

Trabajo Final:
Introducción a la Astrofísica de los Agujeros Negros

Ondas Gravitacionales de Choque

Ignacio Francisco Ranea Sandoval

La Plata, mayo de 2010

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Generalidades Sobre la Teoría General de la Relatividad	1
1.2. Ecuaciones de Einstein en el Límite de Campo Débil	4
1.3. Ondas de Gravedad	8
1.3.1. El Gauge TT	8
1.3.2. Ondas de Gravedad y Partículas Libres	9
1.3.3. Polarización de una Onda Gravitacional Plana	11
1.4. Ondas de Choque	12
1.5. Ondas de Choque en Astrofísica	14
2. Ondas Gravitacionales de Choque	17
2.1. Espacio-tiempos con Curvaturas Distribucionales	18
2.2. Onda Gravitacional de Choque Producida por una Partícula Sin Masa	22
2.2.1. Geodésicas nulas linealizadas	23
2.3. Soluciones de Agujero Negro en Movimiento	28
2.3.1. El Agujero Negro de Schwarzschild	28
2.3.2. El Agujero Negro de Kerr	31
3. Conclusiones	35
A. Algunas Nociones Matemáticas	37
B. Clasificación de Petrov	39
4. Bibliografía	41

Capítulo 1

Introducción

Concepts have an objective existence.
Kurt Gödel

Sólo si nos detenemos a pensar en las pequeñas cosas
llegaremos a comprender las grandes.
José Saramago

En las diferentes Secciones de este Capítulo haremos un muy breve repaso de la Teoría General de la Relatividad, sus principales características y cantidades involucradas ya que la misma será la base de nuestro estudio.

Luego daremos un también breve resumen de algunos tópicos que, si bien no están íntimamente ligados al estudio que queremos realizar, resultan de interés, al menos, por completitud. A saber, hablaremos de las ondas gravitacionales en el marco de la teoría de campo débil de Einstein y de las ondas de choque en situaciones más conocidas, como lo es el caso de las ondas de choque en un fluido.

Para el primer objetivo introduciremos la noción de campo débil (siguiendo principalmente a [1] y [2]) y linearizaremos las ecuaciones de campo de Einstein y notaremos que las mismas admiten una solución de onda, ondas que reciben el nombre de gravitacionales. Luego caracterizaremos sus principales propiedades.

Para el segundo objetivo, simplemente, repasaremos la bibliografía clásica sobre el tema ([3], [4] y [5] entre otros) y daremos algunos ejemplos de ondas de choque en situaciones astrofísicas.

1.1. Generalidades Sobre la Teoría General de la Relatividad

Nuestra concepción del espacio, el tiempo y las leyes de la dinámica, fueron radicalmente modificadas por Einstein en uno de los cuatro trabajos que publicó en 1905 (el llamado *Annus Mirabilis*) con los que revolucionó varios aspectos de la Física.

En esta teoría Einstein estudia cambios de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales únicamente. Buscando una teoría que permita cambios de coordenadas totalmente generales, manteniendo su idea de que las leyes de la Física debían ser covariantes (esto es, debían conservar su forma) y, notando que la gravitación resulta incompatible con la idea de que el espacio-tiempo sea globalmente plano es que Einstein desarrolla las ideas fundamentales de la Teoría General de la

Relatividad que publica hacia fines del año 1915 ¹.

Así, Einstein desarrolla no sólo una teoría del espacio-tiempo, sino también de la gravitación en la que se describe a la gravedad como curvatura en el espacio-tiempo y no como una fuerza que actúa a distancia.

Un postulado fundamental para esta teoría es el principio de equivalencia que, en una de sus tantas formas, puede expresarse de este modo:

“Las observaciones realizadas desde un sistema de referencia en movimiento relativo acelerado respecto a un sistema inercial son, localmente, idénticas a las de un observador inercial en un campo gravitatorio.”

Éste ha sido, y continúa siendo, testeado experimentalmente (estudiando diferencias entre masa inercial y masa gravitatoria) con una precisión del orden de una parte en 10^{12} o mejor [6].

Con esta teoría el mismo Einstein logró explicar, entre otras cosas, un gran interrogante sobre nuestro Sistema Solar que había desconcertado a astrónomos y físicos por aproximadamente medio siglo: el avance (de 43 segundos de arco por siglo) del perihelio de Mercurio. Además predijo, por nombrar algunas de las muchas predicciones exitosas de su Teoría, que la luz de las estrellas debía ser desviada por el campo gravitacional del Sol. Esta predicción fue confirmada durante un eclipse total de Sol por la expedición científica dirigida por Sir Arthur Eddington en 1919 y en muchas oportunidades posteriores [7]. También predijo el redshift gravitacional, un efecto por el que la longitud de onda de la luz proveniente desde un cuerpo que genera un campo gravitacional intenso aumenta. Este resultado fue confirmado, definitivamente, en los experimentos que realizaron entre 1959 y 1965 Robert Pound, Glen Rebka Jr. y Joseph Snider [8].

Otra predicción de la Teoría General de la Relatividad son las ondas gravitacionales, también llamadas ondas de Einstein o de Einstein Rosen. Este fenómeno no ha sido, a pesar de los enormes esfuerzos que se están realizando, confirmado en forma directa. Sin embargo, existe una confirmación indirecta a través de las mediciones de la reducción del período orbital del pulsar binario PSR 1913+16. Este pulsar fue descubierto en 1974 por Russel A. Hulse y Joseph H. Taylor, Jr. y resuelto en 1982 (ver, por ejemplo [9]) realizando el análisis suponiendo que el cambio de período observado es debido a la emisión de ondas de gravedad. El excelente acuerdo entre los datos observacionales y las predicciones de la Teoría General de la Relatividad no sólo le valieron a ambos el Premio Nobel de Física en el año 1993, sino que aportaron la primera evidencia de que las ondas gravitacionales eran una realidad física.

En el marco de esta teoría, el espacio-tiempo deja de ser el escenario donde todos los fenómenos ocurren y adquiere un rol protagónico: ahora el espacio-tiempo es curvado por la presencia de materia y dicha curvatura es la que define, a través de las ecuaciones de campo de Einstein, las trayectorias que las partículas describen sobre el espacio-tiempo.

Repasemos brevemente las definiciones de los objetos y ecuaciones que están involucrados en la Teoría.

En la Teoría General de la Relatividad se describe al espacio-tiempo como una variedad diferenciable pseudoriemanniana ² de dimensión 4 equipada con una métrica Lorentziana g_{ab} .

¹Para ser más justos con David Hilbert las ecuaciones de dicha teoría deberían recibir el nombre de ecuaciones de Einstein-Hilbert, ya que el matemático alemán las obtuvo también en el año 1915 e incluso las envió para su publicación unas semanas antes que el mismo Einstein.

²Es una variedad en la que se relaja el requisito de que el tensor métrico de lugar a una forma cuadrática definida positiva sobre cada punto el espacio tangente y se substituye por el requisito más débil de que el tensor métrico sea sencillamente no degenerado.

El tensor métrico g_{ab} , un tensor de segundo rango simétrico que es utilizado para medir el intervalo ds^2 entre dos eventos separados infinitesimalmente, del mismo modo que en la teoría especial de la relatividad ³:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.1)$$

Es decir, el tensor métrico determina la geometría del espacio-tiempo así como también lo hace con las geodésicas de las partículas materiales y los fotones.

Los símbolos de Christoffel Γ_{bc}^a están, en la conexión de Levi-Civita, relacionados con el tensor métrico y sus derivadas del siguiente modo:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d}), \quad (1.2)$$

donde con la coma en los índices estamos denotando derivada parcial respecto a las coordenadas señaladas por el mismo.

El tensor de curvatura de Riemann, que depende del tensor métrico y sus derivadas primeras y segundas, está definido del siguiente modo:

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (1.3)$$

A partir del tensor de Riemann (1.3), se definen varios objetos de gran importancia, como el tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R_{acb}^c = g^{cd}R_{dacb}, \quad (1.4)$$

la curvatura escalar de Ricci:

$$R = g^{ab}R_{ab} \quad (1.5)$$

y a partir de ellos el tensor de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (1.6)$$

Suele ser conveniente definir el llamado tensor de Weyl, la parte de traza nula del tensor de Riemann. Este tensor es idénticamente nulo en 2 y 3 dimensiones y, en 4 dimensiones, está definido como:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{bc}R_{ad} - g_{ad}R_{bc}) + \frac{1}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{bc}g_{ad})R. \quad (1.7)$$

El tensor G_{ab} (1.6) cumple con las llamadas identidades de Bianchi:

$$G^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.8)$$

y recibe este nombre por aparecer en las ecuaciones de campo de Einstein. Con punto y coma en los índices estamos denotando derivada covariante respecto a las coordenadas señaladas por el mismo. Hay que notar que las identidades de Bianchi (1.8) implican que:

$$T^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.9)$$

³Estamos utilizando la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos donde los índices latinos recorren los valores 0, 1, 2 y 3. En el caso de Teoría Especial de la Relatividad el tensor métrico está dado por:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde se desprende que el tensor de energía impulso se conserva.

Si utilizamos unidades geométricas, $c = 1$ y $G = 1$, las ecuaciones de campo de Einstein se escriben:

$$G^{ab} = 8\pi T^{ab}, \quad (1.10)$$

donde T^{ab} es el tensor de energía impulso.

En vacío, es decir cuando $T^{ab} = 0$, las ecuaciones (1.10) se vuelven simplemente $G^{ab} = 0$ o, en forma equivalente, $R^{ab} = 0$. A las soluciones de estas ecuaciones se las suele denominar “Ricci planas” ya que cumplen que $R = 0$, cosa que no debe confundirse con que el espacio-tiempo solución a dichas ecuaciones sea llano.

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas y no lineales, por lo que obtener soluciones en condiciones generales no es una tarea para nada sencilla y hasta llevó a Einstein a suponer que nunca podrían ser resueltas en forma analítica.

Para dar una idea de lo complejo que es trabajar en esta teoría, analicemos el problema de dos cuerpos. Para ello intentemos primero escribir la ecuación que describe al movimiento del par de partículas, es decir, la expresión explícita de la aceleración de cada partícula en función de sus posiciones y velocidades y luego intentemos encontrar la solución a la misma. En el marco de la teoría Newtoniana de la gravitación el primer problema es trivial, incluso en el caso más general en el que uno trata con un sistema de N partículas; el segundo, por el contrario es muy complicado con la excepción de caso en el que $N = 2$, siendo éste el único ⁴ caso en el que las ecuaciones pueden ser resueltas en forma exacta.

En el marco de la Teoría General de la Relatividad, incluso escribir las ecuaciones de movimiento en el caso en el que $N = 2$ es difícil. Es imposible expresar las aceleraciones como funciones de posiciones y velocidades por lo que, incluso en este problema en apariencia simple, uno debe utilizar métodos que atacan al problema en modo aproximado.

Volviendo a las ecuaciones de campo de Einstein, notemos que son 10 ecuaciones para determinar los 10 elementos del tensor métrico g_{ab} , pero ahora recordemos las identidades de Bianchi (1.8); estas restricciones sobre el tensor de Einstein (o el de Ricci) hacen que sólo 6 de las ecuaciones (1.10) sean linealmente independientes.

Si lo pensamos en forma cuidadosa esto es razonable ya que, si una dada métrica es solución a las ecuaciones de Einstein en un dado sistema de coordenadas $\{x^a\}$, debe existir otro sistema de coordenadas, $\{x^{a'}\}$, donde la misma también sea solución. Esto se traduce en que en la métrica hay 4 grados de libertad no físicos, grados de libertad que están representados por las cuatro funciones que realizan la transformación entre los sistemas de coordenadas primadas y las sin primar.

1.2. Ecuaciones de Einstein en el Límite de Campo Débil

Como mencionamos previamente, las ecuaciones de Einstein no son ecuaciones lineales por lo que, entre otras complicaciones, deja de ser aplicable el principio de superposición; es decir, dadas dos soluciones a las ecuaciones, una combinación lineal de las mismas no tiene por que serlo. Hay que remarcar, sin embargo, que este hecho, junto con la forma en la que materia y gravedad se encuentran acoplados, da riqueza a la teoría y nos permite describir fenómenos realmente interesantes que pueden ser observados a pesar de las enormes dimensiones del cosmos. Debemos remarcar que estos fenómenos son extremadamente débiles y aún más difíciles, en general, de medir de forma directa.

⁴Algunas configuraciones muy particulares del llamado problema de tres cuerpos ($N = 3$) también pueden resolverse en forma exacta.

En muchos escenarios astrofísicos los efectos relativistas son pequeños y pueden, incluso, ser despreciados. En caso de que no puedan ser despreciados, pero sí resulte válida la llamada aproximación de campo débil, estará permitido realizar grandes simplificaciones a las ecuaciones de Einstein (1.10) para obtener las llamadas ecuaciones linealizadas de Einstein, que ahora pasamos a derivar para el caso de “pequeños” apartamientos de la métrica de Minkowski.

Tomemos como métrica de fondo a la del espacio-tiempo llano, la métrica de Minkowski, a la que denotaremos con η_{ab} . Así existirán coordenadas en las que nuestra métrica admitirá ser escrita como:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (1.11)$$

donde el apartamiento entre nuestro tensor métrico y el de Minkowski, h_{ab} (simétrico en sus índices), puede ser tratado como un campo definido en el espacio-tiempo llano.

La condición de “pequeños” apartamientos se cumplirá si le exigimos a h_{ab} que satisfaga las siguientes restricciones:

$$|h_{ab}| \ll 1 \quad \forall a \quad \forall b, \quad (1.12)$$

y una equivalente para sus derivadas. Esto nos permite ignorar términos de orden superior a 1 en h (o en sus derivadas) así como productos entre esta cantidad con sus derivadas.

Una forma de precisar aún más la idea de “pequeñez” con la que estamos lidiando es la siguiente: Sea (\mathcal{M}, g) nuestra forma de representar a un dado espacio-tiempo. Si existen coordenadas x^μ con las siguientes propiedades:

- Cubren la totalidad de \mathcal{M} y su rango es \mathbb{R}^4 ;
- Las componentes de la métrica, g_{ab} , con respecto a x^μ satisfacen:

$$g_{ab}(x) - \eta_{ab} = \mathcal{O}(\epsilon),$$

$$g_{ab,c}(x) = \mathcal{O}(\epsilon),$$

$$g_{ab,cd}(x) = \mathcal{O}(\epsilon),$$

donde ϵ es un número pequeño, diremos que podemos utilizar la aproximación de campo débil. Una aclaración que creo vale la pena realizar es la siguiente: vamos a suponer que si una perturbación al espacio-tiempo de Minkowski es “pequeña” en un dado instante, permanecerá así si la hacemos evolucionar utilizando las ecuaciones de Einstein exactas. Esta suposición no es para nada trivial dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Einstein. Este tema, denominado “Estabilidad del espacio-tiempo de Minkowski” ha sido estudiado ampliamente y una serie de importantes de teoremas que garantizan la estabilidad del mismo han sido obtenidos [10]. Hay que aclarar que si no fuese estable, soluciones a las ecuaciones linealizadas de Einstein comenzarían a desviarse fuertemente de las exactas ⁵.

