consecuencia de un proceso de colapso gravitacional, por una singularidad nula.

Recordando los conceptos presentados en la **Apéndice B**, pasemos a definir dos nuevas coordenadas:  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$  a partir de las coordenadas “válidas” fuera del horizonte de Cauchy,  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$ :

$$\hat{u} = \tan \tilde{u} \quad \text{y} \quad \hat{v} = \tan \tilde{v}.$$

Usando estas coordenadas, el elemento de línea para este espaciotiempo se puede escribir como:

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} ds^2, \quad \Omega^2 = \frac{\cos^2 \tilde{u} \cos^2 \tilde{v}}{f(r)}.$$

De la relación entre las funciones  $f(r)$  y  $b(r)$  (ver el **Apéndice B**), podemos reescribir al factor conforme,  $\Omega$ , del siguiente modo:

$$\Omega^2 \sim \frac{\text{sen}(2\tilde{u}) \cos(2\tilde{v})}{b(r)}.$$

Pensemos en un par de geodésicas nulas caracterizadas, una por la coordenada  $\tilde{v} = c_1$  y la otra (cercana a la primera) por  $\tilde{v} + d\tilde{v} = c_2$ . Supongamos, además, que ambas se encuentran ubicadas en el entorno de la superficie descrita por  $\tilde{v} = \pi/2$ . La distancia, en un punto de coordenada  $\tilde{u}$ , entre ambas estará dada por:

$$d\lambda(\tilde{u}) = \frac{1}{\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v} \rightarrow \pi/2)} d\tilde{v}.$$

Hemos realizado esta construcción ya que estamos interesados analizar el comportamiento de esta distancia en la región  $\tilde{u} < 0$  y  $\tilde{u} > 0$ . Cuando  $\tilde{u}$  es negativa, las geodésicas nulas cercanas a la superficie  $\tilde{v} = \pi/2$  se encuentran en el entorno de  $\mathcal{I}^+$ , es decir, en el límite en el que  $r \rightarrow \infty$ . Vemos, de este modo, que en esta zona resulta cierto que:

$$\Omega^2(\tilde{u} < 0, \tilde{v}) \sim \frac{\pi}{2} - \tilde{v} \rightarrow 0.$$

De forma similar, pero para el caso en que  $\tilde{u} > 0$ , el mismo entorno corresponde al horizonte de Cauchy, por lo que  $r \rightarrow r_-$  y el factor conforme presenta un comportamiento dado por:

$$\Omega^2 \sim \frac{\text{sen}(2\tilde{v})}{r - r_-}.$$

Puede demostrarse que en la región  $\tilde{u} > 0$ , cuando  $\tilde{v} \rightarrow \pi/2$ , el factor conforme se comporta como:

$$\Omega^2(\tilde{u} > 0, \tilde{v}) \sim \cos^{\frac{r_+}{r_-} - 1} \rightarrow \infty.$$

Vemos que a diferencia de lo que ocurre cuando  $\tilde{u} < 0$ , la distancia afín entre geodésicas nulas entrantes al horizonte de Cauchy decrece arbitrariamente a medida que las mismas se acercan a él.

Para resumir y ordenar las ideas: presentamos los argumentos centrales de la demostración de que geodésicas nulas con una separación afín infinita en  $\mathcal{I}^+$  se acercan a distancias arbitrariamente pequeñas al acercarse al horizonte de Cauchy. Esto permite argumentar que cualquier perturbación que se realice en la región externa sufrirá, al propagarse hacia el horizonte de Cauchy, un corrimiento infinito hacia el azul, por lo que se convertirá en una perturbación de “energía infinita”. Además, como presentamos en la **Figura 3.7**, cualquier observador que parta desde  $i^-$  con destino al horizonte de Cauchy verá, en un intervalo de tiempo propio finito, toda la historia de la región externa.

A principios de la década de 1990, Amos Ori<sup>2</sup> comenzó una serie de trabajos en los que presentó estudios detallados relacionados con el comportamiento asintótico de perturbaciones métricas no lineales y completamente asimétricas en un entorno del horizonte de Cauchy de un agujero negro de Kerr [36]. La conclusión general de estos trabajos (confirmados por otros trabajos que estudiaron este aspecto desde un punto de

<sup>2</sup>Debemos remarcar que otros reconocidos investigadores como Werner Israel y Eric Poisson (y sus colaboradores) también atacaron este problema en forma independiente y realizaron aportes significativos.

vista no perturbativo [37]) es que el horizonte de Cauchy de un agujero negro de Kerr es reemplazado por una singularidad de curvatura débil (es decir una en la cual los efectos de marea no son lo suficientemente intensos como para deformar infinitamente a un objeto que se acerca a ella) y nula. Una de las principales diferencias entre la estructura de la singularidad que se forma en la posición del horizonte de Cauchy de un agujero negro rotante respecto a lo que sucede en el caso de los agujeros negros esféricos y eléctricamente cargados es que, debido a efectos de arrastre de los sistemas inerciales, la misma resulta oscilante.<sup>3</sup> ¿Cómo es que estos resultados que muestran que el horizonte de Cauchy en estos agujeros negros es reemplazada por una singularidad nula “resuelven” el problema? después de todo, la predictibilidad de la teoría sigue fallando debido a que en el entorno de dicha singularidad la teoría general de la relatividad no resulta aplicable. Podemos intentar explicar esta “mejoría” en el siguiente sentido: la presencia de un horizonte de Cauchy en el interior de un agujero negro hace que las leyes clásicas de la física dejen de poder aplicarse sin que existan indicadores *locales* de que ello sea “esperable”. Este no es el caso en las cercanías de una singularidad de curvatura.

Haremos una serie de definiciones antes de presentar un interesante resultado teórico. Sea  $\Sigma$  una superficie atrapada, es decir, una 2–superficie compacta con la propiedad de que si tanto las geodésicas nulas entrantes como las salientes a la misma poseen convergencia positiva, entonces la misma debe estar completamente contenida dentro del agujero negro. Usaremos  $A(\Sigma)$  para denotar el área de la superficie que estamos analizando.

Un resultado que, únicamente, puede demostrarse suponiendo que la conjetura de censura cósmica es válida afirma que, si trabajamos con materia que satisface la condición de energía nula, el área del horizonte de eventos de un agujero negro no puede decrecer. Pensemos, en el caso particular, de una cáscara de polvo nulo cuyo interior sea llano<sup>4</sup> que colapsa por efecto de la gravedad. Bajo nuestra hipótesis de trabajo, puede demostrarse que la superficie atrapada,  $\Sigma$ , debe estar contenida completamente dentro del agujero negro. Si denotamos con  $A_S$  a la intersección entre el horizonte de eventos del agujero negro con la cáscara, podrán demostrarse las siguientes desigualdades (ver, por ejemplo, el libro de Wald o el de Hawking y Ellis en [1]):

$$A(\Sigma) \leq A_S \leq 16\pi M_{\text{an}}^2 \leq 16\pi M_{\text{ADM}}^2. \quad (3.1)$$

La validez de la primera desigualdad está justificada por el hecho de que la cáscara está colapsando y de que la superficie atrapada está siempre dentro del agujero negro. La segunda desigualdad se justifica dado que la máxima área posible para un agujero negro estacionario es la asociada con el agujero negro de Schwarzschild. Finalmente, se utiliza el resultado de que, en su estado final, la masa de un agujero negro nunca puede superar la masa ADM total del espaciotiempo.

La importancia de la desigualdad (3.1) radica en que la misma se puede calcular *sin conocer ninguna característica* de la solución externa a la cáscara. Esto es lo que hace que resulte simple estudiar su validez. Si esta desigualdad no resultase válida para algún espaciotiempo, la conjetura (débil) de censura cósmica, difícilmente sea válida ya que representaría un contraejemplo a la mirada tradicional del colapso gravitatorio que se apoya en esta forma de la conjetura de Penrose. Esta desigualdad ha sido demostrada en una serie de casos especiales de espaciotiempos (ver [38] y citas allí realizadas); consideramos estos resultados como evidencias fuertes de la validez de la conjetura débil de censura cósmica. De alguna manera, puede pensarse que la conjetura de censura cósmica es *el motivo* por el cual las desigualdades pueden demostrarse.

Se demostró, en el marco de la teoría general de la relatividad clásica, que en un espaciotiempo (débilmente) simple en forma asintótica y completamente vacío no pueden formarse singularidades de curvatura visibles desde  $\mathcal{I}^+$  si los datos iniciales no poseen singularidades [39].

Otra familia de resultados relacionados a este tema son los iniciados con los trabajos de Robert Manuel Wald [40] y Veronika Elanor Hubeny [41] relacionados con el estudio de la posibilidad de “destruir” el horizonte de eventos de un agujero negro por medio de acreción de partículas o campos de prueba. Los primeros trabajos analizaron esta hipótesis en agujeros negros extremos, obteniendo resultados negativos. Cuando la misma es relajada, los resultados cambian de naturaleza y se vuelven contradictorios entre sí, por lo que este tema, claramente, requiere estudios de mayor profundidad (ver por ejemplo [42]).

<sup>3</sup>Tener en cuenta que en el caso del horizonte de Cauchy de un agujero negro de Reissner-Nordström la singularidad producida por el fenómeno de inflación de masa está caracterizada por un crecimiento monótono de la función de masa y de la curvatura.

<sup>4</sup>Aun cuando, casi con certeza, la misma no catalogue como materia “razonable”.

Otro conjunto de resultados que puede considerarse que aporta argumentos que favorecen la validez de la conjetura de censura cósmica es el relacionado con los resultados clásicos sobre la *estabilidad lineal de las regiones externas al horizonte de eventos de las soluciones que describen agujeros negros*. Estos resultados, junto a una serie de resultados previos obtenidos en relación a la *inestabilidad lineal de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que violan a la conjetura en sus diversas formas* y los relacionados con desarrollos novedosos que presentaremos, en detalle, en la **Parte II** de esta tesis, dan fuerza a estas conjeturas.

En [43] los autores estudiaron la evolución y colapso de una estrella de neutrones en rotación diferencial cuyo momento angular excede al límite de Kerr. Como resultado obtuvieron que del colapso de dicho objeto no se obtiene como resultado final una singularidad desnuda. Esto se debe, principalmente al fenómeno de emisión de ondas gravitacionales y a la pérdida de masa de las capas más externas de la estrella.

Desde el punto de vista observacional, existen indicios consistentes con la validez de la versión débil de la conjetura de censura cósmica. Hasta el momento (ver, por ejemplo [44]), las mediciones del parámetro de rotación de agujeros negros,  $a$ , no dan indicios de existencia de objetos ultra compactos desprovistos de horizonte de eventos, es decir, con  $a > 1$ . Sin embargo, en [45], se demostró que algunos de los ajustes a los datos observacionales que pueden realizarse con un modelo de objeto compacto con  $a < 1$ , también pueden realizarse con otro diferente  $a^*(a) > 1$ . Para más detalles ver la **Parte III** de esta tesis y el trabajo original [45].

### 3.3.2. Argumentos en contra

Ahora es el momento de presentar argumentos que no favorecen la veracidad de alguna de las formas de la conjetura de censura cósmica. También analizaremos cuán profundos son los “daños” que generan.

Hasta donde soy consciente, los estudios que intentan mostrar que (en alguna de sus formas) la conjetura de censura cósmica no es válida, se centran en el estudio de problemas y situaciones físicas particulares. Esto pone una limitación a las conclusiones que de ellos pueden desprenderse ya que no se puede, con esta lógica, pretender extrapolar resultados a situaciones “genéricas”. Algo interesante de mencionar es que varios de los argumentos que favorecen la veracidad de la conjetura de censura cósmica se originaron al intentar buscar argumentos para demostrar que la misma no es válida, una especie de *paradoja de lo predestinado*, en la que al intentar realizar algo uno termina realizando justamente lo contrario.<sup>5</sup>

La mayoría de estos trabajos buscan, a partir de alguna configuración inicial de materia, formar una singularidad desnuda. El primer ejemplo de este tipo de resultados fue obtenido para polvo colapsando de forma que la simetría esférica fuese conservada durante todo el proceso (ver [46]). Uno de los grandes problemas que tiene este modelo es que este tipo de situaciones llevan a la aparición de densidades que crecen sin límite, por lo que se puede argumentar que no es un modelo apropiado para describir ningún fenómeno real. Además, lo particular de la configuración (y posterior evolución) hace difícil de imaginar que dicho modelo sea útil para describir un fenómeno real en un ámbito astronómico.

Otro trabajo famoso que busca falsear la conjetura de censura cósmica logrando formar una singularidad desnuda a partir del colapso de materia es [47]. En él que los autores presentan una configuración con simetría axial de material libre de colisiones. Ahí, se presentan resultados que permiten inferir que, a partir de dicha configuración inicial, se pueden formar singularidades desnudas. Sin embargo, dado que el planteo computacional presentado en este trabajo es tal que el programa finaliza en el momento en que la singularidad se forma, no es posible analizar si realmente dicha singularidad es o no desnuda. Para ello se necesitaría analizar la región del espaciotiempo que se encuentra *en el futuro* de la singularidad.

Existen otros trabajos (ver, por ejemplo, [48]), que utilizan la misma lógica para formar singularidades desnudas a partir del colapso gravitacional de configuraciones de materia. Sin embargo, todas tienen el “problema” de que las mismas son “demasiado especiales”, por lo que, aún suponiendo que efectivamente muestran que es posible formar singularidades desnudas a partir de ellas, no deberían considerarse como serias “amenazas” a la conjetura de censura cósmica.

En [49] se considera el escenario clásico de colapso gravitacional de una nube de materia. El estudio se centra en analizar el efecto que produce incorporar perturbaciones tangenciales en las ecuaciones que determinan la dinámica del sistema.

---

<sup>5</sup>Un ejemplo clásico de este tipo de paradojas es el siguiente: un viajero del tiempo viaja para evitar que sus padres se conozcan e impedir, así, su propio nacimiento, pero su presencia es lo que desencadena que ellos se enamoren entre sí.

Los autores de este trabajo concluyen que las pequeñas perturbaciones producidas por la incorporación de presiones tangenciales puede alterar significativamente el estado final del proceso de colapso gravitatorio, mostrando, así, que la formación de un agujero negro (final “tradicional” del colapso gravitacional de una estrella muy masiva) es un proceso inestable.



## Capítulo 4

# Singularidades en el espaciotiempo

De forma paralela con el logro que significó obtener el planteo definitivo de la teoría general de la relatividad, se comenzó con el desarrollo de herramientas que permitiesen especificar condiciones bajo las cuales un dado espaciotiempo resulta singular.

Tratemos primero de definir el concepto de singularidad del espaciotiempo en el marco de la teoría general de la relatividad. Para ello, recordemos el concepto de singularidad en física clásica. Se habla de existencia de una singularidad *en* un campo (como el electromagnético por ejemplo) en un punto *del* espaciotiempo si la densidad de energía crece ilimitadamente cuando nos acercamos al punto singular. También se habla de aparición de singularidad cuando se manifiesta una ruptura en la capacidad de predicción de la teoría.

En el marco de la teoría general de la relatividad ya no poseemos un espaciotiempo fijo de fondo en el cual el crecimiento no acotado de un dado campo se pueda medir. Además, ahora no estamos considerando una singularidad asociada a un campo sino al espaciotiempo propiamente dicho. Por este motivo la idea misma de que una singularidad ocurre en un cierto evento de un dado espaciotiempo deja de tener sentido. De este modo, vemos que el estudio de singularidades en este marco posee más sutilezas que en otras teorías clásicas de campos.

Primero, haremos un desarrollo explicando los motivos por los que la teoría general de la relatividad predice, bajo condiciones muy generales, la aparición de singularidades. Dejaremos detalles matemáticos para el [Apéndice C](#). Luego, daremos una serie de *definiciones* de singularidades, no todas son, *estrictamente* hablando correctas, pero todas resultarán útiles a la hora de comprender algún aspecto del complejo concepto de singularidad espaciotemporal. A medida que vayamos profundizando, daremos una definición técnica de lo que hoy se entiende por espaciotiempo singular.

### 4.1. Lo inevitable: sobre el colapso gravitacional

*You hear that Mr. Anderson?...*  
*That is the sound of inevitability...*  
*It is the sound of your death...*  
*Goodbye, Mr. Anderson...*

El agente Smith a Neo en “The Matrix”, de Andy y Lana Wachowski.

En una serie de teoremas, Roger Penrose y Stephen Hawking obtuvieron las condiciones bajo las cuales el colapso gravitatorio completo ocurre *necesariamente*, formando, de este modo, un espaciotiempo singular. Lo asombroso es que lograron mostrar que las condiciones que se deben exigir para la aparición de singularidades en el espaciotiempo no son, de ninguna manera, exigentes. De esta forma, podemos decir que este tipo de procesos son, para ponerlo de alguna manera, prácticamente inevitables en una importante familia de ambientes astronómicos. Por este motivo, dedicar tiempo a su investigación es razonable.

El principal concepto que estos autores desarrollaron es el de la *aparición de una 2–superficie espacial donde las familias (entrantes y salientes) de geodésicas nulas ortogonales a ella son ambas convergentes*. La aparición de este tipo de superficies, que se denominan *superficies cerradas atrapadas*, implica, desde

una mirada física, lo siguiente: cuando se emite un pulso luminoso desde esa superficie tanto el frente de onda saliente como el entrante disminuyen su área. De este modo el frente de onda saliente, luego de un tiempo propio finito (o distancia afín finita) reduce su tamaño a 0, atrapando con él toda la materia que formaba al objeto que colapsa. De esta forma, en el marco de la teoría clásica de la relatividad general, se forma un espaciotiempo singular (o una singularidad en el espaciotiempo). Ambos autores utilizan la aparición de geodésicas nulas *incompletas* respecto a un parámetro afín como definición de singularidad en el espaciotiempo.

La existencia de singularidades en una teoría clásica de campos es problemática y la de la relatividad general, obviamente, no es una excepción. Tratemos de analizar los motivos. Pensemos, en primera instancia, en el significado de una singularidad cosmológica (como la predicha en el paradigma cosmológico conocido por sus siglas  $\Lambda$ -CDM con fase inflacionaria posterior al *Big Bang*). Este tipo de singularidades implican que *existió un tiempo antes del cual nada podía ser definido*. Las consecuencias de una afirmación como esta son muchas y de muy variada naturaleza, pero la existencia de una singularidad espacial en el futuro, como las que los teoremas de Penrose y Hawking predicen de forma tan natural, implican que *el propio tiempo alcanza su final*.<sup>1</sup>

Esta serie de teoremas ponen de manifiesto otra particularidad de la teoría clásica de la relatividad general: *ella predice su propia ruptura* ya que la singularidad, propiamente dicha, no forma parte del espaciotiempo por lo que la teoría no puede dar una descripción de la misma. Por este motivo, y como veremos en detalle más adelante, es conveniente hablar de espaciotiempos singulares en lugar de singularidades *en* el espaciotiempo.

#### 4.1.1. Sobrevolando aspectos de la teoría de evolución estelar

Presentaremos algunos aspectos de la teoría de evolución estelar de estrellas aisladas. Prestaremos particular atención a las llamadas *estrellas de gran masa* ya que, actualmente, existe consenso de que una vez que los procesos termonucleares cesan en sus interiores, no existe ningún mecanismo físico que pueda evitar que ocurra el colapso completo por efecto de la gravedad, generando, de este modo, un objeto totalmente colapsado.

Una estrella puede ser modelada como un objeto gaseoso autogravitante que pasa *gran parte de su vida* en estados que pueden ser estudiados en términos de configuraciones de equilibrio. Las ecuaciones básicas que se utilizan para estudiar la estructura y evolución de estrellas fueron introducidas por Eddington en el año 1926 [50] y pueden ser escritas (utilizando notación moderna) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial M} &= -\frac{GM}{4\pi r^4}, \\ \frac{\partial r}{\partial M} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \\ \frac{\partial T}{\partial M} &= -\frac{3\kappa L}{64\pi^2 b c r^4 T^3}, \\ \frac{\partial L}{\partial M} &= \epsilon,\end{aligned}$$

donde estamos utilizando a  $M$  como una variable de Lagrange y donde estamos denotamos con  $P$  a la presión (donde se debe tener en cuenta la ejercida por la radiación), con  $\rho$  a la densidad, con  $T$  a la temperatura, con  $L$  a la luminosidad y con  $r$  al radio a una dada masa  $M$ . La opacidad,  $\kappa$ , representa la capacidad que posee el material para absorber radiación y  $\epsilon$  es la tasa de liberación de energía por gramo de materia. Las constantes  $G$ ,  $b$  y  $c$  son, la constante de la gravitación de Newton, la de Stefan-Boltzmann (que no estamos denotando con la  $a$  usual para evitar confusiones) y la rapidez de la luz en el vacío respectivamente. Estas ecuaciones deben ser revisadas cuando se desea estudiar objetos en los que los efectos relativistas no pueden ser despreciados (ver, por ejemplo, [12]) o cuando los efectos de la rotación estelar deben ser tenidos en cuenta. Para poder resolver el sistema de ecuaciones de estructura, es necesario conocer las funciones  $P$ ,  $\kappa$  y  $\epsilon$ , que serán funciones de la densidad,  $\rho$ , la temperatura,  $T$ , (dos variables de estado) y la composición química de la estrella. Una vez fijada la masa total de la estrella,  $M_*$ , resta especificar las condiciones de borde.

<sup>1</sup>Consideramos importante aclarar que esto no es necesariamente cuando las singularidades son de naturaleza temporal.

La teoría estándar de la evolución estelar de objetos aislados “define” el final de una estrella en función (casi exclusivamente) de dos parámetros, la masa de la estrella y, en segunda medida, su composición química. Este resultado se conoce como el teorema de Russell-Vogt en reconocimiento a los astrónomos Henry Norris Russel y Heinrich Vogt.<sup>2</sup>

Con este sistema de ecuaciones y sus respectivas condiciones de borde tenemos planteado el modelo estelar con el que pretendemos trabajar. La forma más simple de estudiar la evolución (dado que si la energía se libera debido a reacciones termonucleares la composición química de la estrella se modificará) es agregar una ecuación que calcule el cambio en la composición química con la información del modelo anterior para que luego el código numérico calcule el siguiente. Esta hipótesis resulta válida cuando no se está considerando la posibilidad de que la composición química se modifique debido a corrientes de mezcla.

De forma completamente esquemática y sin entrar en los detalles puede decirse que una estrella cuya masa supere las  $10M_{\odot}$  recorrerá las siguientes etapas evolutivas. Al iniciar la quema termonuclear de hidrógeno de forma estable en su núcleo la estrella se encuentra en la secuencia principal del diagrama de Hertzsprung-Russell. Esta será la etapa de mayor duración en su evolución y los procesos termonucleares con los que se cree que la estrella produce energía son dos; la cadena  $p-p$  (protón-protón) propuesta por Hans Albrecht Bethe y el ciclo  $CNO$  (carbono, nitrógeno y oxígeno) propuesto por Bethe y Carl Friedrich Freiherr von Weizsäcker, más eficiente en las condiciones en que se encuentra el núcleo de una estrella de gran masa.

Los ciclos son complejos y no es intención discutirlos en detalle, simplemente recordemos que en el ciclo  $p-p$ , cuatro núcleos de hidrógeno dan como resultado, luego del proceso de fusión, uno de helio, liberando (en la cadena  $p-p$  más probable) 26.22 MeV de energía. En el otro ciclo, el carbono, nitrógeno y oxígeno actúan como catalizadores del proceso de fusión y en el cual el resultado neto es similar al de la ciclo  $p-p$ : cuatro núcleos de hidrógeno se fusionan en uno de helio y liberan 26.8 MeV de energía a lo largo de todo el proceso.

Una de las complicaciones que poseen los modelos estelares para estrellas de gran masa es que no pueden despreciarse los efectos convectivos en los núcleos de las mismas. Este tipo de procesos hacen que en las regiones centrales de estas estrellas estén ocurriendo en forma continua procesos de mezcla que hacen que durante la etapa de secuencia principal no se forme un núcleo de helio y la generación de energía prácticamente no sufra alteraciones. Se estima que no es hasta que virtualmente todo del hidrógeno originalmente presente en el núcleo convectivo se haya convertido en helio que la estrella comienza a sufrir cambios importantes en su evolución y estructura.

Al finalizar esta fase de núcleo convectivo, como dijimos, todo el hidrógeno presente fue convertido en un núcleo de helio. Para el tipo de estrellas que estamos analizando, el mismo supera lo que se conoce como límite de Chandrasekhar-Schönberg.<sup>3</sup> Por este motivo, y para poder compensar el déficit energético producido por el hecho de que la quema de hidrógeno se detuvo, el núcleo se contrae haciendo que el gradiente de temperatura disminuya inhibiendo, de este modo, los procesos de convección. El núcleo pasa a ser radiativo ya que en estas condiciones éste es el mecanismo más eficaz de transporte energético.

Al contraerse la temperatura del núcleo estelar aumenta. De esta forma la envoltura radiativa externa sufrirá una expansión y enfriamiento lento. Luego de un proceso de acomodamiento, una capa externa al núcleo de helio adquiere las propiedades necesarias para que comience a producirse fusión de hidrógeno en ella. Este proceso que se denomina *quema en capa de hidrógeno*. La región donde esto está ocurriendo es, según los modelos teóricos, extremadamente acotada, cosa que genera que el gradiente de temperatura exceda al adiabático, transformando esta región en una donde el transporte de energía es, principalmente, convectivo. Así, la estrella comienza a trasladarse hacia la rama de las gigantes en el diagrama de Hertzsprung-Russell.

La quema en capa de hidrógeno hace que el núcleo de helio, inerte hasta el momento, aumente su masa en forma gradual. Como consecuencia de este crecimiento el núcleo se contrae generando un aumento en el gradiente de temperatura transformando, de esta manera, a las capas externas en completamente convectivas.

Este proceso continúa hasta que la temperatura central alcanza un valor de unos  $10^8$  grados Kelvin, temperatura necesaria para que comience la fusión de helio en carbono a través del ciclo *triple  $\alpha$* . En este proceso, tres átomos de helio se fusionan formando uno de carbono, liberando en total (en la cadena más probable) 7.275 MeV de energía al medio. Esto tiene repercusiones dramáticas para la estructura de la estrella,

<sup>2</sup>Russell es extremadamente conocido ya que, junto con Ejnar Hertzsprung desarrollaron el diagrama Hertzsprung-Russell, muy importante en estudios de evolución estelar. Además, en colaboración con Frederick Saunders, desarrolló la teoría del acoplamiento LS.

<sup>3</sup>El límite de Chandrasekhar-Schönberg es la cantidad máxima de masa que una esfera isoterma puede soportar sobre sí misma.

en particular de su núcleo, pero no al nivel de las estrellas poco masivas donde ocurre un proceso explosivo, conocido como *flash de helio*. Ahora, el núcleo se expande rápidamente, haciendo que las capas externas se contraigan y, por lo tanto (como cualquier polítropa), se calienten. De esta forma, la estrella comienza a moverse hacia la izquierda en el diagrama Hertzsprung-Russell, manteniendo su luminosidad prácticamente constante. La quema de helio en el núcleo (si bien por un proceso completamente diferente y en una escala temporal más corta) ocurre, en un modo análogo al de quema de hidrógeno durante la fase de secuencia principal.

Los procesos de fusión térmica se vuelven altamente complejos en etapas posteriores de la evolución dado que las condiciones físicas de las capas externas al núcleo son tales que en ellas comienzan a producirse procesos de fusión nuclear. Esta situación se conoce como *quema en capas múltiples*. Muy brevemente, diremos que, primero aparece un núcleo inerte de carbono y se tienen quema en capa de helio e hidrógeno, hasta que se dan las condiciones de que en el núcleo el carbono comience a darse el proceso de fusión de carbono en oxígeno. Este proceso puede ser explosivo dando origen a un evento supernova o no, dependiendo de la masa de la estrella. En caso de no ocurrir, se continúan, en el núcleo fases de quema de elementos cada vez más pesados. Esto genera una estructura en la estrella que se conoce como de *capas de cebolla*, donde en cada capa más externa está ocurriendo un proceso de fusión de elementos más livianos (He, C, O, Ne, Mg, Si y Fe). Los procesos de fusión son exoenergéticos (es decir se libera energía como resultado de ellos) hasta que se forman átomos de hierro  $^{56}\text{Fe}$ , el elemento que posee la menor masa por partícula nuclear de los átomos.

En los núcleos de estrellas muy masivas se alcanzan, durante las últimas etapas de la evolución estelar, las condiciones necesarias como para que se produzca la fusión de átomos de silicio  $^{28}\text{Si}$ , para formar átomos de hierro  $^{56}\text{Fe}$ . Como resultado se forma un núcleo de hierro inerte. En este momento los procesos termonucleares continúan, únicamente, en capas externas.

En esta etapa las densidades involucradas en los núcleos son lo suficientemente grandes como para que se produzca el proceso de *neutronización*, en el que por medio de un decaimiento  $\beta$  inverso, electrones libres son capturados por protones dentro de los núcleos atómicos. Como resultado, se emite una enorme cantidad de neutrinos que enfrían, de forma muy eficiente, al núcleo. Al enfriarse rápidamente, el núcleo y luego toda la estructura de la estrella, se precipita sobre sí misma. La velocidad de caída supera a la del sonido en el medio, generando una onda de choque. Como resultado de la misma, el material se comprime haciendo que el mismo se vuelva opaco a los neutrinos. La onda de choque que se generó puede “rebotar” contra la superficie del núcleo sólido de hierro y como consecuencia desatar un evento supernova que destruye completamente la estructura de las capas externas de la estrella o a la estrella en su conjunto.

El resultado final de los procesos evolutivos de estrellas de gran masa no está claro pero, el hecho de que los modelos de estrellas de neutrones o híbridas posean una masa límite (no mayor a las  $3M_{\odot}$  para las ecuaciones de estado más utilizadas) sirve para suponer que en el universo existen mecanismos capaces de generar objetos tan masivos y compactos que dan como resultado objetos completamente colapsados por acción de la gravedad.

## 4.2. Singularidades: diferentes miradas

Como trataremos de dejar claro en esta exposición, el concepto de *singularidad* en el marco de la teoría general de la relatividad no es simple y lleva, hasta la fecha, años de continuo desarrollo teórico en búsqueda de conseguir formalizar el concepto. A continuación, un breve repaso de algunos de esos intentos.

### 4.2.1. Definición à la Einstein

Si bien, estrictamente hablando, una singularidad no forma parte del espaciotiempo ya que el tensor métrico no puede ser definido allí, diremos que un punto es singular si al acercarnos a él, la curvatura escalar crece indefinidamente. Por lo expresado en el inicio de la oración anterior, parece razonable tratar de definir a las singularidades desde el punto de vista de *la ausencia de un evento* y así caracterizar a un espaciotiempo como singular cuando esto ocurra.<sup>4</sup> Desde este enfoque se deja de lado la mirada de las singularidades como

---

<sup>4</sup>Nótese la diferencia con la definición dada por Penrose y Hawking, para ellos la aparición de curvas incompletas sirve como definición de singularidad en el espaciotiempo.

*sustantivos* para estudiarlas como una propiedad (es decir un *adjetivo* que caracteriza alguna particularidad) del espaciotiempo.

Para resumir, una posibilidad es dejar de hablar de singularidades del espaciotiempo para hablar de espaciotiempos singulares. Este es un punto de vista que puede considerarse menos ontológico ya que no estamos tratando a las singularidades como una cosa, sino como una propiedad del espaciotiempo.

Debemos intentar destilar el concepto de que la curvatura crece indefinidamente al acercarnos a una singularidad ya que como veremos, no siempre resulta suficiente para desarrollar un estudio consistente de las mismas.

### 4.2.2. Espaciotiempos singulares y curvatura

Intentando no abandonar la “idea intuitiva” de singularidad, pueden pensarse construcciones más complejas para definir a una singularidad en el espaciotiempo. Una posible idea es la siguiente: consideremos un espaciotiempo caracterizado por la variedad  $\mathcal{M}$  y el tensor métrico  $g_{ab}$ . Ahora, imaginemos una curva definida sobre  $\mathcal{M}$  con la siguiente propiedad: al recorrerla a través de su parámetro afín la curvatura del espaciotiempo crece sin cota. Puede utilizarse esta particularidad como un indicador de la naturaleza singular del espaciotiempo utilizando alguna cantidad que caracterice la curvatura y no dependa de la elección de coordenadas. Por este motivo que deben estudiarse escalares construidos a partir del tensor de Riemann, como el escalar de Kretschmann ( $K = R_{abcd}R^{abcd}$ ), y analizar si presentan o no polos a medida que recorremos alguna curva. Obtenemos de este modo una condición suficiente (aunque no necesaria) para caracterizar a un espaciotiempo como singular. No es necesaria, ya que, por ejemplo, se sabe que existen soluciones particulares de ondas de gravedad para las cuales los escalares de curvatura son nulos pero cuyo tensor de curvatura resulta singular.

### 4.2.3. Afinando la puntería

Dejamos por el momento la idea de que la forma más apropiada de caracterizar a una singularidad es por medio del estudio de cantidades escalares que crecen sin cota. Desarrollaremos otra, la de la *incompletitud* de curvas geodésicas causales, es decir, la existencia de geodésicas cuya longitud afín (propia para geodésicas no nulas) es finita.

Hoy en día existe una gran variedad de espaciotiempos singulares en este sentido; no resulta complejo, por medio de una intervención “quirúrgica”, lograr extirpar partes del espaciotiempo de modo que algunas geodésicas pasen a ser incompletas. Esto nos trae al concepto de extensión de un espaciotiempo ya que esos espaciotiempos “operados” pueden recuperar “su salud” ya que su naturaleza singular no es intrínseca. En la [Apéndice B](#) presentamos, para el caso del espaciotiempo de Kerr, las ideas involucradas en el proceso de extensión analítica de un espaciotiempo. Por este motivo no profundizaremos más al respecto. Únicamente remarcaremos la importancia de analizar la naturaleza singular de un espaciotiempo que ha sido extendido en forma *maximal*, ya que todo espaciotiempo no maximal es geodésicamente incompleto, por lo que, usando la definición presentada arriba, debe ser catalogado como singular.

Uno de los problemas inherentes a esta forma de definir espaciotiempos singulares está relacionado a la variedad de curvas geodésicas que se deben analizar. Existen ejemplos de espaciotiempos incompletos para geodésicas de algún tipo (temporales, nulas o espaciales) pero completos para los otros. Diremos, pues, que a pesar de que dado que las partículas materiales siguen geodésicas temporales haciendo que este tipo de incompletitud sea más compleja de asimilar, un espaciotiempo es singular si es incompleto para alguno de los tres tipo de geodésicas.<sup>5</sup>

### 4.2.4. ¿Finale?

Vimos a través de estos ejemplos que la idea intuitiva de singularidad como “punto donde una cierta cantidad asociada con la curvatura crece indefinidamente” no sirve para abarcar la enorme cantidad de espaciotiempos singulares que existen.

---

<sup>5</sup>Notar que el espaciotiempo de Reissner-Nordström (extendido en forma maximal) es completo, únicamente, si se analizan geodésicas temporales.

Presentamos la “controversia” entre si el “mejor” modo de definir singularidades es como puntos *que faltan* en el espaciotiempo o utilizando la idea de curvas *incompletas*. Autores de renombre como Robert Wald (ver referencia (I) en [1]) afirman que, por lejos, la mejor forma de caracterizar espaciotiempos singulares es por medio del análisis de la existencia de geodésicas inextensibles en al menos una dirección.

Si bien, esta discusión es de gran interés formal, y llegar a una conclusión definitiva en relación a cuál de estos enfoques resulta más completo o apropiado posee una gran relevancia, no lo seguiremos profundizando. Esto se debe, fundamentalmente, al hecho de que para los espaciotiempo con relevancia física, cualquiera de ellas resultan, no sólo suficientes sino equivalentes entre sí. En particular, en el caso del espaciotiempo de Kerr, central en esta tesis, se está frente a un caso donde existen geodésicas incompletas y escalares de curvatura divergentes.

### 4.3. Clasificación de singularidades

En [51] se presenta un sistema (básico) de clasificación de las singularidades que pueden aparecer en un espaciotiempo maximal. Los autores las dividen en:

(a) singularidades *cuasiregulares*.

Los observadores que se acercan a una singularidad de este tipo no notan divergencias en ninguna cantidad física, pero sus líneas de mundo finalizan (a tiempo propio finito) *en* la singularidad. Este tipo de singularidades están presentes en las soluciones cosmológicas de la familia Taub-NUT o en ondas gravitacionales que colisionan.

(b) singularidades sin escalares de curvatura divergentes.

Algunos observadores en caída libre experimentan fuerzas de marea no acotadas mientras que otros, al acercarse arbitrariamente cerca a las mismas, no. Podemos encontrar este tipo de singularidades en ondas gravitatorias planas singulares.

(c) singularidades con escalares de curvatura divergentes.

Todos los observadores que se acercan a este tipo de singularidades notan crecimientos no acotados de cantidades físicas como las fuerzas de marea. La singularidad de curvatura de agujeros negros pertenecen a este tipo de singularidades.

Presentamos las diferentes clases de singularidades, desde las que son “menos singulares” a las que son “más singulares”. Una forma alternativa a esta clasificación que utiliza la noción de punto singular como el final de geodésicas incompletas es presentado en [52]. En este trabajo los autores explotan los llamados *marcos de referencia ortogonales paralelamente propagados* (MROPP). Usando este punto de vista, una singularidad pertenecerá al tipo (a) cuando cualquiera de las componentes del tensor de Riemann, en el límite en el que el parámetro afín tiende a su valor extremo sobre el MROPP (para ser precisos en el punto final de la geodésica incompleta) tienen un límite finito. Cuando alguna de las componentes del tensor de Riemann no resultan acotadas al realizar el procedimiento arriba explicado diremos que el punto singular es una singularidad de curvatura. En este caso podremos catalogar a estas singularidades como de la familia (b) cuando, si bien no todas las componentes del tensor de Riemann son bien comportadas sí lo son los escalares asociados a los tensores métricos y de Riemann y el elemento de volumen. Cuando esto no es cierto para alguno de los escalares, diremos que la singularidad pertenece al tipo (c).

Una objeción que puede realizarse a esta clasificación de singularidades (y, también a la de singularidad) es, como ya mencionamos, la siguiente: utilizando estas definiciones, un espaciotiempo completamente regular al que se le eliminan “artificialmente” puntos debe ser considerado singular. Una forma para evitar este tipo de situaciones es, como mencionamos, la de considerar espaciotiempos que no son isométricos a un subconjunto propio de otro espaciotiempo, es decir estudiar únicamente espaciotiempos *inextensibles* o maximales.

## Parte II

# Inestabilidad lineal de interiores de agujeros negros y de singularidades desnudas



# Breve descripción de la segunda parte

En esta parte del trabajo de tesis describiré algunos de los resultados más importantes obtenidos a lo largo de estos años de trabajo.

Utilizando el formalismo desarrollado por Teukolsky para estudiar perturbaciones lineales a espaciotiempos de Kerr, logramos demostrar la existencia de modos inestables (exponencialmente crecientes con el tiempo), que satisfacen condiciones de contorno espaciales apropiadamente definidas.

Este resultado muestra que tanto el espaciotiempo de Kerr súper extremo y el interior de la solución de agujero negro que violan, respectivamente, la conjetura débil y fuerte de censura cósmica resultan linealmente inestables frente a perturbaciones de naturaleza diversa.

Usamos este resultado como un argumento que favorece la validez de la conjetura de Penrose y otorga a los agujeros negros mayor relevancia astronómica frente a otros modelos teóricos de objetos compactos existentes en la literatura.

Además, encontramos evidencias de que la existencia de modos inestables está relacionada con la existencia de curvas temporales cerradas. Investigamos la validez de esta hipótesis en otros espaciotiempos que poseen curvas temporales cerradas: cilindro de Lanczos, universo de Gödel y espaciotiempo BTZ extremos en  $(2+1)$  dimensiones. A excepción del universo de Gödel, obtuvimos resultados análogos para perturbaciones escalares. También demostramos que los únicos modos inestables posibles en estos espaciotiempos deben preservar la simetría axial de los espaciotiempos y encontramos fuertes evidencias de que un resultado similar es válido para el caso del interior de un agujero negro de Kerr, al menos en el caso de rotación lenta ( $a \ll 1$ ).



## Capítulo 5

# Inestabilidad de la singularidad desnuda de Kerr

### 5.1. Perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr

*Un árbol perfila la luz del crepúsculo  
Un equilibrio  
Audaz lo mantiene en su fuste  
La luz lo dibuja con sus pausas  
Un lado definido por las luces, otro en sombras  
La luz  
La sombra  
Y todo en equilibrio  
Por ahora.*

Héctor F. Ranea Sandoval, “Precario Equilibrio”

A partir de la segunda mitad de la década del 2000, Gustavo Dotti y Reinaldo Jaime Gleiser de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, comenzaron el estudio sistemático de la estabilidad lineal frente a perturbaciones gravitacionales de algunas de las singularidades desnudas más famosas. Luego, continuaron este programa con otros colaboradores entre los que Héctor Vucetich y yo nos encontramos. Entre otros investigadores que realizaron, simultáneamente, aportes para comprender el comportamiento de estas soluciones frente a perturbaciones lineales queremos nombrar a Gary Williams Gibbons, Sean A. Hartnoll, Akihiro Ishibashi, Vitor Cardoso, Paolo Pani y Marco Cavaglià entre otros.

Los doctores Dotti y Gleiser comenzaron su trabajo estudiando la singularidad desnuda de Schwarzschild (solución de Schwarzschild con masa negativa) ya que es la solución más simple y cuyas perturbaciones gravitacionales se pueden estudiar con mayor facilidad. Los resultados obtenidos indican que esta solución a las ecuaciones de campo de Einstein resulta linealmente inestable frente a perturbaciones gravitacionales [53]. Este resultado aporta más evidencia para descartar, desde un punto de vista físico, espaciotiempos con masa negativa. Generalmente, estos espaciotiempos suelen ser descartados por no satisfacer los llamados teoremas de positividad para la masa que establecen, bajo suposiciones bastante generales, que las soluciones a las ecuaciones de Einstein asintóticamente llanas y cuyas fuentes sean físicamente aceptables no pueden tener masa total negativa. Además, se obtiene un argumento que favorece la veracidad de la conjetura de censura cósmica ya que la solución de Schwarzschild con masa negativa la viola.

En [53] los autores modifican, a través de un cambio apropiado de la coordenada radial, la ecuación estándar de Regge-Wheeler-Zerilli con la que se estudian las perturbaciones lineales a este espaciotiempo y la llevan a la forma de una ecuación de Schrödinger. En dichas coordenadas el estudio (y posterior interpretación de los resultados) se torna más simple y transparente. De esta manera obtienen expresiones analíticas para

los diferentes tipos de perturbaciones y encuentran un criterio para lograr que dicha perturbación “siempre se mantenga pequeña” haciendo que el estudio perturbativo sea consistente. La manera de realizar esto es exigiendo que los escalares de curvatura del espaciotiempo completo (“fondo + perturbación”) no sean “más divergentes” que el asociado al espaciotiempo original. Imponer esta condición restringe las posibles familias de perturbaciones que se pueden estudiar con este método, de este modo se llega a la conclusión de que todos los modos perturbativos escalares resultan inestables. El estudio se restringe a las perturbaciones escalares debido a la demostración de estabilidad lineal frente a perturbaciones vectoriales del espaciotiempo de Schwarzschild, tanto para masa positiva como negativa (ver (II) de [1] y la referencia [54]).

En [55] los autores vuelven a estudiar el problema de las perturbaciones lineales a la singularidad desnuda de Schwarzschild, pero ahora estudiando el problema de valores iniciales para perturbaciones gravitacionales linealizadas. De esta manera (y utilizando una familia especial de operadores de entrelazamiento<sup>1</sup>) logran estudiar la evolución de las perturbaciones en ese espaciotiempo que, es importante aclarar, no es globalmente hiperbólico. De esta forma, completan el estudio de estabilidad lineal para este espaciotiempo, mostrando que los modos inestables obtenidos previamente son efectivamente excitables a partir de un dato inicial genérico, de soporte compacto lejos de la singularidad.

La otra solución con simetría esférica que representa una singularidad desnuda es la solución de Reissner-Nordström súper cargada, es decir el caso en el que el cuadrado de su carga eléctrica es mayor que el cuadrado de su masa ( $Q^2 > M^2$ ). Como discutimos al inicio de esta tesis, esta es una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describe el espaciotiempo y el tensor de Maxwell producido por una carga puntual de masa  $M$  y carga eléctrica  $Q$ .

En [56], los autores logran mostrar, analíticamente, la existencia de modos escalares inestables para las ecuaciones de perturbación gravitacional al espaciotiempo de Reissner-Nordström súper cargado. Esto permite, al igual que en el ejemplo mencionado anteriormente, mostrar la inestabilidad de una nueva solución a las ecuaciones de Einstein que presenta una singularidad desnuda, descartar su relevancia astrofísica. De este modo se aportan evidencias que pueden ser usadas para reforzar la validez de la conjetura (débil) de Penrose, dado que por su naturaleza inestable no es de esperar que la misma sea el resultado del colapso gravitatorio de materia.

Además de estudiar en forma analítica las perturbaciones lineales a la singularidad desnuda de Reissner-Nordström, en [56] se presentan evidencias numéricas de la inestabilidad lineal (frente a perturbaciones gravitacionales) de una singularidad desnuda de Kerr. Tomando este resultado como punto de partida comenzamos, en mi tesis de licenciatura, un estudio exhaustivo de este problema y otros que en el camino fueron surgiendo.

El estudio de perturbaciones lineales es de importancia central, no sólo en el área de la relatividad general, sino en prácticamente cualquier área de la ciencia y, en particular, en la astronomía y la física. El estudio de casi cualquier fenómeno de transporte en la naturaleza puede describirse mediante el análisis de pequeños apartamientos de una situación de equilibrio de un dado sistema. El estudio del cambio en los elementos orbitales de (por ejemplo) los planetas del sistema solar debido a la presencia de los demás, el análisis de ondas de variada naturaleza viajando en medios materiales y las, hipotéticas a la fecha, ondas gravitacionales son, ejemplos conocidos de la teoría de perturbaciones lineales aplicada a diferentes problemas y condiciones físicas. Pueden encontrarse ejemplos de aplicaciones de la teoría de perturbaciones en casi cualquier área de estudio de la física. Con el avance de la mecánica cuántica hacia principios del siglo XX se desarrolló, también en este marco teórico, un formalismo que permite el estudio de perturbaciones (dependiente e independiente del tiempo) con el que se puede, entre otras cosas, explicar resultados experimentales como el efecto Zeeman, el efecto Stark, la estructura fina e hiperfina del átomo de hidrógeno o la emisión espontánea. No podemos dejar de nombrar a uno de los ejemplos más impresionantes de concordancia entre teoría y experimento, alcanzada en el marco de la electrodinámica cuántica. El mismo es el correspondiente al cálculo y la medición experimental del momento dipolar magnético anómalo del electrón utilizando los diagramas de Feynman, a la fecha los mejores resultados muestran una concordancia de una parte en mil millones entre el resultado teórico y el experimental.

Einstein logró explicar el avance en el perihelio de Mercurio y predecir la desviación de la luz utilizando la aproximación de campo débil de la teoría general de la relatividad que desarrolló. Continuando en esta dirección se avanzó (especialmente en las últimas décadas) en el desarrollo de un mecanismo para resolver

---

<sup>1</sup>Traducción para *intertwining operators*.

las ecuaciones de Einstein cuando las velocidades involucradas son bajas comparadas con la de la luz y en el límite de campo débil, las llamadas *aproximaciones pos-Newtonianas* (ver, por ejemplo, [57] y referencias allí mencionadas). También en este marco teórico, pero en este caso aplicada a cosmología, la teoría de perturbaciones se utiliza el cálculo de las anisotropías en el fondo de radiación cósmica.

Pasando al marco de la teoría de perturbaciones aplicada a soluciones de agujero negro, debemos remontarnos a los trabajos clásicos de Regge y Wheeler, seguidos por los de Zerilli y Vishveshwara en los que se estudiaron los diferentes modos perturbativos a espaciotiempos esféricamente simétricos.

Conocer si un sistema gravitante es o no estable es crucial ya que no es de esperar que sistemas inestables existan en la naturaleza ya que, o bien no lograrán formarse nunca o les esperará una evolución dinámica hacia un final catastrófico. De este modo, vemos como estudios de estabilidad son herramientas que permiten descartar modelos teóricos.

Otra área de estudio que está ganando importancia en la actualidad es el de los *modos cuasinormales* de agujeros negros (ver, por ejemplo, [58]). Este tipo de modos describen ondas salientes en el infinito y entrantes en el horizonte de eventos del agujero negro. Este tipo de ondas poseen (en general) frecuencias complejas en la que su parte real representa la frecuencia de oscilación del modo mientras que la parte imaginaria su tasa de amortiguamiento. La relevancia para estudios astronómicos de los modos cuasinormales es que permiten, entre otras cosas, estudiar las etapas posteriores a la fusión de un par de agujeros negros. Dichos modos permiten realizar estimaciones a la masa y el momento angular de agujeros negros, estrellas de neutrones, etc. Además, el estudio de modos cuasinormales de agujeros negros puede usarse, en el marco de la correspondencia AdS/CFT, como una herramienta de gran utilidad ya que los mismos se encuentran relacionados, *de modo holográfico*, con propiedades de equilibrio y fenómenos de transporte de teorías de gauge fuertemente acopladas.

Los estudios de perturbaciones en relatividad general son extremadamente complejos y hasta la fecha se ha podido demostrar la estabilidad global frente a perturbaciones completamente no lineales únicamente del espaciotiempo plano de Minkowski [16].

A pesar de esto, existen diversas técnicas para encarar el estudio de perturbaciones lineales a espaciotiempos más complejos, en particular centraremos estas líneas a los resultados relacionados con perturbaciones a espaciotiempos que describen agujeros negros o, de modo similar, singularidades desnudas. Debido a su relativa simplicidad, el primer formalismo desarrollado permite estudiar perturbaciones lineales a agujeros negros con simetría esférica (Schwarzschild y Reissner-Nordström). Fueron desarrolladas por Tullio Regge y Wheeler y, de manera independiente y para otra familia complementaria de perturbaciones, por Frank J. Zerilli. Luego, utilizando un formalismo completamente diferente que se presentará más adelante, Saul Arno Teukolsky obtuvo las ecuaciones fundamentales que permiten realizar un estudio sistemático de las perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr.

Con estas herramientas a disposición se pudo demostrar la *estabilidad modal* (es decir, la no existencia de modos individuales que presenten crecimientos exponenciales con el tiempo) de las soluciones de agujeros negros más relevantes. Estos resultados sirven para dar una fuerte base teórica que da soporte a la figura de los agujeros negros, como candidatos para representar la variedad de objetos súper compactos de los que actualmente se tiene evidencia observacional. Además de estos resultados relacionados con la estabilidad lineal de estos objetos, otro resultado teórico son los teoremas de unicidad existentes para cada una de las soluciones de agujero negro estacionario que se conocen. Un ingrediente fundamental para demostrar estos teoremas es la existencia del horizonte de eventos; por este motivo estos teoremas no se aplican a las singularidades desnudas. Este resultado puede utilizarse para asignar mayor relevancia a los agujeros negros frente a otros candidatos teóricos, como precisamente las singularidades desnudas. Recientemente en [17] se logró demostrar la estabilidad *no modal* de la región exterior al horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild, con una herramienta que, potencialmente, permitiría abrir una nueva manera de realizar estudios de estabilidad lineal en el marco de la teoría general de la relatividad.

### 5.1.1. Ecuación de Teukolsky

El procedimiento estándar para estudiar perturbaciones en el marco de la teoría general de la relatividad se realiza estudiando la perturbación directamente sobre el tensor métrico, es decir, dada la métrica:  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$ , donde  $g_{\mu\nu}^0$  es la métrica de *fondo* que desea perturbarse y  $h_{\mu\nu}$  describe a la perturbación.

A continuación, se escriben las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica completa y se conservan, únicamente, cantidades que sean lineales en  $h_{\mu\nu}$ . De este modo, se podrán estudiar las ecuaciones linealizadas que gobiernan el comportamiento de dicha perturbación y, con ellas, la estabilidad del espaciotiempo de fondo frente a ese tipo de perturbaciones.

Cuando se estudia, de esta manera, el problema de perturbaciones a un espaciotiempo de fondo de Kerr aparece el problema de que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que rige el comportamiento de dichas perturbaciones no resulta separable. Por este motivo, para realizar un estudio sistemático de las mismas, este acercamiento al problema no es aplicable desde un punto de vista práctico.

A principios de la década de 1970, Saul Arno Teukolsky realizó el siguiente descubrimiento: si se estudian las perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr utilizando el formalismo de Newman-Penrose (NP), se obtiene que las perturbaciones son descriptas por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que sí resulta separable.

El proceso para estudiar el perturbaciones dentro del formalismo NP es similar al que se utiliza en la teoría estándar: todas las cantidades involucradas en este formalismo se escriben como una suma de dos términos uno asociado al espaciotiempo que se desea perturbar y otro asociado con la perturbación. Luego se introducen estas cantidades en las ecuaciones de Newman-Penrose (ver [Apéndice A](#)) y se las linealiza. Al realizar esto para el caso del espaciotiempo de Kerr se obtiene como resultado que las ecuaciones que gobiernan las perturbaciones a los escalares de Weyl  $\Psi_0$  y  $\Psi_4$  se desacoplan del resto. Algo similar ocurre para la ecuación de movimiento para un campo escalar, para dos de las componentes proyectadas sobre la tetrad del tensor de Maxwell y para las componentes proyectadas del campo espinorial de Dirac. Estas cantidades están asociadas con las perturbaciones debidas a campos escalares, electromagnéticos y de neutrinos, respectivamente.

Si describimos al espaciotiempo de Kerr utilizando coordenadas de Boyer-Lindquist y la tetrad nula de Kinnersley, las ecuaciones de perturbación por los diferentes campos que hemos mencionado, pueden condensarse en una única ecuación diferencial, que recibe el nombre de *ecuación maestra de Teukolsky*. Dicha ecuación puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} T_s[\Psi_s] := & \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \phi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right) - 2s \left[ \frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} - 2s \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \\ & + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi_s = 4\pi \Sigma T, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde  $s$  es el *parámetro* o *peso de espín* de la perturbación. Siendo:  $s = 0$  para perturbaciones debidas a campos escalares,  $s = \pm 1/2$  para campos de fermiones de Dirac,  $s = \pm 1$  para campos electromagnéticos de Maxwell y  $s = \pm 2$  para perturbaciones debidas a campos gravitatorios.

Recordando la definición del coeficiente de espín  $\rho$ , los campos  $\Psi_s$  que aparecen en (5.1) pueden escribirse como:

$$\Psi_{\frac{1}{2}} = \chi_0, \quad \Psi_{-\frac{1}{2}} = \rho^{-1} \chi_1, \quad \Psi_1 = \phi_0, \quad \Psi_{-1} = \rho^{-2} \phi_2, \quad \Psi_2 = \delta \psi_0, \quad \Psi_{-2} = \rho^{-4} \delta \psi_4.$$

Donde estamos denotando con  $\delta \psi_n$  a la variación del escalar de Weyl  $\psi_n$ .

Es interesante notar que en el caso de una perturbación por un campo escalar, la ecuación (5.1) se reduce a la ecuación de la onda, es decir,  $\square \Psi_0 = \nabla^a \nabla_a \Psi_0 = 0$ .

Dado que los coeficientes en la ecuación (5.1) no dependen, ni de la coordenada  $t$  ni de la coordenada  $\phi$  y que además el espaciotiempo de Kerr posee otra simetría manifestada por la existencia de un tensor de Killing, la ecuación (5.1) puede llevarse a la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Para este fin es necesario introducir la siguiente separación de variables para  $\psi_s$ :

$$\psi_s(t, r, \theta, \phi) = \int d\omega \sum_{\ell, m} R_s^{\ell m}(r) S_s^{\omega, \ell}(\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}.$$

Las funciones  $R_s^{\ell m}(r)$ , que, por simplicidad, denotaremos por  $R_s(r)$  y  $S_s^{\omega, \ell}(\theta)$ , que denotaremos con  $S_s(\theta)$ , deberán satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas por el autovalor común  $E$ :<sup>2</sup>

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dS_s(\theta)}{d\theta} \right) + \left( a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 2a\omega s \cos \theta - \frac{(m+s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + E - s^2 \right) S_s(\theta) = 0 \quad (5.2)$$

<sup>2</sup>Consideramos importante remarcar que la notación utilizada para el autovalor de estas ecuaciones no está unificada en la literatura. La relación entre el autovalor  $A$  utilizado en los trabajos [59, 60] y el definido en esta tesis, es  $A = E - s(s+1)$ .

y

$$\frac{d^2 R_s(r)}{dr^2} + \frac{(s+1)}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr} \frac{dR_s(r)}{dr} + \left\{ \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta^2} + \frac{4ir\omega s - [E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1)]}{\Delta} \right\} R_s(r) = 0, \quad (5.3)$$

donde  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$  y  $K = (r^2 + a^2)\omega - am$ .

Como dijimos, el sistema de ecuaciones [(5.2), (5.3)] se encuentra acoplado por el autovalor común,  $E$ . Si suponemos fijos los parámetros  $a$ ,  $s$ ,  $m$  y  $\omega$ , es decir, definida la estructura del espaciotiempo, el tipo de perturbación, el modo axial que se está estudiando y su frecuencia, debemos elegir al autovalor  $E$  en la ecuación angular (5.2) de modo que la solución,  $S_s(\theta)$ , resulte regular en la esfera. Esta imposición da un conjunto numerable de autovalores que pueden ser etiquetados como  $E_\ell^{ang}(a, s, m, \omega)$ , donde definimos al índice  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  de modo que el valor de  $E$  aumente junto con el de  $\ell$ . Al hacer un trabajo similar con la ecuación radial (5.3) y elegir al autovalor  $E$  de modo que la función  $R_s(r)$  sea *bien comportada* cuando  $|r| \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow -\infty$  y  $r \rightarrow \rho_i^-$ ) cuando se estudia el caso de la singularidad desnuda de Kerr (región interna de un agujero negro) obtenemos, nuevamente, un conjunto numerable de autovalores  $E_n^{rad}(a, s, m, \omega)$  donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ .<sup>3</sup>

Una forma de encontrar los espectros de energía radial y angular consiste en reducir las condiciones de regularidad impuestas a las soluciones  $S_s(\theta)$  y  $R_s(r)$  a la forma de una fracción continua que involucra al autovalor  $E$  (ver, [61], para más detalles). Esta ecuación es el resultado de resolver la relación de recurrencia de tres términos que se obtiene al reemplazar una solución en serie de potencias en las ecuaciones [(5.2), (5.3)].

Dicho esto, vemos que cada vez que encontremos una intersección entre los autovalores radial y angular, es decir, cuando se cumpla que  $E_n^{rad}(a, s, m, \omega) = E_\ell^{ang}(a, s, m, \omega) =: E$ , habremos obtenido una solución al sistema de ecuaciones diferenciales [(5.2), (5.3)]. Dada la terna  $(a, s, m)$ , tendremos una solución para cada una de las intersecciones existentes entre las curvas  $E_\ell^{ang}$  como función de  $\omega$  y  $E_n^{rad}$  como función de  $\omega$ , siendo las frecuencias permitidas las correspondientes a cada punto de intersección. Este es el tipo de razonamiento que utilizaremos, en la **Parte II** de esta tesis, para demostrar la existencia de modos inestables en la singularidad desnuda y en el interior de un agujero negro de Kerr.

Es importante notar que la singularidad anillo del espaciotiempo de Kerr ( $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ ) *no es* un punto singular del sistema de ecuaciones de Teukolsky por lo que no es relevante al momento de analizar sus soluciones. Esto es diferente a lo que ocurre con los espaciotiempo esféricamente simétricos, en los que la singularidad de los mismos (ubicada en  $r = 0$ ) también es un punto singular en las ecuaciones que describen las perturbaciones lineales (ver por ejemplo el trabajo [53] y las citas y las referencias a él y en él realizadas).

Tanto la ecuación angular (5.2) como la radial (5.3), excluyendo el caso del espaciotiempo de Kerr extremo, pueden reescribirse de forma que sus soluciones puedan expresarse en función de las funciones de Heun confluentes:  $HeunC[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z]$ . El caso extremo debe estudiarse con otros métodos ya que en ese caso las ecuaciones de Teukolsky pueden escribirse como una ecuación de Heun doblemente confluyente. Las propiedades de ambas ecuaciones y sus soluciones se encuentran, extensamente, analizadas en [62].

En este momento, haremos una breve presentación de la ecuación de Heun y alguna de sus propiedades. Dicha ecuación puede ser escrita en lo que se conoce como su *forma normal de Schrödinger*:

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \mathcal{P}(z) \right\} u(z) = 0.$$

Esta ecuación y sus respectivas soluciones pueden separarse en diferentes familias (o casos) en función de cuáles sean los puntos singulares (y su naturaleza) de la función  $\mathcal{P}(z)$ :

- Función *general* de Heun. En este caso  $\mathcal{P}(z)$  tiene, ubicados en  $z = 0, 1, b, \infty$ , cuatro puntos singulares regulares. Por este motivo la función  $\mathcal{P}(z)$  puede escribirse como:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_b}{z-b} + \frac{B_0}{z^2} + \frac{B_1}{(z-1)^2} + \frac{B_b}{(z-b)^2},$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  son parámetros y  $b$  no puede ser ni 0 ni 1.

---

<sup>3</sup>Notar que el concepto de *bien comportada* puede ser elegido de formas diferentes, esto nos puede llevar a distintas familias de autovalores radiales.

- Función *confluente* de Heun. En este caso  $\mathcal{P}(z)$  tiene dos puntos singulares regulares ubicados en  $z = 0, 1$  y uno irregular en  $z = \infty$  y la función  $\mathcal{P}(z)$  se escribe como:

$$\mathcal{P}(z) = A_\infty + \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + \frac{B_0}{z^2} + \frac{B_1}{(z-1)^2},$$

donde  $A_i$  y  $B_i$  son, nuevamente, constantes.

- Función *doblemente confluente* de Heun. En este caso  $\mathcal{P}(z)$  tiene dos puntos singulares irregulares ubicados en  $z = 0, \infty$  y la función  $\mathcal{P}(z)$  se escribe como:

$$\mathcal{P}(z) = A_\infty + \frac{A_0}{z} + \frac{B_0}{z^2} + \frac{C_0}{z^3} + \frac{D_0}{z^4},$$

donde  $A_i$  y  $B_0, C_0$  y  $D_0$ , son constantes.

- Función *biconfluente* de Heun. En este caso  $\mathcal{P}(z)$  tiene un punto singular regular ubicado en  $z = 0$  y otro singular irregular ubicado en  $z = \infty$  y la función  $\mathcal{P}(z)$  se escribe como:

$$\mathcal{P}(z) = A_\infty z^2 + B_\infty z + C_\infty + \frac{A_0}{z} + \frac{B_0}{z^2},$$

donde  $A_i, B_i$  y  $C_\infty$ , son constantes.

- Función *triconfluente* de Heun. En este caso  $\mathcal{P}(z)$  tiene un punto singular irregular ubicado en  $z = \infty$  y la función  $\mathcal{P}(z)$  se escribe como:

$$\mathcal{P}(z) = A_\infty z^4 + B_\infty z^3 + C_\infty z^2 + D_\infty z + E_\infty,$$

donde  $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$  y  $E_\infty$ , son nuevamente constantes.

### La ecuación angular

Veamos algunas de las propiedades fundamentales de las soluciones de la ecuación angular de Teukolsky. Para ello, notemos que la ecuación (5.2) puede reescribirse, introduciendo una nueva variable definida como  $x = \cos \theta$ , de modo que tome la forma:

$$(1-x^2) \frac{d^2 S(x)}{dx^2} - 2x \frac{dS(x)}{dx} - \left( a^2 \omega^2 x^2 - \frac{m^2 + s^2}{1-x^2} - \frac{2msx}{1-x^2} - 2a\omega s x - E \right) S(x) = 0. \quad (5.4)$$

En la ecuación (5.4), para simplificar notación, eliminamos los índices  $(s, l, m)$  de los que, tanto las autofunciones  $S(x)$  como los autovalores  $E(a\omega) \equiv E$  dependen.

Esta ecuación presenta tres puntos singulares, dos regulares ubicados en  $x = \pm 1$  y el otro irregular en  $x = \infty$ .

Veamos que tipo de comportamiento presenta la ecuación (5.4) en el entorno de cada uno de estos puntos singulares. Alrededor de  $x = 1$ , el término dominante de la solución es:

$$(1-x)^{\left| \frac{m-s}{2} \right|},$$

mientras que en el entorno de  $x = -1$  es:

$$(1+x)^{\left| \frac{m+s}{2} \right|}$$

y cuando  $x \rightarrow \infty$ , el término dominante de la solución asintótica es:

$$\exp(\pm a\omega x).$$

Luego de haber presentado este análisis resultará útil introducir dos nuevas funciones a determinar,  ${}_s U_{l,m}^\pm(x) \equiv U^\pm(x)$ , de modo que la solución puede expresarse como:

$$S(x) = \exp(\pm a\omega) \left( \frac{1-x}{2} \right)^{\left| \frac{m+s}{2} \right|} \left( \frac{1+x}{2} \right)^{\left| \frac{m-s}{2} \right|} U^\pm(x). \quad (5.5)$$

De esta forma, podemos ver que las funciones  $U^+(x)$  y  $U^-(x)$  están vinculadas entre sí del siguiente modo:

$$U^-(x) = \exp(2\alpha\omega x)U^+(x).$$

Introduciendo la expresión (5.5) para la función  $S(x)$  en (5.4), obtenemos la ecuación diferencial que deben satisfacer cada una de las funciones incógnita:

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{d^2U^\pm}{dx^2} + \left[ |m-s| - |m+s| - (2+|m+s|+|m-s|)x \pm 2a\omega(1-x^2) \right] \frac{dU^\pm}{dx} \\ + \left[ E + a^2\omega^2 - \frac{|m+s|+|m-s|}{2} \left( \frac{|m+s|+|m-s|}{2} + 1 \right) \right. \\ \left. \pm a\omega(|m-s| - |m+s|) \mp a\omega(|m+s| + |m-s| + 2 \pm 2s)x \right] U^\pm = 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación es similar a la que satisfacen los polinomios de Jacobi, definidos, mediante la fórmula de Rodrigues, del siguiente modo:

$$P_n^{(d,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-d} (1+x)^{-b} \left( \frac{d}{dx} \right)^n [(1-x)^{d+n} (1+x)^{b+n}].$$

Estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2} - [b-d - (d+b+2)x]\frac{dF}{dx} + n(n+d-b+1)F = 0. \quad (5.6)$$

Estudiamos la relación existente entre esta última ecuación y la que satisfacen  $U^\pm$ . Si analizamos el caso particular en el que  $d = |m+s|$  y  $b = |m-s|$  y realizamos, además, la identificación  $E(0) = l(l+1)$ , donde  $l = n + \max(|m|, |s|)$ , podemos ver que las ecuaciones que satisfacen  $U^\pm(x)$  coinciden con (5.6). Notar que  $E$ , el autovalor de la ecuación diferencial, es función de la cantidad  $a\omega$  y que con  $E(0)$  estamos denotando al valor que toma cuando  $a\omega = 0$ .

