Pruebas interesantes para una lógica multi-modal multi-agente: Un caso de estudio sobre Completitud

Francisco Carbonari

Índice general

Introducción **1**

El sistema en estudio **4**
- El lenguaje 4
- La perspectiva semántica 6
- Satisfacción y validez para las fórmulas 7
- Características de los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$ 10
- Características de los modelos para $\mathcal{L}_{non}$ 13
- La perspectiva sintáctica 15
- Los sistemas $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ 16
- Los sistemas $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ 19

Completitud **21**
- Preliminares 22
- El método del modelo canónico 24
- El modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ 26
- $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$ 28
- El modelo canónico para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ 30
- $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$ 31

Extractos sobre decibilidad **34**
- Decibilidad para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ 35
- Decibilidad para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ 38

Conclusiones y algo mas... **40**

Bibliografía **42**

Introducción

Este trabajo se encuentran inmerso en el paradigma computacional de sistemas multi-agente (MAS), donde un sistema computacional es concebido como compuesto por un conjunto de componentes autónomos y heterogéneos, denominados *agentes*, los cuales interactúan entre sí dentro de un ambiente donde coexisten y, dependen unos de otros para obtener sus metas. Estos agentes *imitan* atributos y capacidades humanas como generalmente son descriptas en las ciencias cognitivas. Los agentes pueden *razonar*, *adaptarse*, *aprender*, etc. Específicamente este trabajo parte de [1] donde se combinan modelos propios de MAS con modelos para sistemas normativos donde se estudian, entre otras cuestiones, distintos tipos de normas, causas, consecuencias e interrelaciones de su aplicación.

La lógica multi-modal (multi-agente) es uno de los paradigmas que se utilizan para especificar, modelar y razonar sobre agentes de un MAS [2, Cap. 12]. La idea es desarrollar estas lógicas para que puedan ser usadas en la caracterización de los *estados mentales* de los agente mientras actúan e interactúan (probablemente durante la resolución de problemas).

Es complejo definir actualmente la lógica modal de forma abarcativa pues su desarrollo es amplio y se interrelaciona con variedad de disciplinas provenientes de distintas ramas de las ciencias (o pseudo-ciencias) como la filosofía, la matemática, la lingüística, las ciencias de la computación, las ciencias sociales y jurídicas, entre otras. En un sentido amplio estas disciplinas introdujeron *modalidades*, a las que se entiende como: *una modalidad es una expresión que aplicada a una oración $\mathcal{A}$ resulta en una nueva oración sobre el* modo *en que $\mathcal{A}$ es verdadera o sobre el modo en el que es aceptada*, [3]. Por ejemplo, sobre *cuando* es verdadera, o *donde* es verdadera, *como* es verdadera, *en que circunstancias* es verdadera, etc. También sobre el modo en que un sujeto (agente) o colectividad la acepta como, *conocida*, *creída*, *intentada*, *ocurrida*, *demostrada*, por exponer algunos ejemplos.

Ejemplos de modalidades son, *necesario*, *posible*, *imposible*, etc. (se las conoce como modalidades *aléticas*). *Siempre*, *nunca*, *siempre en el pasado*, *en algún momento futuro*, *a partir de ahora*, etc. (estas son conocidas como *temporales*). *Es obligatorio*, *está permitido*, *esta prohibido*, *es legal*, etc. (difundidas como *deónticas*). Y entre otras, *se cree que*, *x cree que*, (difundidas como *doxásticas*). En [1] aparecen las siguientes modalidades, necesarias para representar y razonar sobre responsabilidades legales:

- $\mathrm{Goal}_x\,\mathcal{A}$, se usa para significar que "el agente x tiene como objetivo $\mathcal{A}$",
- $\mathrm{Bel}_x\,\mathcal{A}$, quiere decir que "el agente x cree que $\mathcal{A}$",

- $\mathrm{O}\,\mathcal{A}$, se entiende como obligación genérica, "es obligatorio que $\mathcal{A}$",
- $\mathrm{O}^x\,\mathcal{A}$, debe entenderse como una obligación dirigida, "para el interés de x es obligatorio que $\mathcal{A}$",
- $\mathrm{I}^p\,\mathcal{A}$, pretende significar "$\mathcal{A}$ es objetivamente ideal (o bueno) para el agente p",
- $\mathrm{Int}_x\,\mathcal{A}$, se usa para significar que "el agente x tiene intención de satisfacer $\mathcal{A}$",
- $\mathrm{Int}_h^p\,\mathcal{A}$, que se interpreta como "el agente h intenta llegar a satisfacer $\mathcal{A}$ para el interés del agente p",
- $\mathrm{Able}_x\,\mathcal{A}$, debe entenderse como "el agente x tiene la capacidad de hacer $\mathcal{A}$",
- $\mathrm{Does}_x\,\mathcal{A}$, pretende significar "el agente x provoca $\mathcal{A}$" y,
- $\mathrm{Does}_h^p\,\mathcal{A}$, debe leerse como "el agente h provoca $\mathcal{A}$ en el interés del agente p".

Expusimos el listado de modalidades al solo efecto de contextualizar al lector. En el lenguaje formal que presentaremos pronto, las modalidad se captan mediante *operadores modales* que se aplicarán sobre fórmulas de este lenguaje. Sin embargo este es un trabajo de índole técnica que no pretende ahondar en las cuestiones filosóficas y jurídicas de las interpretaciones de las modalidades y las fórmulas que con ellas generemos. El lector interesado en estas cuestiones que no abordaremos puede comenzar viendo [1], [4], [5].

Este trabajo se direcciona más específicamente sobre los aspectos de los sistemas formales presentados implícita o explícitamente en [1], en cuanto sistemas formales de razonamiento. Casi exclusivamente este trabajo explota los lenguajes modales (simples pero sorpresivamente expresivos) para hablar de las estructuras relacionales mediante las cuales interpretamos las fórmulas de estos lenguajes y la relación que existe entre estas estructuras y los sistemas formales deductivos que las caracterizan.

De esta manera nos embarcamos en la tendencia que se viene dando desde la aparición de las semánticas relacionales, que desde el punto de vista de la (Ciencias de la) Computación produjo mucho interés, investigación y desarrollo [6, p. 41-48]. Para la Computación es natural tratar con estructuras matemáticas relacionales, especialmente, listas, árboles y grafos que prácticamente son la esencia de las estructuras interpretativas (en determinadas semánticas para lenguajes modales). De esta forma las lógicas modales proveyeron herramientas de amplio alcance con aplicaciones por ejemplo en, especificación, diseño y verificación de sistemas, [7], [8], [9], [10]. Desarrollo de MAS para tareas específicas, [11], [12], [1]. Representación de conocimiento [13], y en inteligencia artificial, por ejemplo, planificación [14]. Y muchas otras áreas dentro de la Computación y disciplinas afines. Esta explosión en la aplicación de lógicas modales puede deberse a su versatilidad, mediante un esfuerzo ingenieril [15], para adaptarse a universos (no solo de discurso) variados. Adaptación acompañada de un balance generalmente positivo entre el poder expresivo de sus lenguajes y la posesión de propiedades computacionalmente importantes, como completitud, modelo finito, decibilidad, complejidad computacional aceptable para tareas como la de chequeo de modelos, etc.

Habiendo dicho lo anterior, el objetivo de este trabajo es analizar el formalismo expuesto en [1] para estudiar la relación que existe entre la perspectiva semántica (es decir, las estructuras relacionales con el mecanismo para interpretar las fórmulas del lenguaje) y la perspectiva sintáctica (los sistemas deductivos formales). Finalmente esto conducirá al estudio de la decibilidad de estos sistemas.

El sistema en estudio

Siguiendo el enfoque estándar de los estudios sobre lógica en la literatura matemática (y en ciencias de la computación), comenzaremos el análisis sobre el formalismo (o sistema formal) que estudiaremos describiendo su lenguaje (la sintaxis), luego clases apropiadas de modelos con interpretaciones precisas para las fórmulas del lenguaje (la semántica), seguido de sistemas formales de inferencia que caractericen el razonamiento (la teoría de pruebas). Para luego en el siguiente capítulo relacionar la teoría de pruebas con la semántica mediante resultados de completitud.

El lenguaje

A continuación capturamos el lenguaje implícito del formalismo en estudio, basado en un conjunto numerable de variables proposicionales (o constantes) $P = \{p_0,\, p_1,\, p_2,\, \ldots\}$ y un conjunto A de m agentes, que por conveniencia denotaremos $A = \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}$.

El conjunto de fórmulas expresables en este lenguaje, al que denominaremos $\mathcal{L}$, se encuentra definido mediante la siguiente regla inductiva:

1) Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{prop}$;
2) Si $p, q \in \mathcal{L}_{prop}$, entonces $\neg p, (p \wedge q) \in \mathcal{L}_{prop}$;
3) Si $p \in \mathcal{L}_{prop}$; $i, k \in A$, entonces p, $\mathrm{Able}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i\, p$, $\mathrm{Does}_i^k\, p \in \mathcal{L}$;
4) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$; $i, k \in A$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $\mathrm{Goal}_i\, \varphi$, $\mathrm{Bel}_i\, \varphi$, $\mathrm{O}\, \varphi$, $\mathrm{O}^i\, \varphi$, $\mathrm{I}^i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i\, \varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\, \varphi \in \mathcal{L}$.

Algunas consideraciones con respecto a la regla anterior. En el resto del trabajo, para hacerlo más legible, prescindiremos del uso exacto de los paréntesis externos, excepto cuando las fórmulas se tornen ambiguas, por ejemplo, usaremos $\neg p_7 \wedge p_3$ en lugar de $(\neg p_7 \wedge p_3)$. Algunas fórmulas de $\mathcal{L}$ son: $\mathrm{Goal}_1\, p_2$; $p_2 \wedge p_3$; $\mathrm{Bel}_3\, (\mathrm{O}\, p_4) \wedge \mathrm{Bel}_2 \neg \mathrm{O}\, p_4$; $\mathrm{Int}_3^2\, (p_2 \wedge \mathrm{Does}_3\, p_3)$; $\mathrm{Bel}_5\, (\mathrm{Int}_2\, (\mathrm{Does}_5^2\, p_8 \wedge p_3)) \wedge \mathrm{Int}_5^2\, \neg p_8$.

Podemos incluir dentro de este lenguaje (y los lenguajes que exponemos en los párrafos siguientes) las otras conectivas lógicas booleanas, $\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$, y considerarlas como abreviaturas: $\varphi \vee \psi$ de $\neg\, (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; $\varphi \rightarrow \psi$ de $\neg\varphi \vee \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi$ de $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$. Contamos también con la constante $\perp$, que la consideramos abreviatura de cualquier contradicción proposicional, por ejemplo $p_1 \wedge \neg p_1$. Y la constante $\top$, como abreviatura de cualquier tautología proposicional. Finalmente convengamos que expresiones de la forma $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ y de la forma $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ representan las conjunciones y disyunciones arbitrarias y no especificadas de las fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pero remarcamos que los operadores respetan las reglas lógicas de asociatividad.

Comenzamos la deconstrucción del formalismo en estudio desligando la ocurrencia de los operadores modales Able_i, Does_i y Does_i^k de la ocurrencia del resto de los operadores modales en las fórmulas de $\mathcal{L}$. La intensión es derivar de $\mathcal{L}$ dos conjuntos de fórmulas distintos que permitan analizar las características del formalismo por partes. Esta es una estrategia para encarar la dificultad del problema que se nos presenta debido a que las fórmulas de cada uno de los conjuntos derivados se interpretan mediante clases de estructuras (modelos) distintas, y a su vez, estas estructuras determinan distintos sistemas formales de inferencia. Estas cuestiones irán quedando más claras a medida que avancemos en el desarrollo.

Necesitamos entonces discriminar las fórmulas en función de la ocurrencia o no de determinados operadores modales. El conjuntos de fórmulas $\mathcal{L}_{non}$ contiene aquellas en las que ocurren los operadores modales Able_i, Does_i y Does_i^k (y no ocurren el resto de los operadores modales). Se encuentra definido inicialmente por las tres primeras partes de la regla que define a $\mathcal{L}$ pero lo extenderemos para obtener un lenguaje más expresivo con el cual llegar a resultados más generales y que a su vez permitirá una exposición más fluida de las definiciones y demostraciones que involucren a este conjunto de fórmulas.

$\mathcal{L}_{non}$ se basa, al igual que $\mathcal{L}$, en los conjuntos de proposiciones atómicas P y el conjunto de agentes A y es el mínimo conjunto de fórmulas cerrado por:

1) Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{non}$.
2) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{non}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{non}$.
3) Si $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Able}_i\,\varphi$, $\mathrm{Does}_i\,\varphi$, $\mathrm{Does}_i^k\,\varphi \in \mathcal{L}_{non}$.

La otra restricción del lenguaje $\mathcal{L}$, que simbolizamos $\mathcal{L}_{norm}$, también se basa en los conjuntos P y A y es el mínimo conjunto de fórmulas cerrado por:

1) Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}_{norm}$.
2) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{norm}$, entonces $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{L}_{norm}$.
3) Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ e $i, k \in A$, entonces $\mathrm{Goal}_i\,\varphi$, $\mathrm{Bel}_i\,\varphi$, $\mathrm{O}\,\varphi$, $\mathrm{O}^i\,\varphi$, $\mathrm{I}^i\,\varphi$, $\mathrm{Int}_i\,\varphi$, $\mathrm{Int}_i^k\,\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$.

La perspectiva semántica

Veremos ahora el contenido matemático necesario para proveer a las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathcal{L}_{non}$ de una interpretación precisa mediante estructuras relacionales[1] de distinta índole dependiendo de la restricción de $\mathcal{L}$ que tratemos. Las estructuras serán distintas pero tienen componentes en común. En primera instancia entendemos por un *modelo* a la estructura $\langle W, V\rangle$, donde W es un conjunto no vacío de *estados posibles*[2] y V es una asignación de valores de verdad a las variables proposicionales de P. Entonces describimos un modelo mediante la estructura:

$$\mathfrak{M} = \langle W, \ldots, V\rangle$$

donde,

W es un conjunto no vacío;[3]

V es una función que asigna a cada variable proposicional $p_i \in P$ un subconjunto $V(p_i)$ de W. ($V : \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \to \mathscr{P}(W)$).

Daremos sentido a las fórmulas de $\mathcal{L}$ mediante estas estructuras, pero variaremos los objetos matemáticos (que denotamos mediante $\ldots$ en $\mathfrak{M}$) dependiendo con que restricción del lenguaje estemos trabajando. Así, un modelo para $\mathcal{L}_{norm}$[4] tiene la siguiente estructura:

$$\mathfrak{M} = \langle W, G_1 \ldots G_m, B_1 \ldots B_m, O, O^1 \ldots O^m, Id^1 \ldots Id^m, I_1 \ldots I_m, I_1^1 \ldots I_m^m, V\rangle$$

donde,

W es como describimos antes;

V es como describimos antes;

$G_i, B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k \subseteq W \times W$ con $i, k \in A$.

Sin entrar en detalles ni en las cuestiones filosóficas del caso, la interpretación de las relaciones binarias en estos modelos varía significativamente pero en general se pueden pensar como relaciones de *relevancia*[5]. Escribimos entonces $\omega R \upsilon$ para significar que el estado υ es relevante para el estado ω por medio de la relación R. Es decir, se intenta capturar mediante $\omega R_i \upsilon$ aquel *estado* υ que el agente i considera *relevante* dada la información de que dispone en el estado ω. Cada relación se utilizará para interpretar un operador modal (de $\mathcal{L}_{norm}$) distinto. G_i para los operadores Goal_i, B_i para los operadores Bel_i, O para el operador O, y así respectivamente. Para cada tipo de

[1] [6, Definition 1.1].

[2] Los elementos de W aparecen denominados en la literatura dependiendo del universo de discurso, por ejemplo, *mundos*, *puntos*, *nodos*, *situaciones*, entre otras denominaciones. Nosotros utilizaremos generalmente el término *estado* para referirnos a un elemento de W.

[3] Lo llamaremos *dominio* del modelo.

[4] Los que son una generalización de los modelos que en la literatura se los conoce como *de Kripke*, [6, p. 17, p. 20], también véase [16]. En [17, p. 68, Definition 3.1] se los denomina *standard model.*

[5] En la literatura cuando se las llama de forma general, suele utilizarse la frase *relaciones de accesibilidad*

operador, existe una familia de relaciones binarias de m miembros (siendo m la cantidad de agentes, excepto para el caso del operador Int_i^k donde los miembros son $m \times m$) que utilizaremos para dar sentido a las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$. Entonces, por ejemplo, aquellas fórmulas donde aparezca el operador Goal_i serán interpretadas mediante alguna de las m relaciones binarias G_k (específicamente aquella para la cual $i = k$).

La estructura de un modelo para $\mathcal{L}_{non}$ es:

$$\mathfrak{M} = \left\langle W, N_1^A, \ldots, N_m^A, N_1^D, \ldots, N_m^D, N_{1,1}^D, N_{2,1}^D, \ldots, N_{m,m-1}^D, N_{m,m}^D, V \right\rangle$$

donde los nuevos componentes, N_i^A[6], N_i^D, $N_{i,k}^D$ (para $i, k \in A$) son conjuntos de funciones que asocian cada estado posible con colecciones de conjuntos de estados posibles. Tenemos entonces:

W	es como describimos antes;
V	es como describimos anteriormente;
N_i^A, N_i^D, $N_{i,k}^D$	son mapeos desde W a conjuntos de subconjuntos de W. (N_i^A, N_i^D, $N_{i,k}^D : W \to \mathscr{P}\left(\mathscr{P}(W)\right)$).

Estos modelos son una generalización de los modelos que en la literatura se conocen como modelos *mínimos* (*minimal models* [17, Cap. 7])[7]. Como en los modelos de Kripke, aquí también tenemos una familia de funciones de m miembros para interpretar cada operador modal de $\mathcal{L}_{non}$, excepto nuevamente el caso del operador modal Does_i^k para el cual contamos con $m \times m$ funciones de interpretación. La familia $\left\{N_i^A\right\}_{i\in A}$ para interpretar los operadores Able_i, y la familia $\left\{N_i^D\right\}_{i\in A}$ para interpretar los operadores Does_i. Pronto veremos que en algún sentido estos modelos son más generales (o más *débiles*) que los modelos de Kripke.

Satisfacción y validez para las fórmulas

Habiendo descripto la estructura de los modelos estamos en condiciones de definir la relación de satisfactibilidad para las fórmulas del lenguaje. De esta manera podremos hablar de las condiciones de satisfacción y validez para las fórmulas en relación con los modelos, conceptos fundamentales que es necesario dejar en claro.