⁵Esta definición puede formularse de modo que el “espacio-tiempo” sea solamente una parte del que estamos estudiando. Para citar un ejemplo, la región asintóticamente llana de *cualquier* espacio-tiempo podría ser nuestro “espacio-tiempo”. Pero, también quiero remarcar que ya que en cualquier punto de cualquier espacio-tiempo uno puede elegir coordenadas de modo que en los alrededores de dicho punto la condición de campo débil se cumpla. Es por esta razón que la condición se vuelve no trivial cuando \mathcal{M} es lo “suficientemente grande”.

Lo que queremos es obtener las ecuaciones que debe cumplir la perturbación h_{ab} . Para ello, lo que haremos es introducir nuestra métrica perturbada (1.11) en las ecuaciones de Einstein de vacío y retener únicamente términos lineales.

Para empezar estudiemos los símbolos de Christoffel (1.2) que ahora son:

$${}^{(L)}\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}\eta^{ae}(h_{bc,e} + h_{eb,c} - h_{bc,e}). \quad (1.13)$$

Como podemos apreciar en la ecuación anterior, los símbolos de Christoffel son cantidades de primer orden. Así, recordando la definición del tensor de Riemann (1.3), tenemos que:

$${}^{(L)}R_{abcd} = \eta_{ae}{}^{(L)}\Gamma_{bd,c}^e - \eta_{ae}{}^{(L)}\Gamma_{bc,d}^e = \frac{1}{2}(h_{ad,bc} + h_{bc,ad} - h_{ac,bd} - h_{bd,ac}), \quad (1.14)$$

de igual modo, el tensor de Ricci (1.4) se vuelve:

$${}^{(L)}R_{ab} = \frac{1}{2}(h_{a,bd}^d + h_{b,ad}^d - h_{,ab} - \square h_{ab}), \quad (1.15)$$

donde: $h = \eta^{ab}h_{ab} = h_a^a$ y \square operador D'Alambertiano es simplemente el correspondiente al espacio plano, es decir: $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ si estamos utilizando coordenadas cartesianas.

Si ahora contraemos al tensor de Ricci linealizado (1.15) obtenemos el escalar de Ricci linealizado:

$${}^{(L)}R = h_{,ab}^{ab} - \square h. \quad (1.16)$$

Juntando todo esto obtenemos la expresión linealizada del tensor de Einstein (1.6) ⁶:

$${}^{(L)}G_{ab} = \frac{1}{2}(h_{a,bd}^d + h_{b,ad}^d - h_{,ab} - \square h_{ab} - \eta_{ab}h_{,cd}^{cd} - \eta_{ab}\square h). \quad (1.18)$$

Ahora las identidades de Bianchi contraídas se reducen a:

$${}^{(L)}G^{ab}{}_{,b} = 0. \quad (1.19)$$

Así tendremos que las ecuaciones linealizadas de Einstein son:

$$\frac{1}{2}(h_{a,bd}^d + h_{b,ad}^d - h_{,ab} - \square h_{ab} - \eta_{ab}h_{,cd}^{cd} - \eta_{ab}\square h) = -16\pi T_{ab}, \quad (1.20)$$

donde ahora vemos que, como consecuencia de (1.19), $T^{ab}{}_{,b} = 0$, es decir que en esta aproximación el tensor de energía-impulso T_{ab} produce campo gravitacional pero no tiene auto-interacción con la fuente.

Con las ecuaciones linealizadas en nuestras manos estamos prácticamente preparados para iniciar la tarea de resolverlas. Antes de comenzar con ello debemos analizar el tema de la invarianza de gauge. Esto se debe a lo siguiente: hemos pedido que la métrica satisfaga las condiciones para poder considerar válida la aproximación de campo débil, sin embargo ellas no fijan completamente el sistema de coordenadas en el espacio-tiempo. Es por este motivo que podría existir otro sistema

⁶Las ecuaciones de Einstein linealizadas pueden obtenerse a partir de la utilización del principio de mínima acción (respecto a variaciones de h_{ab}) del siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(h_{,a}^{ab})(h_{,b}) - (h_{,a}^{cd})(h_{d,c}^a) + \frac{1}{2}\eta^{ab}(h_{,a}^{cd})(h_{cd,b}) - \frac{1}{2}\eta^{ab}(h_{,a})(h_{,b})]. \quad (1.17)$$

de referencia en el que nuestra métrica se escriba como la de Minkowski sumada a una “pequeña” perturbación, pero donde la misma fuese diferente. Por lo tanto la descomposición (1.11) no resulta única.

Estudiaremos, para esto, transformaciones de coordenadas (o de gauge) de la forma:

$$\hat{x}^a = x^a + \xi^a(x^b) \quad (1.21)$$

y veremos cuándo el mismo mantiene aplicable la condición de campo débil. La transformación (1.21) produce cambios en escalares, vectores y tensores en general. Estos cambios pueden ser ignorados (dentro de la precisión con la que estamos trabajando) salvo en el caso del tensor métrico, ya que estamos estudiando pequeños apartamientos de la geometría de Minkowski y estas pequeñas variaciones son las que contienen toda la información sobre el campo gravitatorio.

Si pedimos no sólo que el cambio de coordenadas sea pequeño, es decir que $|\xi^a| \ll 1$, sino que, además, $|\xi^a_{,b}| \ll 1$, obtenemos:

$$\Lambda^{\hat{a}}_b \equiv \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x_b} = \frac{\partial x^a}{\partial x_b} + \frac{\partial \xi^a}{\partial x_b} = \delta^a_b + \xi^a_{,b}. \quad (1.22)$$

Para la transformación inversa a la dada por (1.21) tenemos que:

$$\Lambda^a_{\hat{b}} = \delta^a_b - \xi^a_{,b}. \quad (1.23)$$

Para el tensor métrico obtenemos, trabajando a primer orden en las cantidades pequeñas, que:

$$\hat{g}_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} - \xi_{b,a} - \xi_{a,b} = g_{ab} - \xi_{b,a} - \xi_{a,b} = g_{ab} + \hat{h}_{ab}, \quad (1.24)$$

donde hemos definido $\hat{h}_{ab} = h_{ab} - \xi_{b,a} - \xi_{a,b}$ que sigue siendo, dadas las suposiciones que hemos realizado, una cantidad pequeña.

Si ahora definimos $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$ las ecuaciones (1.18) se vuelven:

$$-\square \bar{h}_{ab} - \eta_{ab} \bar{h}_{,cd}{}^{,cd} + \bar{h}_{ac, \quad b}{}^c + \bar{h}_{bc, \quad a}{}^c = 16\pi T_{ab}. \quad (1.25)$$

Siempre puede encontrarse una transformación de gauge (1.21) de modo tal que se satisfaga que:

$$\bar{h}^{ab}{}_{,b} = 0. \quad \text{Gauge de Lorentz} \quad (1.26)$$

De este modo la ecuación (1.25) adquiere la forma⁷:

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab}, \quad (1.27)$$

que es una ecuación de onda por analogía con las de las ondas electromagnéticas en el gauge de Lorentz ($A^c = 0$) en el espacio-tiempo llano.

Tenemos, pues, el sistema de ecuaciones (1.26), (1.27) y la definición del tensor métrico (1.11) que forman las ecuaciones fundamentales de la teoría de Einstein linealizada expresadas en el gauge de Lorentz⁸. Ecuaciones que, ahora sí, intentaremos resolver.

⁷Deberíamos diferenciar el viejo tensor métrico $\bar{h}^{(v)}_{ab}$ del transformado al gauge de Lorentz, $\bar{h}^{(n)}_{ab}$, pero para simplificar la notación no lo haremos ya que, con esta aclaración, dicho abuso de notación no debería producir confusiones.

⁸Creo oportuno aclarar que si uno no desea utilizar coordenadas cartesianas para describir al espacio-tiempo llano de fondo debe reemplazar en todos lados η_{ab} por las componentes del tensor métrico expresadas en dichas coordenadas, g_{ab} (llano), y las derivadas parciales ordinarias por las covariantes asociadas a los “nuevos” símbolos de Christoffel.

1.3. Ondas de Gravedad

La solución más simple de las ecuaciones (1.27) en el vacío y en el gauge (1.26) son ondas planas monocromáticas (la importancia de estas soluciones es que, invocando el teorema de descomposición de Fourier, (virtualmente) toda otra solución de estas ecuaciones se puede escribir como superposición de ondas planas):

$$\bar{h}_{ab} = \text{Re}[\mathcal{A}_{ab} \exp(ik_a x^a)]. \quad (1.28)$$

La amplitud (\mathcal{A}_{ab}) y el vector de onda (k_a) son constantes que satisfacen las condiciones:

$$k_a k^a = 0 \quad \mathbf{k} \text{ es un vector nulo.} \quad (1.29)$$

$$\mathcal{A}_{ab} k^a = 0, \quad \mathbf{A} \text{ es ortogonal a } \mathbf{k}. \quad (1.30)$$

debido a las ecuaciones (1.27) en el vacío y (1.26) respectivamente.

Vemos que (1.28) describe una onda que se propaga en el vacío con la velocidad de la luz y con frecuencia $\omega \equiv k^0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Un análisis (poco cuidadoso) nos llevaría a concluir que A_{ab} (la amplitud de la onda plana) posee 6 componentes independientes, número al que se llega ya que un tensor simétrico de rango 2 tiene, en general, 10 componentes linealmente independientes, menos 4 debido a las restricciones (1.30). ¿De qué nos estamos olvidando? Nosotros sabemos que el campo gravitatorio posee únicamente 2 grados de libertad y no 6. La respuesta a esta pregunta radica en que no hemos utilizado la libertad de fijar el gauge; así, usándola, uno puede cambiar de manera arbitraria 4 de esas 6 componentes. Para eliminar esta arbitrariedad es que uno fija el gauge en el que luego trabajará.

1.3.1. El Gauge TT

Para analizar la radiación gravitacional suele hacerse uso del llamado gauge TT (del inglés Transverse-Traceless). Pasemos a repasar, brevemente, sus principales características.

Para comenzar, tomemos una 4-velocidad \mathbf{V} fija (es decir, cualquier vector tipo tiempo constante) y elijamos nuestro gauge de modo que se cumpla (en todo el espacio-tiempo) lo siguiente:

$$A_{ab} v^b = 0. \quad (1.31)$$

A estas 3 restricciones ⁹ se le puede agregar la condición:

$$A_a^a = 0. \quad (1.32)$$

Luego de imponer esta restricción agotamos nuestra libertad de elegir el gauge en el que vamos a trabajar.

Tenemos, pues, 8 restricciones sobre las componentes de la amplitud:

$$A_{ab} v^b = A_{ab} k^b = A_a^a = 0. \quad (1.33)$$

⁹no 4 como aparentan serlo ya que por (1.30) se satisface automáticamente que $k^a (A_{ab} v^b) = 0$.

Las componentes “libres” de A_{ab} representan los grados de libertad físicos (las dos polarizaciones posibles) de las ondas gravitacionales planas. Resulta útil escribir (1.33) en un marco de referencia lorentziano donde $v^0 = 1$ y $v^\mu = 0$ ¹⁰. Así podemos reescribir (1.33) del siguiente modo:

$$h_{a0} = 0 \quad \text{Sólo las componentes espaciales son no nulas.} \quad (1.34)$$

$$h_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0 \quad \text{Las componentes espaciales tienen divergencia nula.} \quad (1.35)$$

$$h_{\mu\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^3 h_{\mu\mu} = 0 \quad \text{La parte espacial tiene traza nula.} \quad (1.36)$$

Es importante notar que (1.36) implica que en este gauge no hay diferencias entre \bar{h}_{ab} y h_{ab} .

En este gauge particular tenemos que, en forma de matriz, la amplitud A_{ab}^{TT} adquiere el siguiente aspecto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todo tensor que satisfaga (1.34, 1.35 y 1.36), aunque no necesariamente la ecuación de una onda, recibe el nombre de tensor TT. Es un tensor transversal (Transverse) ya que es puramente espacial (para el caso de una onda esto significa que es transversal a su propia dirección de propagación). Además tiene, como vimos, traza nula (Traceless).

Debe remarcarse que no toda solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein puede ser reducida al gauge TT y que esto sólo es cierto para las ondas gravitacionales.

En este gauge, las componentes del tensor de Riemann (que es invariante de gauge) no nulas son:

$$R_{\mu 0 \nu 0} = R_{0 \mu 0 \nu} = -R_{\mu 0 0 \nu} = -R_{0 \mu \nu 0} = -\frac{1}{2} h_{\mu\nu,00}^{TT}, \quad (1.37)$$

donde $h_{\mu\nu}^{TT}$ es la perturbación expresada en el gauge TT.

1.3.2. Ondas de Gravedad y Partículas Libres

Consideremos la siguiente situación: una partícula inicialmente en reposo es alcanzada por una onda de gravedad. Para realizar este estudio elegimos un fondo lorentziano en el cual ésta se encontraba en reposo y el gauge TT referido a ese sistema de referencia, es decir, la 4-velocidad es la que posee la partícula.

Una partícula libre obedece la llamada ecuación de la geodésica dada por:

$$\frac{dV^a}{d\tau} + \Gamma_{bc}^a V^b V^c = 0. \quad (1.38)$$

La aceleración inicial de la partícula es (recordar que inicialmente la misma se encontraba en reposo):

¹⁰Los índices griegos μ, ν, η, \dots recorren las componentes espaciales (es decir 1, 2, 3) de un dado vector o tensor más general.

$$\left(\frac{dU^a}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma_{00}^a = -\frac{1}{2}\eta^{ab}(h_{b0,0} + h_{0b,0} - h_{00,b}). \quad (1.39)$$

Pero, según vimos anteriormente, h_{a0}^{TT} se anula, de modo que, inicialmente la aceleración de la partícula es nula. Entonces la partícula permanecerá en reposo en todo momento a pesar de la presencia de la onda (debe quedar claro que “en reposo” significa que las coordenadas de la posición de la misma no cambian).