La relación presentada en estos últimos párrafos lleva a proponer para las soluciones a la ecuación (5.4) una expresión en término de funciones de Jacobi de la forma:

$$U^\pm = \sum_j C_j^\pm P_j^{(|m+s|, |m-s|)}(x), \quad (5.7)$$

donde en los coeficientes  $C_j^\pm$  que deben ser determinados. Nuevamente, hemos omitido, para simplificar la notación, su dependencia con los índices  $(s, l, m)$  y su dependencia funcional con  $a\omega$ . Veamos lineamientos generales del proceso de determinación para determinarlos. Para ello debemos investigar algunas propiedades que poseen los polinomios de Jacobi. Para nuestra tarea, las que resultaran útiles son: una relación de recurrencia y la de diferenciación de los mismos:

$$\begin{aligned} xP_j^{(|m+s|, |m-s|)}(x) &= \frac{2(n+1)(n+|m+s|+|m-s|+1)}{(2n+|m+s|+|m-s|+1)(2n+|m+s|+|m-s|+2)} P_{j+1}^{(|m+s|, |m-s|)}(x) \\ &\quad - \frac{4ms}{(2n+|m+s|+|m-s|)(2n+|m+s|+|m-s|+2)} P_j^{(|m+s|, |m-s|)}(x) \\ &\quad + \frac{2(n+|m+s|)(n+|m-s|)}{(2n+|m+s|+|m-s|)(2n+|m+s|+|m-s|+1)} P_{j-1}^{(|m+s|, |m-s|)}(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

y

$$\begin{aligned} (1-x^2)\frac{dP_j^{(|m+s|, |m-s|)}(x)}{dx} &= -\frac{2n(n+1)(n+|m+s|+|m-s|+1)}{(2n+|m+s|+|m-s|+1)(2n+|m+s|+|m-s|+2)} P_{j+1}^{(|m+s|, |m-s|)}(x) \\ &\quad - \frac{(|m+s|-|m-s|)2n(n+|m+s|+|m-s|+1)}{(2n+|m+s|+|m-s|)(2n+|m+s|+|m-s|+2)} P_j^{(|m+s|, |m-s|)}(x) \\ &\quad + \frac{2(n+|m+s|)(n+|m-s|)(n+|m+s|+|m-s|+1)}{(2n+|m+s|+|m-s|)(2n+|m+s|+|m-s|+1)} P_{j-1}^{(|m+s|, |m-s|)}(x). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Introduciendo la expresión en serie de polinomios de Jacobi (5.7) en (5.9 y 5.10) obtenemos las relaciones de recurrencia de tres términos que satisfacen los coeficientes  $C_j^\pm$ .

Para el caso especial en el que  $j = 0$  se tiene que:

$$\left[ E + a^2\omega^2 - \frac{|m+s| + |m-s|}{2} \left( \frac{|m+s| + |m-s|}{2} + 1 \right) + \frac{2sa\omega(|m+s| - |m-s|)}{|m+s| + |m-s| + 2} \right] C_0^\pm \pm \frac{4a\omega(|m+s| + 1)(|m-s| + 1)(|m+s| + |m-s|)/2 + 1 - s}{|m+s| + |m-s| + 2)(|m+s| + |m-s| + 3)} C_1^\pm = 0.$$

Para el resto de los valores de  $j$  la relación viene dada por:

$$\mp \frac{4a\omega(j + |m+s| + 1)(j + |m-s| + 1)(j + (|m+s| + |m-s|)/2 + 1 \mp s)}{(2j + |m+s| + |m-s| + 2)(2j + |m+s| + |m-s| + 3)} C_{j+1}^\pm \left[ E + a^2\omega^2 - \left( \frac{|m+s| + |m-s|}{2} + j \right) \left( \frac{|m+s| + |m-s|}{2} + j + 1 \right) + \frac{2sa\omega(|m+s| - |m-s|)(|m+s| + |m+s| + |m-s|)}{(2j + |m+s| + |m-s|)(2j + |m+s| + |m-s| + 2)} \right] C_j^\pm \mp \frac{4a\omega j(j + |m+s| + |m-s|)(j + (|m+s| + |m-s|)/2 \pm s)}{2j + |m+s| + |m-s| - 1)(2j + |m+s| - |m-s|)} C_{j-1}^\pm = 0.$$

Analizando el comportamiento de los coeficientes para valores grandes de  $j$ , llegamos a la conclusión de que, a menos que  $E$  sea elegido de manera apropiada, los mismos crecerán de forma indefinida por lo que las soluciones (5.7) no estarán definidas apropiadamente. Se debe, por lo tanto, elegir  $E$  de forma que a partir de cierto valor de  $j$  los coeficientes se anulen. El autovalor puede ser representado como una fracción continua, pudiendo obtenerse una expresión en serie en  $(a\omega)^z$  al orden deseado en  $z$ . Las fórmulas necesarias para realizar este desarrollo en serie, así como detalles del mecanismo para obtenerlas, pueden encontrarse en ([63], [64], [65], [66]). A continuación presentamos los primeros términos de esta serie:

$$E = l(l+1) - \frac{2ms}{l(l+1)}a\omega + \mathcal{O}\left((a\omega)^2\right).$$

### La ecuación radial

Ahora haremos un repaso de algunas propiedades de la ecuación radial de Teukolsky y de sus soluciones. Volvemos a escribir (5.3), la ecuación que rige el comportamiento de la parte radial de la perturbación al espaciotiempo de Kerr:

$$\frac{d^2 R_s(r)}{dr^2} + \frac{(s+1)}{\Delta} \frac{d\Delta}{dr} \frac{dR_s(r)}{dr} + \left\{ \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta^2} + \frac{4ir\omega s}{\Delta} - \frac{[E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1)]}{\Delta} \right\} R_s(r) = 0.$$

Analizaremos, a continuación, un conjunto de simetrías que poseen sus soluciones.

Si nos restringimos a estudiar frecuencias,  $\omega$ , reales resulta cierto que:

$$R_{s,l,m}(r, \omega) \sim \bar{R}_{s,l,-m}(r, -\omega), \\ \bar{R}_{s,l,m}(r, \omega) \sim \Delta^{-s} R_{-s,l,m}(r, \omega),$$

donde con  $\sim$  estamos denotando dos cantidades que son iguales o que difieren, solamente, en una constante multiplicativa.

Una de las principales complicaciones que se tiene al intentar resolver la ecuación radial de Teukolsky es que el potencial efectivo que aparece en (5.3), es, en el caso de perturbaciones genéricas, una función explícita de la frecuencia  $\omega$ .

Estudiemos, con algo de detalle, esta última afirmación. Para ello, presentaremos el siguiente cambio de variable radial:

$$\frac{d}{du} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \frac{d}{dr},$$

que, junto con una nueva función radial:

$$\tilde{R} = \sqrt{r^2 + a^2} \Delta^{s/2} R,$$

nos permite escribir a la ecuación radial de Teukolsky (5.3) en la forma:

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{du^2} + \left[ \frac{K^2 - 2is(r-M)K + \Delta(4isr\omega - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - Y^2 - \frac{dY}{du} \right] \tilde{R} = 0,$$

donde  $Y = s \frac{r-M}{r^2+a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2+a^2)^2}$  y  $\lambda = E - s(s+1) + a^2\omega^2 - 2am\omega$ .

Las formas asintóticas ( $r \rightarrow \infty$ ) de las soluciones pueden obtenerse en forma simple y se expresan como:

$$R \sim \frac{1}{r^{2s+1}} e^{i\omega u} \quad R \sim \frac{1}{r} e^{-i\omega u}.$$

Para el caso del agujero negro, las soluciones en el entorno del horizonte de eventos,  $r = r_+$ , se escriben como:

$$R \sim e^{i(\omega - ma/(2Mr_+))u} \quad ; \quad R \sim \frac{1}{\Delta^s} e^{-i(\omega - ma/(2Mr_+))u}.$$

A continuación, presentaremos las *identidades de Teukolsky-Starobinski* (ver, por ejemplo, el libro (II) de [1]).

Consideremos las perturbaciones correspondientes a un campo gravitacional con  $s = -2$ . El análisis del comportamiento asintótico de las ondas salientes muestra que las mismas presentan un decaimiento radial inversamente proporcional a  $r$ , mientras que las ondas entrantes decaen “más rápidamente”, como  $r^{-5}$ . Este comportamiento tan diferenciado parecería indicar que, si se conociera únicamente la solución  $\Psi_4$  a las ecuaciones de Teukolsky, no podrían obtenerse todas las características de la perturbación, sino, únicamente, el flujo saliente de la onda. En realidad esto no es cierto ya que cada uno de estos escalares contiene toda la información necesaria para describir al campo. Esto se debe a que la solución para ( $s = -2$ ),  $\Psi_4$ , y la correspondiente a ( $s = 2$ ),  $\Psi_0$ , no son linealmente independientes. Las relaciones entre dichas soluciones se conocen como *identidades de Teukolsky-Starobinski* y relacionan las soluciones con peso de espín positivo con las de peso de espín negativo. Para presentar estas relaciones, que dependen del valor del peso de espín, introduciremos un par de operadores adjuntos que serán de gran utilidad:

$$\mathcal{D}_n = \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}, \quad \mathcal{D}_n^\dagger = \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta}.$$

Para el caso de perturbaciones gravitacionales, este importante resultado resulta válido: si exigimos que el uso simultáneo de estas dos transformaciones den como resultado la identidad, se pueden elegir normalizaciones relativas para las funciones  $R_{-2}$  y  $\Delta^2 R_2$  de modo que satisfagan el siguiente par de relaciones:

$$\Delta^2 \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 R_{-2} = \mathcal{C} \Delta^2 R_2$$

y

$$\Delta^2 \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0^\dagger \Delta^2 R_2 = \bar{\mathcal{C}} R_{-2}.$$

De esta manera, queda definida la constante de proporcionalidad,  $\mathcal{C}$ , entre ambas funciones. El módulo cuadrado de esa constante compleja recibe en nombre de *constante de Starobinski*. Para perturbaciones gravitacionales la misma puede escribirse como:

$$|\mathcal{C}|^2 = \lambda^2(\lambda + 2)^2 - 8\omega^2\lambda[\alpha^2(5\lambda + 6) - 12a^2] + 144\omega^2(\alpha^4\omega^2 + 1), \quad (5.10)$$

donde:

$$\alpha^2 = a^2 - \frac{am}{\omega}, \quad \lambda = E - 2am\omega + a^2\omega^2 - s(s+1).$$

Existe una familia especial de soluciones a la ecuación radial de Teukolsky para las cuales la constante de Starobinski (5.10) se anula. Estas soluciones, introducidas por Chandrasekhar en el año 1984, reciben el nombre de *modos algebraicamente especiales*. El nombre se refiere a que para estos modos únicamente uno de los escalares de Weyl  $\Psi_{0,4}$  no es nulo.

En el caso del espaciotiempo de Schwarzschild, la expresión (5.10) se simplifica y puede escribirse como:

$$\mathcal{C}_{a=0} = (\ell - 1)\ell(\ell + 1)(\ell + 2) - 12i\omega M.$$

De esta forma, vemos que los modos algebraicamente especiales de Chandrasekhar quedan caracterizados por una única frecuencia imaginaria pura.

En la [Apéndice A](#) se describe el formalismo base que se utiliza para estudiar perturbaciones lineales al espaciotiempo de Kerr y se presentan las ecuaciones fundamentales que definen su comportamiento.

A continuación, pasaremos a estudiar estas ecuaciones con más detalle, esto resultará imprescindible para los desarrollos que presentaremos en los siguientes capítulos. Hay que marcar que vamos a restringir nuestro estudio a la familia de perturbaciones que preserva la simetría axial del espaciotiempo de Kerr. Si bien esta es, desde un punto de vista formal, una gran restricción, veremos que, dado que estamos interesados en demostrar la inestabilidad de este espaciotiempo, la misma no resultará relevante. Por este motivo, la obtención de perturbaciones bien comportadas espacialmente y con crecimientos exponenciales en el tiempo, aún para esta familia particular de modos, resultará suficiente para nuestro propósito.

## 5.2. Perturbaciones axialmente simétricas

La demostración de estabilidad de una configuración de equilibrio es, por lo general, mucho más compleja que la que se necesita realizar para mostrar su inestabilidad. Para lo primero se debe mostrar que para *todo* tipo de perturbación la configuración resulta estable, mientras que para lo segundo es suficiente encontrar *al menos una* perturbación ante la cual la configuración se desestabiliza.

En este sentido, y dado que estamos intentando dar una prueba de inestabilidad, podemos decir que restringir nuestro análisis a perturbaciones con simetría axial no resultará, en caso de demostrar la existencia de modos inestables, una restricción de relevancia. La mecánica de trabajo será la siguiente, propondremos la existencia de modos con frecuencia imaginaria pura (modos inestables) y veremos si esta suposición produce o no a una contradicción.

Analizaremos por separado la ecuación angular y la radial de Teukolsky, comenzando con la angular ya que su comportamiento es independiente del parámetro de rotación,  $a$ . De esta forma, las conclusiones que obtengamos serán aplicables tanto al estudio de estabilidad del espaciotiempo de Kerr extremo como al de la región interna del agujero negro de Kerr que presentaremos en el [Capítulo 6](#).

### 5.2.1. Ecuación angular de Teukolsky

Las soluciones regulares sobre la esfera a la ecuación angular reciben el nombre de *Armónicos Esferoidales con Peso de Espín* (AsEPE).<sup>4</sup> En el [Sección 5.1](#) discutimos sus principales propiedades y características junto con sus relaciones con otras ecuaciones diferenciales como la de Heun. Pasemos ahora a estudiar las propiedades de los mismos en nuestro caso de interés, es decir cuando  $m = 0$  y  $\omega = ik$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

#### Comportamiento del autovalor angular

Recordemos la expresión [\(5.2\)](#) para la ecuación diferencial ordinaria que describe el comportamiento de la parte angular de una perturbación de vacío al espaciotiempo de Kerr:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left( a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 2a\omega s \cos \theta - \frac{(m + s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + E - s^2 \right) S = 0.$$

Denotaremos con  $E_\ell(s, m, a\omega)$  al autovalor de la ecuación angular de Teukolsky para modos axiales. La notación utilizada para etiquetar los autovalores no está unificada en la literatura, en esta tesis, definiremos al índice  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  con el que etiquetamos a los autovalores dado un conjunto fijo de parámetros  $(s, m, a\omega)$  de modo que  $\ell = 0$  es, *independientemente* del valor de  $s$ , el autovalor correspondiente al estado fundamental.

Para el caso en que  $\omega$  es un número complejo genérico y  $m$  no necesariamente nulo se encuentran disponibles desarrollos en serie de Taylor hasta orden  $a^6 \omega^6$  [\[64\]](#). El procedimiento que se utiliza para obtener este desarrollo en serie consiste en resolver la relación de recurrencia de tres términos que se obtiene al plantear al problema de autovalores como una fracción continua.

En los trabajos en los cuales se basan los resultados presentados en este capítulo, desarrollamos una manera alternativa de obtener aproximaciones numéricas a estos resultados analíticos de una manera muy simple. Pasamos a describir los aspectos fundamentales de dicho mecanismo.

<sup>4</sup>En la literatura inglesa se los conoce como *Spin-Weighted Spheroidal Harmonics* (SWSHs).

Primero, analicemos las simetrías que posee la ecuación diferencial que satisfacen los AsEPE. Dada una solución a esta ecuación diferencial denotada, de modo simplificado, por el par  $(S(\theta), E)$  dada la terna  $(s, m, \omega)$  es posible demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

- $(S(\pi - \theta), E)$  es una solución a la ecuación angular de Teukolsky para las ternas de parámetros  $(s, -m, -\omega)$  y  $(-s, m, \omega)$ ,
- $(\overline{S(\theta)}, \overline{E})$  es una solución a la ecuación angular de Teukolsky para la terna de parámetros  $(s, m, \overline{\omega})$ .

Dicho esto podemos obtener las siguientes relaciones para el autovalor angular:

$$E_\ell(s, m, a\omega) = E_\ell(s, -m, -a\omega) = E_\ell(-s, m, a\omega) = \overline{E_\ell(s, m, a\overline{\omega})}. \quad (5.11)$$

Este es un resultado general, si lo particularizamos para las perturbaciones axiales que nos interesa estudiar, es decir aquellas para las cuales  $m = 0$  y  $a\omega = ik$ , obtenemos soluciones angulares con parte real e imaginaria cuyas paridades están definidas y son diferentes entre sí. Para ello, se deben tomar combinaciones lineales de la forma  $S(\theta) \pm \overline{S(\pi - \theta)}$ . Además, como podemos ver de la ecuación (5.11), los autovalores resultan ser reales:

$$E_\ell(s, m = 0, a\omega = ik) = \overline{E_\ell(s, m = 0, a\omega = ik)}.$$

Para nuestra demostración de la existencia de modos inestables resulta central comprender correctamente el comportamiento del autovalor  $E_\ell(s, m = 0, ik)$  en dos casos límites: cuando  $k \rightarrow 0^+$  y cuando  $k \rightarrow \infty$ . Estudiaremos estos casos límites por separado.

Primero, notemos que podemos, dadas las simetrías de la ecuación angular de Teukolsky, suponer, sin perder generalidad, que  $s \geq 0$ . Haciendo el cambio de variables  $x = \cos(\theta)$ , vemos que la ecuación angular de Teukolsky (5.4) tiene, cualquiera sea el valor de  $k$ , dos puntos singulares regulares, ubicados en  $x = \pm 1$ . Los comportamientos locales de la solución en los mismos son de la forma:  $(1 - |x|)^{\frac{s}{2}}$  ó  $(1 - |x|)^{-\frac{s}{2}}$ .

Para  $k = 0$  podemos expandir las soluciones regulares en una serie de potencias:

$$S(x) = (1 - x^2)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (1 - x)^j. \quad (5.12)$$

Al imponer que la misma satisfaga la ecuación angular de Teukolsky (5.4), obtenemos la siguiente relación de recurrencia que define a los coeficientes indeterminados  $a_n$ :

$$2(j+1)(j+1+s)a_{j+1} - ((j+s)(j+s+1) - E)a_j = 0,$$

puede verse que, para valores grandes de  $j$ , el comportamiento de estos coeficientes cumplen con la relación:  $a_{j+1} \sim a_j/2$ . Si esto fuese así, la serie definida en (5.12) resultará divergente. Para que este no sea el caso debe imponerse que la misma se trunque a la forma de un polinomio de grado  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Para lograr esto, debe exigirse que el autovalor,  $E$ , satisfaga la condición:  $E = (\ell + s)(\ell + s + 1)$ . Usando el mismo razonamiento para valores negativos de  $s$  puede obtenerse una relación general que viene dada por:

$$E = E_\ell^{ang}(s, m = 0, a\omega = 0) = (\ell + |s|)(\ell + |s| + 1).$$

Un análisis más detallado (ver, por ejemplo, [60]), muestra que el comportamiento en el límite para  $\omega \sim 0$  es el siguiente:

$$E = E_\ell^{ang}(s, m = 0, a\omega) = (\ell + |s|)(\ell + |s| + 1) + \mathcal{O}(a\omega),$$

donde únicamente se presenta el término dominante. Consideramos importante recordar que existen en la literatura desarrollos hasta orden  $(a\omega)^6$  (ver [64] y referencias allí mencionadas) y que obtener los siguientes coeficientes no resulta complejo con la ayuda de una computadora personal.

El estudio asintótico para el caso  $a\omega = ik$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , es bastante más sutil. En [60] se propone el siguiente comportamiento asintótico para el autovalor angular cuando  $k \rightarrow \infty$ :<sup>5</sup>

$$E_\ell^{ang}(s, m, a\omega = ik) = (2\ell + 1)k + \mathcal{O}(k^0). \quad (5.13)$$

Si bien esta relación no ha sido aún demostrada en forma general, existen fuertes argumentos numéricos de su validez (ver el trabajo [60] para los casos  $s = 1, 2$  y resultados propios [67] para el caso  $s = 1/2$ ). En

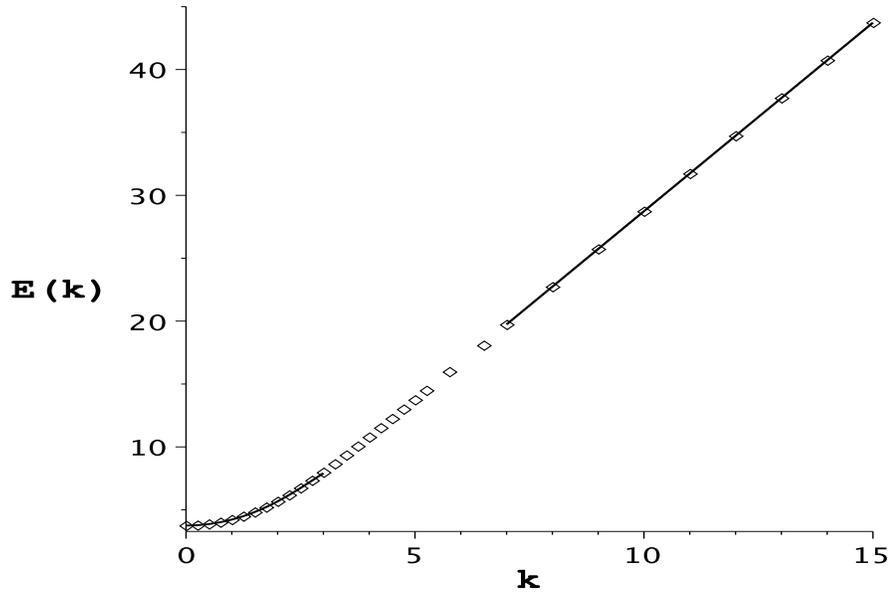


Figura 5.1: Autovalor angular de Teukolsky para perturbaciones axialmente simétricas ( $m = 0$ ) y de frecuencia imaginaria pura ( $a\omega = ik$ ) debidas a un campo espinorial de Weyl ( $s = 1/2$ ). Con cuadrados se presentan los resultados obtenidos numéricamente. Para  $k < 3$  en línea continua la expresión obtenida al utilizar la expresión en serie de potencias en  $a\omega$  hasta orden 6. Para  $k > 7$ , también en línea continua, se superpone el ajuste lineal (5.13). Se ve el excelente acuerdo entre los resultados.

la Figura 5.1 mostramos el ajuste existente entre la relación lineal (5.13) y los valores obtenidos en forma numérica para el autovalor, la coincidencia obtenida es excelente.

A continuación, presentamos el mecanismo utilizado para construir numéricamente la curva  $E(a\omega)$  para perturbaciones con diferentes valores del peso de espín. La ecuación angular de Teukolsky posee puntos singulares regulares en  $x = \pm 1$ , por lo que existe una solución regular de Frobenius en torno a  $x = -1$  cuya forma viene dada por:

$$\mathcal{S}_{-1}(x) = \sum_{n \geq 1} c_n(E, k)(x + 1)^n,$$

y otra solución, linealmente independiente, con comportamiento divergente (como  $\ln(1 + x)$ ). Puede demostrarse que esta serie converge cuando  $|x + 1| < 2$  (ver [68]) y se anula cuando  $x = 1$  siempre que para algún valor  $\ell$  se satisfaga que  $E = E_\ell(a\omega)|_{a\omega=ik}$ . Por este motivo, la solución  $\mathcal{S}_{-1}(x)$  puede, en este caso, diferir, únicamente, en una constante multiplicativa respecto de la solución de Frobenius en torno de  $x = 1$ . Como vimos, la regularidad en el intervalo  $[-1 : 1]$  se desprende de la regularidad en  $x = -1$  si se impone la condición:

$$S(x) = \overline{S(-x)}. \quad (5.14)$$

Dadas las simetrías que posee la ecuación angular de Teukolsky, uno puede restringir, sin perder generalidad, el estudio a soluciones que poseen parte real e imaginaria de paridad definida y opuesta.

Notemos, en este momento, que la condición (5.14) es equivalente, dado que la función  $S$  satisface la ecuación angular de Teukolsky, a  $\mathcal{I}m(S(0)) = \mathcal{R}e(S'(0)) = 0$ . Por lo que en particular, si:

$$S = \overline{\mathcal{S}_{-1}(0)}\mathcal{S}_{-1}(x) = \sum_{m, n \geq 1} c_n(E, k)\overline{c_m(E, k)}(1 + x)^n,$$

tendremos que las soluciones  $E(k)$  a la ecuación:

$$0 = \mathcal{R}e(S'(0)) = \frac{1}{2} \sum_{n, m \geq 1} n(c_n(E, k)\overline{c_m(E, k)} + \overline{c_n(E, k)}c_m(E, k)) \equiv \mathcal{D}(E, k), \quad (5.15)$$

<sup>5</sup>Hemos cambiado la notación para que sea consistente con la utilizada en esta tesis.

se corresponderán con  $E = E_\ell(a\omega)|_{a\omega=ik}$  para algún valor de  $\ell$  y, además, para esos valores de  $E$ , la función  $S(x)$  será regular en el intervalo  $[-1 : 1]$ .

La forma en la que se calcula, para valores arbitrarios del parámetro de espín, el autovalor angular como función de  $k$  para un valor de  $\ell$ , es detallada a continuación:

- Primero, se reemplaza  $\mathcal{S}_{-1}(x)$  por su serie explícita de potencias y luego,
- se resuelve, para diferentes valores de  $k$ , la ecuación (5.15) en forma numérica para obtener la menor de las soluciones  $E$  (esto es  $\ell = 2$ ).

Para el caso específico  $s = 1/2$ , mostramos los resultados en la curva presentada en la Figura 5.1 y para perturbaciones gravitacionales ( $s = 2$ ), en la Figura 5.2.

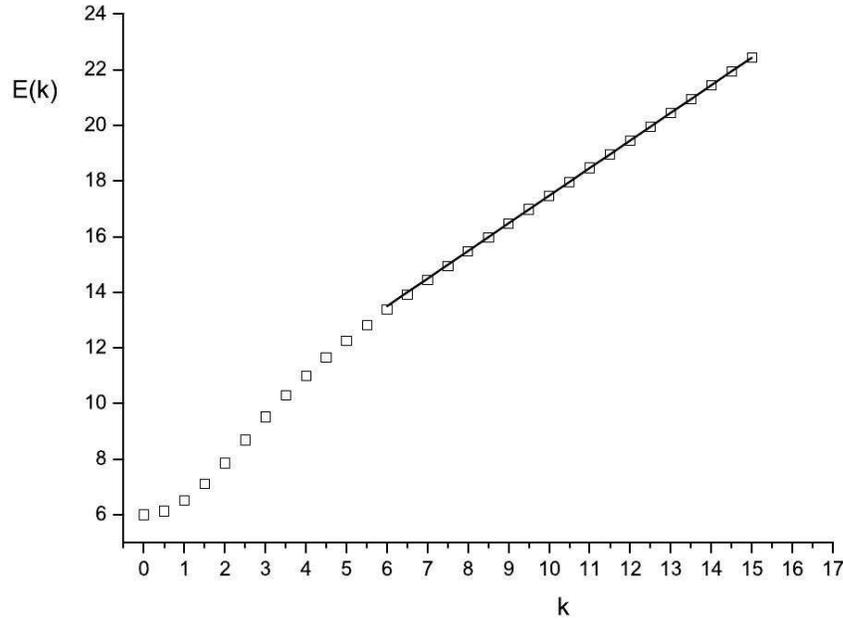


Figura 5.2: Autovalor angular de Teukolsky para perturbaciones axialmente simétricas ( $m = 0$ ) y de frecuencia imaginaria pura ( $a\omega = ik$ ) debidas a un campo gravitacional ( $s = 2$ ). Con cuadrados presentamos los resultados obtenidos numéricamente. En línea continua, el ajuste lineal (5.13). Se ve el excelente acuerdo entre los dos resultados.

### 5.2.2. Ecuación radial de Teukolsky

Veremos como puede reducirse la ecuación radial de Teukolsky a la forma de una ecuación tipo Schrödinger cuando se restringe el estudio a perturbaciones axialmente simétricas y de frecuencia imaginaria pura. Esta transformación resulta, como quedará claro más adelante, central para nuestros posteriores estudios, razón por la cual haremos una presentación detallada de la misma.

La ecuación radial de Teukolsky (5.3) puede ser escrita como:

$$\Delta \ddot{R} + Q \dot{R} + (Z - E)R = 0,$$

donde con  $\dot{X}$  se denota la derivada de una función  $X$  respecto a la coordenada  $r$ .

Si se introduce un factor integrante  $L$ , se cambia la función radial  $R$  por  $\psi = R/L$  y se define una nueva coordenada radial,  $r^*$ , que satisfaga la condición  $\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{f}$ , donde  $f$  es una función arbitraria de  $r$  definida positiva, se obtendrá que la nueva función radial,  $\psi$ , satisface la siguiente ecuación:

$$-\psi'' + \left( \frac{f'}{f} - \frac{2L'}{L} - \frac{fQ}{\Delta} \right) \psi' + \left( \frac{L'f'}{Lf} - \frac{L''}{L} - \frac{fQL'}{L\Delta} - \frac{f^2Z}{\Delta} \right) \psi = \frac{f^2}{\Delta} E\psi, \quad (5.16)$$

donde cantidades primadas denotan haber sido derivadas respecto a la coordenada radial  $r^*$ .

Debe tenerse presente que la función  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$  es siempre positiva, tanto en el caso del espaciotiempo de Kerr súper extremo ahora bajo estudio, como en la región interna del agujero negro de Kerr a la que dedicaremos el próximo capítulo. Por tal motivo, podemos elegir a la función arbitraria  $f$  como  $f = \sqrt{\Delta}$ . Para conseguir que el coeficiente de  $\psi'$  se anule, elegimos el factor integrante como:  $L = \Delta^{\frac{2s+1}{4}}$ .

Luego de esto, la ecuación (5.16) adquiere la forma de una ecuación de Schrödinger estacionaria con autovalor  $-E$  que puede escribirse como:

$$\mathcal{H}\psi := \psi'' + V\psi = -E\psi. \quad (5.17)$$

En el caso particular que estamos estudiando ( $m = 0$ ,  $a\omega = ik$ ), el potencial en esta ecuación tipo Schrödinger tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} V = - \left( \frac{\Delta \ddot{L}}{L} + \frac{Q \dot{L}}{L} + Z \right) &= \left[ \frac{r(r^3 + a^2r + 2Ma^2)}{a^2(r^2 - 2Mr + a^2)} \right] k^2 + 2s \left[ \frac{r^3 - 3Mr^2 + a^2r + Ma^2}{a(r^2 - 2Mr + a^2)} \right] k \\ &+ \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{(M^2 - a^2)(4s^2 - 1)}{r^2 - 2Mr + a^2} \right] =: V_2 k^2 + V_1 k + V_0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A continuación demostraremos que el espectro de autovalores del Hamiltoniano (5.17) es discreto. Estos autovalores serán denotados con  $E_n^{rad}(s, m = 0, a\omega = ik)$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . La elección (arbitraria) del índice  $n$ , logra mantener la consistencia con otras convenciones que fueron utilizadas en esta tesis.

En lo que queda de este capítulo, veremos cómo el hecho de que el potencial  $V$  se vuelva negativo en el intervalo de la coordenada radial  $r_n(M) < r < 0$ , permite demostrar la existencia de estados ligados. De esta forma quedará demostrada la existencia de soluciones exponencialmente crecientes en el tiempo a la ecuación en derivadas parciales de Teukolsky que satisfacen, además, condiciones de contorno apropiadas. Estas soluciones son los *modos inestables* cuya existencia pretendemos demostrar.

### Comportamiento del autovalor radial

Por cuestiones que pronto quedarán claras, este estudio no puede realizarse en forma general. Por este motivo separaremos el estudio de perturbaciones en tres casos: 1) el del espaciotiempo súper extremo de Kerr y el de la región interna del agujero negro de Kerr, 2) extremo y 3) subextremo.

En este capítulo estamos restringiendo el estudio al caso  $a^2 > M^2$ , por lo que las coordenadas de Boyer-Lindquist ( $-\infty < r < \infty, t, \theta, \phi$ ) son globales y  $\Delta > 0$  en todo el espaciotiempo.

Haciendo la elección  $f = 1/\sqrt{\Delta}$ , obtenemos la nueva coordenada radial adimensionalizada,  $r^*$ , a partir de la relación  $dr^*/dr = 1/f$ . En forma explícita la misma puede expresarse como:

$$r^* = \ln \left( \frac{r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr + a^2}}{M} \right). \quad (5.19)$$

Un análisis detallado de la misma permite concluir que su comportamiento asintótico está dado por:

$$r^* \simeq \begin{cases} \ln \left( \frac{2r}{M} \right), & r \rightarrow \infty, \\ \ln \left( \frac{a^2 - M^2}{2M|r|} \right), & r \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Puede verse que  $r^*$  presenta un crecimiento monótono con  $r$ . Además, la relación  $r^*(r)$  (5.19) puede invertirse en términos de funciones elementales para obtener la expresión para  $r(r^*)$ :

$$r = \frac{M \exp(r^*)}{2} + M + \frac{M^2 - a^2}{2M} \exp(-r^*).$$

Ahora queda planteado que la ecuación (5.17) define un problema mecánico-cuántico en el eje real  $r^*$ , donde el operador  $\mathcal{H}$  es autoadjunto en el espacio de funciones reales de cuadrado integrable,  $L^2(\mathbb{R}, dr^*)$ .

El potencial  $V$ , definido en la ecuación (5.18), involucrado en este problema mecánico-cuántico (5.17), tiene el siguiente comportamiento asintótico cuando  $|r^*| \rightarrow \infty$ :

$$V \simeq \begin{cases} \left( \frac{Mk}{2a} \right)^2 \exp(2r^*), & r^* \rightarrow \infty, \\ \left( \frac{(M^2 - a^2)k}{2Ma} \right)^2 \exp(-2r^*), & r^* \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5.20)$$

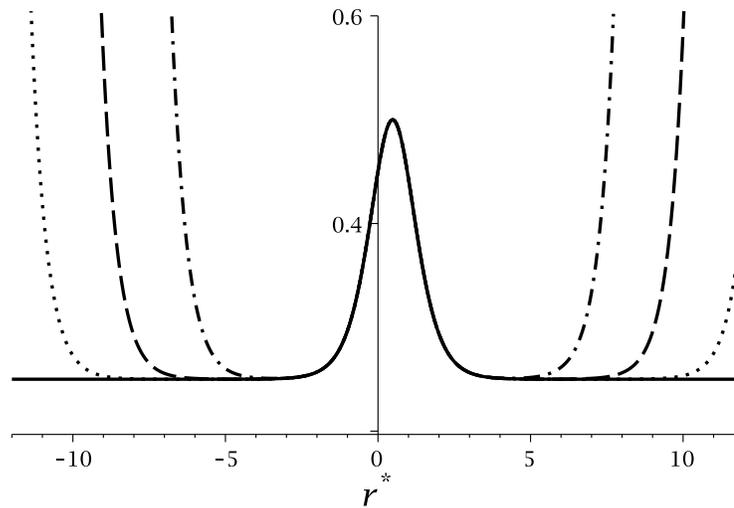


Figura 5.3: Diferencias en el comportamiento del potencial (5.18) para una perturbación escalar en el caso en el que  $a = 1.9$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Vemos la aparición de nuevos puntos críticos cuando  $k \neq 0$ . Los diferentes tipos de líneas representan los siguientes casos: línea continua  $k = 0$ , línea de raya y punto  $k = 0.001$ , línea de trazo discontinuo  $k = 0.0001$  y línea de puntos  $k = 0.00001$ .

puede verse que el mismo no depende del parámetro de espín,  $s$ , de la perturbación, por lo que el análisis posterior resulta válido para todo tipo de perturbaciones.

De la forma asintótica del potencial (5.20) y del hecho de que el mismo es representado por una función continua, puede concluirse que  $V$  tiene un mínimo. Por este motivo, se desprende que el espectro de autovalores del operador  $\mathcal{H}$  posee las siguientes características:

- es completamente discreto,
- tiene una cota inferior.

Utilizaremos el índice  $n = 0, 1, 2, \dots$  para caracterizar a cada uno de los autovalores,  $-E_n^{rad}(s, k)$ , del problema.

Para demostrar la existencia de modos inestables es necesario conocer (al igual que para la ecuación angular) el comportamiento del espectro de autovalores radiales en dos situaciones límite:  $k \rightarrow 0^+$  y  $k \rightarrow \infty$ .

Comencemos analizando el caso más simple, el comportamiento del espectro de autovalores radiales cuando  $\kappa \rightarrow \infty$ . Dado que asintóticamente el potencial  $V$  es independiente de  $s$ , no debemos estudiar los diferentes tipos de perturbaciones en forma independiente.

Recordemos la expresión (5.18) para el potencial  $V$ :

$$V = - \left( \frac{\Delta \ddot{L}}{L} + \frac{Q \dot{L}}{L} + Z \right) = \left[ \frac{r(r^3 + a^2 r + 2Ma^2)}{a^2(r^2 - 2Mr + a^2)} \right] k^2 + 2s \left[ \frac{r^3 - 3Mr^2 + a^2 r + Ma^2}{a(r^2 - 2Mr + a^2)} \right] k + \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{(M^2 - a^2)(4s^2 - 1)}{r^2 - 2Mr + a^2} \right] =: V_2 k^2 + V_1 k + V_0.$$

El polinomio cúbico que aparece en la expresión de  $V_2$  posee una única raíz real. De la relación entre los signos de sus coeficientes se desprende que la misma es negativa. Denotaremos a esta raíz como  $r_n(M)$ . De esta forma, podemos afirmar que  $V_2$  es negativo en el intervalo  $r_n(M) < r < 0$  y positivo (o nulo) fuera de él. Además, teniendo en cuenta que  $a^2 = -r_n^3/(2M + r_n)$ , se desprende que a medida que el parámetro  $a^2$  barre el intervalo  $(M^2, \infty)$ , la raíz  $r_n(M)$  hace lo propio en  $(-M, -2M)$ .

Ahora, tomemos una función de onda  $\xi$  que satisfaga  $\langle \xi | \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 dr^* = 1$  (es decir apropiadamente normalizada) y con soporte compacto en el intervalo  $(r_n(M), 0)$  donde  $V_2$  es negativa. Teniendo en cuenta esto puede concluirse que:

$$\langle \xi | \mathcal{H} | \xi \rangle = - \langle \xi | \left( \frac{\partial}{\partial r^*} \right)^2 | \xi \rangle + \sum_{l=0}^2 k^l \langle \xi | V_l | \xi \rangle.$$

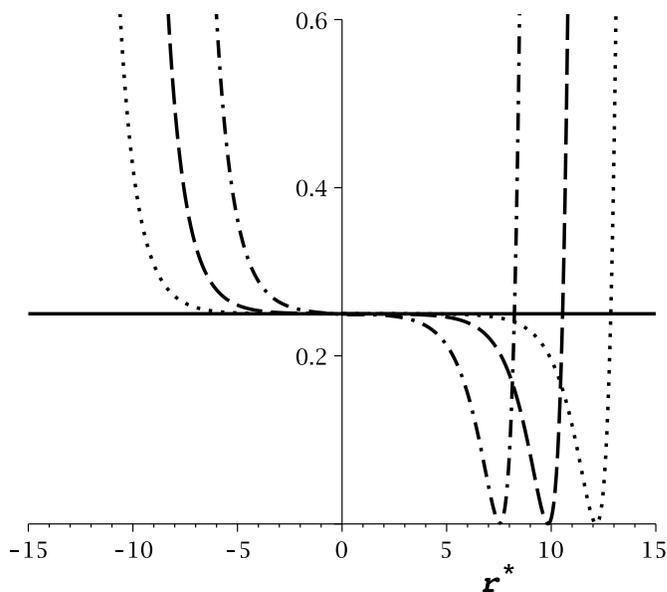


Figura 5.4: Diferencias en el comportamiento del potencial (5.18) para una perturbación en el caso en el que  $a = 1.9$  y  $s = -1/2$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Vemos la aparición de puntos críticos cuando  $k \neq 0$ . Los diferentes tipos de líneas representan los casos: línea continua  $k = 0$  (el potencial es constante en este caso), línea de raya y punto  $k = 0.001$ , línea de trazo discontinuo  $k = 0.0001$  y línea de puntos  $k = 0.00001$ .

Por la definición de la función de onda que estamos utilizando, resulta válido que:

$$\langle \xi | V_2 | \xi \rangle = \int_{r_n(M)}^0 |\xi|^2 V_2 \frac{dr}{\sqrt{\Delta}} < 0.$$

Definamos, a continuación, el siguiente polinomio cuadrático en  $k$ :

$$p(k) := -\langle \xi | \left( \frac{\partial}{\partial r^*} \right)^2 | \xi \rangle + \langle \xi | V_0 | \xi \rangle + k \langle \xi | V_1 | \xi \rangle + \frac{k^2}{2} \langle \xi | V_2 | \xi \rangle.$$

Llamaremos, cuando exista,  $k_c$  a la mayor de las raíces reales de dicho polinomio. Podemos concluir que cuando  $k > k_c$ , se cumple la relación  $p(k) < 0$ . Además, si denominamos al menor de los autovalores del operador  $\mathcal{H}$  como  $-E_0^{rad}(s, k)$ , se satisface, cuando  $k > k_c$ , que:

$$-E_0^{rad}(s, k) \leq \langle \xi | \mathcal{H} | \xi \rangle + p(k) < \frac{k^2}{2} \langle \xi | V_2 | \xi \rangle.$$

Podemos concluir que, cuando  $k > k_c$ , el estado fundamental radial presenta, como mínimo, un crecimiento cuadrático con  $k$ , es decir:

$$E_0^{rad}(s, k) > \frac{k^2}{2} |\langle \xi | V_2 | \xi \rangle|, \text{ si } k > k_c.$$

Analizaremos el comportamiento del espectro de autovalores radiales en el límite  $k \rightarrow 0^+$ .

Podemos darnos cuenta que para  $k = 0$ , el potencial (5.18) tiene un mínimo que depende del valor del peso de espín,  $s$ , de la perturbación, y que el mismo está dado por:

$$\min\{V(r, k = 0, s), r \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & s = 0, \\ \frac{1}{4}, & |s| = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}, & |s| = 1, \\ -\frac{7}{2}, & |s| = 2. \end{cases} \quad (5.21)$$

Sin embargo, como muestran los cálculos que se presentarán a continuación, existe una discontinuidad para el mínimo del potencial en  $k = 0$ .

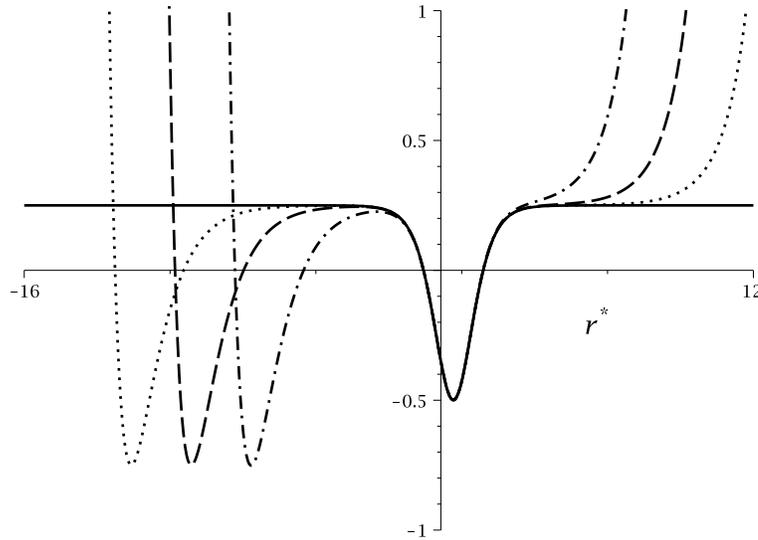


Figura 5.5: Diferencias en el comportamiento del potencial (5.18) para una perturbación en el caso en el que  $a = 1.9$  y  $s = 1$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Vemos la aparición de puntos críticos cuando  $k \neq 0$ . Los diferentes tipos de líneas representan los casos: línea continua  $k = 0$ , línea de raya y punto  $k = 0.001$ , línea de trazo discontinuo  $k = 0.0001$  y línea de puntos  $k = 0.00001$ .

El análisis del comportamiento para  $k \rightarrow 0^+$  requiere tratamientos diferentes para cada valor del peso de espín.

Comencemos con el caso  $s = 0$ . Para simplificar la notación, introducimos la coordenada radial sin dimensiones,  $x = r/M$ , y el parámetro de rotación en unidades de la masa,  $M$ , del objeto central,  $\alpha = a/M$ . De esta manera los puntos críticos del potencial (5.18) para  $s = 0$  satisfacen la siguiente ecuación:

$$4k^2(\alpha^2 + x^2)(x^3 - 3x^2 + \alpha^2 x + \alpha) + \alpha^2(\alpha^2 - 1)(1 - x) = 0. \quad (5.22)$$

Para  $k$  suficientemente pequeño, tres de las cinco raíces son reales (mientras que cuando  $k = 0$ , el único punto crítico se encuentra en  $x = 1$ ). Las denotaremos y ordenaremos del siguiente modo:  $x_a < x_b < x_c$ . Un análisis (numérico) de las soluciones reales de (5.22) para valores de  $k$  cada vez más cercanos a 0 nos muestra que las mismas presentan los siguientes comportamientos:

$$x_a \rightarrow -\infty, \quad x_b \rightarrow 1, \quad x_c \rightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow 0^+.$$

En la Figura 5.3 presentamos el comportamiento del potencial (5.18) cuando  $s = 0$  para diferentes valores (pequeños) de  $k$ . Puede verse como se modifica el comportamiento cuando  $k \neq 0$  y la aparición de los otros dos puntos críticos.

Utilizando esta observación como guía de trabajo obtenemos, usando un método iterativo para construir una expresión en potencias crecientes en  $k$ , la siguiente fórmula aproximada para la raíz  $x_b$ :

$$x_b = 1 + \frac{8(1 + \alpha^2)}{\alpha^2} k^2 + \frac{32(3\alpha^4 - 5\alpha^2 + \alpha^6 - 7)}{\alpha^4(\alpha^2 - 1)} k^4 + \mathcal{O}(k^6).$$

Para estudiar el comportamiento de  $x_a$ , utilizamos un razonamiento (algo) diferente. Supondremos que  $x = x_a$ , luego resolvemos (5.22) como función de  $k$  y, finalmente, tomamos el límite  $x_a \rightarrow \infty$  para obtener el término dominante. Es importante notar que estudiar el límite  $x_a \rightarrow \infty$  es equivalente a estudiar el límite  $k \rightarrow 0^+$ . Realizando las operaciones mencionadas anteriormente, concluimos que el término dominante para este punto crítico es  $x_a = -((\alpha^2 - 1)/4)^{-1/2} k^{-1/2}$ . Con un proceso recursivo similar al utilizado en el estudio de  $x_b$ , obtenemos correcciones al término dominante:

$$x_a = - \left( \frac{\alpha^2 - 1}{4} \right)^{1/4} k^{-1/2} + \frac{1}{2} + \left[ \frac{\sqrt{2}(4\alpha^2 - 7)}{8(\alpha^2 - 1)^{1/4}} \right] k^{1/2} + \mathcal{O}(k).$$

De modo análogo, obtenemos la expresión correspondiente para el tercer punto crítico,  $x_c$ :

$$x_c = \left( \frac{\alpha^2 - 1}{4} \right)^{1/4} k^{-1/2} + \frac{1}{2} - \left[ \frac{\sqrt{2}(4\alpha^2 - 7)}{8(\alpha^2 - 1)^{1/4}} \right] k^{1/2} + \mathcal{O}(k).$$

Con las expresiones aproximadas de los tres puntos críticos del potencial  $V$  podemos evaluar al mismo y obtener la expresión para su mínimo absoluto. Usando la notación  $V_i := V(x_i)$  tenemos que:

$$V_a = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(k), \quad V_b = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(k), \quad V_c = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(k).$$

Concluimos que el mínimo absoluto del potencial en este caso viene dado por:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, s = 0, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{4}. \quad (5.23)$$

Analicemos ahora los casos en que  $s = \pm 1/2$ . En estos casos el estudio es algo más sutil, por este motivo debemos tratar el caso  $s = 1/2$  de forma independiente al de  $s = -1/2$ . Comenzaremos con el caso  $s = 1/2$ . Al igual que cuando el espín es nulo, el potencial tiene 3 puntos críticos reales, volveremos a llamarlos  $x_a < x_b < x_c$ , pero debe quedar claro que las raíces son diferentes al caso previamente estudiado. En esta situación tenemos, siempre que  $k$  sea mayor que un cierto valor dependiente del parámetro de rotación, que tanto  $x_a$  como  $x_c$  son mínimos locales mientras que  $x_b$  es un máximo local. En el límite que nos interesa estudiar,  $x_b$  y  $x_c$  colapsan a un único punto crítico de inflexión. De este modo,  $x_a$  es el punto sobre el cual debemos centrar nuestra atención, ya que cuando  $k \rightarrow 0^+$  se vuelve el mínimo absoluto del potencial.

Trabajando con el esquema iterativo que presentamos anteriormente, obtenemos la expresión aproximada a los puntos críticos:

$$x_a = -\frac{\alpha}{2k} - 1 - \frac{4k}{\alpha} - \frac{16(\alpha^2 - 4)}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \quad V_a = -\frac{2}{\alpha} k + \frac{7}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3).$$

Un análisis similar para el caso  $s = -1/2$ , nos lleva a la conclusión de que el mínimo absoluto en el límite  $k \rightarrow 0^+$  se encuentra ubicado en:

$$x_c = \frac{\alpha}{2k} + 1 + \frac{4k}{\alpha} - \frac{16(\alpha^2 - 4)}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \quad V_c = \frac{2}{\alpha} k + \frac{7}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3).$$

Presentamos la [Figura 5.4](#) a modo de ejemplo.

Juntando estos dos resultados parciales obtenemos que para  $|s| = 1/2$  el potencial tiene el siguiente límite cuando  $k \rightarrow 0^+$ :

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, |s| = 1/2, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = 0. \quad (5.24)$$

A continuación estudiamos el comportamiento del potencial para una perturbación por un campo de Maxwell, en el que  $s = \pm 1$ .

El método utilizado para obtener las expresiones para los puntos críticos es la misma que la presentada anteriormente. Por ese motivo, mostraremos, únicamente, los resultados. Las expresiones aproximadas para los puntos críticos son:

$$\begin{aligned} x_a &= 1 \mp \frac{4}{3} \frac{(\alpha^2 - 3)}{\alpha} k - \frac{8}{9} \frac{(11\alpha^2 - 21)}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \\ x_b &= \mp \frac{\alpha}{k} - 1 \pm \frac{1}{4} \frac{(3\alpha^2 - 11)}{\alpha} k - \frac{1}{2} \frac{(17\alpha^2 - 41)}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \\ x_c &= \frac{1}{2} 6^{1/3} \left( \mp \frac{(\alpha^2 - 1)\alpha}{k} \right)^{1/3} + 1 + \mathcal{O}(k^{1/3}). \end{aligned}$$

Evaluando al potencial (5.18) en estos puntos obtenemos:

$$\begin{aligned} V_a &= -\frac{1}{2} \pm \frac{4}{\alpha} k + \mathcal{O}(k^2), \\ V_b &= -\frac{3}{4} \mp \frac{4}{\alpha} k + \mathcal{O}(k^2), \\ V_c &= \frac{1}{4} - \frac{3^{4/3}}{2^{2/3}} \frac{\alpha^2 - 1}{(\alpha(\alpha^2 - 1))^{2/3}} k^{2/3} + \mathcal{O}(k^{4/3}). \end{aligned}$$

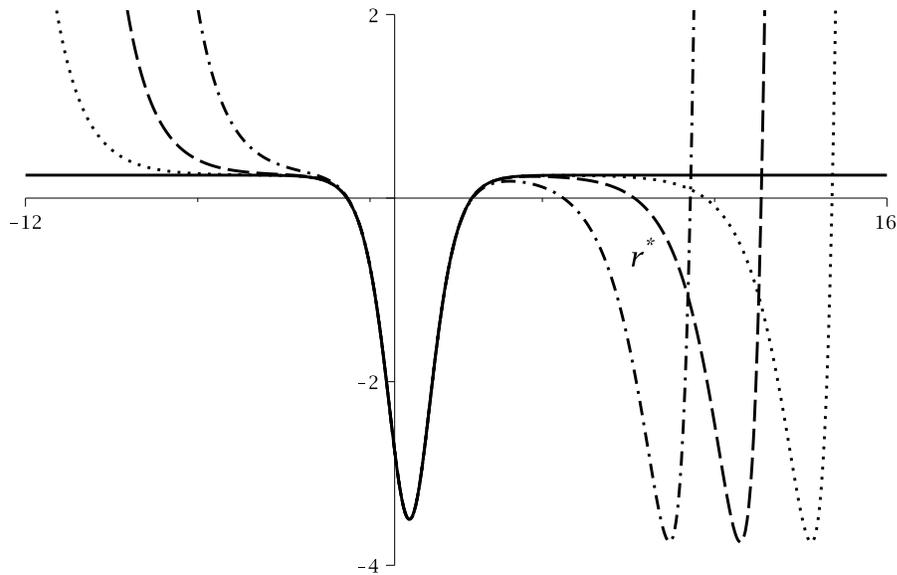


Figura 5.6: Diferencias en el comportamiento del potencial (5.18) para una perturbación en el caso en el que  $a = 1.9$  y  $s = -2$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Vemos la aparición de puntos críticos cuando  $k \neq 0$ . Los diferentes tipos de líneas representan: línea continua  $k = 0$ , línea de raya y punto  $k = 0.001$ , línea de trazo discontinuo  $k = 0.0001$  y línea de puntos  $k = 0.00001$ .

De donde podemos ver que:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, |s| = 1, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = -\frac{3}{4}. \quad (5.25)$$

En la Figura 5.5 mostramos, a modo de ejemplo, la forma del potencial para  $s = -1$  y  $a = 1.9$  para diferentes valores de  $k$ .

Finalmente, presentamos el caso de perturbaciones gravitacionales, para las cuales  $|s| = 2$ .

Haciendo un análisis idéntico al realizado anteriormente, concluimos que los puntos críticos del potencial se encuentran, aproximadamente, ubicados en:

$$\begin{aligned} x_a &= 1 \mp \frac{8}{15} \frac{\alpha^2 - 3}{\alpha} k - \frac{8}{225} \frac{47\alpha^2 - 81}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \\ x_b &= \mp 2 \frac{\alpha}{k} - 1 \pm \frac{1}{32} \frac{15\alpha^2 - 47}{\alpha} k - \frac{1}{32} \frac{77\alpha^2 - 173}{\alpha^2} k^2 + \mathcal{O}(k^3), \\ x_c &= \left( \pm \frac{15}{8} \alpha (1 - \alpha^2) \right)^{1/3} + 1 + \mathcal{O}(k^{1/3}). \end{aligned}$$

Presentamos, a modo de ejemplo, el caso en el que  $a = 1.9$  en la Figura 5.6.

Así, obtenemos que en estos puntos críticos, el potencial adquiere los valores:

$$\begin{aligned} V_a &= -\frac{7}{2} \pm \frac{8}{\alpha} k + \mathcal{O}(k^2), \\ V_b &= -\frac{15}{4} \mp \frac{8}{\alpha} k + \mathcal{O}(k^2), \\ V_c &= \frac{1}{4} - 315^{4/3} \frac{\alpha^2 - 1}{(\alpha(\alpha^2 - 1))^{2/3}} k^{2/3} + \mathcal{O}(k^{4/3}), \end{aligned}$$

se donde se desprende que:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, |s| = 2, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = -\frac{15}{4}. \quad (5.26)$$

Los resultados (5.23, 5.24, 5.25, 5.26) pueden escribirse de forma compacta para todo valor del parámetro de espín de la perturbación de la siguiente manera:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, s, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{4} - s^2. \quad (5.27)$$

Las ecuaciones (5.21) y (5.27) muestran que el potencial es discontinuo en  $k = 0$ . Es importante notar esto ya que la demostración de inestabilidad que presentaremos utiliza entre sus argumentos la continuidad de los autovalores angular y radial. Consideremos al autoestado de menor energía (el estado fundamental) del Hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger (5.17) como una función de  $k \in (0, \infty)$  al que denotaremos  $-E_0^{rad}(s, a\omega = ik)$ . Con los resultados que acabamos de demostrar que:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} -E_0^{rad}(s, a\omega = ik) > \lim_{k \rightarrow 0^+} \min\{V(r, k, s, \alpha), r \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{4} - s^2.$$

Pasemos a escribir, a modo de resumen, lo que hemos aprendido en relación al comportamiento de los autovalores de las ecuaciones angular y radial de Teukolsky.

En el límite  $k \rightarrow 0^+$  y para todo valor  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , se satisface:

$$E_\ell^{ang}(s, a\omega = ik)|_{k=0^+} = (\ell + |s|)(\ell + |s| + 1) > s^2 - \frac{1}{4} > E_0^{rad}(s, a\omega = ik)|_{k=0^+},$$

mientras que para grandes valores positivos de  $k$  es cierto que:

$$E_\ell^{ang}(a, a\omega = ik) = 2(\ell + 1)k + \mathcal{O}(k^2) < \frac{k^2}{2} |\langle \psi | V_2 | \psi \rangle| < E_0^{rad}(s, a\omega = ik).$$

Puede verse entonces, utilizando argumentos de continuidad, que, *para todo*  $\ell$  y  $s$ , existe un  $k_{\ell, s}$  para el cual los autovalores radial y angular coinciden, es decir,  $E_\ell^{ang}(s, a\omega = ik_{\ell, s}) = E_0^{rad}(s, a\omega = ik_{\ell, s})$ .

Demostremos, de este modo, que existe para cada armónico,  $\ell$ , de la ecuación angular (al menos) una solución inestable con simetría axial para la ecuación de Teukolsky en el estado fundamental radial.

A continuación, presentamos un argumento que sugiere que este razonamiento puede extenderse a estados radiales excitados, es decir con  $n > 0$ . No debemos perder de vista que, independientemente de la validez o no de este razonamiento, ya hemos demostrado la existencia de infinitos modos inestables, por lo que la inestabilidad lineal del espaciotiempo quedó firmemente establecida.

El potencial (5.18) presenta, para  $k \gg 1$ , un pozo pronunciado que puede ser aproximado como el asociado a un oscilador armónico de profundidad y fuerza de orden  $k^2$ . Por este motivo, puede verse que la separación entre niveles cercanos al fundamental es de orden  $k$ . Entonces, los primeros autovalores  $-\epsilon_n(s, k)$  también deben presentar un comportamiento cuadrático con  $k$  para valores grandes de dicha variable. Esto permite afirmar que los mismos también intersectan, necesariamente, algún autovalor angular para  $k$  suficientemente grande.

Las soluciones que hemos encontrado presentan un comportamiento asintótico exponencialmente decreciente con  $|r|$  en el límite en que  $|r| \rightarrow \infty$ . Por este motivo afirmamos que estas soluciones se encuentran inicialmente acotadas, por lo que pueden ser consideradas como físicamente aceptables pero, dado que presentan un crecimiento exponencial con el tiempo, ponen de manifiesto la naturaleza inestable del espaciotiempo de Kerr súper extremo.

Este resultado puede utilizarse como justificación para descartar la relevancia de las singularidades desnudas frente a las soluciones de agujero negro a la hora de modelar los objetos súper compactos de los cuales se tienen evidencias observacionales. Con este resultado, aportamos un argumento que favorece la validez de la conjetura débil de censura cósmica de Penrose.

## Capítulo 6

# Inestabilidad de la región KIII

La relevancia física de la región interna, KIII, del agujero negro de Kerr ha estado siempre bajo debate. En [69] se argumenta que el mecanismo de “inflación de masa”<sup>1</sup> impedirá la formación del horizonte de Cauchy y que el mismo será reemplazado por una singularidad nula que actuará como “borde” del espaciotiempo (ver la [Subsección 3.3.1](#) en esta tesis para una breve descripción de este proceso).

Los razonamientos y resultados obtenidos en el capítulo anterior pueden utilizarse, luego de ser apropiadamente revisados, para estudiar las perturbaciones a la región interna ( $r < r_{\text{HC}}$ ) de un agujero negro de Kerr ( $a \leq M$ ). Es importante destacar que el estudio del agujero negro extremo ( $a = M$ ) y subextremo ( $a < M$ ) deben ser tratados de manera independiente, los motivos quedarán claros cuando trabajemos cada caso de manera explícita.

Nuevamente, restringimos el estudio a la búsqueda de modos inestables que preservan la simetría axial del espaciotiempo de fondo. Esta restricción, como ya mencionamos, no es tal, en el sentido de que pretendemos demostrar la inestabilidad lineal de este espaciotiempo. Además, en la [Sección 8.2](#) presentaremos una serie de argumentos que parecen indicar que para perturbaciones escalares la existencia de modos resonantes no axiales está inhibida completamente, al menos en el caso de la región interna del agujero negro de Kerr “lento” ( $a^2 \ll M^2$ ). Resultados de esta naturaleza pueden demostrarse como teoremas para otros espaciotiempos de interés (ver la [Sección 8.3](#) para más detalles al respecto).

### 6.1. Modos inestables en la región KIII de un agujero negro extremo de Kerr

Al igual que realizamos en el [Capítulo 5](#), definiremos una nueva coordenada radial que será más apropiada para nuestro estudio. En este caso, la coordenada radial  $r^*$ , definida a través de la relación  $dr^*/dr = 1/\sqrt{\Delta}$ , está dada, para la región de interés ( $r < r_{\text{HC}} = r_{\text{HE}} = M$ ), por:

$$r^* = -\ln\left(\frac{M-r}{M}\right), \quad r < r_{\text{HC}}$$

cuya relación inversa está dada por:

$$r = M(1 - e^{-r^*}), \quad -\infty < r^* < \infty. \quad (6.1)$$

Como realizamos en el [Capítulo 5](#), introducimos el factor integrante  $\Delta^{-\frac{2s+1}{4}}$  y obtenemos que la ecuación radial de Teukolsky (5.3) puede escribirse como (5.17) con el potencial,  $V$ , dado por (5.18). La diferencia es que ahora la variable  $r$  está dada por (6.1).

En este caso el comportamiento asintótico del potencial está, para todo valor positivo de  $k$ , dado por:

$$V \simeq \begin{cases} 4k^2 \exp(2r^*), & r^* \rightarrow \infty, \\ k^2 \exp(-2r^*), & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup> *Mass Inflation* en la literatura en inglés.

Vemos, al igual que en el caso estudiado previamente, que el operador autoadjunto,  $\mathcal{H}$ , posee un espectro de autoenergías completamente discreto y con una cota inferior.

En vista de esto, concluimos que los argumentos presentados en el estudio del espaciotiempo de Kerr súper extremo puede utilizarse sin realizar modificaciones significativas. Esto se debe, en parte, a que la función de prueba que utilizamos posee soporte compacto en una región donde  $r < 0$ . Podemos concluir que la energía del estado fundamental del Hamiltoniano radial del sistema es negativa. Por este motivo sabemos que existe un valor  $\ell_0$  para el cual la siguiente condición se satisface:

$$E_0^{\text{rad}}(s, a\omega = ik)|_{k=0^+} < (\ell_0 + |s|)(\ell_0 + |s| + 1).$$

Dada la forma de las energías para  $k \gg 1$ , volvemos a concluir que, sin importar el tipo de campo con el que se perturbe a la región interna de un agujero negro de Kerr extremo, existe un modo inestable para cada valor  $\ell > \ell_0$ .

Estudiemos el comportamiento espacial de estos modos inestables en los límites en que  $r \rightarrow M^-$  y  $r \rightarrow -\infty$ . Para ello es necesario analizar el desarrollo en serie de Frobenius de dichas soluciones en los dos casos límite. A continuación, escribimos los primeros términos del mismo:

$$\psi \simeq \begin{cases} \left(\frac{M}{M-r}\right)^{2k-s-\frac{1}{2}} \exp\left[-2k\left(\frac{M}{M-r}\right)\right] \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{M-r}{M}\right)\right), & r \rightarrow M^-, \\ \left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{1}{2}-2k-s} \exp\left[\frac{rk}{M}\right] \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{M}{r}\right)\right), & r \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.3)$$

El decaimiento exponencial que presentan los modos (6.3) asegura que, inicialmente, los modos exponencialmente crecientes con el tiempo que acabamos de encontrar, se encuentran acotados. Esto garantiza que los mismos puedan ser considerados físicamente aceptables.

## 6.2. Modos inestables en la región KIII de un agujero negro de Kerr subextremo

El estudio de este caso tiene una serie de sutilezas por lo que la presentación que realizaremos será, comparado con la realizada en la Sección 6.1 para el caso del interior del agujero negro de Kerr extremo, algo más detallada.

En este caso, la función  $\Delta$  es positiva cuando  $r < r_{\text{HC}}$ , donde  $r_{\text{HC}} = M - \sqrt{M^2 - a^2}$  denota la coordenada radial del horizonte de Cauchy. Por esta razón, volvemos a definir la nueva coordenada radial,  $r^*$ , a través de la relación  $dr^*/dr = 1/\sqrt{\Delta}$ . Integrando, obtenemos una expresión explícita para  $r^*$ :

$$r^* = \ln\left(\frac{r_{\text{HC}} + r_{\text{HE}} - 2r - 2\sqrt{(r - r_{\text{HE}})(r - r_{\text{HC}})}}{r_{\text{HC}} + r_{\text{HE}}}\right),$$

donde  $r_{\text{HE}} = M + \sqrt{M^2 - a^2}$  es la coordenada radial que caracteriza la posición del horizonte de eventos.