Lo haremos de acuerdo a la forma de las fórmulas (de manera inductiva), siendo φ una fórmula y ω un estado en $\mathfrak{M} = \langle W, \ldots, V\rangle$[8], usamos el simbolismo

$$\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$$

[6]No confundir el superíndice A en estas funciones con el conjunto de agentes. La letra A en este caso funciona como símbolo mnemotécnico (por ser la primera letra con la que escribimos al operador Able_i).

[7]O modelos *neighbourhood*, o modelos de *Scott-Montague*. Durante este trabajo continuaremos llamando a esta generalización *modelos mínimos* o *modelos neighbourhood*.

[8]Seguiremos cometiendo este abuso del lenguaje, pero recuérdese que $\omega \in W$.

como una abreviatura de (o lo interpretamos de la manera siguiente), φ *se satisface en el estado* ω *de* $\mathfrak{M}$. Definimos para las fórmulas no-modales[9]:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M},\omega \vDash p_i & \textit{sii} & \omega \in V(p_i),\ \textit{para}\ i = 0,1,2,\ldots \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \neg\varphi & \textit{sii} & \textit{no se da}\ \ \mathfrak{M},\omega \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \varphi \wedge \psi & \textit{sii} & \mathfrak{M},\omega \vDash \varphi\ \ \textit{y}\ \ \mathfrak{M},\omega \vDash \psi,\ \textit{(se dan ambas)} \end{array}$$

Si las fórmulas no-modales involucran las conectivas que consideramos abreviaturas se puede deducir su definición a partir de las reglas anteriores[10].

Las condiciones de satisfacción para las fórmulas modales involucran las relaciones entre los elementos de W en $\mathfrak{M}$. Así por ejemplo para el caso de la fórmula modal $\mathrm{Bel}_i\,\varphi$, esta se satisface en el estado ω si y solo si φ se satisface en cada estado υ relevante, es decir, si y solo si φ se satisface en cada estado υ para el cual $\omega B_i \upsilon$. Entonces para las modalidades de $\mathcal{L}_{norm}$ en los modelos de Kripke, (para $i, k \in A$)[11] se define:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Goal}_i\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega G_i \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega B_i \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{O}\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega O \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{O}^i\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega O^i \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{I}^i\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega Id^i \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Int}_i\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega I_i \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \\ \mathfrak{M},\omega \vDash \mathrm{Int}_i^k\,\varphi & \textit{sii} & \textit{para todo}\ \upsilon\ \textit{en}\ \mathfrak{M}\ \textit{tal que}\ \omega I_i^k \upsilon,\ \textit{se tiene}\ \mathfrak{M},\upsilon \vDash \varphi \end{array}$$

A modo de ejemplo, podemos pensar la definición de satisfacción para la fórmula $\mathrm{Bel}_i\,\varphi$ (el agente i cree que φ), como sigue: el agente i tiene dudas sobre su creencia con respecto a φ, en la *situación* (estado) ω. Por lo tanto considera ciertas situaciones *alternativas*[12], es decir las situaciones υ tales que $\omega B_i \upsilon$. No obstante si en todas las alternativas que el agente a considerado, φ se satisface, i ya no tiene dudas sobre creer φ: i *cree* que φ (sin dudarlo). (Por supuesto si en alguna de las alternativas υ que

[9]Aquellas que no son de la forma $\bigcirc\psi$, siendo $\bigcirc$ cualquier operador modal de $\mathcal{L}$ y ψ cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{norm}$ o $\mathcal{L}_{non}$.

[10]Puede deducirse que si la forma de la fórmula fuese $\varphi \vee \psi$, definiríamos la satisfacción mediante $\mathfrak{M},\omega \vDash \varphi \vee \psi$ sii $\mathfrak{M},\omega \vDash \varphi$ *o* $\mathfrak{M},\omega \vDash \psi$. Luego, del anterior resultado se puede deducir que si fuese $\varphi \to \psi$ tendríamos $\mathfrak{M},\omega \vDash \varphi \to \psi$ sii *si* $\mathfrak{M},\omega \vDash \varphi$ *entonces* $\mathfrak{M},\omega \vDash \psi$ (o equivalentemente *no se da* $\mathfrak{M},\omega \vDash \varphi$ *o* $\mathfrak{M},\omega \vDash \psi$). Y luego del resultado anterior se puede deducir la definición de satisfacción para la forma $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Para el caso de $\bot$, se define que no se satisface en ningún estado de ningún modelo, es decir *no se da* $\mathfrak{M},\omega \vDash \bot$. Luego para el caso de $\top$, se tiene que es satisfactible en cualquier estado de cualquier modelo, $\mathfrak{M},\omega \vDash \top$.

[11]Cuando utilicemos los subíndices y superíndices k e i sobre algún operador modal, siempre estaremos simbolizando variables sobre el conjunto de agentes A, que de no indicarse lo contrario puede entenderse que se esta hablando de valores arbitrarios sobre estas variables.

[12]En este caso parece mas conveniente interpretar a las relaciones B_i como relaciones de alternatividad, que desde la perspectiva doxástica pueden ser mas adecuadas que la relación de relevancia. Pero no profundizaremos en estas cuestiones filosóficas, solo queremos que el lector pueda ampliar su perspectiva sobre como se pueden interpretar los operadores modales, las fórmulas modales y las relaciones de accesibilidad.

el agente considera, φ no se satisface, el agente continúa dudando y entonces en la situación ω no se satisface $\text{Bel}_i\,\varphi$).

Algo similar ocurrirá con la interpretación de las fórmulas de $\mathcal{L}_{non}$ y los mapeos que componen los modelos tipo neighbourhood. Aclaremos también que es correcto interpretar el enunciado a la derecha de *sii* como un enunciado condicional[13]. Además este tipo de definición de satisfacción para las fórmulas modales, cuando se trabaja sobre estructuras de Kripke, es clásica en la literatura sobre lógica modal y se corresponde con el mecanismo tradicional de satisfacción para el operador modal de *necesidad*, denotado habitualmente mediante el símbolo $\Box$.

Para las modalidades en $\mathcal{L}_{non}$ se definen las siguientes condiciones de satisfacción, (con $i, k \in A$):

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}, \omega \vDash \text{Able}_i\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^A(\omega) \\ \mathfrak{M}, \omega \vDash \text{Does}_i\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega) \\ \mathfrak{M}, \omega \vDash \text{Does}_i^k\ \varphi & \textit{sii} & \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_{i,k}^D(\omega) \end{array}$$

donde $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} = \{\omega \in W\ :\ \mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi\}$[14].

Continuando el comentario sobre mayor generalidad que hicimos mientras describimos las funciones de neighbourhood, ahora podemos observar mejor a que nos referíamos. (Tomemos como caso el operador Able_i), la satisfacción de la fórmula $\text{Able}_i\,\varphi$ en el estado ω, depende de si el conjunto de verdad de φ esta en la *vecindad* de ω. En los modelos de Kripke podemos considerar la vecindad de un estado ω como el conjunto que contenga a aquellos estados *directamente conectados* (adyacentes) a ω por medio de alguna relación R. En los modelos mínimos, el enfoque más general indica que en la vecindad de ω puede estar cualquier conjunto de una determinada colección (de conjuntos con elementos del dominio).

Antes de avanzar sobre algunos otros conceptos y definiciones cabe aclarar que, para evaluar las fórmulas de ambas restricciones del lenguaje se utilizan las condiciones para las fórmulas no-modales en conjunción con las condiciones de satisfacción para fórmulas modales dependiendo de los operadores que se esté considerando (lo que implicará a su vez si se esta trabajando con $\mathcal{L}_{norm}$ o $\mathcal{L}_{non}$).

Vayamos concluyendo mediante la introducción de otro concepto clave que es el de *validez*. Nos permite abstraernos de las valuaciones que componen un modelo para poder hablar de la estructura relacional que lo configura y su comportamiento en cuanto a la satisfacción de las fórmulas. Decimos que una fórmula es *válida* en un modelo cuando esta se satisface en todos los estados del modelo[15]. Luego diremos que una fórmula es válida en una clase de modelos si y solo si es válida en cada modelo en la clase, es decir, se satisface en todos los estados de todos los modelos en la clase.

[13] Por ejemplo, para el caso de satisfacer $\mathfrak{M}, \omega \vDash \text{Bel}_i\,\varphi$, es correcto interpretar que esto sucede si y solo si $(\forall v \in W)\,(\textit{si}\ \omega B_i v\ \textit{entonces}\ \mathfrak{M}, v \vDash \varphi)$.

[14] En la literatura se conoce a estos conjuntos como, *conjuntos de verdad* (o *satisfacción*).

[15] Este grado de satisfacción se encuentra por encima del de la definición de satisfacción que dimos en los párrafos precedentes.

Por consiguiente para una fórmula válida en la clase de todos los modelos decimos simplemente que la fórmula es válida.

Escribimos $\mathfrak{M} \models \varphi$ para significar que φ es válida en el modelo $\mathfrak{M}$, y $\mathcal{C} \models \varphi$ para significar que φ es válida en la clase de modelos $\mathcal{C}$. Formalmente:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M} \models \varphi & \textit{sii} & \textit{para todo estado } \omega \textit{ de } \mathfrak{M}, \textit{ se tiene } \mathfrak{M} \models \varphi \\
\mathcal{C} \models \varphi & \textit{sii} & \textit{para cada modelo } \mathfrak{M} \textit{ en la clase } \mathcal{C}, \textit{ se tiene } \mathfrak{M} \models \varphi
\end{array}
$$

Utilizaremos el símbolo $\mathcal{M}$ para denotar la clase de todos los modelos de Kripke, y el símbolo $\mathscr{M}$ para denotar la clase de todos los modelos tipo neighbourhood.

Para finalizar esta sección diremos que *falsedad* denota *no satisfacción*. Cuando decimos que φ es falsa en ω (en $\mathfrak{M}$), nos referimos a que *no se da* $\mathfrak{M}, \omega \models \varphi$[16]. Decimos que φ es falsa en $\mathfrak{M}$, para decir que φ es falsa en algún estado de $\mathfrak{M}$[17]. Cuando esto sea así, también podemos decir que $\mathfrak{M}$ es un *contramodelo* para φ.

Características de los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$

Generalmente en los sistemas de lógica modal, es necesario poder expresar determinados *principios* que como tales deben ser siempre válidos. Estos principios son muy particulares de cada sistema y se espera que la incorporación de ellos permita expresar verdades fundamentales que habiliten el comienzo del razonamiento sobre cada universo de discurso. Por ejemplo, en el sistema que estamos estudiando, para razonar sobre creencias se utilizan los operadores Bel_i y son deseables los principios de *introspección*, los que suelen capturarse mediante fórmulas de la forma $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \mathrm{Bel}_i\ \varphi$, para lo que se conoce como *introspección positiva*, es decir, *si el agente i cree que φ, entonces este agente también cree que, cree φ*. De forma similar la *introspección negativa* suele capturarse mediante fórmulas de la forma $\neg \mathrm{Bel}_i\ \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \neg \mathrm{Bel}_i\ \varphi$. Pero no en cualquier modelo las instancias de estos esquemas[18] son siempre satisfactibles, (es decir, válidas) y esto lo podemos observar mediante contramodelos, en un afán por comprender más profundamente las características de los modelos necesarios para validar los principios de interés. Esto es de importancia en este trabajo pues, como veremos más adelante, las pruebas de completitud dependen y varían en función de la clase de modelos que se esté considerando.

Simbolizamos al esquema de introspección positiva $\mathbf{4}_{Bel}$ y, al de introspección negativa $\mathbf{5}_{Bel}$[19], ninguno de los dos son válidos en la clase de todos los modelos de

[16] Lo que también simbolizaremos $\mathfrak{M}, \omega \not\models \varphi$.

[17] Simbolizamos $\mathfrak{M} \not\models \varphi$.

[18] Por *esquema* entendemos un conjunto de fórmulas con una forma particular. Por ejemplo, cuando nos referimos al esquema $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i \mathrm{Bel}_i\ \varphi$, nos referimos al conjunto de fórmulas con la forma de un condicional en el cual el antecedente es una aplicación del operador Bel_i y el consecuente es una doble aplicación de este mismo operador. Por *instancia* entendemos un miembro del conjunto de fórmulas que constituye el esquema, (siguiendo nuestro ejemplo, $\mathrm{Bel}_1\ (p_3 \wedge p_4) \rightarrow \mathrm{Bel}_1 \mathrm{Bel}_1\ (p_3 \wedge p_4)$). Se puede pensar en los esquemas como objetos lingüísticos especiales, similares a las fórmulas que son sus instancias pero mas abstractos.

[19] La simbología proviene de los esquemas conocidos en la literatura como **4** y **5**.

Kripke. Tomemos instancias y construyamos modelos que las falsifiquen (es decir, contramodelos). Para el caso de $\mathbf{4}_{Bel}$, sea la instancia $\mathrm{Bel}_1\, p_0 \rightarrow \mathrm{Bel}_1\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$ y el modelo $\mathfrak{M}_1 = \langle W, \ldots, B_1, \ldots, V \rangle$, donde $W = \{\omega, \upsilon, \mu\}$ (todos distintos), $B_1 = \{(\omega, \upsilon)\,;(\upsilon, \mu)\}$ y $V(p_0) = \{\upsilon\}$. En este modelo $\mathfrak{M}_1, \upsilon \vDash p_0$ y no se da $\mathfrak{M}_1, \mu \vDash p_0$, o sea $\mathfrak{M}_1, \mu \vDash \neg p_0$. Dado que $\upsilon B_1 \mu$ tampoco se da que $\mathfrak{M}_1, \upsilon \vDash \mathrm{Bel}_1\, p_0$, es decir $\mathfrak{M}_1, \upsilon \vDash \neg\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$. Luego siendo υ el único estado relacionado con ω, tenemos tanto que $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash \mathrm{Bel}_1\, p_0$ como $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash \neg\, \mathrm{Bel}_1\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$. Por lo tanto no se da $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash \mathbf{4}_{Bel}$ como se quería y $\mathbf{4}_{Bel}$ es falso en $\mathfrak{M}_1$. (Sin embargo nótese que si B_1 fuera transitiva[20], la argumentación anterior no se sostendría).

Ahora tomemos $\neg\, \mathrm{Bel}_1\, p_0 \rightarrow \mathrm{Bel}_1 \neg\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$ como instancia de $\mathbf{5}_{Bel}$, y construyamos el modelo $\mathfrak{M}_2$ igual que $\mathfrak{M}_1$ pero siendo $B_1 = \{(\omega, \upsilon)\,;(\omega, \mu)\}$ y $\upsilon \notin V(p_0)$. Entonces $\mathfrak{M}_2, \upsilon \vDash \neg p_0$ y dado que $\omega B_1 \upsilon$ tenemos $\mathfrak{M}_2, \omega \vDash \neg\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$. Ahora obsérvese que, en general, cualquier estado ρ para el cual $\forall (x, y) \in B_1\, [x \neq \rho]$, provoca que $\mathfrak{M}_2, \rho \vDash \mathrm{Bel}_1\, \psi$, cualquiera sea ψ, (en la literatura a estos estados se los conoce como *dead ends*). En $\mathfrak{M}_2$ hay dos *dead ends*, υ y μ, entonces también tenemos que $\mathfrak{M}_2, \mu \vDash \mathrm{Bel}_1\, p_0$. Y dado que $\omega B_1 \mu$, finalmente no se da $\mathfrak{M}_2, \omega \vDash \mathrm{Bel}_1 \neg\, \mathrm{Bel}_1\, p_0$. Por lo tanto como se quería $\mathfrak{M}_2$ es un contramodelo para $\mathbf{5}_{Bel}$.

Terminando con los resultados negativos para los modelos en esta clase, de interés para nosotros también es el esquema que en la literatura se le conoce como $\mathbf{D}$. La forma de éste (tomando como ejemplo el operador Int_i) es, $\neg\, \mathrm{Int}_i \perp$[21]. Para este esquema también se puede encontrar un contramodelo (en la clase $\mathcal{M}$) que falsifique sus instancias. Tomemos por ejemplo la instancia $\neg\, \mathrm{Int}_1 \perp$[22] y construyamos el modelo $\mathfrak{M}_3 = \langle W, \ldots, I_1, \ldots, V \rangle$ donde $W = \{\omega\}$, $I_1 = \varnothing$, $V = \varnothing$. En este modelo, tenemos un único estado que además es un *dead end*, por consiguiente, considerando el comentario sobre *dead ends* que hicimos en el párrafo anterior, sucede que $\mathfrak{M}_3, \omega \vDash \mathrm{Int}_1 \perp$. Tenemos así que la instancia de $\mathbf{D}_{Int}$ que tomamos es falsa en $\mathfrak{M}_3$, con lo cual el esquema $\mathbf{D}_{Int}$ no es válido en $\mathcal{M}$. (Sin embargo nótese que si $\mathfrak{M}_3$ no tuviese *dead ends* la argumentación anterior no se sostendría).

Para finalizar esta sección veamos en que modelos podemos obtener resultados positivos para los esquemas que acabamos de exponer. De esta manera reconoceremos que tipo de estructuras relacionales son de interés para nosotros.

El esquema $\mathbf{4}_{Bel}$ es válido en la clase de los modelos donde las relaciones B_i son transitivas. Para ver esto tomemos un $\mathfrak{M}$ en la clase de estos modelos y algún ω en $\mathfrak{M}$. Supongamos que $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\, \varphi$ $(*)$ e intentemos llegar a que $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\, \mathrm{Bel}_i\, \varphi$. Para esto consideremos cualquier υ para el cual $\omega B_i \upsilon$ y cualquier μ tal que $\upsilon B_i \mu$. Dado que B_i es transitiva tenemos que $\omega B_i \mu$. De aquí por $(*)$, tenemos que $\mathfrak{M}, \mu \vDash \varphi$. De aquí porque $\upsilon B_i \mu$ tenemos que $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \mathrm{Bel}_i\, \varphi$, y luego porque $\omega B_i \upsilon$ llegamos a $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\, \mathrm{Bel}_i\, \varphi$. Entonces de suponer $(*)$ obtuvimos $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\, \mathrm{Bel}_i\, \varphi$, por lo tanto $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathbf{4}_{Bel}$, y habiendo sido ω en $\mathfrak{M}$, ambos arbitrarios, podemos asegurar que $\mathbf{4}_{Bel}$ es válido en la clase de los modelos de Kripke donde la relación B_i es transitiva.

[20] Una relación binaria R (de $\mathfrak{M}$) es transitiva sii para todo ω, υ y μ en $\mathfrak{M}$, si $\omega R \upsilon$ y $\upsilon R \mu$, entonces $\omega R \mu$.

[21] También puede aparecer con la forma $\mathrm{Int}_i\, \varphi \rightarrow \neg\, \mathrm{Int}_i \neg \varphi$, pero se puede demostrar que $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathrm{Int}_i\, \varphi \rightarrow \neg\, \mathrm{Int}_i \neg \varphi$ *sii* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\, \mathrm{Int}_i \perp$.