Estudiemos qué es lo que le pasa a un par de partículas ubicadas, una en el origen de coordenadas y la otra en $x = \epsilon$, $y = 0$ y $z = 0$, ambas en reposo. De nuestro análisis previo sabemos que su posición coordenada no cambiará. Sin embargo, sabemos también que la posición coordenada es una cantidad que depende del sistema de coordenadas. Pasemos entonces a estudiar una cantidad que no dependa del sistema de referencia: la distancia propia entre ambas partículas, que viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta l \equiv \int \sqrt{|ds^2|} &= \int \sqrt{|g_{ab}dx^a dx^b|} \\ &= \int_0^\epsilon \sqrt{|g_{xx}|} dx \simeq \sqrt{|g_{xx}(x=0)|} \epsilon \\ &\simeq \left(1 + \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}(x=0)\right) \epsilon. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Así, vemos que, como por lo general, h_{xx}^{TT} no se anula, la distancia propia entre este par de partículas cambiará debido a la presencia de la onda¹¹.

Ahora pasemos a estudiar esto mismo pero desde un punto de vista (algo) diferente: la desviación de las geodésicas (en el marco de una teoría linealizada de la gravedad).

Llamemos \mathfrak{J}^a al vector que conecta a las dos partículas. La evolución del mismo está determinada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathfrak{J}^a = R_{bcd}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \mathfrak{J}^d. \quad (1.41)$$

Como estamos trabajando en una teoría linealizada de la gravitación podemos utilizar para la 4-velocidad de las partículas su valor no perturbado (es decir, el que tendría en un espacio-tiempo llano). Si además utilizamos que inicialmente $\mathfrak{J} \rightarrow (0, \epsilon, 0, 0)$ obtenemos, conservando sólo cantidades lineales en h_{ab} que (1.41) se vuelve:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathfrak{J}^a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{J}^a = -\epsilon R_{0x0}^a. \quad (1.42)$$

Si ahora utilizamos la expresión del tensor de Riemann cuando estamos utilizando el gauge TT (1.37) obtenemos, para partículas inicialmente separadas en la dirección x :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{J}^x = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{J}^y = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT}, \quad (1.43)$$

y para partículas separadas una cantidad ϵ , pero en la dirección del eje y , se pueden obtener ecuaciones similares:

¹¹Esto nos marca la importancia que existe entre calcular cantidades que dependen de la elección del sistema de referencia (posición coordenada) y cantidades independientes de dicha elección (distancia propia).

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{I}^y = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy}^{TT} = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{I}^x = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT}. \quad (1.44)$$

1.3.3. Polarización de una Onda Gravitacional Plana

Las ecuaciones obtenidas en la Sección anterior nos serán de gran ayuda al estudiar la polarización de este tipo de ondas.

Para ello supondremos, sin pérdida de generalidad, una onda gravitacional plana y monocromática que se propaga en la dirección del eje z . En el gauge TT tenemos que las únicas componentes no nulas de la perturbación métrica son:

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = \text{Re}[A_+ e^{-i\omega(t-z)}], \quad (1.45)$$

y

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = \text{Re}[A_\times e^{-i\omega(t-z)}], \quad (1.46)$$

donde A_+ y A_\times representan los dos posibles modos independientes de polarización de una de estas ondas.

Trabajando en forma análoga a como se hace en electromagnetismo definiremos el “tensor” de polarización lineal para ondas de gravedad de la siguiente manera:

$$\mathbf{e}_+ \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \quad (1.47)$$

$$\mathbf{e}_\times \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x. \quad (1.48)$$

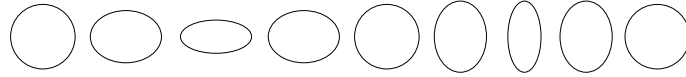


Figura 1.1: Distorsión de un anillo de partículas de prueba ubicadas en el plano $x-y$ al ser alcanzadas por una onda de gravedad plana con polarización $+$ que se propaga en la dirección del eje z .

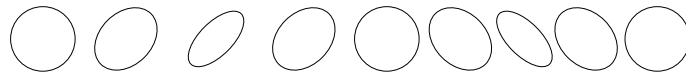


Figura 1.2: Distorsión de un anillo de partículas de prueba ubicadas en el plano $x-y$ al ser alcanzadas por una onda de gravedad plana con polarización \times que se propaga en la dirección del eje z .

Nótese de las Figuras (1.1) y (1.2) que en todo instante la onda de gravedad es invariante frente a una rotación de 180° en torno a la dirección de propagación de la misma. Este ángulo puede compararse con el de 360° correspondiente a una onda electromagnética. Esta característica está íntimamente relacionada con el spin de la partícula asociada con la versión mecánico-cuántica de estas ondas (1 para los fotones y 2 para el gravitón). Además, cualquier campo con spin S tiene exactamente dos modos independientes de polarización lineal inclinados un ángulo de $90^\circ/S$ respecto del otro. Así el mismo es de 90° (\mathbf{e}_x y \mathbf{e}_y por ejemplo) para una onda electromagnética mientras que para una onda de gravedad el mismo es de 45° (\mathbf{e}_+ y \mathbf{e}_\times).

Mucho más queda por decir en relación a las ondas de gravedad, principalmente en lo que respecta a la energía-impulso que es transportado por ellas, pero ya hemos discutido a las ondas de gravedad y no queremos desviarnos (demasiado) del tema central de esta monografía.

1.4. Ondas de Choque

A pesar de que muchos sistemas físicos sufren cambios rápidos en su estado de movimiento, no es de esperar que dicho estado sea una función discontinua de los eventos del espacio-tiempo, ni que sus derivadas (de orden bajo) las posean.

Sin embargo, muchas veces resulta conveniente realizar descripciones matemáticas de ciertos fenómenos basadas en estados con cierto tipo de discontinuidades, es decir, estados descritos por distribuciones y no funciones. Realizar este tipo de simplificaciones hacen que el tratamiento subsiguiente del problema sea más ameno que si lo hiciésemos con funciones continuas.

Un ejemplo clásico aparece en el estudio de ondas de choque en mecánica de fluidos clásica o en hojas de corriente en el electromagnetismo clásico. En estos casos suponer transiciones discontinuas permite estudiar (ciertos) aspectos de estos fenómenos en forma correcta aunque, claramente, la estructura de la región donde la transición entre los dos estados no puede ser estudiada.

Cuando uno estudia la dinámica de fluidos en el caso en que las velocidades en juego se vuelvan comparables o mayores a las del sonido en el medio, los efectos de la compresibilidad se vuelven importantes.

Una propiedad general de toda perturbación (lineal) en un gas, es que la misma se propaga (alejándose de la fuente) con la velocidad del sonido (local) del medio. Por este motivo, cualquier perturbación que se propague con una velocidad mayor a ésta no puede comportarse, desde ningún punto de vista, como una onda de sonido. En este tipo de fenómenos aparecen discontinuidades en las cantidades físicas entre las regiones anterior y posterior del frente de onda. Claramente, ya que la información se transmite a la velocidad del sonido, la región previa al shock no puede tener ningún conocimiento de la existencia del mismo. Este tipo de discontinuidades reciben el nombre general de ondas de choque.

Se generan superficies de discontinuidad que, por lo general, no se mantienen fijas aunque la forma en la que las mismas se mueven no está, de ninguna manera, relacionada con la velocidad del propio flujo. Además, parece importante recalcar que en su movimiento las partículas de fluido pueden atravesar la superficie de discontinuidad en ambas direcciones.

Dijimos que hay cantidades físicas que sufren discontinuidades antes y después del paso del shock. Sin embargo, éstas no pueden ser, en principio, arbitrarias ya que hay ciertas condiciones de contorno que deben ser satisfechas. Obtendremos las mismas para el caso de una superficie de discontinuidad plana.

El flujo de masa debe ser continuo, es decir: toda la masa que atraviesa la superficie desde un lado debe salir por el otro. Esta condición se expresa matemáticamente del siguiente modo:

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}. \quad (1.49)$$

Para obtener la ecuación anterior hemos realizado la suposición de flujo estacionario ($\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$), además hemos orientado el sistema de referencia (y elegido coordenadas apropiadas) de modo que la normal del elemento de superficie bajo consideración coincida con la dirección del eje x . En la ecuación (1.49) ρ_i y v_{ix} son las densidades y componentes x de la velocidad a cada lado de la superficie de discontinuidad.

Si introducimos la notación de corchetes, es decir $[A] \equiv A_1 - A_2$, la ecuación (1.49) se escribe como:

$$[\rho v_x] = 0. \quad (1.50)$$

Además se debe cumplir que: el flujo de energía y de momento deben ser continuos, así tenemos:

$$[\rho v_x (\frac{1}{2} v^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho})] \equiv [\rho v_x (\frac{1}{2} v^2 + w)] = 0 \quad \text{Conservación del flujo de energía.} \quad (1.51)$$

$$[p + \rho v_x^2] = 0 \quad \text{Conservación del flujo de la componente x del impulso.} \quad (1.52)$$

$$[\rho v_x v_y] = 0 \quad \text{Conservación del flujo de la componente y del impulso.} \quad (1.53)$$

$$[\rho v_x v_z] = 0 \quad \text{Conservación del flujo de la componente z del impulso.} \quad (1.54)$$

donde ϵ es la energía interna por unidad de masa, p la presión y w la entalpía por unidad de masa.

Para obtener las ecuaciones (1.52, 1.53 y 1.54) hemos utilizado la conocida expresión para el momento lineal por unidad de área que viene dada por $pn_i + \rho v_i v_k n_k$, donde n_i son las componentes del vector normal a la superficie que estamos considerando.

El sistema de ecuaciones (1.51, 1.52, 1.53 y 1.54) forma un sistema completo de condiciones de contorno que se deben satisfacer sobre la superficie de discontinuidad.

Podemos distinguir dos familias diferentes de discontinuidades.

En la primera no hay flujo de materia a través de la superficie. De modo que las condiciones de contorno que se deben satisfacer se reducen a:

$$v_{1x} = v_{2x} = [p] = 0 \quad (1.55)$$

y donde v_y , v_z y las demás cantidades termodinámicas pueden variar en cualquier cantidad. Este tipo de discontinuidades reciben el nombre de “discontinuidades tangenciales”.

En la segunda familia, el flujo de materia a través de la superficie no es nulo. En estas discontinuidades la velocidad tangencial es continua ($[v_y] = [v_z] = 0$). Las otras condiciones que deben satisfacerse son:

$$[\rho v_x] = [\frac{1}{2} v_x^2 + w] = [p + \rho v_x^2] = 0. \quad (1.56)$$

Estas discontinuidades se denominan, generalmente, “ondas de choque”.

Al igual que las demás cantidades termodinámicas, la entropía por unidad de masa sufre un salto al pasar el frente de la onda de choque. Dado que la entropía debe crecer como consecuencia del movimiento del gas tendremos que, si 1 es el frente del shock y 2 la parte trasera, que:

$$s_2 > s_1. \quad (1.57)$$

Así vemos que la presencia del shock genera un aumento en la entropía (tengamos en mente que el gas que estamos considerando puede ser pensado como uno ideal donde la viscosidad y la

conductividad térmica son nulas). Este aumento en la entropía muestra que el movimiento es un proceso irreversible y que por lo tanto se disipa energía ¹².

Como señalamos anteriormente, en una onda de choque, la componente tangencial de la velocidad del gas debe ser continua. Este hecho nos permite elegir un sistema de referencia tal que la superficie de discontinuidad está en reposo en el mismo, por lo que las componentes tangenciales son nulas a ambos lados de la misma. Haciendo un análisis de las condiciones de contorno para este caso nos llevan a las llamadas condiciones de Rankine-Hugoniot ¹³ que nos dicen para un dado punto del plano (p, V) a un lado del shock, la relación entre la presión y el volumen al otro lado del mismo.

Haciendo uso de estas relaciones uno puede, bajo la suposición de que las variaciones de todas las cantidades debido al paso del shock son pequeñas, obtener la “dirección” en la que las mismas varían. Luego de este análisis se obtiene (bajo la suposición de que el medio tiene propiedades termodinámicas tales que se satisface que $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s < 0$) lo siguiente:

- Como dijimos antes $s_1 < s_2$.
- Cuando el gas pasa a través del frente, se comprime. Así tenemos $p_1 < p_2$ y $V_1 > V_2$, por lo que la densidad también sufre un incremento.
- El frente de onda se mueve de modo supersónico en relación al gas que se encuentra por delante de él, de modo que el shock no afecta en modo alguno al gas que se encuentra por delante de él (hasta que llega a su encuentro).

1.5. Ondas de Choque en Astrofísica

En muy diversas áreas de la astrofísica uno se encuentra con ondas de choque. Las mismas resultan de vital importancia para estudiar fenómenos que van desde la formación estelar en los brazos de galaxias espirales, vientos estelares relativistas en estrellas muy jóvenes, fuentes extragalácticas de radio, núcleos galácticos compactos, interacción del campo magnético de La Tierra con el viento solar, supernovas, la aceleración de partículas que pueden dar origen a los rayos cósmicos vía el mecanismo de Fermi (de primer y segundo orden), la radiación Čerenkov, por citar algunos.

Pasemos a resumir, brevemente, los tres últimos, ya que resultan de gran interés para la astrofísica de altas energías.

En cuanto a las supernovas, hace más de media década se postuló que, asociadas con las supernovas de Tipo II, existen ondas de choque que se generan en el núcleo de la estrella y se propagan hacia su superficie barriéndola completamente. El proceso puede resumirse de la siguiente manera: en las etapas finales de la evolución de una estrella masiva, la misma adquiere la llamada estructura en capas de cebolla, con capas de elementos cada vez más pesados hasta que se llega el núcleo inerte de ^{56}Fe . Cuando este núcleo supera el límite de Chandrasekhar (cerca de una masa de $1,4 M_{\odot}$) el mismo colapsa debido a que la presión de degeneración que ejercen los electrones no puede soportarlo y ocurre el colapso gravitatorio, reduciendo drásticamente el tamaño del núcleo. Así, las capas exteriores caen alcanzando velocidades cercanas al 25 % de la velocidad de la luz en el vacío. A medida que colapsa hacia el centro, el gas se calienta, y en el núcleo recién formado se cumplen

¹²El mecanismo real de disipación ocurre a nivel microscópico en procesos que tienen lugar en las finas capas que forman una onda de choque no idealizada como la que estamos estudiando.