Podemos observar que la coordenada  $r^*$  tiene una cota superior por lo que su dominio no es todo el eje real, sino que está dado por:

$$-\infty < r^* < r_{\text{HC}}^* := \ln\left(\frac{r_{\text{HE}} - r_{\text{HC}}}{r_{\text{HE}} + r_{\text{HC}}}\right).$$

Los comportamientos asintótico y en el entorno del horizonte de Cauchy de esta coordenada son los siguientes:

$$r^* \simeq \begin{cases} r_{\text{HC}}^* - \frac{2\sqrt{r_{\text{HC}} - r}}{\sqrt{r_{\text{HE}} - r_{\text{HC}}}}, & r \rightarrow r_{\text{HC}}^-, \\ \ln\left(-\left(\frac{r_{\text{HE}} - r_{\text{HC}}}{r_{\text{HE}} + r_{\text{HC}}}\right)^2 \frac{1}{4r}\right), & r \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (6.4)$$

mientras que el del potencial es:

$$V \simeq \begin{cases} \frac{(\nu(k)^2 - \frac{1}{4})}{(r_{\text{HE}}^* - r^*)^2}, & r^* \rightarrow r_{\text{HC}}^*, \\ \frac{k(M^2 - a^2)}{(2aM)^2} \exp(-2r^*), & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (6.5)$$

### 6.3. SOBRE LA ESTABILIDAD DE LA REGIÓN EXTERNA DE UN AGUJERO NEGRO DE KERR1

La función  $\nu(k)$  definida en la expresión (6.5) puede expresarse como:

$$\nu(k) := 2\sqrt{\frac{r_{\text{HC}}}{r_{\text{HE}}}} \left( \frac{r_{\text{HC}} + r_{\text{HE}}}{r_{\text{HE}} - r_{\text{HC}}} \right) k - s. \quad (6.6)$$

Hay una diferencia esencial entre el caso extremo y el subextremo ya que en el último la ecuación radial de Teukolsky puede escribirse en la forma de una ecuación de Schrödinger, pero en este caso definida en el semieje real  $r^* < r_{\text{HC}}^*$  y con un potencial que presenta un comportamiento singular en el extremo. Este tipo de situaciones han sido estudiadas en detalle en [70, 71]). Se sabe, pues, que cualquier solución local a la ecuación (5.17) que tenga cuadrado integrable presenta un comportamiento en el entorno del horizonte de Cauchy dado por:

$$\psi \sim a \left[ (r_{\text{HC}}^* - r^*)^{\frac{1}{2} + \nu(k)} + \dots \right] + b \left[ (r_{\text{HC}}^* - r^*)^{\frac{1}{2} - \nu(k)} + \dots \right] \quad (6.7)$$

vemos que cuando  $\nu(k) > 1$  dichas soluciones son funciones de cuadrado integrable solo cuando  $b = 0$ . Esta condición sirve para fijar el conjunto de posibles valores para las autoenergías,  $E$ , y define, además, el espacio de funciones en el cual el operador  $\mathcal{H}$  es autoadjunto. En [71] se define a este caso como el de *punto límite*. El mismo es diferente al definido como *círculo límite*, equivalente a estudiar el caso  $\nu(k) < 1$ . Si esta condición se satisface las autofunciones que presentan comportamiento apropiado en  $r^* \rightarrow -\infty$  serán de cuadrado integrable en el intervalo  $r^* \in (-\infty, r_{\text{HC}}^*)$  para cualquier valor de  $E$ .

Analicemos las condiciones de contorno que deben imponerse para definir el espacio de perturbaciones permitidas o físicas, al que denotaremos con  $D_{\text{fis}}$ . De este modo el operador  $\mathcal{H}$  será autoadjunto en  $D_{\text{fis}}$  y tendrá un conjunto completo de autofunciones. Esto se logra fijando en (6.7) el cociente (no necesariamente finito)  $b/a$  (ver [71] para detalles al respecto). De igual forma, analizando el comportamiento de (6.6) para grandes valores de  $k$  podemos concluir que no es necesario lidiar con este tipo de ambigüedades.

Así, sin importar el tipo de condiciones de contorno que se elijan, toda función de prueba con soporte compacto en la región  $r < 0$  pertenecerá al espacio de perturbaciones físicas,  $D_{\text{fis}}$ . Por este motivo podemos utilizar el argumento desarrollado para la singularidad desnuda de Kerr pudiendo, nuevamente, concluir que es posible encontrar un valor  $\ell_0$  para el cual se cumpla:

$$E_0^{\text{rad}}(saw = ik)|_{k=0+} < (\ell_0 + |s|)(\ell_0 + |s| + 1).$$

Nuevamente, demostramos la existencia de infinitos modos (inicialmente bien comportados espacialmente) inestables para la región KIII del espacio tiempo subextremo de Kerr.

## 6.3. Sobre la estabilidad de la región externa de un agujero negro de Kerr

Dedicamos estas líneas a mostrar que el razonamiento utilizado para demostrar la inestabilidad de la región interna del agujero negro de Kerr no contradice los resultados de estabilidad modal que han sido establecidos para la región externa del mismo [72].

Uno de los puntos centrales para nuestra demostración de inestabilidad es que el intervalo donde la función  $V_2$  toma valores negativos se encuentra contenido en la región de estudio,  $r < r_{\text{HC}}$ . Veremos que eso no es cierto cuando se analiza la región KI, externa o astronómica del espaciotiempo de Kerr, en la que  $r > r_{\text{HE}}$ . Para fijar ideas estudiaremos, en detalle, el caso de un agujero negro extremo.

Definiremos la coordenada adimensional  $x = r/M$ , de esta forma la expresión del potencial que estudiamos en la Sección 6.1 puede escribirse como:

$$V_{\text{ext}} = \left[ \frac{x(x+1)(x^2-x+2)}{(x-1)^2} \right] k^2 + 2s \left[ \frac{x^2-2x-1}{x-1} \right] k + \frac{1}{4}. \quad (6.8)$$

Para  $s = 0$  el potencial (6.8) es siempre mayor a  $\frac{1}{4}$  fuera del horizonte ( $x > 1$ ) y el argumento que desarrollamos no resulta aplicable, por esta razón no hay ningún tipo de inestabilidad posible.

Para los casos  $s \neq 0$ , la búsqueda del punto crítico  $x_0$  (donde  $\partial V_{\text{ext}}/\partial x$  se anula) nos plantea la siguiente ecuación:

$$-\frac{k}{s} = \frac{(x_0-1)(x_0^2-2x_0+3)}{(x_0^2+1)(x_0^2-2x_0-1)}.$$

La función del miembro derecho decrece en forma monótona desde 0 hasta  $-\infty$  mientras se cumpla que  $x_0 \in (1, 1 + \sqrt{2})$  y luego desde  $\infty$  a 0 cuando  $x_0 \in (1 + \sqrt{2}, \infty)$ . Por este motivo, dado  $s \neq 0$ , la función  $V_{\text{ext}}$  tiene un único punto crítico. Analizando el signo de la derivada segunda, podemos concluir que el mismo es un mínimo absoluto del potencial en el dominio de interés. El mismo es una función que decrece con  $k$  y posee una cota inferior dada por  $\frac{1}{4} - s^2$  cuando  $k \rightarrow 0^+$ .

De este modo, demostramos que:

$$V_{\text{ext}}(k, x, s) > \frac{1}{4} - s^2, \quad |s| = 0, 1/2, 1, 2; \quad k > 0, \quad x > 1,$$

de esta relación puede obtenerse una cota para el autovalor radial del estado fundamental:

$$E_0^{\text{rad}}(s, a\omega = ik) < s^2 - \frac{1}{4} < s^2 + |s| \leq (\ell + |s|)(\ell + |s| + 1) \leq E_\ell^{\text{ang}}(s, a\omega = ik), \quad k > 0, \quad \ell \geq 0,$$

a de donde se desprende que el argumento de intersección de los dos autovalores deja de ser aplicable por lo que no existe contradicción con los resultados demostrados en [72].

El mismo razonamiento puede utilizarse para el caso de un agujero negro subextremo. La diferencia central es que ahora se obtendrá una solución con dos ramas para  $k$ , una de las cuales posee un mínimo local. El razonamiento posterior sigue siendo válido y no es posible demostrar la existencia de modos inestables.

De esta forma vemos que nuestro argumento de inestabilidad lineal no resulta aplicable en la región  $r > r_{\text{HE}}$ .

# Capítulo 7

## Modos inestables y potenciales de Debye

### 7.1. El método de reconstrucción

El estudio de la teoría de perturbaciones lineales dentro del formalismo de tetraada nula de NP es útil dado que las expresiones que las gobiernan resultan invariantes frente a difeomorfismos infinitesimales y rotaciones generales de la tetraada. Es importante remarcar que, si bien existen cantidades relevantes desde un punto de vista físico que pueden calcularse en forma directa si se conocen estos campos, otras no. Ejemplos de esto son estudios en los que resulte imprescindible conocer, por ejemplo, el tensor métrico perturbado,  $h_{\mu\nu}$ , o los campos de Maxwell,  $A_\mu$ . Para ello resulta necesario obtener un mapa que permita relacionar las cantidades calculadas en el formalismo NP con las cantidades que denominaremos “físicas”.

En los trabajos [73], los autores proponen, sin dar una demostración de los motivos por los cuales el mismo funciona, un mapa que hace el trabajo de reconstrucción de los campos físicos a partir de los escalares de NP por medio de *potenciales de Debye*. Posteriormente, Wald demostró formalmente y utilizando argumentos simples, el motivo por el cual dicho mapa es el correcto [74]. La conclusión a la que arribó es que las soluciones a la ecuación *transpuesta* de Teukolsky pueden ser utilizadas como un potencial de Debye para generar los campos linealizados para todo tipo de perturbaciones al espaciotiempo de Kerr. Resulta interesante remarcar que, del mismo modo que las perturbaciones a los campos en el formalismo NP, las ecuaciones para los potenciales de Debye también están desacopladas: una ecuación para valores positivos y otra para valores negativos del peso de espín de la perturbación.

Vamos a presentar el problema que pretendemos atacar. Para ello repasaremos, brevemente, el formalismo de perturbaciones desarrollado por Teukolsky (ver el [Sección 5.1](#) para más detalles).

El tipo de ecuaciones con que se trabaja son de la forma  $\Theta(\epsilon) = 0$ , donde el operador diferencial  $\Theta$  que actúa sobre la perturbación  $\epsilon$  puede ser, por ejemplo, el operador de Maxwell actuando sobre el campo  $A_\mu$ , es decir  $\Theta_E(A_\mu) = 0$ , estas ecuaciones no son otra cosa que  $\nabla_\mu F^{\nu\mu} = 0$ . Otra posibilidad es la correspondiente al estudio de perturbaciones lineales al tensor métrico,  $\Theta_G(h_{\mu\nu}) = 0$ , que son las ecuaciones linealizadas de Einstein que, en el gauge libre de traza, pueden escribirse como:  $-\nabla_\nu \nabla^\nu h_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta} + 2g^{\alpha\beta} \nabla_{(\mu} \nabla_{|\alpha|} h_{\nu)\beta} = 0$ .

Presentamos ahora la demostración realizada por Wald. La misma se basa en la noción del *transpuesto* de un operador diferencial lineal que actúa sobre un tensor de rango  $k$ . Al momento de definir al traspuesto de un operador se debe tener en cuenta que el tensor sobre el que actúa está definido sobre una variedad  $\mathcal{M}$  provista con un producto interno definido como  $(U, V) := \int_{\mathcal{M}} U_{a_1, a_2, \dots, a_k} V^{a_1, a_2, \dots, a_k}$  y donde, como es usual, los índices suben y bajan por medio del tensor métrico.

La operación de trasponer se define de la manera clásica, es decir, el operador  $\mathcal{O}^T$  será el traspuesto de  $\mathcal{O}$  cuando, cualquiera sean  $U$  y  $V$  se satisfaga que:  $(U, \mathcal{O}V) = (\mathcal{O}^T U, V)$ . Supondremos que los campos bajo estudio decaen en forma apropiada en el dominio de  $\mathcal{O}$  de modo de garantizar que se pueda realizar una integración por partes sin que se agreguen como resultado términos de borde.

Llamemos  $f$  al campo tensorial sobre el cual queremos centrar nuestra atención. Para fijar ideas recordemos que tal campo puede ser  $A_\mu$  si consideramos perturbaciones electromagnéticas o  $h_{\mu\nu}$  para perturbaciones

gravitacionales. Denotaremos con  $\mathcal{E}(f) = 0$  a la ecuación diferencial que rige las perturbaciones lineales bajo estudio. Para el caso de perturbaciones al espaciotiempo de Kerr, salvo para el caso de perturbaciones escalares, al trabajar en el formalismo NP, no se trabaja con el campo físico en el que está interesado sino en un campo derivado a partir de la relación  $\Psi_s := \mathfrak{T}_s(f)$ . Aquí, el operador  $\mathfrak{T}_s$  hace emerger la componente de peso de espín  $s$  de la tetrad nula de un dado tensor derivable a partir de  $f$  (por ejemplo uno de los escalares de Weyl perturbados, construidos a partir de la perturbación al tensor métrico,  $h_{\mu\nu}$ ).

Para dar base al tratamiento posterior, resumiremos el formalismo perturbativo de Teukolsky utilizando esta nueva notación. En este sentido puede afirmarse que existen dos operadores diferenciales lineales,  $\mathcal{S}_s$  y  $\mathcal{O}_s$  que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\mathcal{S}_s \mathcal{E}(f) = \mathcal{O}_s \mathfrak{T}_s(f) = \mathcal{O}_s(\psi_s). \quad (7.1)$$

En vista de (7.1) se puede deducir que las ecuaciones de campo linealizadas, es decir  $\mathcal{E}(f) = 0$ , implican la validez de la ecuación maestra de Teukolsky:  $\mathcal{O}_s(\psi_s) = 0$ . A continuación, presentamos un listado con los operadores  $\mathcal{O}_s$  definidos del mismo modo y utilizando la misma notación que en [59]:<sup>1</sup>

■ Perturbaciones gravitacionales:

Para el caso  $s = 2$ : (2.12)

$$\mathcal{O}_2 = [(D - 2\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})(\delta - 4\gamma + \mu) - (\delta + \bar{\pi} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)(\bar{\delta} + \pi - 4\alpha) - 3\Psi_2] = 0,$$

y  $\psi_2 = \delta\psi_0$ .

Para el caso  $s = -2$ : (2.14)

$$\mathcal{O}_{-2} = [(\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})(D + 4\epsilon - \rho)(\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha + 4\pi)(\delta - \tau + 4\beta) - 3\Psi_2] = 0,$$

y  $\psi_{-2} = \delta\psi_4$ .

■ Perturbaciones electromagnéticas:

Para el caso  $s = 1$ : (3.5)

$$\mathcal{O}_1 = [(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)] = 0,$$

y  $\psi_1 = \phi_0$ .

Para el caso  $s = -1$ : (3.7)

$$\mathcal{O}_{-1} = [(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)] = 0,$$

y  $\psi_{-1} = \phi_2$ .

■ Perturbaciones por campos de Dirac:

Para el caso  $s = 1/2$ : (B4)

$$\mathcal{O}_{1/2} = [(D + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})(\Delta - \gamma + \mu) - (\delta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} - \alpha + \pi)] = 0,$$

y  $\psi_{1/2} = \chi_0$ .

Para el caso  $s = -1/2$ : (B5)

$$\mathcal{O}_{-1/2} = [(\Delta - \bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu})(D + \epsilon - \rho) - (\bar{\delta} + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})(\delta + \beta - \tau)] = 0,$$

y  $\psi_{-1/2} = \chi_1$ .

---

<sup>1</sup>El número entre paréntesis hace referencia al número de ecuación tal como está definida en el trabajo original.

Donde todas las cantidades involucradas están definidas en la [Apéndice A](#) y la [Subsección 2.2.7](#).

Presentadas todas las ecuaciones, vemos que puede encontrarse la siguiente relación entre el operador  $\mathcal{O}_s$  y el operador  $T_s$  que aparece en la ecuación maestra de Teukolsky (5.1):

$$\mathcal{O}_s = \begin{cases} (2\Sigma)^{-1} \circ T_s, & s \geq 0, \\ (2\Sigma)^{-1} \rho^{-2s} \circ T_s \circ \rho^{2s}, & s < 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

En vista de la misma, concluimos que la ecuación  $\mathcal{O}_s(\psi_s) = 0$  se reduce a  $T_s\Psi_s = 0$ , donde los campos  $\Psi_s$  están definidos como:

$$\Psi_s = \begin{cases} \psi_s, & s \geq 0, \\ \rho^{2s}\psi_s, & s < 0. \end{cases}$$

Como fue notado por Wald en [74], tanto para campos espinoriales como electromagnéticos y gravitacionales lineales se satisface que  $\mathcal{E}^T = \mathcal{E}$ , de modo que la traspuesta de la ecuación:

$$\mathcal{S}_s\mathcal{E} = \mathcal{O}_s\mathcal{T}_s$$

resulta ser:

$$\mathcal{T}_s^T\mathcal{O}_s^T = \mathcal{E}\mathcal{S}_s^T.$$

De estas relaciones se desprende que, si  $\hat{\psi}_s$  es una solución a la ecuación traspuesta de Teukolsky (es decir,  $\mathcal{O}_s^T\hat{\psi}_s = 0$ ), se satisface que:

$$\mathcal{E}\mathcal{S}_s^T\hat{\psi}_s = 0.$$

En otras palabras, la función  $\hat{\psi}_s$  funciona como un *potencial* que permite generar, aplicando sobre ella un operador diferencial adecuado, una solución, dada por  $f = \mathcal{S}_s^T\hat{\psi}_s$ , a las ecuaciones de campo linealizadas,  $\mathcal{E}(f) = 0$ .

Además, puede encontrarse la siguiente relación entre la operación de trasponer y la de invertir el signo del espín de la perturbación:

$$\rho^{2|s|} \circ \mathcal{O}_{(\pm s)}^T \circ \rho^{-2|s|} = \mathcal{O}_{(\mp s)}.$$

Vemos que es posible obtener soluciones a la ecuación traspuesta de Teukolsky con peso de espín  $s$  multiplicando por una potencia apropiada de  $\rho$  y realizando el intercambio  $s \rightarrow -s$  en una solución de la ecuación maestra de Teukolsky. De esta manera queda demostrado que la existencia de soluciones inestables a las ecuaciones de Teukolsky implica la existencia de campos lineales (espinoriales, electromagnéticos y gravitatorios) inestables ya que la dependencia temporal (proporcional a  $\exp(kt/a)$ ) no es alterada al aplicar los operadores diferenciales  $\mathcal{S}_s$ .

Al estudiar la estabilidad lineal del espaciotiempo de Reissner-Nordström súper cargado ( $Q^2 > M^2$ ) o la de la región estática interna del agujero negro de Reissner-Nordström, se trabaja con un espaciotiempo que no es globalmente hiperbólico. Además, debe lidiarse con condiciones de borde que presentan una singularidad temporal [75]. Por este motivo no hay, en principio, razones para pensar que el problema de evolución temporal de campos lineales esté bien definido. Además, la existencia de una singularidad de curvatura agrega una condición extra con la que se debe trabajar, dado que es necesario definir que tipo de comportamientos serán considerados aceptables y cuáles no para los campos *en dicha singularidad*. Para resolver esta problemática en [75] los autores notaron que existe una *única* elección posible para las condiciones de contorno en la singularidad que garantiza que los invariantes escalares de curvatura asociados a la perturbación presenten comportamientos *menos divergentes* que el del propio espaciotiempo de fondo. Al seleccionar esta condición de contorno particular, puede afirmarse que el tratamiento perturbativo es internamente consistente, en el sentido de que las perturbaciones pueden siempre ser acotadas de modo *uniforme* en una superficie parcial de Cauchy de “tiempo 0”,  $\Sigma_0$ , que se encuentre con la singularidad.<sup>2</sup> Al hacer esto, los autores resuelven el problema asociado con la unicidad de la evolución temporal del dato inicial especificado en la superficie  $\Sigma_0$ .

Tanto la singularidad desnuda de Kerr como la región interna del agujero negro de Kerr, poseen una singularidad de curvatura temporal ubicada, si se utilizan coordenadas de Boyer-Lindquist, en  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  (ver el [Capítulo 2](#) para más detalles). A pesar de esto, ambos espaciotiempos admiten ser extendidos *a través del anillo* a valores negativos de la coordenada radial  $r$ , para la SDK se tiene que  $r \in (-\infty, \infty)$ , mientras que para la región KIII,  $r \in (-\infty, r_{\text{HC}})$ . La naturaleza “tibia” de la singularidad anillo del espaciotiempo de Kerr

<sup>2</sup>Notar que cualquier hipersuperficie ortogonal al vector de Killing temporal satisface esta propiedad.

permiten una elección de los campos  $\Psi_s$  no singular en  $r = 0$  dado que el mismo no es un punto singular en la ecuación radial de Teukolsky. Algo similar para con la ecuación angular en el punto  $\theta = \pi/2$ .

Para aclarar esto, diremos que al resolver la ecuación para  $R_{s,m,\omega}(r)$ , puede fijarse el comportamiento en  $\rho \rightarrow -\infty$  y en  $r \rightarrow \infty$  o  $r \rightarrow r_{\text{HC}}$  de modo que la función se anule, pero no puede exigirse ningún comportamiento específico cuando  $r \rightarrow 0$  ya que la ecuación diferencial ordinaria que está resolviendo es de segundo orden y hacerlo sobredeterminaría el problema a resolver. De este modo vemos que a pesar de que la región interna del espaciotiempo de Reissner-Nordström y el de Kerr súper extremo o la región KIII comparten una serie de propiedades (como la falta de una superficie de Cauchy y la existencia de una singularidad de curvatura temporal), el estudio de la propagación de campos presenta diferencias técnicas radicales. La diferencia principal se debe al hecho de que en estos dos espaciotiempos, cualquier par de eventos pueden ser conectados con una curva temporal orientada hacia el futuro.

Esto hace que ni siquiera existan superficies parciales de Cauchy por lo que en estos casos no se tiene una noción clara de “superficie de tiempo inicial” que permita plantear, apropiadamente (al menos en el marco de la teoría tradicional), ni el problema de estabilidad ni el de valores iniciales. En la SDK y la región KIII, las hipersuperficies de coordenada  $t$  constante son tipo espacio fuera de un conjunto compacto, esto hace que la noción de estabilidad quede limitada a la observación de que existen soluciones a las ecuaciones de campo linealizadas que:

- tienen un comportamiento exponencialmente crecientes con  $t$ ,
- presentan un decaimiento exponencial cuando  $|r| \rightarrow \infty$  en la SDK y se anulan en el horizonte de Cauchy en el caso de KIII y
- tienen un comportamiento “apropiado” (ya veremos más adelante qué entendemos por apropiado en el contexto que estamos trabajando) en la singularidad anillo.

Para revisar el comportamiento que presentan estos campos en la singularidad anillo, utilizaremos las soluciones inestables a la ecuación maestra de Teukolsky presentadas en el [Capítulo 5](#) y en el [Capítulo 6](#) como potenciales de Debye para reconstruirlos. Debemos recordar que no tenemos expresiones explícitas para las soluciones sino *simplemente* la certeza de que existen. A pesar de esto, podemos obtener información útil estudiando el comportamiento de las series de Frobenius para las ecuaciones diferenciales ordinarias que definen a la parte radial,  $R(r)$ , y la angular,  $S(\theta)$ , en un entorno de  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  respectivamente.

Como veremos, los términos dominantes de estas series no dependen de la frecuencia,  $\omega$ , por lo que las conclusiones que presentaremos serán independientes de la naturaleza (estable o inestable) de las soluciones. Por este motivo, cualquier criterio que establezcamos para desechar soluciones generadas utilizando el método de reconstrucción a partir de potenciales de Debye, se aplicará a *cualquier* solución, sea ésta estable o no.

## 7.2. Reconstrucción para el caso de campos de Maxwell

Para el caso de campos de Maxwell el valor del peso de espín de la perturbación es  $|s| = \pm 1$ . La forma de los operadores y campos involucrados en (7.1) es la siguiente:

$$f = A_b, \quad [\mathcal{E}(A_b)]_a = \nabla^c \nabla_c A_a - \nabla^c \nabla_a A_c,$$

y, para  $s = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1(A_b) &= l^a m^b (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a), \\ \mathcal{S}_1(J_a) &= \frac{1}{2} (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi}) (j_c l^c) - \frac{1}{2} (D - 2\rho - \bar{\rho}) (j_c m^c), \\ \mathcal{O}_1(\Psi_1) &= (D - 2\rho - \bar{\rho}) (\Delta + \mu - 2\gamma) \Psi_1 - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi}) (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha) \Psi_1, \end{aligned}$$

donde utilizamos la notación estándar para las tetradas nulas (ver la [Apéndice A](#) para más detalles).

El operador  $\mathfrak{T}_1$ , hace emerger la parte autodual del tensor de campo electromagnético,  $F_{ab}$ . Es por este motivo que el potencial complejo que calculamos a partir del potencial  $\mathcal{S}_1^T(\hat{\Psi}_1)$  y que se construye a partir de la semilla  $\mathcal{O}_1^T(\hat{\Psi}_1)$ , producirá un tensor de Maxwell autodual al que denominaremos  $H_{ab} = F_{ab} + i^* F_{ab}$ .

La ecuación traspuesta de Teukolsky,  $\mathcal{O}_1^T(\hat{\Psi}_1)$ , puede expresarse como:

$$\left[ \mathcal{S}_1^T(\hat{\Psi}_1) \right]_b = [-l_b(\delta + 2\beta + \tau) + m_b(D + \rho)]\hat{\Psi}_1.$$

Corroborar que la derivada exterior del tensor  $H_{ab}$  satisface las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes, es equivalente a notar que todas las contracciones de él con cualquiera de las tres 2-formas anti autoduales (ver [67]) que se obtienen a partir de la conjugación compleja de:

$$\bar{m}_{[a}n_{b]}, \quad n_{[a}l_{b]} + m_{[a}\bar{m}_{b]}, \quad l_{[a}m_{b]},$$

se anulan como consecuencia de la ecuación  $\mathcal{O}_1^T(\hat{\Psi}_1) = 0$ .

Para evaluar el comportamiento del tensor (real) de Maxwell,  $F_{ab}$ , en un entorno de la singularidad anillo, puede estudiarse el comportamiento de sus invariantes algebraicos linealmente independientes:  $I_1 := F_{ab}F^{ab}$  e  $I_2 := F_{ab}^*F^{ab}$ . En lugar de estas dos cantidades reales, podemos calcular  $I := H_{ab}H^{ab} = I_1 + iI_2$ , el invariante complejo que contiene la misma información. Además, los cálculos involucrados se facilitarán, dado que no es necesario trabajar con cantidades reales hasta el final de los mismos.

Consideremos una solución general a la ecuación maestra de Teukolsky cuando  $s = -1$ , cuya parte radial está dada por  $R(r)$ , su parte angular por  $S(\theta)$  y de frecuencia  $\omega$ . Para dicho modo, el término dominante del desarrollo en el entorno de la singularidad anillo del invariante complejo viene dado por:

$$I \simeq 2 \frac{\left( R(r) \frac{dS(\theta)}{d\theta} - iaS(\theta) \frac{dR(r)}{\rho dr} \right)^2}{(r + ia \cos \theta)^4} e^{(2i\frac{\omega t}{a})}. \quad (7.3)$$

Una inspección de (7.3) permite ver el resultado que adelantamos. Sin tener en cuenta al factor  $e^{(2i\frac{\omega t}{a})}$ , la expresión para el término dominante del invariante será la misma sin importar la naturaleza de  $\omega$ . Es decir, este comportamiento es una propiedad *universal* del campo por lo que no depende de la naturaleza (in)estable del mismo.

Analicemos si el *nivel de divergencia* que presenta dicho campo en el entorno de la singularidad anillo puede o no ser considerado *acceptable*.

Para esto lo compararemos con el campo de Maxwell estático que se obtiene a partir del espaciotiempo de Kerr-Newman, una solución exacta de a las ecuaciones de Einstein-Maxwell. El mismo viene dado por:

$$F = dA, \quad A = \frac{Qr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi). \quad (7.4)$$

Notemos lo siguiente, dado que la métrica de Kerr-Newman es cuadrática en  $Q$ , podemos interpretar a este campo como una solución a las ecuaciones de Maxwell en un espaciotiempo de fondo de Kerr fijo *de primer orden* en  $Q$ . Dado que las ecuaciones de Maxwell son lineales, tenemos que (7.4) es una solución *exacta* en el espaciotiempo de Kerr. Para este campo estático, puede calcularse su invariante de campo complejo:

$$I_{\text{est}} = -\frac{Q^2}{2(r - ia \cos \theta)^4}. \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) muestra el *mismo tipo* de comportamiento divergente en las cercanías de la singularidad anillo que el presentado por la perturbación lineal inestable obtenida para campos electromagnéticos (ver 7.3). Podemos ver que esta última es menor en algunas direcciones, ya que como vimos al estudiar el comportamiento de las funciones radial y angular, las mismas están bien comportadas en  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  respectivamente. Contrario a lo que pasa para el campo de Kerr-Newman, que asintóticamente decae lentamente (como  $r^{-4}$ ), la perturbación inestable que encontramos presenta, en el caso de la SDK, decaimientos exponenciales para  $|r| \rightarrow \infty$  (ver el Capítulo 5). Al analizar la región KIII, notamos el mismo tipo de comportamiento asintótico cuando  $r \rightarrow -\infty$  y como una potencia de  $r - r_{\text{HC}}$  en el horizonte de Cauchy (ver el Capítulo 6).

Este análisis permite concluir que, al igual que la solución exacta de Kerr-Newman, este tipo de soluciones a las ecuaciones linealizadas de Maxwell deben ser consideradas *físicamente aceptables* ya que presentan los mismos comportamientos espaciales en el entorno de la singularidad anillo y decaimientos asintóticos inclusive más rápidos.

A modo de conclusión: obtuvimos soluciones a las ecuaciones linealizadas de Maxwell en el espaciotiempo de Kerr súper extremo y en el interior de un agujero negro de Kerr con comportamientos espaciales *físicamente aceptables* y que presentan un comportamiento exponencialmente creciente en el tiempo. Llamamos a estos modos, soluciones inestables o resonancias.

Dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Einstein, creemos que estos modos electromagnéticos inestables servirán como fuente para excitar los modos gravitacionales inestables cuya existencia hemos demostrado. Entendemos que este es un mecanismo completamente viable para desestabilizar, completamente, tanto a la singularidad desnuda de Kerr como a la región interna del agujero negro. Intentar demostrar esta idea forma parte de los proyectos a futuro (ver [Capítulo 13](#)).

## Capítulo 8

# Inestabilidades y región de violación cronológica

*Y junto a la indiferencia por el espacio, había una indiferencia igualmente completa por el tiempo.*  
*-Se diría que hay tiempo de sobra.- Era todo lo que contestaba cuando el investigador me pedía que le dijera lo que yo sentía acerca del tiempo.*  
*Había mucho tiempo, pero no importaba saber exactamente cuanto.*  
*Hubiera podido, desde luego, recurrir a mi reloj, pero mi reloj, yo lo sabía, estaba en otro universo.*  
*Mi experiencia real había sido, y era todavía, la de una duración indefinida o, alternativamente, de un perpetuo presente formado por un apocalipsis en continuo cambio.*  
Aldoux Huxley, “Las Puertas de la Percepción”.

En este capítulo pretendemos mostrar vínculos entre diferentes aspectos del espaciotiempo de Kerr y su relación con los modos inestables cuya existencia hemos demostrado en lo que es uno de los resultados centrales de la segunda parte de esta tesis.

El espaciotiempo de Kerr posee un vector de Killing axial que en este capítulo denotaremos como  $\zeta^a$ , y que en coordenadas de Boyer-Lindquist coincide con  $\partial_\phi$ . Es importante notar que el mismo cambia su naturaleza y se transforma en un vector tipo tiempo en la región que se denomina *la máquina de tiempo*,  $\mathcal{T}$  (ver la [Subsección 2.2.6](#)). La región  $\mathcal{T}$  está formada por aquellos eventos cuyas coordenadas de Boyer-Lindquist satisfacen la relación dada por:

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 + a^2) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta < 0.$$

Ahora analicemos la naturaleza de la ecuación en derivadas parciales que se obtiene al restringir la ecuación maestra de Teukolsky (5.1) al espacio de funciones axiales, es decir aquellas que satisfacen  $\mathcal{L}_\zeta \Psi = im\Psi$ , donde con  $\mathcal{L}_\zeta$  denotamos a la derivada de Lie en la dirección del vector  $\zeta$ . Veremos que en esta región del espaciotiempo la ecuación (5.1) cambia su naturaleza de hiperbólica a elíptica. Para realizar esta demostración, notemos que los términos con derivadas segundas (los que determinan la naturaleza de una ecuación en derivadas parciales) son independientes del peso de espín. Por este motivo son iguales a los de la ecuación de onda escalar:

$$0 = g^{ab} \nabla_a \nabla_b \Psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a \left( \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_b \Psi \right) \sim g^{ab} \partial_a \partial_b \Psi \sim \left( g^{ab} - \frac{\zeta^a \zeta^b}{\zeta^c \zeta_c} \right) \partial_a \partial_b \Psi. \quad (8.1)$$

En la expresión (8.1) utilizamos el símbolo  $\sim$  para indicar que dos expresiones son “iguales salvo términos de derivadas de menor orden”. Hacemos esto dado que la naturaleza de una ecuación en derivadas parciales

de segundo orden queda completamente definida por los términos que contienen las derivadas de segundo orden.

Obviando, por un momento, esto último, estudiemos en detalle la naturaleza de la ecuación maestra de Teukolsky. Supongamos para la función de Teukolsky una factorización en modos axiales dada por:  $\Psi_s(t, r, \theta, \phi) = F_s(t, r, \theta)e^{im\phi}$ .<sup>1</sup> Así, la ecuación maestra de Teukolsky puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
0 = & -2(s+1)(r-1)\frac{\partial F_s}{\partial r} + \left(2isa\cos\theta + 2\frac{sr^3 - 3sr^2 + (2iam + sa^2)r + sa^2}{\Delta}\right)\frac{\partial F_s}{\partial t} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial F_s}{\partial\theta} \\
& -\Delta\frac{\partial^2 F_s}{\partial r^2} + \left(a^2\cos^2\theta + \frac{r(r^3 + ra^2 + 2a^2)}{r^2 - 2r + a^2}\Delta\right)\frac{\partial^2 F_s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F_s}{\partial\theta^2} \\
& + \left(2\frac{sm\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{(s^2r^2 + sr^2 - 2sr + sa^2 + 2ismar - 2isma + m^2a^2 - 2s^2r + s^2a^2)\cos^2\theta}{\Delta\sin^2\theta}\right. \\
& \left. - \frac{-m^2r^2 + 2m^2r + sr^2 - 2sr + sa^2 + 2ismar - 2isma}{\Delta\sin^2\theta}\right)F_s.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Para analizar la naturaleza de la ecuación en derivadas parciales (8.2) debe estudiarse el comportamiento de los autovalores de la matriz  $C$  (de  $3 \times 3$ ) formada por los coeficientes que acompañan a las derivadas parciales de segundo orden. Las entradas no nulas de dicha matriz son:

$$C_{tt} = a^2\cos^2\theta + \frac{r(r^3 + ra^2 + 2a^2)}{\Delta} \tag{8.3}$$

$$C_{rr} = -\Delta \tag{8.4}$$

$$C_{\theta\theta} = -1. \tag{8.5}$$

Esta matriz es diagonal, de modo que (8.3-8.5) representan sus autovalores. Los dos últimos, tanto para la singularidad desnuda de Kerr como para la región  $r < 0$  de un agujero negro de Kerr, tienen signo negativo definido.  $C_{tt}$ , por el contrario, no. El cambio de signo se produce justamente en la región donde el vector de Killing axial,  $\zeta_a$ , se vuelve temporal, es decir, en la región donde aparecen curvas temporales cerradas.

También es interesante notar que, en el plano ecuatorial, la función  $C_{tt}$  (8.3) toma la siguiente forma:

$$C_{tt}(r, \pi/2) = \frac{r(r^3 + ra^2 + 2a^2)}{\Delta}, \tag{8.6}$$

vemos de esta manera que la función (8.6) toma valores negativos en el mismo intervalo que lo hace la función  $V_2(r)$  del potencial (5.18) que construimos para estudiar la ecuación de Teukolsky radial.

Recordemos que en la demostración de existencia de modos inestables resultó fundamental que el coeficiente del término cuadrático en  $k$ , dominante cuando  $k \gg 1$  y que habíamos denotado como  $V_2(r)$ , tomase valores negativos. La región donde esto ocurre se encuentra delimitada por los ceros reales del polinomio  $X(r) : = r(r^3 + a^2r + 2Ma^2)$ . Notemos que esta región es, precisamente, la intersección entre la máquina de tiempo,  $\mathcal{T}$ , y el plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$ , del espaciotiempo de Kerr. Este es el principal motivo que nos llevó a analizar si ambos hechos poseen una raíz común.

Resumiendo, en la región en la que el espaciotiempo de Kerr es totalmente vicioso, los autovalores de la matriz  $C$  son todos negativos, por lo que la ecuación maestra de Teukolsky, restringida a modos axiales, es *elíptica*. En el resto del mismo, dos de estos autovalores son negativos mientras que el tercero no, así, la ecuación diferencial es *hiperbólica*. En esta región, toda la maquinaria desarrollada para ecuaciones de onda en espaciotiempos curvos que no contienen curvas temporales cerradas, puede ser utilizada para resolver el problema de Cauchy.

Continuemos presentando argumentos que validen la conjetura que acabamos de plantear. Para ello, repasemos algunos resultados relacionados con el vector de Killing axial. Dado que la naturaleza de un vector no depende de las coordenadas con las que se decida describir al espaciotiempo utilizaremos las de Boyer-Lindquist. En este caso, el signo de la componente  $g_{\phi\phi}$  del tensor métrico define la naturaleza causal

<sup>1</sup>Notar que no estamos utilizando, por el momento, la naturaleza estacionaria del espaciotiempo.

de  $\partial_\phi$ , el vector de Killing axial. Como ya vimos  $g_{\phi\phi}$  se puede expresar como:

$$g_{\phi\phi} = \left[ r^2 + a^2 + \frac{2ra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta,$$

tanto  $\sin^2 \theta$  como  $\Sigma$  son funciones con signo positivo definido. Por tal motivo, el signo de  $g_{\phi\phi}$  está determinado por el de la función:

$$f(r, \theta) = r^4 + a^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta) + 2a^2 r \sin^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta. \quad (8.7)$$

Del análisis de la expresión para  $C_{tt}$  presentada en (8.6), puede concluirse que la misma admite ser escrita en términos de la función  $f(r, \theta)$  definida en (8.7), de modo que:

$$C_{tt} = \frac{f(r, \theta)}{\Delta}.$$

Si tenemos en cuenta que  $\Delta$  es una función positiva, tanto para el caso de la SDK como para de la región KIII del agujero negro, vemos que  $C_{tt}$  y  $f(r, \theta)$  comparten el mismo signo. De esta manera queda probada nuestra afirmación inicial.

A continuación, mostramos que la vinculación entre existencia de soluciones inestables y cambios en la naturaleza (de hiperbólica a elíptica) de una ecuación en derivadas parciales. Presentamos, en ese sentido, un ejemplo concreto que puede estudiarse en forma detallada y de manera simple.

Tomemos la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo orden que definirá un modelo de juguete, útil para fijar algunas ideas y conceptos:

$$\frac{\omega_0^2(x^2 - c^2)}{4} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} = 0, \quad (8.8)$$

donde consideraremos que las constantes  $c$  y  $\omega_0$  son ambas positivas. En ese caso puede verse que la ecuación (8.8) es hiperbólica cuando  $|x| > c$  y que cambia su naturaleza a elíptica cuando  $|x| < c$ .

Analicemos la posibilidad de que existan soluciones inestables al problema (8.8). Para ello notemos que la ecuación puede resolverse por el método de separación de variables proponiendo una solución de la forma:  $\Lambda(x, t) = \exp(kt/c)\Omega(x)$  (con  $k \in \mathbb{R}$ ). Reemplazando esta propuesta en (8.8), obtenemos que la función  $\Omega(x)$  debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\left( \frac{k\omega_0}{2} \right)^2 (x^2 - c^2)\Omega(x) - \frac{d^2\Omega(x)}{dx^2} = 0, \quad (8.9)$$

que no es otra cosa que la ecuación diferencial del oscilador armónico cuántico. La misma posee soluciones de cuadrado integrable siempre que sus respectivas autoenergías satisfagan la relación:

$$E_n = \frac{k\omega_0^2 c^2}{4} \left[ \frac{4}{\omega_0 c^2} \left( n + \frac{1}{2} \right) - k \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Podemos ver, entonces, que cuando  $c = 0$  los modos inestables no son posibles. En este caso la ecuación (8.8) es siempre hiperbólica. En caso contrario, el sistema tendrá infinitos modos inestables caracterizados por la familia de frecuencias dadas por:

$$k_n = \frac{4}{\omega_0 c^2} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Una de las consecuencias de la existencia de la región  $\mathcal{T}$  es que permite la construcción de curvas temporales orientadas hacia el futuro que hacen posible conectar *cualquier* par de eventos de la región KIII o del espaciotiempo completo de la SDK. Esto ocasiona una serie de dificultades cuando se intenta definir nociones de estabilidad o evolución temporal (ver por ejemplo [76] y referencias allí mencionadas).

De esta forma mostramos una relación entre la existencia de curvas temporales cerradas, el cambio de la naturaleza de la ecuación diferencial de hiperbólica a elíptica y la aparición de modos inestables. Este tema necesita ser profundizado, dejamos planteado a futuro (ver el **Capítulo 13**) continuar estudiando éstas y otras posibles explicaciones a la existencia de modos inestables en los espaciotiempos que analizamos en esta tesis.

## 8.1. El trabajo de Bachelot

Para introducir ciertos conceptos e ideas que resultarán importantes más adelante, presentaremos un breve resumen del trabajo, extremadamente técnico, realizado por Alain Bachelot [77]. La lectura de dicho trabajo motivó varias de las ideas que se presentarán en futuras secciones de esta tesis, alguna de ellas han sido aceptadas para su publicación en [78].

En [77] se presentan una serie de teoremas interesantes relacionados con la unicidad de soluciones a la ecuación de onda escalar en un espaciotiempo que no es globalmente hiperbólico. Al contrario de lo que ocurre con los espaciotiempos que son globalmente hiperbólicos donde existen fuertes teoremas en esta área [79], en el caso de espaciotiempos no globalmente hiperbólicos la situación no es clara (ver [76] y referencias allí mencionadas). Bachelot utiliza un espaciotiempo que, al igual que el espaciotiempo de Kerr, posee una región completamente viciosa que permite conectar dos puntos cualquiera de la variedad por medio de una curva temporal orientada al futuro. El origen de esta región, como es de esperar, es el cambio en la naturaleza del vector de Killing axial correspondiente a dicho espaciotiempo de espacial a temporal.

Presentaremos algunas definiciones importantes utilizadas en [77]. La región totalmente viciosa, donde opera la máquina de tiempo, será denotada con  $\mathbb{T}$ , el conjunto de eventos en los que la componente  $g^{tt}$  del tensor métrico se anula será denotado con  $\Sigma$ .<sup>2</sup> Un subíndice 0 sobre un conjunto cualquiera está denotando la intersección del mismo con una tajada temporal, es decir una hipersuperficie de coordenada temporal constante. El conjunto  $\Sigma_0$  es *no confinante* cuando, dado un valor arbitrario de  $t_0$ , no existan geodésicas nulas incluidas en el conjunto  $\{t_0\} \times \Sigma_0$ . Finalmente,  $\mathcal{M}$  denota la variedad diferencial sobre la que se trabaja.

El elemento de línea del espaciotiempo utilizado puede escribirse como:

$$ds_B^2 = dt^2 - [r^2 - C^2(r,z)] d\phi^2 - 2C(r,z) dt d\phi - dr^2 - dz^2, \quad (8.10)$$

donde se utilizan coordenadas cilíndricas  $(t, \phi, r, z) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$  y donde se supone que la función  $C(r, z)$  es nula fuera de un toro. Notar que en la región donde la función  $C(r, z)$  es nula, el espaciotiempo (8.10) se reduce al de Minkowski.

A continuación, presentamos una serie de teoremas demostrados por Bachelot y que nos resultaron de interés. Mantendremos una numeración propia dentro de la tesis, pero además aclararemos la utilizada en el trabajo original.

### Teorema 1 : Teorema 3.5 de [77]

Sea  $\Sigma_0$  no confinante,  $\mathbb{T}_0 \neq \emptyset$  y  $u$  una solución a la ecuación de onda perteneciente al espacio de funciones de cuadrado integrable en  $L_{loc}^2(\mathbb{R}_t; W^1(\mathbb{R}_x^2))$ . Si se satisface **al menos alguna** de las siguientes condiciones para un  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

- $u = (1 - \frac{C}{r})u_t = 0$  en  $\mathcal{M}_{t_0}$ ;
- $u = u_t = 0$  en  $\{t_0\} \times \mathbb{T}_0$  y  $C$  analítica y real en un entorno de  $\Sigma_0$ ,

entonces,  $u = 0$  en toda la variedad  $\mathcal{M}$ .

Un lema importante que se utiliza en la demostración de este teorema es:

### Lema 1 : Lema 3.6 de [77]

Supongamos que  $\Sigma_0$  es no confinante, que  $u$  cumple las condiciones del **Teorema 1** y que además para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$  se cumple que  $u = u_t = 0$  en  $\{t_0\} \times \mathbb{T}_0$ .

Entonces,  $u = 0$  en  $\mathbb{T}_0$ .

La interpretación directa de estos resultados es la siguiente: para este espaciotiempo, se puede, a pesar de no estar trabajando bajo el *ala protectora de la hiperbolicidad global*, dar condiciones necesarias para la unicidad de la solución a la ecuación de la onda escalar.

El último de los teoremas presentados en [77] al que prestaremos atención es el siguiente:<sup>3</sup>

<sup>2</sup>No debe confundirse con la definición de la función  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  que aparece en el elemento de línea del espaciotiempo de Kerr.

<sup>3</sup>Se presenta el teorema original en forma adaptada, focalizando la atención a los aspectos que resultan de interés para esta tesis.

**Teorema 2 : Teorema 4.2 de [77]**

Sea  $\mathcal{R}$  un subconjunto discreto de los números complejos,  $\mathbb{C}$ , entonces se cumple:

- (1)  $\mathcal{R} \cap i\mathbb{R}^* = \emptyset$ .
- (2)  $\mathcal{T}_0 \neq \emptyset, \lambda \in \mathcal{R} \cap (0, \infty) \Rightarrow \partial_\phi v_\lambda = 0$ .

En el **Teorema 2** el conjunto  $\mathcal{R}$  denota (haciendo abuso de notación) al conjunto de resonancias, es decir, soluciones a la ecuación de onda escalar que crecen exponencialmente con el tiempo. Con  $v_\lambda$  se está denotando la parte espacial de la función de onda una vez que la solución completa,  $u$ , se ha factorizado.

Queremos remarcar el segundo de los puntos, ya que el mismo afirma que las resonancias en este espaciotiempo son *necesariamente* axiales.

A lo largo de las demostraciones de estos teoremas, Bachelot hace uso de un resultado extremadamente poderoso en el área de los operadores diferenciales elípticos: el teorema de Aronszajn y Cordes, del que se presenta la versión (restringida) tomada de la página 26 de [80] (ver teorema 7):

**Teorema 3 : Teorema de Aronszajn-Cordes (1956)**

Sea  $L$  un operador lineal escalar de segundo orden con coeficientes suaves y símbolo principal real. Una condición suficiente para que la solución,  $u$ , a la ecuación  $Lu = 0$  sea estrictamente nula en un dominio conexo, es que dicha función y todas sus derivadas se anulen en un punto.

Como vimos, la presencia de curvas temporales cerradas no es una particularidad exclusiva de la región interna del espaciotiempo de Kerr, las mismas aparecen en un gran número de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein. Aquí, estudiaremos algunas de ellas para analizar si la existencia de curvas temporales cerradas y aparición de modos inestables están, de alguna manera, relacionadas.

Además, intentaremos extender los resultados obtenidos en [77] a espaciotiempos que, con justificados interrogantes sobre su importancia física, pueden, a diferencia del estudiado en [77], considerarse soluciones “interesantes” a las ecuaciones de campo de Einstein.

## 8.2. Aplicación al espaciotiempo de Kerr

En el **Capítulo 5** y el **Capítulo 6** demostramos la existencia de infinitas soluciones con simetría axial a la ecuación maestra de Teukolsky que presentan un crecimiento exponencial con el tiempo.<sup>4</sup>

La exigencia de simetría axial para los modos se realizó (exclusivamente) en base a que ella simplifica, notablemente, los cálculos. Esta familia de soluciones que en el trabajo de Bachelot son denominadas resonancias (ver el **Teorema 2**) y que en esta tesis denominamos modos inestables. A partir de ahora utilizaremos indistintamente estos dos nombres como sinónimos.

Si existiese un teorema análogo al **Teorema 2** para el caso del espaciotiempo de Kerr súper extremo o para la región interna del agujero negro, la exigencia de simetría a las perturbaciones estudiadas en [67] y [81] quedaría, sólidamente, justificada, dado que otros modos resonantes no serían posibles. Es importante remarcar que aún si esto no fuese cierto, los resultados de inestabilidad demostrados no perderían, bajo ningún punto de vista, su fortaleza. Igualmente, consideramos que realizar este estudio es, al menos para la completitud del análisis de estabilidad, relevante y, por sí mismo, interesante.

### 8.2.1. Singularidad desnuda de Kerr

Intentaremos ver si es posible o no demostrar un resultado análogo al **Teorema 2** para este espaciotiempo, es decir, si, utilizando herramientas análogas a las utilizadas en [77], podemos demostrar la inexistencia de resonancias no axiales en el caso del espaciotiempo de Kerr súper extremo o si las mismas no resultan suficientes.

---

<sup>4</sup>Estos capítulos están basados en algunos de los resultados de los trabajos [67] y [81].

A continuación, y pretendiendo de este modo facilitar la exposición y lectura de esta parte del trabajo, se presenta y numera, nuevamente, la ecuación maestra de Teukolsky (5.1):

$$T_s[\Psi_s] := \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \phi^2} \\ - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right) - 2s \left[ \frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \\ - 2s \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi_s = 0. \quad (8.11)$$

Si introducimos  $\Psi_s = e^{i\ell\phi} e^{\lambda t} u_s(r, \theta)$  en la ecuación (8.11), la misma se reduce a:

$$T_s[\Psi_s = e^{i\ell\phi} e^{\lambda t} u_s^l(r, \theta)] := iT_s^{\Im} + T_s^{\Re} = 0 = \\ i \left( \frac{4Mar\ell\lambda}{\Delta} - 2s\ell \frac{a(r-M)}{\Delta} + 2s\lambda a \cos \theta \right) u_s^l - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial u_s^l}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_s^l}{\partial \theta} \right) \\ + \left( 2s\ell \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - 2s\lambda \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r \right] + (s^2 \cot^2 \theta - s) + \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \lambda^2 - \ell^2 \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \right) u_s^l. \quad (8.12)$$

En [67] demostramos que existen soluciones a (8.12) regulares en la esfera, con un decaimiento asintótico exponencial para la parte radial y cuyo crecimiento temporal es exponencial.

Si se toma la ecuación (8.12), se la multiplica por  $\Delta^s u_s^*(r, \theta)$ <sup>5</sup> y se integra respecto de la coordenada radial (por el momento de manera formal) el segundo y el tercer término, se obtiene como resultado lo siguiente:

$$0 = i \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left\{ \Delta^s \left( \frac{4Mar\ell\lambda}{\Delta} - 2s\ell \frac{a(r-M)}{\Delta} + 2s\lambda a \cos \theta \right) |u_s^l|^2 \right\} \\ - \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left( u_s^{l*} \Delta^{s+1} \frac{\partial u_s^l}{\partial r} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Delta^{s+1} \left| \frac{\partial u_s^l}{\partial r} \right|^2 - \int_{-\infty}^{\infty} dr \Delta^s \left[ u_s^{l*} \sin \theta \frac{\partial u_s^l}{\partial \theta} \right] \Big|_0^{\pi} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dr \Delta^s \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left| \frac{\partial u_s^l}{\partial \theta} \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Delta^s H_s^{l,\lambda}(r, \theta) |u_s^l|^2, \quad (8.13)$$

donde hemos definido:

$$H_s^{l,\lambda}(r, \theta) = 2s\ell \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - 2s\lambda \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r \right] + (s^2 \cot^2 \theta - s) + \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \lambda^2 - \ell^2 \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (8.14)$$

A continuación, para analizar la validez de la integración por partes que realizamos, analizamos con detalle los términos de borde presentes en (8.13).

Las soluciones a la ecuación radial de Teukolsky obtenidas en [67] decrecen exponencialmente con la coordenada radial cuando  $|r| \rightarrow \infty$ . Esta propiedad (junto con la regularidad de las soluciones angulares sobre la esfera) asegura que la integración por partes puede ser realizada sin que se agreguen términos de borde. Esto permite simplificar la expresión (8.13) eliminando dichos términos, para obtener que:

$$0 = i \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left\{ \Delta^s \left( \frac{4Mar\ell\lambda}{\Delta} - 2s\ell \frac{a(r-M)}{\Delta} + 2s\lambda a \cos \theta \right) |u_s^l|^2 \right\} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \Delta^{s+1} \left| \frac{\partial u_s^l}{\partial r} \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dr \Delta^s \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left| \frac{\partial u_s^l}{\partial \theta} \right|^2 \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta H_s^{l,\lambda}(r, \theta, M, a, s, \ell, \lambda) |u_s^l|^2. \quad (8.15)$$

La relación (8.15) parece estar indicando la igualdad entre un número imaginario y uno real, cosa que solamente puede ocurrir si ambos son nulos. Si esto fuera cierto podríamos concluir que, en el caso en que  $\ell \neq 0$ , se debe cumplir, necesariamente, que  $|u_s^l| = 0$ . Este resultado se interpreta como la imposibilidad de tener, en el espaciotiempo de Kerr súper extremo, resonancias que no sean estrictamente axiales. Sin embargo, no es posible seguir esa línea argumental ya que las cantidades que aparecen dentro de las integrales

<sup>5</sup>Notar la conjugación compleja ya que  $u_s(t, \theta)$  no es, necesariamente, una función real.

en (8.15) no tienen signo definido. Por esto es que se debe realizar un estudio más profundo. Comenzaremos, por simplicidad, con el estudio de perturbaciones escalares, en sintonía con lo realizado en [77].

El espaciotiempo de Kerr posee dos vectores de Killing, por lo tanto el teorema de Noether asegura que existen dos corrientes conservadas. Una de ellas, la asociada al Killing temporal, se denomina *energía conservada*, cuya densidad puede expresarse como:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{(r^2 - 2rM + a^2 \cos^2 \theta)}{\Delta \sin \theta} \left| \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \right|^2 + \frac{1}{2} \Delta \sin \theta \left| \frac{\partial \xi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{(-r^4 - r^2 a^2 - 2a^2 rM - r^2 a^2 \cos^2 \theta + 2rMa^2 \cos^2 \theta - a^4 \cos^2 \theta) \sin \theta}{\Delta} \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \sin \theta \left| \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right|^2, \quad (8.16)$$

donde  $\xi = \xi(r, \theta, \phi, t)$  describe al campo escalar.

Proponemos modos resonantes que admiten la siguiente factorización para la función que describe al campo:

$$\xi(r, \theta, \phi, t) = e^{\lambda t} e^{i l \phi} v(r, \theta),$$

para estos modos obtenemos que la expresión (8.16) adquiere una forma simplificada:

$$0 = E_{\text{ax}}^{\text{resK}} = \frac{1}{2} \sin \theta \Delta \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{2} \sin \theta \left| \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 - \left( \frac{1}{2} \frac{(r^2 - 2rM + a^2 \cos^2 \theta) l^2}{\Delta \sin \theta} + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta \lambda^2 (r^4 + r^2 a^2 + 2a^2 rM + r^2 a^2 \cos^2 \theta - 2rMa^2 \cos^2 \theta + a^4 \cos^2 \theta)}{\Delta} \right) |v|^2, \quad (8.17)$$

donde hemos omitido, para simplificar la escritura, el factor común  $e^{\lambda t} e^{i l \phi}$ . La conclusión de que la densidad de energía,  $E_{\text{ax}}^{\text{resK}}$ , debe ser nula es producto de que la misma es una cantidad conservada que posee el factor exponencialmente creciente en el tiempo,  $e^{\lambda t}$ .

Comparando las expresiones (8.17) y (8.13) puede llegarse a la conclusión de que, para el caso de una perturbación escalar, la expresión (8.13) puede escribirse como:

$$0 = 2i \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left( \frac{4Mar\lambda}{\Delta} \right) |u_s^l|^2. \quad (8.18)$$

Podemos notar que el integrando en (8.18) no tiene signo definido (debido al factor  $r$ ). En vistas de este resultado, concluimos que el razonamiento presentado por Bachelot no resulta suficiente para poder demostrar, en este espaciotiempo, la validez de una extensión del Teorema 2. Es necesario analizar otras líneas de pensamiento que permitan encarar la tarea de demostrar la validez o no de este resultado. Dejamos esto para trabajo futuro (ver el Capítulo 13).

### 8.2.2. La región interna del agujero negro de Kerr

Ahora pretendemos analizar si el Teorema 2 es válido o no en la región KIII de un agujero negro de Kerr.

Utilizando el mismo procedimiento que el que presentamos para el caso de la singularidad desnuda de Kerr, pero centrando la atención a la región interna, ( $r < r_{\text{HC}}$ ), de un agujero negro de Kerr, obtendremos una ecuación completamente análoga a (8.18) dada por (reescribiendo de modo que  $M$  no aparezca explícitamente en las expresiones):

$$0 = 2i \int_{-\infty}^{r_{\text{HC}}} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \left( \frac{4ar\lambda}{\Delta} \right) |u_0^l|^2. \quad (8.19)$$

El integrando no tiene signo definido por lo que la información disponible no es suficiente para afirmar la inexistencia de resonancias no axiales en este espaciotiempo.

El motivo radica en que la coordenada radial  $r \in (-\infty, r_{\text{HC}})$  y  $r_{\text{HC}} > 0$ . El hecho de que en el límite en que  $a \rightarrow 0$  se cumpla que  $r_{\text{HC}} \rightarrow 0$ , da motivos para pensar que, al menos en este caso límite, el resultado de inexistencia de resonancias escalares no axiales puede resultar válido. Por este motivo, pasaremos a estudiar el caso que denominamos de “rotación lenta”, en el que  $a \ll 1$ .

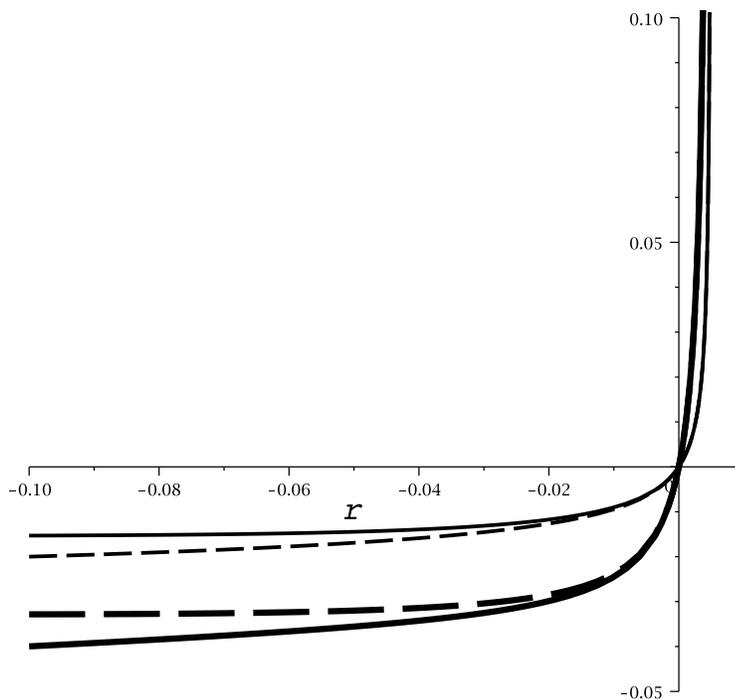


Figura 8.1: Gráficos del integrando de (8.22) para el caso en el que  $a = 0.1$  y modos caracterizados por  $l = L = 1$ . Se presentan con líneas punteadas los resultados asociados al considerar  $R_1^{(0)}$  y en trazo continuo los asociados a  $R_1^{(1)}$ . Manteniendo esa codificación, los trazos gruesos corresponden a  $\lambda = \frac{1}{2}$  y los finos a  $\lambda = \frac{45}{2}$ . El rango para la coordenada  $r$  es  $[-20(a^2/2), a^2/2]$ .

### La región interna de un agujero negro de Kerr *lento*

Dado que resultará fundamental para cálculos futuros, analizamos tanto las propiedades locales (en un entorno del horizonte de Cauchy) como las asintóticas de las soluciones a la ecuación radial de Teukolsky en el límite de rotación lenta.

Escribimos la ecuación radial de Teukolsky (5.3):

$$0 = \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2 \frac{(r-1)}{r^2 - 2r + a^2} \frac{d}{dr} R(r) + \left( -\frac{r(ra^2 + 2a^2 + r^3)\lambda^2}{(r^2 - 2r + a^2)^2} - \frac{4iarl\lambda}{(r^2 - 2r + a^2)^2} + \frac{a^2 l^2}{(r^2 - 2r + a^2)^2} - \frac{E}{r^2 - 2r + a^2} \right) R(r). \quad (8.20)$$

Para evitar alterar la estructura de puntos singulares de la misma, no realizaremos un desarrollo en serie de Taylor de los coeficientes de la ecuación (8.20). En ella reemplazaremos la siguiente expresión para la función  $\Delta = (r - a^2/2)(r - 2 + a^2/2)$ .<sup>6</sup> De esta forma obtenemos que la ecuación (8.20) se puede reescribir como:

$$0 = 2(r-1) \frac{d}{dr} R(r) + \left( r - \frac{a^2}{2} \right) \left( r - 2 + \frac{a^2}{2} \right) \frac{d^2}{dr^2} R(r) - \left( E + \frac{r(ra^2 + 2a^2 + r^3)\lambda^2}{\left(r - \frac{a^2}{2}\right)\left(r - 2 + \frac{a^2}{2}\right)} + \frac{4iarl\lambda}{\left(r - \frac{a^2}{2}\right)\left(r - 2 + \frac{a^2}{2}\right)} - \frac{a^2 l^2}{\left(r - \frac{a^2}{2}\right)\left(r - 2 + \frac{a^2}{2}\right)} \right) R(r). \quad (8.21)$$

En la literatura se encuentran disponibles expresiones en serie de potencias para el autovalor (común con el de la ecuación radial) de la ecuación angular de Teukolsky (ver el Sección 5.1). Utilizaremos la presentada

<sup>6</sup>Es importante notar que, a diferencia de lo que se realiza en [82], en el caso en que estamos interesados en este momento no podemos desarrollar a la función  $\Delta^{-1} = 1/(r(r-2))$  para  $a$  pequeño, dado que nuestro caso de interés, al contrario del realizado por esos autores, se estudia, entre otras cosas, un entorno de  $r = 0$  en el que dicha aproximación no es válida. Por este motivo analizamos esta alternativa diferente para caracterizar al espaciotiempo de Kerr *lento*.

en [64] para el caso particular de una perturbación escalar que, hasta orden  $\mathcal{O}(a^4)$ , está dada por:

$$E_{\text{ang}}^{(2)} = L(L+1) + \left( -2 \frac{l^2}{(2L-1)(2L+3)} + \frac{2L^2 + 2L - 1}{(2L-1)(2L+3)} \right) \lambda^2 a^2 + \mathcal{O}(a^4).$$

Al introducir esta expresión en la de la ecuación radial de Teukolsky para rotación lenta (8.21), podremos estudiar algunas características de sus soluciones.

Además, para ser consistentes en nuestro análisis, reemplazamos a la coordenada del horizonte de Cauchy por su serie de Taylor,  $r_{\text{HC}}(a) = 1 - \sqrt{1 - a^2} \sim a^2/2$ . De esta forma, la (8.19) puede escribirse como:

$$0 = 2i \int_{-\infty}^{\frac{a^2}{2}} dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \frac{4arl\lambda}{\left(r - \frac{a^2}{2}\right)\left(r - 2 + \frac{a^2}{2}\right)} \right) |u_0^l|^2. \quad (8.22)$$

El integrando no tiene signo definido por lo que, sin tener información adicional sobre la función  $|u_0^l|^2$ , no podemos realizar conclusiones fuertes. Debemos, por lo tanto, hacer un análisis más profundo y, en este caso, tenemos a disposición herramientas para realizarlo.

Analicemos la posibilidad de obtener un resultado análogo al Teorema 2 en este caso particular. A tal fin será relevante únicamente la parte radial de la solución, que pasamos a estudiar en detalle.

En primera instancia, estudiamos la solución en serie de Frobenius de la ecuación radial de Teukolsky en el entorno al horizonte de Cauchy,  $r_{\text{HC}} = a^2/2$ . Luego de esto, obtenemos que la norma cuadrada, cantidad involucrada en (8.22), de las dos soluciones locales linealmente independientes. Las mismas presentan sus comportamientos en el entorno de  $r = a^2/2$ :

$$\left| R_1^{(0)}(r) \right|^2 \sim \left| r - \frac{a^2}{2} \right|^{\lambda a^2} e^{-l\pi a}, \quad \left| R_2^{(0)}(r) \right|^2 \sim \left| r - \frac{a^2}{2} \right|^{-\lambda a^2} e^{l\pi a}.$$

De las expresiones anteriores vemos que para valores positivos del parámetro  $\lambda$ , la función  $\left| R_1^{(0)}(r) \right|^2$  es regular en  $r = a^2/2$ , mientras que la otra no. Por este motivo descartamos la solución  $R_2^{(0)}(r)$  y trabajamos con la  $R_1^{(0)}(r)$ .