[22] Es instancia del esquema $\neg\, \mathrm{Int}_i \perp$ que denotaremos $\mathbf{D}_{Int}$.

Veamos ahora que el esquema $\mathbf{5}_{Bel}$ es válido en la clase de los modelos donde las relaciones B_i son euclidianas[23]. Para verlo, tomemos nuevamente un $\mathfrak{M}$ en la clase de estos modelos, y por el absurdo supongamos que $\mathfrak{M} \nvDash \mathbf{5}_{Bel}$, es decir que debe haber algún ω en $\mathfrak{M}$ tal que no se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \mathbf{5}_{Bel}$, o sea que $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\mathbf{5}_{Bel}$, con lo cual tenemos que, $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg \operatorname{Bel}_i \varphi$ $(*)$ y no se da $\mathfrak{M}, \omega \vDash \operatorname{Bel}_i \neg \operatorname{Bel}_i \varphi$ $(**)$. De $(*)$ vemos que existe algún υ tal que $\omega B_i \upsilon$ y $\mathfrak{M}, \upsilon \vDash \neg\varphi$. Por otro lado de $(**)$ vemos que $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg \operatorname{Bel}_i \neg \operatorname{Bel}_i \varphi$, luego debe existir algún μ tal que $\omega B_i \mu$ y $\mathfrak{M}, \mu \vDash \operatorname{Bel}_i \varphi$. Ahora, teniendo que $\omega B_i \mu$ y $\omega B_i \upsilon$ llegamos a que $\mu B_i \upsilon$ (pues B_i es euclidiana). Entonces tenemos tanto que $\mathfrak{M}, \mu \vDash \operatorname{Bel}_i \varphi$ como que $\mathfrak{M}, \mu \vDash \neg \operatorname{Bel}_i \varphi$, es decir que en el estado μ se satisface $\operatorname{Bel}_i \varphi$ y no se satisface $\operatorname{Bel}_i \varphi$, lo cual es una contradicción por haber supuesto que $\mathfrak{M} \nvDash \mathbf{5}_{Bel}$, por consiguiente tiene que darse $\mathfrak{M} \vDash \mathbf{5}_{Bel}$. Aseguramos así que $\mathbf{5}_{Bel}$ es válido en la clase de los modelos donde las relaciones B_i son euclidianas.

Por último, veamos que el esquema $\mathbf{D}_{Int}$ es válido en la clase de modelos donde las relaciones I_i son seriales[24]. Tomemos un modelo $\mathfrak{M}$ en esta clase de modelos y un estado ω en $\mathfrak{M}$. Supongamos por el absurdo que $\mathfrak{M} \nvDash \mathbf{D}_{Int}$, es decir, debe haber un estado ω en donde $\mathfrak{M}, \omega \vDash \operatorname{Int}_i \bot$. Esto es posible únicamente si todos los estados relacionados con ω mediante las relaciones I_i satisfacen $\bot$, esto solo es posible si ω es un *dead end*. Sin embargo, por la serialidad de I_i, sabemos que ω no puede ser un *dead end*, por consiguiente nuestra suposición de que $\mathfrak{M} \nvDash \mathbf{D}_{Int}$ no debe ser cierta y $\mathfrak{M} \vDash \mathbf{D}_{Int}$. Queda demostrado entonces que $\mathbf{D}_{Int}$ es válido en la clase de modelos donde las relaciones I_i son seriales.

Ya estamos en condiciones de nombrar la clase de modelos de Kripke que permiten validar los principios que interesa sostener en la formalismo estudiado. Estos modelos son aquellos donde las relaciones B_i, O^i, O, Id^i, I_i, I_i^k son seriales, y además las relaciones B_i también son transitivas y euclidianas. Llamemos a la clase que contiene estos modelos $\mathcal{M}^{LR}$.

Para finalizar hacemos un comentario sobre los resultados positivos obtenidos y su relación con los modelos. Se habrá notado que las valuaciones de los modelos no influyeron en absoluto sobre las pruebas de validez para los esquemas que tratamos. Esto concuerda con lo que hemos dicho sobre *validez* (en p. 9) y que se ha podido ver claramente en las demostraciones anteriores. Algunos autores, especialmente en la literatura más reciente, distinguen la estructura de los modelos en dos *niveles*, inicialmente un *frame*, compuesto por el dominio del modelo y las relaciones que lo componen, y luego el modelo en si mismo, el cual es un frame que incorpora una valuación. Quizá hubiese sido conveniente introducir la idea de frame y utilizarla para las pruebas de validez. Por ejemplo si hubiésemos simbolizado la clase de frames transitivos mediante $\mathcal{F}_{trans}$, hubiésemos podido escribir, (adaptando la notación que ya introdujimos) $\mathcal{F}_{trans} \vDash \mathbf{4}_{Bel}$, y esta notación quizá hubiese dejado más claro la idea sobre validez de determinados esquemas en determinadas estructuras (frames y luego modelos).

[23] Una relación binaria R (de $\mathfrak{M}$) es euclidiana sii para todo ω, υ y μ en $\mathfrak{M}$, si $\omega R \upsilon$ y $\omega R \mu$, entonces $\upsilon R \mu$.

[24] Una relación binaria R (de $\mathfrak{M}$) es serial sii para todo ω en $\mathfrak{M}$, existe un υ en $\mathfrak{M}$ tal que $\omega R \upsilon$.

Características de los modelos para $\mathcal{L}_{non}$

En esta sección observaremos las características de los modelos para $\mathcal{L}_{non}$ de manera similar a como lo hicimos con los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$. Los esquemas que interesa estudiar[25] en $\mathcal{L}_{non}$ son, el que denominamos $\mathbf{C}_{Does}$, con la forma $(\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$; el que denominamos $\mathbf{T}_{Does}$, con la forma $\mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \varphi$; $\mathbf{NN}_{Does}$ que tiene la forma $\neg\,\mathrm{Does}_i\,\top$; y $\mathbf{BR}$ que tiene la forma $\mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \mathrm{Able}_i\,\varphi$. Ninguno de ellos es válido en $\mathscr{M}$ (la clase de todos los modelos mínimos).

Antes de observar que esto es así, veamos algunas propiedades estructurales de los conjuntos de verdad que serán necesarias a continuación.[26] Sea $\mathfrak{M} = \langle W, \ldots, V\rangle$, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

$\|p_i\|^{\mathfrak{M}} = V(p_i)$, para $i = 0, 1, 2, \ldots$,

$\|\top\|^{\mathfrak{M}} = W$,

$\|\varphi \wedge \psi\|^{\mathfrak{M}} = \|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{M}}$.

Ahora si, comencemos con un contramodelo para $\mathbf{C}_{Does}$. Tomemos la instancia $(\mathrm{Does}_1\,p_0 \wedge \mathrm{Does}_1\,p_1) \rightarrow \mathrm{Does}_1\,(p_0 \wedge p_1)$ y $\mathfrak{M}_1 = \left\langle W, \ldots, N_1^D, \ldots, V\right\rangle$ como (contra)modelo, donde $W = \{\omega, \upsilon\}$ (distintos), $N_1^D = \{\{\omega\}, \{\upsilon\}\}$, $V(p_0) = \{\omega\}$ y $V(p_1) = \{\upsilon\}$. En este modelo $\|p_0\|^{\mathfrak{M}_1} = \{\omega\} \in N_1^D(\omega)$ y $\|p_1\|^{\mathfrak{M}_1} = \{\upsilon\} \in N_1^D(\omega)$, por lo tanto $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash \mathrm{Does}_1\,p_0$ y $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash \mathrm{Does}_1\,p_1$, entonces se tiene $\mathfrak{M}_1, \omega \vDash (\mathrm{Does}_1\,p_0 \wedge \mathrm{Does}_1\,p_1)$ $(*)$. Pero $\|p_0 \wedge p_1\|^{\mathfrak{M}_1} = \|p_0\|^{\mathfrak{M}_1} \cap \|p_1\|^{\mathfrak{M}_1} = \{\omega\} \cap \{\upsilon\} = \varnothing \notin N_1^D(\omega)$, seguido se tiene $\mathfrak{M}_1, \omega \nvDash \mathrm{Does}_1\,(p_0 \wedge p_1)$ $(**)$. De $(*)$ y $(**)$ tenemos que $\mathfrak{M}_1, \omega \nvDash (\mathrm{Does}_1\,p_0 \wedge \mathrm{Does}_1\,p_1) \rightarrow \mathrm{Does}_1\,(p_0 \wedge p_1)$, con lo cual $\mathbf{C}_{Does}$ no es válido en $\mathscr{M}$.

Veamos ahora un modelo $\mathfrak{M}_2$ que falsifique la instancia de $\mathbf{T}_{Does}$, $\mathrm{Does}_1\,p_0 \rightarrow p_0$. $\mathfrak{M}_2$ es como $\mathfrak{M}_1$ pero $N_1^D = \{\{\upsilon\}\}$, $V(p_0) = \{\upsilon\}$. En este (contra)modelo, $\|p_0\|^{\mathfrak{M}_2} = \{\upsilon\} \in N_1^D$, por consiguiente $\mathfrak{M}_2, \omega \vDash \mathrm{Does}_1\,p_0$, pero $\omega \notin V(p_0)$ con lo cual $\mathfrak{M}_2, \omega \nvDash p_0$. Así entonces $\mathfrak{M}_2, \omega \nvDash \mathrm{Does}_1\,p_0 \rightarrow p_0$, es decir que $\mathbf{T}_{Does}$ no es válido en $\mathscr{M}$.

Para $\mathbf{NN}_{Does}$, tomemos la instancia $\neg\,\mathrm{Does}_1\,\top$, y $\mathfrak{M}_3 = \left\langle W, \ldots, N_1^D, \ldots, V\right\rangle$ como contramodelo, con $W = \{\omega\}$, $N_1^D = \{\{\omega\}\}$. En este modelo tenemos que $W \in N_1^D(\omega)$, lo que equivale a $\|\top\|^{\mathfrak{M}_3} \in N_1^D(\omega)$, por lo tanto se tiene $\mathfrak{M}_3, \omega \vDash \mathrm{Does}_1\,\top$, con lo cual no se da $\mathfrak{M}_3, \omega \vDash \neg\,\mathrm{Does}_1\,\top$. Por lo tanto $\mathbf{NN}_{Does}$ no es válido en $\mathscr{M}$.

La instancia $\mathrm{Does}_1\,p_0 \rightarrow \mathrm{Able}_1\,p_0$ de $\mathbf{BR}$, tampoco es válida en $\mathscr{M}$. Tomemos $\mathfrak{M}_4 = \left\langle W, N_1^A, \ldots, N_1^D, \ldots, V\right\rangle$ siendo $W = \{\omega\}$, $N_1^A = \varnothing$, $N_1^D = \{\{\omega\}\}$ y $V(p_0) = \{\omega\}$. En este contramodelo tenemos que $\|p_0\|^{\mathfrak{M}_4} = \{\omega\} \in N_1^D(\omega)$, con lo cual $\mathfrak{M}_4, \omega \vDash$

[25] Se puede consultar [5] para una exposición interesante sobre las interpretaciones de estos esquemas así como de los operadores modales involucrados.

[26] Estas propiedades se deducen de la definición de conjuntos de verdad (p. 9) y de las condiciones de satisfacción para fórmulas no-modales (p. 8). Véase en [17, Theorem 2.10] varias propiedades mas de las que no haremos una utilización explícita.

$\mathrm{Does}_1\, p_0$. Pero por otro lado sabemos que $\{\omega\} \notin N_1^A(\omega)$, entonces $\mathfrak{M}_4, \omega \not\models \mathrm{Able}_1\, p_0$. Por consiguiente en $\mathfrak{M}_4$ no se satisface $\mathrm{Does}_1\, p_0 \to \mathrm{Able}_1\, p_0$.

Veamos ahora las propiedades que deben tener los mapeos en los modelos mínimos para validar los esquemas $\mathbf{C}_{Does}$, $\mathbf{T}_{Does}$, $\mathbf{NN}_{Does}$ y $\mathbf{BR}$.

Empezando por $\mathbf{C}_{Does}$ el cual es válido en los modelos donde los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones, es decir que *si* $P \in N_i^D(\omega)$ *y* $Q \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $P \cap Q \in N_i^D(\omega)$. Veámoslo tomando un modelo mínimo $\mathfrak{M}$ donde se cumple la propiedad anterior y un estado ω en $\mathfrak{M}$. Supongamos entonces que $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \varphi \wedge \mathrm{Does}_i\, \psi$, tenemos así tanto que $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \varphi$ como $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \psi$, es decir que tanto $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$ como $\|\psi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$. Luego (por la cerradura bajo intersecciones) se tiene $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \cap \|\psi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$ y esto equivale a $\|\varphi \wedge \psi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$. Finalmente (de la definición de satisfacción) tenemos $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, (\varphi \wedge \psi)$. Por consiguiente $\mathfrak{M}, \omega \models \mathbf{C}_{Does}$, y habiendo sido $\mathfrak{M}$ y ω arbitrarios podemos asegurar que $\mathbf{C}_{Does}$ es válido en la clase de modelos mínimos donde los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones.

Veamos que $\mathbf{T}_{Does}$ es válido en los modelos donde los mapeos N_i^D satisfacen que *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$. Consideremos un modelo $\mathfrak{M}$ donde se cumple la propiedad anterior y un estado ω en $\mathfrak{M}$. Supongamos ahora que $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \varphi$, con lo cual $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$. De la propiedad que acabamos de describir tenemos que $\omega \in \|\varphi\|^{\mathfrak{M}}$, y (por la definición de $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}}$) se tiene que $\mathfrak{M}, \omega \models \varphi$. Por consiguiente $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \varphi \to \varphi$. Concluimos entonces que $\mathbf{T}_{Does}$ es válido en la clase de modelos mínimos donde los mapeos N_i^D satisfacen la condición especificada.

$\mathbf{NN}_{Does}$ es válido en los modelos donde para los mapeos N_i^D se tiene que *cualquiera sea* ω, $W \notin N_i^D(\omega)$. Dado un modelo $\mathfrak{M}$ que satisface lo anterior, tenemos que $W \notin N_i^D(\omega)$ (cualquiera sea ω e i), es decir que $\|\top\|^{\mathfrak{M}} \notin N_i^D(\omega)$, con lo cual (por la def. de satisfacción) se tiene que no se da $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \top$, nuevamente ahora se tiene que $\mathfrak{M}, \omega \models \neg\, \mathrm{Does}_i\, \top$ como se esperaba. Finalmente entonces $\mathbf{NN}_{Does}$ es válido en la clase de modelos donde se satisface la condición especificada.

Queda por verse que $\mathbf{BR}$ es válido en los modelos donde se cumple que cualquiera sea el estado ω, $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$. Tomemos un modelo $\mathfrak{M}$ donde se cumplen las inclusiones anteriores y supongamos que para algún estado ω se tiene $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Does}_i\, \varphi$, o sea que $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^D(\omega)$. Luego de las inclusiones entre los mapeos se tiene que $\|\varphi\|^{\mathfrak{M}} \in N_i^A(\omega)$, es decir $\mathfrak{M}, \omega \models \mathrm{Able}_i\, \varphi$ como se esperaba. Por lo tanto $\mathbf{BR}$ es válido en la clase de modelos donde se cumple que cualquiera sea el estado ω, $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

Ahora podemos nombrar la clase de modelos que permiten validar los esquemas que vimos en esta sección. La clase contiene los modelos $\mathfrak{M} = \left\langle W, N_i^A, N_i^D, N_{i,k}^D, V \right\rangle$ donde se satisface (para cualquier ω),

- Los mapeos N_i^D se encuentran cerrados bajo intersecciones,

- los mapeos $N_{i,k}^D$ se encuentran cerrados bajo intersecciones,[27]
- *si* $P \in N_i^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$,
- *si* $P \in N_{i,k}^D(\omega)$, *entonces* $\omega \in P$,[28]
- $W \notin N_i^D(\omega)$,
- $W \notin N_{i,k}^D(\omega)$,[29]
- $N_i^D(\omega) \subseteq N_i^A(\omega)$.

A la clase que contiene estos modelos la simbolizamos $\mathscr{M}^{LR}$.

La perspectiva sintáctica

A los *sistemas de lógica modal* se los define en términos bastante abstractos y sintéticos como un conjunto de fórmulas que satisfacen determinadas condiciones de clausura [6, Secc. 4.1], [17, Secc. 2.4]. Las condiciones de clausura se encuentran estrechamente relacionadas con los *sistemas de prueba* o la *teoría de pruebas* (*proof theory*) que posibilitan integrar al sistema de lógica modal un mecanismo constructivo que permita inferir fórmulas válidas. El sistema de prueba implícito en [1] aparece en la literatura (a veces) como sistemas estilo *Hilbert* [6, p. 193][30] o *sistemas axiomáticos* [19][31], [17, p. 51]. Esencialmente el sistema de inferencia consta de una colección de *axiomas* que permiten iniciar el proceso deductivo y una colección de *reglas de deducción* (*derivación* o *inferencia*) que al aplicarse sucesivamente motorizan el proceso.

El proceso deductivo es capturado por lo que se entiende como una *derivación* (*demostración*, *prueba*) en el sistema de lógica modal Σ[32]: esto es una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, donde cada φ_i ($\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n$) es una instancia de alguno de los esquemas de axiomas de Σ o se deduce de dos miembros anteriores de la sucesión, por ejemplo φ_j y φ_k ($j < i$, $k < i$) por aplicación directa de alguna de las reglas de deducción. Se dice entonces que tal sucesión es una derivación[33] de φ_n en Σ, y que φ_n es un *teorema* de Σ[34]. Cuando la fórmula φ se obtiene mediante una derivación en Σ, se escribe $\Sigma \vdash \varphi$, y se dice, φ es *derivable*[35] en Σ.

[27] Las pruebas que se realizaron concernientes a los operadores Does_i, es decir las pruebas para los esquemas $\mathbf{C}_{Does}$, $\mathbf{T}_{Does}$, $\mathbf{NN}_{Does}$, pueden adaptarse para demostrar resultados análogos concernientes a los operadores Does_i^k y los esquemas equivalentes que llamaremos respectivamente $\mathbf{C}_{Does'}$, $\mathbf{T}_{Does'}$, $\mathbf{NN}_{Does'}$.

[28] Ídem nota 27.

[29] Ídem nota 27.

[30] Para una buena introducción a este tipo de sistema de pruebas véase el *sistema deductivo formal* para lógica proposicional en [18, Cap. 2].

[31] En esta referencia también se puede observar una retrospectiva de otros sistemas de prueba para lógica modal.

[32] Utilizaremos el símbolo Σ como variable sobre conjuntos de fórmulas que son sistemas de lógica modal.

[33] O *demostración*, o *prueba*.