¹³Relaciones obtenidas por William John Macquorn Rankine en 1870 y por Pierre Henri Hugoniot en 1885 en forma independiente.

las condiciones para que ocurra el decaimiento β inverso, dando así origen a neutrinos y a un núcleo formado ahora por neutrones. Cuando el mismo alcanza un densidad comparable a la de la materia nuclear, el colapso se detiene (ahora por la presión de degeneración que ejercen los neutrones)¹⁴. En este momento la materia que estaba cayendo hacia el núcleo choca con el núcleo (prácticamente incompresible) y rebota dando origen a la onda de choque que barre con todas las capas externas de la estrella. Uno de los mayores problemas que queda por resolver (problema para nada sencillo) es entender cómo es que los neutrinos transmiten su energía al resto de la estrella para producir la onda de choque que causa la “explosión” de la misma. Este proceso, apropiadamente simplificado, es comparable con el llamado pistón supersónico estudiado con detalle en [3], ya que da una idea concreta de lo que le ocurre a un gas cuando se encuentra con un obstáculo o es eyectado hacia un fluido estacionario.

El mecanismo de Fermi, postulado por primera vez por Enrico Fermi en el año 1949, es una forma de explicar el origen de los rayos cósmicos. Esta forma de aceleración, denominada comúnmente aceleración difusiva, se basa en las sucesivas aceleraciones de partículas cargadas en diversas nubes moleculares magnetizadas del medio interestelar que se mueven con velocidades aleatorias en el espacio. El mecanismo propuesto originalmente por Fermi daba como resultado una ganancia promedio de energía que dependía cuadráticamente de la velocidad de la nube del medio interestelar en unidades de la de la luz en el vacío. Por este motivo este mecanismo recibe el nombre de mecanismo de Fermi de segundo orden y, ya que dichas velocidades son pequeñas, este mecanismo no resulta eficiente para acelerar partículas hasta las energías requeridas (~ 100 GeV). Hacia finales de la década de 1970 el mecanismo original fue modificado de modo de obtener uno más eficiente (lineal en la velocidad de las nubes que actúan como espejos magnéticos y por lo tanto mucho más eficiente que el propuesto originalmente por Fermi). Este proceso, aplicable a remanentes de supernova donde las velocidades no resultan aleatorias, permite a las partículas ganar energía en aceleraciones sucesivas a medida que las mismas rebotan hacia adelante y hacia atrás entre diferentes nubes.

La radiación Čerenkov, observada por primera vez por Pavel Alekséyevich Čerenkov mientras trabajaba junto con Sergey Ivanovich Vavilov en el año 1934. Fue explicada, desde un punto de vista teórico, en el año 1937 por Ilya Mikhailovich Frank e Igor Yevgenyevich Tamm¹⁵. Es el análogo al boom sónico que produce, por ejemplo, un avión reactor cuando supera la velocidad del sonido en el medio, aunque en este caso es una onda de choque en el campo electromagnético. Por este motivo existen algunas diferencias muy importantes, por ejemplo: una onda de choque del tipo que describimos previamente es un fenómeno no lineal, mientras que la propagación de ondas electromagnéticas es en el marco de la teoría de la electrodinámica clásica (es decir si despreciamos los términos aportados por la electrodinámica cuántica) es siempre lineal¹⁶. Esta radiación se produce cuando una partícula cargada viaja a través de un medio dieléctrico con una velocidad que excede (localmente) a la de la luz en dicho medio.

Denotemos con v a la velocidad de la partícula, luego, si el índice de refracción (local) del medio es $n > 1$ la radiación se emite en un cono centrado en la dirección de la velocidad de la partícula y que tiene una amplitud angular dada por:

¹⁴Aunque no está muy claro, se cree que existe una masa máxima para la estrella progenitora para la cual el colapso del núcleo no pasa por una fase de estrella de neutrones, sino que se forma directamente un agujero negro por lo que no ocurre el proceso de la explosión supernova.

¹⁵Čerenkov, Frank y Tamm compartieron el premio Nobel de Física en el año 1958 por este motivo.

¹⁶Cuando se está en una situación donde los campos involucrados son grandes ya que ni $\vec{\mathbf{B}}$ ni $\vec{\mathbf{D}}$ son proporcionales a $\vec{\mathbf{H}}$ y $\vec{\mathbf{E}}$ respectivamente sino funciones no lineales de ellos (o incluso combinaciones entre ellos). Esto hace que las relaciones constitutivas no sean lineales, razón por la cual deja de valer el principio de superposición para diferentes soluciones.

$$\cos \theta = \frac{v_{\text{luz en el medio}}}{v} = \frac{c}{vn}. \quad (1.58)$$

La radiación Čerenkov se produce debido a que al pasar la partícula cargada interactúa con las moléculas del medio y les induce una polarización. Cuando la partícula se aleja, dicha polarización desaparece. En el proceso se emite un pulso de luz visible, debe remarcar que si el medio fuese un conductor dicho reacomodamiento de los electrones en las moléculas puede realizarse sin que haya emisión de fotones. Dado que la partícula se mueve con una velocidad mayor a la de la luz en el medio, los fotones emitidos (que se mueven con esa velocidad) no pueden interferir destructivamente como lo harían en una situación “normal” intensificando así el pulso de luz que se observa. Vemos, entonces, que es el medio (y no la partícula que pasa) la que emite la radiación y que estamos frente a un proceso macroscópico.

Este tipo de radiación es la que utilizan telescopios como VERITAS (Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System), H.E.S.S. (High Energy Stereoscopic System), MAGIC (Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Čerenkov Telescope) o CANGAROO (Collaboration of Australia and Nippon for a GAMMA Ray Observatory in the Outback) para realizar Astronomía de rayos gamma. Como se sabe, los rayos gamma no pueden penetrar la atmósfera terrestre, en el proceso, a una altura de entre 10 - 20 km interactúa, por lo general, con un protón (o neutrón) y se genera una cascada de partículas secundarias (electrones y positrones en su mayoría) que se dirigen al suelo.

Las partículas secundarias también son extremadamente energéticas y se mueven a una velocidad cercana a la de la luz en el vacío, velocidad mayor a la de la luz en el aire (que depende de la longitud de onda pero es, en promedio un 3% menor que en el vacío). Como resultado aparece la radiación Čerenkov. La suma de la radiación producida por la totalidad de partículas que se producen en la cascada llegan al piso y son colectadas por los espejos de telescopios ópticos. Así, se puede reconstruir la cascada de modo tal que se puede obtener información crucial sobre el rayo gamma que dio origen a la misma.

Capítulo 2

Ondas Gravitacionales de Choque

You see things; and you say, 'Why?'
But I dream things that never were; and I say, 'Why not?'
George Bernard Shaw

...
As it comes around again
The same taste to everything
The same unbroken chain
That still remains.
Reaching For The Rail / Broken China
Richard Wright y Anthony Moore.

Hay una serie de razones por las cuales estudios relacionados con el campo gravitacional producido por partículas donde la energía cinética es mucho mayor que la energía en reposo. Por ejemplo durante la interacción entre partículas con energías en la escala de Planck los efectos gravitacionales se vuelven dominantes. Además, entender este tipo de configuraciones pueden ser de gran utilidad al momento de intentar comprender la naturaleza de la gravedad en el régimen cuántico. Un ejemplo concreto de esto es la retro-acción gravitacional (*gravitational back-reaction*) y la auto-interacción de la materia entrando “o dejando” un agujero negro y produciendo la radiación Hawking, fenómeno en el cual, al acercarse al horizonte de eventos, las partículas tienen una velocidad relativa comparable con la de la luz en el vacío.

Además, extendiendo el razonamiento realizado en la Sección dedicada a Ondas de Choque es de esperar que al estudiar la dinámica de fluidos en el marco de la Teoría General de la Relatividad haya ciertos fenómenos físicos que puedan ser apropiadamente descritos utilizando razonamientos similares a los utilizados en la teoría clásica. Esto nos lleva, de alguna manera, a aceptar el uso de tensores energía-impulso que contengan distribuciones.

Recordando las ecuaciones de campo de Einstein (1.6) vemos que, en dichos casos, deberemos trabajar con espacio-tiempos cuyos tensores de Ricci posean distribuciones caracterizando sus componentes. De la relación entre este tensor y el de Riemann vemos que este último también tendrá componentes distribucionales.

Un tensor de curvatura con esas características provendrá de trabajar con un espacio-tiempo descrito, en algún sistema de coordenadas, por una métrica continua pero con derivadas (de primer y segundo orden) con saltos que ocurren en alguna subvariedad (tridimensional, bidimensional o en un evento).

Como veremos a continuación, un tipo de ondas gravitacionales de choque es una el la cual existe una hipersuperficie a través de la cual las derivadas primera y segunda de la métrica sufren saltos tipo delta de Dirac.

2.1. Espacio-tiempos con Curvaturas Distribucionales

Diremos que un tensor de curvatura es distribucional si una o más de sus componentes está caracterizado, no por una función sino por sus generalizaciones: las distribuciones.

En esta Sección¹ introduciremos una serie de definiciones y conceptos que resultarán importantes a la hora de estudiar espacio-tiempos asociados con ondas gravitacionales de choque (y también distribuciones de masa concentradas en una hoja o en una línea), ya que los mismos contendrán, como veremos a continuación, algún tipo de discontinuidad. Dedicaremos, siguiendo [11], esta Sección a estudiar el caso en el que las discontinuidades en el tensor de Riemann son tipo delta de Dirac.

Recordemos que el tensor de curvatura es lineal en las derivadas segundas del tensor métrico y cuadrático en las derivadas primeras. Puede verse que para un espacio-tiempo en el cual las derivadas primeras y segundas de la métrica poseen saltos finitos a través de una subvariedad dará lugar a un tensor de curvatura que contendrá términos tipo delta de Dirac con soporte en dicha subvariedad. Además, los saltos en las derivadas primeras introducirán términos con productos de funciones de Heaviside.

Supongamos la existencia de una hipersuperficie Σ a través de la cual el tensor métrico tiene una discontinuidad en su derivada primera (Diremos, pues, que pertenece a la clase C^1 de funciones). Supongamos que la hipersuperficie Σ está definida por la ecuación:

$$\Xi(x) = 0 \quad (2.1)$$

y que la misma tiene un vector normal

$$l_a = \Xi_{,a} = \frac{\partial \Xi}{\partial x^a}. \quad (2.2)$$

Entonces, la hipersuperficie Σ separa al espacio-tiempo (o al menos a una región del espacio-tiempo) en dos regiones que llamaremos Ω^+ y Ω^- dependiendo si en ella Ξ es mayor o menor a 0 respectivamente.

Utilizaremos la notación de corchete para indicar el salto de una cierta cantidad f al atravesar Σ y la de barra para el respectivo valor medio, luego:

$$[f] = f^+ - f^-, \quad (2.3)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(f^+ + f^-). \quad (2.4)$$

donde f^\pm denotan las funciones que provienen de realizar el límite de f en Ω^\pm cuando el punto de evaluación se acerca a Σ .

Vamos a suponer que el tensor métrico g_{ab} es continuo a través de Σ pero que ²:

¹Para ver algunas definiciones utilizadas a lo largo de este Sección dirigirse al Apéndice A.

²Estas condiciones sobre los saltos en las derivadas del tensor métrico se desprenden del hecho que en un entorno de Σ podemos escribir:

$$[g_{ab,c}] = l_c b_{ab}, \quad (2.6)$$

$$[g_{ab,cd}] = l_{c,d} \hat{b}_{ab} + l_c b_{ab,d} + l_d b_{ab,c} + l_c l_d \hat{b}_{ab}. \quad (2.7)$$

Recordando la definición de los símbolos de Christoffel (1.2) y la ecuación para el salto en las primeras derivadas de la métrica (2.6) podemos ver que:

$$[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(l_b b_c^a + l_c b_b^a - l^a b_{bc}), \quad (2.8)$$

donde los símbolos de Christoffel se calculan con la métrica g_{ab} .

De igual modo podemos calcular el salto en el tensor de Riemann, obteniendo:

$$[R_{bcd}^a] = [\Gamma_{bc}^a]_{;d} - [\Gamma_{bd}^a]_{;c} + l_c A_{bd}^a - l_d A_{bc}^a, \quad (2.9)$$

donde estamos denotando con $;$ a la derivada covariante respecto a $\bar{\Gamma}$ y hemos definido:

$$A_{bc}^a = \frac{1}{2}(b_{b;c}^a + b_{c;b}^a - b_{bc}^a + l_c \tilde{b}_b^a + l_b \tilde{b}_c^a - l^a \tilde{b}_{bc} - c_d^a l^d \tilde{b}_{bc}), \quad (2.10)$$

$$\tilde{b}_b^a = \hat{b}_b^a + 2c_d^a b_b^d, \quad (2.11)$$

$$g_{ab;c} = (g_{ab}|_{\Xi=0})_{;c} - \frac{1}{2}((g_{ab}^+)_{;c} + (g_{ab}^-)_{;c}). \quad (2.12)$$

Además, podemos encontrar, contrayendo en forma apropiada (2.9), que el salto en el tensor de Ricci viene dado por:

$$[R_{ab}] = [\Gamma_{ad}^d]_{;b} - [\Gamma_{ab}^d]_{;d} + l_b A_{ac}^c - l_d A_{ab}^d, \quad (2.13)$$

y contrayendo (2.13) obtener el salto en el escalar de Ricci y así construir el del tensor de Einstein:

$$\begin{aligned} [G_{ab}] &= (l^d b'_{ab})_{;d} + l^d b'_{ab;d} - (b'_a{}^d l_d)_{;b} - (b'_b{}^d l_d)_{;a} \\ &\quad - l_a b'_{b;d} - l_b b'_{a;d} - l_a l_d \tilde{b}'_b{}^d - l_b l_d \tilde{b}'_a{}^d + l_d l^d \tilde{b}'_{ab} \\ &\quad + g_{ab} \tilde{b}'_{cd} l^c l^d + g_{ab} ((b'_c{}^d l^c)_{;d} + l^c b'_{c;d}) \\ &\quad + b'_{ab} c_{de} l^d l^e - 2l_d l^d c_{ae} b'_b{}^c + g_{ab} l^e l_d c_f^d b'_e{}^f \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde: $\tilde{b}'_b{}^a = \tilde{b}_b^a - \frac{1}{2} \tilde{b} \delta_b^a$ y $b'_b{}^a = b_b^a - \frac{1}{2} \tilde{b} \delta_b^a$.

Para métricas que son (al menos) de clase \mathcal{C}^3 se tienen las llamadas identidades de Bianchi:

$$\frac{1}{2} \delta_{def}^{abc} R_{ghab;c} = 0, \quad (2.15)$$

donde δ_{def}^{abc} es la generalización natural a la delta de Kronecker para un número mayor de índices.

$$g_{ab}^{\pm} = g_{ab}|_{\Xi=0} + \Xi g_{ab}^{\pm} + \frac{\Xi^2}{2} g_{ab}^{\pm} + \dots \quad (2.5)$$

Estas identidades admiten una generalización al caso que estamos estudiando en esta Sección:

$$\frac{1}{2}\delta_{def}^{abc}Q_{ghab;c} = \Theta(1 - \Theta)\mathcal{A}_{ghdef}, \quad (2.16)$$

donde \mathcal{A}_{ghdef} es algún vector definido sobre la hipersuperficie Σ y $\Theta = \Theta(\Xi)$ es una función definida de la siguiente manera:

$$\Theta(\Xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Xi > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \Xi = 0, \\ 0 & \text{si } \Xi < 0. \end{cases}$$

Puede mostrarse que, para un vector d^a definido sobre la hipersuperficie σ , se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(Q^{ab} - \frac{1}{2}Qg^{ab})_{;b} = \Theta(1 - \Theta)d^a, \quad (2.17)$$

donde Q^{ab} y Q son a Q_{abcd} lo que el tensor de Ricci R^{ab} y el escalar de curvatura R al tensor de curvatura de Riemann.