Analizaremos el comportamiento asintótico de la ecuación radial de Teukolsky. Manteniendo términos de orden  $r^{-1}$  en los desarrollos en serie de los coeficientes de la ecuación radial obtenemos que, cuando  $r \rightarrow -\infty$ , las soluciones bien comportadas presentan el siguiente comportamiento:

$$R_{\text{asi}} \sim e^{-\lambda r} \text{KummerM}(1 + 2\lambda, 2, 2\lambda r), \quad \lambda = n/2, \quad n = 1, 2, \dots$$

La restricción sobre los posibles valores para el parámetro  $\lambda$ , aparece al exigir que las mismas presenten un apropiado decaimiento asintótico. Vemos que la misma impone la existencia de un valor mínimo para el parámetro  $\lambda$ , que denominaremos  $\lambda_{\text{min}} = 1/2$ .

Comencemos a juntar estos resultados y veremos que los mismos nos permitirán obtener información relacionada con la existencia o no de modos resonantes no axiales en la región interna de un agujero negro de Kerr *lento*.

Estudiaremos la parte radial ya que la integración angular puede entenderse como un proceso de “promediar el resultado radial”. Este “promediado” no altera el signo del resultado dado que la función peso con el que se lo realiza,  $\sin \theta$ , es positiva en el intervalo de integración. Con esto en mente, realizaremos la siguiente división a la integral radial de (8.22):

$$\int_{-\infty}^{a^2/2} dr = \int_{-\infty}^{-r_{\text{asi}}} dr + \int_{-r_{\text{asi}}}^{-r_{\text{loc}}} dr + \int_{-r_{\text{loc}}}^{a^2/2} dr, \quad (8.23)$$

donde los valores  $r_{\text{asi}}$  y  $r_{\text{loc}}$  serán elegidos de modo que las diferentes aproximaciones para la parte radial a la solución  $u_0^l$  sean válidas.

En la *región asintótica*,  $(-\infty, -r_{\text{asi}})$ , utilizaremos la forma asintótica de la solución radial, mientras que en la *región del horizonte de Cauchy*,  $(-r_{\text{loc}}, a^2/2)$ , haremos uso de la solución de Frobenius. Tanto la integral en la *región intermedia*,  $(-r_{\text{asi}}, -r_{\text{loc}})$  como la integral en la *región asintótica* tienen, sin importar la elección que se realice para  $r_{\text{asi}}$ , signo negativo definido.

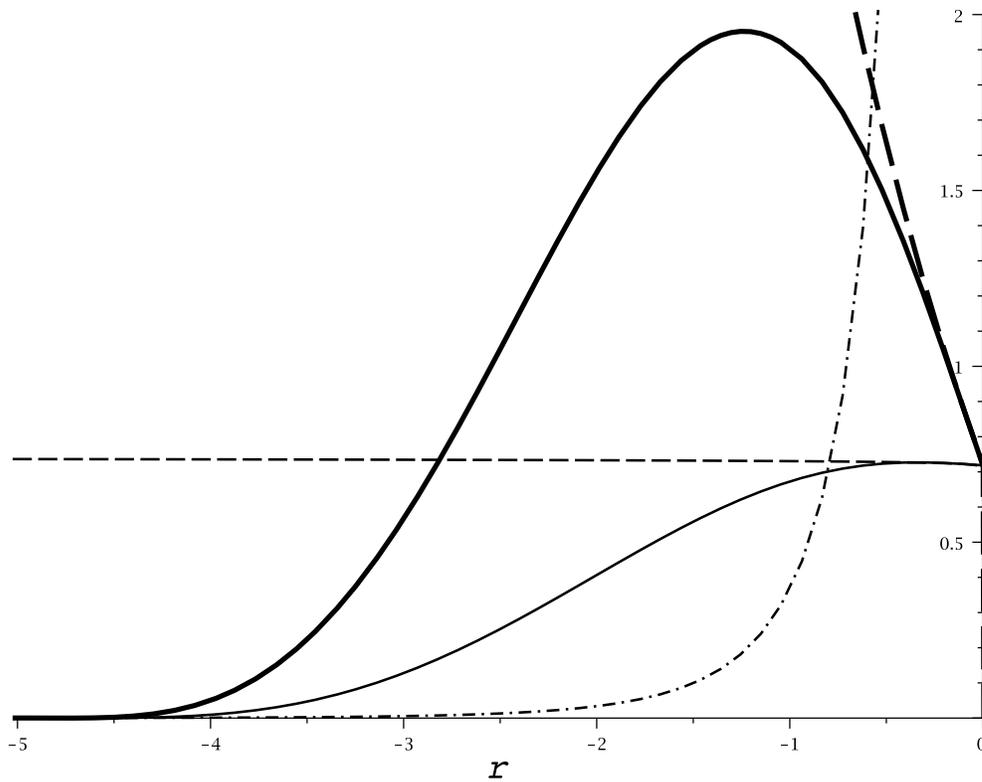


Figura 8.2: Para un espaciotiempo de Kerr con  $a = 0.1$  y un modo resonante caracterizado por  $\lambda = 1/2$  y  $l = L = 1$ , se presenta, en línea de raya y punto, el módulo cuadrado de las soluciones asintótica a orden (0), en línea de rayas gruesas (finas) la solución de Frobenius en torno al horizonte de Cauchy también a orden (1) ((0)) y el polinomio de interpolación de Hermite en línea continua gruesa (fina) asociados a las soluciones de Frobenius (1) ((0)). Dicho polinomio fue construido tomando como puntos de interpolación a  $r_{\text{loc}} = 20(a^2/2)$  y  $r_{\text{asi}} = 10^3(a^2/2)$ .

Pasemos ahora a analizar las posibles elecciones para los parámetros  $r_{\text{asi}}$  y  $r_{\text{loc}}$ .

Primero, estudiemos la elección de  $r_{\text{asi}}$ . Para ello, compararemos la expresión asintótica para la ecuación diferencial que obtuvimos, con la que se obtiene si se consideran, únicamente, los términos dominantes en la ecuación radial de Teukolsky (es decir despreciando los términos  $\mathcal{O}(r^{-1})$ ). El análisis de estas dos soluciones nos permiten afirmar que para que la aproximación resulte adecuada debe elegirse  $r_{\text{asi}} \gtrsim 10^3(a^2/2)$ .

Pasemos a analizar la elección para  $r_{\text{loc}}$ . Para ello, estudiamos un término más en la solución de Frobenius a la ecuación radial de Teukolsky que presentamos previamente. El mismo depende, explícitamente, del autovalor común a las ecuaciones radial y angular,  $E$ . Si utilizamos la expresión en serie de potencias de  $a\omega$  para el mismo, obtenemos que la solución local puede escribirse como:

$$R_1^{(1)} \sim \left(r - \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{iLa+a^2\lambda}{2}} \left(1 + \left(-\frac{L^2+L}{2} + \left[\left(\frac{l^2}{(2L-1)(2L+3)} - \frac{2L^2+2L-1}{2(2L-1)(2L+3)}\right)\lambda^2 + 2(L^2\lambda + L\lambda + L^2l^2 + Ll^2 + \lambda^2) - L^2 - L + \lambda + 4l^2\lambda\right]\frac{a^2}{4} + \frac{i}{4}\left(2(aL^2l + aLl) + al + 4al\lambda\right)\right)\left(r - \frac{a^2}{2}\right).$$

Podemos concluir que la aproximación resulta confiable si se elige  $r_{\text{loc}} \lesssim 20(a^2/2)$  (ver la [Figura 8.1](#) para algunos resultados ilustrativos).

Intentaremos, a continuación, estimar el valor de la integral intermedia (en el intervalo  $r \in (-r_{\text{asi}}, -r_{\text{loc}})$ ). Para ello utilizaremos un polinomio de interpolación de Hermite, es decir, uno cuyos coeficientes son elegidos para que su expresión coincida (tanto la función como su derivada primera) con las expresiones asintóticas y de Frobenius a la solución radial en los puntos  $r = -r_{\text{asi}}$  y  $r = -r_{\text{loc}}$  respectivamente.

A modo de ejemplo, en la [Figura 8.2](#) mostramos el módulo cuadrado de las soluciones  $R_1^{(0)}$ ,  $R_{\text{asi}}^{(0)} = e^{\lambda r}/r$  y el polinomio de interpolación de Hermite para la elección  $r_{\text{loc}} = 20(a^2/2)$ ,  $r_{\text{asi}} = 10^3(a^2/2)$ . Todo esto para un espaciotiempo de Kerr caracterizado por  $a = 0.1$  y el modo escalar  $\lambda = 1/2$ ,  $l = L = 1$ .

Todos los ingredientes fueron presentados, estamos en condiciones de realizar todas las integrales que aparecen en [\(8.23\)](#). Además, dado que contamos con las soluciones asintóticas como con las de Frobenius a orden (1), podemos utilizarlas para estimar el error que se comete al hacer los cálculos con las soluciones a orden (0).

A continuación, presentamos los resultados obtenidos siguiendo el procedimiento explicado anteriormente. Dada la longitud de las expresiones involucradas, presentamos, únicamente, gráficos ilustrativos de modo que la interpretación de los resultados resulte más transparente.

En la [Figura 8.3](#) presentamos la estimación de la integral [\(8.23\)](#). Este resultado (y otros similares que se obtienen para diferentes valores de  $a$ ,  $l$  y  $L$ ) nos permiten dar argumentos fuertes en contra de la existencia de resonancias no axiales en el interior del agujero negro de Kerr *lento*.

Cualitativamente, al utilizar las diferentes aproximaciones, los resultados que se obtienen no se modifican. Por tal motivo presentaremos los resultados obtenidos al utilizar las aproximaciones (1), tanto para la solución asintótica como para la de Frobenius. En la [Figura 8.4](#) presentamos los resultados asociados a  $l = 1$ ,  $L = 1$ ,  $l = 2$ ,  $L = 1$  y  $l = 5$ ,  $L = 1$  en función del parámetro  $\lambda$ .

Vemos que el comportamiento no sufre cambios cualitativos a medida que estudiamos modos con valores de  $l$  crecientes. Esto fortalece el argumento de inexistencia de resonancias escalares no axiales en el interior de un agujero negro de Kerr *lento*. Un resultado que está en consonancia con los obtenidos en [\[77\]](#).

Por el momento no tenemos disponible una versión de teorema de este resultado, pero dados los argumentos que presentamos postulamos la siguiente conjetura:

Conjetura: Los únicos modos resonantes en la región interna de un agujero negro de Kerr *lento*, preservan la simetría axial del espaciotiempo de fondo.

Intentar probar esta conjetura (y quizás generalizar los argumentos para valores arbitrarios de  $a < M$ ) es parte del trabajo a futuro planteado en el [Capítulo 13](#).

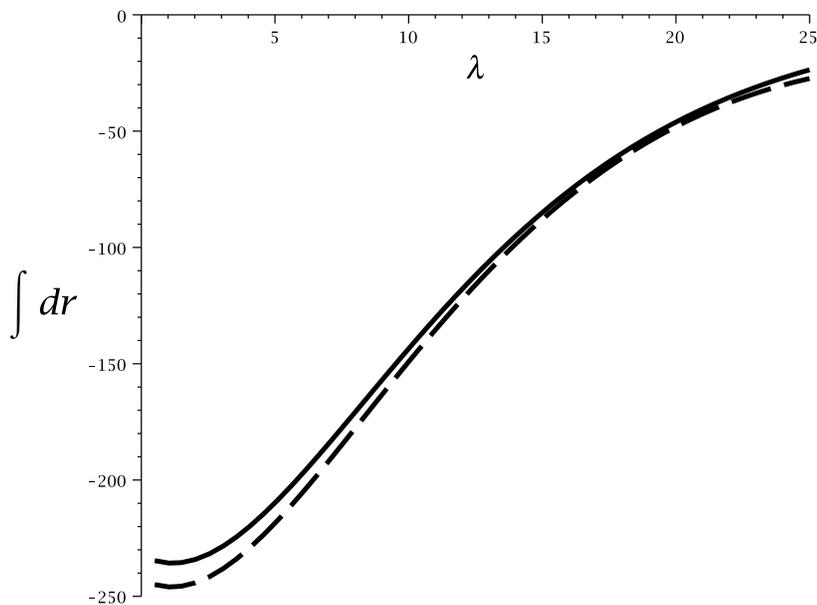


Figura 8.3: Para un espaciotiempo de Kerr con  $a = 0.1$  y un modo resonante caracterizado por  $l = L = 1$ , se presenta la estimación a la integral (8.23) como función de  $\lambda$  y aquí simbolizada simplemente como  $\int dr$ . En línea continua se muestran los resultados que se obtienen utilizando las aproximaciones (1) y con línea a trazos las correspondientes a utilizar las aproximaciones (0). Notar que para la presentación se han unido con líneas los puntos discretos que corresponden a modos asintóticamente bien comportados cuyo espectro es discreto para valores semi enteros de  $\lambda$ .

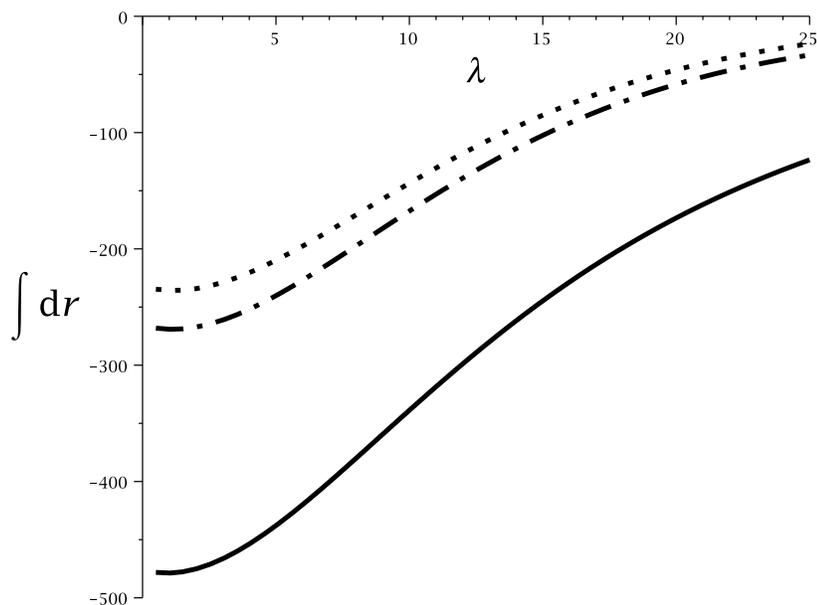


Figura 8.4: Para un espaciotiempo de Kerr con  $a = 0.1$  se presenta la estimación a la integral presentada en (8.23) como función de  $\lambda$  para modos caracterizados por  $l = 1, L = 1$ ,  $l = 2, L = 1$  y  $l = 5, L = 1$ , utilizando línea de puntos, de trazo y punto y continua respectivamente. Notar que para la presentación se han unido con líneas los puntos discretos que corresponden a modos asintóticamente bien comportados cuyo espectro es discreto, válido, únicamente, para valores semi enteros de  $\lambda$ .

### 8.2.3. La región externa del agujero negro de Kerr

Ahora restringiremos la atención a la región externa de un agujero negro de Kerr, en la que la coordenada radial de Boyer-Lindquist satisface que  $r > r_{\text{HE}}$ .

Vamos a poner a prueba la validez de una forma equivalente al **Teorema 2** para la llamada región astronómica del espaciotiempo de Kerr, cuya estabilidad modal ha sido probada [72].

Los razonamientos presentados anteriormente pueden utilizarse en esta región sin introducir modificaciones relevantes. La notable diferencia en este caso es que ahora las funciones dentro de las integrales en la expresión equivalente a (8.13), sí tienen signo definido (dado que los límites de integración ahora son  $r_{\text{HE}} > 0$  y  $\infty$ ). De esta manera, podemos asegurar que no existirán resonancias que rompan la simetría axial del espaciotiempo de fondo. Sumando este resultado a los obtenidos en [67, 81], donde se demostró que no existen modos resonantes con simetría axial tenemos una demostración de no existencia de modos resonantes escalares de este tipo de la región exterior del agujero negro de Kerr.

### 8.2.4. Extensión del Lema 1

Antes de analizar la extensión del **Lema 1** al espaciotiempo de Kerr, presentamos una importante definición relacionada con un operador diferencial: la de *símbolo total* y *símbolo principal* del mismo.

Sea,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  un índice múltiple y  $|\mathbf{p}| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  y  $\partial^{\mathbf{p}} = \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \dots \partial_n^{p_n}$ , otras cantidades relevantes para los desarrollos futuros.

Puede definirse un operador diferencial lineal genérico,  $A$ , del siguiente modo:

$$A = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} a_{\mathbf{p}}(x) \partial^{\mathbf{p}},$$

donde los coeficientes,  $a_{\mathbf{p}}(x)$ , son funciones suaves. El orden de un operador diferencial está definido como  $\text{ord}A = \max|\mathbf{p}|$  donde  $a_{\mathbf{p}}(x) \neq 0$ .

Puede asociarse al operador  $A$  una forma conocida como *símbolo* o *símbolo total*:

$$P(x, \chi) = \sum_{|\mathbf{p}| \leq m} i^{|\mathbf{p}|} a_{\mathbf{p}}(x) \chi^{\mathbf{p}},$$

donde  $\chi$  es un vector  $n$ -dimensional.

El *símbolo principal* del operador que estamos analizando está definido como:

$$P_m(x, \chi) = \sum_{|\mathbf{p}|=m} i^{|\mathbf{p}|} a_{\mathbf{p}}(x) \chi^{\mathbf{p}}.$$

Tanto el símbolo total como el principal son polinomios de  $n$  variables en  $\mathbb{C}(x)$ .

Entre las aplicaciones que tienen el estudio del símbolo principal de operadores diferenciales (para más detalles ver [83]) no podemos dejar de mencionar que los operadores elípticos son aquellos para los cuales el símbolo principal nunca es nulo. Para operadores hiperbólicos y parabólicos, los ceros del símbolo principal, corresponden con las direcciones características de la ecuación diferencial.

Veremos que para el caso de perturbaciones en el espaciotiempo de Kerr se cumplen las hipótesis del **Teorema 3** y que, por lo tanto, el mismo es válido.

- ✓ El operador  $T_s$  en ecuación maestra de Teukolsky (5.1) es un operador diferencial escalar de segundo orden.
- ✓ Tiene símbolo principal real.
- ✓ Para perturbaciones con simetría axial se demostró en [67] que el operador  $T_s$  es elíptico dentro de la máquina de tiempo.
- ✓ Para una singularidad desnuda de Kerr la función  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$  es siempre positiva, por lo que todos los coeficientes que aparecen en  $T_s$  son regulares.

Resulta directo extender la demostración del **Lema 1** para este caso. Concluimos que si se prescribe un dato inicial trivial dentro de la máquina de tiempo el espaciotiempo de Kerr súper extremo, la solución en la máquina de tiempo completa resulta nulo, aún cuando este espaciotiempo no es globalmente hiperbólico. Demostramos que en este espaciotiempo existe una noción de unicidad para soluciones de la ecuación de onda escalar.

### 8.3. Otros espaciotiempos

A continuación, estudiaremos otros espaciotiempos que poseen una región con curvas temporales cerradas.

La idea es estudiar si en estos espaciotiempos, que son solución a las ecuaciones de Einstein, resultan aplicables los resultados de inexistencia de modos resonantes no axiales para perturbaciones escalares. Estos resultados fueron publicados en [78].

#### 8.3.1. El espaciotiempo de Lanczos

La solución a las ecuaciones de Einstein descubierta por Cornelius Lanczos en el año 1924 [18] y obtenida (y generalizada) de forma independiente por Williem Jacob van Stockum en el año 1937 [20], describe el campo gravitacional generado por una distribución de polvo con simetría cilíndrica que se encuentra rotando rígidamente. Dado que la densidad de dicho polvo es una función creciente con la distancia al eje de simetría y, que en el caso más simple, dicha distribución de masa se extiende infinitamente en la dirección del eje de rotación, la solución no parece ser útil para modelar objetos reales.

Utilizando coordenadas cilíndricas para describir al espaciotiempo, el elemento de línea viene dado por:

$$ds_L^2 = dt^2 - 2\alpha\rho^2 dt d\phi - e^{-\alpha^2\rho^2} [d\rho^2 + dz^2] - (\rho^2 - \alpha^2\rho^4) d\phi^2. \quad (8.24)$$

Este espaciotiempo posee 3 vectores de Killing:  $\partial_t$ ,  $\partial_z$  y  $\partial_\phi$ , por lo que es: estacionario, invariante frente a translaciones a lo largo del eje de simetría y de rotaciones alrededor del mismo.

El parámetro  $\alpha$ , que describe la geometría del espaciotiempo, puede interpretarse como la magnitud del vector de vorticidad en el eje de simetría. Si se considera el caso límite en el que  $\alpha = 0$ , se recupera el espaciotiempo de Minkowski.

El escalar de Kretschmann puede escribirse como:

$$K_L = 16e^{2\alpha^2\rho^2} \alpha^4 (2 - \alpha^2),$$

de este modo vemos que el eje de simetría,  $\rho = 0$ , es una singularidad de coordenadas. Otro argumento para ver que la singularidad en  $\rho = 0$  es de coordenadas es notar que para  $\rho \ll 1/\alpha$ , el elemento de línea (8.24) se vuelve similar al de Minkowski, por lo que el cambio de coordenadas tipo cartesianas la hace desaparecer.

Este espaciotiempo posee curvas temporales cerradas. Las mismas aparecen, como lo notó por primera vez van Stockum, en la región  $\rho > 1/\alpha$ . Para ese valor de la coordenada radial, los conos de luz se vuelven tangentes a los planos de coordenada  $t$  constante y la coordenada  $\phi$  cambia su naturaleza ya que en esa región  $g_{\phi\phi} > 0$ .

Estudiaremos el comportamiento de campos escalares no masivos, la ecuación diferencial que rige su comportamiento puede escribirse:

$$\begin{aligned} \square\Phi &= -\frac{e^{\alpha^2\rho^2}}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} f(t, \rho, z, \phi) - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} f(t, \rho, z, \phi) - 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial t \partial\phi} f(t, \rho, z, \phi) - e^{\alpha^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} f(t, \rho, z, \phi) \\ &+ (1 - \alpha^2\rho^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \rho, z, \phi) - e^{\alpha^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(t, \rho, z, \phi). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Si restringimos el estudio que venimos realizando a la familia de soluciones de (8.25) que pueden escribirse como  $\Phi(t, \rho, z, \phi) = e^{i(m\phi + k_z z)} u(t, \rho)$ , la ecuación en derivadas parciales que determina a  $u(t, \rho)$  toma la forma:

$$-\frac{\partial}{\partial\rho} \frac{u}{\rho} - 2ie^{-\alpha^2\rho^2} \alpha m \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} u + e^{-\alpha^2\rho^2} (1 - \alpha^2\rho^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \left( k_z^2 + \frac{e^{-\alpha^2\rho^2} m^2}{\rho^2} \right) u = 0.$$

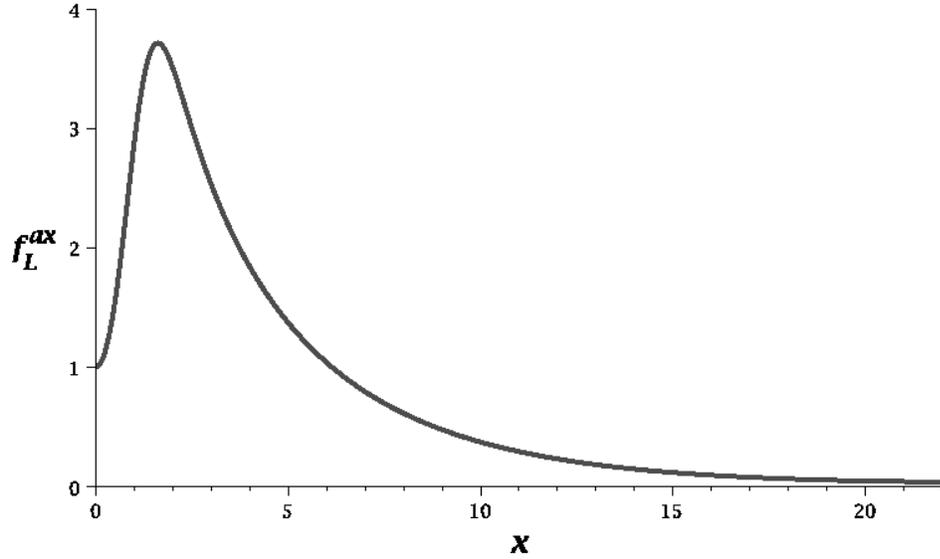


Figura 8.5: Una solución típica para la parte radial de la ecuación de perturbación escalar a un espaciotiempo de Lanczos. Se utiliza la coordenada radial adimensionalizada definida como  $x = \alpha\rho$ . El modo considerado está caracterizado por los parámetros,  $k_z = 0.2$  y  $K = 2.96327936\dots$ . Se eligió la amplitud de forma que  $f_L^{ax}(0) = 1$ .

El comportamiento de esta ecuación es similar al que presenta la de Teukolsky: cambia de naturaleza en  $\alpha^2\rho^2 = 1$  de hiperbólica a elíptica. Además, este cambio ocurre en la región del espaciotiempo donde aparecen las curvas temporales cerradas.

Si hacemos uso de todas las simetrías que posee este espaciotiempo, y escribimos a la perturbación como  $\Phi(t, \rho, z, \phi) = e^{i(m\phi + k_z z) + Kt} f_L(\rho)$ , obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria para  $f_L(\rho)$ :

$$-\frac{d}{d\rho} \frac{f_L}{\rho} - \frac{d^2}{d\rho^2} f_L + \left( (1 - \alpha^2 \rho^2) e^{-\alpha^2 \rho^2} K^2 - 2ie^{-\alpha^2 \rho^2} \alpha m K + k_z^2 + \frac{e^{-\alpha^2 \rho^2} m^2}{\rho^2} \right) f_L = 0. \quad (8.26)$$

Si multiplicamos la expresión (8.26) por  $\rho f_L^*(\rho)$  e integramos en  $\rho$ , obtenemos la siguiente relación:

$$0 = \int_0^\infty d\rho \left[ f_L^* \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df_L}{d\rho} \right) \right] + 2i\alpha m K \rho e^{-\alpha^2 \rho^2} |f_L|^2 - \left( \left[ K^2(1 - \rho^2 \alpha^2) + \frac{m^2}{\rho^2} \right] e^{-\alpha^2 \rho^2} + k_z^2 \right) \rho |f_L|^2 \right]. \quad (8.27)$$

Analizando tanto el comportamiento asintótico como en el entorno del eje de la ecuación diferencial (8.26), concluimos que existen soluciones radiales que poseen un decaimiento apropiado tanto en infinito como en el eje. Esto garantiza que pueda realizarse una integración por partes de (8.27) sin introducir términos de borde de manera que:

$$\int_0^\infty d\rho \left[ \rho \left| \frac{df_L}{d\rho} \right|^2 + \left( \left[ K^2(1 - \rho^2 \alpha^2) - \frac{m^2}{\rho^2} \right] e^{-\alpha^2 \rho^2} + k_z^2 \right) \rho |f_L|^2 \right] = 2i\alpha m K \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\alpha^2 \rho^2} |f_L|^2, \quad (8.28)$$

de donde, dado que el integrando del miembro derecho es definido positivo, obtenemos una contradicción (un número real igualado a uno imaginario puro) salvo que exijamos que  $m = 0$ , es decir: las únicas resonancias (si existe alguna) en este espaciotiempo tienen simetría axial. Este resultado está en concordancia con el demostrado en [77].

De esta forma, demostramos el siguiente teorema:

**Teorema 4** *En el espaciotiempo de Lanczos las únicas resonancias posibles para un campo escalar, preservan la simetría axial del espaciotiempo de fondo.*

A continuación, estudiaremos la posibilidad de existencia de modos resonantes axiales.

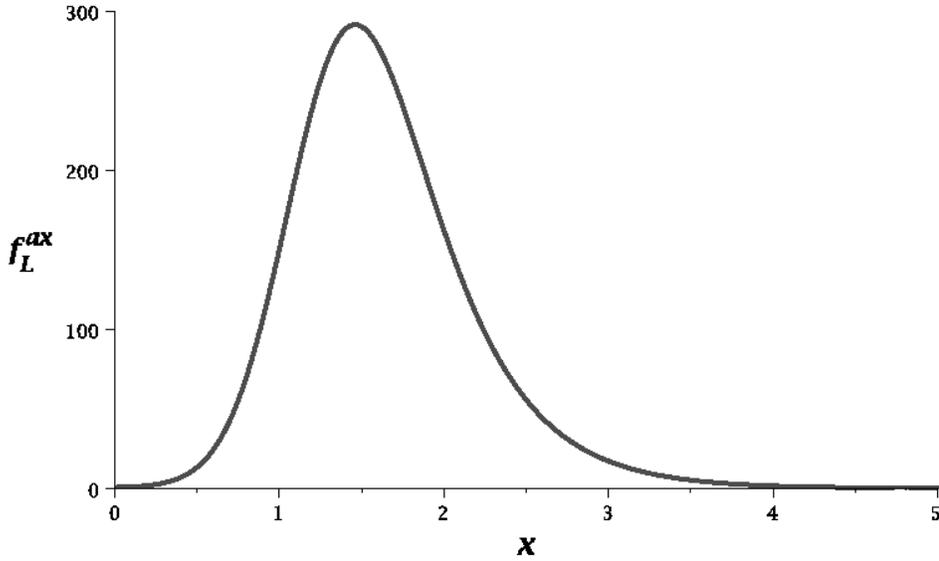


Figura 8.6: Una solución típica para la parte radial de la ecuación de perturbación escalar a un espaciotiempo de Lanczos. Estamos utilizando la coordenada radial adimensionalizada definida como  $x = \alpha\rho$ . El modo tiene parámetros  $k_z = 2.2$ ,  $K_1 = 8.68087136$  y su amplitud fue elegida de forma que  $f_L^{\text{ax}}(0) = 1$ . Dado que no tiene nodos, entendemos que este estado es el “fundamental”.

Para este caso particular, la parte radial de la ecuación de onda escalar puede escribirse como:

$$\frac{d^2 f_L^{\text{ax}}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_L^{\text{ax}}}{d\rho} - [K^2(1 - \alpha^2\rho^2)e^{-\alpha^2\rho^2} + k_z^2]f_L^{\text{ax}} = 0. \quad (8.29)$$

Analicemos, en primer medida, el caso en el que  $k_z = 0$ . Para estos modos el comportamiento asintótico del campo es:

$${}^0 f_L^{\text{ax}} \sim C_1 + C_2 \ln \rho,$$

que no resulta aceptable dado que la solución no es acotada. Usamos este resultado para demostrar que no existen modos resonantes axiales que preserven *todas* las simetrías del espaciotiempo de fondo.

Para finalizar con el estudio de estabilidad del espaciotiempo de Lanczos estudiamos si existen soluciones a la ecuación (8.29) con  $k_z \neq 0$ .

En el entorno del eje de simetría, las soluciones *físicamente aceptables* a la ecuación diferencial presentan un comportamiento dado por:

$$f_L^{\text{ax}} \sim 1 + \left( \frac{K^2 + k_z^2}{4} \right) \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3), \quad (8.30)$$

mientras que asintóticamente la solución está dada por:

$$f_L^{\text{ax}} \sim \text{Bessel}K(0, k_z\rho). \quad (8.31)$$

La pregunta es si existen soluciones regulares en todo el intervalo coordenado  $\rho \in (0, \infty)$  que presenten los comportamientos en el eje de simetría y asintóticos dados por (8.30) y (8.31) respectivamente.

La ecuación (8.29) no posee (hasta donde hemos podido estudiar) solución analítica. Por este motivo realizamos un estudio numérico de la misma en busca de modos resonantes con los comportamientos (8.30) y (8.31). Antes de comenzar con la presentación del esquema numérico que utilizamos, resulta importante notar que podemos estudiar el caso  $\alpha = 1$  sin que esto haga perder generalidad ya que es equivalente a plantear un cambio en la variable radial de la forma  $x = \alpha\rho$  y una nueva definición para los parámetros  $K$  y  $k_z$  a los que debe dividirse por  $\alpha$ . Este cambio de variables nos permite reducir el espacio de parámetros que debe analizarse, disminuyendo el tiempo de cálculo involucrado. A pesar de haber sido redefinidas, utilizaremos la misma notación para los parámetros  $K$  y  $k_z$  de cada modo.

El método que utilizamos en el estudio numérico es el método de disparo (“*shooting*”) a un “punto intermedio”. Tomamos esta decisión dado que conocemos de forma analítica no sólo el comportamiento de

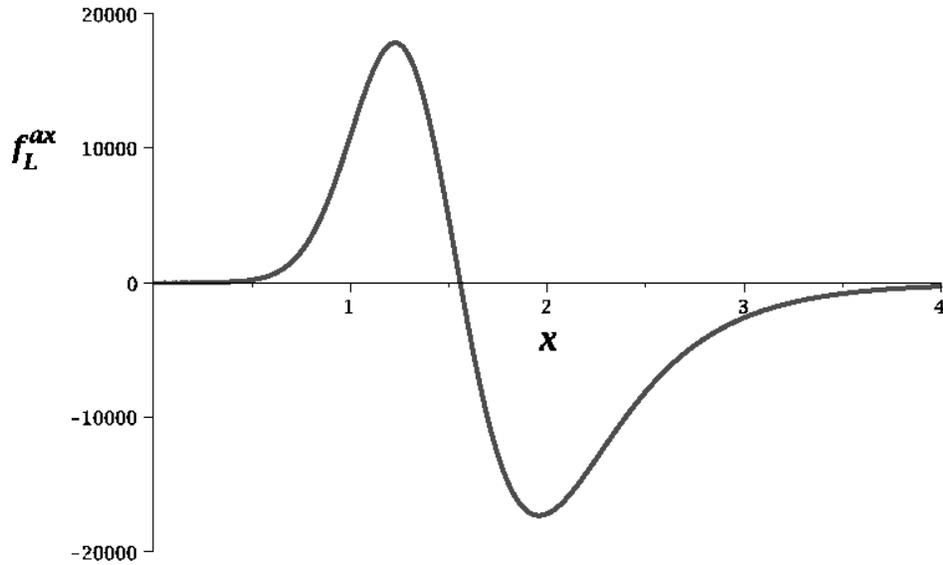


Figura 8.7: Una solución típica para la parte radial de la ecuación de perturbación escalar a un espaciotiempo de Lanczos. Estamos utilizando la coordenada radial adimensionalizada  $x = \alpha\rho$ . El modo tiene parámetros  $k_z = 2.2$ ,  $K_2 = 15.243836$  y la amplitud fue elegida de forma que  $f_L^{\text{ax}}(0) = 1$ .

la solución en un entorno del eje sino su forma asintótica. Utilizaremos dichas expresiones para construir condiciones de borde que permitan iniciar la integración numérica. La idea del método es realmente simple, a continuación presentamos los puntos centrales del mismo aplicados al problema que pretendemos resolver.

Del análisis el comportamiento de las funciones involucradas en los coeficientes de la ecuación diferencial (8.29), llegamos a la conclusión de que para nuestro problema numérico “ $\infty$  se encuentra en  $x \sim 15$ ”. Además, revisamos que las conclusiones no dependen, dentro de un rango amplio, de esta elección. Realizamos algo similar para el punto  $x = 0$ , comenzando la integración apartados, levemente, del eje dado que la ecuación diferencial a resolver es singular en ese punto. Las integraciones numéricas fueron realizadas utilizando el método de Runge-Kutta-Fehlberg de orden (4,5) con una interpolación posterior de grado 4. El punto de conexión entre las soluciones se fijó dentro del rango  $1 \lesssim x_{\text{con}} \lesssim 2.5$ , sin que se noten cambios significativos en los resultados. El criterio utilizado para afirmar haber obtenido una solución al problema es que en dicho punto la derivada logarítmica de la solución a derecha y a izquierda difieran en una cantidad menor a una parte en  $10^{10}$ .

El plan de trabajo utilizado fue el siguiente: fijamos el valor de  $k_z$  y estudiamos la posibilidad de que exista un valor de  $K$  que haga que en el punto arbitrario,  $x_{\text{con}}$ , la derivada logarítmica de la solución numérica obtenida sea continua. Una vez que se concluye con todos los valores de  $K$  que se pretenden analizar, se modifica  $k_z$  y se repite el procedimiento.

A continuación, presentamos los parámetros de algunos de los modos resonantes obtenidos:

- $k_z = 0.2$  y  $K = 2.96327936\dots$  (ver la Figura 8.5),
- $k_z = 2.2$  y  $K_1 = 8.68087136\dots$  y  $K_2 = 15.243836\dots$  (ver la Figura 8.6 y la Figura 8.7 respectivamente).

Fue posible encontrar soluciones resonantes bien comportadas espacialmente en todo el rango de “longitudes características en  $z$ ” estudiadas, es decir para  $0 < k_z < 15$ , esto parece indicar que no existe ningún tipo de escala límite a las longitudes características a partir de la cual los modos resonantes desaparecen. Además, podemos notar que, en el rango estudiado, el autovalor  $K$  asociado al estado fundamental, aumenta a medida que  $k_z$  lo hace.

La interpretación de que resulte necesario romper la simetría frente a translaciones a lo largo del eje de rotación para obtener campos resonantes axiales bien comportados no fue completamente comprendida hasta el momento y un estudio más profundo forma parte de los proyectos a futuro (ver el Capítulo 13). En la misma dirección, pretendemos reforzar los argumentos de existencia de modos para todo valor de  $k_z$ .

### 8.3.2. El espaciotiempo BTZ

En el año 1992 los físicos chilenos Máximo Bañados, Claudio Moisés Teitelboim Weitzmann<sup>7</sup> y Jorge Zanelli, demostraron que la teoría de la gravitación en  $(2 + 1)$  dimensiones admite una solución de agujero negro que, actualmente, se conoce con el nombre de agujero negro BTZ [84].

La geometría asintótica de esta solución corresponde a la del espaciotiempo anti de Sitter (o *AdS*) y no presenta una singularidad de curvatura en el origen  $r = 0$ . La misma posee (en el caso más general) dos horizontes y, en el caso de la solución que presenta rotación, una ergoesfera, características compartidas con la solución de Kerr. Además, si se lo extiende a la región  $r^2 < 0$  aparecen curvas temporales cerradas. En el marco de la conjetura *AdS/CFT*, propuesta por Maldacena, esta solución adquirió gran importancia.

El elemento de línea de este espaciotiempo puede escribirse como:

$$ds_{\text{BTZ}}^2 = \left( M - \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 - J dt d\phi + \left( -M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2.$$

El espaciotiempo BTZ es solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica  $\Lambda = -\ell^{-2}$ . Posee dos vectores de Killing: uno debido a que el espaciotiempo es estacionario y asociado con su simetría axial. Además, de  $\ell$ , los otros dos parámetros que lo describen por completo son,  $M$  y  $J$ , que corresponden a la masa ADM y al momento angular total del mismo. Este espaciotiempo posee dos horizontes que se ubican en:

$$r_{\pm}^2 = \frac{M\ell^2}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{J}{M\ell} \right)^2} \right].$$

Posee, al igual que la solución de Kerr, una ergoesfera, con un radio externo dado por:

$$r_{\text{erg}} = \sqrt{M\ell}.$$

Si  $J \neq 0$  tenemos que en la región  $r < r_{\text{erg}}$  las curvas temporales satisfacen que  $d\phi/dt > 0$ , es decir, que al igual que en el espaciotiempo de Kerr, como resultado de la rotación, aparece el fenómeno de arrastre de los sistemas inerciales. Además, si  $|J| > M\ell$ , la singularidad *cónica* ubicada en  $r = 0$  se vuelve una desnuda. Debe tenerse en cuenta que esta es una singularidad *en la estructura causal* y no en la curvatura, que es finita y constante en todo el espaciotiempo.

Dado que pretendemos estudiar perturbaciones a este espaciotiempo resaltamos algunos aspectos importantes a la hora de realizar este tipo de estudios en este caso particular:

- en gravedad de Einstein en  $(2 + 1)$  dimensiones sin constante cosmológica no hay grados de libertad locales, por lo tanto el tratamiento perturbativo no puede aplicarse, es decir, no existen soluciones de ondas gravitacionales en  $(2 + 1)$  cuando se perturba alrededor de la solución plana, ni gravitones que se propaguen en la teoría cuántica. Esto puede demostrarse del siguiente modo: en un espaciotiempo de  $d$  dimensiones, el espacio de las fases de la teoría general de la relatividad queda parametrizado con las componentes espaciales del tensor métrico en un instante fijo de tiempo y sus correspondientes momentos conjugados. Así, se tienen  $2d(d - 1)/2$  componentes. No todas las ecuaciones de Einstein son ecuaciones dinámicas,  $d$  de ellas son, simplemente, restricciones que deben satisfacerse. Además, otros  $d$  grados de libertad pueden eliminarse por medio de cambios de coordenadas. Por lo tanto, los grados de libertad físicos son  $d(d - 1) - 2d = d(d - 3)$ . De esta forma, cuando estudiamos gravedad en 3 dimensiones no tenemos grados de libertad locales. Debemos remarcar que lo dicho anteriormente no implica que la teoría sea trivial;
- en gravedad de Einstein con constante cosmológica negativa tampoco hay grados de libertad locales. Puede mostrarse que las perturbaciones alrededor de la solución AdS son puro gauge;
- la solución BTZ es localmente equivalente a AdS (pero no globalmente, de ahí su no-trivialidad). Sin embargo, puesto que el análisis de las perturbaciones es local, tampoco hay grados de libertad locales cuando se linealiza alrededor de AdS. Es por esto que, para estudiar la estabilidad de la solución BTZ en el marco de la teoría general de la relatividad con constante cosmológica negativa en  $(2 + 1)$  dimensiones, es necesario incluir campos de prueba.

<sup>7</sup>En el año 2005 se cambió el nombre a Claudio Bunster Weitzman al descubrir la identidad de su padre biológico.

En relación con la estabilidad de este espaciotiempo, en [85] se estableció la estabilidad lineal de la solución sin rotación para campos de prueba. Los modos cuasinormales para el caso del espaciotiempo BTZ extremo fueron estudiados en [86].

Centraremos nuestra atención en el espaciotiempo BTZ extremo, es decir cuando los parámetros que lo definen satisfacen la condición  $J^2 = M^2 \ell^2$ . En este caso los dos horizontes,  $r_{\pm}$ , coinciden en  $r_H^2 = J^2/(2M)$ . Si, además, suponemos que todos los parámetros son positivos obtenemos  $\ell = JM^{-1}$ .<sup>8</sup>

A continuación, analizaremos la ecuación de una onda escalar para modos no axiales resonantes definidos por  $\psi(r, t, \phi) = e^{im\phi + \lambda t} f_{\text{BTZ}}(r)$ . En este caso la ecuación diferencial que define a  $f_{\text{BTZ}}(r)$ , puede escribirse como:

$$\frac{d^2 f_{\text{BTZ}}}{dr^2} - \frac{J^2 + 6r^2 M}{r(J^2 - 2Mr^2)} \frac{df_{\text{BTZ}}}{dr} - \frac{16J^2 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} [(J^2 - r^2 M)Mm^2 - \lambda^2 J^2 r^2 - iJ^3 \lambda m] f_{\text{BTZ}} = 0. \quad (8.32)$$

Introducimos el factor integrante definido por:

$$\Lambda_{\text{BTZ}}(r) = \frac{J^2 - 2r^2 M}{\sqrt{r}},$$

lo que nos permite definir la nueva función radial,  $F_{\text{BTZ}}(r) = \Lambda_{\text{BTZ}}(r) f_{\text{BTZ}}(r)$  y reescribir a la ecuación diferencial resultante como:

$$\frac{d^2 F_{\text{BTZ}}}{dr^2} - \frac{16J^2 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} \left[ (J^2 - r^2 M)Mm^2 - \lambda^2 J^2 r^2 + \frac{3}{4r^2} - iJ^3 \lambda m \right] F_{\text{BTZ}} = 0. \quad (8.33)$$

Vamos a analizar la validez del razonamiento de Bachelot para este espaciotiempo en dos regiones diferentes: la interior,  $0 < r < r_H \equiv J/\sqrt{2M}$ , y la exterior,  $r > r_H$ .

#### Análisis de estabilidad de la región interna $0 < r < r_H$

Si tomamos la expresión (8.33), la multiplicamos por  $F_{\text{BTZ}}^*(r)$  y luego integramos el resultado en la región  $(0, r_H)$ , obtenemos:

$$\int_0^{r_H} dr \left[ F_{\text{BTZ}}^* \frac{d^2 F_{\text{BTZ}}}{dr^2} - \frac{16J^2 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} [(J^2 - r^2 M)Mm^2 - \lambda^2 J^2 r^2 + \frac{3}{4r^2} - iJ^3 \lambda m] |F_{\text{BTZ}}|^2 \right] = 0.$$

Luego de integrar por partes:

$$F_{\text{BTZ}}^* \frac{dF_{\text{BTZ}}}{dr} \Big|_0^{r_H} - \int_0^{r_H} dr \left[ \left| \frac{dF_{\text{BTZ}}}{dr} \right|^2 + \frac{16J^2 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} [(J^2 - r^2 M)Mm^2 - \lambda^2 J^2 r^2 + \frac{3}{4r^2}] |F_{\text{BTZ}}|^2 \right] - i\lambda m \int_0^{r_H} dr \left[ \frac{16J^5 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} |F_{\text{BTZ}}|^2 \right] = 0. \quad (8.34)$$

Si analizamos el comportamiento de la solución en el eje de simetría junto con la solución local de Frobenius en el entorno del horizonte de eventos, podemos garantizar que para soluciones que se anulan en el eje de simetría y no presentan comportamientos divergentes en el horizonte, los términos de borde se anulan. De esta forma obtenemos la expresión (8.34) puede ser simplificada y escrita como:

$$- \int_0^{r_H} dr \left[ \left| \frac{dF_{\text{BTZ}}}{dr} \right|^2 + \frac{16J^2 r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} \left[ (J^2 - r^2 M)Mm^2 - \lambda^2 J^2 r^2 + \frac{3}{4r^2} \right] |F_{\text{BTZ}}|^2 \right] = i\lambda m J^5 \int_0^{r_H} dr \left[ \frac{16r^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} |F_{\text{BTZ}}|^2 \right]. \quad (8.35)$$

El integrando del miembro derecho de la expresión (8.35) es una función definida positiva, por lo que concluimos que no existen modos resonantes no axiales en la región interior de un agujero negro BTZ extremo.

A continuación, escribimos en forma de teorema lo que acabamos de demostrar:

**Teorema 5** *En la región interior,  $0 < r < r_H$ , de un agujero negro BTZ extremo (2+1) las únicas resonancias posibles deben preservar la simetría axial del espaciotiempo de fondo.*

<sup>8</sup>Nótese que se puede elegir  $\ell > 0$  sin pérdida de generalidad que el caso en el que  $M > 0$  es el físicamente relevante y, bajo estos supuestos, si  $J < 0$  podemos realizar el cambio  $\phi \rightarrow -\phi$  que es equivalente a considerar  $J > 0$ .

Para finalizar el estudio de estabilidad de la región interna del espaciotiempo BTZ extremo frente a perturbaciones escalares, estudiamos el caso de una perturbación resonante axial. En este caso, la ecuación diferencial (8.32) se simplifica:

$$\frac{d^2 f_{\text{BTZ}}^0}{dr^2} - \frac{J^2 + 6r^2 M}{r(J^2 - 2Mr^2)} \frac{df_{\text{BTZ}}^0}{dr} + \frac{16J^4 r^4 \lambda^2}{(4r^4 M^2 - 4J^2 Mr^2 + J^4)^2} f_{\text{BTZ}}^0 = 0. \quad (8.36)$$

Para simplificar el análisis, resulta de gran utilidad realizar un cambio de variables a una nueva coordenada radial,  $u$ , definida por el siguiente cambio de variables:

$$r^2 = \frac{J^2}{2M} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}\lambda J}{uM^{3/2}} \right). \quad (8.37)$$

Dado que estamos estudiando la región interna, el dominio de la nueva coordenada radial está dado por:  $u_0 \equiv \sqrt{2}\lambda J/M^{3/2} < u < \infty$ , donde,  $u \rightarrow u_0$  corresponde a  $r^2 \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow \infty$  a  $r^2 \rightarrow (r_{\text{H}})^2$ . Una vez realizado el cambio de variables, la ecuación (8.36) puede escribirse como:

$$\frac{d^2 f_{\text{BTZ}}^0}{du^2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{u_0}{u} - 1 \right] f_{\text{BTZ}}^0 = 0. \quad (8.38)$$

Los puntos singulares de dicha ecuación diferencial están ubicados en:

$$u = 0, \quad u = u_0, \quad u = \pm\infty.$$

En forma genérica, las soluciones de (8.38) vienen dadas por:

$$f_{\text{BTZ}}^0 = A_1 W_M \left( \frac{u_0}{4}, \frac{1}{2}, u \right) + A_2 W_W \left( \frac{u_0}{4}, \frac{1}{2}, u \right),$$

donde  $W_M(a, b, z)$  y  $W_W(a, b, z)$  son las funciones de Whittaker.

Pasemos ahora a analizar propiedades de la solución que acabamos de presentar.

Cuando el primer parámetro de las funciones de Whittaker no es un natural la función  $W_M(a, 1/2, z)$  presenta un crecimiento exponencial para valores grandes de la coordenada  $u$ .  $W_W(a, 1/2, z)$ , por el contrario, es bien comportada en todo el rango  $u \geq u_0$  que estamos analizando en este momento. Es importante notar que la ecuación (8.38) tiene la forma de una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial dado por  $V(u) = -\frac{1}{4} \frac{u_0}{u}$  y una energía  $E = -\frac{1}{4}$ . Dado que  $u = u_0$  es un punto clásico de retorno, podemos asegurar que no existirán ceros para la función  $f_{\text{BTZ}}^0$  cuando  $u \geq u_0$ . De esta forma podemos afirmar que, cuando  $u_0/4$  no es un número natural, no existen soluciones con comportamiento adecuado en  $u = u_0$  que presenten, además, un apropiado decrecimiento asintótico.

Ahora analizaremos el caso en el que el primer parámetro de las soluciones,  $a = u_0/4$ , es un número natural. En este caso las funciones  $W_W$  y  $M_M$  de Whittaker no son linealmente independientes. La segunda solución linealmente independiente puede construirse de forma análoga a la que presentaremos en el análisis de estabilidad de la región externa (ver la Sección 8.3.2). Dicha solución toma valores complejos en el intervalo para la coordenada  $u$  que estamos estudiando por lo que no es un modo físicamente relevante. Para la otra solución,  $W_W(u_0/4, 1/2, u)$ , podemos utilizar la analogía con la ecuación de Schrödinger y volver a concluir que no existen modos apropiadamente comportados.

Concluimos el estudio de estabilidad de la región interna del agujero negro BTZ extremo en  $(2+1)$  dimensiones. Hemos demostrado que esta región resulta no admite modos resonantes como los que propusimos. Este es un resultado diferente al obtenido en el caso del agujero negro de Kerr, en el que la región más allá del horizonte de Cauchy de la solución resulta linealmente inestable [67, 81].

### Análisis de estabilidad de la región externa $r > r_{\text{H}}$

Utilizando la misma estrategia que la presentada para la región interna podemos estudiar la estabilidad de la región externa,  $r > r_{\text{H}}$ , del espaciotiempo BTZ extremo. Sin cambios profundos (simplemente se deben modificar los límites de integración y revisar la forma asintótica de las soluciones), podemos demostrar un teorema análogo al presentado para la región interna (ver el Teorema 5).

**Teorema 6** *En la región exterior de un agujero negro BTZ extremo (2+1) las únicas resonancias posibles son las axiales.*

Para completar el estudio de estabilidad pasamos a estudiar, detalladamente, la existencia o no de resonancias axiales. En este caso, la ecuación diferencial que debemos estudiar es completamente análoga a (8.38), la única diferencia es el dominio de la coordenada radial que en este caso es  $-\infty < u < 0$ .

Dado que la ecuación diferencial es la misma, las soluciones también lo serán. Pasemos a analizarlas. Las fórmulas de <http://dlmf.nist.gov> que se citan, se presentan, para no volver demasiado compleja la lectura de esta parte de la tesis, en el **Apéndice D**.

Para valores negativos de  $u$ , la función  $W_W(u_0/4, 1/2, u)$  toma valores complejos salvo cuando el parámetro  $u_0/4$  es un número entero. Igualmente, dicha solución presenta un comportamiento asintótico exponencialmente divergente cuando  $u \rightarrow -\infty$  (ver las fórmulas (D.5), (D.2) y (D.8)). Por el contrario, la función  $W_M(u_0/4, 1/2, u)$  se encuentra definida en el eje real negativo para todo valor del parámetro  $u_0/4$ , pero también presenta un comportamiento divergente cuando  $u \rightarrow -\infty$  (ver la fórmula (D.6)). Cuando el primer parámetro es un número entero las funciones  $W_W(u_0/4, 1/2, u)$  y  $W_M(u_0/4, 1/2, u)$  no son linealmente independientes ya que su Wronskiano se anula (ver la fórmula (D.9)). En este caso, se puede construir una segunda solución linealmente independiente utilizando las expresiones dadas por las fórmulas (D.4), (D.3) y (D.10). El resultado que se obtiene en este caso es que una de ellas no posee un comportamiento asintótico apropiado mientras que la otra no tiende a 0 cuando  $u \rightarrow 0$ .

Intentando clarificar la exposición presentamos un ejemplo. Para el caso en el que el primer argumento de función es igual a  $n = 3$  (esto significa que  $\lambda = 3 \frac{4M^{3/2}}{\sqrt{2}J}$ ), las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial son:

$${}^3f_1(u) = e^{-\frac{u}{2}} u (6 - 6u + u^2), \quad {}^3f_2(u) = \text{Ei}(1, -u) u (6 - 6u + u^2) e^{-\frac{u}{2}} + (2 - 5u + u^2) e^{\frac{u}{2}},$$

donde  $\text{Ei}(1, -u)$  es la función exponencial integral definida como:

$$\text{Ei}(a, z) = \int_1^\infty e^{-kz} k^{-a} dk.$$

Vemos el comportamiento divergente de  ${}^3f_1(u)$  cuando  $u \rightarrow -\infty$ , además, no resulta complicado demostrar que  $\lim_{u \rightarrow 0} {}^3f_2(u) = 2 \neq 0$ .

De esta manera, probamos que en el exterior del agujero negro BTZ extremo en (2 + 1) dimensiones no existen resonancias bien comportadas espacialmente, por lo que el mismo resulta estable frente a este tipo de perturbaciones escalares.

### **Análisis de estabilidad de la región con curvas temporales cerradas $r^2 < 0$**

Veamos como se modifican nuestras conclusiones cuando se admite la continuación a la región donde el espaciotiempo BTZ posee curvas temporales cerradas, es decir, cuando analizamos la región en la que  $r^2 < 0$ . Vamos a centrar nuestra atención en el estudio de existencia de modos resonantes axiales.

La ecuación diferencial a estudiar es la misma con la única diferencia de que el dominio de la nueva coordenada radial es  $0 < u \leq u_0$ , donde  $u \rightarrow u_0$  corresponde a  $r^2 \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow 0$  a  $r^2 \rightarrow -\infty$ .

Nuevamente, las soluciones a la ecuación pueden escribirse en función de las funciones de Whittaker. Analicemos sus respectivos comportamientos.

La función  $W_M\left(\frac{u_0}{4}, \frac{1}{2}, u\right)$  es acotada para todo valor de  $u$  en el dominio que estamos estudiando y, sin importar el valor de  $u_0$ , su comportamiento cerca del origen es:

$$W_M(u_0/4, 1/2, u) = u - \frac{1}{8}u_0u^2 + \mathcal{O}(u^3).$$

De esta forma vemos que la misma presenta el comportamiento adecuado en el punto singular  $u = 0$ . Si analizamos el primer término del desarrollo en serie de esta función en el entorno de  $u = u_0$ , obtenemos:

$$W_M(u_0/4, 1/2, u) = u_0 e^{-\frac{u_0}{2}} {}_1F_1([1 - u_0/4], [2]; u_0) + \mathcal{O}(u - u_0).$$

Donde la función  ${}_1F_1([1 - u_0/4], [2]; z)$  se conoce como función hipergeométrica de Kummer confluyente y tiene, como función de  $u_0$ , infinitos ceros que denotaremos por  $u_0^{(k)}$ . Los primeros se encuentran ubicados en:

$$u_0^{(1)} \sim 4.624, \quad u_0^{(2)} \sim 8.648, \quad u_0^{(3)} \sim 12.66, \dots$$

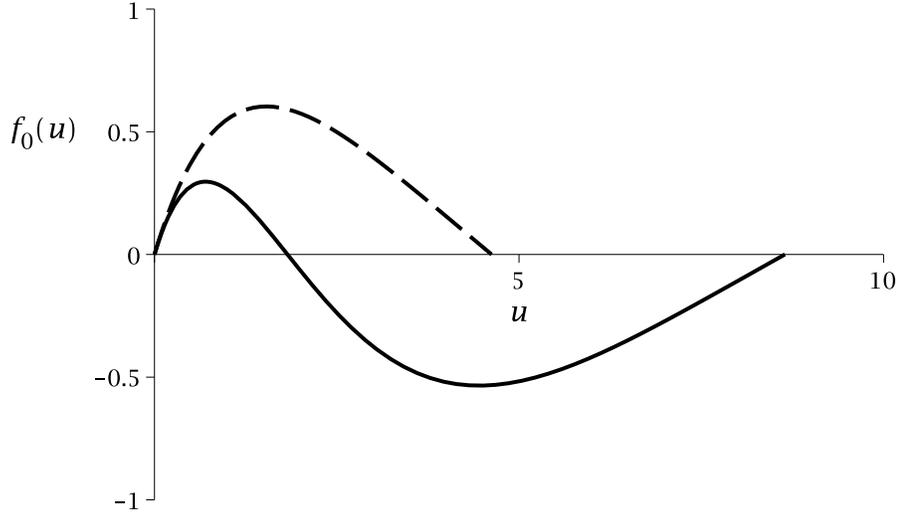


Figura 8.8: Primer,  $\lambda^{(1)}$ , (en línea a trazos) y segundo,  $\lambda^{(2)}$ , (en línea continua) modo escalar resonante existentes en la región  $r^2 < 0$  del espaciotiempo BTZ extremo como función de la coordenada  $u$ . Notar que para cada uno de los modos la región  $r^2 < 0$  es mapeada a dos intervalos diferentes de la coordenada  $u$ . La amplitud con la que se presentan ambos modos es completamente arbitraria.

De esta forma vemos que si elegimos la frecuencia,  $\lambda$ , de manera que pertenezca al conjunto:

$$\lambda^{(k)} = \frac{M^{3/2}}{\sqrt{2}J} u_0^{(k)}, k = 1, 2, \dots \quad (8.39)$$

obtenemos modos espacialmente bien comportados y con un crecimiento exponencial en el tiempo. En la [Figura 8.8](#) presentamos los modos caracterizados por  $\lambda^{(1)}$  y  $\lambda^{(2)}$ .

De esta forma encontramos una familia de infinitos modos axiales que inicialmente se encuentran espacialmente bien comportados pero que crecen exponencialmente con el tiempo.

La existencia de estas resonancias axiales permiten afirmar que la región del espaciotiempo BTZ extremo donde  $r^2 < 0$  es linealmente inestable frente a perturbaciones escalares. Esta inestabilidad sirve como ejemplo fortalecer la relación propuesta entre la existencia de curvas temporales cerradas e inestabilidad lineal en el caso del espaciotiempo de Kerr (ver [\[67\]](#)).

### 8.3.3. El universo de Gödel

La emblemática solución a las ecuaciones de Einstein descubierta por Kurt Gödel [\[87\]](#), es un modelo cosmológico que, por presentar rotación, es descartado como un posible modelo al universo en que vivimos. A pesar de esto, presenta ciertas particularidades (como curvas temporales cerradas) que lo vuelven fascinante desde un punto de vista teórico.

Utilizando coordenadas cilíndricas, el elemento de línea puede escribirse como:

$$ds_G^2 = \frac{4}{\beta^2} dt^2 + \frac{8}{\beta^2} \sqrt{2} \sinh^2 r dt d\phi - \frac{4}{\beta^2} dr^2 - dz^2 + \frac{4}{\beta^2} (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\phi^2,$$

donde el parámetro  $\beta^2$ , que define completamente al espaciotiempo, está relacionado con el hecho de que el mismo se encuentra rotando.

El espaciotiempo de Gödel es estacionario, posee simetría axial y es invariante frente a traslaciones a lo largo del eje de rotación.

La ecuación de la onda escalar (restringida a modos de la forma  $e^{i(m\phi + k_z z)} B(t, r)$ ) se escribe como:

$$0 = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 r}\right) \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \frac{2 \cosh^2 r - 1}{\sinh r \cosh r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{i2\sqrt{2}m}{\cosh^2 r} \frac{\partial B}{\partial t} - \left[\frac{4k_z^2}{\beta^2} + \frac{m^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r}\right] B. \quad (8.40)$$

La región donde se encuentran presentes las curvas temporales cerradas coincide con aquella donde la ecuación diferencial [\(8.40\)](#) se vuelve elíptica, acompañando el cambio de la naturaleza de la coordenada acimutal,  $\phi$ .

Si estudiamos la ecuación de onda (8.40) para una perturbación resonante con un campo que puede representarse, haciendo uso explícito de las 3 simetrías que presenta este espaciotiempo, a través de la función  $\Phi(t, r, z, \phi) = e^{i(m\phi + k_z z) + \lambda t} f_G(r)$ , obtenemos que la función radial,  $f_G(r)$ , está regida por:

$$0 = \frac{2 \cosh^2 r - 1}{\sinh r \cosh r} \frac{\partial f_G}{\partial r} - \frac{\partial^2 f_G}{\partial r^2} - \left[ \frac{1}{4} \left( (2 - \cosh^2 r) \lambda^2 + i2\sqrt{2}m\lambda + \frac{m^2}{\sinh^2 r} \right) + \frac{4k_z^2}{\beta^2} \right] f_G, \quad (8.41)$$

si introducimos el factor integrante:

$$\Lambda_G = \frac{\sinh r}{\sqrt{\tanh r}}$$

podemos reescribir a la ecuación (8.41) de modo que resulte más simple de analizar. Operando de forma análoga a la utilizada en el caso del espaciotiempo de Lanczos, multiplicamos a la ecuación (8.41) por  $f_G^*(r)$  e integramos. Estudiando el comportamiento en el eje y asintótico de la ecuación diferencial vemos que la integración por partes se puede realizar sin que esto genere la aparición de términos de borde. Luego de realizar esto, obtenemos a la siguiente expresión:

$$\int_0^\infty dr \left[ \left| \frac{\partial F_G}{\partial r} \right|^2 + \left( \frac{m^2}{\sinh^2 r \cosh^2 r} - \frac{\cosh^2 r - 2}{\cosh^2 r} \lambda^2 + \frac{4k_z^2}{\beta^2} - \frac{\Lambda_G''}{\Lambda_G} \right) |F_G|^2 \right] = i2\sqrt{2}m\lambda \int_0^\infty dr \frac{|F_G|^2}{\sinh^2 r},$$

donde  $F_G = \Lambda_G f_G$  y ' denota diferenciación respecto a la coordenada radial,  $r$ . Puede aplicarse el mismo argumento que fue utilizado en el caso del espaciotiempo de Lanczos para concluir que, si existen, las resonancias en el espaciotiempo de Gödel deben preservar la simetría axial del espaciotiempo de fondo.

**Teorema 7** *En el espaciotiempo de Gödel, si existen, los modos escalares resonantes poseen simetría axial.*

De la misma forma que se presentó para el caso de la solución de Lanczos, estudiaremos el caso de resonancias axiales. En este caso, la ecuación que rige la parte radial del campo escalar (8.41) se reduce a:

$$0 = \frac{(1 - 2 \cosh^2 r)}{\sinh r \cosh r} \frac{df_G^{\text{ax}}}{dr} - \frac{d^2 f_G^{\text{ax}}}{dr^2} + \left( \frac{(2 - \cosh^2 r) K^2}{\cosh^2 r} + \frac{4\lambda^2}{\beta^2} \right) f_G^{\text{ax}}. \quad (8.42)$$

La misma puede escribirse de forma más apropiada para nuestro estudio realizando un cambio a una nueva variable radial  $u$  relacionada con  $r$  a través de:

$$\cosh^2 r = \frac{1}{u}.$$

Luego de realizar esta transformación, la ecuación (8.42) se puede reescribir como:

$$0 = 4u^2 \frac{df_G^{\text{ax}}}{du} + 4u^2(u-1) \frac{d^2 f}{du^2} + \left( (2u-1)K^2 + \frac{4\lambda^2}{\beta^2} \right) f_G^{\text{ax}}. \quad (8.43)$$

Si se analiza la solución de Frobenius en el eje de rotación,  $u = 1$ , puede demostrarse que la solución regular allí debe valer (con amplitud arbitraria elegida a tal fin) 1. Del mismo modo, si se exige que la función tenga un decaimiento apropiado en  $u = 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) tenemos que  $f(0) = 0$ . La solución formal que satisface estas condiciones es:

$$\begin{aligned} f_G^{\text{ax}}(u) = & (1 - C {}_2F_1([a_1, b_1]; [c]; 1)) u^{\frac{1}{2} \frac{\beta - i\sqrt{-\beta^2 + K^2\beta^2 - 4\lambda^2}}{\beta}} \frac{{}_2F_1([a_2, b_2]; [\bar{c}]; u)}{{}_2F_1([a_2, b_2]; [\bar{c}]; 1)} \\ & + C u^{\frac{1}{2} \frac{\beta + i\sqrt{-\beta^2 + K^2\beta^2 - 4\lambda^2}}{\beta}} {}_2F_1([a_1, b_1]; [c]; u), \end{aligned} \quad (8.44)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 - i\sqrt{2}K + i\sqrt{K^2 - 1 - \frac{4\lambda^2}{\beta^2}} \right), \\
 b_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + i\sqrt{2}K + i\sqrt{K^2 - 1 - \frac{4\lambda^2}{\beta^2}} \right), \\
 c &= 1 + i\sqrt{K^2 - 1 - \frac{4\lambda^2}{\beta^2}}, \\
 a_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - i\sqrt{2}K - i\sqrt{K^2 - 1 - \frac{4\lambda^2}{\beta^2}} \right), \\
 b_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 + i\sqrt{2}K - i\sqrt{K^2 - 1 - \frac{4\lambda^2}{\beta^2}} \right).
 \end{aligned}$$

Estudiemos la solución (8.44), para ello es importante recordar una de las propiedades de la función hipergeométrica de Gauss:

$${}_2F_1([a, b]; [c]; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (8.45)$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función Gamma que posee cuando su argumento se anula. Una inspección a los parámetros que definen a las funciones hipergeométricas de Gauss que aparecen en (8.44) permite concluir que:

$$c - a_1 - b_1 = \bar{c} - a_2 - b_2 \equiv 0,$$

independientemente de los valores que tomen los parámetros  $(\beta, \lambda, K)$ . De esta manera, vemos que no existen soluciones a la ecuación radial (8.43) que satisfagan las condiciones de contorno apropiadas, es decir, no existen modos resonantes axiales en el espaciotiempo de Gödel.