[34] Cuando consideramos a Σ como un conjunto de fórmulas cerrado por determinadas reglas, φ es un teorema de Σ si y solo si $\varphi \in \Sigma$.

[35] O *probable*, o *deducible*, o *demostrable*.

En las secciones que siguen presentamos los sistemas axiomáticos (implícitos en [1]) que pretendemos permitan derivar los principios válidos que nos interesan y que caracterizan las clases de modelos que vimos en las secciones anteriores. Comenzaremos exponiendo sistemas básicos que luego extenderemos para facilitar la exposición, especialmente cuando desarrollemos las pruebas de completitud en el siguiente capítulo.

Los sistemas $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$

Partimos describiendo el sistema de lógica modal $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, el cual caracterizará las fórmulas válidas en la clase $\mathcal{M}$. Se encuentra basado en el difundido sistema de lógica modal $\mathbf{K}$[36] y se compone de los siguientes esquemas de axiomas y reglas de deducción, con respecto al conjunto de agentes $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, con $i, k \in A$.

Axiomas

(**PL**) Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional

($\mathbf{K}_{Goal}$) $\mathrm{Goal}_i\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Goal}_i\ \varphi \to \mathrm{Goal}_i\ \psi)$

($\mathbf{K}_{Bel}$) $\mathrm{Bel}_i\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Bel}_i\ \varphi \to \mathrm{Bel}_i\ \psi)$

($\mathbf{K}_{O}$) $\mathrm{O}\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{O}\ \varphi \to \mathrm{O}\ \psi)$

($\mathbf{K}_{O'}$) $\mathrm{O}^i\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{O}^i\ \varphi \to \mathrm{O}^i\ \psi)$

($\mathbf{K}_{Id}$) $\mathrm{I}^i\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{I}^i\ \varphi \to \mathrm{I}^i\ \psi)$

($\mathbf{K}_{Int}$) $\mathrm{Int}_i\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Int}_i\ \varphi \to \mathrm{Int}_i\ \psi)$

($\mathbf{K}_{Int'}$) $\mathrm{Int}_i^k\,(\varphi \to \psi) \to (\mathrm{Int}_i^k\ \varphi \to \mathrm{Int}_i^k\ \psi)$

Reglas de deducción

(**MP**) *De* φ *y* $\varphi \to \psi$, *se deduce* ψ

($\mathbf{Gen}_{Goal}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Goal}_i\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{Bel}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Bel}_i\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{O}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{O}\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{O'}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{O}^i\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{Id}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{I}^i\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{Int}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Int}_i\ \varphi$

($\mathbf{Gen}_{Int'}$) *De* φ, *se deduce* $\mathrm{Int}_i^k\ \varphi$

[36] O en su conocida generalización multi-agente, $\mathbf{K}_n$ (considerando n agentes). En este trabajo suprimimos el subíndice para no abarrotar la notación, pero siempre estaremos hablando de sistemas deductivos multi-agente.

En el caso de este sistema, las condiciones de clausura de las que hablábamos anteriormente, mediante las cuales se configura un sistema de lógica modal, se corresponden con la regla de deducción (**MP**)[37]. Que el sistema además posea las reglas de *generalización* ($\mathbf{Gen}_*$)[38] y esquemas de *axiomas de* distribución ($\mathbf{K}_*$), lo ubica entre los sistemas de lógica modal *normal*[39]. Es por ello que al conjunto de fórmulas que genera este sistema, en las que no aparecen los operadores Able_i, Does_i, Does_i^k, lo hemos llamado $\mathcal{L}_{norm}$. Existe amplio desarrollo sobre las (sistemas) lógicas modales normales, lo que permite la reutilización de herramientas, técnicas y resultados que ya fueron probados. Por ejemplo todas los (sistemas) modales normales, poseen la regla de deducción **RK**. Nosotros la introduciremos para hacer mas fluida la prueba de completitud para este sistema en el próximo capítulo. Tomemos como ejemplo el operador Goal_i para exponer la regla, y consideremos $n \geqslant 0$:[40]

$$(\mathbf{RK}_{Goal}) \quad \textit{De } (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi, \textit{ se deduce}$$
$$(\mathrm{Goal}_i\, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Goal}_i\, \varphi_n) \rightarrow \mathrm{Goal}_i\, \varphi$$

Mediante una prueba por inducción sobre el número n de operandos en las conjunciones de los antecedentes que conforman la regla se puede *metademostrar*[41] la existencia de esta regla en $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$.[42] Para el resto de los operadores modales de $\mathcal{L}_{norm}$ también tenemos una regla análoga pues en la prueba de su existencia únicamente es necesario la utilización de (**PL**) (y (**MP**)), el axioma de distribución correspondiente y la regla de generalización correspondiente. Por ejemplo para el operador Bel_i se utilizará además de (**PL**) (y (**MP**)), ($\mathbf{Gen}_{Bel}$) y ($\mathbf{K}_{Bel}$) para metaderivar que la regla ($\mathbf{RK}_{Bel}$) se encuentra en $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$. Por supuesto la regla tendrá la siguiente forma: (siendo $n \geqslant 0$)

[37]Algunos autores (por ejemplo [6, Def. 4.1]) especifican además la necesidad de una regla de *sustitución uniforme*, la cual permite dado ϕ, deducir θ, donde θ se obtiene de ϕ reemplazando uniformemente símbolos proposicionales de ϕ por fórmulas arbitrarias. En nuestro caso no incluimos esta regla debido a que hemos expuesto nuestros axiomas y reglas de deducción mediante esquemas. De esta manera, el efecto producido por sustitución uniforme se encuentra subsumido por el uso (instanciación) de los esquemas de axiomas y reglas de deducción. Esta forma de exposición es la seguida por ejemplo en [17], y nos permite simplificar la exposición del sistema axiomático.

[38]Utilizamos el subíndice $*$ para denotar una colección de reglas de deducción o una colección de esquemas. En este caso, ($\mathbf{Gen}_*$) denota la colección de reglas de deducción que contiene $(\mathbf{Gen}_{Goal}), (\mathbf{Gen}_{Bel}), \ldots, (\mathbf{Gen}_{Int'})$. Las reglas ($\mathbf{Gen}_*$) también son condiciones de clausura para este sistema de lógica modal.

[39]Véase [6, Def. 4.5 y Remark 4.7], y [17, Teorema 4.3(1)]. Las anteriores referencias especifican además la necesidad del esquema *dual* aunque [6, pp. 34] indica que este esquema no hace falta si la primitiva del lenguaje fuese como las primitivas que tenemos en $\mathcal{L}_{norm}$. De todas maneras no hubiese implicado ningún problema agregar los esquemas duales a nuestro sistema, podríamos haberlo hecho, pero no los utilizaríamos. En [20, Def 8.4.2] se especifica que un sistema multimodal es normal si cada operador consta de un axioma de distribución y una regla de deducción de generalización, como en nuestro caso. Para una discusión interesante sobre *normalidad*, véase [21]. También véase [16, Sección 1.4].

[40]Cuando $n = 0$, no tenemos antecedentes y se considera a la regla, formada por los consecuentes de las implicaciones, es decir que se obtiene la regla de generalización ($\mathbf{Gen}_{Goal}$).

[41]Es decir obtener una derivación (demostración) mediante algún método de prueba (matemático) con el cual llegar a un resultado *sobre* el sistema en sí mismo y no *en* el sistema (utilizando su teoría de pruebas).

[42]Véase en [17, p. 19] como puede desarrollarse una metademostración de este tipo, para esta regla.

$(\mathbf{RK}_{Bel})$ *De* $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$, *se deduce*
$(\mathrm{Bel}_i\ \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Bel}_i\ \varphi_n) \rightarrow \mathrm{Bel}_i\ \varphi$

A partir de ahora entonces consideremos que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ cuenta con la colección de reglas $(\mathbf{RK}_*)$.

Algunas aclaraciones con respecto a la colección de (esquemas de) axiomas. En este trabajo seguimos el enfoque que generalmente se encuentra en la literatura sobre sistemas de lógica modal, cuando se incluye el cálculo proposicional mediante el desmesurado esquema (**PL**). El cálculo proposicional se puede incluir refinadamente mediante (esquemas de) axiomas clásicos que permitan derivar las tautologías proposicionales de forma tradicional[43]. Aclaremos también que (**PL**) permite instanciar además de tautologías propias del cálculo proposicional, tautologías donde aparezcan operadores modales, por ejemplo $\mathrm{Bel}_i\ p_1 \rightarrow \mathrm{Bel}_i\ p_1$, pues proviene de la tautología proposicional $p \rightarrow p$.

También vale la pena aclarar que, dependiendo la literatura consultada, los esquemas de axiomas aquí expuestos pueden tener otras formas. Por ejemplo cualquiera de los esquemas $(\mathbf{K}_*)$, puede encontrarse como $(\mathrm{Goal}_i\ \varphi \wedge \mathrm{Goal}_i\ (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \mathrm{Goal}_i\ \psi$ (tomando el operador Goal_i como referencia). Sin embargo ambas formas deberían ser *demostrable-equivalentes*[44]. Lo importante, en lo que concierne a este trabajo, es que la clase de los teoremas del sistema no va a variar mientras hablemos de axiomas demostrable-equivalentes entre si.

El sistema $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$

Este sistema es una *extensión*[45] del sistema $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, es decir que $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es un sistema compuesto por los esquemas de axiomas de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y sus reglas de deducción,

[43] Véase por ejemplo [18, Capítulo 2].

[44] Sin entrar en detalles, φ y ψ son demostrable-equivalentes sii $\Sigma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, es decir, $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ y $\Sigma \vdash (\psi \rightarrow \varphi)$. Informalmente, ψ se puede obtener mediante una derivación que contenga en su sucesión de fórmulas a φ, y vice versa, de cualquiera de las fórmulas se puede derivar la otra. Para mas detalle se puede consultar [18, Sección 4.2], (salvando las distancias entre el sistema expuesto allí y el sistema expuesto aquí).

[45] En este contexto una *extensión* Σ' de un sistema de lógica modal Σ, es un sistema de lógica modal que podría ampliar la clase de los teoremas de Σ, es decir que $\Sigma \subseteq \Sigma'$ (recuérdese que un sistema de lógica modal es un conjunto de fórmulas con reglas de clausura), los teoremas de Σ seguirían siendo teoremas de Σ'. Σ' pudo haberse obtenido, por ejemplo, agregando nuevos axiomas a Σ, de manera que estos nuevos axiomas (eventualmente) permitan deducir nuevos teoremas en Σ'. De importancia es notar que extensiones de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ poseen todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional.

pero incorpora los siguientes esquemas de axiomas:

$(\mathbf{D}_{Bel})$	$\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \bot$	$(\mathbf{4}_{Bel})$	$\mathrm{Bel}_i\ \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi$
$(\mathbf{D}_{O})$	$\neg\,\mathrm{O}\ \bot$	$(\mathbf{5}_{Bel})$	$\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \rightarrow \mathrm{Bel}_i\,\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi$
$(\mathbf{D}_{O'})$	$\neg\,\mathrm{O}^i\ \bot$		
$(\mathbf{D}_{Id})$	$\neg\,\mathrm{I}^i\ \bot$		
$(\mathbf{D}_{Int})$	$\neg\,\mathrm{Int}_i\ \bot$		
$(\mathbf{D}_{Int'})$	$\neg\,\mathrm{Int}_i^k\ \bot$		

Nótese que este sistema incorpora como esquemas de axiomas los principios válidos en la clase de modelos $\mathcal{M}^{LR}$ que observamos anteriormente, esto permitirá al sistema generar las fórmulas de $\mathcal{L}_{norm}$ válidas en esta clase de modelos como veremos más adelante.

Los sistemas $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

Veamos ahora el sistema básico que luego extenderemos para generan las fórmulas válidas de $\mathcal{L}_{non}$ (y solo ellas). Este sistema también se basa en sistemas difundidos en la literatura llamados sistemas *clásicos* de lógica modal [17, Cap. 8][46]. Se compone de los siguientes esquemas de axiomas y reglas de deducción (siempre con respecto al conjunto de agentes $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, y para $i, k \in A$).

Axiomas

(PL) Todas las instancias de tautologías del cálculo proposicional

Reglas de deducción

(MP) *De* φ *y* $\varphi \rightarrow \psi$, *se deduce* ψ

$(\mathbf{RE}_{Able})$ *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Able}_i\ \varphi \leftrightarrow \mathrm{Able}_i\ \psi$

$(\mathbf{RE}_{Does})$ *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Does}_i\ \varphi \leftrightarrow \mathrm{Does}_i\ \psi$

$(\mathbf{RE}_{Does'})$ *De* $\varphi \leftrightarrow \psi$, *se deduce* $\mathrm{Does}_i^k\ \varphi \leftrightarrow \mathrm{Does}_i^k\ \psi$

Las condiciones de clausura para este sistema es la colección de reglas $(\mathbf{RE}_*)$ (y por supuesto (**MP**) dado que éste es un sistema de lógica modal).

[46] Como aclaramos en el caso de los sistemas normales, el autor de esta referencia incluye en la definición de los sistemas clásicos, los esquemas de axiomas dual. Nosotros no los incluimos dado que no daremos uso a los mismos, pero no hubiese sido ningún problema incluirlos excepto que complicarían la exposición del sistema de inferencia.

El sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

Como hicimos en el caso de los sistemas $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$, expondremos ahora una extensión de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ que incorpora los esquemas válidos en la clase $\mathscr{M}^{LR}$, permitiendo así, como veremos mas adelante, generar únicamente las fórmulas válidas de $\mathcal{L}_{non}$. Al sistema lo simbolizamos $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$, y este se compone por los esquemas de axiomas de $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y sus reglas de deducción, e incorpora los siguientes esquemas de axiomas:

$(\mathbf{C}_{Does})$	$(\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{C}_{Does'})$	$(\mathrm{Does}_i^k\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i^k\,\psi) \rightarrow \mathrm{Does}_i^k(\varphi \wedge \psi)$
$(\mathbf{T}_{Does})$	$\mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \varphi$
$(\mathbf{T}_{Does'})$	$\mathrm{Does}_i^k\,\varphi \rightarrow \varphi$
$(\mathbf{NN}_{Does})$	$\neg\,\mathrm{Does}_i\,\top$
$(\mathbf{NN}_{Does'})$	$\neg\,\mathrm{Does}_i^k\,\top$
$(\mathbf{BR})$	$\mathrm{Does}_i\,\varphi \rightarrow \mathrm{Able}_i\,\varphi$

Aquí finalizamos la exposición de los sistemas axiomáticos. En el siguiente capítulo veremos la relación entre estos sistemas y las clases de modelos que vimos anteriormente mediante pruebas de completitud.

Completitud

En este capítulo desarrollaremos el objetivo principal de este trabajo, en el cual nos proponemos observar la relación entre ambas perspectivas del formalismo en estudio, la perspectiva semántica y la sintáctica. Hay dos preguntas que pueden hacerse que implicarán una descripción precisa de la relación entre ambas. Dada la especificación semántica, ¿se puede dar una caracterización sintáctica de la misma?. Y por otro lado, dada la especificación sintáctica, ¿podemos caracterizar ésta en términos de la dimensión semántica?

Las respuestas a estas preguntas se conocen como teoremas (pruebas, demostraciones) de corrección (*soundness*) y de completitud (*completeness*).[1] Un sistema de lógica modal Σ es *sound* con respecto a una clase de modelos $\mathcal{C}$ cuando cada teorema de Σ es válido en $\mathcal{C}$. Es decir que para cada fórmula φ,

si $\Sigma \vdash \varphi$, *entonces* $\mathcal{C} \vDash \varphi$.[2]

El principal interés en este trabajo se captura mediante el recíproco del enunciado anterior. Se dice que Σ es completo con respecto a $\mathcal{C}$, cuando cada fórmula válida en $\mathcal{C}$ es derivable (es un teorema) de Σ. Es decir que para cada fórmula φ,

si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$.

Cuando suceden ambas implicaciones se dice que Σ se encuentra *determinado* por $\mathcal{C}$.

Las pruebas de completitud las encararemos en etapas. Inicialmente probaremos que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a la clase $\mathcal{M}$ y luego incorporaremos el resto de los axiomas de interés obteniendo que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

[1] Mejor dicho, estamos hablando de resultados *sobre* los sistemas de lógica (modal), con lo cual deberíamos referirnos a metateoremas, metademostraciones, etc.

[2] En este trabajo no nos ocuparemos de la prueba mas simple, que es la de soundness. Generalmente se realiza por inducción sobre la longitud de una derivación (la cantidad de fórmulas de Σ miembros de la sucesión finita que constituye una demostración de φ en Σ). Esta prueba consta en demostrar que los axiomas de Σ son válidos en $\mathcal{C}$ y que las reglas de deducción *preservan la validez*.

Que la colección de axiomas ($\mathbf{K}_*$) y ($\mathbf{PL}$) son válidos en $\mathcal{M}$ y que las reglas de deducción ($\mathbf{MP}$), ($\mathbf{Gen}_*$) y ($\mathbf{RK}_*$) preservan la validez se puede observar en [17, Theorem 2.8, Theorem 3.3], [6, p. 33-35, 195], y en otro contexto [18, Proposición 2.14].

Por otro lado, que las reglas ($\mathbf{MP}$) y ($\mathbf{RE}_*$) preservan validez en la clase $\mathscr{M}$ se puede observar en [17, Theorem 2.8, Theorem 7.3].

De forma similar haremos para demostrar que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}$, y luego que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$.

Preliminares

Antes de comenzar con las pruebas, necesitamos algunas definiciones y conceptos de los que no hablamos previamente. Se define que la fórmula φ es Σ-*consistente* cuando $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ ($\neg\varphi$ no se puede deducir de (en) el sistema Σ). Que el conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_j\}$ es consistente si la conjunción $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_j$ es consistente. También que un conjunto infinito de fórmulas es consistente cuando todos los subconjuntos finitos de éste son consistentes. Y finalmente, un conjunto de fórmulas Γ es *maximal* Σ-*consistente* (Σ-CMC) si Γ es Σ-consistente y para cualquier fórmula ψ, si $\psi \notin \Gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\psi\}$ es Σ-*inconsistente* (no es Σ-consistente). Utilizamos también estas definiciones cuando hablemos de extensiones de Σ, por ejemplo si Λ fuera una de ellas, hablaremos de Λ-*consistente*, *maximal* Λ-*consistente*, etc.

Los conjuntos maximales consistentes juegan un papel importante en las pruebas de completitud para sistemas de lógica modal. Intuitivamente estos conjuntos contienen tantas fórmulas como sea posible sin devenir inconsistentes. A continuación veremos algunas propiedades interesantes de ellos, que serán fundamentales. Sea Σ un sistema de lógica modal, Γ un Σ-CMC, φ y ψ fórmulas arbitrarias:

a) *O* $\varphi \in \Gamma$, *o* $\neg\varphi \in \Gamma$, *(pero no ambas)*;

b) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *sii* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma$;

c) *Cuando* $\varphi \in \Gamma$ *y* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ *se da* $\psi \in \Gamma$;

d) *Si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\varphi \in \Gamma$.