Dicho esto, puede mostrarse que las ecuaciones de Einstein admiten la siguiente generalización:

$$\begin{aligned} Q_{ab} - \frac{1}{2}Qg_{ab} &= \bar{\delta}\left(H_{ab} - \frac{1}{2}Hg_{ab}\right) + G_{ab}^D \\ &\quad - \Theta(1 - \Theta)\left(J_{ab} - \frac{1}{2}Jg_{ab}\right) \\ &= 8\pi(\bar{\delta}\tau_{ab} + T_{ab}^D - \Theta(1 - \Theta)\mathcal{T}_{ab}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

con:

$$H_{ab} = \frac{1}{2}(l^c l_c b_{ab} - l^c b'_{ac} l_b - l^c b'_{bc} l_a), \quad (2.19)$$

$$J_{ab} = [\Gamma_{ad}^c][\Gamma_{cb}^d] - [\Gamma_{ab}^c][\Gamma_{cd}^d], \quad (2.20)$$

y, como es usual, H y J son sus respectivas contracciones con el tensor métrico.

Además hemos introducido la siguiente notación:

$$(T_{ab})^D \equiv T_{ab}^D = \Theta T_{ab}^+ + (1 - \Theta)T_{ab}^-, \quad (2.21)$$

y también definimos las siguientes cantidades: $\bar{\delta}$ es la delta de Dirac en la hipersuperficie Σ , T_{ab}^\pm es el tensor energía-impulso en Ω^\pm respectivamente. Las cantidades τ_{ab} y \mathcal{T}_{ab} son los tensores energía-impulso asociados a la hipersuperficie Σ . Donde \mathcal{T}_{ab} queda definido únicamente por cantidades geométricas del siguiente modo:

$$8\pi\mathcal{T}_{ab} = [\Gamma_{ad}^c][\Gamma_{cb}^d] - [\Gamma_{ab}^c][\Gamma_{cd}^d] - \frac{1}{2}g_{ab}([\Gamma_{de}^c][\Gamma_{cf}^d]g^{ef} - \frac{b}{2}l_h g^{cd}[\Gamma_{cd}^h]). \quad (2.22)$$

Resulta importante remarcar que la ecuación (2.18) es totalmente equivalente al sistema de ecuaciones dado por:

$$H_{ab} - \frac{1}{2}Hg_{ab} = 8\pi\tau_{ab}, \quad (2.23)$$

$$G_{ab}^{\pm} = 8\pi T_{ab}^{\pm}, \quad (2.24)$$

$$J_{ab} - \frac{1}{2}Jg_{ab} = -8\pi\mathcal{T}_{ab}. \quad (2.25)$$

Estamos interesados solamente en estudiar soluciones de vacío, es decir, $\tau_{ab} = T_{ab} = 0$. Si este es el caso la ecuación (2.24) nos dice que:

$$H_{ab} = bl_al_b - l_cb_al_b - l_cb_b^cl_a + l^cl_cb_{ab} = 0. \quad (2.26)$$

Entonces debemos estar en alguno de los siguientes casos:

Caso 1:

$$l_cl^c = 0. \quad (2.27)$$

$$\begin{array}{c} \text{y} \\ l^a(b_{ab} - 1/2bg_{ab}) = 0. \end{array} \quad (2.28)$$

Caso 2:

$$l_cl^c \neq 0. \quad (2.29)$$

$$\begin{array}{c} \text{y} \\ b_{ab} = l_at_b + l_bt_a, \end{array} \quad (2.30)$$

para un campo vectorial t_a arbitrario.

Las soluciones a la ecuación (2.28) están dadas por:

$$b_{ab} = l_at_b + l_bt_a + fm_am_b + \bar{f}\bar{m}_a\bar{m}_b, \quad (2.31)$$

donde los vectores nulos complejos m_a y \bar{m}_a , junto con el vector nulo l_a y un cuarto vector, también nulo, n_a forman una tetrad nula y donde f es una función arbitraria de soporte compacto. El tensor métrico puede escribirse en función a estos vectores del siguiente modo:

$$g_{ab} = -l_an_b - l_bn_a + m_a\bar{m}_b + \bar{m}_am_b. \quad (2.32)$$

No hay pérdida de generalidad si uno hace elige a t_a como el vector nulo, ya que, si el caso no fuese éste se puede lograr, por medio de una transformación continua de coordenadas el mismo efecto.

Como estamos considerando el caso en el que no hay materia tenemos que se debe cumplir que:

$$2[R_{ab}] = 0. \quad (2.33)$$

Ecuaciones equivalentes (en el *Caso 1*) a:

$$2l^ab_{cd;a} + l^a_b{}^c d - l_d\bar{\Phi}_c - l_c\Phi_d = -b_{cd}c^fg_l f_l g, \quad (2.34)$$

donde $\Phi_a = b'_{a;b} + l_c\left(\tilde{b}_a^c - \frac{\tilde{b}}{2}\delta_a^c\right)$.

La ecuación (2.34) puede ser interpretada como la ecuación de propagación para b_{ad} en la dirección de l^c . Hay que resaltar que en dicha ecuación aparece el tensor \hat{b}_{ab} que involucra el salto en la derivada segunda del tensor métrico a través de la hipersuperficie Σ . Teniendo en mente la definición del tensor b_{ad} dada por la ecuación (2.6) o bien recordando que el mismo determinaba el salto en la derivada primera del tensor métrico a través de Σ , podemos interpretar (2.34) como la ecuación de propagación del frente de la onda gravitacional de choque.

2.2. Onda Gravitacional de Choque Producida por una Partícula Sin Masa

La idea principal de esta Sección es derivar (e interpretar sus propiedades físicas) el campo gravitacional que produce una partícula puntual con masa en reposo nula y sin carga eléctrica como lo es, por ejemplo, un fotón.

Haremos este estudio siguiendo, fundamentalmente, los trabajos [12] y [13].

Pasemos a dar una breve explicación de cómo obtener el resultado utilizando la teoría completa a partir de la métrica de Schwarzschild expresada en coordenadas isotrópicas³. Además, veremos otra forma que se basa en tomar al mismo tiempo los límites $v \rightarrow 1$ y $M \rightarrow 0$ en la métrica que describe a un agujero negro de Schwarzschild [13].

Para obtener la solución exacta en [12] se expresa la solución de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas, así el elemento de línea adquiere la forma:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{2M}{r_{iso}}}{1 + \frac{2M}{r_{iso}}} \right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r_{iso}} \right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.35)$$

donde $r_{iso}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ no coincide con la coordenada r de Schwarzschild.

Si realizamos una transformación de Lorentz en la dirección del eje x y obtenemos (escribiendo todo en las nuevas variables):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2M}{\hat{r}} \right)^4 (d\hat{t}^2 - d\hat{x}^2 - d\hat{y}^2 - d\hat{z}^2) - \left[\left(1 + \frac{2M}{\hat{r}} \right)^4 - \left(\frac{1 - \frac{2M}{\hat{r}}}{1 + \frac{2M}{\hat{r}}} \right)^4 \right] \frac{(d\hat{t} - d\hat{x})^2}{1 - v^2}, \quad (2.36)$$

donde ahora

$$\frac{2M}{\hat{r}} = \frac{p(1 - v^2)}{2((\hat{x} - v\hat{t})^2 + (1 - v^2)(\hat{y}^2 + \hat{z}^2))^{1/2}}. \quad (2.37)$$

Cantidad que cumple con la condición:

$$\lim_{v \rightarrow 1} \frac{2M}{\hat{r}} = 0 \quad \forall t \forall x \forall y \forall z. \quad (2.38)$$

Si uno analiza el caso límite $v \rightarrow 1$, obtiene que el elemento de línea (2.36) adquiere, en el caso en que $\hat{x} \neq \hat{t}$, la siguiente forma:

³Resulta interesante remarcar que uno puede obtener el (¡mismo!) resultado utilizando la teoría linealizada de Einstein. Visto retrospectivamente éste es un resultado esperable desde un punto de vista matemático ya que, como veremos, $\lim_{v \rightarrow 1} \frac{2M}{\hat{r}} = 0$, que justamente se corresponde con linealizar la métrica de Schwarzschild.

$$ds^2 \xrightarrow{\rho \gg 2M} (d\hat{t}^2 - d\hat{x}^2 - d\hat{y}^2 - d\hat{z}^2) - \frac{4p}{|\hat{x} - \hat{t}|} (d\hat{t} - d\hat{x})^2. \quad (2.39)$$

La métrica (2.39) satisface (salvo en la superficie $\hat{x} = \hat{t}$):

$$\hat{R}_{abcd} = 0. \quad (2.40)$$

Si uno está interesado en estudiar lo que ocurre en el frente de la onda de choque, es decir en la superficie $\hat{x} = \hat{t}$, es imprescindible usar la identidad:

$$\lim_{v \rightarrow 1} \left[\left([\hat{x} - v\hat{t}]^2 + [1 - v^2]\hat{\rho}^2 \right)^{-1/2} - \left([\hat{x} - v\hat{t}]^2 + [1 - v^2] \right)^{1/2} \right] = -2\delta(\hat{x} - \hat{t}) \ln \hat{\rho}, \quad (2.41)$$

donde $\hat{\rho}^2 = \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ [12]. Con ella y un poco de (tediosa) álgebra obtenemos el resultado deseado:

$$ds^2 = (d\hat{t}^2 - d\hat{x}^2 - d\hat{y}^2 - d\hat{z}^2) - 4p \left[\frac{1}{|\hat{x} - \hat{t}| - 2\delta(\hat{t}^2 - \hat{x}^2) \ln(\hat{y} + \hat{z})^{1/2}} \right] (d\hat{t} - d\hat{x})^2. \quad (2.42)$$

Esta métrica tiene un tensor de Riemann cuyas componentes no nulas (sin escribir en forma explícita las que pueden ser obtenidas por consideraciones de las simetrías que posee dicho tensor) son:

$$\hat{R}_{\hat{t}\hat{y}\hat{t}\hat{y}} = 4p\delta(\hat{t} - \hat{x}) \left[\frac{\hat{y}^2 - \hat{z}^2}{(\hat{y}^2 + \hat{z}^2)^2} + \pi\delta(\hat{y})\delta(\hat{z}) \right], \quad (2.43)$$

$$\hat{R}_{\hat{t}\hat{z}\hat{t}\hat{z}} = 4p\delta(\hat{t} - \hat{x}) \left[\frac{\hat{y}^2 - \hat{z}^2}{(\hat{y}^2 + \hat{z}^2)^2} - \pi\delta(\hat{y})\delta(\hat{z}) \right], \quad (2.44)$$

$$\hat{R}_{\hat{t}\hat{y}\hat{t}\hat{z}} = 4p\delta(\hat{t} - \hat{x}) \frac{2\hat{y}\hat{z}}{(\hat{y}^2 + \hat{z}^2)^2}. \quad (2.45)$$

Así vemos que, si realizamos una transformación de Lorentz singular ($v \rightarrow 1$) a la métrica de Schwarzschild, la misma adquiere la forma de una onda gravitacional de choque plana. Esto significa que el campo estático de Schwarzschild se transformó en uno de radiación pura, como se desprende de notar que el espacio-tiempo pasa de pertenecer al tipo D en la clasificación de Petrov a ser de tipo N (Ver Apéndice B). Así, toda la estructura geométrica típica de un agujero negro se pierde. Solo para citar un ejemplo clave de esto: la métrica transformada (2.42) deja de tener el característico horizonte de eventos que todo agujero negro posee.

2.2.1. Geodésicas nulas linealizadas

Vamos a estudiar el comportamiento de las geodésicas nulas linealizadas en este tipo de espacio-tiempos. Para ello consideremos el campo linealizado que produce una partícula de masa M en el gauge de Lorentz. En este caso el intervalo viene dado por la siguiente expresión:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) dT^2 + \left(1 + \frac{2M}{R}\right) (dx^2 + dy^2 + dZ^2) \quad (2.46)$$

donde $R \gg M$. Este es el campo que produce la partícula visto desde un sistema de referencia en el que la misma se encuentra en reposo.

Realicemos una transformación de Lorentz a un nuevo sistema de coordenadas que se mueve con una velocidad $\beta = \tanh \xi$ respecto a dicho sistema, la misma está dada por:

$$T = t \cosh \xi - z \sinh \xi, \quad (2.47)$$

$$Z = -t \sinh \xi + z \cosh \xi, \quad (2.48)$$

y de manera simultánea hagamos el cambio de variables:

$$M = 2pe^{-\xi} \quad (2.49)$$

donde p es alguna constante.

El momento p^a de la partícula viene dado por:

$$p^a = M[\cosh \xi \delta_t^a + \sinh \xi \delta_z^a] \quad (2.50)$$

de modo que si introducimos coordenadas nulas $u = t - z$ y $v = t + z$ tenemos:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} p^a = p(\delta_t^a + \delta_z^a) = 2p\delta_v^a. \quad (2.51)$$

Vemos, entonces, que en el límite en el que la partícula no tiene masa (que coincide con el caso en el que $\beta \rightarrow 1$) la misma se mueve en la dirección de v .

En función de las coordenadas (u, v, x, y) la ecuación (2.46) toma la forma:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2M}{R}\right)[-dudv + dx^2 + dy^2] + \frac{4M}{R} \left[\frac{p}{M}du + \frac{M}{4p}dv\right]^2, \quad (2.52)$$

donde:

$$R^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{p}{M}u + \frac{M}{4p}v\right)^2. \quad (2.53)$$

Ahora lo que tenemos que notar es que si dejamos fijos $(u \neq 0, v, x, y)$ el siguiente límite es cierto:

$$\lim_{M \rightarrow 0} ds^2 = -dudv' + dx^2 + dy^2, \quad (2.54)$$

donde hemos introducido una nueva variable v' que satisface:

$$dv' = dv - \frac{4pdu}{|u|}. \quad (2.55)$$

Es importante notar que, a pesar de que la coordenada v' resulta discontinua en $u = 0$ el espacio-tiempo descrito por (2.54).