Juntando este resultado junto con el Teorema 7 completamos nuestro argumento de estabilidad (lineal) del universo de Gödel frente a perturbaciones escalares. Este resultado está en concordancia con el obtenido en [88].

## Parte III

# Aportes a la distinción observacional de agujeros negros y singularidades desnudas



# Breve descripción de la tercera parte

En esta parte de la tesis presentaremos evidencias de la existencia de objetos ultra compactos que pueden explicarse, en forma teórica, utilizando modelos de agujeros negros. Además, presentaremos, en forma descriptiva, algunas de las técnicas que se utilizan para obtener estimaciones a los parámetros físicos más relevantes de objetos súper compactos. A modo de ejemplo, analizaremos algunos casos con alto contenido simbólico e histórico.

Luego, revisaremos parte de la bibliografía relacionada a estudios capaces de explotar diferencias observacionales entre agujeros negros y singularidades desnudas y presentaremos nuestros aportes en esta área. Estas herramientas tienen la capacidad de ser utilizadas para descartar modelos teóricos que no logren ajustar los datos observacionales existentes.

Dedicaremos el **Capítulo 10** a estudiar las trayectorias de partículas cargadas en un espaciotiempo de Kerr genérico. Pondremos particular atención a los efectos que produce la presencia de un campo de inducción magnética externo sobre las trayectorias ecuatoriales circulares. Estudiamos dos configuraciones diferentes de campo de inducción magnético externo: la uniforme y la dipolar, ambas conservan las simetrías del espaciotiempo de fondo. Realizamos estos estudios en forma analítica, utilizando un esquema perturbativo en el parámetro de acoplamiento entre el campo de inducción magnética y la “carga efectiva”<sup>9</sup> de los elementos de material que componen al disco de acreción. Estos resultados resultan centrales para los desarrollos presentados en el **Capítulo 11** donde describiremos un modelo simple de disco de acreción formado en el espaciotiempo de Kerr en presencia de un campo de inducción magnética externo, una generalización del modelo clásico de Page y Thorne. Para esta familia de modelos calcularemos espectros térmicos de energía observados, teniendo en cuenta los efectos producidos por la deflexión de la luz, el corrimiento Doppler relativista, el enrojecimiento gravitacional en forma consistente y la absorción de fotones de rayos X por el medio interestelar. Las comparaciones de los espectros teóricos con datos observacionales provenientes de binarias de rayos X pueden utilizarse, como veremos, para descartar a las singularidades desnudas como modelo aceptable para representar a las componentes súper compactas de dichos sistemas. Interpretamos este resultado como un argumento adicional que favorece la validez de la conjetura débil de censura cósmica en ámbitos astronómicos.

---

<sup>9</sup>Presentaremos detalles al respecto de este concepto a lo largo de los capítulos que conforman esta parte de la tesis.



## Capítulo 9

# Evidencias observacionales de agujeros negros

Existen teoremas que afirman que los agujeros negros estacionarios son “pelados”.<sup>1</sup> Así, la física de los mismos es caracterizada por tres parámetros: su masa,  $M$ , momento angular,  $J$ , y carga eléctrica,  $Q$ . Por este motivo se espera que las propiedades observacionales de los mismos queden descritas (junto con sus propiedades dinámicas y detalles del entorno donde se encuentra) por esta terna de parámetros. Como consecuencia de procesos de acreción se espera que, en ambientes astronómicos, los agujeros negros se encuentren libres de carga eléctrica. Por este motivo, la métrica de Kerr se convierte en una de las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein más importantes para la astrofísica. Las primeras evidencias observacionales contundentes de la existencia de objetos que a la fecha pueden describirse, únicamente, con estos modelos teóricos fueron obtenidas varias décadas después de la obtención de las soluciones matemáticas.

Desde un punto de vista práctico, sería imposible obtener información detallada sobre un agujero aislado, ya que único modo de observar estos objetos es por medio del análisis de los efectos que producen sobre su entorno. Un proceso astrofísico de gran utilidad a la hora de obtener de evidencias relacionadas con la existencia de este tipo de objetos es la acreción de materia.

Los primeros datos obtenidos, permitieron hacer estimaciones a la masa, a lo largo de la última década, con notables mejoras en los instrumentos de detección y los procesos de reducción de los datos, se lograron realizar estimaciones al momento angular de estos objetos.

En la actualidad, los datos observacionales, indican la existencia de:

- agujeros negros con masas comprendidas entre 2.5 y unas 50 masas solares y
- agujeros negros con masas comprendidas entre unas  $10^6$  y unas  $10^{10}$  masas solares.

Las teorías actuales indican que los pertenecientes a la familia de objetos con masas estelares son el resultado evolutivo de estrellas de gran masa o de procesos de acreción de materia sobre estrellas de neutrones en sistemas binarios. Para los pertenecientes a la segunda familia, los súper masivos, no existe consenso completo en cual es el proceso de formación, pero algunas de las teorías más aceptadas son las que involucran colisiones entre galaxias primordiales (ver, por ejemplo, [89] y trabajos allí mencionados).

Las principales fuentes de información que dan evidencias de la existencia de agujeros negros (o de objetos que comparten muchas de sus principales características) en el universo son:

- Sistemas binarios extremadamente brillantes en rayos X con una componente oscura de gran masa. Presentaremos una descripción de este tipo de objetos y sus diferentes familias en la [Subsección 9.1.1](#) de esta tesis.
- Fuentes extra galácticas denominadas fuentes de rayos X Ultra Luminosas.<sup>2</sup> Si bien comparten muchas de las propiedades espectrales con los sistemas binarios de rayos X galácticos, sus luminosidades

---

<sup>1</sup>Estos teoremas son conocidos como *no hair theorems* en la literatura inglesa. La forma de denotar esta característica de las soluciones de agujero negro fue, según John Archibald Wheeler quien la hizo famosa, propuesta por su colega Jacob David Bekenstein.

<sup>2</sup>Conocidas como *Ultra Luminous X-ray sources (ULXs)* en la literatura inglesa.

isotrópicas son mucho mayores,  $L_X \sim 10^{40} \text{ ergs}^{-1}$ , por este motivo se especula que las mismas pueden ser el resultado de acreción de material por agujeros negros con masas del orden de  $100M_\odot$ . Sin embargo existe una importante cantidad de contradicciones en los modelos por lo que los resultados obtenidos no son concluyentes (ver, por ejemplo, [90] y trabajos allí mencionados). Además de esta hipótesis, existen otros modelos que explican las grandes luminosidades observadas como consecuencia de una fuerte concentración de la emisión en una dirección preferencial, similar al modelo clásico para los microcuásares (ver, por ejemplo, [91]). Una explicación alternativa es la de acreción de materia oscura sobre (los por ahora hipotéticos) agujeros negros de masa intermedia (ver, por ejemplo, [92] y referencias allí mencionadas).

- Centros galácticos en los que se infieren masas viriales extremadamente grandes como para ser explicadas con un modelo que no contemple la existencia de un agujero negro supermasivo central. En el caso de la Vía Láctea se han calculado órbitas estelares individuales que permiten llegar a la misma conclusión (ver, por ejemplo, [93]).

## 9.1. Evolución estelar de sistemas binarios de gran masa

En la [Subsección 4.1.1](#), presentamos aspectos generales de la teoría estándar de evolución estelar para estrellas aisladas de gran masa. A continuación, haremos algo similar para el proceso de evolución de estrellas pertenecientes a sistemas binarios. Dichos estudios son importantes ya que permiten explicar aspectos observacionales de binarias compactas en las que al menos una de las componentes es un objeto compacto (ver, por ejemplo, [94]). Este tipo de sistemas son interesantes por varias cuestiones, además de las que explotaremos en esta tesis, podemos mencionar que los modelos actuales afirman que la fusión de dos estrellas de neutrones se encuentran entre los eventos “más brillantes en ondas de gravedad” en el rango de frecuencias entre los 10 y los 1000 hercios. Por esto se espera que sean los primeros en ser observados por detectores como LIGO, VIRGO y GEO-600. Además, este tipo de sistemas son utilizados como modelos de progenitores para las erupciones de rayos gamma.<sup>3</sup>

La principal diferencia entre la evolución de estrellas aisladas y aquellas que evolucionan en presencia de una compañera, es el *proceso de transferencia de masa* que ocurre entre las componentes del par. Este proceso, por el cual sobre una de las componentes se deposita material correspondiente a la otra, afecta, de modo radical, la evolución de las mismas. En los sistemas a los que prestaremos atención, la transferencia de masa ocurre, casi exclusivamente, a través del punto de Lagrange  $L1$ . La transferencia de masa ocurre cuando una de las componentes del par, al expandirse producto de su propia evolución, llena por completo su *lóbulo de Roche*.<sup>4</sup>

Presentaremos de las etapas centrales en la evolución estelar en un sistema binario a través de un ejemplo clásico: un sistema binario formado por una estrella de tipo espectral O y otra de tipo B (ver la [Figura 9.1](#), adaptada de [94]).

El sistema que analizaremos, está formado por dos estrellas, una de tipo espectral O y otra de tipo B, a las que supondremos inicialmente ubicadas sobre la secuencia principal del diagrama de Hertzsprung-Russell.<sup>5</sup> Luego de un intervalo de tiempo, la estrella de mayor masa, agota el hidrógeno disponible en su núcleo finalizando, de este modo, su etapa de secuencia principal. Como consecuencia, aumenta su radio y llena (completamente) su correspondiente lóbulo de Roche. En este momento comienza la transferencia de masa a la componente de menor masa, dicho proceso continúa hasta que la envoltura de la estrella más masiva es transferida casi por completo. En el núcleo de la estrella que está donando parte de su masa se inició la quema de helio que queda expuesto dado que la misma se encuentra desprovista de su envoltura: comienza la etapa conocida como Wolf-Rayet.<sup>6</sup> El aumento de masa de la estrella menos masiva altera su evolución en forma dramática.

<sup>3</sup>Más conocidos por su sigla inglesa, GRB por *Gamma Ray Burst*.

<sup>4</sup>De modo simple, se define a los lóbulos de Roche como las regiones del espacio en las que objetos masivos están ligados gravitacionalmente a una u otra de las componentes de un sistema binario.

<sup>5</sup>Como estamos realizando una presentación cualitativa no resulta necesario tener en cuenta otros factores que también afectan la evolución estelar, a saber: la metalicidad de las estrellas, la velocidad rotación angular, etc.

<sup>6</sup>Que reciben su nombre en reconocimiento a sus descubridores, los astrónomos franceses Charles Joseph Étienne Wolf y Georges Antoine Pons Rayet.

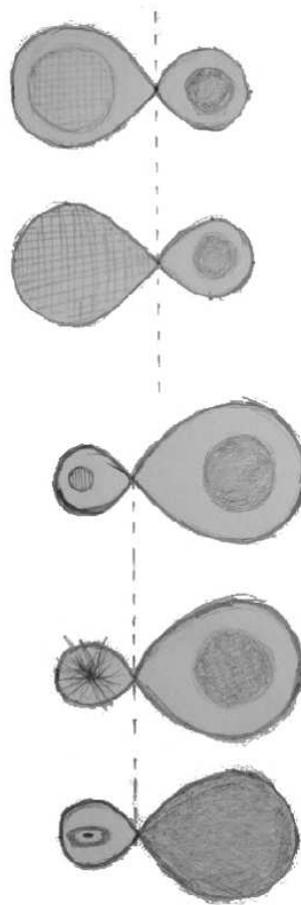


Figura 9.1: Esquema de las primeras etapas evolutivas de un sistema binario O-B. Adaptado de [94].

Al terminar su evolución termonuclear, la estrella Wolf-Rayet genera un evento supernova cuyo resultado final es, generalmente, un objeto compacto. El remanente central puede ser, dependiendo de la masa del progenitor, una estrella de neutrones o un objeto completamente colapsado por acción de la gravedad. De esta forma, suponiendo que las componentes del sistema continúan ligadas entre sí, se pasa a tener un sistema binario formado por una estrella normal y un objeto compacto.

La estrella menos masiva continúa su evolución termonuclear, eventualmente convierte todo el hidrógeno de su núcleo en helio y finaliza su etapa de secuencia principal. Ahora es ella la que comienza un proceso de transferencia de masa hacia el objeto compacto. El resultado de este proceso de acreción es la formación de un disco de acreción en torno al objeto compacto. Junto con otro tipo de efectos observacionales característicos, este tipo de objetos se vuelven eficientes emisores en rayos X.

La evolución del sistema continúa, pero dado que no tenemos interés en las etapas evolutivas subsiguientes, no las describimos (ver, por ejemplo, [94] para más detalles).

A modo de síntesis, presentaremos los posibles escenarios teóricos para el final evolutivo de este tipo de sistemas:

- un único objeto compacto (estrella de neutrones u objeto completamente colapsado por efecto de la gravedad);
- un par de objetos compactos que, como resultado de una explosión de supernova, dejan de estar gravitacionalmente ligados entre sí;
- un sistema binario de objetos compactos que sufrirán (debido a la emisión de ondas gravitacionales) una fusión capaz de liberar una energía del orden de  $10^{53}$  erg.

### 9.1.1. Binarias de rayos X

Mencionaremos algunas propiedades generales de los sistemas binarios que, por presentar emisiones intensas en el rango de los rayos X, se denominan *binarias de rayos X* (para más explicaciones y referencias originales ver, por ejemplo, [95]).

Al momento de redactar esta tesis, se conocen unos 300 objetos galácticos con luminosidades en la banda de rayos X del orden de  $L_X \sim 10^{34} - 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$ .<sup>7</sup> Como regla general, estos sistemas se encuentran concentrados hacia el plano galáctico con preponderancia hacia el centro de la misma.

Casi la totalidad de candidatos a agujeros negros son novae de rayos X descubiertas al producirse el primer (desde que el ser humano desarrolló la tecnología capaz de detectarlos) evento eruptivo. Luego de este momento es posible realizar un seguimiento del objeto y, de este modo, analizar las propiedades de su curva de luz. La morfología de dicha curva se utiliza para obtener información sobre la naturaleza de la componente compacta.

Las principales componentes que pueden identificarse en el espectro de emisión de los sistemas binarios de rayos X son:

- una componente térmica generada principalmente en la región interna del disco de acreción. La misma posee una temperatura característica  $kT \sim 1 \text{ keV}$ . Muchas veces se encuentra fuertemente suprimida en los espectros observados debido a que para energías  $E < 1 \text{ keV}$ , el medio interestelar absorbe eficientemente fotones,
- una componente no térmica modelada como una ley de potencias. La misma se extiende hasta energías mucho mayores que la componente térmica y, en ocasiones, es suprimida con un corte exponencial más allá de alguna cierta energía crítica,
- La línea de emisión  $K\alpha$  del hierro. Suele ser visible centrada en  $E \sim 6.4 \text{ keV}$ , pero se encuentra fuertemente ensanchada debido a fenómenos relativistas y
- una componente de reflexión de los fotones no térmicos sobre la superficie del disco de acreción. Cuando el disco está orientado de forma que puede observarse su superficie la misma es importante y se observa un incremento en el espectro en el rango de energías  $10 \text{ keV} \lesssim E \lesssim 30 \text{ keV}$ .

Existen dos grandes familias en las que, tradicionalmente, se catalogan a los sistemas binarios de rayos X: los de gran masa (BrXGM),<sup>8</sup> en las que la estrella compañera tiene masas  $\gtrsim 10M_\odot$  y los de pequeña masa (BrXPM),<sup>9</sup> donde la masa de la compañera es  $\lesssim 1.5M_\odot$ .

Algunas de las características distintivas de las BrXGM son las siguientes (adaptado de [96]):

- Presentan variabilidad regular sin emisiones explosivas y, en algunos casos, eclipses.
- Poseen espectros dominados por emisión de rayos X *duros*:  $kT \gtrsim 15 \text{ keV}$ .
- Se encuentran concentrados hacia el plano galáctico.
- Su compañera óptica es una estrella de tipo espectral O, B, que generalmente puede ser observada ya que suele cumplirse que  $L_{\text{op}}/L_X \gtrsim 1$ , es decir la luminosidad en el óptico es mucho mayor que la correspondiente a la banda de rayos X.
- La acreción no se produce por medio de la formación de un disco de acreción, sino que suele formarse una envoltura común a ambos objetos.

Estas características indican que estos objetos son jóvenes (edades menores a los  $10^7$  años). El tipo de periodicidad que presentan en la emisión en rayos X (con períodos que van desde las centésimas hasta los miles de segundos) hace que los modelos más aceptados para la componente compacta sea una estrella de

<sup>7</sup>A modo de comparación, tener en cuenta que la luminosidad *total* del Sol es de  $L_\odot \sim 3.839 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ , y que su luminosidad en rayos X oscila entre  $3 \times 10^{26} \text{ erg s}^{-1}$  y  $5 \times 10^{27} \text{ erg s}^{-1}$ . En el otro extremo, para algunas erupciones de rayos gamma, se han estimado luminosidades en este rango de energías, mayores a los  $10^{51} \text{ erg s}^{-1}$ .

<sup>8</sup>High Mass X-ray Binaries (HMXB) en la literatura inglesa.

<sup>9</sup>Low Mass X-ray Binaries (LMXB) en la literatura inglesa.

neutrones donde la emisión es producida en una región cercana a los polos magnéticos. Dado que el eje magnético y el de rotación nunca están perfectamente alineados, la rotación de la estrella de neutrones hace variar la intensidad de la emisión X observada.

Las BrXPM, por el contrario, presentan las siguientes características comunes (adaptado de [96]):

- Presentan emisiones explosivas y pulsaciones rápidas, en algunos casos del orden de los milisegundos.
- Sus espectros se encuentran dominados por emisión de rayos X *blandos*:  $5 \text{ keV} \lesssim kT \lesssim 10 \text{ keV}$ .
- Son objetos que no se encuentran tan concentrados hacia el plano galáctico y que por el contrario presentan una concentración hacia la región del centro de la galaxia.
- La compañera óptica es una estrella de tipo espectral tardío o una estrella degenerada como una enana blanca que, generalmente, resulta imposible de observar dado que en casi todos los casos  $L_{\text{op}}/L_X \ll 1$ .
- El proceso de transferencia de masa se produce por medio de la formación de un disco de acreción.

Estas características dan indicios de que estos objetos son de población vieja (con edades mayores a los  $10^9$  años). La variabilidad en la emisión de rayos X del orden de los milisegundos junto con los grandes valores estimados para las masas de las componentes compactas de estos sistemas, hace que la componente oscura de una BrXPM sea modelada como un objeto completamente colapsado por acción de la gravedad.

Resulta importante remarcar que se ha observado que algunas binarias de rayos X presentan variabilidad en la morfología de su espectro de energía. Se observan importantes modificaciones en la amplitud relativa de cada una de las componentes que describimos anteriormente. Resulta especialmente notorio el cambio de la componente térmica respecto de la no térmica. En particular, Cygnus X-1 es uno de estos objetos, que si bien está catalogado como una BrXGM dado que la estrella compañera es de tipo espectral temprano, presenta, durante ciertos períodos, espectros que se encuentran dominados por la componente térmica (ver la [Subsección 9.2.1](#) para más detalles).

Para los sistemas de pequeña masa existen, además del escenario evolutivo que ya presentamos, otras alternativas teóricas capaces de explicar su formación, eficientes en cúmulos globulares, donde la densidad de estrellas es relativamente alta:

1. captura gravitacional, en la que un objeto compacto captura una estrella del cúmulo y luego, por efectos de marea, la deforma lo suficiente como para que comience el proceso de acreción y
2. dispersión de 3 objetos, en la que un objeto compacto y un sistema binario normal sufren un encuentro luego del cual resulta un sistema binario con una de las estrellas del par y el objeto compacto y una estrella libre, generalmente la menos masiva, que es expulsada del inestable sistema triple.

Además de la clasificación que presentamos, suele separarse a los sistemas binarios de rayos X en función del *estado* en el que se encuentren. Dicho estado es determinado, casi exclusivamente, a partir del análisis de los siguientes aspectos: la importancia relativa de las componentes suave y dura en el espectro, su luminosidad total y su espectro en las radiofrecuencias. Es importante volver a mencionar que se conocen un gran número de casos en los que estos objetos modifican el estado en que se encuentran, estos cambios ocurren en escalas temporales que van desde unos pocos minutos hasta algunos meses.

Si bien siempre existen excepciones, los estados en los que estos sistemas suelen encontrarse son:

- El estado *alto/suave*<sup>10</sup> o térmico. En este estado, el objeto posee gran luminosidad, cercana a la luminosidad de Eddington, indicando que la tasa de acreción de materia es grande. Los mejores modelos para explicar estas observaciones son los que proponen que el disco de acreción se extiende desde la última órbita circular estable (uoce)<sup>11</sup> hasta algún radio externo. Esto hace que el espectro se encuentre dominado por la componente térmica. El índice de la ley de potencias para describir la componente no térmica es  $\Gamma \sim 2.5$ , mostrando que la misma es relativamente débil. Por lo general no se detecta emisión en las radiofrecuencias y más del 75 % de la emisión (no absorbida por el medio interestelar) en el rango de energías  $2 \text{ keV} < E < 20 \text{ keV}$  es debida al disco de acreción.

<sup>10</sup>Estado *high/soft* en la literatura inglesa.

<sup>11</sup>Conocida como *innermost stable circular orbit (isco)* en la literatura inglesa.

Masa ( $M_{\odot}$ )	Tipo Espectral
120	O3
60	O4
25	O8
12	B0.2
5	B5
2.5	B9
1.25	F5
1.0	G8
0.8	K2
0.5	M0
0.2	M4
0.1	M7

Tabla 9.1: Relación entre la masa expresada en masas solares,  $M_{\odot}$ , y el tipo espectral para estrellas de secuencia principal.

Las observaciones actuales puede explicarse satisfactoriamente en el marco del paradigma actual: la emisión térmica de la región interna del disco de acreción. Los modelos plantean discos de acreción extendidos desde la uoce, por lo que la astronomía de rayos X puede utilizarse para poner a prueba el límite de campo fuerte en el entorno del horizonte de eventos de un agujero negro.<sup>12</sup>

- El estado *bajo/duro*.<sup>13</sup> En este estado el objeto posee una luminosidad muy por debajo de la de Eddington con espectros térmicos casi inexistentes, dominados por una componente en radiofrecuencias cuyo aporte al espectro de energías puede ser caracterizado por una ley de potencias con un índice espectral  $\Gamma \sim 1.4 - 1.8$ . Menos del 20 % de la emisión (no absorbida por el medio interestelar) en el rango de energías  $2 \text{ keV} < E < 20 \text{ keV}$  es debida al disco de acreción.

La componente en las radiofrecuencias puede ser explicada por la aparición de un chorro relativista<sup>14</sup> donde se produce emisión sincrotrón, característica de los microcuásares. Dado que la componente térmica es casi inexistente, se supone que en este estado los discos de acreción se encuentran truncados en un radio  $r_{\text{in}} \gg r_{\text{uoce}}$ , donde con  $r_{\text{uoce}}$  estamos denotando el radio de la uoce.

## 9.2. Estimación de la masa de agujeros negros en sistemas binarios de rayos X

El problema de la estimación directa de la masa de objetos astronómicos es central para prácticamente cualquier área de la astronomía. Esto puede realizarse de manera relativamente simple estudiando sistemas binarios (para una mirada pictórica de estos sistemas, ver la [Figura 9.2](#)).

Utilizando técnicas espectroscópicas, puede construirse la curva de velocidad radial para obtener la denominada *función de masa*,  $f(M_c)$ , de la binaria:

$$f(M_c) = \frac{(M \sin i)^3}{(M + M_c)^2} = \frac{PK^3(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi G}, \quad (9.1)$$

donde,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $K$  es la máxima velocidad (a lo largo de la línea de la visual) Doppler y  $P$  el período de la velocidad radial, dos cantidades fácilmente observables. El parámetro  $e$  es la excentricidad de la órbita y el ángulo  $i$  la inclinación del plano orbital respecto del del cielo (la determinación de este parámetro introduce la mayoría de los errores en la estimación de masas).  $M$  y  $M_c$  son las masas de cada una de las componentes de la binaria. Si uno es capaz de estimar  $M$ , la masa de la

<sup>12</sup>Recordar que para un agujero negro de Kerr extremo la posición del horizonte de eventos se encuentra en  $r_{\text{HE}} = M$  coincide, para partículas que rotan en la dirección del agujero negro, con la posición de la uoce.

<sup>13</sup>Estado *low/hard* en la literatura inglesa.

<sup>14</sup>*Relativistic jet* en la literatura inglesa.

Objeto	$M$	$a$	Clasificación
Cygnus X-1	$14.8 \pm 1.0$	$0.96 \pm 0.04$	BrXGM persistente
GRS 1915+105	$14.0 \pm 4.0$	$0.975 \pm 0.025$	BrXPM transitoria
V404 Cyg	$12.0 \pm 2.0$	–	BrXPM transitoria
A 0620-00	$11.0 \pm 2.0$	$0.12 \pm 0.19$	BrXPM transitoria
LMC X-1	$10.91 \pm 1.54$	$0.92 \pm 0.07$	BrXGM persistente
4U 1543-47	$9.4 \pm 1.0$	$0.8 \pm 0.1$	BrXPM transitoria
XTE J1550-564	$9.6 \pm 1.2$	$0.34 \pm 0.24$	BrXPM transitoria
GS 2000+25	$7.5 \pm 0.6$	0.03	BrXPM transitoria
GS 1124-168	$7.0 \pm 0.3$	–	BrXPM transitoria
XTE J1118+480	$6.8 \pm 0.4$	–	BrXPM transitoria
GRO J1655-40	$6.3 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.1$	BrXPM persistente
H 1705-250	$6.0 \pm 2.0$	–	BrXPM transitoria
GRS 1009-45	$5.2 \pm 0.6$	–	BrXPM transitoria
GRO J0422+32	$4.0 \pm 1.0$	–	BrXPM transitoria

Tabla 9.2: Algunos candidatos confirmados a objetos completamente colapsados por efecto de la gravedad. La mayoría de los candidatos son catalogados como Binarias de rayos X de Pequeña Masa (BrXPM) transitorias o persistentes, aunque puede observarse que también algunos son catalogados como Binarias de rayos X de Gran Masa (BrXGM). Datos de las masas y parámetros de rotación adaptados de [97] y [98].

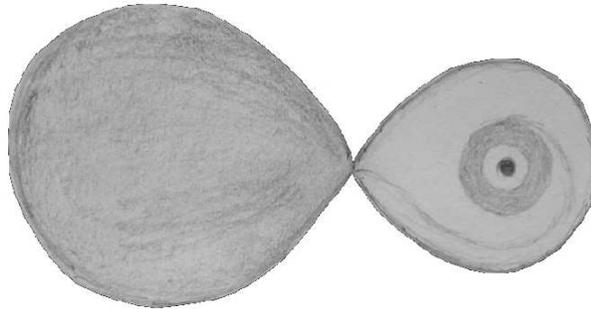


Figura 9.2: Esquema pictórico de una binaria de rayos X. Puede verse la compañera evolucionada, el disco de acreción y el objeto compacto.

compañera brillante, a través de algún método indirecto entonces puede estimar, utilizando (9.1), la masa  $M_c$  del objeto compacto.

Un método comúnmente utilizado para realizar estimaciones de la masa de la estrella compañera hace uso de la relación empírica entre la misma y el tipo espectral de la estrella (ver la Tabla 9.1). Utilizando este método se lograron calcular, a la fecha, la masa de unos 20 candidatos a objetos completamente colapsados por efecto de la gravedad. Presentamos algunos datos observacionales de los mismos en la Tabla 9.2.

### 9.2.1. El emblemático Cygnus X-1

A mediados de la década de 1960 se descubrió la primera fuente de rayos X en la constelación del Cisne (Cygnus). Luego, a principios de la década de 1970, en la misma región se descubre una radio fuente coincidente con una estrella súper gigante azul (HDE 226868, de magnitud en el visual  $m_V = 8.84$  mag y tipo espectral O9.7Iab). Se observaron correlaciones entre la emisión en radio de HDE 226868 y la emisión en rayos X de Cygnus X-1, lo que hizo formular la hipótesis de que fueran componentes de un sistema binario. Esto fue confirmado cuando, con mediciones de velocidades radiales de la estrella brillante, se mostró que la misma presentaba un movimiento con un período de 5.6 días. Tiempo después pudo realizarse un análisis de microvariabilidad de la fuente en rayos X, pudiendo determinar variaciones en la intensidad con escalas temporales de milisegundos. Esta microvariabilidad pone una cota fuerte al tamaño del objeto, mostrando

que el mismo es extremadamente compacto, con un radio de apenas unas decenas de kilómetros.

Estudios espectroscópicos de la compañera brillante permitieron conocer los elementos orbitales de la compañera brillante. Se estimó un período orbital de 5.6 días, una semi amplitud de velocidad de  $75.7 \text{ km s}^{-1}$  y una excentricidad para la órbita de 0.021. Además, se pudo estimar su masa en  $19.2 \pm 1.9 M_{\odot}$  y la del compañero invisible en  $14.8 \pm 1.0 M_{\odot}$  [99]. Dado que no hay disponibles modelos teóricos que den como resultado estrellas de neutrones (o híbridas) con masas superiores a  $\sim 3 M_{\odot}$ , se tienen suficientes evidencias para justificar que el objeto central debe ser uno completamente colapsado por la gravedad.

En algo menos del 30 % de los casos, se observa a Cygnus X-1 en el estado suave [100]. Durante estos períodos este objeto se vuelve extremadamente luminoso, con un espectro dominado por radiación térmica. Además, hay evidencias observacionales de la línea fluorescente del hierro, que aparece en una energía  $E_{K\alpha} \sim 6.4 \text{ keV}$ . Por el contrario, cuando se encuentra en el estado *duro*, una ley de potencias de índice  $\Gamma \sim 1.5$ , domina el espectro para energías mayores a los 2 keV y el mismo posee una energía de corte en aproximadamente 150 keV. A pesar de estos cambios en su estado, la emisión es continua, una evidencia de que en Cygnus X-1 la acreción de materia nunca se detiene. Sin embargo, la emisión presenta variabilidad en diferentes escalas de tiempo, incluida microvariabilidad del orden de los milisegundos [101].

Análisis similares a éste han sido realizados para más de una docena de binarias en rayos X. Los mismos dieron como resultados mediciones de masas de objetos súper compactos en el rango desde las  $\sim 4$  masas solares (GRO J0422+32) [102] y las  $\sim 15$  como Cygnus X-1 ó GRS 1915+105 [103].

Considero que en este punto resulta importante remarcar la advertencia que realizaron John Kormendy y Douglas Richstone [104]: “*El modelo de agujero negro se ha vuelto nuestro paradigma. Esta situación es peligrosa: es fácil creer que se ha demostrado lo que se espera encontrar*”<sup>15</sup>.

### 9.3. Estimación del parámetro de rotación

En el marco de la teoría general de la relatividad, las soluciones estacionarias de agujeros negros están completamente caracterizadas por su masa, su momento angular y su carga eléctrica. Además, como dijimos, es esperable que en ambientes astronómicos objetos eléctricamente cargados se neutralicen. Por este motivo se cree que los modelos para agujeros negros astronómicos quedan completamente caracterizados si se fija su masa y su momento angular.

Los métodos con los que se realizaron estimaciones al parámetro de rotación estan basados en 3 técnicas generales, mencionamos de forma breve sus características principales.

#### 9.3.1. Oscilaciones cuasiperiódicas

Las oscilaciones cuasiperiódicas (OCP)<sup>16</sup> son pequeños “parpadeos” de alta frecuencia que sufre la radiación en la banda de los rayos X alrededor de ciertas frecuencias. Estudios asociados a las OCP se han utilizado para obtener parámetros físicos de objetos compactos como enanas blancas, estrellas de neutrones y objetos completamente colapsados por efecto de la gravedad.

Observaciones de OCP en candidatos a agujeros negros sirven como indicios para justificar la idea de que estas oscilaciones se originan debido a la presencia de gas en órbitas muy internas dentro del disco de acreción.

Su estudio es de gran importancia a la hora de poner a prueba a la teoría general de la relatividad en el régimen de campo fuerte. Además, sirven como herramienta para diferenciar el estado en que se encuentran las binarias de rayos X.

#### Oscilaciones cuasiperiódicas de baja frecuencia

Se denominan OCP de baja frecuencia a las comprendidas entre los 0.1 y 30 hercios. Las mismas han sido observadas en la mayoría de los candidatos a agujero negro estelares.

<sup>15</sup>Traducción del texto original: “*The black hole picture has become our paradigm. This situation is dangerous: It is easy to believe that we have proved what we expect to find.*”

<sup>16</sup>Conocidas como *Quasiperiodic Oscillations (QPO)* en la literatura en inglés.

Dado que las frecuencias de órbitas Keplerianas en un agujero negro de Kerr son mucho mayores<sup>17</sup> se piensa que las mismas no se deben a procesos que ocurren en el disco de acreción ya que se cree que los mismos no se extienden más allá de  $r \sim 10r_g$ .

Algunos de los modelos utilizados para describir a las OCP de baja frecuencia incluyen oscilaciones globales en el disco de acreción, oscilaciones radiales en forma de ondas de choque, etc. Los mismos permiten explicar las amplitudes observadas en las OCP y su estabilidad.

### Oscilaciones cuasiperiódicas de alta frecuencia

Se denominan OCP de alta frecuencia a las comprendidas entre los 40 y 400 hercios. Estas oscilaciones, de muy baja amplitud, son interesantes dado que presentan frecuencias compatibles con las asociadas a órbitas Keplerianas ubicadas en  $r = r_{\text{uoce}}$  para un agujero negro de unas  $10M_{\odot}$ .

Las observaciones actuales de OCP de alta frecuencia muestran que las mismas no parecen presentar variaciones importantes, aún cuando otros aspectos de la binaria de rayos X (como la luminosidad en rayos X) si lo hagan.

Dado que las OCP de alta frecuencia aparecen, en ocasiones, en pares resonantes, se iniciaron una serie de investigaciones tendientes a buscar una posible conexión entre ambos fenómenos. En una gran variedad de modelos teóricos (discos finos, discos gruesos con geometría toroidal, simulaciones magnetohidrodinámicas) aparecen oscilaciones resonantes como las observadas.

#### 9.3.2. Ajuste de la línea de hierro

La línea del hierro aparece altamente ensanchada en los espectros una gran cantidad de candidatos a agujeros negros. La interpretación tradicional a estas observaciones es que al ser irradiadas por una fuente de rayos X duros (como una corona ópticamente delgada), las regiones frías de un disco de acreción formado en torno al objeto súper compacto emiten la línea fluorescente  $K\alpha$  del hierro ubicada en  $E \sim 6.4 \text{ keV}$ . El ensanchamiento de esta línea se debe a una combinación de diferentes efectos: rotación Newtoniana, corrimiento Doppler trasverso, magnificación Doppler y enrojecimiento gravitacional. Teniendo en cuenta la teoría Newtoniana, la rotación produce, en el perfil de la línea, una estructura de pico doble simétrico, uno de los mismos corridos hacia el rojo y el otro hacia el azul. Cuando se incorporan aspectos de la teoría especial de la relatividad, el efecto neto es un corrimiento general de la estructura de la línea hacia el rojo (debido al efecto Doppler trasverso) y un notable crecimiento en la intensidad del pico azul (debido a la magnificación Doppler) haciendo que el perfil se vuelva asimétrico. El efecto neto del enrojecimiento gravitacional es un corrimiento global de la “línea” hacia el rojo, reduciendo, de este modo, el pico azul. El efecto de la inclinación es el de fijar la energía de corte a partir de la cual la línea se vuelve invisible, esto se puede entender a partir de la fuerte dependencia angular que tienen tanto la magnificación Doppler como la deflexión de los haces de luz.

Una serie de estudios teóricos muestran que el perfil de la línea depende de los siguientes parámetros: el radio interno de la región emisora, la ley para la emisividad del material del disco, el estado de movimiento del material dentro del disco y la inclinación del mismo respecto al plano del cielo. Un aumento en el parámetro de rotación hace que el radio interior del disco de acreción se haga más pequeño<sup>18</sup> haciendo, además, que la velocidad del material en el disco se haga mayor. Por este motivo, buenas observaciones del perfil de esta línea resultan útiles para obtener una estimación al parámetro de rotación.

Veamos con detalle los efectos que produce la modificación del radio interno del disco de acreción en el perfil de la línea de hierro.

Como mencionamos, las órbitas circulares estables existen, únicamente, cuando su radio es mayor al de la uoce. Dicho radio depende del parámetro de rotación,  $a$ , con el que se describe la geometría del espaciotiempo de fondo. Cuando el sistema binario se encuentra en el estado alto/suave, los modelos teóricos de discos de acreción utilizados para explicar las observaciones se extienden hasta la uoce, despreciando la emisión del material que se encuentra cayendo hacia el objeto compacto (ver, por ejemplo, [105]). Dado que

<sup>17</sup>Para un agujero negro de Schwarzschild de  $10 M_{\odot}$  una frecuencia de 3 hercios corresponde a la órbita ubicada en  $r = 100r_g$ , mientras que la última órbita circular estable se encuentra en  $r_{\text{uoce}} = 6r_g$ .

<sup>18</sup>Esto es estrictamente cierto cuando uno se restringe a estudiar agujeros negros, pero deja de ser así cuando se admiten soluciones desprovistas de horizonte de eventos.

la posición de la uoce es una función decreciente del parámetro de rotación (si  $a < a_c \sim 1.089$ , luego el comportamiento se invierte) se observa que al aumentar el valor del parámetro de rotación el ala roja de la línea se vuelve prominente. Esto puede explicarse debido al fuerte enrojecimiento gravitacional que sufren los fotones emitidos desde las regiones más internas del disco.

### 9.3.3. Ajuste espectral de discos de acreción

Presentaremos un resumen del método de ajuste espectral que describiremos en más detalle en la [Subsección 9.4.1](#) de esta tesis.

El mismo se basa en la siguiente propiedad: cuando un objeto compacto tiene un disco de acreción cuya tasa de acreción es mayor a un pequeño porcentaje de la luminosidad de Eddington, el material acretado se vuelve opaco desde el punto de vista óptico por lo que su emisión térmica puede aproximarse como la de un cuerpo negro. Bajo esta hipótesis, el espectro de emisión puede calcularse en forma simple, su forma y propiedades dependen fuertemente del parámetro de rotación, de la inclinación del disco y del cociente entre la tasa de acreción y el cuadrado de la masa del objeto central. A partir de una comparación entre los datos observacionales y los modelos teóricos puede realizarse una estimación de dichos parámetros, en particular al parámetro de rotación.

En esta tesis presentaremos un modelo de disco de acreción magnetizado, calcularemos espectros observados de energía y los utilizaremos como herramienta capaz de diferenciar entre discos de acreción formados en torno a agujeros negros y singularidades desnudas. También resultará útil como herramienta capaz de brindar información sobre la magnitud y geometría del campo de inducción magnética en las cercanías del objeto compacto (Para más detalles, ver la [Sección 11.3](#) de esta tesis).

Este método para estimar el valor del parámetro de rotación es más robusto cuando se lo aplica a binarias de rayos X que se encuentran el estado térmico ya que se piensa que en esos casos la posición del radio interno del disco coincide con el de la uoce. Las mayores desventajas del método son que deben conocerse con precisión la distancia al objeto y que el espectro de energías es muy sensible a modificaciones en la inclinación del plano del disco respecto al del cielo.

## 9.4. Diferencias observacionales entre agujeros negros y singularidades desnudas

El objetivo central de esta tesis es realizar estudios que permitan dar argumentos relacionados con la validez o no de la conjetura de censura cósmica postulada por Penrose. La [Parte II](#) de esta tesis se centró en presentar resultados obtenidos en esta dirección atacando al problema desde un punto de vista puramente teórico, analizando la respuesta frente a perturbaciones lineales de soluciones que violan esta conjetura en alguna de sus formas. En los capítulos restantes, pretendemos explorar las diferencias observacionales de fenómenos astrofísicos que ocurren en torno a agujeros negros y singularidades desnudas, asumiendo que las últimas sirven para modelar objetos reales.

La naturaleza no lineal de las ecuaciones de Einstein hace extremadamente difícil (para no ser pesimista) estudiar espaciotiempos completamente generales. Esto motivó a que en la gran mayoría de los estudios existentes se hagan suposiciones de simetría de dichos espaciotiempos. Estas suposiciones redundan, por un lado, en simplificaciones que permiten realizar los estudios que se pretenden, pero por otro no permiten dar una respuesta general sobre la validez o no de las diferentes formas de la conjetura de censura cósmica. Aquí es donde los aportes observacionales pueden volverse de gran relevancia.

### 9.4.1. Análisis del espectro del continuo en rayos X

En los últimos años se han desarrollado nuevas técnicas para estimar el parámetro de rotación de objetos súper compactos basadas en el análisis del espectro del continuo en rayos X [\[106\]](#). El método desarrollado en [\[107\]](#), se centra en el análisis de la línea fluorescente  $K\alpha$  del hierro, y también ha demostrado resultar muy útil para este fin.

A pesar de que los avances en el área han sido significativos, aún no se tienen a disposición observaciones que permitan obtener conclusiones categóricas en relación a la naturaleza de los objetos compactos. Tampoco

se cuenta, a la fecha de escritura de esta tesis, con evidencias de la existencia de un horizonte de eventos, característica distintiva de los agujeros negros. En caso de ser observado en forma directa se fortalecería a los agujeros negros frente a otros posibles modelos de objetos completamente colapsados por la gravedad.

### 9.4.2. Análisis del fenómeno de lente gravitacional

Como presentamos al principio de esta tesis, la deflexión de la luz es una predicción (confirmada a lo largo de 100 años) de la teoría general de la relatividad. Esta particularidad de la teoría de Einstein, permitió ponerla a prueba y compararla con la gravitación newtoniana donde el efecto es estrictamente nulo. Para realizar estos estudios es suficiente el análisis de lo que se conoce como efecto de lente gravitacional en el límite débil. La primera evidencia del fenómeno de lente gravitacional (sin considerar los asociados a datos obtenidos en eclipses solares totales) fue obtenido en el año 1979, con la observación de la fuente doble 0957 + 561, cuyas componentes se encuentran separadas 6'' entre sí [108]<sup>19</sup>.

En la última década se ha desarrollado la teoría de lente gravitacional en el régimen de campo fuerte por varios motivos. Uno de ellos es que estos resultados pueden utilizarse para poner a prueba a la teoría general de la relatividad frente a otras alternativas, ya que cualquier teoría relativista de la gravitación debe tener el mismo límite de campo débil. Además, estos estudios pueden ser utilizados para distinguir desde el punto de vista observacional objetos que sean descritos por algún elemento de una dada familia de espaciotiempos, es decir, por ejemplo, algún espaciotiempo de los de la familia de Kerr, ya que éstas poseen el mismo límite de campo débil. Esta técnica se vuelve potencialmente útil a la hora de diferenciar diferentes modelos de agujero negro e, inclusive, agujeros negros de singularidades desnudas dado que puede mostrarse que agujeros negros y singularidades desnudas presentan diferentes patrones en las imágenes producidas. Estas diferencias llevaron a varios autores a desarrollar trabajos teóricos que permiten pensar qué experimentos y observaciones pueden ser utilizados para detectar estas diferencias (ver, por ejemplo, [109]). Dichos experimentos pueden ser determinantes a la hora de distinguir entre diferentes modelos teóricos de objetos compactos.

Uno de los problemas de aplicabilidad de este método es que ninguno de los objetos compactos de los que se tienen evidencias se encuentran aislados y poseen estructuras tipo discos de acreción que complican el análisis de los datos para realizar comparaciones con los resultados obtenidos de los modelos teóricos.

El formalismo e ideas básicas asociadas con el fenómeno de lentes gravitacionales es el de lograr relacionar la posición de la fuente luminosa con el de la imagen (o imágenes). Este trabajo lo realiza lo que se conoce como *ecuación de la lente*, para lo que se debe calcular el llamado *ángulo de deflexión* que tiene codificada las propiedades del objeto que funciona como lente. Una suposición que se realiza frecuentemente en este formalismo es que pueden utilizarse las herramientas de la óptica geométrica, esto puede no ser válido cuando uno estudia el fenómeno de lente gravitacional debido a una singularidad desnuda, ya que en esos casos, el haz de luz podría acercarse a regiones donde la curvatura de Riemann sea comparable con la longitud de onda de la onda electromagnética considerada.

A continuación, presentamos la *ecuación de la lente* para el caso más simple, en el que se trabaja sobre un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico. En la **Figura 9.3** se presentan todos los elementos que aparecen en el estudio del fenómeno de lente gravitacional. En ella puede verse al objeto que funciona como lente,  $L$ , a la fuente luminosa,  $F$ , y a la imagen,  $I$ , observada por el observador,  $O$ . Además, se caracterizan las distancias entre los diferentes objetos involucrados y algunos ángulos importantes. Otra definición útil es la de *eje óptico*, es decir la línea que une al observador con la lente.

La relación entre los diferentes ángulos que intervienen en el análisis,  $\gamma$ , en ángulo entre el eje óptico y la fuente,  $\psi$ , el ángulo entre el eje óptico y la imagen y el de deflexión de la luz,  $\alpha$ , es:

$$\tan \gamma = \tan \psi - \frac{D_{LF}}{D_F} (\tan \psi + \tan(\alpha - \psi)), \quad (9.2)$$

donde  $D_{LF}$  es la distancia entre la lente y la fuente y  $D_F$  la distancia entre el observador y la fuente.

El ángulo de deflexión puede calcularse (para un espaciotiempo estático y con simetría esférica) como una función de la distancia de máximo acercamiento entre la lente y el haz de luz. Para el caso especial del

<sup>19</sup>Consideramos interesante hacer notar que en el final del resumen de su trabajo, los autores mencionan: “Una mirada menos tradicional afirmarí que los cuásares serían dos imágenes de un mismo objeto producidas por una lente gravitacional”. Traducción del original en inglés: “A less conventional view would find the quasars to be two images of the same object produced by a gravitational lens”.

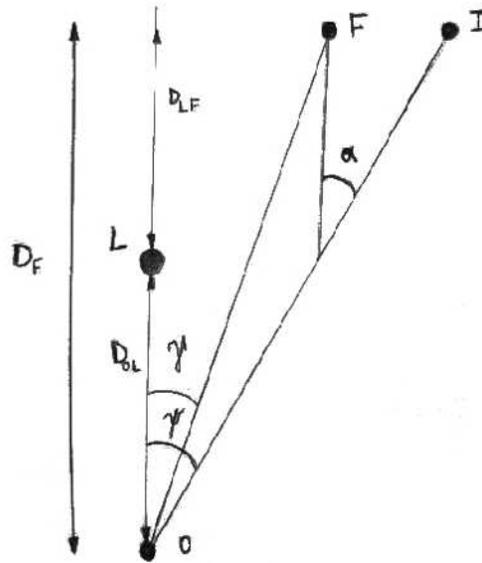


Figura 9.3: Esquema de una lente gravitacional. Se presentan las posiciones de la lente,  $L$ , el observador,  $O$ , la fuente,  $F$ , y la imagen,  $I$ . La distancia entre el observador y la lente es denotada con  $D_{OL}$  y la correspondiente a la lente y la fuente con  $D_{LF}$ . Además, mostramos los ángulos que forman: la lente con el eje óptico,  $\gamma$ , la lente con la imagen,  $\psi$ , y el de deflexión,  $\alpha$ .

espaciotiempo de Schwarzschild, la expresión para este ángulo (utilizando la coordenada adimensionalizada  $x = r/r_g$  donde  $r_g = 2M^{20}$  y denotando con  $x_{\min}$  a la distancia de mayor acercamiento) puede escribirse como:

$$\alpha(x_{\min}) = 2 \int_{x_{\min}}^{\infty} dx \left[ \sqrt{\frac{1}{1-x^{-1}}} \left( \left[ \frac{x}{x_{\min}} \right]^2 \frac{1-x_{\min}^{-1}}{1-x^{-1}} - 1 \right)^{-1/2} x^{-1} \right] - \pi. \quad (9.3)$$

Para calcular la expresión de  $x_{\min}$ , se utiliza la relación geométrica dada por:

$$\text{sen } \psi = \frac{2M}{D_{OL}} \frac{x_{\min}}{\sqrt{1-x_{\min}^{-1}}}.$$

Dado que el espaciotiempo de Schwarzschild posee una *esfera de fotones* en  $r = 3M$  (o  $x = 1.5$ ) puede verse, al calcular (9.3) en forma explícita, que el ángulo de deflexión presenta allí un comportamiento divergente. Esto puede interpretarse físicamente del siguiente modo, al acercarse a  $r = 3M$  los fotones realizarán, antes de llegar al observador, múltiples (infinitas en el límite) “órbitas”.

La expresión (9.3) se modifica radicalmente cuando se cambia la geometría del espaciotiempo de fondo bajo análisis. Por este motivo estudios teóricos del fenómeno de lente gravitacional son una herramienta útil a la hora de diferenciar, desde el punto de vista observacional, modelos de objetos súper compactos.

Con la forma explícita del ángulo de deflexión calculada, se procede a resolver la ecuación de la lente (9.2) para obtener las posiciones de las imágenes que luego se compararán con las observaciones. Además de la posición de las imágenes, existe otra cantidad potencialmente observable: la *magnificación* de las mismas, sobre la cual no discutiremos en esta tesis.

Consideramos importante mencionar que se ha desarrollado una teoría para estudiar el fenómeno de lente gravitacional en el límite de campo fuerte en diferentes espaciotiempos de relevancia, ver [110] para detalles al respecto.

### 9.4.3. Análisis de las propiedades de sombras

El método del análisis de las propiedades de sombras se basa en el cálculo de trayectorias de fotones y de sus intensidades respectivas. Las mismas son integradas a lo largo de la línea de la visual teniendo en cuenta

<sup>20</sup>Recordar que estamos utilizando unidades geométricas, en las cuales  $G = c = 1$ .

todos los fenómenos y correcciones relativistas.

La relevancia de este método es que la silueta de dicha sombra depende fuertemente del espaciotiempo que se esté considerando. Dado que la misma es una función del parámetro de rotación, este método se vuelve potencialmente útil para distinguir entre diferentes tipos de agujeros negros y también agujeros negros de singularidades desnudas. Además, puede ser utilizado para distinguir entre diferentes teorías de gravitación (para más detalles ver, por ejemplo, [111]).

Una de las debilidades de este método es que la presencia de un disco de acreción alrededor de los objetos colapsados dificulta la aplicabilidad de los cálculos teóricos que se realizan, generalmente, para un agujero negro aislado.

#### 9.4.4. Análisis de las propiedades de discos de acreción

Estudiar diferencias entre los discos de acreción formados alrededor de agujeros negros y otro tipo de alternativas teóricas para modelar objetos compactos, como las singularidades desnudas, es relevante. Esto se debe a que dichas diferencias podrían brindar herramientas para diferenciar su naturaleza desde un punto de vista observacional. Si bien la dinámica dentro de un disco de acreción es extremadamente compleja, las trayectorias circulares ecuatoriales son un ingrediente clave en modelos más realistas para este tipo de objetos. Siguiendo este modo de pensamiento (presentado en [112], aunque para una mirada más moderna se refiere al lector al trabajo [113] y citas allí realizadas), se estudiaron estas órbitas en un espaciotiempo de Kerr sin realizar ninguna restricción sobre el parámetro de rotación. Recientemente, se presentó un análisis comparativo de las propiedades de discos de acreción formados en torno a agujeros negros y singularidades desnudas [114].

Uno de los motivos para realizar estudios relacionados con discos de acreción formados en torno a objetos ultra compactos es que se cree que los mismos pueden servir como explicación para el fenómeno, no del todo comprendido, de la generación de chorros relativistas. Este tipo de fenómenos súper energéticos aparecen en diversos escenarios astronómicos y con una muy amplia escala de tamaños, yendo desde los núcleos de galaxias activas hasta el fenómeno de los microcuásares asociados con objetos compactos de masas estelares. Una serie de autores (ver por ejemplo [115]) propone la relación *disco-chorro* como una explicación a la formación de chorros relativistas. Algunos puntos centrales que queremos mencionar y que, son utilizados como argumentos que favorecen esta relación, son los siguientes:

- Existen evidencias de que el mecanismo de formación de un chorro relativista es el mismo en un gran espectro de objetos, desde enanas marrones hasta estrellas de gran masa (ver por ejemplo [116]).
- La rotación del chorro y la del disco parecen estar asociadas (ver por ejemplo [118]).
- Existen evidencias de que la tasa de acreción de materia y la de emisión por el chorro relativista son proporcionales. Las mismas se han obtenido a partir de observaciones realizadas sobre una gran variedad de sistemas (ver por ejemplo [117]).
- Simulaciones numéricas muestran que el campo magnético anclado a un disco de acreción sirve para acelerar y colimar chorros relativistas (ver por ejemplo [119]).

Dos de los mecanismos más aceptados que logran explicar los requerimientos energéticos involucrados en la generación de un chorro relativista (en los que la materia puede ser acelerada de modo que su factor de Lorentz sea  $\sim 100$ ), se basan en la extracción de energía de rotación de un agujero negro de Kerr. Penrose desarrolló el mecanismo que ahora se denomina Proceso de Penrose [120], luego generalizado para el caso en que se encuentran presentes campos de inducción magnética (Proceso de Penrose Magnético) [121]. Roger David Blandford y Roman L. Znajek desarrollaron lo que hoy se conoce como mecanismo de Blandford-Znajek [122]. También se desarrolló el modelo de aceleración de Fermi (ver, por ejemplo, [123] y referencias allí mencionadas). Todos estos mecanismos son capaces de dar una explicación a aspectos asociados con la física de chorros relativistas.

La procesos físicos que ocurren en un disco de acreción son una combinación no lineal de fenómenos propios de fluidos viscosos turbulentos, radiación y aspectos propios de una teoría de la gravitomagnetohidrodinámica. Sin embargo, un estudio simple de órbitas circulares ecuatoriales puede ser de gran utilidad ya que aún en modelos más complejos las mismas juegan un rol relevante.

Un fenómeno asociado tanto con discos de acreción como con objetos compactos es el de los campos de inducción magnética. Es por esto que resulta válido preguntarse qué tipo de efectos potencialmente observables y que permitan diferenciar entre diversos modelos teóricos produce la combinación objeto súper compacto - disco de acreción - campo de inducción magnética externo. Previo a los trabajos cuyos resultados se presentan en esta tesis, no existían estudios que abordasen esta problemática siguiendo nuestro enfoque de trabajo, es decir, relajando la restricción  $a \leq 1$  en el espaciotiempo de fondo y estudiando las propiedades térmicas de discos de acreción. Existían, sin embargo, trabajos que estudiaban los efectos que produce, sobre órbitas ecuatoriales circulares de partículas cargadas eléctricamente, la presencia de un campo de inducción magnética externo uniforme [124] y dipolar [125] en un espaciotiempo de fondo de Kerr cuando el mismo describe un agujero negro.

## Capítulo 10

# Efecto del campo magnético sobre partículas cargadas en el espaciotiempo de Kerr

En este capítulo, presentaremos resultados que pueden considerarse de utilidad a la hora de buscar evidencias observacionales que favorezcan (o no) la conjetura de censura cósmica.

A la fecha de presentación de esta tesis, el autor de la misma no está al tanto de que existan observaciones *directas* de la existencia de un horizonte de eventos en los objetos ultra compactos de los que se tienen indicios observacionales. Como se mencionó, cualquier observación en esta dirección favorecería el actual paradigma de agujero negro frente a otros modelos teóricos y realizaría, por lo tanto, un aporte fundamental a la pregunta de validez o no de la conjetura débil de censura cósmica en ambientes astronómicos. Siguiendo esta línea de razonamiento, el desarrollo de modelos teóricos que provean diferencias potencialmente observables entre los diferentes candidatos a modelar objetos compactos es importante para atacar este interrogante.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de las geodésicas circulares de partículas masivas cargadas en un espaciotiempo de Kerr que se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética externo. Esto permitirá analizar el comportamiento general de las mismas y estudiar, de forma específica, los efectos sobre la posición de la última órbita circular estable, que se encuentra, potencialmente, ligada a la capacidad del sistema objeto compacto - disco de acreción de generar un chorro relativista. Además, conocer estas trayectorias es imprescindible para realizar modelos simples de discos de acreción con haremos en el [Capítulo 11](#) de esta tesis.

En la literatura actual pueden encontrarse trabajos que estudian las diferencias en las geodésicas circulares y ecuatoriales entre los regímenes del espaciotiempo de Kerr cuando éste deja de representar un agujero negro para describir un objeto desprovisto de horizonte de eventos. También se han realizado estudios de como son afectadas las trayectorias circulares y ecuatoriales de partículas cargadas en torno a un agujero de negro de Kerr cuando este se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética externo. En esta tesis, extendimos estos resultados y analizamos los efectos que se producen al estudiar la familia completa de soluciones de Kerr, buscando posibles diferencias observacionales.

Los resultados que pasan a exponerse fueron presentados en [\[126\]](#) y utilizados en [\[127\]](#).

### 10.1. Campos electromagnéticos con simetría axial

#### 10.1.1. Campo uniforme

La primer solución exacta para un campo electromagnético en el espaciotiempo de fondo de Kerr fue obtenida por Robert Wald [\[128\]](#). En este trabajo se derivó el campo electromagnético resultante en el espaciotiempo de un agujero negro con rotación que se coloca en una región donde, inicialmente, el campo de inducción magnética es uniforme y alineado con el eje de rotación. La importancia astronómica de esta solución es que la misma puede utilizarse para modelar el campo intergaláctico que, en media, es extrema-

damente pequeño y, en regiones del tamaño típico de un disco de acreción formado alrededor de un objeto súper compacto de masa estelar, uniforme para una galaxia como la Vía Láctea (ver por ejemplo [129]). También puede entenderse a este como una forma de modelar un campo de inducción magnético que, en la superficie del disco, no sufre modificaciones importantes.

En [130], utilizando el formalismo desarrollado por Teukolsky [59] para perturbar al espaciotiempo de Kerr, Jacobus Antonius Petterson obtuvo la expresión general para cualquier campo electromagnético estacionario con simetría axial en un espaciotiempo de fondo de Kerr. Resultados que fueron generalizados en [131].

Para el caso de un campo de inducción magnética uniforme de magnitud  $B$ , el potencial vector se puede expresar como:

$$A_b = (A_t, 0, 0, A_\phi),$$

donde las componentes no nulas son:

$$A_t = -aB \left( 1 - \frac{Mr}{\Sigma} (2 - \sin^2 \theta) \right), \quad A_\phi = \frac{B \sin^2 \theta}{2\Sigma} \left[ (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta - 4Ma^2 r \right].$$

Recordemos las definiciones de las cantidades  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  y  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ , características del espaciotiempo de Kerr.

Una inspección rápida a las expresiones de las componentes no nulas del potencial vector nos muestra que el mismo es divergente para valores grandes de la coordenada radial. Este tipo de comportamiento era esperable desde un punto de vista físico ya que el modelo de campo de inducción uniforme supone que (aún en ausencia del cuerpo masivo) la cantidad de energía total almacenada en el espaciotiempo debe ser infinita. Vemos entonces que la divergencia resulta una consecuencia directa de suponer que el campo de inducción no decrece para grandes valores de  $r$ .

### 10.1.2. Campo dipolar

El hecho de que no existan evidencias observacionales de monopolos magnéticos hace que el campo dipolar sea la primera (y en muchos casos una muy buena) aproximación a campos de inducción magnética más complejos y realistas. Por este motivo el mismo permite modelar, razonablemente bien, configuraciones de campo de objetos astronómicos. Los trabajos [132] y [133] indican que, a través del mecanismo denominado *batería cósmica de Poynting-Robertson*, discos de acreción en el espaciotiempo de Kerr pueden generar *in situ* y mantener campos de inducción magnética con estructura dipolar.

Utilizando los resultados obtenidos en [130] para el caso particular de una configuración dipolar sin término asociado a una carga electrostática, tenemos que las componentes no nulas del potencial vector son:

$$\begin{aligned} A_t &= -\frac{3a\mu}{2(1-a^2)\Sigma} \left( [r(r-M) + (a^2 - Mr) \cos^2 \theta] \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \left( \frac{r-M+\sqrt{1-a^2}}{r-M-\sqrt{1-a^2}} \right) - (r-M \cos^2 \theta) \right), \\ A_\phi &= -\frac{3\mu \sin^2 \theta}{4(1-a^2)\Sigma} \left( (r-M)a^2 \cos^2 \theta + r(r^2 + Mr + 2a^2) \right. \\ &\quad \left. - [r(r^3 + a^2 r - 2Ma^2) + \Delta a^2 \cos^2 \theta] \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} \ln \left( \frac{r-M+\sqrt{1-a^2}}{r-M-\sqrt{1-a^2}} \right) \right), \end{aligned}$$

donde  $\mu$  es el momento dipolar que consideraremos paralelo al eje de rotación.

Es importante notar que (tanto en este caso como en el de campo uniforme) las expresiones para  $A_t$  y  $A_\phi$ , únicamente son singulares en la singularidad de curvatura que presenta el espaciotiempo de fondo. Además, el estudio realizado por [130] para el caso dipolar, se puede extender al caso del espaciotiempo de Kerr súper extremo realizando una continuación analítica de las funciones que describen al potencial vector.

## 10.2. Movimiento en el plano ecuatorial

Los aspectos fundamentales del movimiento geodésico en el espaciotiempo de Kerr fueron acuñados en el trabajo pionero de Brandon Carter [30]. En ese trabajo, se demostró que existe una tercera integral de

movimiento en el espaciotiempo de Kerr. Junto con las asociadas a las demás simetrías de este espaciotiempo este descubrimiento permite separar la ecuación de Hamilton-Jacobi, haciendo que sea posible resolver este problema utilizando el método de cuadraturas.

En esta tesis trabajaremos con campos electromagnéticos que no alteran las simetrías del espaciotiempo y que no son generados en forma consistente por la distribución de materia. Por este motivo, junto con la masa en reposo,  $m_0$ , y la carga,  $e$ , de la partícula, se conservan, a lo largo de la trayectoria, el momento angular canónico y la energía que pueden expresarse como:

$$L = U_\phi + eA_\phi, \quad -E = U_t + eA_t,$$

donde las cantidades fueron escritas normalizadas respecto a la masa en reposo de la partícula por lo que la misma no aparece en forma explícita.

A continuación, presentamos las componentes no nulas de la 4-velocidad de una partícula que recorre una de estas trayectorias [124]:

$$U^\phi = \frac{\left(\frac{[\Sigma - 2Mr]U_\phi}{\sin^2\theta} - 2aMrU_t\right)}{\Sigma\Delta}, \quad U^t = -\frac{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta] + 2aMrU_\phi}{\Sigma\Delta}.$$

Es importante remarcar que existe una teoría que permite estudiar trayectorias mucho más generales en este espaciotiempo. No la presentamos ya que para nuestro estudio no resulta necesario. Simplemente mencionaremos que este problema fue, recientemente, resuelto en forma analítica y que las expresiones para las trayectorias pueden ser escritas explícitamente utilizando las funciones  $\mathcal{P}$ ,  $\zeta$  y  $\sigma$  de Weierstrass [134].

Al restringir el estudio a trayectorias ecuatoriales podemos definir un potencial efectivo,  $V_{\text{ef}}$ , que determina la ecuación radial de movimiento [135]. Normalizando respecto de la masa,  $M$ , del objeto compacto (pero preservando la notación que utilizamos hasta el momento), la expresión para el potencial efectivo viene dada por [124]:

$$V_{\text{ef}} = E = -A_t + \frac{K}{R}, \quad (10.1)$$

donde se han definido las cantidades:

$$K = 2a(L - A_\phi) + \sqrt{\Delta(r^2(L - A_\phi)^2 + rR)} \quad R = r^3 + a^2r + 2a^2.$$

### 10.2.1. El caso no magnetizado

Dada la simpleza matemática que involucra, estudiar el movimiento geodésico ecuatorial de partículas masivas en un fondo de Kerr, es útil ya que permite comprender aspectos generales de la teoría sin los cálculos más voluminosos, aunque conceptualmente equivalentes, involucrados en el caso donde un campo de inducción magnética está presente.

Es importante notar que el movimiento de partículas cargadas o neutras en el espaciotiempo de fondo de Kerr es totalmente equivalente ya que la carga de éstas no aparece en las ecuaciones de movimiento por lo que resulta irrelevante. Para estudiar este caso, se trabaja con la expresión para el potencial efectivo (10.1) anulando todas las componentes del potencial vector,  $A_b$ .

Las ecuaciones básicas que definen a las geodésicas circulares ecuatoriales se obtienen al imponer, en las ecuaciones de movimiento, las condiciones  $\dot{r} = 0$  y  $\ddot{r} = 0$  junto con la exigencia de que la trayectoria esté contenida en el plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$ . En el formalismo de potencial efectivo en el que trabajamos, las dos primeras condiciones se traducen a:

$$V_{\text{ef}}(r_c; L, E) = \frac{1}{2}(E^2 - 1), \quad \frac{dV_{\text{ef}}}{dr}\Big|_{r=r_c} = 0, \quad (10.2)$$

donde  $r_c$  denota el radio de una geodésica circular arbitraria. Una vez fijados los parámetros que caracterizan el espaciotiempo estas dos ecuaciones determinan el valor posible para  $r_c$  para un determinado valor de la energía,  $E$ , y de momento angular,  $L$ .