Para ver que vale a), supongamos que la proposición no vale, por lo tanto hay alguna φ para la cual $\varphi \notin \Gamma$ y $\neg\varphi \notin \Gamma$. Por consiguiente tanto $\Gamma \cup \{\varphi\}$ como $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ son Σ-inconsistentes (pues Γ es un Σ-CMC). Entonces sucede que hay un par de conjuntos $A \subseteq \Gamma$ y $B \subseteq \Gamma$ (ambos finitos), para los cuales $A \cup \{\varphi\}$ y $B \cup \{\neg\varphi\}$, son Σ-inconsistentes. Luego $A \cup B \cup \{\varphi\}$ y $A \cup B \cup \{\neg\varphi\}$ son Σ-inconsistentes. Supongamos que $A \cup B = \{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, entonces se tiene la siguiente derivación en Σ, (para lo que sigue, recuérdese que en Σ se encuentra *embebido* el cálculo proposicional):

1 $\Sigma \vdash \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \wedge \varphi)$

2 $\Sigma \vdash \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \wedge \neg\varphi)$

3 $\Sigma \vdash \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \vee \varphi$

4 $\Sigma \vdash \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \vee \neg\varphi$

5 $\Sigma \vdash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k) \rightarrow \varphi$

6 $\Sigma \vdash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k) \rightarrow \neg\varphi$

7 $\Sigma \vdash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

8 $\Sigma \vdash ((\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)) \rightarrow \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k)$

9 $\Sigma \vdash \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k)$

Pero entonces no sucede que $\Sigma \nvdash \neg(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k)$, por consiguiente no se da que $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k$ sea Σ-consistente, es decir $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ es Σ-inconsistente, pero entonces dado que $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subseteq \Gamma$, Γ es Σ-inconsistente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto debe valer a). No ha sido la intención producir una derivación completa, se ha resumido buena parte de la misma para no extendernos demasiado y el lector debe saber el esfuerzo que requiere este tipo de tarea, véase [18]. Sin embargo los sistemas de lógica modal tienen el poderoso axioma (**PL**), que facilita mucho las derivaciones[3].

Veamos que se cumple b), supongamos que Γ es un Σ-CMC:

($\Rightarrow$) Por el absurdo, supongamos que $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ y también $\varphi \notin \Gamma$. De a) sabemos que $\neg\varphi \in \Gamma$, con lo cual $\{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi\} \subset \Gamma$. Pero mediante (**PL**) se tiene que $\Sigma \vdash \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\psi)$, luego no se da que $\Sigma \nvdash \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg\psi)$. Entonces $\{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi\}$ es Σ-inconsistente con lo cual Γ deviene inconsistente, arribando así a una contradicción. Por lo tanto si $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, entonces $\varphi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$.

($\Leftarrow$) Razonando nuevamente por el absurdo, supongamos que $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in \Gamma$ y además $\varphi \wedge \psi \notin \Gamma$. Entonces $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es Σ-inconsistente, existe algún conjunto finito $A \subset \Gamma$ para el que se cumple $\Sigma \vdash \neg(A \wedge \varphi \wedge \psi)$. Tenemos así que el conjunto finito $A \cup \{\varphi, \psi\} \subset \Gamma$ es Σ-inconsistente, tornando a Γ inconsistente también y obteniendo una contradicción. Por lo tanto $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, y debe valer b).

Para ver que vale c) supongamos Γ es un Σ-CMC, $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi \to \psi \in \Gamma$, y por el absurdo que $\psi \notin \Gamma$. Entonces $\{\varphi, \varphi \to \psi, \neg\psi\} \subset \Gamma$. Pero mediante (**PL**) se tiene que $\Sigma \vdash \neg(\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi)$, con lo cual $\{\varphi, \varphi \to \psi, \neg\psi\}$ es Σ-inconsistente tornando a Γ inconsistente también, lo cual es una contradicción, por lo tanto debe valer c).

Finalmente veamos que vale el enunciado d). Para ello supongamos que Γ es un Σ-CMC y $\Sigma \vdash \varphi$. Por lo tanto $\neg\varphi$ es Σ-inconsistente, luego $\neg\varphi \notin \Gamma$, en consecuencia, de a) tenemos que $\varphi \in \Gamma$.

Por último veamos un mecanismo[4] que asegura, a partir de un conjunto de fórmulas Δ Σ-consistente, la obtención de un conjunto maximal Σ-consistente Δ^M:
Sea $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ una enumeración de todas las fórmulas del lenguaje. Se define la secuencia de conjuntos de fórmulas $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots \subseteq \Delta_n \subseteq \ldots$ por inducción sobre n:

Para el caso base, $\Delta_0 = \Delta$, y habiendo definido Δ_n el predecesor inmediato de Δ_{n+1},

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n & \text{si } \Delta_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es inconsistente;} \\ \Delta_n \cup \{\varphi_n\} & \text{en el otro caso.} \end{cases}$$

Ahora se define:

$$\Delta^M = \bigcup_{n \geqslant 0} \Delta_n$$

[3]Detallaremos algunos pasos llevados acabo. En 3 y 4 se aplicó De Morgan sobre 1 y 2. En 5 y 6 se aplicó De Morgan, mediante (**PL**) se instanciaron las tautologías $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$, $(\alpha \vee \neg\beta) \to (\alpha \to \beta)$ y se aplicó (**MP**), todo esto considerando 3 y 4. Para 7 se instanció la tautología $((\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \wedge \delta))$ y se aplicó (**MP**) en consideración con 5 y 6. Para 8 se instanció la tautología $(\alpha \to \bot) \to \neg\alpha$. Para finalizar se aplicó (**MP**) entre 7 y 8.

[4]En la literatura a veces aparece como parte de la prueba del *Lema de Lindenbaum*.

De la siguiente manera probamos que Δ^M es Σ-consistente. Supongamos que no lo fuera, entonces por definición, hay un conjunto $A \subseteq \Delta^M$ que es Σ-inconsistente. Ahora $A \subseteq \Delta_n$ para algún n, tornando Δ_n Σ-inconsistente. Pero Δ_n es Σ-consistente por construcción, de esta contradicción podemos asegurar que Δ^M es Σ-consistente.

Veamos además que Δ^M es maximal (Σ-consistente). Nuevamente supongamos que no lo fuera. Entonces por definición hay una fórmula φ para la cual $\varphi \notin \Delta^M$ y $\Delta^M \cup \{\varphi\}$ es Σ-consistente. Supongamos que esta φ es alguna de las fórmulas de la enumeración anterior, digamos φ_k. Entonces dado que $\varphi_k \notin \Delta^M$, $\Delta_k \cup \{\varphi_k\}$ tuvo que ser Σ-inconsistente. Pero entonces también $\Delta^M \cup \{\varphi\}$ es Σ-inconsistente (pues $\Delta_k \subseteq \Delta^M$), contradiciendo nuestra suposición, por lo tanto Δ^M debe ser maximal (Σ-consistente).

Para consultar y profundizar en los conceptos expuestos en esta sección, sobre consistencia, conjuntos maximales consistentes, etc., se puede consultar prácticamente cualquier libro sobre lógica modal, nosotros nos basamos en [17], [6], [11].

El método del modelo canónico

Luego de exponer sobre conjuntos maximales consistentes, estamos en condiciones de empezar a desarrollar las pruebas de completitud. Recordemos entonces que debemos probar: para cada fórmula φ,

Si $\mathcal{C} \vDash \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$ siendo $\mathcal{C}$ una clase particular de modelos y Σ un sistema de lógica modal.

Razonando mediante el contrarecíproco tenemos que

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \nvDash \varphi$,

lo que equivale a,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en la clase* $\mathcal{C}$*) en el cual* $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$,

y esto es equivalente a,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* *existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en la clase* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \nvDash \varphi$,

nuevamente, esto equivale a,

Si $\Sigma \nvdash \varphi$ *entonces* *existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en la clase* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \neg\varphi$ $(*)$,

finalmente, dado que φ es cualquier fórmula, una fórmula con forma arbitraria, reemplacemos de forma uniforme φ por $\neg\varphi$ en el enunciado $(*)$, para obtener finalmente que[5]:

[5] Si éste último paso resuena un tanto arbitrario, se puede argumentar de forma similar a la argumentación en [11], de la siguiente manera: Supóngase que el enunciado $(*)$ vale y que $\Sigma \nvdash \varphi$ pero $\mathcal{C} \vDash \varphi$. Entonces también $\Sigma \nvdash \neg\neg\varphi$ (de lo contrario, mediante (**PL**) instanciando $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ y aplicando (**MP**) se obtendría $\Sigma \vdash \varphi$), luego por definición de consistencia, $\neg\varphi$ es Σ-consistente. Luego de $(*)$ se tiene que $\neg\varphi$ es satisfactible en algún $\mathfrak{M}$ (contenido en $\mathcal{C}$) contradiciendo la validez de φ en la clase $\mathcal{C}$.

Si $\Sigma \nvdash \neg\varphi$ *entonces existe un modelo* $\mathfrak{M}$ *(en la clase* $\mathcal{C}$*) y un estado* ω *en* $\mathfrak{M}$ *tales que* $\mathfrak{M}, \omega \vDash \varphi$.

Por lo tanto lo que se esta diciendo es que probar la completitud es equivalente a demostrar que cualquier fórmula consistente es satisfactible. Para ello introducimos los *modelos canónicos* para sistemas de lógica modal. Estos modelos tienen la siguiente forma,

$$\mathfrak{M}^c = (W^c, \ldots, V^c)$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma \textit{ es un } \Sigma\text{-CMC}\}$,

V^c es la valuación definida por, $V^c(p_i) = \{\omega \in W^c : p_i \in \omega\}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$

Tenemos entonces que en un modelo canónico para el sistema Σ, cada estado es un Σ-CMC (y cada uno de estos conjuntos es un estado). Además para cada uno de ellos tendremos que, (para cada $i \in \mathbb{N}$)

$$\omega \in V^c(p_i) \quad \textit{sii} \quad p_i \in \omega.$$

O sea que en los modelos canónicos, la satisfacción para un símbolo proposicional en el estado ω se equipara con la pertenencia del símbolo al estado. Luego esta propiedad se *ampliará* para cualquier fórmula del lenguaje, con lo cual en $\mathfrak{M}^c$ las fórmulas satisfactibles en un estado solo son aquellas que pertenecen al mismo, es decir que para cada $\omega \in W^c$,

$$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi \quad \textit{sii} \quad \varphi \in \omega.$$

Esta equivalencia recibe variados nombres en la literatura, aquí le llamaremos *lema de verdad*. Nótese que ésta alcanza para probar la existencia del modelo que satisface cualquier fórmula consistente pues, si φ es Σ-consistente entonces φ se encuentra en algún Σ-CMC ω, luego por el lema de verdad φ es satisfactible en $\mathfrak{M}^c$, el cual se encontrará en la clase $\mathcal{C}$.

Empecemos realizando la prueba para el lema de verdad cuando las fórmulas son no-modales[6]. La prueba se obtiene por inducción sobre sobre la cantidad n de conectivas que aparece en la fórmula φ:

Paso base: φ no tiene conectivas ($n = 0$):

φ tiene que ser de la forma p_i, para $p_i \in P$ (el conjunto de proposiciones atómicas). De la definición de satisfacción (en página 8), $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash p_i$ *sii* $\omega \in V^c(p_i)$. Ahora, de la definición de $V^c(p_i)$ esto se cumple si y solo si $p_i \in \omega$.

Paso de inducción: Suponiendo que $n > 0$, que φ tiene n conectivas y que toda fórmula con menos de n conectivas satisface el lema de verdad. Debido a la estructura de las fórmulas, consideramos los siguientes casos:

[6] Ésta porción de la prueba será la misma tanto para el sistema $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ como para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$. La factorizamos y la exponemos antes de introducir las pruebas específicas para cada sistema, así evitamos la redundancia.

Caso 1) φ tiene la forma $\neg\psi$:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \neg\psi & \text{sii (de la definición de satisfacción, p. 8),} \\
\mathfrak{M}^c, \omega \nvDash \psi & \text{sii (por hipótesis inductiva),} \\
\psi \notin \omega & \text{sii (por propiedad de los } \Sigma\text{-CMC a)),} \\
\neg\psi \in \omega. &
\end{array}$$

Caso 2) φ tiene la forma $\phi \wedge \psi$:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \phi \wedge \psi & \text{sii (de la definición de satisfacción, p. 8),} \\
\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \phi \;\text{ y }\; (\mathfrak{M}^c, \omega) \vDash \psi & \text{sii (por hipótesis inductiva),} \\
\phi \in \omega \;\text{ y }\; \psi \in \omega & \text{sii (por propiedad de los } \Sigma\text{-CMC b)),} \\
\phi \wedge \psi \in \omega. &
\end{array}$$

Por la consideración como hipótesis de que toda fórmula con menos de n conectivas satisface el lema de verdad, se probó que toda fórmula no-modal con n conectivas satisface el lema de verdad. Por el principio de inducción matemática, toda fórmula no-modal satisface el lema de verdad.

Veamos a continuación que sucede con las fórmulas modales.

El modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$

En esta sección veamos que sucede con las fórmulas modales en $\mathcal{L}_{norm}$ y los modelos canónicos para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$. El modelo canónico tiene la siguiente forma,

$$\mathfrak{M}^c = \left(W^c, \breve{G}_i, \breve{B}_i, \breve{O}, \breve{O}^i, I\breve{d}^i, \breve{I}_i, \breve{I}_i^k, V^c\right)$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma : \Gamma \textit{ es un } \mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}\text{-CMC}\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente.

$$\begin{array}{ll}
\breve{G}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{Goal}} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{Goal}} = \{\varphi : \mathrm{Goal}_i\, \varphi \in \omega\}, \\
\breve{B}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{Bel}} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{Bel}} = \{\varphi : \mathrm{Bel}_i\, \varphi \in \omega\}, \\
\breve{O} = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{O}} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{O}} = \{\varphi : \mathrm{O}\, \varphi \in \omega\}, \\
\breve{O}^i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{O}'} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{O}'} = \left\{\varphi : \mathrm{O}^i\, \varphi \in \omega\right\}, \\
I\breve{d}^i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{I}} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{I}} = \left\{\varphi : \mathrm{I}^i\, \varphi \in \omega\right\}, \\
\breve{I}_i = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{Int}} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{Int}} = \{\varphi : \mathrm{Int}_i\, \varphi \in \omega\}, \\
\breve{I}_i^k = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{Int}'} \subseteq \upsilon\right\} & \text{donde } \omega^{-\,\mathrm{Int}'} = \left\{\varphi : \mathrm{Int}_i^k\, \varphi \in \omega\right\}.
\end{array}$$

Entonces en los modelos canónicos para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, tenemos relaciones binarias entre elementos ($\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC) del dominio. Nótese que, por ejemplo para la relación $\breve{G}_i$, la definición dice que *para todo estado* ω y υ, $\omega \breve{G}_i \upsilon$ *sii* $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \subseteq \upsilon$ *sii* $\{\varphi : \mathrm{Goal}_i\, \varphi \in \omega\} \subseteq \upsilon$ *sii* $(\forall \varphi)$ (*si* $\mathrm{Goal}_i\, \varphi \in \omega$ *entonces* $\varphi \in \upsilon$). De igual manera se interpretan el resto de las relaciones.

Ahora veamos que en un modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se cumple el lema de verdad, es decir que los estados de su dominio satisfacen únicamente las fórmulas que éstos contienen.

La prueba nuevamente es por inducción sobre el número n de conectivas[7] que aparecen en la fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$. Los casos para las fórmulas no-modales (incluyendo el paso base de la prueba) fueron probados en la sección anterior, para las fórmulas modales, tenemos que ver que el resultado se cumple cuando φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\ \varphi$, $\mathrm{Bel}_i\ \varphi$, $\mathrm{O}\ \varphi$, $\mathrm{O}^i\ \varphi$, $\mathrm{I}^i\ \varphi$, $\mathrm{Int}_i\ \varphi$, y $\mathrm{Int}_i^k\ \varphi$. Como hipótesis inductiva asumimos que el resultado se cumple para fórmulas con un número de conectivas menor a n. Tenemos los siguientes casos en el paso de inducción:

Caso 1K) φ tiene la forma $\mathrm{Goal}_i\, \psi$:

($\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi \in \omega$, es decir $\mathrm{Goal}_i\, \psi \in \omega$, entonces $\psi \in \omega^{-\,\mathrm{Goal}}$, luego por definición de $\breve{G}_i$, $\omega \breve{G}_i \upsilon$ y $\psi \in \omega^{-\,\mathrm{Goal}} \subseteq \upsilon$, luego por la hipótesis inductiva, $\mathfrak{M}^c, \upsilon \vDash \psi$. Entonces cualquiera sea υ, con $\omega \breve{G}_i \upsilon$, se tiene $\mathfrak{M}^c, \upsilon \vDash \psi$, es decir $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\, \psi$ (por la definición de satisfacción para las fórmulas modales en modelos de Kripke, p. 8).

($\Rightarrow$) Asumamos que $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Goal}_i\, \psi$ $(**)$. Y ahora veamos que $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \cup \{\neg\psi\}$ es $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-inconsistente. Supongamos que no lo fuera, es decir, supongamos $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \cup \{\neg\psi\}$ $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistente, entonces sabemos que podemos construir un $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC υ tal que $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \subseteq \omega^{-\,\mathrm{Goal}} \cup \{\neg\psi\} \subseteq \upsilon$, entonces $\omega \breve{G}_i \upsilon$. Como $\neg\psi \in \upsilon$, y por la hipótesis inductiva, tenemos que $\mathfrak{M}^c, \upsilon \vDash \neg\psi$. Y dado que $\omega \breve{G}_i \upsilon$, tenemos $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \neg\, \mathrm{Goal}_i\, \psi$. Esto contradice nuestra suposición $(**)$, con lo cual $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \cup \{\neg\psi\}$ debe ser $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-inconsistente.