Para dejar esto más claro introducimos nuevas variables (\hat{u}, \hat{v}, x, y) de modo que:

$$\hat{u} = u + \frac{M^2 Z \ln(2R)}{pR} \quad (2.56)$$

$$\hat{v} = v + \frac{4pZ \ln(2R)}{R}, \quad (2.57)$$

donde:

$$R^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{p}{M} \hat{u} + \frac{M}{4p} \hat{v} \right)^2. \quad (2.58)$$

De este modo tenemos que si dejamos fijos ($u \neq 0, v, x, y$) el siguiente límite es cierto:

$$\lim_{M \rightarrow 0} ds^2 = -d\hat{u}d\hat{v} + dx^2 + dy^2. \quad (2.59)$$

Que describe a un espacio-tiempo plano.

Estudiamos el comportamiento del espacio-tiempo en $u = 0$, que en el límite que estamos estudiando coincide con $\hat{u} = 0$. Para esto estudiaremos a las geodésicas nulas ya que éstas nos aportan información relacionada con la estructura geométrica del mismo.

Nuestro razonamiento será el siguiente: estudiaremos geodésicas nulas que cruzan la hipersuperficie $u = 0$ en el caso en el que $M \neq 0$ y luego tomaremos el límite $M \rightarrow 0$.

A continuación presentamos las ecuaciones de las geodésicas linealizadas de la métrica (2.46).

$$\dot{T} = E \left(1 + \frac{2M}{R} \right), \quad (2.60)$$

$$y\dot{Z} - Z\dot{y} = L \left(1 - \frac{2M}{R} \right), \quad (2.61)$$

$$\dot{y}^2 + \dot{Z}^2 = -m^2 \left(1 - \frac{2M}{R} \right) + E^2, \quad (2.62)$$

donde estamos denotando con punto a las derivadas respecto al parámetro afín λ . Además hemos supuesto, sin que por ello perdamos generalidad, que $x = 0$. Las constantes E , L y m son, respectivamente, la energía, el momento angular y la masa en reposo de la partícula de prueba.

A partir de este punto consideraremos únicamente geodésicas “nulas”, es decir consideraremos que $m = \mathcal{O}(M^2)$. Entonces podemos expandir en una serie de potencias a las cantidades y , Z y T reteniendo términos lineales en M , así tendremos que:

$$y = y_0 + My_1, \quad (2.63)$$

$$Z = Z_0 + MZ_1, \quad (2.64)$$

$$T = T_0 + MT_1. \quad (2.65)$$

Realizando el mismo procedimiento en las ecuaciones que describen las geodésicas (2.60), (2.61) y (2.62) obtenemos que:

$$\dot{T}_0 = E, \quad (2.66)$$

$$\dot{y}_0^2 + \dot{Z}_0^2 = E^2, \quad (2.67)$$

$$y_0\dot{Z}_0 - Z_0\dot{y}_0 = L, \quad (2.68)$$

$$\dot{T}_1 = \frac{2E}{R_0}, \quad (2.69)$$

$$\dot{y}_0\dot{y}_1 + \dot{Z}_0\dot{Z}_1 = 0, \quad (2.70)$$

$$y_0\dot{Z}_1 - Z_1\dot{y}_0 + y_1\dot{Z}_0 - Z_0\dot{y}_1 = -\frac{2L}{R_0}, \quad (2.71)$$

donde $R_0^2 = y_0^2 + Z_0^2$.

De las definiciones de las variables nulas u y v se desprende que, si pretendemos que \dot{v} (y por lo tanto $\dot{\hat{v}}$) sean finitos en el límite $M \rightarrow 0$, debemos requerir que:

$$\dot{Z}_0 = -\dot{T}_0 = -E. \quad (2.72)$$

Dicho esto puede verse que de las ecuaciones (2.67) y (2.68) se desprende que:

$$\dot{y}_0 = 0, \quad (2.73)$$

$$y_0 = -\frac{L}{E}, \quad (2.74)$$

y que (2.70) implica que:

$$\dot{Z}_1 = 0. \quad (2.75)$$

De manera que tenemos:

$$\dot{u} = \frac{M}{p}E + \frac{M^2}{p} \frac{E}{R_0}, \quad (2.76)$$

$$\dot{v} = 4p \frac{E}{R_0}. \quad (2.77)$$

Estas ecuaciones pueden integrarse utilizando (2.72) para obtener (ignorando constantes de integración que no poseen relevancia física):

$$u = \frac{ME}{p}\lambda - \frac{M^2}{p} \ln(Z_0 + R_0), \quad (2.78)$$

$$v = -4p \ln(Z_0 + R_0). \quad (2.79)$$

A partir de estas expresiones y utilizando las definiciones de \hat{u} y \hat{v} obtenemos que:

$$\hat{u} = \frac{ME}{p}\lambda + \frac{M^2}{p} \left[\frac{Z_0 \ln(2R_0)}{R_0} - \ln(Z_0 + R_0) \right], \quad (2.80)$$

$$\hat{v} = 4p \left[\frac{Z_0 \ln(2R_0)}{R_0} - \ln(Z_0 + R_0) \right]. \quad (2.81)$$

Es importante notar el comportamiento de \hat{u} y \hat{v} en los límites $\lambda \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \hat{v} = 0, \quad (2.82)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{v} = -4p \ln y_0^2, \quad (2.83)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \hat{u} = \frac{ME}{p}\lambda. \quad (2.84)$$

$$(2.85)$$

Por lo que se ve claramente que el salto total en \hat{v} viene dado por:

$$\Delta\hat{v} = -4p \ln y_0^2. \quad (2.86)$$

Debe notarse que, en el límite en el que $M \rightarrow 0$, el salto en la coordenada \hat{v} ocurre únicamente en la hipersuperficie $\hat{u} = 0$.

Para concluir estudiemos el comportamiento de la coordenada y . Para esto debemos resolver la ecuación (2.71). Si en la misma reemplazamos (2.74) y (2.75) obtenemos que:

$$y_1 \dot{Z}_0 - Z_0 \dot{y}_1 = -\frac{2L}{R_0}. \quad (2.87)$$

Que tiene como solución a:

$$y_1 = -\frac{2R_0}{y_0} + AZ_0, \quad (2.88)$$

donde A es una constante arbitraria. Por este motivo tenemos que:

$$y = -\frac{L}{E} + M \left[\frac{2R_0}{y_0} + AZ_0 \right]. \quad (2.89)$$

Lo que nos interesa en este punto es estudiar el comportamiento de y en la región de campo lejano para valores pequeños de M , puede obtenerse que para $\hat{u} \neq 0$ se tiene:

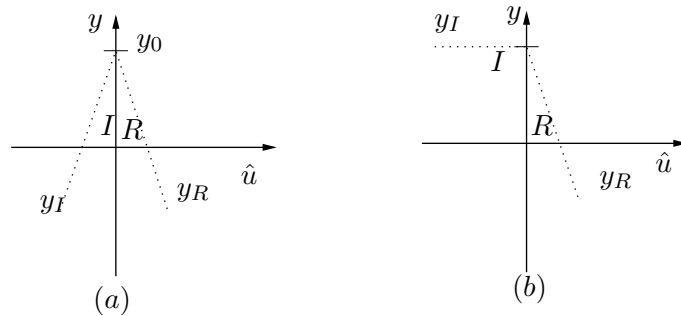


Figura 2.1: Figura que muestra el comportamiento de geodésicas nulas. En el eje de las abscisas tenemos la coordenada \hat{u} , mientras que en el de las ordenadas a la coordenada y . Se muestra la refracción espacial de geodésicas nulas para dos casos especiales. Caso (a): La geodésica incidente $y_I = \frac{2p}{y_0} \hat{u} + y_0$ es refractada de modo que el ángulo de incidencia I coincide con el refractado R , la geodésica refractada satisface la ecuación $y_R = -\frac{2p}{y_0} \hat{u} + y_0$. El Caso (b): en ángulo de incidencia es de 90° por lo que la geodésica refractada es descrita por $y_R = -\frac{4p}{y_0} \hat{u} + y_0$. Claramente vemos que la refracción ocurre en la hipersuperficie $\hat{u} = 0$.

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{\partial y}{\partial \hat{u}} = \frac{2p}{y_0} \operatorname{sgn} \hat{u} - pA. \quad (2.90)$$

Este comportamiento puede ser entendido como una “refracción espacial” de las geodésicas expresada en función de los ángulos introducidos (para dos situaciones particulares) en la (Figura 2.1). En general, los mismos satisfacen que:

$$\cotan I + \cotan R = \frac{4p}{y_0}. \quad (2.91)$$

Entonces, obtenemos que existen coordenadas en las que este espacio-tiempo resulta llano. De esta manera vemos que el estudio de estas (pocas) geodésicas nos proporcionó la información necesaria para realizar el “pegado” de los dos espacio-tiempos planos en la hipersuperficie \hat{u} que describe al frente de la onda de choque ⁴.

Para concluir, en [13] se obtiene, calculando las componentes del tensor de Ricci, que en el límite $M \rightarrow 0$ tenemos que la solución es:

$$\lim_{M \rightarrow 0} ds^2 = -du \left(dv + \frac{4pdu}{u} (1 - 2H(u)) + 4p \ln 4\delta(u) du \right) + dx^2 + dy^2, \quad (2.92)$$

que, claramente, se reduce a la que obtuvimos para $u \neq 0$.

2.3. Soluciones de Agujero Negro en Movimiento

En esta Sección describiremos el trabajo [15] en el que se obtienen las métricas que surgen al realizar una transformación de Lorentz a las soluciones de agujeros negros de vacío. Particularmente interesante para nuestra monografía es el caso en el que la velocidad relativa entre los observadores es cercana a la de la luz en el vacío (es decir a 1).

2.3.1. El Agujero Negro de Schwarzschild

Consideremos la métrica de Schwarzschild en las coordenadas originales, así el intervalo se escribe:

$$ds_S^2 = -(1 - 2M/\bar{r})d\bar{t}^2 + (1 - 2M/\bar{r})^{-1}d\bar{r}^2 + d\bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2 = ds_M^2 + \Delta s_S^2, \quad (2.93)$$

donde ds_M^2 es el intervalo del espacio-tiempo de Minkowski expresado en coordenadas esféricas y

$$\Delta s_S^2 = (2M/\bar{r})d\bar{t}^2 + (2M/\bar{r})(1 - 2M/\bar{r})^{-1}d\bar{r}^2. \quad (2.94)$$

Aquí estamos denotando $\bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y M a la masa del agujero negro (siempre utilizando unidades geométricas).

Estudiemos qué ocurre con esta métrica al realizar una transformación de Lorentz de modo que el agujero negro se esté moviendo en el nuevo sistema en la dirección del eje z con una velocidad v que luego haremos tender a 1. Las relaciones entre las nuevas (sin barrar) y las viejas (barradas) coordenadas vienen dadas por la conocida relación:

$$t = \gamma(\bar{t} + v\bar{z}) \quad , \quad z = \gamma(\bar{z} + v\bar{t}) \quad , \quad x = \bar{x} \quad , \quad y = \bar{y}, \quad (2.95)$$

donde, como es usual, $\gamma = \sqrt{1 - v^2}$.

Sabemos que ds_M^2 es invariante frente a transformaciones de Lorentz así que sólo debemos analizar cómo cambia el término Δs_S^2 frente al cambio de coordenadas dado por (2.95). Además de

⁴Un estudio similar puede verse en [14] donde él también utiliza el argumento de “cortar y pegar” para construir el espacio-tiempo que describe a una onda gravitacional de choque. Debe recalarse que en el mismo se utiliza el nombre “ondas impulsivas” para lo que en este trabajo monográfico denominamos “onda de choque”.

realizar esta transformación, escribiremos el resultado utilizando las nuevas coordenadas $u = t - z$ y $v = t + z$, para lo que, expresaremos las coordenadas barradas en función de las que hemos introducido en la oración previa, obteniendo el siguiente resultado:

$$\bar{t} \rightarrow \gamma u \quad , \quad \bar{z} \rightarrow -\gamma u \quad , \quad \bar{r}^2 \rightarrow \gamma^2 u^2 + \rho^2 \quad , \quad d\bar{r} \rightarrow \frac{\gamma u du}{\sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2}} + \mathcal{O}(\gamma^{-1}), \quad (2.96)$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$ y $\bar{\rho} = \rho/\gamma$.

Entonces, utilizando estas nuevas coordenadas y reteniendo únicamente el término dominante en potencias de γ obtenemos que:

$$\Delta s_S^2 = 2p \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2}} + \frac{u^2}{\sqrt{(u^2 + \bar{\rho}^2)^3} - 2\bar{M}(u^2 + \bar{\rho}^2)} \right] du^2 \quad (2.97)$$

donde definimos $p = \gamma M$ y $\bar{M} = M/\gamma$.

Para tomar el límite en el que $v \rightarrow 1$, es decir ($\gamma \rightarrow \infty$), utilizaremos el método introducido por Loustó y Sánchez, que consta de los siguientes pasos: primero realizar una transformación de Lorentz con γ finito, segundo integrar el resultado en u , tercero tomar el límite $\gamma \rightarrow \infty$ y, finalmente, diferenciar el resultado obtenido respecto a u . Este método tiene la ventaja que nos permite estudiar el comportamiento sin la necesidad de tomar el límite en el que la masa tiende a 0, por lo que podremos estudiar la estructura del espacio-tiempo cerca del horizonte de Schwarzschild.