Del mismo modo que se trabaja en mecánica celeste clásica en el problema de dos cuerpos, definiremos una nueva variable radial,  $u = 1/r$ . Luego de realizar este cambio de variable, el sistema de ecuaciones (10.2)

puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -u + \frac{1}{2} [L^2 - a^2(E^2 - 1)] u^2 - (L - aE)u^3 &= \frac{1}{2}(E^2 - 1), \\ -1 + [L^2 - a^2(E^2 - 1)]u - 3(L - aE)u^2 &= 0. \end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones, introduciendo una nueva variable conservada,  $x = L - aE$ , y acomodando (apropiadamente) los términos, se obtienen dos ecuaciones básicas que determinan el momento angular y la energía que posee una partícula que sigue la trayectoria bajo estudio. Las ecuaciones simplificadas son:

$$E^2 = (1 - u) + x^2 u^3, \quad 2xaEu = x^2 u(3u - 1) - (a^2 u - 1).$$

Luego de eliminar  $E$ , se obtiene la siguiente ecuación bicuadrática para  $x$ :

$$u^2 [(3u - 1)^2 - 4a^2 u^3] x^4 - 2u [(3u - 1)(a^2 u - 1) - 2ua^2(u - 1)] x^2 + (a^2 u - 1)^2 = 0,$$

que puede resolverse sin ningún tipo de problemas. De esta forma,  $x^2$  puede expresarse como:

$$x^2 = \frac{(a\sqrt{u} \pm 1)^2}{u(1 - 3u \mp 2a\sqrt{u^3})}, \quad (10.3)$$

donde el signo menos (más) corresponde a órbitas de *rotación directa (retrógrada)*, es decir aquellas en las que el movimiento de la partícula *acompaña (es contrario)* la rotación propia del espaciotiempo de fondo.

Con este estudio se pretende modelar un disco de acreción, por esta razón se debe prestar especial atención a la estabilidad de las órbitas bajo estudio. Luego de realizar este estudio, puede concluirse que, de los dos valores posibles para  $x$  debe elegirse el negativo. De este modo, obtenemos que las expresiones para la energía,  $E$ , y el momento angular,  $L$ , para órbitas estables, circulares y ecuatoriales vienen dadas por:

$$E = \frac{1 - 2u \mp au^{3/2}}{\sqrt{1 - 3u \mp au^{3/2}}}, \quad L = \mp \frac{1 + a^2 u^2 \pm 2au^{3/2}}{\sqrt{u}\sqrt{1 - 3u \mp 2au^{3/2}}}.$$

Continuando con el análisis de estabilidad, también debe exigirse la condición  $d^2V_{\text{ef}}/du^2 \geq 0$  para que la órbita resulte estable. La llamada órbita marginalmente estable (o última órbita circular estable) es aquella para la cual la desigualdad se satura. Esta órbita es particularmente importante, motivo por el cual prestaremos gran atención en ella. Para obtener su expresión, la idea básica es remplazar las expresiones que obtuvimos para  $E$ ,  $L$  y  $x$  en la que define a la uoce. Al resolver la ecuación resultante, obtendremos la expresión para  $u_{\text{uoce}}$ . Realizando este procedimiento, arribamos a la siguiente condición:

$$1 - 3a^2 u^2 - 6u \mp 8au^{3/2} = 0,$$

que, al ser escrita nuevamente en la coordenada radial de Boyer-Lindquist, se vuelve:

$$r^2 - 6r - 3a^2 \mp 8ar^{1/2} = 0, \quad (10.4)$$

donde mantenemos la convención de doble signo que usamos en la ecuación (10.3). Esta ecuación cuártica completa en  $\sqrt{r}$  puede resolverse de manera analítica utilizando procedimientos estándar, la solución que se obtiene puede expresarse como:

$$r_{\text{uoce}} = 3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}, \quad (10.5)$$

donde:

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} \left[ (1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3} \right], \quad Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2}.$$

En el caso de un espaciotiempo de Schwarzschild, se obtiene que  $r_{\text{uoce}} = 6M$ . Para el caso particular del espaciotiempo de Kerr extremo, la última órbita estable en rotación directa tiene un radio  $r_{\text{uoce}} = M$ , mientras que para las que rotan en forma retrógrada se encuentra ubicada en  $r_{\text{uoce}} = 9M$ .

### 10.2.2. El caso magnetizado

Para estudiar las trayectorias de partículas cargadas en presencia de un campo externo el análisis que se realiza es equivalente al anterior. El único cambio en relación al caso no magnetizado, es que las expresiones con las se debe trabajar son más complejas, lo que hace que los cálculos sean más voluminosos y que el análisis posterior se complique.

Nuestro estudio busca obtener una forma analítica que permita cuantificar el efecto que produce la presencia de un campo de inducción magnética sobre las trayectorias circulares ecuatoriales de partículas cargadas. Para que dicho análisis sea factible, en esta tesis estudiaremos el caso en el que el acoplamiento entre la materia y el campo externo (caracterizado por un parámetro  $\lambda$ ) es pequeño. Esta restricción permitirá realizar un estudio perturbativo sin el cual el estudio analítico del problema no resulta factible. Como se argumenta en [136], en el ámbito astrofísico, donde se espera que los discos de acreción sean globalmente neutros, este acoplamiento será débil aún para campos de inducción magnética con amplitudes  $B \sim 10^8$  Gauss. Esta situación suele denominarse: aproximación de *discos fluidos*. Veremos más detalles sobre la interpretación y características del parámetro  $\lambda$  en el [Capítulo 11](#).

Intentando lograr una exposición clara de las dos configuraciones de campo que se estudiarán en detalle, presentamos cada una de ellas en una nueva sección.

## 10.3. Movimiento en el plano ecuatorial: campo uniforme

Para estudiar el caso magnetizado, redefiniremos la expresión del potencial efectivo (de modo que coincida, en el caso no magnetizado, con la presentada en el libro de Hobson y colaboradores (VII) de [1]). Cambiaremos la forma de denotarlo y ahora lo haremos con  $U_{\text{ef}}$ :

$$U_{\text{ef}} = \left( -\frac{1}{4u} - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{8u^2} - \frac{a^2}{8} (3a^2 + 4) u^2 + a^2 u + \frac{1}{4} a^4 u^3 \right) \lambda^2 + \left( \frac{a^2}{2} (Ea - x) u^2 + (-Ea + x) u + \frac{1}{2} Ea - \frac{x}{2} \right) \lambda - x^2 u^3 + \left( \frac{x^2}{2} + xEa + \frac{a^2}{2} \right) u^2 - u, \quad (10.6)$$

donde,  $\lambda$  es el parámetro que mide el acoplamiento entre el campo externo y la carga efectiva de los elementos de fluido que conforman al disco. Para esta configuración de campo tenemos que:

$$\lambda = \frac{e}{m_0} B_0 M,$$

donde,  $e/m_0$  es la carga efectiva por unidad de masa en reposo del material que forma el disco,  $B_0$  es la intensidad del campo de inducción magnética externo y  $M$ , la masa del objeto compacto.<sup>1</sup>

Al imponer la condición de circularidad sobre las trayectorias, obtenemos la siguiente expresión para la derivada del potencial efectivo (10.6):

$$\frac{dU_{\text{ef}}}{du} = \left( \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{4u^3} - \frac{1}{4} a^2 (3a^2 + 4) u + a^2 + \frac{3}{4} a^4 u^2 \right) \lambda^2 + (a^2 (Ea - x) u - Ea + x) \lambda - 3x^2 u^2 + (x^2 + 2xEa + a^2) u - 1. \quad (10.7)$$

Las ecuaciones (10.6) y (10.7), sujetas a la condición de trayectoria circular pueden ser resueltas para obtener  $E$  y  $x$  como función de  $u$ . El procedimiento a seguir para obtener la solución deseada posee los siguientes puntos destacables. La ecuación  $\frac{dU_{\text{ef}}}{du} = 0$  es lineal en  $E$ . Si se inserta la expresión obtenida para  $E$  en una combinación apropiada de las ecuaciones (10.6) y (10.7), se llega a una ecuación cuártica completa que define a  $x$ . No presentamos dicha ecuación, a la que denominaremos *ecuación-x*, por lo extensa que resulta su expresión. Generalmente, este tipo de ecuaciones se resuelven en forma numérica sin mayores dificultades, en esta tesis adoptaremos otra lógica de trabajo. La solución exacta al problema en ausencia de campo externo, es decir, cuando  $\lambda = 0$ , es conocida (ver la [Subsección 10.2.1](#) para más detalles). Esto nos permite construir soluciones aproximadas, utilizando teoría de perturbaciones, para casos en los que  $\lambda \ll 1$ .

El esquema perturbativo se basa en las siguientes ideas generales:

<sup>1</sup>Notar que todas las cantidades deben ser expresadas en unidades geométricas, en las que la masa y la carga tiene unidad de longitud mientras que el campo de inducción magnética de inverso de longitud.

- Desarrollar en serie de Taylor en torno a  $\lambda = 0$  la ecuación- $x$  que tenemos que resolver.
- Obtener, utilizando el algoritmo de Newton para resolver soluciones a ecuaciones trascendentes, las raíces de la ecuación aproximada, utilizando como semilla la solución exacta correspondiente al caso no magnetizado.

Como resultado se obtienen las soluciones deseadas como una serie de potencias en  $\lambda$ . Los desarrollos en serie se truncan a un orden predeterminado. En nuestro caso trabajaremos a primer orden, manteniendo el siguiente término como estimador del error.

### 10.3.1. Familia de órbitas en rotación directa

Si bien existen dos familias de orbitas, las que describen movimientos en rotación directa y aquellas en las que el movimiento es retrógrado, las primeras poseen mayor interés astronómico para la construcción de modelos de discos de acreción.

La idea de esta parte del trabajo es, utilizando el esquema iterativo, lograr soluciones aproximadas a las expresiones para los radios de las órbitas relevantes. Como punto de partida, se utilizará el hecho de que la solución exacta en el caso que no hay campo externo es conocida.

El modo de trabajo es análogo al presentado para el caso donde no hay campo de inducción magnética presente, pero el álgebra involucrada es más compleja. Sin embargo, ayudados por programas computacionales de manipulación algebraica, hemos sido capaces de obtener las primeras correcciones a dichas órbitas en forma analítica.

Para ordenar la presentación, primero desarrollaremos el caso de las órbitas acotadas y luego el asociado con la última órbita circular estable.

#### Las órbitas acotadas

Las órbitas acotadas son aquellas para las cuales la constante de integración asociada con la energía por unidad de masa,  $E$ , es menor o igual a 1. Para esta familia de órbitas, presentaremos gráficos de las menores distancias al periastro,  $r_{\text{aco}}$ . Dada su geometría, todas estas órbitas tendrán valores para la coordenada radial  $r > r_{\text{aco}}$ , denominaremos a ésta la *menor órbita acotada* para trayectorias marginalmente acotadas, es decir para las cuales  $E = 1$ .

Usando la coordenada radial  $u$ , definida previamente, las posiciones de las órbitas acotadas en ausencia de campo de inducción magnética externo vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$u_a^0 = \frac{1}{(\sqrt{1+a}-1)^2}, \quad u_b^0 = \frac{1}{(\sqrt{1+a}+1)^2}.$$

Por lo general, se descarta la importancia de la solución  $u_a^0$  ya que la misma se encuentra detrás del horizonte de eventos de agujeros negros. Como en esta tesis realizamos estudios del espaciotiempo de Kerr aún en el caso súper extremo, analizaremos el comportamiento de ambas soluciones.

Obtener la condición para que una órbita sea circular se reduce a resolver la ecuación- $x$ , una ecuación de orden 4 en la variable  $x$ . El procedimiento utilizado en trabajos previos es resolverla en forma numérica. En esta tesis, utilizaremos un esquema iterativo para, a partir de las soluciones conocidas para el caso no magnetizado,  $x_{a,b}^0$ , obtener correcciones analíticas a las mismas.

Imponiendo las condiciones de circularidad para las órbitas, obtenemos expresiones para las cantidades conservadas  $x = x(u; a, \lambda)$  y  $E = E(u, x; a, \lambda)$ . Como estamos buscando los casos límites (es decir cuando  $E = 1$ ) debemos plantar, además, la restricción  $E(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0) = 1$ . Al momento de hacer los desarrollos en serie de Taylor en torno a  $\lambda = 0$ , utilizaremos esta condición en forma explícita. A primer orden en  $\lambda$ , la ecuación a partir de la cual puede obtenerse la modificación  $u_{a,b}^0$  se escribe como:

$$1 = E(u_{a,b}^0 + \epsilon_{a,b}^U, x^0; a, \lambda = 0) + \lambda \left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = E(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0) + \epsilon_{a,b}^U \left. \frac{dE}{du_{a,b}} \right|_{\epsilon_{a,b}^U=0} + \lambda \left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=0},$$

donde:

$$\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \equiv \frac{dE}{d\lambda}(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0), \quad \left. \frac{dE}{du_{a,b}} \right|_{\epsilon_{a,b}^U=0} \equiv \frac{dE}{du}(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0).$$

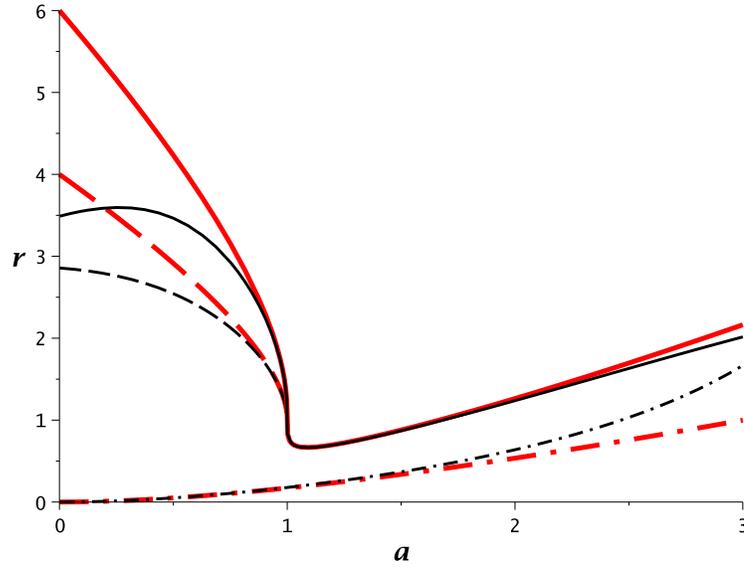


Figura 10.1: Para una configuración de campo de inducción magnética externo uniforme, se presentan los radios de la última órbita circular estable y la de la menor órbita acotada como función del parámetro de rotación,  $a$ , para dos diferentes valores de  $\lambda$ . Con color rojo y trazos gruesos se presentan las curvas correspondientes al caso no magnetizado ( $\lambda = 0$ ). En color negro y trazos finos las correspondientes al caso donde  $\lambda = 0.1$ . Los trazos continuos corresponden al radio de la última órbita circular estable mientras que las dibujadas con líneas discontinuas o líneas con puntos intercalados corresponden a las distancias mínimas en el periastro de las órbitas marginalmente acotadas ( $E = 1$ ).

A partir de estas ecuaciones se puede obtener la expresión para la primera corrección a los radios límites de las órbitas marginalmente acotadas:

$$\epsilon_{a,b}^U = -\lambda \frac{\left. \frac{dE}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}}{\left. \frac{dE}{du_{a,b}} \right|_{\epsilon_{a,b}^U=0}}. \quad (10.8)$$

En la [Figura 10.1](#), usando líneas finas a trazos y a trazos con puntos intercalados de color negro presentamos, como función del parámetro de rotación, la menor distancia al objeto central para trayectorias marginalmente acotadas, utilizando la expresión (10.8) para el caso  $\lambda = 0.1$ . En líneas gruesas de color rojo se presentan las curvas correspondientes a  $\lambda = 0$ . Los resultados analíticos obtenidos en este trabajo concuerdan, cualitativamente, con los obtenidos de forma numérica en [125]. De esta manera, mostramos que el tratamiento perturbativo resulta aplicable para pequeños valores de  $\lambda$ . Para la órbita que hemos denotado con  $r_a = 1/u_a$ , la concordancia cuantitativa es muy buena en el rango  $0.5 < a < 1$ , donde el error no supera el 5% cuando  $\lambda \lesssim 1$ . No conocemos trabajos previos que hayan estudiado el efecto para el caso súper extremo por lo que no tenemos como comparar nuestros resultados. Algo similar ocurre para el caso de la órbita  $r_b = 1/u_b$ .

### La última órbita circular estable

Los argumentos y forma de trabajo presentadas para el caso de las órbitas acotadas pueden usarse, sin modificaciones de fondo, para atacar el estudio de los cambios que produce la presencia de un campo de inducción magnética en la posición de la uoce. Recordemos que en el caso  $\lambda = 0$ , la posición de la misma viene dada por:

$$u_{uoce}^0 = \left[ 3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right]^{-1},$$

donde:

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} \left[ (1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3} \right], \quad Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2}.$$

La principal diferencia con el estudio presentado anteriormente es que al calcular la corrección lineal en  $\lambda$  para la posición de estas órbitas se obtiene que la misma es nula ya que, como puede comprobarse analíticamente,

$\frac{dE}{d\lambda}(u_{\text{uoce}}^0, x^0; a, \lambda = 0)$  se anula idénticamente. Por este motivo para obtener la primer corrección no nula, resulta necesario calcular el segundo término en el desarrollo en serie de Taylor. De esta forma, se obtiene que la primera corrección no nula a  $u_{\text{uoce}}^0$  viene dada por:

$$\epsilon_{\text{uoce}}^U = -\frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\frac{d^2 E}{d\lambda^2}(u_{\text{uoce}}^0, x^0; a, \lambda = 0)}{\left. \frac{dE}{du_{\text{uoce}}} \right|_{\epsilon_{\text{uoce}}^u = 0}}(u_{\text{uoce}}^0, x^0; a, \lambda = 0). \quad (10.9)$$

En la **Figura 10.1** presentamos la corrección a la última órbita circular estable, utilizando (10.9) para  $\lambda = 0.1$ . La curva continua de trazo fino y color negro representan el caso magnetizado, mientras que para representar el caso no magnetizado se utiliza línea continua de trazo grueso y color rojo. Para  $a < 1$ , comparaciones con los resultados obtenidos en [125] muestran que los errores no superan el 2% cuando  $\lambda \lesssim 0.01$ . No presentamos en la **Figura 10.1** la curva correspondiente a este valor de  $\lambda$  ya que la misma se solapa con la correspondiente al caso no magnetizado.

## 10.4. Movimiento en el plano ecuatorial: campo dipolar

La segunda configuración de campo que estudiaremos es la dipolar. Los trabajos [132] y [133] sirven para fortalecer la relevancia de esta configuración de campo en el contexto de un objeto compacto en rotación con un disco de acreción. En ellos, los autores muestran, luego de resolver las ecuaciones relativistas de la magnetohidrodinámica en el espaciotiempo de Kerr, que dicho sistema puede dar origen a una configuración dipolar de campo de inducción, al menos, en la región cercana a la uoce.

Siguiendo el trabajo [130], expresamos el potencial vector de la siguiente forma:

$$A_t = -\frac{3\lambda a}{4r} \left( \frac{r-1}{(1-a^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{r-1+\sqrt{1-a^2}}{r-1-\sqrt{1-a^2}} \right) - \frac{2}{1-a^2} \right) \quad (10.10)$$

$$A_\phi = -\frac{3\lambda}{8} \left( \frac{2}{1-a^2} \left( 1+r+2\frac{a^2}{r} \right) - \frac{r^2+a^2-2\frac{a^2}{r}}{(1-a^2)^{3/2}} \ln \left( \frac{r-1+\sqrt{1-a^2}}{r-1-\sqrt{1-a^2}} \right) \right), \quad (10.11)$$

donde,  $\mu$  es el momento dipolar asociado con el campo de inducción magnética externo,  $e/m_0$  la carga efectiva por unidad de masa en reposo del material que forma el disco de acreción y  $M$  y  $a$  la masa y el parámetro de rotación del objeto compacto. En este caso, el parámetro de acoplamiento entre el campo externo y la materia del disco,  $\lambda$ , viene dado por:

$$\lambda = \frac{e}{m_0} \frac{\mu}{M^2}.$$

Resulta crucial notar lo siguiente: los argumentos de la función logarítmica que aparecen en las expresiones de las componentes no nulas del potencial vector (10.10-10.11) se vuelven imaginarios puros cuando se pasa del régimen en que el espaciotiempo de Kerr representa un agujero negro ( $a \leq 1$ ), al régimen súper extremo ( $a > 1$ ). Esto no impide utilizar las mismas expresiones para el segundo caso ya que, continuando analíticamente la expresión para cada componente, puede mostrarse que las mismas son siempre reales. Para comprender esto en forma sencilla, notemos lo siguiente: el argumento de la función logarítmica que aparece en las expresiones (10.10-10.11) es, sin importar el valor de  $a$ , un número complejo de módulo unidad. Así, tomando el valor principal de la función logarítmica compleja, vemos que las expresiones para las componentes del potencial vector son reales para todo valor del parámetro de rotación.

### 10.4.1. La familia de órbitas en rotación directa

Para la configuración dipolar de campo externo, trabajamos de la misma manera que para el caso de campo uniforme pero con expresiones que son más complicadas. A pesar esto, fue posible obtener las correcciones a primer orden en  $\lambda$  para los radios que estudiamos, tanto en el caso no magnetizado como en el de campo de inducción magnética externo uniforme.

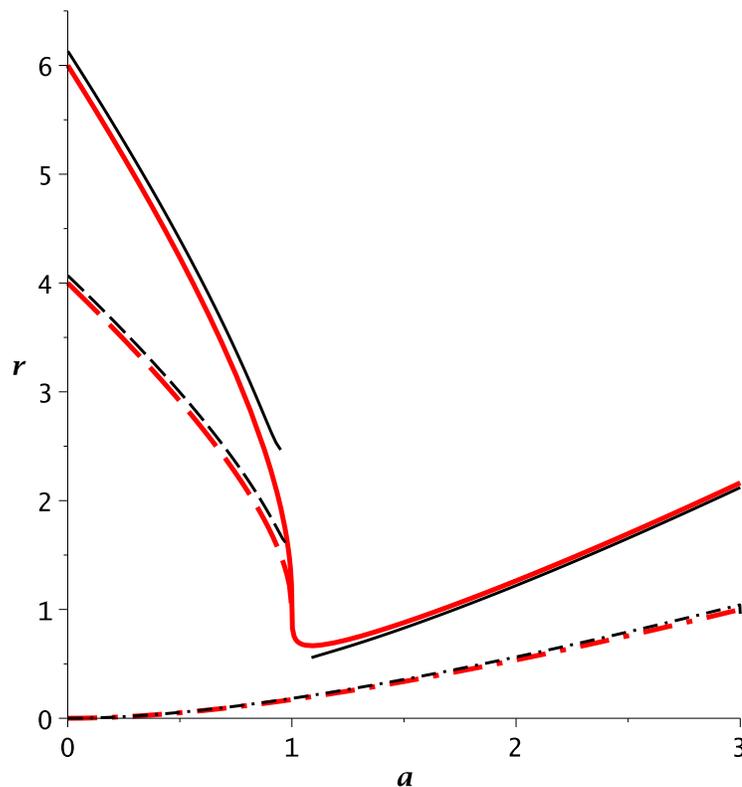


Figura 10.2: Radios de la última órbita circular estable y la de las órbitas marginalmente acotadas como función del parámetro de rotación,  $a$ , para una configuración de campo de inducción magnética externo dipolar para dos diferentes valores de  $\lambda$ . Con color rojo y trazos gruesos se presentan las curvas correspondientes al caso no magnetizado ( $\lambda = 0$ ) y en color negro y trazos finos las correspondientes al caso donde  $\lambda = 0.1$ . Los trazos continuos corresponden al radio de la última órbita circular estable mientras que las trazadas con líneas discontinuas o líneas con puntos intercalados corresponden a las mínimas distancias perihélicas de las órbitas parabólicas acotadas caracterizadas por  $E = 1$ .

### Órbitas acotadas

Analizaremos atentamente a las órbitas marginalmente acotadas para las cuales  $E(u, x; a, \lambda) = 1$ . Haciendo los correspondientes desarrollos en serie de Taylor en torno a  $\lambda = 0$ , y utilizando como “semillas” las soluciones para el caso no magnetizado, logramos obtener la corrección a primer orden en  $\lambda$  a la posición de las órbitas marginalmente acotadas,  $u_{a,b}^0$ . La misma puede ser expresada como:

$$\epsilon_{a,b}^D = -\lambda \frac{\frac{dE}{d\lambda}(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0)}{\frac{dE}{du_{a,b}}(u_{a,b}^0, x^0; a, \lambda = 0)}. \quad (10.12)$$

En la [Tabla 10.1](#) presentamos la posición de máximo acercamiento al objeto compacto para órbitas marginalmente acotadas para diferentes valores de  $a$  y  $\lambda$ . Dichos resultados fueron obtenidos utilizando la corrección (10.12) y comparados, cuando es posible, con resultados previos presentados en [136].

### La última órbita circular estable

Sin entrar en detalles diremos que utilizando un procedimiento análogo al presentado para el caso en el que el campo de inducción magnética uniforme, obtuvimos la primera corrección no nula a la posición de la uoce. Remarcamos que en este caso, a diferencia de lo ocurrido cuando analizamos la configuración uniforme de campo externo, la primera corrección no nula a la uoce es lineal en  $\lambda$ .

Presentamos, en la [Figura 10.2](#), los resultados obtenidos para la uoce y las de máximo acercamiento en el pariaastro para las órbitas marginalmente acotadas, ambas como función del parámetro de rotación y

$a$	$\lambda$	$r_{\text{aco}}$	$r_{\text{aco}}$ [136]	$r_{\text{uoce}}$	$r_{\text{uoce}}$ [136]
0	0.00	4.000	-	6.000	-
	0.01	4.007	-	6.013	-
	0.10	4.069	-	6.133	-
0.1	0.00	3.787	3.797*	5.669	5.688*
	0.01	3.797	3.804	5.683	5.688
	0.10	3.804	3.866	5.806	5.821
0.5	0.00	2.914	2.914*	4.233	4.225*
	0.01	2.922	2.922	4.249	4.249
	0.10	2.996	2.993	4.399	4.390
0.9978	0.00	1.096	1.096*	1.201	1.250*
	0.01	1.164	1.150	1.658	1.400
	0.10	2.638	1.087	-	1.139

Tabla 10.1: Comparación entre los resultados obtenidos en esta tesis con otros previamente publicados. Presentamos, para 3 valores diferentes de  $\lambda$  y diferentes valores del parámetro de rotación,  $a$ , la posición de los radios de la menor distancia en el pariaastro para órbitas acotadas,  $r_{\text{aco}}$ , y de la última órbita circular estable,  $r_{\text{uoce}}$ . Los valores numéricos marcados con un \* fueron tomados de [136] para  $\lambda = 0.00001$  ya que el algoritmo numérico utilizado por los autores no es capaz de analizar el caso  $\lambda = 0$ . Salvo para valores cercanos a  $a = 1$ , la concordancia con los resultados de [136] es buena, con errores relativos menores al 1 % para valores de  $a < 0.5$ .

para el caso no magnetizado y cuando  $\lambda = 0.1$ . De la Figura 10.2 se desprende que, al contrario de lo que ocurre para un campo de inducción magnética uniforme, en el caso  $a \leq 1$  todas las curvas de color rojo (caso no magnetizado) se encuentran por debajo de las de color negro (caso magnetizado). Por este motivo, concluimos que la presencia del campo externo hace que los radios límite aumenten. Cuando se estudian los casos en los que  $a > 1$  este comportamiento es el contrario para la última órbita circular estable.

## 10.5. Eficiencia para la acreción

La acreción de materia por objetos compactos es la forma más eficiente de convertir masa en reposo (energía de unión gravitacional) en energía de radiación. Éste es el principal motivo por el que se haya propuesto una relación entre la potencia de emisión de un chorro relativista y la posición de la última órbita estable.

Una cantidad que resulta relevante en estudios relacionados a procesos de acreción es la denominada *eficiencia para la acreción*, definida como  $\eta = 1 - E_{\text{uoce}}$ , donde  $E_{\text{uoce}}$  es la energía asociada con la última órbita circular estable. Este parámetro mide cuán eficiente es un objeto compacto para convertir en radiación la masa en reposo de las partículas que acreta.

Se sabe que, cuando se analizan órbitas en rotación directa, este parámetro presenta un salto en  $a = 1$  (ver, por ejemplo, el trabajo reciente [137]). Se tiene que, para un agujero negro de Kerr extremo el valor numérico de la eficiencia para la acreción viene dado por:

$$\eta_{a=1-} = 100(1 - 3^{-1/2}) \% \sim 42 \%,$$

mientras que para una singularidad desnuda de Kerr extrema se tiene que:

$$\eta_{a=1+} = 100(1 + 3^{-1/2}) \% \sim 158 \%.$$

Esta es una de las razones por la cual observables asociados con la eficiencia de acreción puede ser una herramienta útil a la hora de descartar, a partir de datos observacionales, modelos teóricos de objetos completamente colapsados.

Presentamos, a continuación, resultados relacionados con la variación de la eficiencia de acreción que se produce como consecuencia de la existencia de un campo de inducción magnética externo.

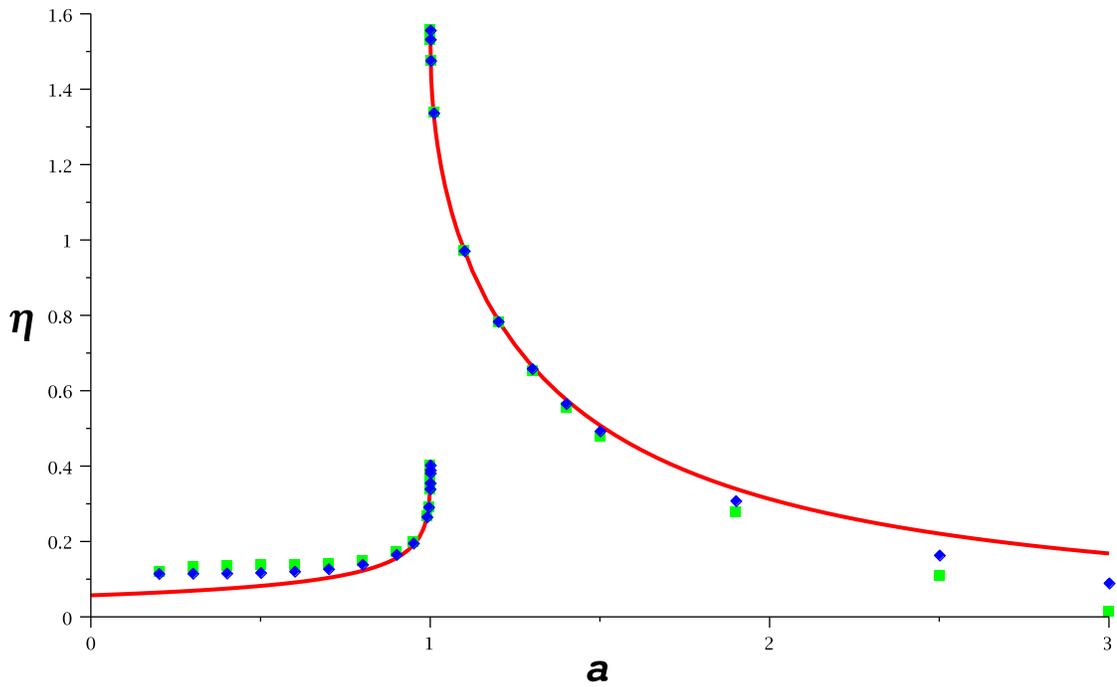


Figura 10.3: Eficiencia para la acreción para la última órbita circular estable como función del parámetro de rotación,  $a$ , para diferentes valores de  $\lambda$ . Con línea continua roja representamos el caso donde no hay campo externo. Con diamantes de color azul (◆) nuestros resultados analíticos para el caso  $\lambda = 0.05$  y con cuadrados de color verde (■) los correspondientes a  $\lambda = 0.1$ . Vemos que para agujeros negros la presencia de un campo externo aumenta la eficiencia para la acreción, mientras que para las singularidades desnudas ocurre lo contrario. En el límite  $a = 1$ , los efectos causados por el campo de inducción magnética uniforme externo se vuelven irrelevantes.

Los modelos más aceptados de discos de acreción Keplerianos tienen un borde interno localizado en la uoce. Por este motivo los efectos relativistas no pueden ser despreciados. La teoría más simple sobre procesos de acreción afirma que la luminosidad de este tipo de discos viene dada, en forma aproximada, por:

$$L = \eta \frac{dm}{dt},$$

donde la cantidad  $\frac{dm}{dt}$  es la tasa de acreción de materia. Esta expresión muestra que, fijada una tasa de acreción, discos formados en torno a un agujero negro o a una singularidad desnuda presentarán diferentes luminosidades debido a las diferencias que existen en  $\eta$  para los diferentes modelos. Esta diferencia puede alcanzar un factor 4.

En la [Figura 10.3](#) se muestra la eficiencia para la acreción  $\eta$  como función del parámetro de rotación para 3 valores diferentes de  $\lambda$ , asumiendo una configuración de campo externo uniforme sobre el disco. Puede verse que la existencia de un campo externo de inducción magnética uniforme no modifica, al menos en el régimen perturbativo  $\lambda \ll 1$ , la eficiencia de acreción en la interfaz agujero negro - singularidad desnuda respecto al caso no magnetizado. Entendemos este resultado como una muestra de que dado que la uoce se encuentra en una región donde los efectos de curvatura son grandes, los mismos dominan sobre los producidos por el campo externo débil que estamos analizando.

Realizar mediciones directas de este parámetro es una tarea extremadamente compleja. Los motivos de esta dificultad radican en el gran número de factores que pueden alterar los cálculos y las estimaciones de cantidades físicas necesarias. En [\[138\]](#) se presenta una propuesta de sobrellevar estas dificultades realizando un estudio en diferentes bandas del espectro electromagnético. De resultar aplicable, los estudios relacionados con el cálculo de eficiencias para la acreción teóricas podrían ser comparados y, así, volverse una herramienta útil para diferenciar entre diferentes modelos de objetos compactos.



## Capítulo 11

# Alimentando al monstruo: discos de acreción en el espaciotiempo de Kerr

*Como me quedaba el reloj pulsera, vi que eran las once de la noche. Rodeé con mi brazo la cintura de Irene (yo creo que ella estaba llorando) y salimos así a la calle. Antes de alejarnos tuve lástima, cerré bien la puerta de entrada y tiré la llave a la alcantarilla. No fuese que algún pobre diablo se le ocurriera robar y se metiera en la casa, a esa hora y con la casa tomada.*  
Julio Cortázar, “Casa Tomada” en Bestiario.

En este capítulo estudiaremos fenómenos astronómicos relacionados con el proceso de acreción de materia por un objeto compacto y sus implicaciones observacionales (para una mirada pictórica de este fenómeno ver la [Figura 9.2](#)). El desarrollo de modelos teóricos resulta importante ya que los mismos son fundamentales para extraer, a partir de las observaciones, información sobre el estado y las características de objetos súper compactos. En esta dirección, desarrollamos un modelo de disco de acreción delgado formado en un espaciotiempo de Kerr inmerso en una región con un campo de inducción magnética externa. Utilizaremos los resultados obtenidos en el [Capítulo 10](#) para generalizar los modelos de discos delgados relativistas y, de esta forma, ampliar la base teórica contra la cual contrastar los datos observacionales disponibles. Al tener en cuenta los efectos producidos por la presencia de un campo de inducción magnética externo, nuestros modelos pueden resultar útiles para realizar estimaciones de este parámetro físico.

Dado que el objetivo final de este trabajo es lograr comparar los resultados teóricos con datos observacionales, en este capítulo no utilizaremos unidades geométricas como en el resto de esta tesis.

### 11.1. Discos delgados: modelos famosos

Pueden establecerse dos situaciones límites de los modelos de discos de acreción:

1. el disco es *ópticamente grueso*, por lo que la radiación alcanza, junto con el material acretado, un estado de equilibrio térmico local antes de abandonar el disco. En esta situación se tiene que  $T_{\text{rad}} \sim T_{\text{CN}}$ , y
2. cuando la radiación no interactúa de ninguna manera con el material que está siendo acretado por lo que  $T_{\text{rad}} \sim T_{\text{ter}}$ . Cuando se da esta situación se dice que el disco es *ópticamente delgado*.

Es de esperar que en una situación real, en la que el material que irradia puede ser caracterizado con una única temperatura,  $T_{\text{rad}}$ , se encuentre entre las correspondientes a los dos casos límite.

Analicemos los valores típicos de estas temperaturas. Para una estrella de neutrones de una masa solar que se encuentre emitiendo en el límite de Eddington, pueden obtenerse las siguientes estimaciones para las cotas de las energías,  $h\bar{\nu}$ , de los fotones emitidos:

$$1 \text{ keV} \lesssim h\bar{\nu} \lesssim 50 \text{ MeV}.$$

Se espera que resultados similares sean ciertos para los casos en los que la acreción ocurre sobre objetos completamente colapsados por efecto de la gravedad. Vemos, por lo tanto, que las estrellas de neutrones y objetos ultra compactos que estén acretando materia son luminosos en el rango de energías que van desde los rayos X medios a los duros (e inclusive los rayos  $\gamma$ ).

Antes de presentar algunos modelos de discos de acreción famosos, introducimos una serie de conceptos básicos sobre el proceso de acreción de materia.

En el marco de la teoría Newtoniana de la gravitación, un conjunto de partículas en trayectorias entorno de un objeto central sufren colisiones entre sí, disipando energía pero conservando su momento angular. Esto hace que las trayectorias se vuelvan circulares.<sup>1</sup> Al alcanzar esta situación, la frecuencia de rotación de cada partícula alrededor del objeto central decrece con la distancia. Al mismo tiempo, las partículas ubicadas en órbitas internas aceleran, por rozamiento, a las ubicadas en capas externas, transfiriendo momento angular hacia las regiones externas y haciendo que el flujo de materia ocurra hacia el interior.

Además de estas hipótesis, suele realizarse una relacionada con aspectos geométricos del disco. Modelos muy utilizados son los de *disco delgado*, es decir, aquellos en los que la materia se encuentra concentrada sobre el plano ecuatorial y en los que su *extensión radial* es mucho mayor que la *extensión vertical*.

Al estudiar discos delgados en el marco de la teoría general de la relatividad, el material no puede transferirse a órbitas circulares más allá de la uoce. Esto sirve para justificar el hecho que la gran mayoría de los modelos teóricos de discos de acreción suponen que la materia que es acretada se encuentra en estado estacionario y que mantiene simetría axial durante dicho proceso. De esta manera, cualquier cantidad física en un disco de acreción depende de dos variables: la altura respecto al plano ecuatorial y la distancia radial al eje de simetría.

Los fundamentos básicos de la teoría de discos de acreción en el marco de la teoría general de la relatividad fueron acuñados por Rashid Alievich Sunyaev, Nikolai Ivanovich Shakura, Don Nelson Page, Igor Dmitrievich Novikov y Kip Stephen Thorne a mediados de la década de 1970 en los trabajos [139, 140, 141]. Los dos primeros autores consideraron materia rotando en órbitas Keplerianas circulares que, debido a procesos viscosos pierden momento angular, por lo que se acercan hacia el objeto central siguiendo un movimiento en forma de espiral. En este proceso se libera energía gravitacional, esto hace que la energía cinética del plasma aumente, por lo que el material dentro del disco se calienta emitiendo radiación térmica. Los otros tres autores realizaron un estudio similar en el marco de la teoría general de la relatividad considerando como espaciotiempo de fondo al de Kerr. Supusieron que el plano central del disco de acreción y el plano ecuatorial del espaciotiempo son coincidentes. Postularon que las partículas que conforman el disco de acreción siguen trayectorias geodésicas por lo que los efectos gravitatorios son dominantes frente a otros, como los gradientes de presión.

En este marco, el problema con el que se debe lidiar es resolver *simultáneamente* el sistema de ecuaciones algebraicas y diferenciales compuesto por: la ecuación de conservación de la masa, la de conservación de la componente radial del momento lineal, la de conservación del momento angular, la de equilibrio vertical y la de conservación de la energía. Este problema, junto con una serie de condiciones de contorno y de regularidad apropiado, puede llevarse a la forma de un problema de autovalores que fijan el valor del momento angular en el radio interno del disco. Este valor, que no puede conocerse *a priori*, está asociado con la solución al conjunto de ecuaciones que nos provee la estructura y la dinámica completa del disco de acreción [142].

### 11.1.1. Modelo de Shakura-Sunyaev

En su trabajo pionero<sup>2</sup> [139] Shakura y Sunyaev, lograron transformar el sistema de ecuaciones que describen la física de discos de acreción delgados en un sistema de ecuaciones algebraicas que, sorprendentemente, puede ser resuelto en forma analítica.

Las hipótesis de trabajo que agregan son:

- las partículas siguen trayectorias circulares obedeciendo las leyes de Kepler,
- los gradientes de presión y de velocidad radiales son nulos y

<sup>1</sup>Recordar que las órbitas circulares son las de menor energía para un dado un momento angular.

<sup>2</sup>Sin lugar a dudas una de las publicaciones en astronomía (junto con los trabajos relacionados con la detección del fondo de radiación cósmica y las mediciones de la expansión acelerada del universo) a partir de la cual se han generado más trabajos de investigación.

- el borde interno del disco de acreción coincide con la última órbita circular estable.

Esta última hipótesis ha sido puesta a prueba en forma repetida a través de trabajos numéricos (ver, por ejemplo, [143] y referencias allí mencionadas).

Por último, mencionamos que en [139], los autores suponen que la advección no juega un rol importante en los procesos de enfriamiento, por este motivo no se los considera en la ecuación de conservación de la energía.

Otro tipo de modelos teóricos en los que el flujo de acreción está dominado por la advección son los llamados modelos FADA<sup>3</sup> que fueron desarrollados en un gran número de trabajos científicos (ver, por ejemplo, [144] y referencias allí mencionadas).

### 11.1.2. Modelo de Novikov-Page-Thorne

Presentaremos aspectos generales del modelo desarrollado por Don Nelson Page y Kip Stephen Thorne [140] que plantea importantes mejoras al desarrollado, unos años antes, por Igor Dmitriyevich Novikov y el mismo Thorne [141].

Las hipótesis centrales realizadas por los autores en su trabajo original pueden resumirse en el siguiente listado:

- Si bien gran parte del trabajo resulta válida para geometrías más generales, supondremos que el objeto central puede describirse a través del espaciotiempo de Kerr.
- Dada su pequeña masa en comparación con la del objeto central, el disco no altera la geometría de fondo en el que reside.
- El plano central del disco coincide con el plano ecuatorial del espaciotiempo de fondo.
- El disco de acreción es delgado, por lo que en todas las componentes del tensor métrico y en las restantes cantidades relacionadas con la geometría de este espaciotiempo se pueden utilizar las expresiones ecuatoriales.
- Existe una escala temporal lo suficientemente pequeña como para poder suponer que la geometría exterior se mantiene invariante durante la misma pero lo suficientemente grande como para que, en una dada posición radial,  $r$ , la cantidad de masa que fluye hacia el interior es grande si se la compara con la contenida en el interior de un anillo de radios  $r$  y  $2r$ .
- Luego de realizar el proceso de promediado (tanto temporal como en la coordenada acimutal) las partículas describen trayectorias geodésicas circulares en el plano ecuatorial. Así, para estas partículas queda determinada su energía en el infinito,  $E^\dagger$ , su momento angular específico,  $L^\dagger$ , y su velocidad angular,  $\Omega$ . Puede concluirse, entonces, que la energía interna de las partículas puede despreciarse frente a la energía potencial gravitatoria. Es decir, a medida que las partículas son lentamente acretadas, liberan exclusivamente energía gravitatoria.
- Salvo en la dirección vertical, el flujo de calor dentro del disco puede despreciarse.
- El único tensor de energía-impulso temporalmente promediado que sobrevive en la cara externa del disco es el asociado a los fotones. Este modelo descarta, por este motivo, la posibilidad de analizar ondas de gravedad asociadas con procesos que ocurran en el disco o que dicho disco posea un campo magnético extendido.<sup>4</sup> Esto implica que los fotones son emitidos, en promedio, en forma vertical cuando se los está observando desde el sistema localmente en reposo respecto al gas que se encuentra orbitando.
- No se considera el efecto de calentamiento producido en el disco por fotones emitidos por él mismo y que, por efectos de la curvatura del espaciotiempo de fondo, son direccionados nuevamente hacia el disco.

<sup>3</sup>Más conocidos por la sigla correspondiente a su nombre en inglés, *Advection Dominated Accretion Flow*, ADAF.

<sup>4</sup>Nuestro estudio posterior de discos magnetizados (ver la [Sección 11.3](#)), puede ser considerado como una pequeña perturbación a esta situación.

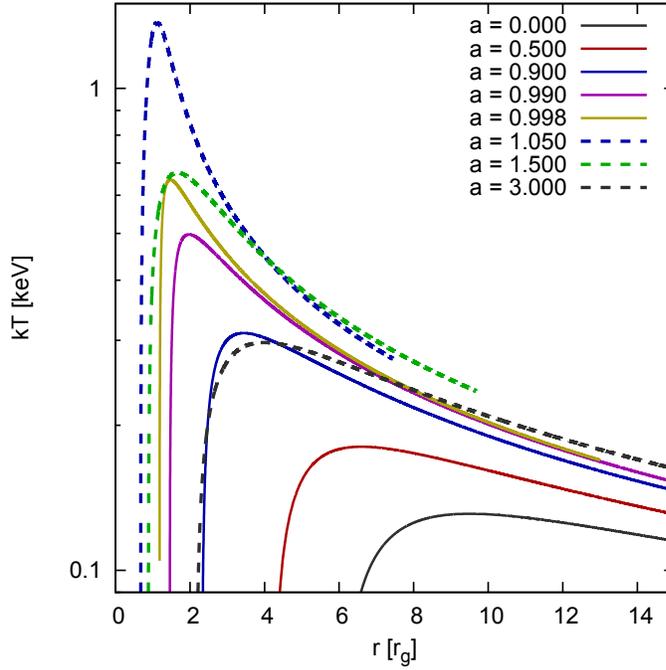


Figura 11.1: Temperatura en función del radio para diferentes modelos de discos de acreción. Se presenta la variación del perfil de temperaturas con el parámetro de rotación del objeto central. Con líneas continuas de diferentes colores se presentan los resultados correspondientes a discos de acreción formados en torno a agujeros negros, mientras que los asociados modelos de objetos centrales representados por singularidades desnudas se muestran con líneas punteadas.

Estas hipótesis permiten obtener el flujo de energía saliente por la cara superior del disco medido por un observador ubicado sobre esa superficie y que se encuentra en una órbita que posea las mismas características dinámicas que las de la materia que conforma al disco. Dicho flujo puede expresarse del siguiente modo:

$$Q(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(E^\dagger - \Omega L^\dagger)^2} \int_{r_{\text{uocce}}}^r d\rho (E^\dagger - \Omega L^\dagger) L_{,r}^\dagger, \quad (11.1)$$

donde,  $\dot{M}$  representa la tasa de acreción de materia,  $r_{\text{uocce}}$  es la posición de la última órbita circular estable,  $g$  es el determinante del tensor métrico y  $_{,r}$  denota derivación con respecto a la coordenada radial,  $r$ .

## 11.2. Cálculo del espectro de energía observado

Vamos a realizar dos importantes hipótesis en nuestro modelo de disco de acreción con el que luego calcularemos el espectro de energía emitido. Primero, supondremos que el disco emite radiación como un cuerpo negro y segundo que el disco se extiende hasta la última órbita circular estable. Existen evidencias que dan soporte a la identificación del radio interno del disco de acreción con la última órbita circular estable cuando el objeto se encuentra en el estado térmico (ver la [Subsección 9.1.1](#) y las referencias allí mencionadas). Entre las evidencias observacionales, podemos mencionar los trabajos que muestran que en el objeto LMC X-3, el radio interno del disco de acreción se mantuvo estable durante un período de más de 25 años [145, 146]. Entre los trabajos teóricos que dan soporte a esta hipótesis, existe un conjunto de simulaciones magnetohidrodinámicas que muestran que la emisión del disco disminuye, notablemente, en la región ubicada dentro de la última órbita circular estable [147].

A partir de los resultados presentados en la [Subsección 11.1.2](#) y en particular la expresión (11.1), puede obtenerse, como función de su distancia al objeto compacto, la temperatura efectiva local de cada elemento del disco, que puede expresarse como:

$$T_{\text{ef}}(r) = \left( \frac{Q(r)}{\sigma_{\text{SB}}} \right)^{1/4}, \quad (11.2)$$

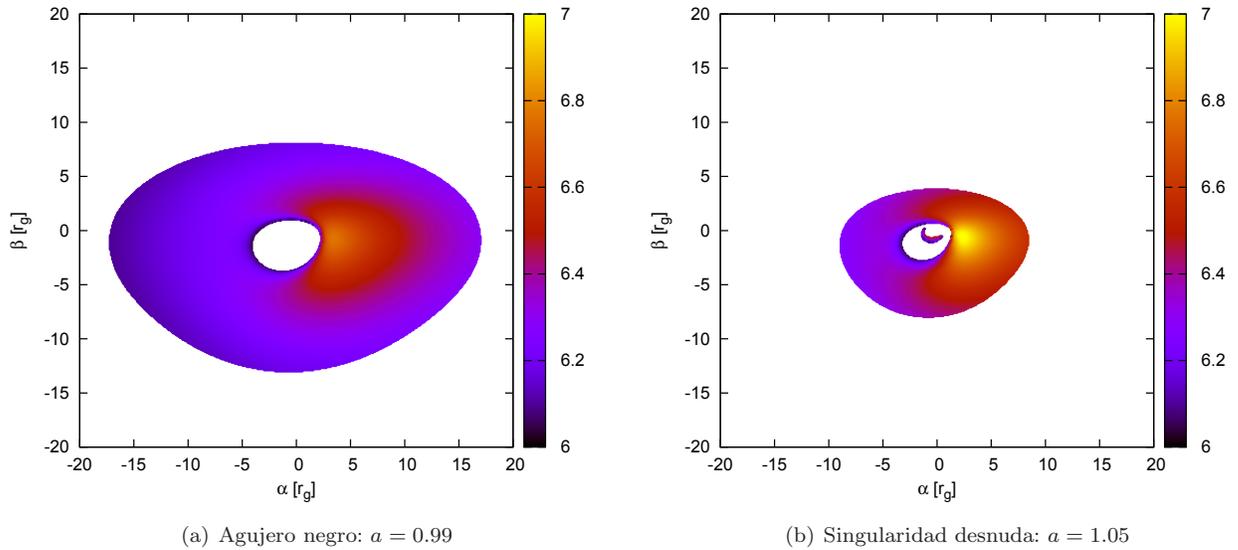


Figura 11.2: Escala logarítmica de temperatura,  $gT_{\text{col}}$ , (expresada en grados Kelvin), para discos de acreción con parámetro  $\dot{M}/M^2$  igual al de Cygnus X-1, cuyos planos están inclinados 60 grados respecto al del cielo. El parámetro de acoplamiento entre el campo de inducción magnética externo uniforme y la carga efectiva de las partículas es  $\lambda = 0.10$  y el factor de endurecimiento espectral se fijó en  $f_{\text{col}} = 1.60$ . En el panel izquierdo se presenta la escala de temperaturas para un disco de acreción alrededor de un agujero negro ( $a = 0.99$ ) y en el derecho el correspondiente a una singularidad desnuda ( $a = 1.05$ ). Los ejes cartesianos representan los parámetros de impacto que describen la posición y el tamaño de la imagen en la placa y se presentan en radios gravitacionales,  $GM/c^2$ .

donde,  $\sigma_{\text{SB}} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2}$  es la constante de Stefan-Boltzmann.

Estamos trabajando bajo la hipótesis de que el disco emite radiación como un cuerpo negro. Por este motivo, podemos calcular la *radiancia espectral* como función de la distancia al objeto compacto usando la expresión obtenida por el físico alemán Max Karl Ernst Ludwig Planck a principios del siglo XX:

$$B(\nu; T_{\text{ef}}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_{\text{ef}}}} - 1}. \quad (11.3)$$

La [Equation 11.3](#) dice, dada la temperatura efectiva,  $T_{\text{ef}}$ , y como función de la frecuencia,  $\nu$ , la cantidad de energía emitida por el cuerpo negro por unidad de superficie, unidad de tiempo, unidad de ángulo sólido y unidad de frecuencia.

Un fenómeno complejo que ocurre en la atmósfera del disco es la dispersión de la radiación emitida. La misma es debida, principalmente, a la producida por electrones libres y la “Comptonización”; proceso por el cual fotones de baja energía la incrementan, por efecto Compton inverso, al propagarse en un gas de electrones caliente. Por este motivo, la temperatura de color de la radiación emitida,  $T_{\text{col}}$ , es más alta que la temperatura efectiva del disco [148]. Supondremos, siguiendo el abordaje estándar de la literatura actual, que el cociente entre estas dos temperaturas es constante a lo largo de todo el disco.

Para obtener el espectro de energía *observado*, deben considerarse, además, los efectos asociados con la teoría general de la relatividad: el efecto Doppler debido a la rotación del material que forma el disco y la deflexión gravitacional y el enrojecimiento gravitacional de la luz. Siguiendo el modelo original de Page y Thorne (ver la [Subsección 11.1.2](#)), no consideraremos el efecto de *auto irradiación* [149]. Considerar los efectos observables producidos al incorporar este proceso es parte de los proyectos a futuro (ver el [Capítulo 13](#)).

A la hora de realizar comparaciones con datos observacionales, la absorción de fotones debido al material interestelar resulta importante. Más adelante en este trabajo tendremos en cuenta este fenómeno.

### 11.2.1. El código YNOGK

El código libre desarrollado por Xiaolin Yang y Jiancheng Wang denominado YNOGK (por sus siglas en inglés *Yun-Nan Observatory Geodesics Kerr*) [150], escrito en lenguaje Fortran 95 fue desarrollado para realizar cálculos de geodésicas nulas en el espaciotiempo de Kerr. Para considerar los efectos relativistas que sufre la luz en el entorno de objetos súper compactos, este código utiliza como estrategia el “seguimiento de haces de luz a lo largo de sus geodésicas nulas” desde la placa donde se encuentra el observador que registra la imagen hasta la superficie del disco donde los fotones son emitidos.<sup>5</sup>

YNOGK es una adaptación del código GEOKERR desarrollado en [151] y hace uso explícito de muchas de sus rutinas. Para hacer más eficiente y rápido los cálculos, utiliza el método semi-analítico de las integrales elípticas de Carlson que permite obtener las coordenadas de geodésicas nulas. Esta característica hace que YNOGK no sea fácilmente utilizable si se quiere estudiar fenómenos en espaciotiempos que no sean, estrictamente, el de Kerr. Lo novedoso del método es que logra reescribir las expresiones de las coordenadas de las geodésicas nulas como una función de un parámetro definido como:

$$p = \pm \int^r d\rho \frac{d\rho}{\sqrt{R(\rho)}} = \pm \int^\theta d\theta' \frac{d\theta'}{\sqrt{\Theta(\theta')}},$$

donde las funciones  $R(r)$  y  $\Theta(\theta)$  son las que gobiernan la parte radial y polar de las ecuaciones de movimiento para fotones (para más detalles consultar la [Subsección 2.2.5](#)). De la definición del parámetro  $p$ , se desprenden dos propiedades importantes: es definido positivo y es una función monótonamente creciente a medida que se recorre la trayectoria.

El código está dividido en 4 módulos centrales y posee gran versatilidad para adaptarlo al estudio de diversos problemas astrofísicos en el espaciotiempo de Kerr. Presentamos un breve resumen de cada uno de estos módulos:

- **ell-function**: en este módulo se introducen todas las funciones y rutinas necesarias para realizar el cálculo de las integrales elípticas de Carlson, las funciones e integrales de Weierstrass y Jacobi junto a otras cantidades de relevancia para cálculos posteriores;
- **BLcoordinate**: en este módulo se realizan los cálculos asociados a las coordenadas y el parámetro afín como función del parámetro  $p$ ;
- **pem-finding** y **obs-emitter**: estos dos módulos están destinados al estudio de la intersección de los fotones con la fuente emisora y a determinar las geodésicas que conectan al observador con el punto de emisión.

YNOGK tiene capacidad de calcular la función de enrojecimiento,  $g \equiv \frac{E_{\text{obs}}}{E_{\text{em}}}$ , para puntos sobre la superficie de un disco de acreción. Además, permite seleccionar: el valor del parámetro de rotación del agujero negro en el rango  $-1 \leq a \leq 1$  (con la adaptación realizada en [127], de la cual se dan detalles en la [Sección 11.3](#) de esta tesis, extendimos esto al caso  $|a| > 1$ ); la inclinación,  $i$ , del plano del disco respecto al del cielo y el radio externo del disco de acreción (para esto utilizamos el criterio de tomar que dicho radio como  $r_{\text{ext}} = 11r_{\text{uoce}}$  [152]. Si bien debemos realizar estudio más detallados (ver [Capítulo 13](#)), algunos cálculos preliminares indican que los espectros de energía de discos más extendidos modifican la parte *blanda* del mismo. Dado que la radiación en el rango  $E < 1$  keV se encuentra fuertemente suprimida por la absorción interestelar, no esperamos que los espectros de energía *observados* se modifiquen sustancialmente.

En forma genérica, en un espaciotiempo estacionario y con simetría axial se tienen dos integrales de movimiento vinculados a los respectivos vectores de Killing asociados a cada una de las simetrías: la energía y la componente del momento angular en la dirección del eje de simetría. Además, la norma del 4-velocidad también estará conservada. Estas 3 leyes de conservación no resultan suficientes para resolver (vía cuadraturas) el problema del movimiento geodésico en estos espaciotiempos. Carter, obtuvo el resultado (imprevisto) de que la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta separable en el espaciotiempo de Kerr [30]. En este trabajo encontró otra cantidad conservada denominada  $\mathcal{Q}$  (en el caso particular en el que  $a = 0$ , esta constante satisface que  $\mathcal{Q} + L_z$  es el momento angular total). Martin Walker y Roger Penrose demostraron que la

<sup>5</sup>Estrategia conocida como *ray-tracing* en la literatura en inglés.

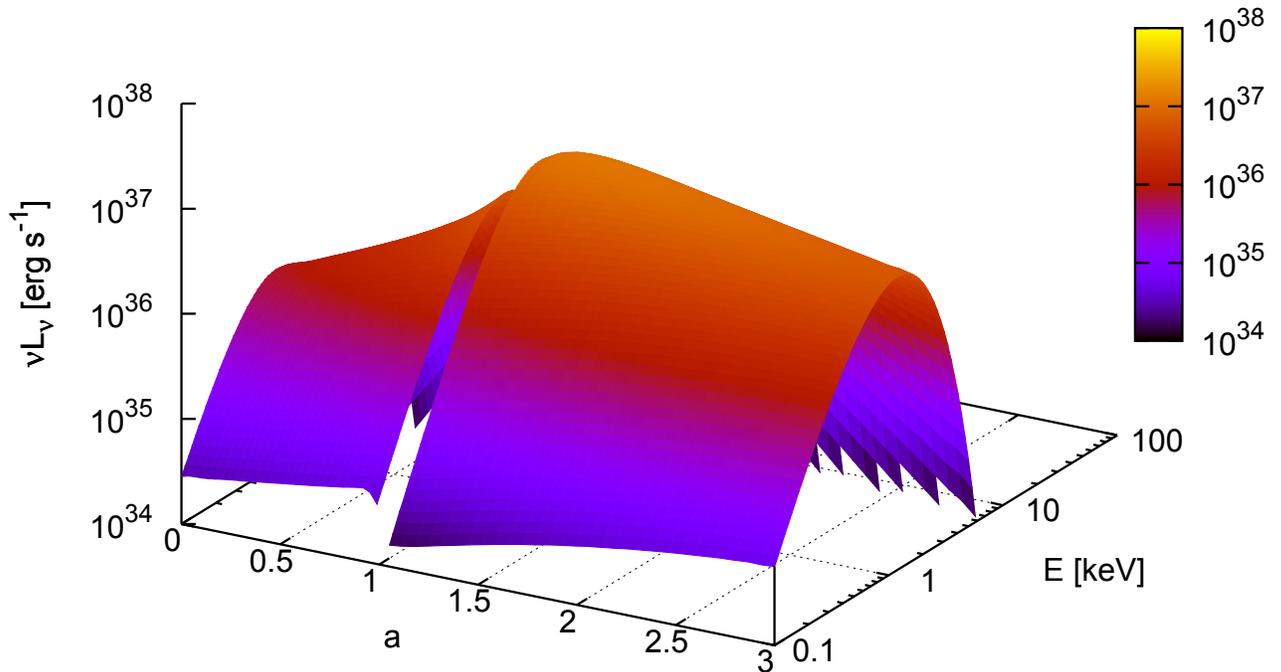


Figura 11.3: Familia de espectros de energía emitidos como función del parámetro de rotación. Puede apreciarse el marcado cambio en el comportamiento en la interfaz  $a = 1$ . La escala de colores representa  $\nu L_\nu$ , mostrando las regiones más luminosas con colores más cálidos. Para realizar estos gráficos se fijó la inclinación del plano del disco respecto al del cielo en 30 grados, el factor de endurecimiento espectral en  $f_{\text{col}} = 1.60$  y la masa y la tasa de acreción correspondientes a Cygnus X-1. Además, se fijó el valor de  $\lambda = 0.10$ .

existencia de esta cantidad conservada está asociada con la existencia de un tensor de Killing [153] y que esta propiedad es compartida por todos los espaciotiempos que pertenecen, como el de Kerr, a la familia de soluciones tipo  $D$  en la clasificación de Petrov.

Para nuestro estudio particular, en el que estamos interesados en calcular el espectro de radiación de un disco de acreción delgado, solamente necesitaremos resolver el problema del movimiento en el plano  $r - \theta$ , donde el movimiento se encuentra regido por la relación:

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{R(r')}} = \pm \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\Theta(\theta')}}.$$

El análisis detallado de estas ecuaciones puede encontrarse, por ejemplo en el trabajo [149].

### 11.3. Disco de Novikov-Page-Thorne magnetizado

En esta sección de la tesis vamos a utilizar los desarrollos presentados en el [Capítulo 10](#) para obtener modelos de discos de acreción delgados en un espaciotiempo de fondo de Kerr cuando el mismo se encuentra afectado por la presencia de un campo de inducción magnética externo. Al igual que en el [Capítulo 10](#), vamos a estudiar dos configuraciones de campo: la uniforme en la [Subsección 11.3.1](#) y la dipolar en la

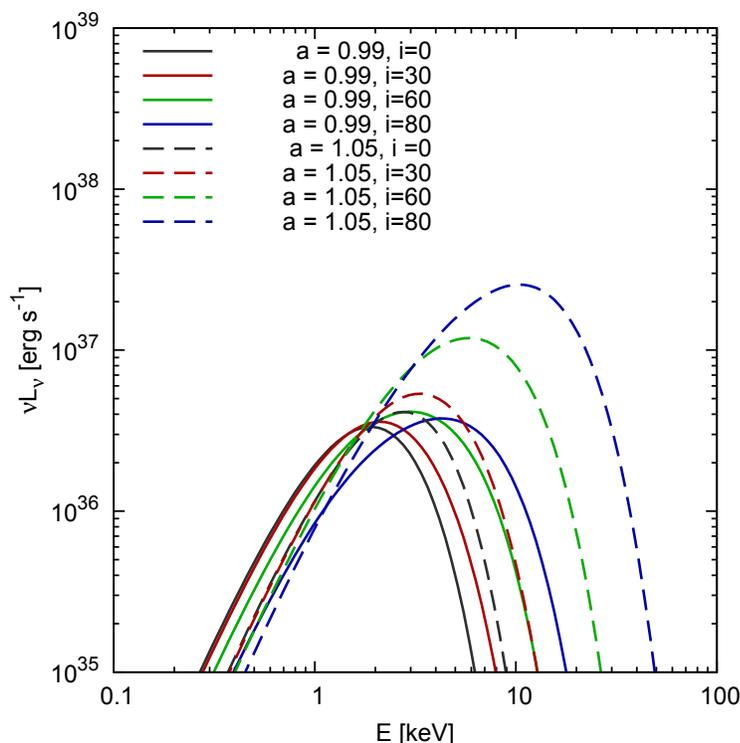


Figura 11.4: Efecto de la inclinación,  $i$ , sobre los espectros de energía observados. En líneas de trazo continuo presentamos el espectro de energía observado para discos formados en torno de un agujero negro de Kerr casi extremo ( $a = 0.99$ ). En línea de rayas, para el caso de una singularidad desnuda casi extrema ( $a = 1.05$ ). En ambos modelos se considera un objeto compacto con masa  $M = 14.8 M_{\odot}$  y una tasa de acreción de  $\dot{M} = 0.1 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$  (valores aceptados para Cygnus X-1) y ausencia de campo externo, es decir,  $\lambda = 0$ .

### Subsección 11.3.2.

Consideraremos correcciones a primer orden en teoría de perturbaciones, usando al parámetro de acoplamiento entre la carga eléctrica efectiva del material y el campo de inducción magnética externo como parámetro de perturbación.

La idea de construir modelos simples de discos de acreción es que permiten, a través de la comparación con las observaciones, poner cotas a cantidades físicas de candidatos a agujeros negros. Nuestro estudio pone énfasis en realizar estimaciones del campo de inducción magnética. Además, se pretende poner a prueba la posibilidad de que dichos objetos sean descritos con métricas de Kerr con parámetro de rotación mayor a uno. La forma de trabajo es exactamente la misma que la planteada en la [Sección 11.2](#) para el caso no magnetizado, simplemente con expresiones más complejas. Es por este motivo que aquí, únicamente, presentaremos una serie de resultados propios y algunas conclusiones.