Podemos continuar diciendo que algún subconjunto finito de $\omega^{-\,\mathrm{Goal}} \cup \{\neg\psi\}$, digamos $\{\phi_1, \ldots, \phi_k, \neg\psi\}$ es $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-inconsistente. Por consiguiente se tiene la siguiente derivación[8] en $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$,

$\vdash \neg\,(\phi_1\ \wedge \ldots \wedge\ \phi_k\ \wedge\ \neg\psi)$,	mediante razonamiento proposicional,
$\vdash (\neg\phi_1\ \vee \ldots \vee\ \neg\phi_k)\ \vee\ \psi$,	nuevamente razonamiento proposicional,
$\vdash (\phi_1\ \wedge \ldots \wedge\ \phi_k)\ \rightarrow\ \psi$,	aplicando ($\mathbf{RK}_{Goal}$),
$\vdash (\mathrm{Goal}_i\, \phi_1\ \wedge \ldots \wedge\ \mathrm{Goal}_i\, \phi_k)\ \rightarrow\ \mathrm{Goal}_i\, \psi$	

De la propiedad d) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC tenemos,

$$(\mathrm{Goal}_i\, \phi_1\ \wedge \ldots \wedge\ \mathrm{Goal}_i\, \phi_k)\ \rightarrow\ \mathrm{Goal}_i\, \psi\ \in\ \omega. \quad ①$$

Ahora dado que $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\} \subset \omega^{-\,\mathrm{Goal}}$, se tiene $\{\mathrm{Goal}_i\, \phi_1, \ldots, \mathrm{Goal}_i\, \phi_k\} \subset \omega$,

[7] Consideraremos a los operadores modales como conectivas.

[8] No damos la derivación completa, hemos salteado algunos pasos especialmente aquellos que involucran razonamiento proposicional evidente, mediante aplicaciones de (**PL**) y (**MP**).

entonces de la propiedad b) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC,

$(\mathrm{Goal}_i\,\phi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Goal}_i\,\phi_k) \in \omega.$ ②

Finalmente de la propiedad c) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-CMC, considerando ① y ②,

$\mathrm{Goal}_i\,\psi \in \omega.$

Caso 2K) φ tiene la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, o la forma $\mathrm{O}\,\psi$, o $\mathrm{O}^i\,\psi$, o $\mathrm{I}^i\,\psi$, o $\mathrm{Int}_i\,\psi$ o $\mathrm{Int}_i^k\,\psi$:

Obsérvese que en el desarrollo del caso anterior, para las fórmulas de forma $\mathrm{Goal}_i\,\psi$ solo involucró la utilización de los esquemas de axiomas (**PL**), y las reglas de deducción (**MP**) y ($\mathbf{RK}_{Goal}$). Para el caso actual podríamos repetir el mismo desarrollo que para el caso anterior pero utilizando coherentemente aplicaciones de la regla ($\mathbf{RK}_{Bel}$) (además de (**MP**) y (**PL**)) cuando tratemos fórmulas de la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$. Aplicaciones de la regla ($\mathbf{RK}_{O}$) cuando tratemos fórmulas de la forma $\mathrm{O}\,\psi$, y así para el resto de las formas $\mathrm{O}^i\,\psi$, $\mathrm{I}^i\,\psi$, $\mathrm{Int}_i\,\psi$, $\mathrm{Int}_i^k\,\psi$, mediante las reglas ($\mathbf{RK}_{O'}$), ($\mathbf{RK}_{Id}$), ($\mathbf{RK}_{Int}$), ($\mathbf{RK}_{Int'}$). Esto es posible debido a que la colección de reglas ($\mathbf{RK}_{*}$) comparten la misma forma, las definiciones de las relaciones binarias canónicas son idénticas entre sí (aunque cada una interpreta un operador distinto) y, la definición de satisfacción en los modelos de Kripke para cada operador modal en $\mathcal{L}_{norm}$ son idénticas entre sí (aunque nuevamente cada una interpreta un operador distinto). Finalmente obtendríamos que cuando φ tenga la forma $\mathrm{Bel}_i\,\psi$, se dará $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Bel}_i\,\psi$ *sii* $\mathrm{Bel}_i\,\psi \in \omega$; cuando tenga la forma $\mathrm{O}\,\psi$, tendremos $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{O}\,\psi$ *sii* $\mathrm{O}\,\psi \in \omega$; y así para el resto de las formas que puede tomar φ.

De esta manera completamos la prueba por inducción del lema de verdad, entonces podemos asegurar que para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$, cualquiera sea ω en $\mathfrak{M}^c$, tenemos $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. Nótese además que $\mathfrak{M}^c$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}$, con lo cual *si* $\mathcal{M} \vDash \varphi$, *entonces* $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm} \vdash \varphi$, es decir que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ es completo con respecto a la clase $\mathcal{M}$.

Concluyamos la sección haciendo un comentario sobre determinación (en el sentido expuesto en página 21). Recuérdese que se puede probar *soundness* para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ como dijimos en un comentario al pie en página 21. Considerando además el resultado que acabamos de obtener mediante el modelo canónico en $\mathcal{M}$, se puede observar que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}$.

$\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$

Para motivar esta sección veamos un resultado aparente pero que será conveniente presentarlo de forma explícita, sea $\mathfrak{M}^c_{LR}$ el modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ (es decir el modelo con la misma estructura que el canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ pero donde su dominio son conjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistentes), tenemos que:

$\mathfrak{M}^c_{LR} \vDash \varphi$ *sii* $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR} \vdash \varphi$.

Veamos una prueba de que esto se sostiene:

($\Leftarrow$) Supongamos $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR} \vdash \varphi$, por la propiedad d) de los conjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistentes, φ se encuentra en cada $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-CMC. Ahora tomemos un estado

υ de $\mathfrak{M}^c_{LR}$, tenemos entonces que φ se encuentra en υ. Luego por el lema de verdad ($\mathfrak{M}^c_{LR}, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$ para cualquier ω)[9] tenemos que $\mathfrak{M}^c_{LR}, \upsilon \vDash \varphi$. Siendo υ un estado arbitrario, tenemos que $\mathfrak{M}^c_{LR} \vDash \varphi$, o sea φ es válida en el modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$.

($\Rightarrow$) Por el contrarecíproco supongamos que $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm} \nvdash \varphi$, de la def. de consistencia, $\{\neg\varphi\}$ es $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-consistente, entonces existe un conjunto maximal $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-consistente (llamémosle ω) que contiene a $\neg\varphi$. ω es un estado de $\mathfrak{M}^c_{LR}$ y de la propiedad a) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC, $\varphi \notin \omega$. Finalmente, del lema de verdad, $\mathfrak{M}^c_{LR}, \omega \nvDash \varphi$, con lo cual φ no es válida en $\mathfrak{M}^c_{LR}$.

Notemos entonces que los sistemas de lógica modal (que hemos tratado) se encuentran determinados por su modelo canónico (o mejor dicho por la clase unitaria que contiene a su modelo canónico). Este resultado nos permite razonar lo siguiente: Si el modelo canónico para un sistema Σ se encuentra contenido en una clase de modelos $\mathcal{C}$ entonces existe un modelo (en la clase $\mathcal{C}$) que satisface cualquier fórmula Σ-consistente, es decir que Σ es completo con respecto a $\mathcal{C}$ (recuérdese lo expuesto en página 24). El problema entonces se basa en probar que determinado modelo canónico se encuentra en determinada clase de modelos. En nuestro caso veremos que $\mathfrak{M}^c_{LR}$ se encuentra en la clase $\mathcal{M}^{LR}$, con lo cual entonces $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ será completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

La incorporación de las colecciones de axiomas ($\mathbf{D}_*$), ($\mathbf{4}_{Bel}$) y ($\mathbf{5}_{Bel}$) a $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ modificará la estructura del modelo canónico $\mathfrak{M}^c$ tornando las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{G}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}^k_i$ seriales, y además las $\breve{B}_i$ transitivas y euclidianas, así serán las relaciones de $\mathfrak{M}^c_{LR}$.

Veamos que las relaciones $\breve{B}_i$ son transitivas. Tenemos que probar que *si* $\omega\breve{B}_i\upsilon$ *y* $\upsilon\breve{B}_i\rho$ *entonces* $\omega\breve{B}_i\rho$. Supongamos entonces que se da el antecedente y tomemos una fórmula arbitraria φ para probar que *si* $\mathrm{Bel}_i\,\varphi \in \omega$ *entonces* $\varphi \in \rho$[10] . Dado que $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ incluye la colección ($\mathbf{4}_{Bel}$), de la propiedad d) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC sabemos que (cualquiera instancia de los axiomas) ($\mathbf{4}_{Bel}$) pertenece a cualquier estado de $\mathfrak{M}^c_{LR}$, por lo tanto $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \to \mathrm{Bel}_i\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega$. De nuestra suposición y mediante la propiedad c) (de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC) obtenemos $\mathrm{Bel}_i\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega$. Entonces $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \upsilon$, o sea $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \upsilon$. Nuevamente ahora, $\varphi \in \upsilon^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \rho$, es decir, $\varphi \in \rho$. Entonces de $\varphi \in \omega^{-\mathrm{Bel}}$ obtuvimos $\varphi \in \rho$ y de la definición de inclusión de conjuntos sabemos entonces que $\omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \rho$, o sea $\omega\breve{B}_i\rho$, como se quería.

Ahora veamos que las relaciones $\breve{B}_i$ son euclidianas. Para ello supondremos que $\omega\breve{B}_i\upsilon$ y $\omega\breve{B}_i\rho$ y llegaremos a que $\upsilon\breve{B}_i\rho$. Ahora, para probar que $\upsilon\breve{B}_i\rho$, supongamos además que $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \upsilon$ y veamos que $\varphi \in \rho$. Por el absurdo, supongamos entonces que $\varphi \notin \rho$. Dado que $\omega\breve{B}_i\rho$, es decir $\omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \rho$, tenemos que $\varphi \notin \omega^{-\mathrm{Bel}}$, o sea que $\mathrm{Bel}_i\ \varphi \notin \omega$. De la propiedad a) de los de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC, $\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega$. Ahora, como hicimos anteriormente, sabemos que (cualquier instancia de los axiomas) ($\mathbf{5}_{Bel}$) esta en todos los estados del modelo canónico, en particular $\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \to \mathrm{Bel}_i\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega$, entonces mediante la propiedad c) (de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC) se tiene que $\mathrm{Bel}_i\neg\,\mathrm{Bel}_i\ \varphi \in \omega$, y como

[9]Esto se prueba de exactamente la misma manera que para el modelo canónico de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, pues no olvidemos que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm} \subset \mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$, $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ cuenta con el aparato deductivo de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, (sus axiomas, reglas de deducción, etc).

[10]Es decir *si* $\varphi \in \omega^{-\mathrm{Bel}}$ *entonces* $\varphi \in \rho$, o sea $\omega^{-\mathrm{Bel}} \subseteq \rho$, o sea $\omega\breve{B}_i\rho$.

$\omega\breve{B}_i\upsilon$, se tiene que $\neg\,\mathrm{Bel}_i\,\varphi\in\upsilon$. Pero entonces tanto $\neg\,\mathrm{Bel}_i\,\varphi\in\upsilon$ como $\mathrm{Bel}_i\,\varphi\in\upsilon$, lo que contradice la propiedad a) en υ. Por lo tanto $\varphi\in\rho$ y entonces $\upsilon\breve{B}_i\rho$ como se quería.

Finalmente veamos que las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{G}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}_i^k$ son seriales. Realicemos la prueba para alguna de ellas, por ejemplo $\breve{O}$. Por el absurdo supongamos que $\breve{O}$ no es serial, entonces para algún ω no puede suceder que $\omega\breve{O}\upsilon$. Luego para todo υ tenemos que $(\omega,\upsilon)\notin\breve{O}$. Ahora para todo υ *si* $\omega\breve{O}\upsilon$ *entonces* $\perp$, con lo cual *si* $\omega\breve{O}\upsilon$ *entonces* $\mathfrak{M}^c_{LR},\upsilon\vDash\perp$, por consiguiente $\mathfrak{M}^c_{LR},\omega\vDash\mathrm{O}\perp$. Pero sabemos que (de la propiedad d) de los $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$-CMC) $\neg\,\mathrm{O}\perp$ se encuentra en todos los estados de $\mathfrak{M}^c_{LR}$, (por ejemplo ω). Del lema de verdad tenemos que $\mathfrak{M}^c_{LR},\omega\vDash\neg\,\mathrm{O}\perp$ y llegamos a una contradicción, por lo tanto las relaciones $\breve{O}$ son seriales. (De igual manera se puede probar la serialidad del resto de las relaciones $\breve{B}_i$, $\breve{G}_i$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$ y $\breve{I}_i^k$).

Hemos visto entonces que la estructura del modelo $\mathfrak{M}^c_{LR}$ es la estructura que tienen los modelos de la clase $\mathcal{M}^{LR}$, por lo tanto $\mathfrak{M}^c_{LR}$ se encuentra en $\mathcal{M}^{LR}$ y así, como anticipamos al inicio de la sección, $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ es completo con respecto a $\mathcal{M}^{LR}$.

Esta sección también la finalizamos con un comentario, como el de la sección anterior, sobre determinación. *Soundness* en $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ implicaría demostrar que las colecciones de axiomas $(\mathbf{D}_*)$, $(\mathbf{4}_{Bel})$ y $(\mathbf{5}_{Bel})$ son válidas en $\mathcal{M}^{LR}$. Esto ya lo hemos hecho cuando analizamos las características de los modelos para $\mathcal{L}_{norm}$ (p. 11). Con lo cual en este punto se puede observar que $\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}$ se encuentra determinado por $\mathcal{M}^{LR}$.

El modelo canónico para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$

Ahora veamos que sucede con las fórmulas modales en $\mathcal{L}_{non}$ y los modelos canónicos para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$. El modelo canónico tiene la siguiente forma,

$$\mathfrak{M}^c=\left\langle W^c,\breve{N}_i^A,\breve{N}_i^D,\breve{N}_{i,k}^D,V^c\right\rangle$$

donde,

W^c es el conjunto de estados $\{\Gamma:\Gamma$ *es un* $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$-CMC$\}$,

V^c es la valuación canónica que definimos anteriormente.

$\breve{N}_i^A(\omega)=\{|\varphi|:\mathrm{Able}_i\,\varphi\in\omega\}$,

$\breve{N}_i^D(\omega)=\{|\varphi|:\mathrm{Does}_i\,\varphi\in\omega\}$,

$\breve{N}_{i,k}^D(\omega)=\left\{|\varphi|:\mathrm{Does}_i^k\,\varphi\in\omega\right\}$,

siendo $|\varphi|=\{\Gamma\in W^c:\varphi\in\Gamma\}$.

Los componentes distintos a los modelos canónicos para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, los mapeos para interpretar los operadores no-normales, indican que *para cada* ω *en* $\mathfrak{M}^c$, $\mathrm{Able}_i\,\varphi\in\omega$ *sii* $|\varphi|\in N_i^A(\omega)$ (de igual manera se interpretan los mapeos para el resto de los operadores).

Necesitamos ver, como hicimos anteriormente, que el lema de verdad también se satisface cuando trabajamos con modelos canónicos de la clase $\mathscr{M}$, probemos por inducción sobre el número n de conectivas que aparecen en la fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{non}$ que para todo ω, $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \varphi$ *sii* $\varphi \in \omega$. Nuevamente aclaremos que los casos para las fórmulas no-modales (incluyendo el paso base para la inducción) los hemos visto previamente, para las fórmulas modales de $\mathcal{L}_{non}$ nos queda ver que el lema de verdad se cumple cuando φ tiene la forma $\mathrm{Able}_i\,\psi$, $\mathrm{Does}_i\,\psi$ y $\mathrm{Does}_i^k\,\psi$. Para la hipótesis inductiva asumimos que el resultado se cumple para fórmulas con un número de conectivas menos a n. Tenemos los siguientes casos en el paso de inducción:

Caso 1C) φ tiene la forma $\mathrm{Able}_i\,\psi$:

$\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Able}_i\,\psi$	sii (de la definición de satisfacción en p. 9),
$\lVert\psi\rVert^{\mathfrak{M}} \in \breve{N}_i^A(\omega)$	sii (de la definición de $\lVert\psi\rVert^{\mathfrak{M}}$),
$\{\upsilon \in W^c : \mathfrak{M}^c, \upsilon \vDash \psi\} \in \breve{N}_i^A(\omega)$	sii (por la hipótesis inductiva),
$\{\upsilon \in W^c : \psi \in \upsilon\} \in \breve{N}_i^A(\omega)$	sii (por la definición de $\lvert\psi\rvert$),
$\lvert\psi\rvert \in \breve{N}_i^A(\omega)$	sii (por definición de $\breve{N}_i^A(\omega)$)
$\mathrm{Able}_i\,\psi \in \omega$.	

Caso 2C) φ tiene la forma $\mathrm{Does}_i\,\psi$ o la forma $\mathrm{Does}_i^k\,\psi$:

De forma análoga al Caso 1C), partiendo de $\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Does}_i\,\psi$ ($\mathfrak{M}^c, \omega \vDash \mathrm{Does}_i^k\,\psi$), utilizando la definición de satisfacción en modelos mínimos, luego aplicando la definición de $\lVert\psi\rVert^{\mathfrak{M}}$, después la hipótesis inductiva, la definición de $\lvert\psi\rvert$ y finalmente la definición de $\breve{N}_i^D(\omega)$ ($\breve{N}_{i,k}^D(\omega)$), se obtiene $\mathrm{Does}_i\,\psi \in \omega$ ($\mathrm{Does}_i^k\,\psi \in \omega$).

Esto completa la prueba por inducción sobre el lema de verdad.

Notar entonces que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}$ pues el modelo canónico utilizado se encuentra en ésta clase. Además finalicemos haciendo el comentario sobre determinación. *Soundness* se puede probar como comentamos en la nota al pie en página 21, con el resultado obtenido en esta sección se puede observar que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ se encuentra determinado por la clase $\mathscr{M}$.

$\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$

Mediante una argumentación análoga a la que motivó la prueba de completitud en el caso del sistema $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$, alcanza para encarar la prueba de que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$, demostrar que el modelo canónico para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ se encuentra en la clase $\mathscr{M}^{LR}$.

Comencemos viendo que dado el modelo canónico $\mathfrak{M}^c$ en la clase $\mathscr{M}$, si incorporamos la colección de axiomas ($\mathbf{C}_{Does}$) a $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ (obteniendo el sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^1$), en $\mathfrak{M}^c$[11] tenemos que, *para todo* ω, X *e* Y *en* $\mathfrak{M}^c$, *si* $X \in \breve{N}_i^D(\omega)$ *e* $Y \in \breve{N}_i^D(\omega)$, *entonces* $X \cap Y \in \breve{N}_i^D(\omega)$. Suponiendo que $X, Y \in \breve{N}_i^D(\omega)$, tenemos que $X = \lvert\varphi\rvert$ e $Y = \lvert\psi\rvert$ para las fórmulas $\mathrm{Does}_i\,\varphi, \mathrm{Does}_i\,\psi \in \omega$. Ahora, dado que $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^1 \vdash (\mathrm{Does}_i\,\varphi \wedge \mathrm{Does}_i\,\psi) \rightarrow$

[11]Notar que el dominio de este modelo es ahora el conjunto de conjuntos maximales $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^1$-consistentes.