Apliquemos este procedimiento al primer término del miembro derecho de la ecuación (2.97). La integración respecto a u es directa y el resultado es:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2}} = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2} \right). \quad (2.98)$$

Tomando el límite $\gamma \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2}} = H(u) \ln(2u) + H(-u) [\ln \bar{\rho}^2 - \ln(-2u)], \quad (2.99)$$

donde $H(u)$ es la función escalón de Heaviside. Diferenciando respecto a u obtenemos:

$$\frac{d}{du} \left[\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \bar{\rho}^2}} \right] = \frac{1}{|u|} - \log \rho^2 \delta(u). \quad (2.100)$$

De la misma forma (aunque con cálculos un poco más extensos) se obtiene para el segundo término un resultado similar:

$$\frac{d}{du} \left[\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 + \bar{\rho}^2)^3} - 2\bar{M}(u^2 + \bar{\rho}^2)} \right] = \frac{1}{|u|} - \left[\ln \rho^2 - \frac{\rho}{2M} \pi + 4 \sqrt{\frac{\rho^2}{4M^2} - 1} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\rho + 2M}{\rho - 2M}} \right] \delta(u). \quad (2.101)$$

En el límite $\gamma \rightarrow \infty$, (2.97) viene dada por:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Delta s_S^2 = 4p \left[\frac{1}{|u|} - \left[\ln \rho^2 - \frac{\rho}{4M} \left(\pi - 4 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4M^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\rho + 2M}{\rho - 2M}} \right) \right] \delta(u) \right] du^2. \quad (2.102)$$

Si ahora introducimos la nueva coordenada (discontinua solamente en $u = 0$) $d\tilde{v} = dv - 4pdu/|u|$ tenemos:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_S^2 = -dud\tilde{v} + dx^2 + dy^2 - 4p \left[\ln \rho^2 - \frac{\rho}{4M} \left(\pi - 4\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4M^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\rho + 2M}{\rho - 2M}} \right) \right] \delta(u) du^2. \quad (2.103)$$

En general tenemos que para una métrica con la forma:

$$ds^2 = -dudv + dx^2 + dy^2 - A(\rho)\delta(u)du^2 \quad (2.104)$$

describe un espacio-tiempo con dos mitades, una correspondiente a $u > 0$ y la otra a $u < 0$. El tensor de curvatura asociado a esta métrica se anula en todo el espacio-tiempo salvo en la superficie $u = 0$, donde aparecen componentes no nulas con términos con singularidades tipo $\delta(u)$. Suele denominarse a estas métricas “ondas gravitacionales de choque”.

Claramente, la métrica dada por la ecuación (2.103) tiene la forma requerida y la denominaremos onda gravitacional de choque para la métrica de Schwarzschild. Donde hemos realizado la asociación $A(\rho) = 4p \left[\ln \rho^2 - \frac{\rho}{4M} \left(\pi - 4\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4M^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\rho + 2M}{\rho - 2M}} \right) \right]$.

Estudiemos geodésicas en este tipo de métricas, ya que las mismas son relevantes al de buscar efectos posibles de medir producidos por la onda gravitacional de choque.

El primer paso será introducir un nuevo cambio de variables dado por $x = \rho \cos \phi$ y $y = \rho \sin \phi$. Con él la métrica (2.104) toma la forma:

$$ds^2 = -dudv + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 - A(\rho)\delta(u)du^2. \quad (2.105)$$

Las geodésicas nulas que se derivan de la misma deben satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{u} = 0 \quad (2.106)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\rho^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (2.107)$$

$$\frac{d}{d\lambda}[\dot{v} + 2A(\rho)\dot{u}^2\delta(u)] = 0 \quad (2.108)$$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}A'(\rho)\dot{u}^2\delta(u) = 0 \quad (2.109)$$

donde estamos denotando con prima a la derivación respecto de ρ y con punto a la derivación respecto al parámetro afín λ .

Es claro de (2.107) que podemos poner, sin pérdida de generalidad, $u = \lambda$. Así obtenemos de (2.109) que $v = -2A(\rho)]_{\rho=\rho_0} H(u)$, donde ρ_0 es el valor que toma ρ sobre la superficie $u = 0$. Luego el salto Δv que sufre la geodésica v al cruzar la superficie $u = 0$ está dado por:

$$\Delta v = -2A(\rho)]_{\rho=\rho_0}. \quad (2.110)$$

La ecuación (2.108) representa la conservación del momento angular, así tendremos $\rho^2 \dot{\phi} = cte \equiv L$. La ecuación (2.109) toma la forma:

$$\ddot{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3} + \frac{1}{2}A'(\rho)\delta(u) = 0. \quad (2.111)$$

Sin el último término, la ecuación (2.111) daría como resultado geodésicas rectas. Como estamos interesados en describir el comportamiento de las geodésicas al cruzar el frente de la onda de choque que se encuentra ubicado en $u = 0$, podemos despreciar el segundo término de la ecuación (2.111). Luego de realizar una integración obtenemos:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2}A'(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}H(u), \quad (2.112)$$

y, por lo tanto, el ángulo de refracción $\Delta\phi$ está dado por:

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{1}{2}A'(\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (2.113)$$

Volvamos a estudiar la métrica (2.103). Consideremos el caso en el que nos encontramos lejos de la fuente, es decir $\rho \gg 2M$, en este límite la misma se vuelve:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_S^2 \xrightarrow{\rho \gg 2M} -dud\tilde{v} + dx^2 + dy^2 - 4p \left[\ln \rho^2 + 1 - \frac{\pi M}{2\rho} + \frac{4M^2}{3\rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^3}{\rho^3}\right) \right] \delta(u)du^2 \quad (2.114)$$

Si además realizamos el límite $M \rightarrow 0$ junto con un reescalo de las coordenadas la expresión anterior coincide con la obtenida por Aichelburg y Sexl (AS) [12]. En estas condiciones vemos que, mientras la solución (2.103) es correcta para todo el espacio-tiempo, la solución (AS) representa correctamente al espacio-tiempo solamente lejos de la fuente.

2.3.2. El Agujero Negro de Kerr

El éxito del estudio realizado para el caso del agujero negro de Schwarzschild nos motiva a intentar un estudio similar para el caso del agujero negro de Kerr. Dicho análisis puede hacerse describiendo a la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (descartando del estudio el caso superextremo $M^2 < a^2$). El intervalo de Kerr, expresado en estas coordenadas y realizando la separación en un término Minkowskiano y otras contribuciones, adquiere la forma:

$$ds_K^2 = ds_M^2 + \Delta s_{tt}^2 + \Delta s_{t\phi}^2 + \Delta s_{rr}^2 + \Delta s_{\theta\theta}^2 + \Delta s_{\phi\phi}^2 \quad (2.115)$$

donde:

$$\Delta s_{tt}^2 = \frac{2M\bar{r}}{\Sigma^2} d\bar{t}^2 \quad (2.116)$$

$$\Delta s_{t\phi}^2 = \frac{4M\bar{r}a \sin \bar{\theta}}{\Sigma^2} d\bar{t}d\bar{\phi} \quad (2.117)$$

$$\Delta s_{rr}^2 = \frac{2M\bar{r} - a^2 \sin^2 \bar{\theta}}{\Delta} d\bar{r}^2 \quad (2.118)$$

$$\Delta s_{\theta\theta}^2 = a^2 \cos^2 \bar{\theta} d\bar{\theta}^2 \quad (2.119)$$

$$\Delta s_{\phi\phi}^2 = \left[a^2 + \frac{2M\bar{r}a^2 \sin^2 \bar{\theta}}{\Sigma^2} \right] \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2 \quad (2.120)$$

Pasaremos a investigar dos tipos de boost particulares, ya que abordar el caso general ahora que hemos perdido la simetría esférica que posee la solución de Schwarzschild, es extremadamente complejo: cuando el movimiento es paralelo al eje de rotación (consideraremos que coincide con el eje z) y cuando es perpendicular.

Movimiento Paralelo al Eje de Rotación

Dado que la métrica de fondo es mucho más compleja, los cálculos involucrados al momento de hacer el boost son bastante más laboriosos, razón por la cual presentaremos una serie de resultados sin los cálculos intermedios.

Haciendo el boost de Lorentz y realizando luego el límite en el que $\gamma \rightarrow 1$ se obtiene que (2.115) adquiere la forma:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_K^2 = -dudv + dx^2 + dy^2 - 4p[\Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4]\delta(u)du^2, \quad (2.121)$$

donde ρ es la longitud en la dirección perpendicular a la dirección de movimiento, $u = t - z$ y $v = t + z$. Además, utilizamos las cantidades definidas a continuación:

$$\Delta g_1 = \ln \rho^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha} \left[\sqrt{\alpha+1} \ln \frac{\sqrt{\alpha+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{\alpha+1} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{\alpha-1} \arctan \sqrt{\frac{2}{\alpha-1}} \right], \quad (2.122)$$

$$\Delta g_2 = -\frac{2}{\beta - \xi} \left[\sqrt{\beta}(1 + \xi) \arctan \beta^{-1/2} - \sqrt{\xi}(1 + \beta) \arctan \xi^{-1/2} \right], \quad (2.123)$$

$$\Delta g_3 = \frac{\rho}{Ma^4} \left[\frac{\pi}{8} (a^4 + 2a^2\rho^2 - 8\rho^2M^2) - a^2M\rho + \frac{1}{4\sqrt{M^2 - a^2}} \left[(\eta\sqrt{\beta} - \frac{\chi}{\sqrt{\beta}}) \arctan \beta^{-1/2} - (\eta\sqrt{\xi} - \frac{\chi}{\sqrt{\xi}}) \arctan \xi^{-1/2} \right] \right], \quad (2.124)$$

$$\Delta g_4 = -\frac{\pi a^2}{32\rho M}, \quad (2.125)$$

donde:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\rho^2 - a^2 + 2\rho\sqrt{M^2 - a^2}}{\rho^2 + a^2 + 2M\rho}, \\ \xi &= \frac{\rho^2 - a^2 - 2\rho\sqrt{M^2 - a^2}}{\rho^2 + a^2 + 2M\rho}, \\ \eta &= (4\rho M^2 - a^2\rho - 2a^2M)(\rho^2 + a^2 + 2M\rho), \\ \chi &= (4\rho M^2 - a^2\rho + 2a^2M)(\rho^2 + a^2 - 2M\rho). \end{aligned}$$

En un intento por interpretar estas expresiones estudiaremos algunos casos límites. Primero veamos el caso del agujero negro extremo, es decir cuando $M \rightarrow a$. En este límite (2.121) adquiere la forma:

$$\lim_{M \rightarrow a} ds_K^2 = -dudv + dx^2 + dy^2 - 4p \left[\ln \rho^2 + 1 - \frac{\pi a}{2\rho} + \left[\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \right] \frac{a^2}{\rho^2} + \mathcal{O} \left[\frac{a^3}{\rho^3} \right] \right] \delta(u)du^2, \quad (2.126)$$

que presenta el mismo comportamiento que en el caso del agujero negro de Schwarzschild, salvo una pequeña variación de orden $\mathcal{O}(a^2/\rho^2)$, por lo que a grandes distancias no podemos distinguir un agujero negro de Kerr que se mueve en la dirección z de uno de Schwarzschild.

Movimiento Perpendicular al Eje de Rotación

Pasemos a analizar la métrica en un sistema de referencia que se mueve en forma perpendicular al eje de rotación del agujero negro de Kerr. Consideraremos que dicha dirección coincide con el eje x y que el eje de rotación coincide con el eje z . Estudiaremos únicamente puntos sobre el plano ecuatorial, es decir $\theta = \pi/2$ y $\dot{\theta} = 0$.

En este caso la métrica cambia, según la transformación de Lorentz, y toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 ds_K^2 = & -dudv + dy^2 + \left[\frac{2p}{\sqrt{u^2 + (y/\gamma)^2}} - \gamma^{-1} \frac{4May}{\sqrt{(u^2 + (y/\gamma)^2)^3}} \right. \\
 & + \frac{2pu^2}{[u^2 + (y/\gamma)^2 + (a/\gamma)^2 - 2(M/\gamma)\sqrt{u^2 + (y/\gamma)^2}]\sqrt{u^2 + (y/\gamma)^2}} \\
 & - \frac{a^2u^2}{[u^2 + (y/\gamma)^2 + (a/\gamma)^2 - 2(M/\gamma)\sqrt{u^2 + (y/\gamma)^2}](u^2 + (y/\gamma)^2)} \\
 & \left. + \frac{2pa^2y^2}{[u^2 + (y/\gamma)^2 + (a/\gamma)^2 - 2(M/\gamma)\sqrt{u^2 + (y/\gamma)^2}]\sqrt{(u^2 + (y/\gamma)^2)^3}} \right] du^2. \quad (2.127)
 \end{aligned}$$

Haciendo el límite $\gamma \rightarrow \infty$ la métrica (2.127) se vuelve:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_K^2 = -dudv + dy^2 - 4p[\delta g_1 + \delta g_2 + \delta g_3 + \delta g_4]\delta(u)du^2, \quad (2.128)$$

donde:

$$\delta g_1 = \ln |y|^2 - \frac{2}{\beta' - \xi'} [\sqrt{\beta'}(1 + \xi') \arctan \beta'^{-1/2} - \sqrt{\xi'}(1 + \beta') \arctan \xi'^{-1/2}], \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned}
 \delta g_2 = & \frac{2|y|a^2}{M[|y|(\sqrt{M^2 - a^2} + M) + a^2]} \left[\frac{1}{\beta' - 1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\beta'} \arctan \beta'^{-1/2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\xi'}{\xi' - \beta'} \left(\frac{1}{\xi'} \arctan \xi'^{-1/2} - \frac{1}{\beta'} \arctan \beta'^{-1/2} \right) \right], \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

$$\delta g_3 = \frac{2a}{y}, \quad (2.131)$$

$$\delta g_4 = -1 - \frac{y^2}{2a\sqrt{y^2 + a^2}} \ln \frac{\sqrt{y^2 + a^2} - a}{\sqrt{y^2 + a^2} + a}, \quad (2.132)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \beta' &= \frac{y^2 - a^2 + 2|y|\sqrt{M^2 - a^2}}{y^2 + a^2 + 2M|y|}, \\
 \xi' &= \frac{y^2 - a^2 - 2|y|\sqrt{M^2 - a^2}}{\rho^2 + a^2 + 2M|y|}.
 \end{aligned}$$

Algo interesante para notar es que δg_3 depende explícitamente del signo de y . Vemos que para valores de y iguales en magnitud pero con signos diferentes, tanto el salto Δv como el ángulo de

refracción serán diferentes. Este fenómeno se debe al arrastre que sufren los sistemas inerciales debido a la rotación del espacio-tiempo, ya que el término anterior proviene del término $g_{t\phi} dt d\phi$ de la métrica de Kerr asociado con la rotación.

Pasamos ahora a estudiar algunos límites interesantes de la ecuación (2.128). Primero el caso del agujero negro extremo. Es este caso obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow a} \left[\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_K^2 \right] &= -dudv + dy^2 - 4p \left[\ln |y|^2 - \frac{1}{2} + \frac{y^2 - 2a^2}{a\sqrt{y^2 - a^2}} \arctan \left(\frac{|y| + a}{|y| - a} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{|y|}{4a} \pi + \frac{2a}{y} - \frac{y^2}{2a\sqrt{y^2 + a^2}} \ln \frac{\sqrt{y^2 + a^2} - a}{\sqrt{y^2 + a^2} + a} \right] \delta(u) du^2. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Si ahora estudiamos el límite lejano, es decir $|y| \gg a$, obtenemos:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} ds_K^2 \xrightarrow{|y| \gg a} -dudv + dy^2 - 4p \left[\ln |y|^2 + 1 - \frac{3\pi}{8} \frac{a}{|y|} + 2\frac{a}{y} - \frac{4}{3} \frac{a^2}{y^2} + \mathcal{O}\left(\frac{a^3}{y^3}\right) \right] \delta(u) du^2, \quad (2.134)$$

con una leve discrepancia entre este resultado y el del caso de un agujero negro de Schwarzschild.