## 11.3.1. Campo magnético uniforme

### El espectro de emisión

En [\[127\]](#) desarrollamos un código capaz de calcular los espectros de emisión térmicos de discos de acreción entorno al espaciotiempo de Kerr en presencia de un campo de inducción magnética externo vistos por un observador lejano. En dicho trabajo se hace uso de expresiones desarrolladas en el [Capítulo 10](#) para el caso de un campo externo uniforme o dipolar. Este código permite recorrer el espacio de parámetros ( $a, i, \dot{M}/M^2, \lambda, f_{\text{col}}$ ) para estudiar los efectos que producen sobre el espectro de emisión cambios en cualquiera de ellos. Con la adaptación realizada al código YNOGK tenemos la capacidad de estudiar el caso  $|a| > 1$  sin problemas.

Para el cálculo de [\(11.1\)](#), se utilizan las expresiones obtenidas con el esquema perturbativo presentado en [Capítulo 10](#), la integración, sin embargo, debe realizarse en forma numérica. El radio externo para el disco

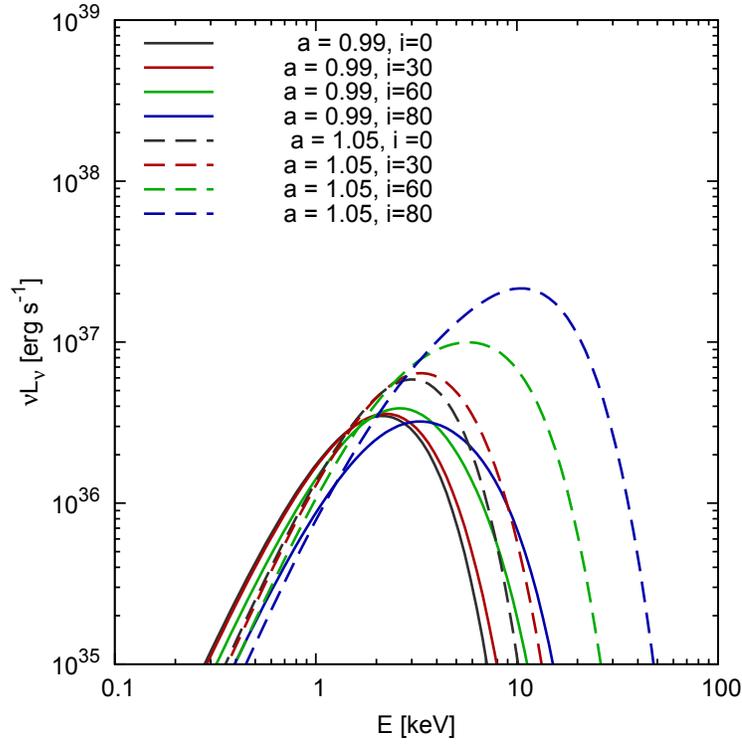


Figura 11.5: Efecto de la inclinación,  $i$ , sobre los espectros de energía. En líneas de trazo continuo, espectro de energía observado para discos en un agujero negro de Kerr casi extremo ( $a = 0.99$ ). En líneas de rayas, resultados para una singularidad desnuda casi extrema ( $a = 1.05$ ). En todos los casos consideramos,  $M = 14.8 M_{\odot}$ , una tasa de acreción de  $\dot{M} = 0.1 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$  (valores aceptados para Cygnus X-1) y un valor  $\lambda = 0.15$ , debido a la presencia del campo externo.

de acreción se fijó en  $r_{\text{ext}} = 11r_{\text{uoce}}$ , utilizando el criterio presentado en [152]. Además, dado que cuando el campo externo de inducción magnética es uniforme, la corrección de  $\mathcal{O}(\lambda)$  a la posición de uoce es nula, utilizamos el valor correspondiente al caso no magnetizado. Hemos realizado algunas pruebas modificando el radio exterior y, como era de esperar, llegamos a la conclusión de que los espectros observados (sin tener en cuenta los efectos producidos por la absorción interestelar) presentan mayor luminosidad a pequeñas energías. Esto puede interpretarse del siguiente modo: al estudiar discos de tamaño más extendidos, aumenta la región de emisión alejada del objeto central que, por su baja temperatura, realiza aportes en la parte suave del espectro. Hacer un estudio sistemático de los efectos que producen estas modificaciones en el espectro observado es parte del trabajo planeado a futuro (ver el [Capítulo 13](#)).

Los espectros de energía observados (sin absorción interestelar) fueron calculados para la siguiente muestra del espacio de parámetros:

- Parámetro de rotación de Kerr:  $a = 0.00, 0.50, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99, 1.05, 1.089, 1.20, 1.50, 2.00, 3.00$ ,
- Inclinación del plano del disco respecto al del cielo:  $i = 0, 30, 60, 80, 90$  grados,
- Tasa de acreción:  $\dot{M} = 4.72 \times 10^{17} \text{ g s}^{-1}, 4.72 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}, 4.72 \times 10^{19} \text{ g s}^{-1}$ ,
- Valores para el acoplamiento entre el campo magnético y la carga efectiva de un elemento de volumen del disco:  $\lambda = 0.00, 0.05, 0.10, 0.15$ ,
- Factor de color:  $f_{\text{col}} = 1.00, 1.40, 1.80$ .

Además, se realizó una serie de cálculos puntuales con la idea de ajustar los datos observacionales de Cygnus X-1 (ver la [Figura 11.9](#)), cuya tasa de acreción es  $\dot{M}_{\text{CygX-1}} \sim 0.1 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$ . Cálculos similares se realizaron para ajustar los datos observacionales de LMC X-3 (ver la [Figura 11.10](#)).

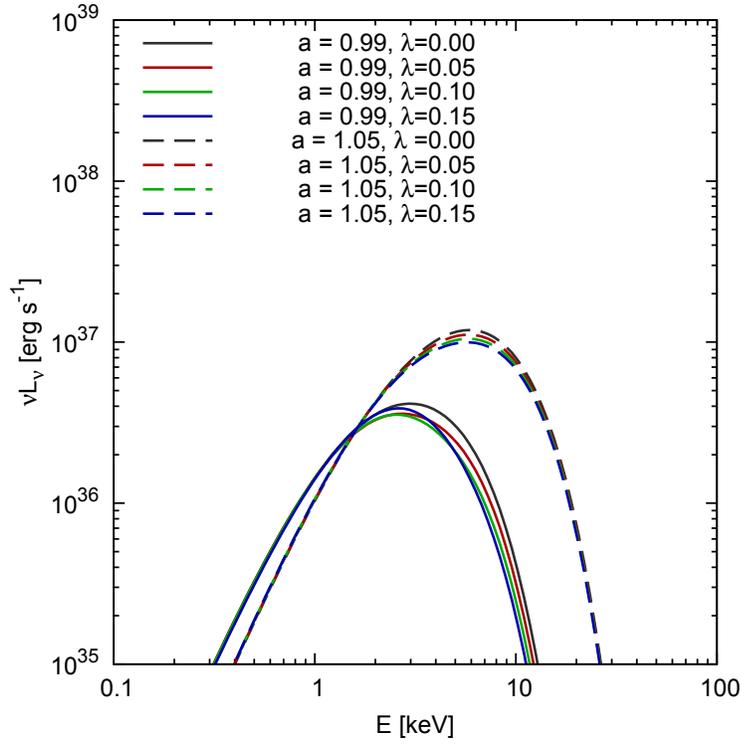


Figura 11.6: Espectro de energía observado para diferentes valores de  $\lambda$ . En líneas de trazo continuo se presentan los resultados para discos formados en torno un agujero negro de Kerr casi extremo, ( $a = 0.99$ ). Los correspondientes a una singularidad desnuda casi extrema, ( $a = 1.05$ ), en línea de rayas. Para realizar estos gráficos consideramos  $M = 14.8M_{\odot}$  y una tasa de acreción de  $\dot{M} = 0.1 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$ , (valores aceptados para Cygnus X-1) y una inclinación  $i = 60$  grados. La codificación de color todos los casos es la siguiente: a igual color, igual valor de  $\lambda$ .

Para realizar los cálculos numéricos se utilizó el compilador *gfortran* con la opción *-fdefault -real -8* que habilita la representación de números con 64-bits. Esta precisión fue necesaria para que en nuestros resultados no se introduzca ruido numérico.

A continuación, definimos el *factor de endurecimiento espectral*,  $f_{\text{col}}$ . Dado que suponemos que el disco se encuentra en equilibrio termodinámico, puede asumirse que el mismo emite como un cuerpo negro con una temperatura efectiva,  $T_{\text{ef}}(r)$ , determinada por el flujo de energía por él emitido. Como la temperatura en las regiones más internas del disco pueden alcanzar (para agujeros negros de masas estelares) temperaturas  $T_{\text{ef}}(r) \sim 10^7 \text{ K}$ , efectos no térmicos no pueden ser despreciados. Una forma de tener en cuenta dichos efectos es introducir el factor de color o de endurecimiento espectral con el que se define la temperatura de color,  $T_{\text{col}}(r) = f_{\text{col}}T_{\text{ef}}(r)$ , que se utiliza en la ley de Planck (11.3) para modelar la intensidad local de energía emitida por el disco.

Pasamos a analizar el significado del parámetro  $\lambda$ , de modo que nos permita comprender lo que entenderemos como régimen de acoplamiento débil. A tal fin, lo presentamos en unidades adaptadas a la física de discos de acreción formados alrededor de objetos compactos de masas estelares:

$$\lambda \sim 90 \left( \frac{e/m_0}{(e/m_0)_{\text{elec}}} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) B[\text{G}],$$

así, para un objeto con una masa  $M = 15M_{\odot}$  con un disco de acreción que en su superficie posea un campo de inducción magnética uniforme cuya magnitud es  $B \sim 10^7 \text{ G}$  se tiene que, si en un elemento de volumen que contenga una masa equivalente a la de  $\sim 7 \times 10^7$  protones proponemos una carga efectiva correspondiente a la de un electrón, el valor de  $\lambda \sim 0.1$ .

Dado que el gas en las zonas más internas de los discos de acreción se encuentra a temperaturas que pueden alcanzar  $T \sim 10^7 \text{ K}$ , el mismo se encuentra ionizado (se vuelve un plasma). Por este motivo, es de esperar que el mismo sea influenciado, desde un punto de vista dinámico, por la presencia de un campo de

inducción magnética externo. Sin una gran cantidad de plasma ionizado, el campo magnético no se acoplaría en las ecuaciones de movimiento del material, haciendo que sea complicado para modelar en forma teórica la formación de chorros relativistas de partículas. Una forma de modelar esta interacción es la que utilizamos en este trabajo.

En la [Figura 11.1](#) presentamos los perfiles de temperatura superficial,  $kT$  [keV], como función del radio (expresado en radios gravitacionales) para diferentes modelos de discos de acreción. En dichos modelos se dejan fijos los parámetros:  $\dot{M}/M^2$ , tomando el aceptado para Cygnus X-1,  $\lambda = 0.1$ , el ángulo de inclinación del plano del disco respecto al del cielo se considera de  $i = 30$  grados y el factor de color,  $f_{\text{col}} = 1.60$ . Se muestran los efectos sobre dichos perfiles cuando se varía el valor del parámetro de rotación.

En el panel izquierdo de la [Figura 11.2](#), podemos ver la silueta de un disco de acreción cuyo parámetro  $\dot{M}/M^2$  coincide con el de Cygnus X-1, formado alrededor de un agujero negro con parámetro de rotación  $a = 0.99$ , cuyo plano ecuatorial forma un ángulo de 60 grados respecto al plano del cielo y para un valor de  $\lambda = 0.10$ . La escala de color representa (en escala logarítmica) la temperatura de color,  $gT_{\text{col}}$ . Para cada punto del disco,  $g$  condensa las correcciones relativistas calculadas utilizando nuestra modificación del código YNOGK. Dicha silueta puede compararse con la presentada en el panel derecho de la [Figura 11.2](#) donde se modificó el valor del parámetro de rotación, en este caso fijado en  $a = 1.05$ . Dado que se mantienen fija, tanto la escala de color como la utilizada en los ejes cartesianos, podemos ver que el disco de acreción formado alrededor de la singularidad desnuda resulta más pequeño y caliente que el formado alrededor del agujero negro.

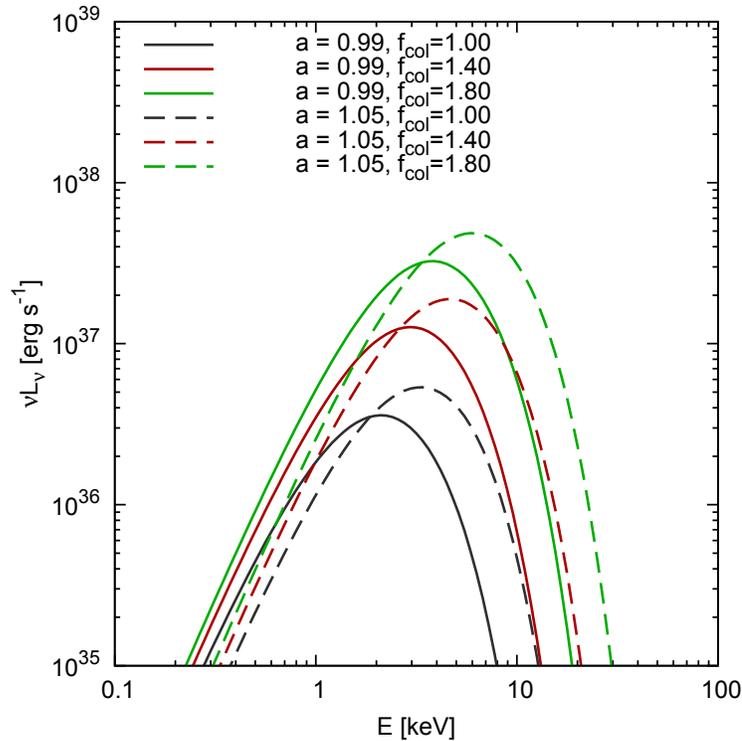


Figura 11.7: Espectro de energía observado para diferentes valores del factor de color,  $f_{\text{col}}$ . en líneas de trazo continuo presentamos los resultados obtenidos para discos formados alrededor de un agujero negro de Kerr casi extremo ( $a = 0.99$ ) y con línea de rayas los correspondientes a una singularidad desnuda casi extrema ( $a = 1.05$ ). En estos modelos estamos considerando para la masa del objeto central y la tasa de acreción los valores aceptados para Cygnus X-1,  $i = 30$  grados y  $\lambda = 0$ . La codificación de color es la misma en todos los casos: a igual color, igual valor de  $f_{\text{col}}$ .

Para obtener los espectros de energía observados, se hace uso de que la cantidad  $I(\nu)/\nu^3$  es invariante a lo largo de la trayectoria geodésica. De este modo, la integral sobre la superficie del disco puede transformarse en

una integral (en coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$ ) sobre la placa fotográfica que puede calcularse por medio de la fórmula:

$$F_{\text{obs}}(\nu_{\text{obs}}) = \int_{\text{placa}} \frac{h\nu_{\text{obs}}^3}{\exp\left(\frac{h\nu_{\text{obs}}}{gk_{\text{B}}f_{\text{col}}T_{\text{ef}}}\right) - 1} d\alpha d\beta, \quad (11.4)$$

luego de haber realizado este cálculo, la densidad de fotones se calcula dividiendo esta función por la energía de cada fotón,  $N_{\text{obs}} = F(\nu_{\text{obs}})/E_{\text{obs}}$ .

Presentamos, a continuación, una serie de resultados cualitativos que se desprenden del análisis de los espectros teóricos calculados. Resulta importante remarcar que los mismos concuerdan con los presentados en otros trabajos científicos (ver, por ejemplo, [149, 154]).

En la **Figura 11.3** se presentan los espectros de energía emitidos por el disco de acreción como función de la energía,  $E$  [keV], y el parámetro de rotación. Se presenta la luminosidad,  $\nu L_{\nu}$  erg s<sup>-1</sup>, y la escala de colores sirve para identificar la posición del máximo en dicha cantidad. Se muestran separadas las dos familias de espectros de energía, una correspondiente a los casos en los que el objeto central es un agujero negro y otra para el caso en el que el mismo es una singularidad desnuda.

Como función del parámetro de rotación (dejando los otros parámetros fijos), el máximo en la luminosidad observada, ocurre para un valor de la energía,  $E_{\text{max}}$ , que crecen con  $a$  en el intervalo de valores  $0 \leq a \leq 1.05$ . A partir de ese valor el comportamiento es opuesto, mostrando que discos formados alrededor de singularidades desnudas con parámetro de rotación  $a \gtrsim 2$ , presentan espectros de energías con características similares a los de discos formados en torno de agujeros negros. Un efecto similar se observa al analizar la luminosidad en ese valor de la energía,  $\nu L_{\nu}(E_{\text{max}})$ . Este resultado está asociado con el comportamiento del radio de la última órbita circular estable,  $r_{\text{ioce}}$ , que estudiamos en el **Capítulo 10**. Por este motivo, vemos que no podemos considerar únicamente estas cantidades como observables capaces de diferenciar entre discos de acreción formados alrededor de agujeros negros y singularidades desnudas.

En la **Figura 11.4** puede verse que, para una inclinación dada y en ausencia de campo de inducción, los espectros observados para discos formados en torno a agujeros negros casi extremos ( $a = 0.99$ ) y singularidades desnudas casi extremas ( $a = 1.05$ ) son diferentes desde varios puntos de vista. Esto sugiere que los mismo deberían poder distinguirse en forma observacional sin mayores dificultades. Pasemos a analizar las principales diferencias que detectamos:

- La energía,  $E_{\text{max}}$ , donde se encuentra el máximo del espectro, es mayor para discos de acreción formados en torno a singularidades desnudas que para aquellos formados en torno a agujeros negros.
- La luminosidad máxima,  $\nu L_{\nu}(E_{\text{max}})$ , es mayor para discos de acreción formados en torno de singularidades desnudas que para los formados alrededor de agujeros negros.
- La energía de corte<sup>6</sup> donde la luminosidad decae 2 ordenes de magnitud respecto a la máxima,  $E_{\text{C}}$ , es mayor para discos formados en torno de singularidades desnudas que para los formados alrededor de agujeros negros.

El máximo en los espectros de emisión térmica para discos de acreción formados alrededor de singularidades desnudas se encuentra ubicado, en forma sistemática, en una energía  $E_{\text{max}} > 1$  keV (ver **Figura 11.4**). En este rango de energías, la absorción de fotones producida por el material presente en el medio interestelar es despreciable. Por estos motivos, entendemos que no existen riesgos de confusión y dicho pico debería ser claramente observable. Lo mismo ocurre para la energía de corte, que se encuentra, en todos los casos estudiados, dentro del rango de energías en los que operan satélites como *Chandra* o *XMM-Newton*.

En la **Figura 11.5** presentamos los casos estudiados en la **Figura 11.4** pero considerando un acoplamiento entre el campo de inducción externo y la materia, parametrizado por  $\lambda = 0.15$ . Un análisis cualitativo de ambas figuras muestra que las mismas son, desde este punto de vista, iguales.

El análisis de la **Figura 11.5** muestra que la forma de los espectros de discos formados alrededor de singularidades desnudas es mucho más sensible a cambios en el ángulo de inclinación que los casos en los que el objeto central es modelado con un agujero negro. El efecto observado es el siguiente: al aumentar la inclinación los espectros observados se vuelven más duros, puede verse como la posición del máximo pasa de  $\sim 3$  keV a  $\sim 13$  keV cuando la inclinación varía de  $i = 0$  a  $i = 90$  grados. Además, la luminosidad máxima

<sup>6</sup>Energía de *cut-off* en la literatura en inglés.

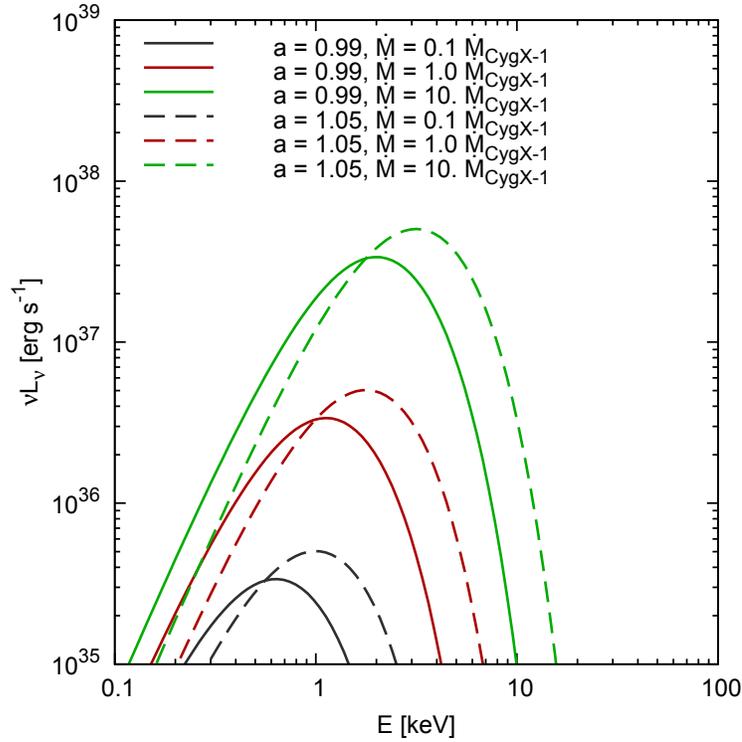


Figura 11.8: Espectro de energía observado para diferentes tasas de acreción. En línea continua se presentan discos de acreción formados en torno a un agujero negro de Kerr casi extremo ( $a = 0.99$ ) y en línea a rayas para aquellos formados alrededor de una singularidad desnuda casi extrema ( $a = 1.05$ ). Se considera,  $M = 14.8M_{\odot}$ , valor aceptado para Cygnus X-1),  $i = 30$  grados,  $\lambda = 0$  y  $f_{\text{col}} = 1.40$ . Las tasas de acreción consideradas son:  $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\text{CygX-1}}$ ,  $\dot{M}_{\text{CygX-1}}$  y  $10\dot{M}_{\text{CygX-1}}$ . Las líneas de igual color corresponden a un mismo valor para la tasa de acreción.

de los mismos aumenta considerablemente, para el caso de la singularidad desnuda este cambio es de algo más de un orden de magnitud (de  $\sim 5 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1}$  a  $\sim 9 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$ ) entre el caso de inclinación  $i = 0$  grados y el de  $i = 90$  grados. Para el caso de discos formados en torno a agujeros negros las modificaciones no son tan considerables.

En la [Figura 11.6](#) se puede ver, para discos con una inclinación fija de 60 grados respecto al plano del cielo, el efecto que produce la presencia de campos magnéticos de diferente intensidad en los espectros de emisión de discos formados entorno de un agujero negro con  $a = 0.99$  y una singularidad desnuda con  $a = 1.05$ . Vemos que el mismo tiene consecuencias potencialmente observables, en especial cuando se analiza el caso de discos de acreción formados alrededor de agujeros negros.

En la [Figura 11.7](#) se puede ver, para discos con una inclinación fija de 30 grados respecto al plano del cielo y no magnetizados, el efecto que produce a modificación del factor de color,  $f_{\text{col}}$ , sobre los espectros de emisión de discos formados entorno de un agujero negro con  $a = 0.99$  y una singularidad desnuda con  $a = 1.05$ . Vemos que, tanto para el caso en que el objeto central es un agujero negro o una singularidad desnuda, el efecto producido es el mismo: los espectros se vuelven más duros y luminosos.

En el marco de la teoría de Page-Thorne, los espectros de emisión térmica de discos de acreción están degenerados en el parámetro  $\dot{M}M^{-2}$ . Por este motivo, del análisis de la forma de dichos espectros de emisión no es posible obtener estimaciones individuales para  $M$  y  $\dot{M}$ . Para lograr esto hacen falta estimaciones independientes de alguna de ellas. Para analizar las modificaciones que introduce modificaciones en el parámetro  $\dot{M}M^{-2}$  sobre los espectros de emisión térmica, dejaremos fija la masa del objeto central (tomando para las representaciones gráficas la aceptada para Cygnus X-1) y variaremos la tasa de acreción, haciendo que tome los valores:  $0.1\dot{M}_{\text{CygX-1}}$ ,  $\dot{M}_{\text{CygX-1}}$  y  $10\dot{M}_{\text{CygX-1}}$ . Los resultados, presentados en la [Figura 11.8](#), muestran que cuanto mayor es la tasa de acreción los espectros de emisión se vuelven más brillantes y más duros.

El trabajo y resultados presentados anteriormente pueden resumirse en los siguientes puntos centrales:

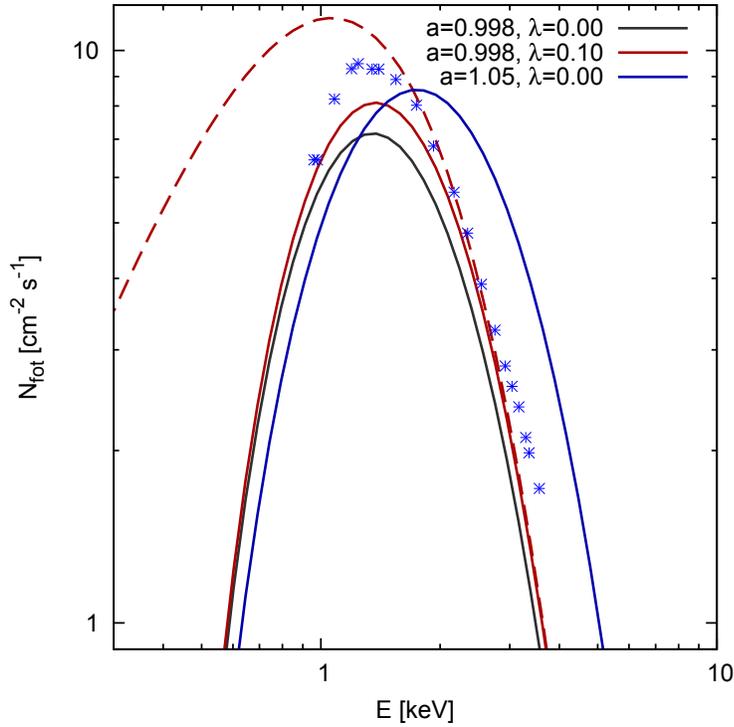


Figura 11.9: En puntos azules se presentan datos observacionales para el número de fotones observados en el rango de energías  $1 \text{ keV} \lesssim E < 10 \text{ keV}$  provenientes de Cygnus X-1 [155]. A modo de comparación presentamos el ajuste a los datos obtenidos con nuestro modelo para un agujero negro con  $a = 0.998$  para  $\lambda = 0.00$ ,  $\lambda = 0.10$  y los correspondientes a una singularidad desnuda  $a = 1.05$  no magnetizada. En todos los casos utilizamos la masa, tasa de acreción, inclinación del plano del disco respecto al del cielo y distancia aceptada para Cygnus X-1 [155]. Además supusimos un valor estándar para el factor de color,  $f_{\text{col}} = 1.80$  y una absorción modelada a través de (11.5) con un valor para la columna de hidrógeno,  $N_H = 0.25 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ . Presentamos en línea punteada el espectro de energía no absorbido para el caso con el que logramos el mejor ajuste, manteniendo la codificación de color.

- Estudiamos el efecto que tiene la presencia de campos magnéticos externos sobre las propiedades de los espectros de energía de discos de acreción formados en un espaciotiempo de Kerr, admitiendo que el parámetro de rotación también tome valores mayores a 1. Este desarrollo puede ser utilizado como una herramienta para obtener estimaciones del campo de inducción magnética en el entorno de objetos compactos.
- Vimos que existen diferencias entre los espectros de energía cuando el espaciotiempo que se considera es el asociado a un agujero negro de Kerr casi extremo o el correspondiente a una singularidad desnuda casi extrema. Estas diferencias hacen que los espectros de energía se vuelvan una herramienta útil a la hora de distinguir, desde un punto de vista observacional, entre este tipo de objetos y, por lo tanto, una herramienta capaz de aportar información a la pregunta de validez o no de la conjetura de censura cósmica débil, al menos, en ambientes astronómicos.

En la Figura 11.9 presentamos, con cruces azules, el número de fotones observados,  $N_{\text{fot}}$ , para Cygnus X-1 en el rango de energías  $0.3 \text{ keV} \lesssim E < 10 \text{ keV}$  tomados de [98]. Junto con los datos observacionales, superponemos espectros de emisión térmicos obtenidos con nuestro modelo. El mejor ajuste a estos datos, se logró con un valor para el parámetro de rotación dado por  $a = 0.998$ . Mostramos, para este espaciotiempo, los efectos de considerar el caso no magnetizado y el correspondiente a  $\lambda = 0.1$ . Además, mostramos los resultados obtenidos para el caso en el que el objeto central es una singularidad desnuda ( $a = 1.05$  y  $\lambda = 0.1$ ). Puede verse como los datos observacionales excluyen ese tipo de modelos para objeto central. El ajuste a la emisión no es completo ya que, además de la componente térmica que modelamos, existe la no térmica, no incluida en nuestro modelo (ver por ejemplo [155]).

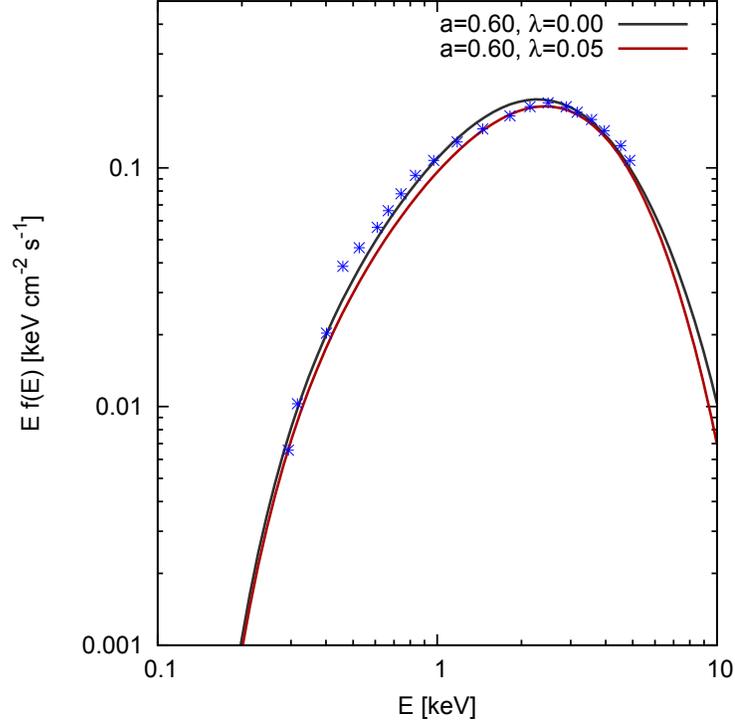


Figura 11.10: En cruces azules se presentan datos observacionales para el espectro desplegado de LMC X-3 en el rango de energías  $0.1 \text{ keV} \lesssim E < 10 \text{ keV}$  [157]. Presentamos los resultados de nuestro modelo para un agujero negro con  $a = 0.60$ . Los otros parámetros usados para el ajuste son:  $f_{\text{col}} = 1.60$ , una inclinación del plano del disco respecto al del cielo de  $i = 45$  grados y una tasa de acreción dada por  $\dot{M} = 9.36 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$ . Con línea negra se presenta el caso  $\lambda = 0.00$  y con línea roja el correspondiente a  $\lambda = 0.05$ . En ambos casos utilizamos la masa y distancia aceptada para LMC X-3 y una absorción modelada a través de (11.5) con un valor para la columna de hidrógeno,  $N_H = 0.2 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ .

Para realizar el ajuste, utilizamos la expresión analítica para la sección eficaz de absorción interestelar de fotones de rayos X en el rango de energías  $0.532 \text{ keV} < E < 7.111 \text{ keV}$  presentada en [156]. La misma está dada por:

$$10^{24} \sigma(E) [\text{cm}^2] = (243.88 - 16.594E) E^{-2.348}. \quad (11.5)$$

Con esta expresión para la sección eficaz de absorción y la densidad columnar de hidrógeno,  $N_H$ , se puede calcular la intensidad observada a partir de la emitida con una simple ley de decaimiento exponencial. El ajuste se logró con un valor para la densidad columnar de hidrógeno de  $N_H = 0.25 \times 10^{22} \text{ cm}^{-2}$ . Es importante remarcar que el valor obtenido para el parámetro de rotación se encuentra en total acuerdo con los calculados por otros autores (ver, por ejemplo, [155]).

Como un segundo ejemplo de aplicación de nuestro modelo, presentamos, en la Figura 11.10, los resultados del ajuste de nuestros modelos teóricos a los datos en el rango de energías  $0.1 \text{ keV} \lesssim E < 10 \text{ keV}$  para el candidato a agujero negro LMC X-3. Las cruces azules son los datos observacionales tomados de [157]. Con líneas continuas, presentamos los espectros observados con los que logramos ajustes a las observaciones. Los mismos se lograron fijando los parámetros del siguiente modo: parámetro de rotación,  $a = 0.60$ , factor de endurecimiento espectral,  $f_{\text{col}} = 1.60$ , inclinación del plano del disco respecto al del cielo,  $i = 45$  grados y una tasa de acreción dada por  $\dot{M} = 9.36 \times 10^{18} \text{ g s}^{-1}$ . Además, utilizamos los valores para la masa y la distancia aceptados para LMC X-3. Modelamos la absorción interestelar utilizando la expresión (11.5). Presentamos el resultado asociado al caso no magnetizado en línea continua negra y en línea roja el caso  $\lambda = 0.05$ .

El valor para el parámetro de rotación de LMC X-3 obtenido en [158] es  $a = 0.61$ , de este modo vemos que nuestro resultado es consistente con los valores aceptados en la literatura moderna.

Es importante notar que en los dos casos estudiados (Cygnus X-1 y LMC X-3), los mejores ajustes a los datos observacionales se lograron con valores no nulos para el parámetro de acoplamiento  $\lambda$ . Estos resultados

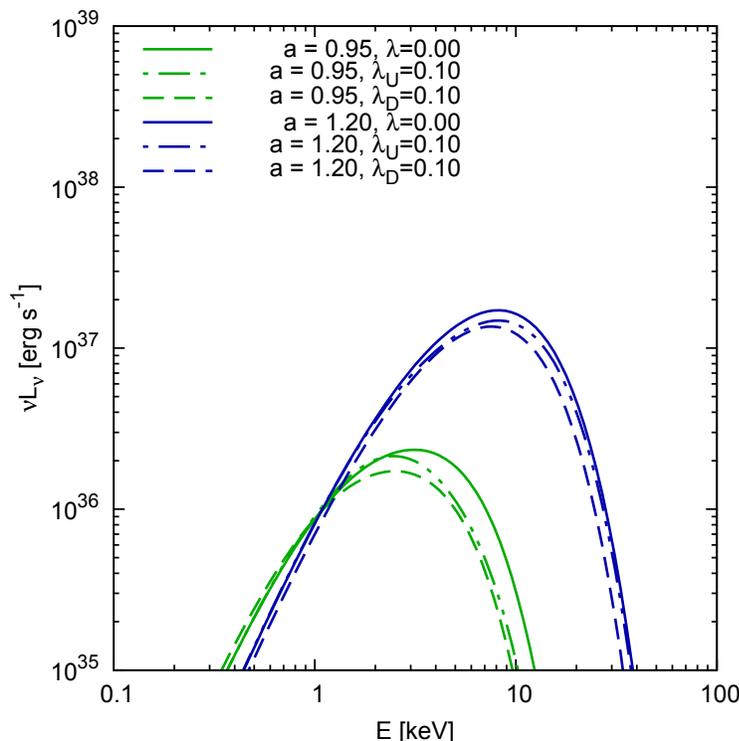


Figura 11.11: Para discos de acreción con parámetro  $\dot{M}/M^2$  igual al de Cygnus X-1, presentamos los espectros de energía para un agujero negro  $a = 0.95$  comparados con los de una singularidad desnuda  $a = 1.20$ . Estudiamos los casos no magnetizado y aquellos en los que  $\lambda = 0.10$  tanto para configuraciones de campo uniforme como dipolar. La inclinación del disco respecto al plano del cielo y el factor de color se fijaron en  $i = 80$  grados y  $f_{\text{col}} = 1.00$  respectivamente.

pueden interpretarse como evidencia de la existencia de un campo de inducción magnética asociado a estos objetos compactos.

### 11.3.2. Campo magnético dipolar

El modelo de campo de inducción dipolar es apropiado para representar el presente en discos de acreción formados entorno a objetos compactos. Existen trabajos teóricos que estudian el problema discos de acreción en torno de un agujero negro utilizando las herramientas propias de la magnetohidrodinámica que muestran que esta configuración de campo de inducción magnética puede generarse (y mantenerse) en un disco de acreción formado en el espaciotiempo de Kerr (ver, por ejemplo, [132, 133]).

Para esta configuración de campo, se utilizó un esquema de trabajo equivalente al utilizado en el caso del campo de inducción magnética externo uniforme con la intención de calcular espectros de emisión térmicos producidos por discos de acreción formados alrededor de agujeros negros y singularidades desnudas de Kerr en presencia de un campo externo de inducción magnética cuya configuración es dipolar. En este caso, realizamos los cálculos para algunos modelos testigo, obteniendo resultados que, a continuación, pasamos a describir. Queda pendiente (ver [Capítulo 13](#)) extender este estudio para analizar con más detalle el espacio de parámetros ( $a, i, \dot{M}/M^2, \lambda, f_{\text{col}}$ ), de manera similar a lo realizado para el caso del campo uniforme. Parte de este trabajo se desarrolló en [127].

Utilizando el mismo modelo que en la [Subsección 11.3.1](#), los discos de acreción que estudiamos se extienden entre el radio interior,  $r_{\text{in}} = r_{\text{uoce}}$ , y el radio exterior,  $r_{\text{ext}} = 11r_{\text{uoce}}$ . En este caso es importante recordar que, aún cuando se estudian correcciones a primer orden en el parámetro  $\lambda$ , la posición de la última órbita circular estable se modifica (ver la [Sección 10.4](#)), esta es una diferencia relevante cuando se lo compara con el caso de campo externo uniforme.

En la [Figura 11.11](#), presentamos el efecto que produce la presencia de un campo de inducción magnética dipolar con  $\lambda = 0.10$  sobre los espectros de energía de discos de acreción.

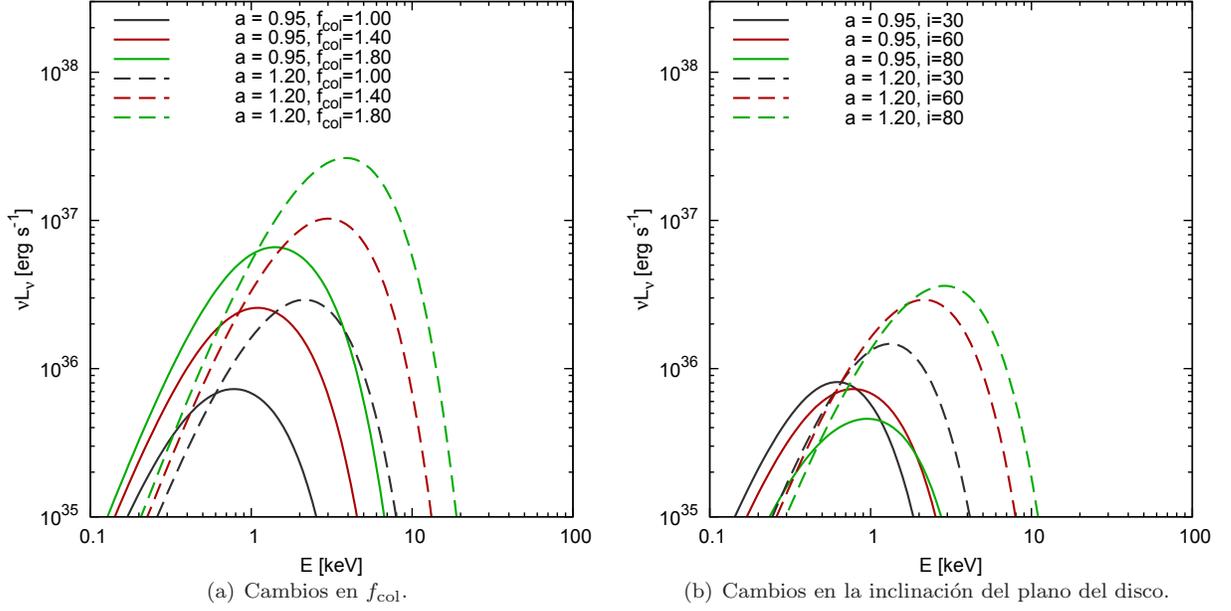


Figura 11.12: En el panel izquierdo presentamos las modificaciones en el espectro de emisión térmica observada producidas al analizar diferentes valores del factor de endurecimiento espectral,  $f_{col}$ . Consideramos modelos de discos de acreción cuyo parámetro  $\dot{M}/M^2$  es el correspondiente a Cygnus X-1 y una inclinación respecto al plano del cielo de 60 grados, formados en torno a un agujero negro con  $a = 0.95$  y de una singularidad desnuda caracterizada por  $a = 1.20$ . En el panel derecho, para los mismos discos pero todos con  $f_{col} = 1.00$ , se muestra el efecto que produce modificaciones en la inclinación,  $i$ , entre el disco y el plano del cielo.

En la [Figura 11.12](#), presentamos gráficos similares a los estudiados en el caso de configuración uniforme para el campo externo. En el panel derecho mostramos el efecto de la variación en la inclinación del plano del disco respecto al del cielo para discos formados en torno a un agujero negro  $a = 0.95$  y una singularidad desnuda  $a = 1.20$ . En ambos casos consideramos un acoplamiento entre el campo externo y la materia caracterizado por  $\lambda = 0.10$ . Aquí podemos apreciar una diferencia importante entre el efecto producido sobre espectro del disco formado en torno del agujero negro respecto al formado alrededor de la singularidad desnuda: si bien al aumentar el ángulo de inclinación entre el plano del disco y el del cielo, los espectros se endurecen pero las intensidades disminuyen en el caso del agujero negro mientras que aumentan en el caso de la singularidad desnuda. En el panel izquierdo presentamos el efecto que produce modificar el factor de color.

Como podemos ver, los resultados cualitativos son similares a los obtenidos y discutidos, para el caso de configuración uniforme de campo en la [Subsección 11.3.1](#).

Consideramos que estos resultados son más relevantes dado que esta configuración de campo posee características que la hacen, a nuestro entender, más realista para modelar los campos asociados a discos de acreción formados en torno de objetos compactos completamente colapsados. Lamentablemente, el esquema perturbativo desarrollado en el [Capítulo 10](#) no permite estudiar, en detalle, los efectos del campo de inducción magnética en el rango de parámetros de rotación  $0.95 \lesssim a \lesssim 1.20$ . Lograr estudiar este intervalo de valores de interés forma parte del trabajo a futuro que pretendemos realizar, ver el [Capítulo 13](#).



## Parte IV

# Conclusiones y trabajo a futuro



# Capítulo 12

## Conclusiones

*Not everything that counts can be counted and not everything that can be counted counts.*

Albert Einstein

Podemos dividir los resultados obtenidos en esta tesis en dos diferentes familias. Sin embargo, no debe perderse de vista que ambas están relacionados con el análisis de la veracidad, al menos en ambientes astronómicos, de las versiones débil y fuerte de la conjetura de censura cósmica. La primera familia de resultados es de naturaleza marcadamente teórica y está centrada en estudios de estabilidad de espaciotiempos que violan alguna de las formas de esta conjetura. La segunda, explota diferencias observacionales entre agujeros negros y singularidades desnudas de Kerr. Para esto último, se calcularon espectros de emisión térmica producidos por discos de acreción formados en el espaciotiempo de Kerr en presencia de un campo de inducción magnética externo.

A modo de resumen de la primera familia de resultados novedosos de este trabajo podemos decir que realizamos un estudio sistemático de las perturbaciones lineales tanto al espaciotiempo de Kerr súper extremo como a la región interna del agujero negro; soluciones que violan, respectivamente, la forma débil y fuerte de la conjetura de censura cósmica formulada por Penrose.

Los resultados presentados en los dos primeros capítulos de la **Parte II** de esta tesis, demuestran que, para perturbaciones que preservan las simetrías originales del espaciotiempo de Kerr, existen soluciones a las ecuaciones de perturbaciones lineales con las siguientes características:

- son bien comportadas inicialmente,
- son físicamente aceptables y
- presentan un *crecimiento exponencial en el tiempo*.

Además, probamos que este comportamiento es independiente del tipo de campo con el que se perturbe al espaciotiempo de Kerr, es decir, existen modos inestables para perturbaciones por campos: escalares, fermiónicos, electromagnéticos y gravitacionales.

Para el caso particular de perturbaciones electromagnéticas, reconstruimos, en el **Capítulo 7**, el tensor de Maxwell,  $F_{\mu\nu}$ , en un entorno de la singularidad anillo del espaciotiempo de Kerr. Con esta solución local, calculamos los invariantes de campo asociados a él demostrando que los mismos presentan un comportamiento análogo al del campo electromagnético de la solución de Kerr-Newman, una solución exacta a las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Concluimos, a partir de este resultado, que el esquema perturbativo utilizado en nuestro análisis es consistente.

A partir de estos resultados argumentamos que estos espaciotiempos, al ser linealmente inestables frente a una amplia familia de perturbaciones, no tienen relevancia astronómica y, por lo tanto, no pueden ser utilizados como modelo para los objetos ultra compactos de los que se tiene fuertes evidencias observacionales. Consideramos que, de esta forma, hemos aportado argumentos que refuerzan a los agujeros negros (y en

particular a los de Kerr) como modelos teóricos para explicar las observaciones consistentes con la existencia de objetos súper compactos.

Una vez establecida la prueba de existencia de dichos modos inestables, buscamos encontrar un posible motivo a dicha existencia. En esta dirección, obtuvimos indicios de una conexión entre la existencia de curvas temporales cerradas y la aparición de los modos inestables descubiertos. Dicha propuesta está basada en el hecho de que la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento y la evolución de las perturbaciones lineales, cambia, para los modos estudiados, de naturaleza en las regiones del espaciotiempo de Kerr que presentan dichas curvas.

Tratando de fortalecer esta conjetura, estudiamos, en el [Capítulo 8](#), la estabilidad frente a perturbaciones por campos escalares de otros espaciotiempos que poseen curvas temporales cerradas: el espaciotiempo de Lanczos, el de Gödel y el BTZ extremo en  $(2 + 1)$  dimensiones. Aunque el espaciotiempo de Gödel resulta ser estable frente a este tipo de perturbaciones, encontramos modos inestables tanto para el espaciotiempo de Lanczos como para la región  $r^2 < 0$  del agujero negro BTZ extremo.

Además, en el caso de los espaciotiempos de Lanczos, Gödel y BTZ extremo, demostramos en forma analítica que, en caso de existir, los modos exponencialmente crecientes deben preservar la simetría axial del espaciotiempo de fondo. Para el caso del interior de un agujero negro de Kerr *lento* (es decir, en el límite en el cual  $a \ll M$ ), presentamos argumentos fuertes que indican que dicho resultado también debe ser válido.

Estos resultados, junto con una serie de resultados previos (ver por ejemplo, [\[53\]](#), [\[55\]](#), [\[56\]](#), [\[67\]](#), [\[75\]](#), [\[81\]](#), [\[159\]](#), [\[160\]](#)), muestran que algunas de las soluciones exactas más relevantes a las ecuaciones de Einstein que violan la conjetura de Penrose en alguna de sus dos formas, son linealmente inestables, descartando de este modo su relevancia física. Estos resultados refuerzan la relevancia de los agujeros negros como modelo teórico de objetos astronómicos súper compactos.

Ninguno de los resultados obtenidos en esta tesis puede (ni debe) ser considerado como una demostración a la validez de ninguna de las formas de la conjetura de censura cósmica ya que no lo son. Sin embargo, consideramos que los mismos son relevantes dado que este tipo de estudio nunca había sido realizado para estas soluciones exactas a la teoría general de la relatividad.

Nuestro punto de vista sobre la relevancia de los mismos radica en la siguiente idea fuerza:

dado que se demostró que las singularidades desnudas son linealmente inestables, las condiciones necesarias para que, el proceso de colapso gravitatorio de un objeto (una estrella por ejemplo), de como resultado una singularidad desnuda, deben ser extremadamente peculiares. Por este motivo, procesos de este tipo no deberían ocurrir en ámbitos astronómicos.

En este marco, entendemos que nuestros resultados fortalecen los argumentos que sostienen que la conjetura débil de censura cósmica es válida. Además, junto con los asociados a la inestabilidad lineal del espaciotiempo de Schwarzschild de masa negativa [\[53\]](#) y a la del Reissner-Nordström súper cargado [\[56\]](#), fortalecen el paradigma del agujero negro (de Kerr) como el modelo teórico más aceptable para explicar las observaciones astronómicas de objetos súper compactos.

Otras alternativas teóricas al modelo de agujero negro que entendemos merecen ser destacadas son (ver, por ejemplo, el resumen [\[161\]](#) y las referencias en él mencionadas):

- las estrellas de bosones,
- las “gravastars”,<sup>1</sup> estrellas formadas por (mal llamada) energía oscura y
- las estrellas de cuárks.

Estos objetos teóricos, al igual que las singularidades desnudas, tampoco poseen un horizonte de eventos, marca distintiva de los agujeros negros. Si por medio de estos modelos es posible explicar algunas de las características observacionales de los objetos súper compactos y de gran masa de los que se tiene evidencias, en un trabajo reciente, se demostró que las hipotéticas estrellas de bosones y las llamadas “gravastars” son, al igual que las singularidades desnudas, linealmente inestables [\[162\]](#). Por este motivo su relevancia astronómica queda descartada.

---

<sup>1</sup>Nombre que viene de las siglas en inglés *GRA*vitational *VAC*uum *STAR*.

A pesar de ser un tema en el cual actualmente existen debates teóricos, los modelos de estrellas de cuárks o estrellas híbridas presentan, al igual que las estrellas de neutrones o enanas blancas, masas máximas mucho menores de las observadas en algunos sistemas binarios de rayos X (ver, por ejemplo, [163] y referencias allí mencionadas). Este es uno de los principales motivos por los que no existen expectativas sólidas de que las mismas puedan considerarse como alternativas teóricas a los modelos de objetos completamente colapsados por efecto de la gravedad.

El interés físico de la región KIII ha sido puesto en duda por diversas razones. Además de violar la versión fuerte de la conjetura de censura cósmica, la misma posee curvas temporales cerradas y la singularidad de curvatura donde la teoría misma deja de ser aplicable. Si bien los resultados obtenidos en relación con la inestabilidad lineal de la región KIII no tienen implicaciones tan directas a la astronomía, los mismos refuerzan esta serie de ideas previas. Sumamos, de esta manera, un nuevo argumento a la lista que plantean que la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Kerr es una construcción matemática pero que carece de relevancia física.

Los resultados presentados en la **Parte III** de esta tesis están basados en un lógica de trabajo diferente a los de la **Parte II**. Los mismos son la conclusión de la construcción y el análisis de modelos simples de discos de acreción formados en un espaciotiempo de Kerr con parámetro de rotación arbitrario. Analizamos herramientas teóricas que podrían utilizarse para distinguir en forma observacional la naturaleza de los objetos súper compactos en torno a los cuales se forman discos de acreción.

Además de analizar las diferencias observacionales de discos de acreción formados en torno a agujeros negros y singularidades desnudas, nuestras investigaciones se centraron en el estudio de los efectos de la presencia de campos de inducción magnética externos en los espectros de emisión térmica de discos de acreción en el marco del modelo de Page-Thorne.

Por medio de un esquema perturbativo en el parámetro,  $\lambda$ , utilizado para caracterizar el acoplamiento entre la carga efectiva de un elemento de volumen del disco y el campo de inducción magnética externo, analizamos los efectos que se producen sobre las trayectorias del material que forma el disco. Este esquema de trabajo nos permitió realizar el estudio en forma analítica para dos configuraciones diferentes del campo externo: la uniforme y la dipolar. De este modo analizamos, entre otras cosas, los cambios en la posición de la última órbita circular estable y en la eficiencia para la acreción. Haciendo uso de estos resultados, estudiamos modificaciones en algunas características relevantes del modelo de Page-Thorne. Centramos nuestra atención en el espectro térmico de energía observado. Analizamos la dependencia del mismo tanto con el parámetro de rotación prestando particular atención a la interfaz  $a = 1$ , que separa la familia de soluciones de Kerr que presentan horizontes de evento de la que no como con el que mide el acoplamiento entre la carga efectiva del material del disco con el campo de inducción magnético externo.

Para poner a prueba las capacidades del modelo, realizamos ajustes a datos observacionales de dos binarias de rayos X muy estudiadas en la literatura: Cygnus X-1 y LMC X-3. Nuestros resultados se encuentran en concordancia con los obtenidos en trabajos previos. En ambos casos, los ajustes fueron cualitativamente mejores cuando consideramos valores no nulos de  $\lambda$ . Este resultado puede ser entendido como un indicio de la presencia de campo de inducción magnética en ambos sistemas. Además, la comparación entre los datos observacionales de Cygnus X-1 y los resultados de nuestro modelo descarta a las singularidades desnudas de Kerr como modelo teórico razonable para describir al objeto compacto. Podemos interpretar este resultado como un argumento que favorece la veracidad de la conjetura débil de censura cósmica en ambientes astronómicos.



## Capítulo 13

# Trabajo a futuro



Roberto Fontanarrosa. Inodoro Pereyra.

Presentamos algunas de las líneas de trabajo que quedaron pendientes y que pretendemos desarrollar a futuro.

En relación con los resultados de estabilidad de soluciones que violan la conjetura de Penrose, pretendemos:

- Continuar buscando la causa de la aparición de estos modos resonantes.
- Estudiar la factibilidad de que los modos electromagnéticos inestables sirvan como fuente para los modos gravitacionales inestables cuya existencia está demostrada.
- Demostrar, de ser cierto, el teorema de inexistencia de resonancias no axiales en el espaciotiempo de Kerr súper extremo y en el interior del agujero negro. Para ello, muy probablemente, sea necesario realizar un estudio que involucre analizar las propiedades analíticas de las funciones de Heun [62].
- Continuar explorando la relación entre soluciones que poseen curvas temporales cerradas y la aparición de inestabilidades, para ello se pretende estudiar, entre otros, el caso del espaciotiempo BTZ en rotación no extrema y el del cilindro de polvo de van Stockum. Además, sería interesante extender el análisis a perturbaciones por campos de prueba que no escalares.

En relación a continuar explorando los aportes observacionales relacionados con la validez de la conjetura débil de Penrose que pueden realizarse con el estudio de discos de acreción magnetizados pretendemos:

- estudiar, con más detalle, los efectos del campo de inducción magnética dipolar, explorando completamente el espacio de parámetros que alteran el espectro de emisión,
- revisar los efectos sobre los espectros térmicos observados al modificar la hipótesis  $r_{\text{ext}} = 11r_{\text{uoc}}$ ,

- estudiar los efectos sobre modelos más complejos de discos de acreción, relajando, por ejemplo, la hipótesis de que los mismos sean delgados,
- analizar las consecuencias observacionales del movimiento del *punto caliente* en el disco de acreción,
- estudiar los perfiles de la línea fluorescente  $K\alpha$  del hierro, también utilizada para estimar el parámetro de rotación de objetos completamente colapsados por la gravedad (realizado, posterior a la defensa de este trabajo, en [127]),
- analizar la emisión producida por un “punto caliente”<sup>1</sup> y su factibilidad como herramienta capaz de ser utilizada para diferenciar diferentes modelos teóricos,
- estudiar el efecto de configuraciones de campo de inducción magnética más complejas sobre propiedades observables de discos de acreción,
- analizar la factibilidad de extender el estudio perturbativo a orden  $\lambda^2$  o la de realizar un estudio completamente numérico para poder estudiar los efectos observables para un rango mayor de valores para  $\lambda$  y
- extender el estudio realizado para el caso de campo dipolar al intervalo de valores del parámetro de rotación en el intervalo  $0.95 < a < 1.20$  (este punto fue realizado, posterior a la defensa de este trabajo, en [127]).

Estos estudios son interesantes ya que darían herramientas fuertes asociadas con métodos robustos de estimación del parámetro de rotación, por lo que resultan de gran interés para poner a prueba desde un punto de vista observacional a la conjetura débil de censura cósmica de Penrose.

---

<sup>1</sup>Conocido en la literatura en inglés como “hot spot”.

Parte V

Apéndices



# Apéndice A

## El formalismo de Newman-Penrose

Existen diferentes formalismos matemáticos para presentar a la teoría general de la relatividad, desde el más tradicional, que usa como variables fundamentales a las componentes del tensor métrico y a los símbolos de Christoffel como conexión, hasta todas las versiones de formalismos de tetradas que se encuentran disponibles, pasando por los métodos que se basan en formas diferenciales de Cartan. Cada uno tiene sus campos de aplicación donde se vuelven extremadamente versátiles. Las siguientes características del formalismo Newman-Penrose (NP) lo vuelven muy útil: las ecuaciones con las que uno debe lidiar son de primer orden en el plano complejo, por lo que el número de ecuaciones con las que uno trabaja se reducen a la mitad. Además, una vez que se tienen definidas las cantidades propias del formalismo, las ecuaciones se escriben sin la necesidad de índices o de la convención de suma de Einstein, cosa que permite enfocar la atención en ciertos *escalares* para buscar soluciones de modo muy eficiente.

En el formalismo NP se proyecta las ecuaciones de Einstein sobre una tetrada nula compleja, esto permite expresar la geometría de un dado espaciotiempo en función de campos complejos sobre dicha tetrada. Uno de los puntos fuertes de este formalismo es lo robusto que es al momento de trabajar con campos que se propagan a la velocidad de la luz.

La tetrada utilizada por el formalismo NP es una donde se eligen 4 vectores nulos, dos de los cuales son reales que se suelen denotar como  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{n}$ . Dichos vectores apuntan en la dirección radial entrante y saliente respectivamente y se eligen de modo de ser tipo tiempo. Los otros dos son un par de vectores complejos conjugados entre sí que suelen denominarse  $\mathbf{m}$  y  $\bar{\mathbf{m}}$  y son ejes espinoriales. Además de ser vectores nulos, a estos vectores se los suele restringir para que cumplan las siguientes relaciones de normalización:  $l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1$ .

Para cada problema particular debe elegirse la tetrada que haga uso de las características de la geometría del espaciotiempo en cuestión. Para el caso del espaciotiempo de Kerr, la elección que suele realizarse es la siguiente: los vectores  $l^\mu$  y  $n^\mu$  corresponden a los que señalan las direcciones radiales nulas entrantes y salientes respectivamente. El vector  $m^\mu$  y su complejo conjugado, se construyen eligiendo vectores unitarios tipo espacio que señalen las direcciones de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  ( $a^\mu$  y  $b^\mu$ ) y luego se construye  $m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\mu - ib^\mu)$ . Esta estrategia es la que suele utilizarse para construir la tetrada apropiada para cualquier espaciotiempo con simetría *cuasiesférica*.

Utilizando esta tetrada, el formalismo define 12 funciones complejas que definen cómo cambia la tetrada punto a punto en el espaciotiempo, son las proyecciones de las derivadas de los vectores de la tetrada sobre cada elemento de la misma. Se suelen denotarlos como:  $\kappa, \rho, \sigma, \tau, \epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \pi, \lambda, \mu$  y  $\nu$ , y se los denomina *coeficientes de espín*, y son análogos, de alguna manera, a los símbolos de Christoffel. Luego, se definen otras 5 funciones complejas que codifican la información contenida en el tensor de Weyl proyectado sobre la tetrada, los mismos se denotan como:  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  y  $\Psi_4$  y reciben el nombre de *escalares de Weyl*. Finalmente, se definen 10 funciones complejas que contienen toda la información del tensor de Ricci proyectado sobre la tetrada, éstos son denotadas por:  $\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{02}, \Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{20}, \Phi_{21}, \Phi_{22}$  y  $\Lambda$  y reciben el nombre de *escalares de Ricci*.

Para presentar las ecuaciones de este formalismo debemos presentar la notación que utilizaremos.

El conjunto de vectores tetrados,  $\lambda_i^a$ , será definido como:

$$\lambda_i^a = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a),$$

y al conjunto de las derivadas direccionales con:

$$\nabla_i \equiv \lambda_i^b \nabla_b = (D, \Delta, \delta, \bar{\delta}).$$

Luego, construimos los coeficientes de rotación de Ricci que corresponden a las componentes tetradas de las derivadas covariantes de dichos vectores tetrados. Denotaremos a los mismos como:

$$\gamma^i{}_{jk} = \lambda_j^b \lambda_k^a \nabla_a \lambda_b^i,$$

y

$$\gamma_{ijk} = -\gamma_{jik} = \eta_{il} \gamma^l{}_{jk},$$

donde:

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora presentamos los coeficientes de espín como combinaciones complejas de los coeficientes de rotación de Ricci, las expresiones de cada uno de ellos viene dada por:

$$\begin{aligned} \pi &= -\gamma_{241}, & \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}), & \kappa &= \gamma_{131}, & \lambda &= -\gamma_{244} \\ \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}), & \rho &= \gamma_{134}, & \mu &= -\gamma_{243}, & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) \\ \sigma &= \gamma_{133}, & \nu &= -\gamma_{242}, & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}), & \tau &= \gamma_{132}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

El origen de estas combinaciones particulares (no de los nombres) queda manifiesta cuando se los escribe en un marco espinorial,  $(o^A, \iota^A)$ . Aquí utilizamos la notación de índices abstractos donde cada índice tensorial debe entenderse como su correspondiente par de índices espinoriales (expresados en mayúsculas), uno primado y otro no (es decir,  $a = AA'$ ). Los índices primados corresponden a un espacio espinorial que es el complejo conjugado del no primado. Los índices espinoriales suben o bajan con las cantidades  $\varepsilon^{AB}$  y  $\varepsilon_{AB}$ , respectivamente. Estas dos cantidades antisimétricas son inversas una de la otra, en el sentido de que satisfacen la relación  $\varepsilon^{AC} \varepsilon_{CB} = \delta_B^A$ . Con esta notación, los vectores de la tetrada nula se escriben:

$$l^a = o^A \bar{o}^{A'} \quad m^a = o^A \iota^{A'} \quad \bar{m}^a = \iota^A \bar{o}^{A'} \quad n^a = \iota^A \iota^{A'}.$$

La normalización que se elige para las cantidades  $\iota^A$  y  $o^A$  es:

$$o_A \iota^A = 1 \quad (\iota_A o^A = -1)$$

además, satisfacen:

$$o_A o^A = \iota_A \iota^A = 0.$$

Dicho esto, puede obtenerse que la base dual a  $(o^A, \iota^A)$  es  $(-\iota^A, o^A)$ , lo que motiva escribir:

$$\varepsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B \quad \varepsilon^{AB} = o^A \iota^B - \iota^A o^B.$$

De esta forma, el tensor métrico que, en función de los elementos de la base tetrada, se escribía como:

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b - m_a \bar{m}_b - \bar{m}_a m_b,$$

ahora se expresa como:

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g_{AA'BB'} = \varepsilon_{AA'} \varepsilon_{BB'} = (o_A \iota_B - \iota_A o_B)(\bar{o}_{A'} \bar{\iota}_{B'} - \bar{\iota}_{A'} \bar{o}_{B'}) \\ &= o_A \bar{o}_{A'} \iota_B \bar{\iota}_{B'} + \iota_A \bar{\iota}_{A'} o_B \bar{o}_{B'} - o_A \bar{\iota}_{A'} \iota_B \bar{o}_{B'} - \iota_A \bar{o}_{A'} o_B \bar{\iota}_{B'}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Usando esta notación, los coeficientes de espín (A.1) se escriben como:

$$\begin{aligned} \pi &= \gamma_{00'11} = \iota^A \nabla_{00'} \iota_A, & \epsilon &= \gamma_{00'10} = \iota^A \nabla_{00'} o_A, & \kappa &= \gamma_{00'00} = o^A \nabla_{00'} o_A, & \lambda &= \gamma_{10'11} = \iota^A \nabla_{10'} \iota_A, \\ \alpha &= \gamma_{10'10} = \iota^A \nabla_{10'} o_A, & \rho &= \gamma_{10'00} = o^A \nabla_{10'} o_A, & \mu &= \gamma_{01'11} = \iota^A \nabla_{01'} \iota_A, & \beta &= \gamma_{01'10} = \iota^A \nabla_{01'} o_A, \\ \sigma &= \gamma_{01'00} = o^A \nabla_{01'} o_A, & \nu &= \gamma_{11'11} = \iota^A \nabla_{11'} \iota_A, & \gamma &= \gamma_{11'10} = \iota^A \nabla_{11'} o_A, & \tau &= \gamma_{11'00} = o^A \nabla_{11'} o_A. \end{aligned}$$

Finalmente, estamos en condiciones de presentar las ecuaciones fundamentales de este formalismo, las *ecuaciones NP*. Estas ecuaciones son (en el caso más general) un número grande de ecuaciones diferenciales complejas acopladas que se separan (naturalmente) en tres conjuntos bien diferenciados.