$\text{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$, tenemos que $\mathbf{C}\mathcal{L}^1_{non} \vdash \text{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi)$[12] y luego que $\text{Does}_i\,(\varphi \wedge \psi) \in \omega$[13]. De la definición de $\breve{N}^D_i(\omega)$ se tiene que $|\varphi \wedge \psi| \in \breve{N}^D_i(\omega)$. Seguido tenemos que $X \cap Y \in \breve{N}^D_i(\omega)$[14]. Por lo tanto en $\mathfrak{M}^c$ los mapeos $\breve{N}^D_i$ se encuentran cerrados bajo intersecciones como se esperaba.

Veamos ahora que al incorporar la colección $(\mathbf{T}_{Does})$ a $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ (obteniendo el sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non}$), provocamos en $\mathfrak{M}^c$[15] que *si* $X \in \breve{N}^D_i(\omega)$, *entonces* $\omega \in \breve{N}^D_i(\omega)$ (*cualquiera sean* ω *e* i). Supongamos entonces el antecedente, tenemos que $X = |\varphi|$ para alguna fórmula $\text{Does}_i\,\varphi \in \omega$. $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non}$ cuenta con la colección $(\mathbf{T}_{Does})$, por lo tanto $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non} \vdash \text{Does}_i\,\varphi \to \varphi$. Luego tenemos que $\text{Does}_i\,\varphi \to \varphi \in \omega$[16] y luego que $\varphi \in \omega$[17], o sea que $\omega \in |\varphi| = X$ y como queríamos $\omega \in \breve{N}^D_i(\omega)$[18]. Por lo tanto en $\mathfrak{M}^c$ se cumple que *si* $X \in \breve{N}^D_i(\omega)$, *entonces* $\omega \in \breve{N}^D_i(\omega)$ (*cualquiera sean* ω *e* i).

Ahora veamos que incorporando la colección $(\mathbf{BR})$ a $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ (obteniendo el sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non}$), se ratificará que en $\mathfrak{M}^c$[19], *para todo* ω, $\breve{N}^D_i(\omega) \subseteq \breve{N}^A_i(\omega)$. Supongamos entonces $X \in \breve{N}^D_i(\omega)$, con lo cual para alguna fórmula $\text{Does}_i\,\varphi \in \omega$ tenemos $X = |\varphi|$. Dado que $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non}$ posee la colección $(\mathbf{BR})$, se tiene $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non} \vdash \mathbf{BR}$ con lo cual $(\mathbf{BR}) \in \omega$[20]. Luego $\text{Able}_i\,\varphi \in \omega$[21], o sea que $|\varphi| = X \in \breve{N}^A_i(\omega)$[22]. Con lo cual hemos visto que *si* $X \in \breve{N}^D_i(\omega)$ *entonces* $X \in \breve{N}^A_i(\omega)$ *(para cualquier* ω*)*, como se quería entonces, en $\mathfrak{M}^c$ se cumple que *para todo* ω, $\breve{N}^D_i(\omega) \subseteq \breve{N}^A_i(\omega)$.

Finalmente demostremos que la incorporación de la colección $(\mathbf{NN}_{Does})$ a $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ (obteniendo el sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}^4_{non}$), implicará la obtención de un modelo canónico $\mathfrak{M}^c$[23] donde se tiene que, *cualquiera sea* ω, $W^c \notin \breve{N}^D_i(\omega)$. Dado que $\mathbf{C}\mathcal{L}^4_{non} \vdash \neg\,\text{Does}_i\,\top$, sabemos que para algún ω, $\neg\,\text{Does}_i\,\top \in \omega$[24]. Luego entonces, $\text{Does}_i\,\top \notin \omega$[25], por consiguiente se tiene que $|\top| \notin \breve{N}^D_i(\omega)$[26], o sea que $W^c \notin \breve{N}^D_i(\omega)$[27] como se esperaba. Por lo tanto en $\mathfrak{M}^c$ se cumple que, *cualquiera sea* ω, $W^c \notin \breve{N}^D_i(\omega)$.

[12] Aplicando la propiedad b) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^1_{non}$-CMCs y luego $(\mathbf{MP})$.

[13] Por la propiedad d) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^1_{non}$-CMCs.

[14] De la propiedad $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi|$. Esta y otras propiedades sobre estos conjuntos se pueden observar en [17, Theorem 2.22].

[15] Nuevamente notar que el dominio de este modelo es ahora el conjunto de conjuntos maximales $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non}$-consistentes.

[16] De la propiedad d) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non}$-CMCs.

[17] Por la propiedad c) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^2_{non}$-CMCs.

[18] De la definición de $\breve{N}^D_i(\omega)$

[19] Nuevamente aclaremos que el dominio de este modelo es ahora el conjunto de conjuntos maximales $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non}$-consistentes.

[20] De la propiedad d) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non}$-CMCs.

[21] Mediante la propiedad c) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^3_{non}$-CMCs.

[22] Por la definición de $\breve{N}^A_i(\omega)$.

[23] Nuevamente considerar el dominio de este modelo modificado como en los casos anteriores.

[24] De la propiedad d) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^4_{non}$-CMCs.

[25] De la propiedad a) de los $\mathbf{C}\mathcal{L}^4_{non}$-CMCs.

[26] Por la definición de $|\top|$.

[27] Pues $|\top| = \{\Gamma : \Gamma \text{ } \mathit{es\ un}\ \Sigma\text{-CMC}\}$. Otra de las propiedades que se pueden observar en [17, Theorem 2.22].

De los párrafos precedentes observamos que la incorporación de las colecciones de axiomas ($\mathbf{C}_{Does}$), ($\mathbf{C}_{Does'}$)[28], ($\mathbf{T}_{Does}$), ($\mathbf{T}_{Does'}$), ($\mathbf{NN}_{Does}$), ($\mathbf{NN}_{Does'}$) y ($\mathbf{BR}$) a $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ (obteniendo el sistema que dimos en llamar $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$) produjo que el modelo canónico obtenido cumpla con, (para cualquier ω, i, k):

- Los mapeos $\breve{N}^D_i$ se encuentran cerrados bajo intersecciones,
- Los mapeos $\breve{N}^D_{i,k}$ se encuentran cerrados bajo intersecciones,
- *si* $X \in \breve{N}^D_i(\omega)$, *entonces* $\omega \in \breve{N}^D_i(\omega)$,
- si $X \in \breve{N}^D_{i,k}(\omega)$, entonces $\omega \in \breve{N}^D_{i,k}(\omega)$,
- $W^c \notin \breve{N}^D_i(\omega)$,
- $W^c \notin \breve{N}^D_{i,k}(\omega)$,
- $\breve{N}^D_i(\omega) \subseteq \breve{N}^A_i(\omega)$.

Es decir, se obtuvo un modelo canónico en la clase $\mathscr{M}^{LR}$, con lo cual queda demostrado que $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ es completo con respecto a $\mathscr{M}^{LR}$.

Hemos visto entonces que la incorporación de las colecciones de axiomas de interés permitiendo obtener el sistema $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$, a provocado que el modelo canónico obtenido se encuentre en la clase $\mathscr{M}^{LR}$. Para completar un resultado sobre determinación falta aclarar que *Soundness* para $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ implicaría demostrar que las colecciones ($\mathbf{C}_{Does}$), ($\mathbf{C}_{Does'}$), ($\mathbf{T}_{Does}$), ($\mathbf{T}_{Does'}$), ($\mathbf{NN}_{Does}$), ($\mathbf{NN}_{Does'}$) y ($\mathbf{BR}$) son válidas en $\mathscr{M}^{LR}$. Esto ya lo hemos hecho cuando estudiamos las características de los modelos para $\mathcal{L}_{norn}$ (p. 14), por consiguiente en este punto podemos observar que $\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}$ se encuentra determinado por $\mathscr{M}^{LR}$.

[28] Las pruebas que se han hecho sobre la incorporación de las colecciones de axiomas ($\mathbf{C}_{Does}$), ($\mathbf{T}_{Does}$) y ($\mathbf{NN}_{Does}$), pueden utilizarse prácticamente sin modificaciones para incorporar las colecciones ($\mathbf{C}_{Does'}$), ($\mathbf{T}_{Does'}$), ($\mathbf{NN}_{Does'}$) (respectivamente) y obtener resultados análogos para estas últimas.

Extractos sobre decibilidad

En este capítulo esquematizaremos de forma relativamente abstracta como puede demostrarse la *decibilidad* de algunos problemas clásicos para los sistemas que hemos ido analizando en el transcurso del trabajo. No nos atendremos a ningún modelo computacional en particular porque resulta innecesario para el nivel de detalle con el cual abordaremos la exposición además de que solo hablaremos de resultados positivos (para los cuales es mas sencillo convencernos de la existencia de métodos efectivos que los capturen), entonces hablaremos simplemente de *método efectivo* (mecánico) o lo que se puede entender informalmente como *algoritmo*.

Comenzaremos introduciendo los problemas de satisfactibilidad y validez en los sistemas que hemos visto. Sea $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ y M una clase de modelos para $\mathcal{L}_{norm}$ (ya sea $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M}^{LR}$), el problema de M-satisfactibilidad es determinar si la fórmula φ es satisfactible o no en algún modelo de la clase M. Y el problema de M-validez es determinar si la fórmula φ es satisfactible en todos los modelos de la clase M [6, Def. 6.1][1]. Notemos además que si existe un método efectivo (m.e.) para resolver el problema de M-satisfactibilidad entonces existe uno para resolver el problema de M-validez (y vice versa) pues, dado que $\neg\varphi$ no es satisfactible en M si y solo si $\mathsf{M} \vDash \varphi$, dado un m.e. para resolver M-satisfactibilidad, podemos utilizarlo para testear la validez de φ usando $\neg\varphi$ como input. De forma similar podemos utilizar un m.e. para resolver M-validez, si quisiésemos testear M-satisfactibilidad.

Si pensamos en el aspecto sintáctico de los formalismos que hemos analizado, hablaremos de otros problemas que inicialmente parecerán distanciados de los anteriores, pero esto no es así debido a la relación que se ha establecido entre la perspectiva semántica y la sintáctica. Si Σ es una lógica modal y φ una fórmula en su lenguaje, el *problema de Σ-consistencia* es determinar si φ es o no Σ-consistente y el problema de determinar si φ es deducible en Σ se denomina el *problema de Σ-derivabilidad* [6, Def. 6.3]. Ahora notemos que si Σ es una lógica modal y M es una clase de modelos que la determina (en el sentido dado en página 21, es decir cuando Σ es *sound* y completo con respecto a M), entonces el problema de Σ-consistencia es equivalente al problema de M-satisfactibilidad, y el problema de Σ-derivabilidad es equivalente al problema de M-validez.

[1] De igual manera podemos definir estos problemas para las fórmulas de $\mathcal{L}_{non}$ y las clases de modelos correspondientes.

Decibilidad para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$

Nos ocupamos ahora con la porción normal de la lógica en estudio. $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ ($\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$) será decidible, si los problemas de $\mathcal{M}$-satisfactibilidad ($\mathcal{M}^{LR}$-satisfactibilidad) y $\mathcal{M}$-validez ($\mathcal{M}^{LR}$-validez) son decidibles[2]. Un primer paso que puede ayudar a probar la decibilidad en estos sistemas es determinar si poseen la *propiedad de modelo finito* (f.m.p.[3]), dado que esta propiedad habilita una aceptable estrategia de prueba. La propiedad la poseen aquellos sistemas de lógica modal que pueden estar determinados por una clase de modelos en la cual todos ellos sean finitos[4] [6, Def. 6.4], [22, Cap. 8]. Entonces si se puede probar *soundness*[5] y *completeness* con respecto a una clase de estas características aseguramos que el sistema posea la f.m.p. Recuérdese que para la prueba de *completeness*, alcanza con demostrar que todo no teorema del sistema es falso en algún modelo (finito en este caso) para el sistema. También vimos que esto es equivalente a demostrar que cualquier fórmula consistente del lenguaje del sistema es satisfactible en algún modelo (finito en este caso) para el sistema.

En la literatura consultada existen varias formas de prueba para determinar si un sistema de lógica modal cuenta con la f.m.p., entre las mas utilizadas se encuentran los métodos de *filtrados*[6]. Aquí, aprovechando el trabajo ya realizado, utilizaremos un método que presenta similitudes con el mencionado y es el método utilizado en [11, Teor. 3.2.2, 3.2.4], [22, Cap. 8] y en [12, Sec. 5] como parte de la prueba de decibilidad de algunos sistemas allí tratados. Este método se vale de la intrínseca noción de localidad en la interpretación (o evaluación) de las fórmulas modales mediante la definición de satisfacción en los lenguajes que hemos expuesto. Y en relación con esto, dado que la satisfacción de una fórmula depende únicamente de la satisfacción de sus subfórmulas en los estados correspondientes del modelo, explota la posibilidad de construir una especie de modelo canónico pequeño no constituido por subconjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistentes de un lenguaje infinito (por ejemplo $\mathcal{L}_{norm}$) sino construidos en base a las subfómulas de la fórmula que pretendamos que éste satisfaga.

Una subfórmula de una fórmula φ es cualquier fórmula que sea una parte de φ, incluyendo a la misma φ. La idea se captura mediante la siguiente definición recursiva del conjunto de subfórmulas $Sub(\varphi)$ de φ:[7]

[2]Algunos autores, por ejemplo [17, Sec. 2.8] [22, Cap. 8] [18, Prop. 2.24], capturan el concepto de decibilidad considerando al sistema Σ decidible si y solo si el conjunto de teoremas de éste es decidible, es decir, si y solo si el problema de Σ-derivabilidad es decidible.

[3]Del inglés *finite model property.*

[4]Es decir modelos con un número finito de estados y relaciones.

[5]Nuevamente dejaremos esta metapropiedad sin demostración como lo hicimos anteriormente. Pero cabe aclarar sin embargo que si hubiésemos demostrado que *si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{C} \vDash \varphi$ para los sistemas Σ y clases $\mathcal{C}$ que hemos expuesto, esas demostraciones alcanzarían para el caso actual dado que, como veremos, la clase de modelos finitos $\mathcal{C}_{fin} \subseteq \mathcal{C}$. Nuevamente esta es la dirección *más simple* de la prueba de determinación ($\Sigma \vdash \varphi$ *sii* $\mathcal{C}_{fin} \vDash \varphi$).

[6]Del inglés *filtrations*.

[7]Mediante $\bigcirc$ simbolizamos cualquier operador modal del lenguaje.

$Sub\,(p_n) = \{p_n\}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
$Sub\,(\top) = \{\top\}$,
$Sub\,(\bot) = \{\bot\}$,
$Sub\,(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup Sub\,(\varphi)$,
$Sub\,(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\} \cup Sub\,(\varphi) \cup Sub\,(\psi)$,
$Sub\,(\bigcirc\varphi) = \{\bigcirc\varphi\} \cup Sub\,(\varphi)$.

Decibilidad para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$

Adaptando el mecanismo de prueba para completitud que vimos en el capítulo anterior, se utiliza una construcción similar a la de los modelos canónicos que hemos visto, pero esta vez el objetivo será obtener además de un modelo en $\mathcal{M}$, uno que sea finito y que permita satisfacer la fórmula consistente y arbitraria φ. De esta manera se podrá nuevamente demostrar que:

Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ *es* $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$*-consistente, entonces* φ *es satisfactible en un modelo finito de la clase* $\mathcal{M}$ *con a lo sumo* $2^{|\varphi|}$ *estados.*(†)

Se necesita entonces del conjunto $Sub^{+}(\varphi) = Sub\,(\varphi) \cup \{\neg\psi : \psi \in Sub\,(\varphi)\}$, es decir, el conjunto con todas las subfórmulas de φ y sus negaciones. Y sea también $Con\,(\varphi)$ el conjunto de subconjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistentes de $Sub^{+}(\varphi)$. Los elementos de $Con\,(\varphi)$ se pueden obtener mediante el mismo mecanismo que utilizamos para extender conjuntos consistentes y obtener un CMC (en página 23) pero restringiéndonos esta vez solo a las fórmulas en $Sub^{+}(\varphi)$. Nótese que siendo los elementos de $Con\,(\varphi)$ consistentes, cualquiera de ellos podría contener a ψ o a $\neg\psi$ para cualquier fórmula $\psi \in Sub\,(\varphi)$, pero no podría contener a ambas por ser consistente[8]. De esta manera la cardinalidad de $Con\,(\varphi)$ es a lo sumo $2^{|Sub(\varphi)|}$, que a su vez se encuentra acotada por $2^{|\varphi|}$ dado que $|Sub\,(\varphi)| \leq |\varphi|$[9].

Se arma el modelo $\mathfrak{M}_\varphi$ con la siguiente forma:

$$\mathfrak{M}_\varphi = \left\langle W_\varphi, \breve{G}_i, \breve{B}_i, \breve{O}, \breve{O}^i, \breve{Id}^i, \breve{I}_i, \breve{I}_i^k, V^c \right\rangle,$$

idéntico al modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ (en página 26) con la salvedad de que el conjunto de estados $W_\varphi = \{\Gamma : \Gamma \in Con\,(\varphi)\}$ y el resto de los componentes se adaptan a este nuevo dominio. Incluyendo estos cambios este modelo se comporta de igual manera que el modelo canónico para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ y, se puede demostrar de forma análoga a la prueba de completitud para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ (en página 27), mediante inducción en la estructura de la fórmula φ, que:

si $\omega \in W_\varphi$*, entonces para toda* $\psi \in Sub^{+}(\varphi)$ *se tiene* $\mathfrak{M}_\varphi, \omega \vDash \psi$ *sii* $\psi \in \omega$.

Así se demuestra entonces que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ se encuentra determinado[10] por una clase $\mathcal{M}_{fin}$ con estructuras (modelos en la clase $\mathcal{M}$) finitas . Esto implica que no es posible

[8] Pruebas análogas a las desarrolladas para los CMC en página 22 pueden demostrarse también para los elementos de $Con\,(\varphi)$. Véase por ejemplo [22, Lemma 8.1, Lemma 8.2] y [12, Lemma 5.2].

[9] No confundir la notación de barras en este capítulo, con $|Sub\,(\varphi)|$ nos referimos a la *cardinalidad* de $Sub\,(\varphi)$, es decir la cantidad de elementos que contiene. Con $|\varphi|$ nos referimos a la *longitud* de la fórmula φ, es decir, la cantidad de símbolos que ocurren en ella.

[10] Recuérdese que suponemos por dado que *si* $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm} \vdash \varphi$ *entonces* $\mathcal{M}_{fin} \vDash \varphi$.

en este sistema expresar una fórmula que necesite una estructura infinita para su satisfacción. Es mas, no es posible expresar una φ que necesita para su satisfacción un modelo con un número de estados mayor a $2^{|\varphi|}$, a esta característica se la conoce como *propiedad de modelo finito fuerte* [6, Def. 6.6]. En algún sentido esto que ha sucedido con $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$ podría interpretarse como una debilidad del sistema, pero es justamente lo interesante computacionalmente, es lo que nos permite utilizar la siguiente estrategia para probar que el problema de $\mathcal{M}$-satisfactibilidad es decidible.