Capítulo 3

Conclusiones

Aprender sin reflexionar es malgastar la energía.
Confucio

La verdadera explicación sencillamente no se puede explicar.
Julio Cortazar

Los resultados que se presentaron en esta monografía tienen aplicaciones muy interesantes. Los mismos pueden utilizarse para estudiar colisiones de partículas ultra-energéticas, es decir, nos permitirían investigar la física de partículas con energías dentro del rango de la escala de Planck, donde el límite, tan utilizado, en el que $\gamma \rightarrow \infty$ es totalmente válido.

Otro escenario astrofísico donde dichos resultados pueden aplicarse son las colisiones de agujeros negros donde, si bien, las velocidades relativas no suelen ser ultrarrelativistas, podemos utilizar nuestras expresiones (exactas cuando $v = 1$) para realizar, al menos, un análisis cualitativo del proceso. En una serie de trabajos ([16], [17], [18] y [19])¹ se estudian, utilizando un tratamiento perturbativo a pesar de que no se está en el caso de campo débil², las colisiones axisimétricas de dos agujeros negros (de Schwarzschild) que se mueven uno respecto del otro a velocidades relativistas; en el caso en el que el factor γ es finito como cuando es infinito. En el mismo se asume que como resultado de dicha colisión se genera un agujero negro y radiación gravitacional. Esta radiación es emitida de modo colimada con un ángulo de apertura que es $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$ a partir de la dirección de movimiento.

Además la matemática desarrollada en la Sección (2.1.) es similar a la que se utiliza en estudios (con un, quizás, mayor potencial astrofísico) de ondas de gravedad de muy alta frecuencia donde el tensor métrico admite, para $\omega \gg 1$, un desarrollo en serie de la forma:

$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)}(x) + \frac{1}{\omega} g_{ab}^{(1)}(x; \omega\phi(x)) + \frac{1}{\omega^2} g_{ab}^{(2)}(x; \omega\phi(x)) + \dots \quad (3.1)$$

En este caso Σ juega el papel de las superficies de fase constante, el tensor b_{ab} se asocia con la amplitud de la onda gravitacional descrita por $g_{ab}^{(1)}(x; \omega\phi(x))$ y cuya variación es lenta.

¹ADVERTENCIA: La lectura de los trabajos de **D'Eath** y **Payne** pueden causarle a uno a una muerte dolorosa...

²Esto se debe a lo simple de la geometría del espacio-tiempo que representa al campo gravitatorio generado por un agujero negro cuando éste es observado desde un sistema de referencia en el que el mismo que se mueve a una velocidad cercana a la de la luz en el vacío.

Esta íntima relación entre las ondas gravitacionales de choque y las ondas de gravedad de alta frecuencia proviene en que ambas teorías se desprenden de un mismo principio variacional cambiando, de manera apropiada, la acción que se utiliza.

Los llamados *thunderbolts* [20] introducidos por Sir Roger Penrose hacia fines de la década de 1970 y estudiados también por Stephen William Hawking a principios de la década de 1990 pueden estar relacionados con las ondas de choque gravitacionales. Estas situaciones son el resultado del colapso gravitatorio generando una “onda singular” que emerge de la zona donde el colapso ocurrió y que a su paso “destruye” al espacio-tiempo. Los *thunderbolts* aparecen en estudios que involucran los efectos mecánico-cuánticos relacionados con cambios en las condiciones de contorno que reproducen ciertos aspectos de la aparición de una singularidad desnuda [21] y en estudios relacionados con la evaporación (vía radiación Hawking) de un agujero negro. Lo que se sugiere ([22] y referencias ahí mencionadas) es que como resultado final de estos procesos de evaporación debe obtenerse como resultado o bien una singularidad tipo *thunderbolt* o bien una singularidad desnuda. Así puede verse que estudios relacionados con este tópico son de gran importancia por su relación con la conjetura de censura cósmica de Penrose ³.

Una serie de estudios que podrían resultar de interés astrofísico son los relacionados con ondas gravitacionales en el régimen de campo fuerte con perfiles tipo campana de Gauss. Este tipo de ondas sí podrían ser el resultado de eventos ultra-energéticos que pueden ocurrir en el universo como ser, por ejemplo, la colisión de dos agujeros negros. Dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones de la Teoría General de la Relatividad dichos estudios, muy probablemente, no puedan realizarse de manera analítica y requieran, por lo tanto, la utilización de las complejas técnicas que involucra trabajar en el marco de la relatividad general numérica.

³En lenguaje poco técnico esta conjetura afirma que “El colapso gravitacional de materia “normal” no puede resultar en métricas que tengan singularidades desnudas”.

Apéndice A

Algunas Nociones Matemáticas

Pure mathematics is, in its way,
the poetry of logical ideas.
Albert Einstein.

- *Delta de Kronecker Generalizada*: La función delta de Kronecker multidimensional se define como:

$$\delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} = \prod_{k=1}^n \delta_{i_k j_k}. \quad (\text{A.1})$$

Dicha función toma el valor 1 si y sólo si todos los índices superiores coinciden con los correspondientes índices inferiores y 0 en caso contrario.

- *Distribución*: Una distribución, también llamada función generalizada, es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida. Una distribución (normal) sobre Υ es un elemento del espacio dual al de funciones de clase C^∞ sobre dicho conjunto. Es decir, una distribución es una función lineal y continua definida sobre un cierto espacio de funciones diferenciables definidas sobre conjuntos cerrados contenidos en Υ y cuyo soporte sea compacto. Las funciones definidas sobre el conjunto Υ recibe el nombre de espacio de funciones de prueba.
- *Función de clase C^k* : La función f se denomina de clase C^k si las derivadas f', f'', \dots, f^k existen y son continuas pero f^{k+1} no.
- *Hipersuperficie*: Sea una variedad \mathcal{M} de dimensión n , se llama hipersuperficie a toda subvariedad de \mathcal{M} cuya dimensión sea $n - 1$. Luego una hipersuperficie es un objeto topológico que generaliza a una superficie dimensional. El caso más simple de hipersuperficies son las 3-variedades contenidas en un espacio de dimensión 4.
- *Soporte de una función*: Es el conjunto de puntos donde la función no es nula. Diremos que una función f cuyo dominio es el conjunto X tiene “soporte finito” si se cumple que $f(x) \neq 0$ solamente para un número finito de puntos de X .
- *Tensor (0, 2) no degenerado*: Una función bilineal es no degenerada si para todo vector V_P no nulo del espacio tangente en el punto P la función definida (para un V_P fijo) como:

$$F_P \rightarrow g_P(V_P, W_P), \quad (\text{A.2})$$

no es idénticamente nula. De otra manera, dado el vector V_P no nulo siempre existe un vector W_P tal que $g_P(V_P, W_P) \neq 0$.

- *Formalismo de Tetradas:* En el formalismo de tetradas, uno elige en cada punto del espacio-tiempo un conjunto de 4 campos vectoriales linealmente independientes $\{e_{(a)}^\nu\}_{a=1\dots 4}$: la tetrada. Todo tensor de la teoría puede ser expresado en esta base vectorial proyectándolo sobre cada miembro de la tetrada. La ventaja que posee este formalismo contra los enfoques más clásicos de la Relatividad General radica en el hecho de que uno tiene la libertad de elegir la tetrada de modo que la misma refleje aspectos relevantes del espacio-tiempo que se encuentra bajo estudio. Entre las tetradas más utilizadas se encuentran las tetradas nulas (tetradas cuyos vectores son vectores nulos, dos reales y dos complejos conjugados) y, particularmente, la de Newman-Penrose.

Apéndice B

Clasificación de Petrov

‘What’s the use of their having names the Gnat said,
‘if they won’t answer to them?’
‘No use to them,’ said Alice; ‘but it’s useful to the people who name them, I suppose.
If not, why do things have names at all?’
‘I can’t say,’ the Gnat replied.
“Through the Looking Glass (And What Alice Found There)”.
Lewis Carroll.

Antes de dar los lineamientos generales de la clasificación de Petrov, resulta importante definir y caracterizar al tensor de Weyl C_{abcd} , ya que solamente hemos dado una expresión del mismo en (1.7). Este tensor posee todas las simetrías del tensor de Riemann y cumple con la condición extra de tener traza nula.

Al igual que el tensor de curvatura, el de Weyl da información sobre las fuerzas de marea que actúan sobre un cuerpo que se mueve a través del espacio-tiempo a lo largo de una geodésica. Pero una diferencia radical es que este tensor no contiene información sobre la manera en que cambia el volumen del cuerpo, sino de cómo las fuerzas de marea cambian su forma.

Una propiedad importante del tensor de Weyl C_{bcd}^a (y no del definido en (1.7)) es que el mismo resulta invariante frente a transformaciones conformes de la métrica. Así, si hacemos

$$g \rightarrow g' = fg, \quad (\text{B.1})$$

para alguna función escalar definida positiva f tenemos que:

$$C \rightarrow C' = C \quad (\text{B.2})$$

donde estamos denotando con C al tensor de Weyl (1,3).

Siempre podemos pensar al tensor de Weyl (o cualquier tensor de rango 4) en un dado punto del espacio-tiempo como si fuese un operador lineal actuando en un cierto espacio vectorial.

$$S^{ab} \rightarrow \frac{1}{2} C_{ed}^{ab} S^{ed}. \quad (\text{B.3})$$

Es por este motivo que resulta atractivo el problema de encontrar autovalores y autovectores (o, en este caso autobivectores) que cumplan:

$$\frac{1}{2} C_{ed}^{ab} S^{ed} = \Omega S^{ed}. \quad (\text{B.4})$$

Del mismo modo que para operadores lineales los autobivectores del tensor de Weyl pueden tener diferentes multiplicidades. Las posibles multiplicidades indican algún tipo de simetría del tensor en ese dado evento del espacio-tiempo. La clasificación de Petrov se basa en las diferentes multiplicidades de los distintos autobivectores (asociados con las llamadas direcciones principales nulas en dicho evento). Existen 6 tipos de Petrov diferentes, a saber:

- Tipo I: 4 direcciones principales nulas simples.
- Tipo II: 2 direcciones principales nulas simples y una doble.
- Tipo D: 2 pares de direcciones principales nulas dobles.
- Tipo III: 1 dirección principal nula de multiplicidad 3 y otra simple.
- Tipo N: 1 dirección principal nula de multiplicidad 4.
- Tipo 0: El tensor de Weyl se anula.

Daremos a continuación una breve interpretación de alguno de estos tipos.

Métricas pertenecientes al tipo D en la clasificación de Petrov, corresponden a las asociadas a campos gravitacionales generados por objetos completamente caracterizados por su masa y su momento angular. Así, todas las soluciones de vacío de agujeros negros pertenecen a este tipo.

Métricas pertenecientes al tipo N están asociadas con radiación gravitacional transversal a la dirección del vector de onda (coincidente con la dirección principal nula 4 veces degenerada que caracteriza a este tipo de soluciones).

Métricas del tipo O no tienen ninguna dirección principal nula. Es decir, no hay una dirección privilegiada. Es por esto que modelos cosmológicos como el de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker pertenecen a este tipo.

Bibliografía

I find television very educating.
Every time somebody turns on the set,
I go into the other room and read a book.
Groucho Marx

Only your friends steal your books.
Voltaire

- [1] P. Hájíček, F. Meyer and J. Metzger “*An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation, Lecture Notes on Physics 750.*” Springer, Berlin Heidelberg; (2008).
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A Wheeler “*Gravitation*” W. H. Freeman; 2nd Printing edition (1973).
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz “*Course of Theoretical Physics Volume 6: Fluid Mechanics. Second Edition.*” Butterworth-Heinemann (1987).
- [4] M.S. Longair “*High Energy Astrophysics. Volume 1. Particles, Photons and Their Detection. Second Edition.*” Cambridge University Press (2004).
- [5] Ya.B. Zel’dovich and Yu.P. Raizer “*Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena.*” Dover Publications (2002).
- [6] S.G. Turyshev, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **58**, 207 (2008). arXiv:0806.1731.
- [7] R.A. Brune, Jr., C.L. Cobb, B.S Dewitt, C. Dewitt-Morette, D.S. Evans, J.E. Floyd, B.F. Jones, R.V. Lazenby, M. Marin, R.A. Matzner, A.H. Mikesell, M.R. Mikesell, R.I. Mitchell, M.P. Ryan, H.J. Smith, A. Sy and C.D. Thompson, Astron. J. **81**, 452, (1976). Última expedición a un eclipse solar total que publicó resultados.
- [8] R.V. Pound and G.A. Rebka, Jr, Phys. Rev. Lett. **3**, 439 (1959); R.V. Pound and J.L. Snider, Phys. Rev. Lett. **13**, 539 (1964).
- [9] R.A. Hulse, Review of Modern Physics, **66**, 3, 699-710 (1994).
- [10] D. Chistoudoulou and S. Klainerman, “*The Global Nonlinear Stability of Minkowski Spacetime*”, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993).
- [11] A.H. Taub, J. Math. Phys. **21** (6), 1423 (1980).

- [12] P.C. Aichelburg and R.U. Sexl, *Gen. Rel. and Grav.*, **2**, 4, 303 (1971).
- [13] T. Dray and G. t'Hooft, *Nucl. Phys. B*, **253**, 173 (1985).
- [14] R. Penrose en "*Battelle Rencontres*", ed. C.M. De Witt and J.A. Wheeler, Benjamin, New York, (1968).
- [15] K. Hayashi and T. Samura, *Phys. Rev. D*, **50**, 6, 3666 (1994).
- [16] P.D. D'Eath, *Phys. Rev. D*, **18**, 4, 990 (1978).
- [17] P.D. D'Eath and P.N. Payne, *Phys. Rev. D*, **46**, 2, 658 (1992).
- [18] P.D. D'Eath and P.N. Payne, *Phys. Rev. D*, **46**, 2, 675 (1992).
- [19] P.D. D'Eath and P.N. Payne, *Phys. Rev. D*, **46**, 2, 694 (1992).
- [20] R. Penrose en "*Black Holes and Relativistic Stars*", ed. R.M. Wald, Chicago University Press, Chicago, (1998).
- [21] S.W. Hawking and J.M. Stewart, *Nucl. Phys. B*, Volume **400**, Issue 1-3, p. 393-415, (1993). arXiv:hep-th/9207105v1. A. Ishibashi and A. Hosoya, *Phys. Rev. D* **66**, 104016, (2002), arXiv:gr-qc/0207054v2.
- [22] J. Earman "*Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*", Oxford University Press, Oxford, (1995).