Las ecuaciones métricas, que relacionan los coeficientes de espín con las derivadas de los vectores de la tetraada, son:

$$\begin{aligned}
\Delta l^a - Dn^a &= (\gamma + \bar{\gamma})l^a + (\epsilon + \bar{\epsilon})n^a - (\tau + \bar{\pi})\bar{m}^a - (\bar{\tau} + \pi)m^a, \\
\delta l^a - Dm^a &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})l^a + \kappa n^a - \sigma\bar{m}^a - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})m^a, \\
\delta n^a - \Delta m^a &= -\bar{\nu}l^a + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)n^a + \bar{\lambda}\bar{m}^a + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})m^a, \\
\bar{\delta}m^a - \delta\bar{m}^a &= (\bar{\mu} - \mu)l^a + (\bar{\rho} - \rho)n^a - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{m}^a + (\alpha - \bar{\beta})m^a.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de los coeficientes de espín, que relacionan al tensor de curvatura con derivadas de la conexión, son:

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= -(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4, \\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1, \\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2, \\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3, \\
\delta\nu - \Delta\mu &= \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}), \\
\delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda}, \\
\delta\tau - \Delta\sigma &= \mu\sigma + \rho\bar{\lambda} + \tau(\tau + \beta - \bar{\alpha}) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu}, \\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \kappa\nu - \Psi_2, \\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \Psi_3, \\
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi), \\
D\sigma - \delta\kappa &= (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0, \\
D\tau - \Delta\kappa &= (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1, \\
D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi, \\
D\beta - \delta\epsilon &= (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1, \\
D\gamma - \Delta\epsilon &= (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2, \\
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda, \\
D\mu - \delta\pi &= \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \Psi_2, \\
D\nu - \Delta\pi &= (\bar{\tau} + \pi)\mu + (\tau + \bar{\pi})\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3.
\end{aligned}$$

Por último, presentamos las identidades de Bianchi que no son otra cosa que la versión proyectada sobre la tetraada de las identidades tradicionales de Bianchi. Las mismas vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\Psi_0 - D\Psi_1 &= (4\alpha - \pi)\Psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2, \\
\bar{\delta}\Psi_1 - D\Psi_2 &= \lambda\Psi_0 + 2(\alpha - \pi)\Psi_1 - 3\rho\Psi_2 + 2\kappa\Psi_3, \\
\bar{\delta}\Psi_2 - D\Psi_3 &= 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\epsilon - \rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4, \\
\bar{\delta}\Psi_3 - D\Psi_4 &= 3\lambda\Psi_2 - 2(\alpha + 2\pi)\Psi_3 + (4\epsilon - \rho)\Psi_4, \\
\Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 &= (4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2, \\
\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2 &= \nu\Psi_0 + 2(\gamma - \mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3, \\
\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 &= 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta - \tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4, \\
\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 &= 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4.
\end{aligned}$$



## Apéndice B

# Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr

La naturaleza del espaciotiempo de Kerr depende de la relación entre los parámetros que lo definen, por este motivo presentamos los tres casos (subextremo, extremo y súper extremo) de forma independiente.

### B.1. Caso subextremo

Para obtener el diagrama de Penrose de la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Kerr en el caso subextremo ( $a < M$ ) se debe continuar analíticamente las coordenadas a través de la *esfera de bifurcación* correspondiente a cada uno de los dos horizontes,  $r_{\pm}$ .

Si bien el espaciotiempo de Kerr posee una singularidad de curvatura, las secciones de coordenada constante  $\theta = 0, \pi/2$  son geodésicamente completas, esto permite obtener el diagrama de Penrose asociado a ellas. Presentaremos los desarrollos correspondientes al caso en que  $\theta = 0$ .

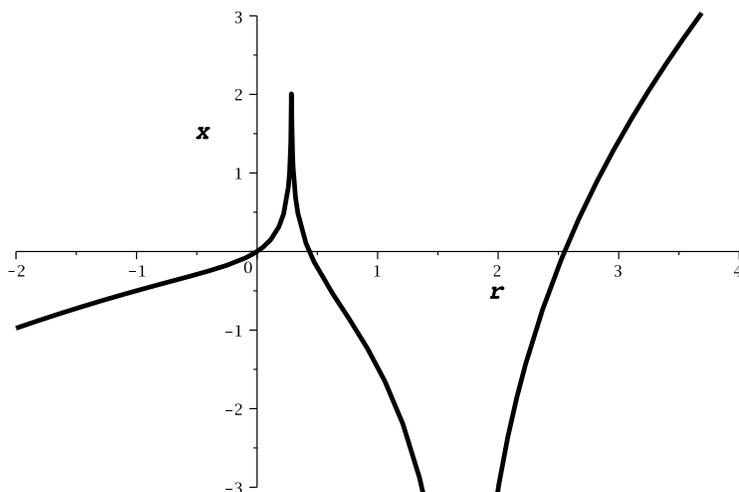


Figura B.1: Coordenada radial,  $x$ , definida en (B.2), presentada como función de la coordenada radial de Boyer-Lindquist,  $r$ . Este gráfico, realizado para el caso en que  $M = 1$ ,  $a = 0.7$ , muestra, cualitativamente, el comportamiento para la coordenada  $x$  en el caso general cuando  $a < M$ . Notar el comportamiento de la función en los horizontes  $r_- = 0.286$  y  $r_+ = 1.714$ .

En este caso, el elemento de línea se simplifica a:

$$ds_{\theta=0}^2 = -b(r)dt^2 + \frac{1}{b(r)}dr^2, \quad (\text{B.1})$$

donde estamos utilizando las coordenadas de Boyer-Lindquist y hemos definido la función  $b(r) = \Delta/(r^2 + a^2)$ .

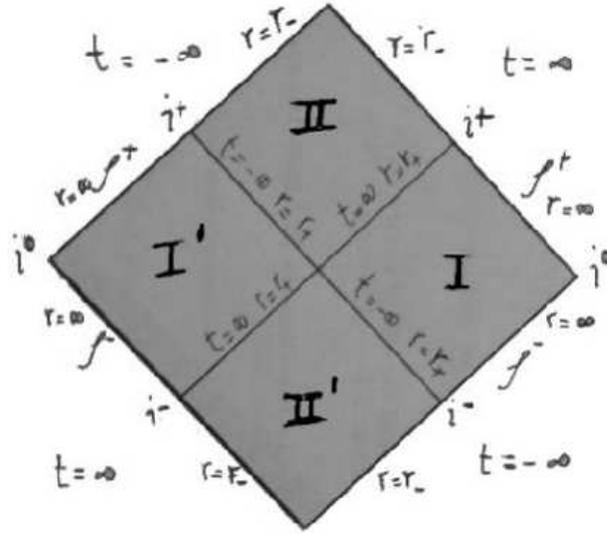


Figura B.2: Diagrama de Penrose de la sección  $\theta = 0$  para la región  $r > r_-$ .

Puede verse que  $r_{\pm}$  son (los únicos) ceros de la función  $b(r)$ .

Introduciendo la coordenada radial  $x$ , definida a través de la ecuación  $dx = dr/b(r)$ . Esta ecuación puede resolverse para obtener la siguiente expresión para la nueva coordenada radial (ver la [Figura B.1](#), para visualizar la relación el caso especial en el que  $M = 1$ ,  $a = 0.7$ ):

$$x = r + \frac{1}{2\xi_+} \ln \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right| + \frac{1}{2\xi_-} \ln \left| 1 - \frac{r}{r_-} \right|, \quad (\text{B.2})$$

donde hemos definimos las cantidades:

$$\xi_{\pm} = \frac{r_{\pm} - M}{2Mr_{\pm}}.$$

Utilizando estas coordenadas, el elemento de línea (B.1) se escribe como:

$$ds_{\theta=0}^2 = b(r) (-dt^2 + dx^2). \quad (\text{B.3})$$

Trabajemos con la región KI, en la que  $r > r_+$ . Primero, introducimos coordenadas nulas dadas por:

$$u = t - x, \quad v = t + x.$$

Las mismas nos permiten describir el plano real completamente. A continuación, introducimos otro par de nuevas coordenadas definidas como:

$$\hat{u} = -e^{-\xi+u}, \quad \hat{v} = e^{\xi+v},$$

que, si nos restringimos a la región KI, toman valores  $\hat{u} > 0$ ,  $\hat{v} < 0$ . Utilizando estas coordenadas para expresar el elemento de línea (B.3), el mismo puede escribirse como:

$$ds_{\theta=0}^2 = -f(r)d\hat{u}d\hat{v},$$

donde la función  $f(r)$  presenta el siguiente comportamiento:

$$f(r) \sim \frac{(r - r_-)^{1 - \frac{\xi_+}{\xi_-}}}{r^2 + a^2} e^{-2\xi+r},$$

con  $r$  definida implícitamente a través de la relación:

$$\hat{u}\hat{v} = e^{2\xi+r} \left( 1 - \frac{r}{r_+} \right) \left( \frac{r}{r_-} - 1 \right)^{\frac{\xi_+}{\xi_-}}.$$

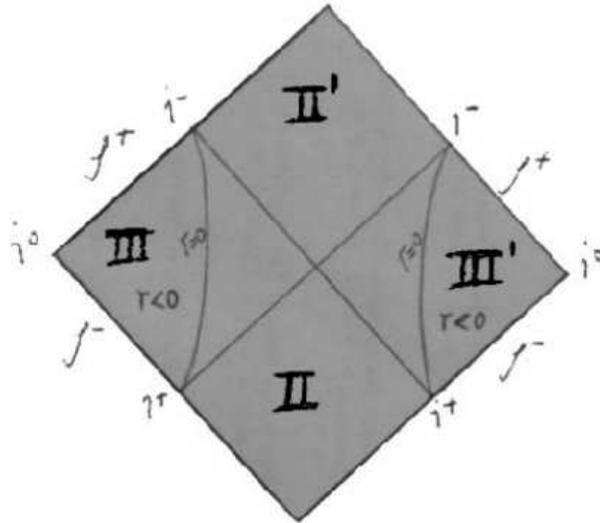


Figura B.3: Diagrama de Penrose de la sección  $\theta = 0$  para la región  $r < r_+$ .

La métrica resulta regular en el horizonte de eventos,  $r_+$ , sin embargo se podrá extender el dominio de las coordenadas  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  a todo el plano real. El resultado de este procedimiento es el diagrama que se muestra en la [Figura B.2](#).

Para estudiar la región  $-\infty < r < r_+$  introducimos coordenadas definidas de forma similar a las  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  que la cubren completamente y se solapan con las definidas anteriormente en la región KII. Siguiendo un razonamiento completamente similar al que presentamos anteriormente, puede construirse un diagrama como el presentado en la [Figura B.3](#). Al unir los diagramas en la región donde se produce el solapamiento, se obtiene el diagrama de Penrose para  $\theta = 0$ . Este espaciotiempo puede, notando que las regiones KIII y KIII' son equivalentes, ser extendido analíticamente. Realizando este proceso (¡infinitas veces!) se obtendrá el diagrama de Penrose de la extensión analítica máxima del espaciotiempo de Kerr (para  $\theta = 0$ ).

Presentamos el resultado en la [Figura B.4](#) donde puede observarse como se repite, infinitas veces, la estructura de bloques KI, KII y KIII.

Un proceso análogo lleva a la construcción del diagrama para el caso  $\theta = \pi/2$ , que posee características similares al que presentamos anteriormente.

## B.2. Casos extremo y súper extremo

En este caso la superficie  $r = M$  corresponde a un horizonte de Killing degenerado (notar que cuando  $a = M$  la función  $\Delta$  posee una raíz doble en  $r = M$ ). En este caso, el diagrama de Penrose puede obtenerse utilizando un procedimiento como el que presentamos para el caso subextremo. En el mismo la región KII no estará presente.

Presentamos el diagrama de Penrose para este caso en la [Figura B.5](#).

En el caso súper extremo, en el que  $a > M$ , el espaciotiempo se encuentra extendido en forma maximal por lo que ningún tipo de procedimiento de extensión debe realizarse.

En particular presentamos el diagrama asociado a las subvariedad dada por  $\theta = \pi/2$  en la [Figura B.6](#) y el asociado a  $\theta = 0, \pi$  en la [Figura B.7](#).

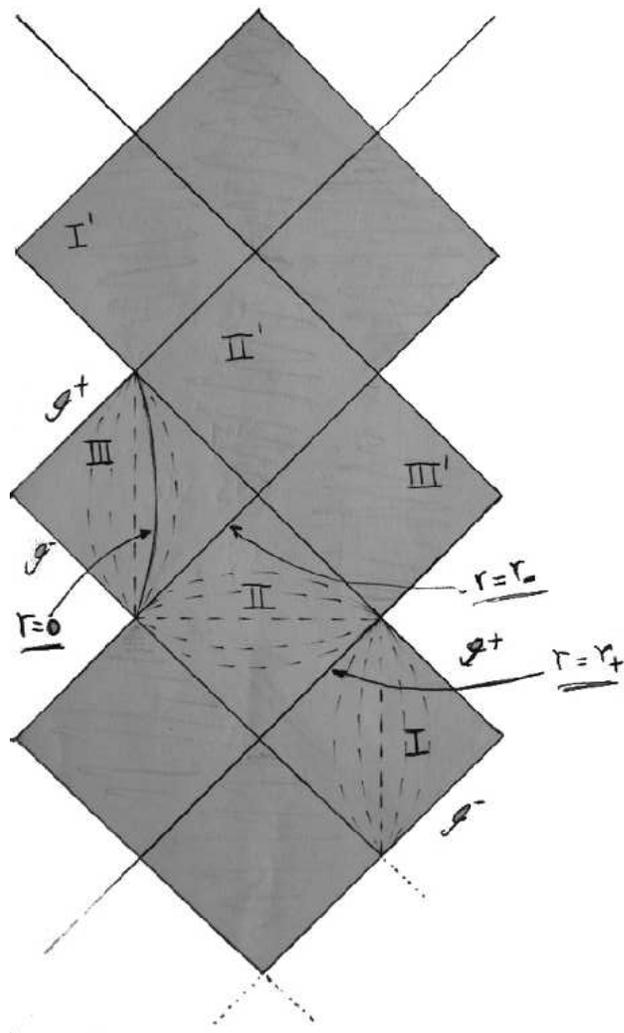


Figura B.4: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr subextremo para  $\theta = 0$ .

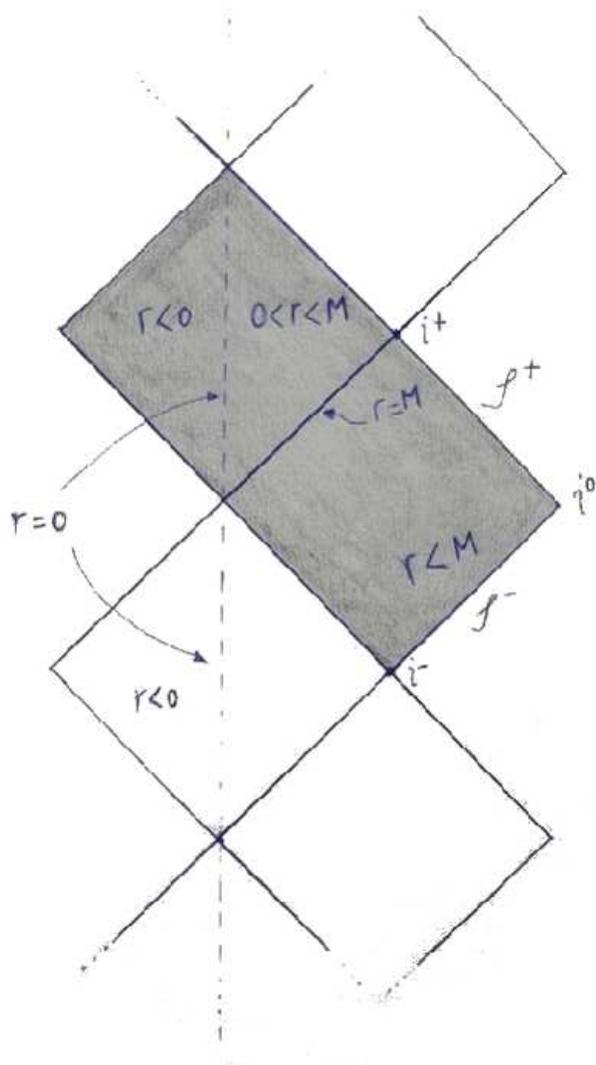


Figura B.5: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr extremo para  $\theta = 0$ .

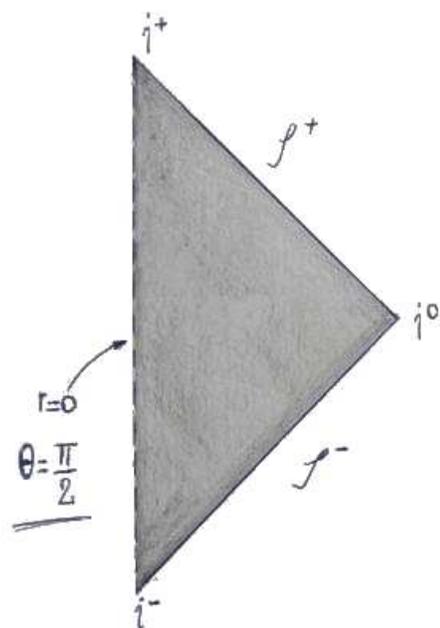


Figura B.6: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr súper extremo para  $\theta = \pi/2$ .

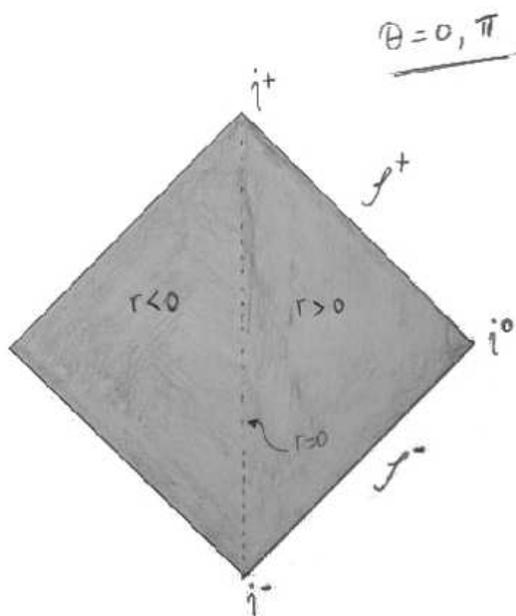


Figura B.7: Diagrama de Penrose del espaciotiempo de Kerr súper extremo para  $\theta = 0, \pi$ .

# Apéndice C

## La ecuación de Raychaudhuri

### C.1. Congruencias de geodésicas y condiciones de energía

Una *congruencia de geodésicas* designa a un sistema completo de geodésicas que no se intersecan entre sí. Para describir dichas congruencias resulta fundamental definir las *condiciones de energía*, el escalar de expansión y los tensores de rotación y cizalladura. Estas definiciones nos serán útiles para derivar la *ecuación de Raychaudhuri* que define como evoluciona el escalar de expansión.

Además de ser fundamentales a la hora de estudiar la formación de singularidades, las técnicas y resultados que vamos a presentar se aplican, entre otros campos, en el estudio de la estructura de horizontes de eventos de agujeros negros.

Las condiciones de energía son diferentes relaciones que satisface el tensor energía-impulso de un dado fluido. La exigencia de positividad a la densidad de energía, es una de ellas.

Presentamos un resumen de las condiciones de energía más utilizadas. Denotaremos con  $T_{ab}$  al tensor de energía impulso, con  $\rho$  a la densidad de energía y con  $p_i$  a las componentes de la presión en una tetraeda ortonormal. Además,  $v^a$  será un vector tipo tiempo dirigido hacia el futuro y normalizado que representará la 4-velocidad de un observador arbitrario y  $k^a$  un vector nulo arbitrario dirigido hacia el futuro. Con estas convenciones, las condiciones de energía más conocidas pueden escribirse como:

- Condición *débil* de energía:

Se debe satisfacer:  $T_{ab}v^av^b \geq 0$ , lo que implica que  $\rho \geq 0$  y  $\rho + p_i > 0$ . Es decir, cualquier observador debe medir una densidad de energía no negativa.

- Condición *nula* de energía:

Se debe satisfacer:  $T_{ab}k^ak^b \geq 0$ , lo que implica que  $\rho + p_i \geq 0$ . Puede demostrarse que cualquier fluido que cumpla con la condición débil de energía también cumplirá esta condición.

- Condición *fuerte* de energía:

Se debe satisfacer:  $(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})v^av^b \geq 0$ , por lo que  $\rho + \sum_i p_i \geq 0$  y  $\rho + p_i > 0$ . Es importante notar que a partir de esta condición de energía no podemos obtener la condición débil pero sí la nula.

- Condición *dominante* de energía:

$-T_b^av^b$  está dirigido al futuro, de modo que se deben cumplir las condiciones  $\rho \geq 0$  y  $\rho \geq |p_i|$ . Esta condición materializa la idea de que cualquier elemento de materia debe fluir a lo largo de trayectorias no espaciales. Si un fluido satisface esta condición también cumple con la débil.

Si bien la mayoría de los fluidos clásicos satisfacen alguna de las condiciones de energía mencionadas, esto no es cierto para campos cuánticos como el de Casimir, en el que la densidad de energía de vacío entre dos placas conductoras resulta negativo.

Introduciremos los tensores que mencionamos al inicio de este Apéndice. A partir del vector temporal,  $V_a$ , asociado a una cierta congruencia se puede definir un vector transversal a la misma:  $B_{ab} = V_{a;b}$ . Dicho

vector puede reescribirse del siguiente modo:

$$B_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab},$$

donde,  $\theta = B^a_a$  es el escalar de expansión,  $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{\theta}{3}h_{ab}$  y  $\omega_{ab} = B_{[ab]}$  se conocen como el tensor de cizalladura y el de rotación respectivamente. El tensor  $h_{ab}$ , por su parte el la parte transversa a la congruencia del tensor métrico,  $g_{ab}$ .

## C.2. Teorema de enfoque gravitacional

El concepto de *enfoque gravitacional* es útil a la hora de analizar la formación de superficies *atrapadas* durante el proceso de colapso gravitacional.

El fenómeno de enfoque se produce dado que la presencia de materia, cuyo tensor de energía es positivo, hará que en una congruencia, geodésicas que inicialmente se encuentran alejándose entre ellas comiencen, en el futuro, a converger.

Consideremos una congruencia de geodésicas temporales que sean, además, suaves de forma que pueda definirse un campo vectorial temporal. Tomemos el vector tangente temporal normalizado a esta congruencia al que denotaremos con  $V^a$ . Utilizando este vector, puede obtenerse la parte transversal del tensor métrico a la que denotaremos con  $h_{ab} = g_{ab} + V_a V_b$ .

Las siguientes propiedades de  $h_{ab}$  hacen que  $h^a_b$  reciba en el nombre de *proyector* sobre el subespacio ortogonal al vector  $V^a$  en un punto  $p$ . Denotaremos dicho subespacio con  $T_p$ , utilizando la nomenclatura tradicional. Las propiedades de este proyector son:

$$h^a_b = \delta^a_b + V^a V_b = g^{ac} V_a V_b, \quad h_{ab} V^a = h_{ab} V^b = h^a_b V_a = h^a_b V^b.$$

Los índices de  $h_{ab}$  se suben o bajan del mismo modo que los del tensor métrico.

Como cualquier otra, esta congruencia de geodésicas temporales queda definida por los tensores de expansión, cizalladura y rotación:

$$\theta_{ab} = V_{(c;d)} h^c_a h^d_b, \quad \sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3} h_{ab} \theta, \quad \omega_{ab} = h^c_a h^d_b V_{[c;d]},$$

donde el *volumen de expansión* se define como  $\theta = \theta_{ab} h^{ab} = V_{(c;d)} h^{cd} = V^d_{;d}$ . La derivada covariante del campo vectorial  $V_a$  puede expresarse en término de los tres tensores fundamentales que lo determinan dado que  $V_{a;b} = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \theta_{ab}/3$ .

A partir de las ecuaciones de las geodésicas puede concluirse que:

$$V^c V_{a;bc} = V^c V_{a;cb} + R_{acdb} V^c V^d. \quad (\text{C.1})$$

Tomando la traza de la ecuación (C.1) se obtiene, si denotamos con  $\tau$  al parámetro afín a lo largo de la geodésica, que:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = V^c V^a_{;ac} = -V^c_{;a} V^a_{;c} - R_{ab} V^a V^b.$$

La ecuación anterior puede reescribirse para obtener que:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -R_{ab} V^a V^b - \frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + 2\omega^2. \quad (\text{C.2})$$

Esta ecuación, descubierta, en forma independiente, por Amal Kumar Raychaudhuri y Lev Davidovich Landau, recibe el nombre de ecuación de Raychaudhuri. La misma describe la tasa con la que un elemento de volumen sufre modificaciones a medida que las geodésicas temporales evolucionan dentro de la congruencia.

Presentamos un resultado que se desprende de la ecuación de Raychaudhuri (C.2) cuando el campo de energía satisface la condición fuerte de energía y la congruencia de geodésicas temporales es *ortogonal a hipersuperficies*. Esta última condición se traduce en el hecho de que el término asociado a  $\omega^2$  en (C.2) se anule, de este modo puede concluirse que la derivada del parámetro de expansión  $\theta$  tiene signo negativo definido. Además, puede demostrarse que la misma satisface la condición:

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{\theta^2}{3},$$

que da una cota al modo en que  $\theta$  debe, indefectiblemente, decrecer a lo largo de geodésicas temporales por efecto de la atracción gravitatoria.

## Apéndice D

# Las funciones de Whittaker

Para el estudio de las perturbaciones por campos escalares al espaciotiempo BTZ extremo en gravedad de  $(2 + 1)$  dimensiones, es necesario estudiar a las funciones de Whittaker, introducidas, a principio del siglo pasado, por el matemático inglés Edmund Taylor Whittaker. En este apéndice presentamos algunas definiciones y sus propiedades centrales.

Tomamos como referencia central a la *Digital Library of Mathematical Functions*. Con un número entre paréntesis denotamos la nomenclatura utilizada en la página <http://dlmf.nist.gov>.

La ecuación de Whittaker puede escribirse como:

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right)W = 0.$$

La misma posee singularidades regulares en el origen, con índices  $1/2 \pm \mu$  y una singularidad irregular de orden 1 en el infinito.

Las soluciones estándar a dicha ecuación, salvo en los casos  $2\mu = -1, -2, \dots$  cuando  $W_M(\kappa, \mu, z)$  no se encuentra definida, son:

$$(13.14.2) \quad W_M(\kappa, \mu, z) = e^{-z/2} z^{1/2+\mu} M(1/2 + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z) \quad (D.1)$$

y

$$(13.14.3) \quad W_W(\kappa, \mu, z) = e^{-z/2} z^{1/2+\mu} U(1/2 + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z), \quad (D.2)$$

donde  $M(a, b, z)$  y  $U(a, b, z)$  son las llamadas funciones confluentes de Kummer. Definidas, en los casos en los que  $a = 0, -1, -2, \dots$ , como:

$$(13.2.10) \quad U(a, n+1, z) = (-1)^a \sum_{k=0}^{-a} \binom{-a}{k} (n+k+1)_{-a-k} (-z)^k, \quad (D.3)$$

y como:

$$(13.2.9) \quad U(a, n+1, z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \Gamma(a-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(n+1)_k k!} z^k (\ln z + \psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(n+k+1)) \\ + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)! (1-a+k)_{n-k}}{(n-k)!} z^{-k}, \quad (D.4)$$

cuando  $b = n+1$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ . La función  $\psi(z)$  es conocida como función digamma y está definida como:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

La siguiente expresión asintótica para argumento  $z \gg 1$  resulta válida:

$$(13.7.10) \quad U(a, b, z) \sim z^{-a} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(a)_s (a-b+1)_s}{s!} (-z)^{-s}. \quad (D.5)$$

Un desarrollo asintótico para la función  $W_M$ , válido para  $z \gg 1$  si además se satisfacen las condiciones:  $\mu \mp \kappa \neq -1/2, -3/2, \dots$  y  $-\pi/2 + \delta \leq \pm \arg(z) \leq \pi/2 - \delta$ , está dado por:

$$(13.19.2) \quad W_M(\kappa, \mu, z) \sim \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)} e^{\frac{1}{2}z} z^{-\kappa} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \mu + \kappa)_s (\frac{1}{2} + \mu + \kappa)_s}{s!} z^{-s} \\ + \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \kappa)} e^{-\frac{1}{2}z \pm (\frac{1}{2} + \mu - \kappa)\pi i} z^{\kappa} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_s (\frac{1}{2} - \mu - \kappa)_s}{s!} (-z)^{-s}. \quad (D.6)$$

A modo de ejemplo, presentamos la expresión en serie para la función  $W_M(\kappa, \mu, z)$  cuando  $2\mu \neq -1, -2, \dots$ :

$$W_M(\kappa, \mu, z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2} + \mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)_s}{(1+2\mu)_s s!} z^s,$$

la misma es convergente en todo el plano complejo. Con  $(a)_s$  denotamos al símbolo de Pochhammer, introducido por el matemático Prusiano Leo August Pochhammer.

Por el contrario, cuando  $2\mu = -1, -2, \dots$  dicha función puede escribirse a través de los límites que la contienen, por ejemplo cuando  $n = 0, 1, 2, \dots$  resulta válido que:

$$\lim_{2\mu \rightarrow -n-1} \frac{W_M(\kappa, \mu, z)}{\Gamma(2\mu+1)} = \frac{(-\frac{1}{2}n - \kappa)_{n+1}}{(n+1)!} W_M\left(\kappa, \frac{1}{2}(n+1)z\right) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{-\frac{1}{2}n} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}n - \kappa)_s}{\Gamma(s-n) s!} z^s.$$

A continuación, presentamos las expresiones específicas que utilizamos en la [Subsección 8.3.2](#) en el estudio de campos escalares en el espaciotiempo BTZ extremo. La función  $W_M$  puede continuarse en forma analítica, una expresión para la misma es:

$$(13.4.10) \quad W_M(\kappa, \mu, ze^{i\pm\pi}) = \pm ie^{\pm i\mu} W_M(-\kappa, \mu, z). \quad (D.7)$$

El comportamiento asintótico de  $W_W$  para  $z \gg 1$  siempre que  $|\arg z| < 3\pi/2 - \delta$ , donde  $\delta$  es una constante positiva pequeña, está dado por:

$$(13.14.21) \quad W_W(\kappa, \mu, z) \sim e^{-z/2} z^{\kappa}. \quad (D.8)$$

Para finalizar, presentamos algunas propiedades del Wronskiano de estas funciones:

$$\mathcal{W}[W_M(\kappa, \mu, z), W_W(\kappa, \mu, z)] = -\frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(1/2 + \mu - \kappa)} \quad (D.9)$$

y

$$\mathcal{W}[W_W(\kappa, \mu, z), W_W(-\kappa, \mu, ze^{\pm i\pi})] = e^{\mp i\pi\kappa}. \quad (D.10)$$

# Bibliografía

- [1] Listado de libros de asidua lectura y referencia. Citados en las páginas [3](#), [35](#), [44](#), [50](#), [57](#), [125](#)
- (I) *General Relativity*, R.M. Wald, The University of Chicago Press, (1984).
- (II) *The Mathematical Theory of Black Holes*, S. Chandrasekhar, Oxford University Press, (1992).
- (III) *Bangs, Crunches, Whimpers and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*, J. Earman, Oxford, University Press, (1995).
- (IV) *General Relativity: An Einstein centenary survey*, S.W. Hawking y W. Israel (eds.), Cambridge University Press, (1979).
- (V) *The Large Scale Structure of Space-time*, S.W. Hawking y G.F.R Ellis, Cambridge University Press, (1973).
- (VI) *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, V.P. Frolov y I.D. Novikov, Klower Academic Publishers, (1997).
- (VII) *The Geometry of Kerr Black Holes*, B. O'Neill, A K Peters, Ltd. (1995).
- (VIII) *General Relativity: An Introduction for Physicists*, M.P. Hobson, G.P. Efstathiou y A.N. Lasenby, Cambridge University Press, (2006).
- (IX) *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*, P.S. Joshi, Cambridge University Press, (2007).
- (X) *Relativity and the Nature of Spacetime*, V. Petkov, Springer-Verlag Berlin, (2009).
- (XI) *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, E. Poisson, Cambridge University Press, (2004).
- [2] C.M. Will, *The Confrontation Between General Relativity and Experiment*, *Living Rev. Relativity*, **9**, (2006), 3. [Versión en red](#). Citado en la página [4](#)
- [3] T. Harko, F.S.N. Lobo, S. Nojiri y S.D. Odintsov, *Phys.Rev.D*, **84**, 024020, (2011), [[arXiv:1104.2669 gr-qc](#)]; A. De Felice y S. Tsujikawa, *Living Rev. Relativity*, **13**, 3, (2010) [Versión en la red](#). Citados en la página [5](#)
- [4] P. Coles, *Einstein, Eddington and the 1919 Eclipse* en, *Historical Development of Modern Cosmology*, Conference Proceedings Vol. 252. V.J. Martínez, V. Trimble y M.J. Pons-Bordería (Eds.), San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 21, (2001). Citado en la página [5](#)
- [5] C.W.F. Everitt, D.B. DeBra, B.W. Parkinson, J.P. Turneare, J.W. Conklin, M.I. Heifetz, G.M. Keiser, A.S. Silbergleit, T. Holmes, J. Kolodziejczak, M. Al-Meshari, J.C. Mester, B. Muhlfelder, V.G. Solomonik, K. Stahl, P.W. Worden, Jr., W. Bencze, S. Buchman, B. Clarke, A. Al-Jadaan, H. Al-Jibreen, J. Li, J.A. Lipa, J.M. Lockhart, B. Al-Suwaidan, M. Taber y S. Wang, *Phys.Rev.Lett.*, **106**, 221101 (2011). Citado en la página [5](#)
- [6] M. Kamen e I.H. Stairs, *Ann.Rev.A&A*, **46**, 541, (2008). Citado en la página [6](#)
- [7] J.M. Weisberg, D.J. Nice y J.H. Taylor, *ApJ*, **722**, 1030, (2010). Citado en la página [6](#)
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Weiley & Sons, Inc. (1972). Citado en la página [5](#)

- [9] K.L. Nordtvedt, *Phys.Rev.*, **169**, 1014, (1968). Citado en la página **6**
- [10] R.B. Orellana y H. Vucetich, *A&A*, **200**, 248, (1988); R.B. Orellana y H. Vucetich, *A&A*, **273**, 313, (1993). Citados en la página **6**
- [11] G. Dautcourt, *Gen.Relativ.Gravit.*, **41**, 1437, (2009). Citado en la página **7**
- [12] S.L. Shapiro y S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, John Wiley & Sons, Inc. (1983). Citado en las páginas **7, 40**
- [13] B. Carter, *Phys.Rev.Lett.*, **33**, 9, 558, (1974). Citado en la página **13**
- [14] L. Susskind y J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd (2005); E. Sorkin y T. Piran, *Phys.Rev.D*, **63**, 124024, (2001), [[arXiv:gr-qc/0103090](#)]. Citados en la página **14**
- [15] D.N. Page, *ApJ*, **653**, 1400, (2006), [[arXiv:astro-ph/0610340](#)]. Citado en la página **14**
- [16] D. Christodoulou y S. Klainerman, *Princeton Math.Ser.* **41**, Princeton Univ. Press, Princeton, (1993). Citado en la página **51**
- [17] G. Dotti, *Phys.Rev.Lett.*, **112**, 191101, (2014) [[arXiv:1307.3340v2 \[gr-qc\]](#)]. Citado en la página **51**
- [18] K. Lanczos, *Zeitschrift für Physik*, **21**, 1, 73, (1924). Citado en las páginas **14, 92**
- [19] T. Lewis, *Proc.R.Soc.Lond.* **A136**, 176, (1932). Citado en la página **14**
- [20] W.J. van Stockum, *Proc.Roy.Soc. Edinburgh A*, **57**, 135, (1937). Citado en las páginas **14, 92**
- [21] A. Papapetrou, *Ann.Phys. (Leipz.)* **12**, 309, (1953). Citado en la página **14**
- [22] J. Ehlers, Tesis Doctoral Universidad de Hamburgo (1957). Citado en la página **14**
- [23] W.R. Andress, *Proc.Roy.Soc.*, **A126**, 592, (1930); E. Akeley, *Phil. Mag.*, **11**, 322, (1931). Citados en la página **14**
- [24] R.P. Kerr, *Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics*, D.L. Wiltshire, M. Visser y S.M. Scott (Eds.), *The Kerr Spacetime*, Cambridge University Press, (2009). [[arXiv:0706.1109](#)]. Citado en la página **14**
- [25] A.Z. Petrov, *Gen.Relativ.Gravit.*, **32**, 1661, (2000). Artículo original, *Scientific Proceedings of Kazan State University*, **114**, 55, (1954). Citado en la página **14**
- [26] K.S. Thorne, *Black holes and time warps*, W.W. Norton & Co, New York, (2004). Citado en la página **14**
- [27] B. Carter, *Phys.Rev.Lett.*, **26**, 331, (1971). Citado en la página **15**
- [28] D.C. Robinson, *Phys.Rev.Lett.*, **34**, 905, (1975). Citado en la página **15**
- [29] R.P. Kerr, *Phys.Rev.Lett.*, **11**, 237, (1963). Citado en la página **15**
- [30] B. Carter, *Phys.Rev.*, **174**, 1559, (1968); B. Carter, *Has the black hole equilibrium problem been solved?*, Invited talk at 8th Marcel Grossmann Meeting, Jerusalem, Israel, 22-27 Jun 1997. [[arXiv:gr-qc/9712038](#)]. Citados en las páginas **21, 122, 138**
- [31] Ver, por ejemplo: D. Christodoulou, *Ann.Math.*, **140**, 607 (1994); M. Choptuik, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 8 (1993); S. Shapiro y S.A. Teukolsky, *Phys.Rev.Lett.*, **66**, 994 (1991); K.P. Tod, *Class.Quant.Grav.*, **9**, 1581 (1992); P. Yodzis, H.J. Seifert y H. Müller zum Hagen, *Comm.Math.Phys.*, **34**, 135 (1973). Citados en las páginas **25, 30**
- [32] Ver, por ejemplo C. Smeenk y C. Wüthrich, *Time Travel and Time Machines*, en *The Oxford Handbook of Philosophy of Time*, C. Callender ed., Oxford University Press, 577, (2011), [versión preliminar en la red](#). Citado en la página **26**

- [33] S.W. Hawking, *Phys.Rev.D*, **46**, 603, (1992). Citado en la página [28](#)
- [34] R. Geroch, E.H. Kronheimer y R. Penrose, *Proc.Roy.Soc. Lond. A*, **375**, 545, (1972). Citado en la página [30](#)
- [35] L.M. Burko y A. Ori (editores), *Internal Structure of Black Holes and Spacetime Singularities: Annals of the Israel Physical Society Volume 13*, Inst. of Physics Pub. Inc., (1998) y citas en él realizadas. Citado en la página [33](#)
- [36] A. Ori, *Phys.Rev.Lett.*, **68**, 2117, (1992); A. Ori, *Gen.Relativ.Gravit.*, **29**, 881, (1997). Citados en la página [34](#)
- [37] P.R. Brandy y C.M. Chambers, *Phys.Rev.D*, **51**, 4177, (1995); A. Ori y E.E. Flanagan, *Phys.Rev.D*, **53**, 1754, (1996), A. Ori, *Phys.Rev.D*, **57**, 4745, (1998). Citados en la página [35](#)
- [38] G. Gibbons, *Class.Quant.Grav.*, **14**, 2905, (1997) [[arXiv:hep-th/9701049v1](#)]. Citado en la página [35](#)
- [39] A. Królak, *Gen.Relativ.Gravit.*, **15**, 99, (1983). Citado en la página [35](#)
- [40] R. Wald, *Ann.Phys.*, **83**, 548, (1974). Citado en la página [35](#)
- [41] V.E. Hubeny, *Phys.Rev.D*, **59**, 064013, (1999); [[arXiv:gr-qc/9808043](#)]. Citado en la página [35](#)
- [42] F. de Felice y Y. Yunqiang, *Class.Quant.Grav.*, **18**, 7, 1235, (2001). G.E.A. Matsas y A.R.R. da Silva, *Phys.Rev.Lett.*, **99**, 181301, (2007) [[arXiv:0706.3198v2 \[gr-qc\]](#)]; M. Richartz y A. Saa, *Phys.Rev.D*, **78**, 081503, (2008) [[arXiv:0804.3921v2 \[gr-qc\]](#)]; S. Hod, *Phys.Rev.Lett.*, **100**, 121101, (2008) [[arXiv:0805.3873v1 \[gr-qc\]](#)]; T. Jacobson y T.P. Sotiriou, *Phys.Rev.Lett.*, **103**, 141101, (2009); errata **103**, 209903(E), (2009) [[arXiv:0907.4146v2 \[gr-qc\]](#)]; E. Barausse, V. Cardoso y G. Khanna, *Phys.Rev.Lett.*, **105**, 261102, (2010) [[arXiv:1008.5159v2 \[gr-qc\]](#)]; A. Saa y R. Santarelli, *Phys.Rev.D*, **84**, 027501, (2011) [[arXiv:1105.3950v2 \[gr-qc\]](#)]; V. Cardoso y G. Khanna, *Phys.Rev.D*, **84**, 104006, (2011) [[arXiv:1106.1692v2 \[gr-qc\]](#)]; S. Isoyama, N. Sago y T. Tanaka, *Phys.Rev.D*, **84**, 124024, (2011) [[arXiv:1108.6207v2 \[gr-qc\]](#)]; G.Z. Tóth, *Gen.Relativ.Gravit.*, **44**, 8, 2019, (2012) [[arXiv:1112.2382v4 \[gr-qc\]](#)]; S. Gao y Y. Zhang, *Phys.Rev.D*, **87**, 044028, (2013) [[arXiv:1211.2631v2](#)]. Citados en la página [35](#)
- [43] B. Giacomazzo, L. Rezzolla y N. Stergioulas, *Phys.Rev.D*, **84**, 024022, (2011). Citado en la página [36](#)
- [44] C.S. Reynolds, *Space Science Reviews*, **183**, 1-4, 277, (2014) [[arXiv:1302.3260v2 \[gr-qc\]](#)]. Citado en la página [36](#)
- [45] R. Takahashi, T. Harada, *Class.Quant.Grav.*, **27**, 075003, (2010). Citado en la página [36](#)
- [46] P. Yodzis, H.J. Seifert y H. Muller zum Hagen, *Commun.Math.Phys.*, **34**, 135, (1973). Citado en la página [36](#)
- [47] S. Shapiro y S.A. Teukolsky, *Phys.Rev.Lett.*, **66**, 994, (1991). Citado en la página [36](#)
- [48] K.P. Tod, *Class.Quant.Grav.*, **9**, 1581, (1992); M. Choptuik, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 8, (1993); D. Christodoulou, *Ann.Math.*, **140**, 607, (1994). Citados en la página [36](#)
- [49] P.S. Joshi y D. Malafarina, *Phys.Rev.D*, **83**, 024009, (2011) [[arXiv:1101.2084v1 \[gr-qc\]](#)]. Citado en la página [36](#)
- [50] A.S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge Univ. Press, (1926). Citado en la página [40](#)
- [51] G.F.R. Ellis y B.G. Schmidt, *Gen.Relativ.Gravit.*, **8**, 915, (1977). Citado en la página [44](#)
- [52] T.M. Helliwell y D.A. Konkowski, *Phys.Rev.D*, **47**, 4322, (1993). Citado en la página [44](#)
- [53] R.J. Gleiser y G. Dotti, *Class.Quant.Grav.*, **23**, 5063, (2006). Citado en las páginas [49](#), [53](#), [154](#)

- [54] G.W. Gibbons, D. Hartnoll y A. Ishibashi, *Prog.Theor.Phys.* **113**, 963, (2005). Citado en la página [50](#)
- [55] G. Dotti and R.J. Gleiser, *Class.Quant.Grav.*, **26**, 215002, (2009). Citado en las páginas [50](#), [154](#)
- [56] G. Dotti, R.J. Gleiser, J. Pullin, *Phys.Lett.* **B644**, 289, (2007). Citado en las páginas [50](#), [154](#)
- [57] C.M. Will, *Proc.Nat.Acad.Sci. (US)*, **108**, 5938 (2011). Citado en la página [51](#)
- [58] E. Berti, V. Cardoso y A.O. Starinets, *Class.Quant.Grav.*, **26**, 163001, (2009). Citado en la página [51](#)
- [59] S.A. Teukolsky, *Phys.Rev.Lett.*, **29** 1114, (1972); -, *ApJ*, **185**, 635, (1973). Citados en las páginas [52](#), [74](#), [122](#)
- [60] E. Berti, V. Cardoso y M. Casals, *Phys.Rev.D*, **73**, 024013, (2006), [Errata: *Phys.Rev.D*, **73**, 109902, (2006)]. [[arXiv:gr-qc/0511111](#)]. Citado en las páginas [52](#), [59](#)
- [61] E.W. Leaver, *Proc.Roy.Soc. London A*, **402**, 285, (1985). Citado en la página [53](#)
- [62] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, Oxford Science Publications, (1995). Citado en las páginas [53](#), [157](#)
- [63] E.D. Fackerell y R.G. Crossman, *J.Math.Phys.*, **18**, 1849, (1977). Citado en la página [56](#)
- [64] E. Seidel, *Class.Quant.Grav.*, **6**, 1057, (1989). Citado en las páginas [56](#), [58](#), [59](#), [87](#)
- [65] R. A. Breuer, *Gravitational Perturbation Theory and Synchrotron Radiation*, Lecture Notes in Physics, Vol. 44 (Springer, Berlin, 1975); R.A. Breuer, M.P. Ryan, Jr. y S. Waller, *Proc.Roy.Soc. London A*, **358**, 71, (1977). Citados en la página [56](#)
- [66] E. Berti, V. Cardoso y S. Yoshida, *Phys.Rev. D*, **69**, 124018, (2004). Citado en la página [56](#)
- [67] G. Dotti, R.J. Gleiser e I.F. Ranea-Sandoval, *Class.Quant.Grav.*, **29**, Issue 9, pp. 095017, (2012). [[arXiv:gr-qc/1111.5974](#)]. Citado en las páginas [59](#), [77](#), [83](#), [84](#), [91](#), [98](#), [100](#), [154](#)
- [68] J. Meixner y F.W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, 1954 - Springer-Verlag; *Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations: Further studies*, Lectures Notes in Mathematics, **837**, Springer-Verlag, (1980). Citado en la página [60](#)
- [69] E. Poisson y W. Israel, *Phys.Rev.D*, **41**, 1796, (1990). Citado en la página [69](#)
- [70] K. Meetz, *Il Nuovo Cimento*, **XXXIV**, 690, (1964). Citado en la página [71](#)
- [71] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathemaical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, sección X.1, Academic Press, (1975). Citado en la página [71](#)
- [72] B.F. Whiting, *J.Math.Phys.*, **30**, 1301, (1989). Citado en las páginas [71](#), [72](#), [91](#)
- [73] L. Kegeles and J. Cohen, *Phys.Lett. A*, **54**, 5, (1975); L. Kegeles and J. Cohen, *Phys.Rev.D*, **19**, 1641, (1979); P. Chrzanowski, *Phys. Rev. D* **11**, 2042, (1975). Citados en la página [73](#)
- [74] R. Wald, *Phys.Rev.Lett.*, **41**, 203, (1978); también el Apéndice C de O.J.C. Dias, H.S. Reall y J.E. Santos, *J. High Energy Phys.*, **8**, 101, (2009). Citados en las páginas [73](#), [75](#)
- [75] G. Dotti and R.J. Gleiser, *Class.Quant.Grav.*, **27**, 185007, (2010). Citado en las páginas [75](#), [154](#)
- [76] J. Friedman, M.S. Morris, I.D. Novikov, F. Echeverría, G. Klinkhammer, K.S. Thorne y U. Yurtsever, *Phys.Rev.D*, **42**, 1915, (1990); K.S. Thorne, *Proc. of the 13<sup>th</sup> International Conference on General Relativity and Gravitation*, eds. R.J. Gleiser, C. Kozameh y O.M. Moreschi, (1992). Citados en las páginas [81](#), [82](#)
- [77] A. Bachelot, *J.Math.Pures Appl.* **81**, 35, (2002). Citado en las páginas [82](#), [83](#), [85](#), [89](#), [93](#)

- [78] I.F. Ranea-Sandoval y H. Vucetich, *Int.J.Mod.Phys. D*, **24**, 1550037, (2015). Citado en las páginas [82](#), [92](#)
- [79] Ver por ejemplo, Y. Choquet-Bruhat y R. Geroch, *Comm.Math.Phys.*, **14**, 4, 329, (1969); Y. Choquet-Bruhat y T. Ruggeri, *Comm.Math.Phys.*, **89**, 2, 269, (1983). Citados en la página [82](#)
- [80] B. Boss-Bavnbek en *Geometry and Topology: Aarhus: Conference on Geometry and Topology*. Editado por: K. Grive, I.H. Madsen y E.K. Pedersen, *Contemporary Mathematics*, 258, (2000). Citado en la página [83](#)
- [81] G. Dotti, R.J. Gleiser, I.F. Ranea-Sandoval y H. Vucetich, *Class.Quant.Grav.*, **25**, 245012, (2008). Citado en las páginas [83](#), [91](#), [98](#), [154](#)
- [82] P. Pani, E. Berti y L. Gualtieri, *Phys.Rev.Lett.*, **110**, 241103, (2013) y referencias allí realizadas. Citado en la página [86](#)
- [83] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, *Classics in Mathematics*, Springer Berlin Heidelberg New York, (1990). Citado en la página [91](#)
- [84] M. Bañados, C. Tateimboin and J. Zanelli, *Phys.Rev.Lett.*, **69**, 1849, (1992). Citado en la página [96](#)
- [85] V. Cardoso y J.P. Lemos, *Phys.Rev.D*, **63**, 12, 124015, (2001). Citado en la página [97](#)
- [86] J. Crisóstomo, S. Lepe y J. Saavedra, *Class.Quant.Grav.*, **21**, 2801, (2004). Citado en la página [97](#)
- [87] K. Gödel, *Rev.Mod.Phys.*, **21**, 3, 447, (1949). Citado en la página [100](#)
- [88] W.A. Hiscock, *Phys.Rev.D*, **17**, 1497, (1978). Citado en la página [102](#)
- [89] L. Mayer, S. Kazantzdis, A. Escala y S. Callegari, *Nature*, **466**, 1082, (2010). Citado en la página [107](#)
- [90] K. Makishima, A. Kubota, T. Mizuno, T. Ohnishi, M. Tashiro, Y. Aruga, K. Asai, T. Dotani, K. Mitsuda, Y. Ueda, S. Uno, K. Yamaoka, K. Ebisawa, Y. Kohmura y K. Okada, *ApJ*, **535**, 632, (2000). Citado en la página [108](#)
- [91] A.R. King, M.B. Davies, M.J. Ward, G. Fabbiano y M. Elvis, *ApJL*, **552**, L109, (2001). Citado en la página [108](#)
- [92] C. Pepe, L.J. Pelliza y G.E. Romero, *MNRAS*, **420**, 3298, (2012). Citado en la página [108](#)
- [93] A.M. Ghez, S. Salim, S.D. Hornstein, A. Tanner, J.R. Lu, M. Morris, E.E Becklin y G. Duchêne, *ApJ*, **620**, 755, (2005). Citado en la página [108](#)
- [94] K.A. Postnov y L.R. Yungelson, *Living Rev. Relativity*, **9**, 6, (2006), [Versión electrónica](#). Citado en las páginas [108](#), [109](#)
- [95] R.A. Remillard y J.E. McClintock, *Ann.Rev.A&A*, **44**, 49, (2006). Citado en la página [110](#)
- [96] T.M. Tauris y E.P.J. van den Heuvel, capítulo 16 de *Compact Stellar X-Ray Sources*, editado por W.H.G. Lewin y M. van der Klis, Cambridge University Press, (2006). Citado en la página [110](#), [111](#)
- [97] J.E. McClintock y R.A. Remillard, *Black hole binaries* in *Compact Stellar X-Ray Sources*, W.H.G. Lewin y M. van der Klis editores, Cambridge University Press, (2004); J. Casares, M. Ribó, I. Ribas, J.M. Paredes, J. Martí y A. Herrero, *MNRAS*, **364**, 899, (2005). Citados en la página [113](#)
- [98] L. Gou, J.E. McClintock, J. Liu, R. Narayan, J.F. Steiner, R.A. Remillard, J.A. Orosz, S.W. Davis, K. Ebisawa y E.M. Schlegel, *ApJ*, **701**, 1076, (2009); D.M. Russell, E. Gallo y R.P. Fender, *MNRAS*, **431**, 405, (2013). Citados en las páginas [113](#), [146](#)
- [99] J.A. Orosz, J.E. McClintock, J.P. Aufdenberg, R.A. Remillard, M.J. Reid, R. Narayan y L. Gou, *ApJ*, **742**, 84, (2011) y referencias allí citadas. Citado en la página [114](#)

- [100] J. Wilms, M.A. Nowak, K. Pottschmidt, G.G. Pooley y S. Fritz, *A&A*, **447**, 245, (2006). Citado en la página [114](#)
- [101] M. Oda, P. Gorenstein, H. Gursky, E. Kellogg, E. Schreier, H. Tananbaum y R. Giacconi, *ApJL*, **166**, L1, (1971). Citado en la página [114](#)
- [102] D.M. Gelino y T.E. Harrison, *ApJ*, **599**, 1254, (2003). Citado en la página [114](#)
- [103] R. Fender y T. Belloni, *Annu.Rev.Astron.Astrophys.*, **42**, 317, (2004). Citado en la página [114](#)
- [104] J. Kormendy y D. Richstone, *Annu.Rev.Astron.Astrophys.*, **33**, 581, (1995). Citado en la página [114](#)
- [105] A.A. Esin, J.E. McClintock y R. Narayan, *ApJ*, **489**, 865, (1997). Citado en la página [115](#)
- [106] S.N. Zhang, W. Cui y W. Chen, *ApJL*, **482**, 155, (1997). Citado en la página [116](#)
- [107] C.S. Reynolds y A.C. Fabian, *MNRAS*, **290**, L1, (1997). Citado en la página [116](#)
- [108] D. Walsh, R.F. Carswell y R.J. Weymann, *Nature*, **279**, 381, (1979). Citado en la página [117](#)
- [109] K.S. Virbhadra y G.F.R. Ellis, *Phys.Rev.D*, **62**, 084003, (2000); K.S. Virbhadra y G.F.R. Ellis, *Phys.Rev.D*, **65**, 103004, (2000); E.F. Eiroa, G.E. Romero y D. Torres, *Phys.Rev.D*, **66**, 024010 (2002); V. Bozza, F. de Luca y G. Scarpetta, *Phys.Rev.D*, **74**, 063001, (2006); K.S. Virbhadra y C.R. Keeton, *Phys.Rev.D*, **77**, 124014, (2008); C. Bambi y K. Freese, *Phys.Rev.D*, **79**, 043002, (2009); J. Schee y Z. Stuchlik, *Int.J.Mod.Phys.D*, **18**, 983, (2009); E.F. Eiroa, proceedings del I GAC, [[arXiv:1212.4535](#)], (2012) y referencias allí mencionadas y S. Sahu, M. Patil, D. Narasimha y P.S. Joshi, *Phys.Rev.D*, **28**, 235018, (2012). Citados en la página [117](#)
- [110] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane y G. Scarpetta, *Gen.Relativ.Gravit.*, **33**, 1535, (2001). Citado en la página [118](#)
- [111] H. Falcke, F. Melia y E. Algol, *ApJL*, **528**, L13, (2000); L. Amarilla, E.F. Eiroa y G. Giribet, *Phys.Rev.D*, **81**, 124045, (2010); L. Amarilla y E.F. Eiroa, *Phys.Rev.D*, **85**, 064019, (2012); L. Amarilla y E.F. Eiroa, *Phys.Rev.D*, **87**, 044057, (2013) y referencias ahí mencionadas. Citados en la página [119](#)
- [112] Z. Stuchlik, *Astro.Inst.Czecho.Bull*, **31**, 129, (1980). Citado en la página [119](#)
- [113] D. Pugliese, H. Quevedo y R. Ruffini, *Phys.Rev.D*, **84**, 044030, (2011). Citado en la página [119](#)
- [114] Z. Kovács y T. Harko, *Phys.Rev.D*, **82**, 124047, (2010). Citado en la página [119](#)
- [115] R.D. Blandford y D.G. Payne, *MNRAS*, **199**, 883, (1982); I.F. Mirabel y L.F. Rodríguez, *Ann.Rev.A&A*, **37**, 409, (1999); R. Fender y T. Belloni, *Ann.Rev.A&A*, **42**, 317, (2004). Citados en la página [119](#)
- [116] A. Königl, *New Astron.Rev.*, **43**, 67, (1999). Citado en la página [119](#)
- [117] L. Hartmann, N. Calvet, E. Gullbring y P. D'Alessio, *ApJ*, **495**, 385, (1998). Citado en la página [119](#)
- [118] F. Bacciotti, T.P. Ray, J. Eislöffel, J. Woitas, J. Solf, R. Mundt y C.J. Davis, *ApSS*, **287**, 3, (2003); D. Coffey, F. Bacciotti, J. Woitas, T.P. Ray y J. Eislöffel, *ApJ*, **604**, 758, (2004); N. Pesenti, C. Dougados, S. Cabrit, J. Ferrerira, F. Casse, P. García y D. O'Brien, *A&A*, **416**, L9, (2004). Citados en la página [119](#)
- [119] R. Ouyed, R.E. Pudritz y J.M. Stone, *Nature*, **385**, 409, (1997). Citado en la página [119](#)
- [120] R. Penrose, *Riv. Nuovo Cimento*, **1**, 252, (1969). Citado en la página [119](#)
- [121] S.M. Wagh, S.V. Dhurandhar y N. Dadhich, *ApJ*, **290**, 12, (1985); [Errata: *ApJ*, **301**, 1018, (1985)]. Citado en la página [119](#)
- [122] R.D. Blandford y R.L. Znajek, *MNRAS*, **179**, 433, (1977). Citado en la página [119](#)

- [123] F.M. Rieger, V. Bosch-Ramon y P. Duffy, *ApSS*, **309**, 119, (2007). Citado en la página [119](#)
- [124] A.R. Prasanna y C.V. Vishveshwara, *Pramana*, **11**, 359, (1978). Citado en las páginas [120](#), [123](#)
- [125] P.J. Wiita, C.V. Vishveshwara, M.J. Siah e B.R. Iyer, *J.Phys.A: Math.Gen.*, **16**, 2077 (1983). Citado en las páginas [120](#), [127](#), [128](#)
- [126] I.F. Ranea-Sandoval y H. Vucetich en J. Bičák y T. Ledvinka Eds. “Relativity and Gravitation, 100 years after Einstein in Prague”, Springer Proceedings in Physics, Volume 157, 435, 2014. Citado en la página [121](#)
- [127] I.F. Ranea-Sandoval y F. García, *A&A*, **574**, A40 (2015). Citado en las páginas [121](#), [138](#), [140](#), [148](#), [158](#)
- [128] R.M. Wald, *Phys.Rev.D*, **10**, 1680, (1974). Citado en la página [121](#)
- [129] F. Tavecchio, G. Ghisellini, L. Foschini, G. Bonnoli, G. Ghirlanda y P. Coppi, *MNRAS Lett.*, 406, L70, (2010). Citado en la página [122](#)
- [130] J.A. Petterson, *Phys.Rev.D*, **12**, 2218, (1975). Citado en las páginas [122](#), [128](#)
- [131] J. Bičák y L. Dvorčák, *Gen.Relativ.Gravit.*, **7**, 959, (1976). Citado en la página [122](#)
- [132] I. Contopoulos y D. Kazanas, *ApJ*, **508**, 859, (1998). Citado en las páginas [122](#), [128](#), [148](#)
- [133] I. Contopoulos y D.B. Papadopoulos, *MNRAS*, **425**, 147, (2012). Citados en las páginas [122](#), [128](#), [148](#)
- [134] E. Hackmann, C. Lämmerzahl, V. Kagramanova y J. Kunz, *Phys.Rev.D*, **81**, 044020, (2010). Citado en la página [123](#)
- [135] J.M. Bardeen, W.H. Press y S.A Teukolsky, *ApJ*, **178**, 347, (1972). Citado en la página [123](#)
- [136] B.R. Iyer, C.V. Vishveshwara, P.J. Wiita y J.J. Goldstein, *Pramana-J.Phys.*, **25**, 135, (1985). Citado en las páginas [125](#), [129](#), [130](#)
- [137] Z. Stuchlík, S. Hledík y K. Truparová, *Class.Quant.Grav.*, **596**, 15, (2011). Citado en la página [130](#)
- [138] S.I. Raimundo, A.C. Fabian, R.V. Vasudevan, P. Gandhi y J. Wu, *MNRAS*, **419**, 2529, (2011). Citado en la página [131](#)
- [139] N.I. Shakura y R.A. Sunyaev, *A&A.*, **24**, 377, (1973). Citado en las páginas [134](#), [135](#)
- [140] D.N. Page y K.S. Thorne, *ApJ*, **191**, 499, (1974). Citado en las páginas [134](#), [135](#)
- [141] I.D. Novikov y K.S. Thorne, en *Black Holes: Les Astres Occlus*, eds. C. DeWitt y B.S. DeWitt (Gordon and Breach Science Publishers), (1973). Citado en las páginas [134](#), [135](#)
- [142] M.A. Abramowicz y P.C. Fragile, *Living Rev. Relativity*, **16**, 1, (2013). Citado en la página [134](#)
- [143] J.H. Krolik, *ApJL*, **515**, L73, (1999). Citado en la página [135](#)
- [144] R. Narayan e I. Yi, *ApJL*, **428**, L13, (1994); R. Narayan e I Yi, *ApJ*, **444**, 231, (1995); R. Narayan e I. Yi, *ApJ*, **452**, 710, (1995); M.A. Abramowicz, X.M. Chen, S. Kato, J.P. Lasota y O. Ragev, *ApJL*, **438**, L37, (1995); M.A. Abramowicz, X.M. Chen, M. Granath y J.P. Lasota, *ApJ*, **471**, 762, (1996). Citados en la página [135](#)
- [145] C. Done, M. Gierliński y A. Kubota, *A&A Rev.*, **15**, 1, (2007). Citado en la página [136](#)
- [146] J.F. Steiner, J.E. McClintock, R.A. Remillard, L. Gou, S. Yamada y R. Narayan, *ApJ*, **718**, L117, (2010). Citado en la página [136](#)

- [147] R. Shafee, J.C. McKinney, R. Narayan, A. Tchekhovskoy, C.F. Gammie y J.E. McClintock, *ApJ*, **687**, L25, (2008); C.S. Reynolds y A.C. Fabian, *ApJ*, **675**, 1048, (2008); R.F. Penna, J.C. McKinney, R. Narayan, A. Tchekhovskoy, R. Shafee y J.E. McClintock, *MNRAS*, **408**, 752, (2010); S.C. Noble, J.H. Krolik y J.F. Hawley, *ApJ*, **711**, 959, (2010); A.K. Kulkarni, R.F. Penna, R.V. Shcherbakov, J.F. Steiner, R. Narayan, S. Dowski, Y. Zhu, J.E. McClintock, S.W. Davis y J.C. McKinney, *MNRAS*, **414**, 1183, (2011). Citados en la página [136](#)
- [148] R.P. Ross, A.C. Fabian y S. Mineshige, *MNRAS*, **258**, 189, (1992); T. Shimura y F. Takahara, *ApJ*, **419**, 78, (1993); T. Shimura y F. Takahara, *ApJ*, **445**, 780, (1995); K. Ebisawa, P. Życki, A. Kubota, T. Mizuno y K. Watarai, *ApJ*, **597**, 780, (2003). Citados en la página [137](#)
- [149] L.X. Li, E.R. Zimmerman, R. Narayan y J.E. McClintock, *ApJ Supp.Ser.*, **157**, 335, (2005). Citado en las páginas [137](#), [139](#), [144](#)
- [150] X. Yang y J. Wang, *ApJS*, **201**, 6, (2013). Citado en las páginas [138](#)
- [151] J. Dexter y E. Agol, *ApJ*, **696**, 1616, (2009). Citado en la página [138](#)
- [152] J.B. Dove, J. Wilms, M. Maisack y M.C. Begelman, *ApJ*, **487**, 759, (1997). Citado en las páginas [138](#), [141](#)
- [153] M. Walker y R. Penrose, *Comm.Math.Phys.*, **18**, 265, (1970). Citado en la página [139](#)
- [154] M. Gierliński, A.A. Zdziarski, J. Poutanen, P.S. Coppi, K. Ebisawa y W.N. Johnson, *MNRAS*, **309**, 496, (1999). Citado en la página [144](#)
- [155] L. Gou, J.E. McClintock, M.J. Reid, J.A. Orosz, J.F. Steiner, R. Narayan, J. Xiang, R.A. Remillard, K.A. Arnaud y S.W. Davis, *ApJ*, **742**, 85, (2011). Citado en las páginas [146](#), [147](#)
- [156] Ch.E. Ryter, *ApSS*, **236**, 285, (1996). Citado en la página [147](#)
- [157] S.W. Davis, C. Done y O.M. Blaes, *ApJ*, **647**, 525, (2006). Citado en las páginas [147](#)
- [158] O. Straub, M. Bursa, A. Sadowski, J.F. Steiner, M.A. Abramowicz, W. Kluźniak, J.E. McClintock, R. Narayan y R.A. Remillard, *A&A*, **533**, A67, (2011). Citado en las páginas [147](#)
- [159] G. Dotti, R.J. Gleiser, I.F. Ranea-Sandoval, J. Pullin y H. Vucetich, *Int.Jour.Mod.Phys.A*, **24**, 1578, (2009). [[arXiv:0810.0025](#)]. Citado en la página [154](#)
- [160] G. Dotti, G., R.J. Gleiser e I.F Ranea-Sandoval, I. F., *Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*, 1407, (2015). Citado en la página [154](#)
- [161] M. Visser, C. Barceló, S. Liberati y S. Sonego, Seminario presentado en el workshop *Black Holes in General Relativity and String Theory* 24-30/10/2008, Veli Losinj, Croacia, Proceedings of Science, BHs,GRandStrings 2008:010, (2008); [[arXiv:0902.0346v2](#)]. Citado en la página [154](#)
- [162] V. Cardoso, P. Pani, M. Cadoni y M. Cavaglia, *Phys.Rev.D*, **77**, 124044, (2008), [[arXiv:0709.0532](#)]; V. Cardoso, P. Pani, M. Cadoni y M. Cavaglia, *Class.Quant.Grav.*, **25**, 195010, (2008), [[arXiv:0808.1615v1](#)]; C.B.M.H. Chirenti y L. Rezzolla, *Phys.Rev.D* **78**, 084011, (2008), [[arXiv:0808.4080](#)]. Citados en la página [154](#)
- [163] Ver, por ejemplo, M. Orsaria, H. Rodrigues, F. Weber, F. y G.A. Contrera, *Phys.Rev.D.*, **87**, 023001, (2013) y referencias allí mencionadas. Citado en la página [155](#)



*ya comprendo la verdad*

*estalla en mis deseos*

*y en mis desdichas*

*en mis desencuentros*

*en mis desequilibrios*

*en mis delirios*

*ya comprendo la verdad*

*ahora*

*a buscar la vida*

Alejandra Pizarnik, "Solamente" del libro "La última inocencia"