Un m.e. para chequear si una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ es $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistente (o equivalentemente $\mathcal{M}$-satisfactible) puede constar de los siguientes pasos:
Generamos cada uno de los modelos en $\mathcal{M}$ con a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados, (una tarea computable dado que existe un número finito de modelos (finitos) con esta característica).[11] Luego testeamos si φ es satisfactible en algún estado de alguno de estos modelos (nuevamente una tarea computable dado que cada uno de estos modelos es finito).[12] Si así lo fuera entonces φ es $\mathcal{M}$-satisfactible, pues cualquiera de estos modelos finitos se encuentra en $\mathcal{M}$. Recíprocamente, si φ es $\mathcal{M}$-satisfactible, es decir $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistente, sabemos de (†) que φ debe ser satisfactible en algún modelo finito con a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados, o sea, uno de los modelos que generamos. Con lo cual entonces, este m.e. podrá convencernos de que el problema de $\mathcal{M}$-satisfactibilidad ($\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistencia) es decidible.

Finalizando la exposición sobre decibilidad para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, recordemos también lo que dijimos al inicio de éste capítulo: si utilizáramos el mecanismo que acabamos de exponer preguntándonos por la $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-consistencia de la fómula $\neg\varphi$ podremos responder a la pregunta de si φ es $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-derivable, es decir que el problema de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$-derivabilidad (y el de $\mathcal{M}$-validez) también es decidible, y no ha sido necesario utilizar el sistema de inferencia en la resolución del problema.

Decibilidad para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$

Como es de esperarse para el caso de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$, la prueba de que éste sistema cuenta con la f.m.p. se basa nuevamente en construir un modelo $\mathfrak{M}_{\varphi}^{LR}$ finito análogo al utilizado recién para $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$. Sin embargo, será necesario equipar el dominio de este modelo con subconjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistentes, además de redefinir algunas de las relaciones. El dominio W_{φ}^{LR} será entonces el conjunto $\{\Gamma : \Gamma \in Con_{LR}(\varphi)\}$, donde $Con_{LR}(\varphi)$ contiene los subconjuntos maximales $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistentes de $Sub^{+}(\varphi)$. Dado que el dominio ahora es finito, algunas propiedades de las relaciones que lo componen se pierden. Para recuperarlas, las relaciones $\breve{B}_i$ pueden redefinirse de la siguiente

[11] Desde una perspectiva computacional, si nos posicionamos en el modelo de las máquinas de Turing, entendamos por "generar modelos" la posibilidad de tener una máquina (de Turing) que produce como output todas y cada una de las representaciones adecuadas para los modelos en $\mathcal{M}$ con $2^{|\varphi|}$ estados. En este paradigma, representar modelos de Kripke mediante cadenas de símbolos puede realizarse de variadas maneras, los modelos al fin y al cabo se encuentran compuestos por objetos matemáticos básicos como *conjuntos* de elementos y *relaciones* (conjuntos de tuplas) entre estos elementos.

[12] El problema de decidir, dado un determinado modelo y un estado de éste, si φ es satisfactible, es una instancia de los problemas denominados *model-checking*. Un m.e. que requiere mínimas modificaciones para resolver este problema en la instancia que nos ocupa se puede observar en [11, Prop. 3.2.1].

manera[13]:

$$\breve{B}_i^* = \left\{(\omega, \upsilon) : \omega^{-\,\mathrm{Bel}} = \upsilon^{-\,\mathrm{Bel}},\, \omega^{-\,\mathrm{Bel}} \subseteq \upsilon\right\} \text{ donde } x^{-\,\mathrm{Bel}} = \{\varphi : \mathrm{Bel}_i\, \varphi \in x\}.$$

Ahora el modelo tiene una forma similar a $\mathfrak{M}_\varphi$,

$$\mathfrak{M}_\varphi^{LR} = \left\langle W_\varphi^{LR}, \breve{G}_i, \breve{B}_i^*, \breve{O}, \breve{O}^i, \breve{Id}^i, \breve{I}_i, \breve{I}_i^k, V^c \right\rangle,$$

donde las relaciones $\breve{G}_i$, $\breve{O}$, $\breve{O}^i$, $\breve{Id}^i$, $\breve{I}_i$, $\breve{I}_i^k$, V^c son como las hemos venido definiendo (la propiedad de serialidad no se ve afectada por la finitud del dominio).

Habiendo hecho estas modificaciones sobre el modelo, se puede demostrar mediante inducción en la estructura de la fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ (de forma similar a como lo hemos hecho en el capítulo anterior) que:

Si $\omega \in W_\varphi^{LR}$, entonces para toda $\psi \in Sub^+(\varphi)$ se tiene $\mathfrak{M}_\varphi^{LR}, \omega \vDash \psi$ sii $\psi \in \omega$.

Lo que finalmente permitirá probar que,

Si $\varphi \in \mathcal{L}_{norm}$ es $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistente, entonces φ es satisfactible en un modelo finito de la clase $\mathcal{M}^{LR}$ con a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados.

Nuevamente se demuestra así que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ también se encuentra determinado por una clase de modelos finitos, en este caso contenida en $\mathcal{M}^{LR}$. Poseyendo $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ la f.m.p. fuerte, los ingredientes necesarios para un m.e. que resuelva el problema de $\mathcal{M}^{LR}$-satisfactibilidad ya están disponibles y es prácticamente el mismo método utilizado en el caso de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}$, con la salvedad que al momento de generar los modelos con a lo sumo $2^{|\varphi|}$ estados será necesario chequear que estos modelos realmente se encuentren en la clase $\mathcal{M}^{LR}$. Esto implicará básicamente chequear que las propiedades de las relaciones del modelo se cumplan, es decir, para las relaciones B_i, O, O^i, Id^i, I_i, I_i^k, chequear su serialidad, y además las relaciones B_i deben respetar transitividad y el ser euclidianas, estas tareas por supuesto también son computables. Dado este método para resolver el problema de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-consistencia, sabemos que podemos utilizarlo para obtener respuestas a los problemas de $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$-derivabilidad y $\mathcal{M}^{LR}$-validez y finalmente convencernos también de que $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$ es decidible.

Decibilidad para $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$

La decibilidad en estos sistemas se puede demostrar siguiendo el mismo enfoque que en el caso de los sistemas $\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}/\mathbf{K}\mathcal{L}_{norm}^{LR}$, es decir, probar que poseen la f.m.p. y luego describir un m.e. análogo al desarrollado para decidir los problemas de $\mathcal{M}$-satisfactibilidad/$\mathcal{M}^{LR}$-satisfactibilidad. Para la propiedad de modelo finito sobre $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ se puede generalizar, para el caso multimodal, los resultados sobre filtraciones de modelos mínimos expuestos en [17, Sec. 9.5]. Luego extender el sistema con cada colección de axiomas (hasta obtener $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$) analizando la influencia de estas colecciones en la posibilidad de construir filtraciones que permitan probar la existencia de

[13]Véase [11, Theorem 3.2.4] donde se da una ejemplificación del problema y la solución que adoptamos aquí. También véase [17, Theorem 3.20(4)(a)], en el contexto de filtraciones, la solución adoptada aquí.

la f.m.p.[14]. Otra alternativa de prueba para la f.m.p. se puede observar en [5, p. 24], donde se rescatan resultados sobre esta propiedad para un sistema muy similar a los que nos competen, basados en resultados sobre la f.m.p. para sistemas de lógica modal clásica no iterativas[15] de las cuales $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}$ y $\mathbf{C}\mathcal{L}_{non}^{LR}$ son instancias.

[14]Para las colecciones $\mathbf{C}_{Does}$ y $\mathbf{C}_{Does'}$ véase [17, Exercise 9.45]. Para las colecciones $\mathbf{T}_{Does}$ y $\mathbf{T}_{Does'}$ véase [17, Exercise 9.46].

[15]Aquellos sistemas de lógica modal que se pueden axiomatizar utilizando únicamente axiomas no-iterativos. Una (fórmula) axioma es no-iterativo sii para toda subfórmula que ocurra en el axioma y se encuentre precedida por un operador modal, en dicha subfórmula no ocurre un operador modal.

Conclusiones y algo mas...

Dado que cualquier sistema (real) complejo, es una entidad compuesta, descomponer sus requisitos descriptivos (tanto para su diseño, verificación, como mantenimiento) en tareas más simples y restringidas para su razonamiento, es muchas veces, la única forma de avanzar. Así fue como adoptamos la estrategia de descomponer el formalismo en estudio comenzando por su lenguaje para obtener dos (sub)sistemas formales ambos compuestos por un mecanismo semántico que dé significado a las fórmulas de su lenguaje interpretándolas mediante estructuras matemáticas particulares pero difundidas, con clases de modelos asociadas. Como así también compuestos por una maquinaria sintáctica que se demostró estar relacionada con su contraparte semántica mediante pruebas de completitud. Esto luego derivó en la esquematización de pruebas de decibilidad para ambos (sub)sistemas.

Estructuremos a uno de los (sub)sistemas así, $\mathscr{S}_{non} = \left(\mathcal{L}_{non}, \vdash_{\mathbf{C}\mathcal{L}^{LR}_{non}}, \mathscr{M}^{LR}, \vDash_{non}\right)$[1], y al otro $\mathscr{S}_{norm} = \left(\mathcal{L}_{norm}, \vdash_{\mathbf{K}\mathcal{L}^{LR}_{norm}}, \mathcal{M}^{LR}, \vDash_{norm}\right)$, la posibilidad de recomponer el sistema original, componiendo a $\mathscr{S}_{norm}$ con $\mathscr{S}_{non}$, presenta una complejidad que no se puede sortear en su totalidad bajo las restricciones de tiempo de este trabajo, pero mencionaremos posibilidades para su realización. Una de ellas es la utilización de algún método de *combinación de lógicas* [23], [24].

Entre sus diferentes facetas, el tema de combinación de lógicas es interesante por sus inquietudes sobre modularidad y el deseo de unificar distintos tipos de información (en el sentido amplio de la palabra). Entre los principales problemas que encara se encuentra el *problema de transferencia*. De forma general podemos plantearlo como: Sea $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos (sistemas de) lógica y sea $\mathbb{P}$ una propiedad que estas lógicas poseen, por ejemplo completitud axiomática y decibilidad. El problema de transferencia es: si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ gozan de la propiedad $\mathbb{P}$, su combinación $\mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$ ¿también posee $\mathbb{P}$?

Es decir, si tuviéramos un método de combinación que dado $\mathscr{S}_{norm} \oplus \mathscr{S}_{non} = \mathscr{S}$, transfiriera sobre $\mathscr{S}$ la completitud y decibilidad que hemos demostrado poseen $\mathscr{S}_{norm}$ y $\mathscr{S}_{non}$, tendríamos resuelto el problema de abarcar con resultados de completitud (y decibilidad) a todo el formalismo que es objetivo de este trabajo.

Existen en la literatura algunos métodos que se aproximan a esta posibilidad, y los discriminamos por el tipo de lenguaje que resulta luego de la combinación, el cual es directamente compatible con el lenguaje original $\mathcal{L}$ (p. 4) del formalismo estudiado.

[1]La simbología es autoexplicativa. En los subsistemas tenemos: El lenguaje. La maquinaria sintáctica, la teoría de pruebas. El tipo de modelos, clase de modelos y relación de satisfactibilidad.

Por un lado existe el método de *Temporalización* [25] y una generalización que también se conoce como *Temporalización irrestricta* o *Modalización* [26]. El principal problema para aplicar estos métodos es que la semántica de la lógica externa[2] debe respetar determinadas restricciones estructurales, las cuales $\mathscr{S}_{norm}$ (específicamente $\mathcal{M}^{LR}$) no respeta, esto impide aplicar la argumentación para justificar la transferencia de completitud, aunque los autores comentan que otro tipo de argumentación (demostración) que permita justificar la transferencia podría aparecer (aunque nosotros no la hemos encontrado). A pesar de esta limitación, el método provee un mecanismo de combinación para un chequeador de modelos, es decir, si tenemos un chequeador de modelos para $\mathscr{S}_{norm}$ y otro para $\mathscr{S}_{non}$, tendremos también uno para $\mathscr{S}_{norm} \oplus \mathscr{S}_{non} = \mathscr{S}$ [3].

Las restricciones que nuestra lógica externa $\mathscr{S}_{norm}$ no respeta, parecen no ser necesarias en el método de combinación *Parametrización* [27][4]. Este es otro método que produce como resultado de la combinación un lenguaje como el que buscamos. Además sus autores declaran que Temporalización es un caso particular de Parametrización, con lo cual lo tornaría un método más general. Su aplicación directa escapa al alcance de este trabajo por tratarse de un método expuesto mediante semánticas algebraicas y teoría de categorías, requiere mayor tiempo y esfuerzo su estudio y aplicación.

Otro método que por similares motivos ha escapado el alcance de este trabajo es el de *Importing* [28], que como trabajo a futuro podría ser interesante estudiar la posibilidad de aplicación para obtener una combinación con transferencia de Completitud y Decibilidad.

Recapitulando entonces, durante el trabajo hemos demostrado que porciones del formalismo en estudio son completas con respecto a las semánticas pretendidas (las clases de modelos que estudiamos). Esto condujo a que podamos esquematizar pruebas de decibilidad para estas mismas porciones del formalismo. Sin embargo la recombinación de estas porciones para obtener el formalismo original en su totalidad ha quedado como un trabajo a futuro que podría resolverse mediante la aplicación de algún método de combinación como los expuestos aquí o algún otro que aparezca en el futuro.

[2] Una forma intuitiva de entender la dinámica de estos métodos es la de una aplicación de un formalismo externo, por ejemplo $\mathscr{S}_{norm}$ a otro, por ejemplo $\mathscr{S}_{non}$, obteniendo $\mathscr{S}_{norm}(\mathscr{S}_{non})$.

[3] Si $\oplus$ es la operación de combinación mediante Modalización.

[4] Lo que podría motivar un trabajo futuro para estudiar como se ha conseguido los resultados de transferencia de propiedades suavizando las restricciones que exige el mecanismo de Temporalización.

Bibliografía

[1] C. Smith, E. Calardo, A. Rotolo, and G. Sartor, "Legal responsibility for the acts of others: A logical analysis," in *Rules on the Web. From Theory to Applications* (A. Bikakis, P. Fodor, and D. Roman, eds.), vol. 8620 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 329–338, Springer International Publishing, 2014.

[2] M. Woolridge and M. J. Wooldridge, *Introduction to Multiagent Systems.* New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[3] R. Goldblatt, "Mathematical modal logic: A view of its evolution," *Journal of Applied Logic*, vol. 1, no. 5-6, pp. 309 – 392, 2003.

[4] C. Smith and A. Rotolo, "Collective trust and normative agents," *Logic Journal of IGPL*, vol. 18, no. 1, pp. 195–213, 2010.

[5] G. Governatori and A. Rotolo, "On the axiomatisation of elgesem's logic of agency and ability," *Journal of Philosophical Logic*, vol. 34, no. 4, pp. 403–431, 2005.

[6] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema, *Modal Logic.* Cambridge Tracks in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2001.

[7] M. Franceschet, A. Montanari, and M. de Rijke, "Model checking for combined logics with an application to mobile systems," *Automated Software Engineering*, vol. 11, no. 3, pp. 289–321, 2004.

[8] Z. Manna and A. Pnueli, *The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems.* New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1992.

[9] A. S. Rao and M. P. Georgeff, "Bdi agents: From theory to practice," in *Proceedings of the First International Conference on Multiagent Systems (ICMAS-95)*, pp. 312–319, 1995.

[10] A. S. Rao and M. P. Georgeff, "Formal models and decision procedures for multi-agent systems," 1995.

[11] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi, *Reasoning about Knowledge.* The MIT Press, 2003.

[12] B. Dunin-Keplicz and R. Verbrugge, "Collective intentions," *Fundam. Inf.*, vol. 51, no. 3, pp. 271–295, 2002.

[13] C. Areces and M. de Rijke, “From description to hybrid logics, and back,” in *Advances in Modal Logic 3, papers from the third conference on .Advances in Modal logic,"held in Leipzig (Germany) in October 2000* (F. Wolter, H. Wansing, M. de Rijke, and M. Zakharyaschev, eds.), pp. 17–36, World Scientific, 2000.

[14] F. Bacchus and F. Kabanza, “Using temporal logics to express search control knowledge for planning,” *Artificial Intelligence*, vol. 116, no. 1-2, pp. 123 – 191, 2000.

[15] C. Areces, *Azafea. Revista de Filosofía*, ch. Elija su Propia Lógica. Ediciones Universidad de Salamanca, 2006.

[16] “Chapter 1 modal logic basic,” in *Many-Dimensional Modal LogicsTheory and Applications* (F. W. D.M. Gabbay, A. Kurucz and M. Zakharyaschev, eds.), vol. 148 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pp. 3 – 40, Elsevier, 2003.

[17] B. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, 1980.

[18] A. Hamilton, *Lógica para Matemáticos*. Paraninfo, 1981.

[19] M. Fitting, *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*, ch. Model Proof Theory, pp. 85–138. Elsevier, 2006.

[20] W. Carnielli, C. Pizzi, and J. Bueno-Soler, *Modalities and Multimodalities*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science, Springer, 2008.

[21] R. Fajardo and M. Finger, “How not to combine modal logics,” in *Proceedings of the 2nd Indian International Conference on Artificial Intelligence, Pune, India, December 20-22, 2005* (B. Prasad, ed.), pp. 1629–1647, IICAI, 2005.

[22] G. Hughes and M. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

[23] B. Bennett, C. Dixon, M. Fisher, U. Hustadt, E. Franconi, I. Horrocks, and M. de Rijke, “Combinations of modal logics,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 17, no. 1, pp. 1–20, 2002.

[24] W. A. Carnielli, M. Coniglio, D. M. Gabbay, P. Gouveia, and C. Sernadas, *Analysis and synthesis of logics: how to cut and paste reasoning systems*, vol. 35 of *Applied Logic Series*. Springer Science & Business Media, 2008.

[25] M. Finger and D. Gabbay, “Combining temporal logic systems,” *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 37, 1996.

[26] M. Finger and M. A. Weiss, “The unrestricted combination of temporal logic systems,” *Logic Journal of IGPL*, vol. 10, no. 2, pp. 165–189, 2002.

[27] C. Caleiro, C. Sernadas, and A. Sernadas, “Parameterisation of logics,” in *Recent trends in algebraic development techniques Selected papers*, pp. 48–62, Springer-Verlag, 1999.

[28] J. Rasga, A. Sernadas, and C. Sernadas, “Importing logics,” *Studia Logica*, vol. 100, no. 3, pp. 545–581, 2012.